АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Сибирское отделение

Редколлегия "Сибирского математического журнала"

№ 3893 - 80 ДЕП.

УДК 518.5

Б.С.Байжанов

ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТЕОРИИ РАНГА 2, ИМЕЮЩИЕ РАЗМЕРНОСТЬ

Новосибирск - 1980

В работе (I) А.Лахлан изучает тотально трансцендентные теории ранга 2 степени I. Доказывает, что они имеют размерность и описывает спектр этих теорий, приводит пример теории ранга 2 степени 2, не имеющей размерности. В данной работе выделен класс теорий ранга 2, имеющей размерность, описан спектр этих теорий.

Понятия, обозначения и термины не определяемые в данной работе взяты из работы Лахлана (I). В данной работе буква T будет обозначать счетную полную, тотально трансцендентную теорию, буквы M , N - модели теории T .

Следуя Шелаху (2) мы будем полагать, что все рассматриваемые модели являются элементарными подмоделями некоторой насыщенной модели N , достаточно большой мощности. Поэтому истинность предложения $\models \varphi$, если не оговорено в какой модели, будет пониматься как истинность в модели $N \models \varphi$. Локально совместное множество формул с одной свободной переменной называется 1 -типом и обозначается буквами p , q . Максимальное локально совместное множество формул называется полным типом. Множество всех типов языка $L(N) = L \cup \{c_a / a \in N\}$ обозначим через $S_1(N)$.

Определим отображения $r: S_1(N) \to On$, $d: S_1(N) \to \omega$ следующим образом:

$r(p) \geq \alpha+1 \Leftrightarrow$ существует счетная последовательность попарно несовместных формул $\varphi_i(x,\bar{a}_i)$, что $\forall i < \omega$ $(r(p \cup \{\varphi_i(x,\bar{a}_i)\}) \geq \alpha)$; $d(p)$ - наибольшее число $n < \omega$ такое, что существуют n -попарно несовместных формул $\psi_0(x,\bar{b}_0), \dots, \psi_{n-1}(x,\bar{b}_{n-1})$ $(r(p \cup \{\psi(x,\bar{b}_i)\}) = r(p),\ i < n)$.

Нам понадобятся следующие леммы (3) (4).

Лемма А. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ формула языка L, $l(\bar{y})=m$; p – полный m – тип. Тогда существует формула $\varphi'(x,\bar{y})$ обладающая следующими свойствами

I) Для любых $\bar{b}_0, \bar{b}_1$ таких, что $p(\bar{b}_0)$, $p(\bar{b}_1)$. Из $r(\varphi(x,\bar{b}_0)) = r(\varphi(x,\bar{b}_0)\wedge\varphi(x,\bar{b}_1))$, $d(\varphi(x,\bar{b}_0)) = d(\varphi(x,\bar{b}_0)\wedge\varphi(x,\bar{b}_1)) \Longrightarrow \models \forall x[\varphi'(x,\bar{b}_0)\leftrightarrow \varphi'(x,\bar{b}_1)]$, $r(\varphi(x,\bar{b}_0)) = r(\varphi'(x,\bar{b}_0)) = r(\varphi(x,\bar{b}_0)\wedge\varphi'(x,\bar{b}_0))$, $d(\varphi(x,\bar{b}_0)) = d(\varphi'(x,\bar{b}_0)) = d(\varphi(x,\bar{b}_0)\wedge\varphi'(x,\bar{b}_0))$.

2) Для любого $\bar{b}_1[p(\bar{b}_1) \Longrightarrow$ формула $\varphi'(x,\bar{b}_1)$ эквивалентна положительной булевой комбинации формул $\varphi(x)$ вида $\varphi(x,\bar{b})$, где $\bar{b}$ реализует тип $p]$.

.

Говорят, что формула $\varphi'(x,\bar{y})$ получена нормализацией формулы $\varphi(x,\bar{y})$ по отношению к типу p .

Лемма Б. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ формула, $\bar{b}=\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ Для каждой формулы $\psi(x,\bar{z})$ существует формула $\theta(\bar{y},\bar{z})$ такая, что $\forall\bar{c}[\; r(\varphi(x,\bar{b})\wedge\psi(x,\bar{c})) < r(\varphi(x,\bar{b})) \Longleftrightarrow \models\theta(\bar{c},\bar{b})]$

Лемма В. Пусть $r(\varphi(x,\bar{b}))=1$. Для каждой формулы $\theta(x,\bar{y})$ существует $m<\omega$, что $\forall\bar{c}[\models\exists^{\geq m}x(\varphi(x,\bar{b})\wedge\theta(x,\bar{c})) \Rightarrow r(\varphi(x,\bar{b})\wedge\theta(x,\bar{c}))=1]$

<u>Определение I.</u> Множество $A\subset M\models T$ называется независимым, если для всех различных $a,\bar{b}\in A$, для любой формулы $\varphi(x,\bar{y})[M\models\varphi(a,\bar{b}) \Longrightarrow r(\varphi(x,\bar{b})) = r(x=x)]$

<u>Определение 2</u>. Модель M имеет размерность если все максимальные независимые множества имеют одинаковую мощность.

Определение 3. Теория T имеет размерность, если все ее модели имеют размерность.

Определение 4. Пусть $\theta(x,\bar{c})$, $r(\theta(x,\bar{c}))>0$, $d(\theta(x,\bar{c}))=1$, формула $\psi(x,\bar{y})$ разлагает формулу $\theta(x,\bar{c})$, если

1) для любого $\bar{b}\,[\,r(\psi(x,\bar{b})\wedge\theta(x,\bar{c}))<r(\theta(x,\bar{c}))\,]$

2) $\forall\alpha<r(\theta(x,\bar{c})),\ \forall n<\omega,\ \exists\bar{b}_0,\ldots,\bar{b}_{n-1},\ \forall j<n$ $r(\psi(x,\bar{b}_j)\wedge\bigwedge_{i<j}\neg\psi(x,\bar{b}_i)\wedge\theta(x,\bar{c}))\geq\alpha$

Определение 5. Пусть $\theta(x,\bar{c})$ – формула $r(\theta(x,\bar{c}))>0$, $d(\theta(x,\bar{c}))=1$. Формула $\theta(x,\bar{c})$ – неразложима, если не существует ее разлагающей формулы.

В противном случае $\theta(x,\bar{c})$ – разложима.

Определение 6. Теория T неразложима, если для любой формулы $\theta(x,\bar{c})$ из $r(\theta(x,\bar{c}))=r(x=x)$, $d(\theta)=1$ следует неразложимость $\theta(x,\bar{c})$.

Определение 7. Рангом элемента a над множеством A будем называть ранг полного 1-типа $p\in S_1(A)$, $p=\{\psi(x,\bar{c})\,/\,\models\psi(a,\bar{c}),\ \bar{c}\in A\}$ и означать r (a,A). Ранг Морли элемента a над множеством A определяется следующим образом $r^M(a,A)=\min\{\,r(\psi(x,\bar{c}))\,/\,\models\psi(a,\bar{c}),\ \bar{c}\in A\}$.

Лемма I. Пусть T неразложимая, тотально трансцендентная теория $r(x=x)=\alpha+1$. Тогда для любого $A\neq\emptyset$ и любого элемента a, из $r(a)=\alpha+1$ следует $r^M(a,A)\neq\alpha$.

Доказательство: допустим существует формула $\psi(x,\bar{c})$ $r(\psi(x,\bar{c}))=\alpha$, $\models\psi(a,\bar{c})$, $\bar{c}\in A$. В лемме Б положим $x=x$ вместо $\varphi(x,\bar{y})$. Тогда для формулы $\psi(x,\bar{z})$ существует $\theta_1(\bar{z})$, что $\forall\bar{y}\,[\,r(\psi(x,\bar{y}))<\alpha+1\Leftrightarrow\ \models\theta_1(\bar{y})\,]$. Положим

$\psi'(x,\bar z)=\psi(x,\bar z)\wedge\theta_1(\bar z)$. Пусть p полный тип над $\emptyset$ реализующиеся в $\bar c$. Применим лемму А к формуле $\psi'(x,\bar z)$ и типу p . Получим формулу $\psi_1(x,\bar z)$ такую: если $\bar c_1$ и $\bar c_2$ реализуют тип p и $r(\psi'(x,\bar c_1)\wedge\psi'(x,\bar c_2))=\alpha=r(\psi'(x,\bar c_1)), d(\psi'(x,\bar c_1)\wedge\psi'(x,\bar c_2))=$

$d(\psi'(x,\bar c_1))$, то $\models\forall x[\psi_1(x,\bar c_1)\leftrightarrow\psi_1(x,\bar c_2)]$.

Покажем, что в p найдется формула $\theta_2(\bar z)$, что $\exists m<\omega$, $\exists\bar c_0,\dots,\bar c_{m-1}$, $\forall\bar c[\models\theta_2(\bar c)\Longrightarrow\models\bigvee_{i=0}^{m-1}[\forall x(\psi_1(x,\bar c)\leftrightarrow\psi_1(x,\bar c_i))]]$

Пусть $\bar c_0,\bar c_1,\dots,\bar c_{m-1}$ последовательности элементов реализующих тип p , что для любого $\bar c$ реализующего тип p следует $\models\bigvee_{i=0}^{m-1}[\forall x[\psi_1(x,\bar c)\leftrightarrow\psi_1(x,\bar c_i)]]$ (I). Существование таких $\bar c_0,\dots,\bar c_{m-1}$ следует из неразложимости T . Если такой формулы $\theta_2(\bar z)$ нет, то локально совместно следующее множество формул

$$p(\bar z)\cup\{\neg(\bigvee_{i=0}^{m-1}\forall x[\psi_1(x,\bar z)\leftrightarrow\psi_1(x,\bar c_i)])\}.$$

Но это противоречит (I). Обозначим через $\varphi(x)$ формулу $\exists\bar z(\psi_1(x,\bar z)\wedge\theta_2(\bar z))$. Из определения формулы $\theta_2(\bar z)$ следует $r(\varphi(x))=\alpha$. Следовательно, $\models\neg\varphi(a)$. Рассмотрим формулу $\neg\varphi(x)\wedge\psi(x,\bar c)$. Из определения формулы $\varphi(x)$ следует $r(\neg\varphi(x)\wedge\psi(x,\bar c))<\alpha$, $\models\neg\varphi(a)\wedge\psi(a,\bar c)$. Отсюда следует справедливость леммы.

<u>Определение 8.</u> Алгебраическим замыканием множества A будем называть следующее множество $cl(A)=\{g\in\mathcal{N}/$ существует формула $\varphi(x,\bar a),\bar a\in A,\exists n<\omega,\models\exists^{\le n}x\,\varphi(x,\bar a)\wedge\varphi(g,\bar a)\}$.

Л е м м а 2. П у с т ь T н е р а з л о ж и м а я, т о т а л ь н о т р а н с ц е н д е н т н а я т е о р и я, р а н г а 2, с т е п е н и n , и э л е м е н т ы a,b , м н о ж е с т в о A – т а к и е, ч т о $r(a,A)=r(b,A)=r(x=x)$,

$a \in cl(A \cup \{b\})$. Тогда $b \in cl(A \cup \{a\})$.

Доказательство: так как $a \in cl(A \cup \{b\})$, существует $m < \omega$, $\varphi(x, b, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$, $\vDash \exists^{<m} x\, \varphi(x, b, \bar{c}) \wedge \varphi(a, b, \bar{c}) \wedge \forall y \exists^{<m} x\, \varphi(x, y, \bar{c})$.

Если $b \notin cl(A \cup \{a\})$, то из доказательства леммы 2 следует $r(\varphi(a, y, \bar{c})) = 2$. Из того, что $r(a, A) = 2$ следует $r(\exists y \varphi(y, x)) = 2$. Выберем $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, m \cdot n\}$ таких, что $\vDash \exists y \bigwedge_{i=i_1}^{i_m} \varphi(a_i, y, \bar{c})$. Выберем $a_1, a_2, \ldots, a_{m \cdot n}$ со следующим свойством $r(\varphi(a_i, y)) = 2$, $i \le m \cdot n$. Следовательно найдется $b_1 \in N$, что $\vDash \bigwedge_{i=i_1}^{i_m} \varphi(a_i, b_1, \bar{c})$, что противоречит выбору формулы $\varphi(x, y, \bar{c})$.

•

<u>Определение 8.</u> Каждое максимальное независимое множество в M назовем базисом в M.

Лемма 3. Пусть T - неразложимая тотально трансцендентная теория ранга 2 степени n. Если $\{a_1, \ldots, a_m\}$ - базис модели M, $\{b_1, \ldots, b_k\}$, $k < m$ независимое множество модели M, тогда существует $b_{k+1} \in M$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$ - независимое множество.

Доказательство: предположим противное. Пусть $\{b_1, \ldots, b_k\}$ - базис. Тогда для элемента a_1 существует формула $\varphi(x, b_1, \ldots b_t)$ $t \le k$, что $\vDash \varphi(a_1, b_1, \ldots, b_t) \wedge \exists^{<m} x\, \varphi(x, b_1, \ldots, b_t) \wedge \forall y \exists^{<m} x\, \varphi(x, y, b_2, \ldots, b_t)$, $r(\exists x \varphi(x, y, b_2, \ldots, b_t)) = 2$. В противном случае $\{b_2, \ldots, b_t\}$ - зависимо. Из выбора формулы φ и доказательства леммы I $r(\exists y\, \varphi(x, y, b_2, \ldots, b_t)) = 2$. Таким образом $\{a_1, b_2, \ldots, b_t\}$ - независимое множество. Легко понять, что $\{a_1, b_2, \ldots, b_t, b_{t+1}, \ldots, b_k\}$ независимое мно-

жество, а ввиду леммы 2 базис. Проделывая это для k элементов из базиса $\{a_1,\dots,a_m\}$ получим, что $\{a_1,\dots,a_k\}$ базис. Противоречие.

Т е о р е м а I. В с я к а я, н е р а з л о ж и м а я т о т а л ь н о т р а н с ц е н д е н т н а я т е о р и я р а н г а 2, с т е п е н и n и м е е т р а з м е р н о с т ь.

Доказательство: следует из леммы 3 для моделей имеющих хотя бы один конечный базис, и для бесконечного базиса из теоремы Шелаха ([2]. Теорема 5.9).

Л е м м а 4. П у с т ь T н е р а з л о ж и м а я, т о т а л ь н о т р а н с ц е н д е н т н а я т е о р и я р а н г а 2, с т е п е н и n . Т о г д а д л я л ю б о й ф о р м у л ы $\varphi(x,\bar{y})$ и полного типа p таких, что $\forall \bar{b}\,[p(\bar{b}) \Rightarrow r(\varphi(x,\bar{b}))=1]$ с у щ е с т в у е т ф о р м у л а $\phi(x)$ н е с о д е р ж а щ а я к о н с т а н т и у д о в л е т в о р я ю щ а я у с л о в и ю $\forall \bar{b}\,[p(\bar{b}) \Rightarrow r(\varphi(x,\bar{b}) \wedge \phi(x)) = r(\phi(x)) = 1,\ r(\varphi(x,\bar{b}) \wedge \neg\phi(x)) < 1$.

Доказательство: Положим $\varphi(x,\bar{y})$ и p такие, что $\forall \bar{b}\,[p(\bar{b}) \Rightarrow r(\varphi(x,\bar{b})) = d(\varphi(x,\bar{b})) = 1]$. Пусть $\varphi_1(x,\bar{y})$ получена нормализацией формулы $\varphi(x,\bar{y})$ по отношению к типу p . Из леммы В и нормальности формулы $\varphi_1(x,\bar{y})$ можно получить следующее утверждение:

$\boxed{1}$ $\exists m < \omega$, что если $p(\bar{b}_1), p(\bar{b}_2)$ и $\models \exists^{\geq m} x\,(\varphi_1(x,\bar{b}_1) \wedge \varphi_1(x,\bar{b}_2))$, то $\models \forall x\,[\varphi_1(x,\bar{b}_1) \leftrightarrow \varphi_1(x,\bar{b}_2)]$.

Существует формула $\theta_1(\bar{y}) \in p$, что $\models \forall \bar{y}_1,\bar{y}_2\,[\theta_1(\bar{y}_1) \wedge \theta_1(\bar{y}_2) \wedge \exists^{\geq m} x\,(\varphi_1(x,\bar{y}_1) \wedge \varphi_1(x,\bar{y}_2)) \to \forall x\,(\varphi_1(x,\bar{y}_1) \leftrightarrow \varphi_1(x,\bar{y}_2))]$.

Из несуществования такого $\theta_1(\bar{y})$ следует совместность следующего множества формул $p(\bar{y}_1) \cup p(\bar{y}_2) \cup \{\exists^{\geq m} x(\varphi_1(x,\bar{y}_1) \wedge \varphi_1(x,\bar{y}_2))\} \cup \{\neg(\forall x(\varphi_1(x,\bar{y}_1) \leftrightarrow \varphi_1(x,\bar{y}_2)))\}$. По теореме компактности А.И.Мальцева ([5]) существуют $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ реализующие тир p и удовлетворяющие следующим соотношением,

$$\models \exists^{\geq m} x(\varphi_1(x,\bar{b}_1) \wedge \varphi_1(x,\bar{b}_2)) \wedge \neg(\forall x(\varphi_1(x,\bar{b}_1) \leftrightarrow \varphi_1(x,\bar{b}_2))).$$

Пусть $\theta_2(\bar{y})$ формула полученная применением леммы Б к формулам $x=x$ и $\varphi_1(x,\bar{y})$. Обозначим формулу $\varphi_1(x,\bar{y}) \wedge \theta_1(\bar{y})$ через $\varphi_2(x,\bar{y})$. Так как $\theta_1(\bar{y})$ и $\theta_2(\bar{y})$ принадлежит p, то

1) формула $\varphi_2(x,\bar{y})$ нормальна по отношению к типу p

2) $\forall \bar{b}_0, \bar{b}_1$. Если $\models \exists^{\geq m} x(\varphi_1(x,\bar{b}_0) \wedge \varphi_1(x,\bar{b}_1))$, то $\models \forall x[\varphi_2(x,\bar{b}_0) \leftrightarrow \varphi_2(x,\bar{b}_1)]$.

3) Если $\bar{b}$ реализует p, то $\models \forall x[\varphi_1(x,\bar{b}) \leftrightarrow \varphi_2(x,\bar{b})]$.

Из неразложимости T и доказательства леммы I следует существование формулы $\phi(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{k} \varphi_2(x,\bar{c}_i)$, где $\bar{c}_i$ реализуют тип p. Возьмем произвольное $\bar{b}$ реализующее тип p. Из того, что $r(\varphi(x,\bar{b}) \wedge \varphi_1(x,\bar{b})) = 1$ и формула $\varphi_1(x,\bar{b})$ эквивалентна формуле $\varphi_1(x,\bar{c}_i)$, $r(\varphi_1(x,\bar{b}) \wedge \phi(x)) = 1$. Что доказывает лемму в случае $d(\varphi(x,\bar{b})) = 1$. В случае $d(\varphi(x,\bar{b})) = n \neq 1$ нужно разбить формулу на n -несовместных формул ранга I, степени I. Для каждой такой формулы найдем соответствующую формулу $\phi_i(x)$ без констант. Дизъюнкция этих формул и будет искомой.

С этого места и до конца доказательства теоремы 2 будем полагать, что T -счетная, неразложимая, тотально трансцендентная теория ранга 2, степени n. Пусть M счетная насыщенная модель. Тогда $B = \{\varphi_i(x,\bar{a}_i) / r(\varphi_i(x,\bar{a}_i)) = 1, \bar{a}_i \in M\}$

перечисление всех формул ранга I языка $\mathcal{L} \cup \{c_a / a \in M\}$.
Применив к множеству формул $\mathcal{B}$ лемму 4 получим перечисление всех формул без констант ранга I $B_1 = \{\phi_i(x) / \tau(\varphi_i(x,\bar{a}_i) \wedge \phi_i(x)) = 1, \tau(\neg\varphi_i(x,\bar{a}_i) \wedge \phi_i(x)) \leq 0, i<\omega\}$. На множестве B_1 введем отношение $\sim$: $\phi_i(x) \sim \phi_j(x) \iff$
$\tau((\phi_i(x) \wedge \neg\phi_j(x)) \vee (\phi_j(x) \wedge \neg\phi_i(x))) \leq 0$.
Очевидно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Класс эквивалентности $\phi_i(x)/_\sim$ назовем минимальным, если не существует $t, j<\omega$, что $\tau(\phi_i(x) \wedge \phi_t(x)) = \tau(\phi_i(x) \wedge \phi_t(x)) = 1$, $\tau(\phi_t(x) \wedge \varphi_j(x)) \leq 0$. Пусть $B_2 \subset B_1/_\sim$ множество всех минимальных классов эквивалентностей. Тогда $\mathcal{D} = \{\varphi_j(x) / j<\omega\}$ – множество представителей классов эквивалентностей из B_2.
Из определения теории T следует I) $|\mathcal{D}| = \omega$
2) Для любой формулы $\psi(x)\ [\tau(\psi(x)) = 1 \Rightarrow \exists i<\omega$
$(\tau(\psi(x) \wedge \bigvee_{j<i} \varphi_j(x)) = 1)]$.
Пусть $p, p_1, \ldots, p_i, \ldots\ i<\omega$ следующим образом введенные типы $p = \{\neg\varphi_i(x) / i<\omega\}$, $p_i = \{\varphi_i(x)\} \cup \{\neg\varphi_j(x) / i \neq j<\omega\}$, $i<\omega$

<u>Определение 9.</u> Тип q ранга I называется **н е с в я з н ы м**, если для любого множества элементов $A \cup \{a\}$ реализующих тип q, из того что $a \in cl(A)$ следует существование $a' \in A$ такого, что $a \in cl(\{a'\})$.

Т е м м а 5. Тип p – н е с в я з н ы й.

Доказательство: Пусть $A \cup \{a\} \subset \bigcup_{i<\omega} \neg\varphi_i(M)$,
$B \subset \bigcup_{i<\omega} \varphi_i(M)$.

Докажем (I) $[a \in cl(A \cup B) \Rightarrow a \in cl(A)]$.

По определению $a \in cl(A \cup B)$ означает $\exists \bar{a} \in A, \exists b, \bar{b} \in B, \exists m, i<\omega$ существует формула $\varphi(x,y,\bar{x},\bar{y})$, что
$\models \varphi(a,b,\bar{a},\bar{b}) \wedge \forall y \forall \bar{x} \forall \bar{y} \exists^{<m} x\ \varphi(x,y,\bar{x},\bar{y}) \wedge \varphi_i(b)$.

(4). $^{i}(p), i<n)$

Пусть $a \notin cl(A \cup Rng\,\bar{b})$ (2). Формула $\exists y(\varphi(x,y,\bar{b},\bar{a}) \wedge \varphi_i(y))$ имеет ранг I, так как $\varphi_i(y)$ имеет ранг I. Из выбора формул $\varphi_i(y)$ следует существование $t < \omega$, что $r(\exists y(\varphi(x,y) \wedge \varphi_i(y) \wedge \neg(\bigvee_{j<t} \varphi_j(y))) \leq 0$

Но тогда $a \in cl(A \cup Rng\,\bar{b})$ - противоречие с предположением (2). Приступим к доказательству леммы. Предположим противное: (3) пусть существуют $a_1, a_2, \bar{a} \in A$ $n<\omega$, $\varphi(x,y,z,\bar{x})$ такие, что $a \notin cl(\{a_1\} \cup Rng\,\bar{a}) \cup cl(\{a_2\} \cup Rng\,\bar{a})$ и множество $\{a_1, a_2\} \cup Rng\,\bar{a}$ -независимо, $\models \varphi(a,a_1,a_2,\bar{a}) \wedge \forall x_1 \forall y_1 \forall z \forall \bar{x}$ $[\exists^{\leq m} x \varphi(x,y_1,z,\bar{x}) \wedge \exists^{<m} y \varphi(x,y,z,\bar{x})]$.

Если ранг формулы $\exists z\, \varphi(a,y,z,\bar{a})$ равен 0, то a_1 алгебраичен относительно $\{a_1\} \cup Rng\,\bar{a}$ - что противоречит предположению (3). Из доказательства леммы I и предыдущего замечания следует, что ранг формулы $\exists z\, \varphi(a,y,z,\bar{a})$ равен 2. Но тогда существует $j < \omega$, что $r(\exists z\, \varphi(a,y,z,\bar{a}) \wedge \varphi_j(y)) = 2$

Из выбора формулы φ следует $r(\exists y\, \varphi(a,y,z,\bar{a}) \wedge \varphi_j(y)) = 1$

Тогда $\exists i < \omega\ \exists b_1 \in \varphi_j(M)$, $\models \exists y(\varphi(a,y,b_1,\bar{a}) \wedge \varphi_i(y))$.

Но это означает $\exists b_2 \in \varphi_i(M)$, $\models \varphi(a,b_2,b_1,\bar{a})$ Тогда $a \in cl(\{b_2, b_1\} \cup Rng\,\bar{a})$, а по (I) $a \in cl(Rng\,\bar{a})$, что противоречит предположению (3).

<u>Определение 10.</u> (Т.Г.Мустафин (6)). Пусть $p, q \in S^1(M)$

а) $p \leq q$, $\forall M_2 \supset M_1 \supset A$ из реализуемости q в M_2 следует реализуемость p $M_2 \setminus M_1$.

б) $p \equiv q$, $\forall M \supset A$, $p \leq_M q$, $q \leq_M p$

в) $[p] = \{q \mid q \in S^1(A), q \equiv p\}$, $S^1[A] = \{[p] / p \in S^1(A)\}$

г) $[p] \leq_M [q] \iff p \leq_M q$

д) Типы p, q называются н е з а в и с и м ы м и, если для любой модели $M \supset A$ не имеют места ни $p \leq_M q$, $q \leq_M p$, $[p], [q]$

ям $q \leq_M p$, $[p], [q]$ называются независимыми, если p и q независимы.

Определение II. $B = \{[p_i] \in S^1[A] / i \in I\}$ называется базой, если

а) $[p_i], [p_j]$ независимы при $i \neq j$

б) для любого $q \in S^1[A]$ и любой модели M существуют $i \in I$, что $[p_i] \leq_M [q]$

Базой теории T назовем базу $S^1[\emptyset]$ (если она существует). Базу теории T назовем сильной, если для любого $[p_i] \in B$ существует тип $q_i \in S^1(\emptyset), \tau(q_i) = 1$, что $q_i \in [p_i]$.

Пусть M простая модель теории T. Тогда для каждого типа p_i найдется $n_i - 1$ элементов из M, что $\tau(p_i \cup \{\varepsilon_i(x, a_j)\}) = d(p_i \cup \{\varepsilon_i(x, a_{ji})\}) = 1$, $j < n_i$, $n_i = d(p_i)$

Пусть $T_1 = Th(M_1)$, $M_1 = (M, a_{ij})_{i < \omega}$ в языке $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{a_{ij} / i < \omega\}$. Очевидно полученная теория T_1 обладает сильной базой.

Для T_1 возникают 2 случая.

I) $1 < |B| < \omega$

2) $|B| = \omega$

I) Что $|B| > 1$ следует из леммы 5. Но тогда из теоремы Мустафина (6) следует $n(\omega_\alpha, T_1) = |\alpha| + \omega_0$, где $n(\omega_\alpha, T_1)$ число попарно неизоморфных моделей мощности ω_1 теории T_1.

2) $|B| = \omega$ по теореме Мустафина (6) $n(\omega_\alpha, T_1) = |\alpha + 1|^\omega$ для $\alpha > 0$, $n(\omega, T_1) = \omega$ или $n(\omega, T_1) = 2^\omega$

Теорема 2. Для всякой неразложимой, тотально трансцендентной теории 2, степени n спектр имеет один из следующих видов:

I) $n(\omega_\alpha, T) = \max\{|\alpha|, \omega\}$

2) $n(\omega_\alpha, T) = |\alpha+1|^\omega$, $\alpha \geq 1$ $\alpha = 0$

$\alpha = 0$ а) $n(\omega_0, T) = \omega$

б) $n(\omega_0, T) = 2^\omega$

Доказательство: Рассмотрим теорию T_1 и его базу B. Пусть $\{p_1, \dots, p_k\}$ -сильные типы языка $\mathcal{L}_1$, которые образуют базу теории T_1. $d_1, d_2, \dots, d_t$ - константы, которые входят в $p_1, p_2, \dots, p_k$. Ограничимся языком $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cup \{d_1, \dots, d_t\}$ и рассмотрим теорию $T_2 = T_1 \upharpoonright \mathcal{L}_2$. Тогда T_2 имеет сильную базу и $n(\omega_\alpha, T_1) = n(\omega_\alpha, T_2) = n(\omega_\alpha, T)$.

2) $|B| = \omega$ Пусть база теории T_1, $B = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots\}_{i<\omega}$ Выберем множество $B_1 \subset B$ следующим образом: если $q_1, q_2 \in B_1$, то $\neg(\exists i(p_i \subset q_1, p_i \subset q_2))$. $|B_1| = \omega$ Пусть множество $C = \langle p_i | \exists_i < \omega, p_i \subset q_i \in B_1 \rangle$. Тогда любой модели $M, |M| > \omega$ поставим в соответствие счетную последовательность кардиналов $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots \rangle$, $k < \omega$, $\gamma_k \leq \omega_\alpha$ где γ_k -мощность реализации типа p_k в модели M. Для любой последовательности кардиналов $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots \rangle$ $k < \omega, \gamma_k \leq \omega_\alpha$ существует модель $M, |M| = \omega_\alpha$, что $p_k(M) = \gamma_k$. Таким образом получаем $\forall \alpha > 0$, $n(\omega_\alpha, T) \geq |\alpha+1|^\omega$ Из $n(\omega_\alpha, T) \leq n(\omega_\alpha, T_1) = |\alpha+1|^\omega$ следует $n(\omega_\alpha, T) = |\alpha+1|^\omega$ В мощности ω число моделей может ω или 2^ω в зависимости от того какова мощность множества типов имеющию конечную размерность.

<u>Определение I2.</u> Теория T называется с л а б о р а з л о ж и м о й, если I) существует разложимая формула ранга теории 2) конъюкция двух разложимых формул ранга теории есть разложимая формула того же ранга.

Лемма 6. Пусть T - слабо разложимая тотально трансцендентная теория ранга 2. Тогда существует разложимая формула $\Phi(x)$ ранга теории и без констант.

Доказательство: Пусть $\varphi(x,\bar{a})$ разложимая формула ранга теории, и $\bar{a}$ реализует тип q. Тогда для любого $\bar{b}$ реализующего тип q формула $\varphi(x,\bar{b})$ разложима и $\varphi(x,\bar{a})\wedge\varphi(x,\bar{b}))=r(x=x)$ Пусть $\varphi_1(x,\bar{y})$ формула полученная нормализацией формулы $\varphi(x,\bar{y})$ по отношению к типу p, тогда для любых $\bar{b}_0$, $\bar{b}_1$ реализующих тип q, $\vDash\forall x[\varphi_1(x,\bar{b}_0)\leftrightarrow\varphi_1(x,\bar{b}_1)]$. Покажем, что существует формула $\theta(\bar{y})\in p$, что $\vDash\forall x[\exists\bar{y}(\varphi_1(x,\bar{y})\wedge\theta(\bar{y}))\leftrightarrow\varphi_1(x,\bar{a})]$. Если такой формулы нет, то множество формул (I) $q(\bar{z})\cup\{\neg[\forall x(\varphi_1(x,\bar{y})\leftrightarrow\varphi_1(x,\bar{a}))]\}$ локально совместно. По теореме компактности (I) выполнима и следовательно существует $\bar{b}$ реализующий q, что $\vDash\neg(\forall x(\varphi_1(x,\bar{b})\leftrightarrow\varphi_1(x,\bar{a})))$. Но это противоречит определению формулы $\varphi_1(x,\bar{y})$. Тогда множество формул (I) противоречиво и следовательно противоречива ее конечная часть. Таким образом существует $\theta(\bar{y})\in q(\bar{y})$, что $\vDash\forall\bar{y}[\theta(\bar{y})\to\forall x(\varphi_1(x,\bar{y})\leftrightarrow\varphi_1(x,\bar{a}))]$ Тогда $\Phi(x)=\exists\bar{y}(\varphi_1(x,\bar{y})\wedge\theta(\bar{y}))$ искомая формула.

Теорема 3. Всякая слабо разложимая тотально трансцендентная теория ранга 2, степени n имеет размерность.

Доказательство: По лемме 6 существует формула $\Phi(x)$, такая, что $\Phi(x)$ разложима, $\neg\Phi(x)$ - не разложима. Рассмотрим ограничение теории на $\Phi(x)$ и $\neg\Phi(x)$. Тогда $T\upharpoonright\Phi(x)$, $T\upharpoonright\neg\Phi(x)$

$T\upharpoonright\phi(x)$, $T\upharpoonright\neg\phi(x)$ - обе теории имеют размерность. Что $T\upharpoonright\phi(x)$ имеет размерность доказано Лахланом, а что $T\upharpoonright\neg\phi(x)$ имеет размерность - теорема I. Ограничение теории на формулу рассматривается в языке $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}\cup\{R_{\theta(\bar z)}(\bar z)/\theta(\bar z)$ формула языка$\}$ Рассмотрим произвольную модель M теории T. В теориях $T_1=T\upharpoonright\phi(x)$, $T_2=T\upharpoonright\neg\phi(x)$ рассмотрим соответственно модели $M_1=\phi(M)$, $M_2=\neg\phi(M)$ языка $\mathcal{L}_1$. Пусть в моделях M_1, M_2 $\{a_1,\dots,a_m\}$, $\{b_1,\dots,b_k\}$ соответственно два независимых множества. Докажем, что $\{a_1,\dots,a_m,b_1,b_2,\dots,b_k\}$ - независимое множество. Будем доказывать по индукции. Пусть формула $U(x,y)$ - такая, что $U(b_{k+1},a_1,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k)$, независимо - $\{a_1,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots b_k\}$, $\{a_1,a_2,\dots,b_1,\dots,b_{k-1},b_{k+1}\}$ независимо. Но $\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k,b_{k+1}\}$ зависимо. Возникают 4 случая:

1) $r(U(x,a_1,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=0$, $\models\exists^{<t}x\,U(x,a_1,\dots,b_k)$

2) $r(U(x,a_1,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=1$

3) $r(U(b_{k+1},y,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=0$, $\models\exists^{<t}x\,U(b_{k+1},y,a_2,\dots b_k)$

4) $r(U(b_{k+1},y,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=1$

I) Пусть формула $\psi(x,\bar z)$ разлагает формулу $\phi(x)$. Тогда $\bar c_1,\bar c_2,\dots,\bar c_m,\dots$ $m<\omega$ константы с помощью которых мы разлагаем формулу $\exists x\,U(x,y,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k)$. Рассмотрим множество формул $\{\exists y(U(x,y,a_2,\dots,b_k)\wedge\psi(y,\bar c_j))\mid j<\omega\}$

Предложение I. В предложении для $\forall j<\omega$, $r(\exists y(U(x,y,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k)\wedge\psi(y,\bar c_j)))\leq 1$

Доказательство: Будем доказывать от противного. Пусть существует $l<\omega$, $r(\exists y(U(x,y,a_2,\dots,b_k)\wedge\psi(y,\bar c_l)))=2$ Тогда существуют $B_1(x,\bar q_1),\dots,B_t(x,\bar q_t),B_{t+1}(x,\bar q_{t+1})$, $M\models\neg(\exists x(B_i\wedge B_j))$ при $i\neq j$, $r(B_i(x,\bar q_i))=d(B_i(x,\bar q_i))=1$, $i\leq t+1$

$\models\forall x[B_i(x,\bar q_i)\to\exists y(U(x,y,a_2,\dots,b_k)\wedge\psi(y,\bar c_l))]$.

Рассмотрим $\bar{B}_i(y,d_i,a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_i,\bar{c}_{j_0}) \leftrightharpoons \exists x[U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_{j_0})\wedge B_i(x,d_i)]$ Очевидно, что $r(\bar{B}_i(y)) \geqslant 1$. Ввиду того, что формулы $\bar{B}_i(y)$ являются подформулами $\Psi(y,\bar{c}_{j_0})$ сильно минимальной формулы, их дополнения до $\Psi(y,\bar{c}_{j_0})$ конечны. Тогда $M \models \exists y \bigwedge_{j=1}^{\ell_1+1} \bar{B}_i(y)$. Возьмем y_0 удовлетворяющей формуле $\bigwedge_{j=1}^{\ell_1+2} \bar{B}_i(y)$. Но тогда существует $(\ell_1+1)\ x_0$, что $\models U(x_0,y_0,\bar{d},a_1,\ldots,a_m,\ldots b_i)$, что противоречит определению формулы.

П р е д л о ж е н и е 2. В п р е д п о л о ж е н и и I) $|\{ j<\omega / r(\exists y(U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_j)))=1\}|=\omega$

Доказательство: Пусть существует только конечное число $\{1,\ldots,t\}=I$, $r(\exists y\, U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_j))=1$, $j<t$

Тогда возникают две противоположные ситуации

а) $\exists \ell_2\ \forall j\in\omega\setminus I,\ \models \exists^{\leq \ell_2} x\, \exists y[U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_j)]$

б) $\Longleftrightarrow\ \neg a) \Longleftrightarrow \neg(\exists \ell_2)[\forall j\in\omega\setminus I,\ \models\exists^{\leq \ell_2} x\,\exists y[U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_j)]$

а) Рассмотрим формулу $\exists y\, U(x,y)\wedge\neg(\bigvee_{t=1}^{\ell_2}[\exists y(U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_i)]$

Ранг этой формулы равен 2. Следовательно эта формула делится на бесконечное число формул ранга I, среди них выберем ℓ_2+1 непересекающихся формул ранга I достаточео большой степени $B_1(x,\bar{d}_1),\ldots, B_{\ell_2+1}(x,\bar{d}_{\ell_2+1})$

Для некоторого $1\leq t_0\leq \ell_2+1$ существует бесконечно много $\bar{c}_j$, что(1)$[\exists y(U(x,y)\wedge\Psi(y)]\wedge B_{t_0}(x)$ - противоречиво. В противном случае существовало бы $\bar{c}_{j_0}$, что $\forall t, 1<t\leq\ell_2+1, \exists x$ $[\exists y(U(x,y)\wedge\Psi(y,\bar{c}_{j_0})\wedge B_t(x)]$

Но это противоречит условию а). Так как $B_{t_0}(x,\bar{d}_{t_0})$

-бесконечно, следовательно существует бесконечное число $\bar{c}_j$, что (2) $\models \exists x[\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_j)) \wedge B_{t_0}(x,d_{t_0})]$

Разделим $B_{t_0}(x,d_{t_0})$ на l_2+1 формул ранга I, достаточно большой степени. Выберем $\bar{B}_2(x)$ формулу такую, что существовало бесконечно много $\bar{c}_j$ удовлетворяющих (I) и бесконечно много $\bar{c}_j$ удовлетворяющих условию (2). И так продолжим s раз. Получим формулу $\bar{B}_s(x)$.

Рассмотрим две формулы $\exists x(U(x,y) \wedge \bar{B}_s(x,\bar{q}_3))$, $\exists x(U(x,y) \wedge \neg(\exists x(U(x,y) \wedge \bar{B}_s(x))))$ Обе формулы ранга 2, по построению не пересекающиеся, что противоречит $d(\Phi(x))=1$

б) В некотором расширении модели M можно выбрать бесконечное число $\bar{e}_j$, $j<\omega$, что $\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z}))$ разлагают формулу $\exists y\, U(x,y)$. Запишем множество формул $q(\bar{z})$ $\cup\{\exists^{\geq\omega} x(\neg \bigvee_{j=1}^{t} \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_j)) \wedge \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z})))\} \cup$ $\{\exists^{\geq\omega} x(\neg(\bigvee_{j=1}^{k} \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_j))) \wedge \neg(\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z}))))\}$ это множество локально совместно ввиду условия б), следовательно выполним в некотором расширении. Будем считать, что выбрано $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_k$. Рассмотрим следующее множество формул $q(\bar{z}) \cup \{\exists^{\geq\omega} x(\neg(\bigvee_{i=1}^{k} \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_i)) \vee \bigvee_{i=1}^{t} \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_i)) \wedge$ $\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z})))\} \cup \{\exists^{\geq\omega} x(\neg(\bigvee_{i=1}^{k} \exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{c}_i)) \wedge$ $\neg\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z})) \wedge \exists y\, U(x,y)))\}$.

Это множество локально совместно и следовательно реализуется в некотором расширении. Но таким образом построенная последовательность $\bar{e}_i$, $i<\omega$ определяет разложение для формулы, что противоречит неразложимости формулы $\Phi(x)$.

П р е д л о ж е н и е 3. В предложении I) формула $\exists y(U(x,y) \wedge \psi(y,\bar{z}))$ разлагает формулу $\exists y(U(x,y))$.

Доказательство: Предположим, что найдется формула $B(x,\bar{g})$

$\tau(B(x,\bar{g}))=1$, и для $\forall j<\omega(\tau(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j))=1$ следует $\models\forall^a x[\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j))\to B(x,\bar{g})]$.

Здесь возникают два противоположных случая:

а) $\exists S<\omega\ \forall j<\omega\setminus I(\models\exists^{<S}x(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,c_j)\wedge\neg B(x,\bar{g}))))$

б) $\Leftrightarrow\neg a)\Leftrightarrow\forall S<\omega\ \exists j\in\omega\setminus I(\models\exists^{\geq S}x(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)\wedge\neg B(x))))$.

В случае а) действуем как в предложении 2.а). и приходим к противоречию. Только выбранные формулы имеет следующий вид $\exists x(U(x,y)\wedge B_s(x,\bar{g}_s))$ и

$\exists x(U(x,y)\wedge\neg B_s(x,\bar{g}_s))\wedge\neg\exists x(U(x,y)\wedge B_s(x,\bar{g}_s))$.

В случае б) рассуждая как в предложении 2.б) приходим к противоречию. Отсюда следует, что для любой формулы $B(x,\bar{g})$ ранга I существует $\bar{c}_j$, что $\tau(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)\wedge\neg B(x,\bar{g}))=1$. Но если предложение 3 истинно мы приходим к противоречию с условием теоремы. Следовательно наше предположение I) неверно.

2) $\tau(U(x,a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=1$, $\models\forall x[U(x,a_1)\to\neg\Phi(x)]$, тогда по теореме Шелаха [(2), Т3.I.] существует формула $V(x,g_1,\dots,g_t)$, где $g_i\in\neg\Phi(M)$, $M\models\forall x[V(x,g_1\dots,g_t)\leftrightarrow U(x)]$, . $\tau(V(x,g_1,\dots,g_t))=1$, $M\models V(b_{k+1},g_1,\dots,g_t)$. Ввиду того, что теория $T\wedge\neg\Phi(x)$ не имеет разложения существует формула $V_1(x)$ $\tau(V_1(x))=1$, $\tau(\neg V(x,g_1,\dots,g_t)\wedge V_1(x))\leq 0$, $\tau(\neg V_1(x)\wedge\neg\Phi(x))=2$, поэтому $M\models\neg V_1(b_{k+1})$. Таким образом $\tau(\neg V_1(x)\wedge V(x,g_1,\dots,g_t))=0$. Но ввиду, того $M\models\forall x[(\neg V_1(x)\wedge V(x,g_1,\dots,g_t))\leftrightarrow(\neg V_1(x)\wedge U(x)]$, тогда $\tau(\neg V_1(x)\wedge U(x,a_1,\dots,b_k))=0$,

$U_1(x,a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k)=\neg V_1(x)\wedge U(x,a_1,\dots,a_m,b_1\dots,b_k)$.

$M\models U_1(b_{k+1},a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k)$ попадаем в условие предположения 1) .

3) $\tau(U(b_{k+1},y,a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_k))=0$, $M\models\exists^{<\ell}y\,U(b_{k+1},y)$

$\wedge\, U(b_{k+1}, a_1, a_2, \ldots, b_1, \ldots b_k),\ \tau(\exists y U(x,y)) = \tau(\exists x U(x,y)) = 2.$

Пусть формула $\exists x(U(x,y,a_2,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_k))$ разлагается формулой $\psi(x,\bar{z})$ и константами $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots\ i<\omega,\ \tau(\psi(x,\bar{c}_i)) = 1$

Рассмотрим множество формул (I) $\{\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j))/j<\omega\}$.

Предложение 4. В предположении 3) $\forall j<\omega\ \tau(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j))) \le 1$.

Доказательство: Доказываем от противного. Пусть существует $k<\omega,\ \tau(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_k))) = 2$ Рассмотрим $\psi(M,\bar{c}_k) = \{g_i/i<\omega\}$. Выберем максимальное число $l<t$, что $\tau(U(x,g_1)\wedge U(x,g_2)\wedge\ldots\wedge U(x,g_l)) = 2$. Если $|\{j/j\in\omega\setminus\{1,\ldots,l\},\ \tau(\wedge_{t=1}^{l} U(x,g_t)\wedge U(x,g_j)) = 1\}| = \omega$.

Тогда так как $\tau(\wedge_{t=1}^{l}(U(x,g_t)\wedge\wedge_{t=l+1}^{k} U(x,g_k)) = -1$ формула $\wedge_{t=1}^{l} U(x,g_t)\wedge U(x,y)$ разлагает формулу $\neg\phi(x)$ что противоречит определению теоремы.

Пусть существует конечное число констант $g_{l+1},\ldots,g_{l+s}$, что $\tau(\wedge_{i=1}^{l} U(x,g_i)\wedge(\vee_{i=l+1}^{l+s} U(x,g_i))) = 1$. Возникают два случая

а) $\exists s<\omega\ \forall j\in\omega\setminus\{1,\ldots,l+s\}(\models\exists^{<2}x[\wedge_{i=1}^{l}(U(x,g_i)\wedge U(x,g_j)])$.

б) $(\Leftrightarrow)\ \neg a)\ (\Leftrightarrow)\ \neg(\exists s<\omega\ \forall j\in\omega\setminus\{1,\ldots,l+s\}(\models\exists^{<2}x[\wedge_{i=1}^{l} U(x,g_i)\wedge U(x,g_j)])$.

а) Из-за того, что $\tau(\wedge_{i=1}^{l}(U(x,g_i)\wedge\wedge_{i=l+1}^{l+s}\neg U(x,g_i)) = 2$ существуют $B_1(x,\bar{e}_1),\ldots,B_i(x,\bar{e}_i),\ldots i<\omega$, попарно несовместные формулы ранга I, являющиеся подформулами $[\wedge_{i=1}^{l} U(x,g_i)\wedge\wedge_{i=l+1}^{l+s}\neg U(x,g_i)]$. Среди них найдется $B_1(x,\bar{e}_1)$, что существует бесконечно много $g_j,\ \tau(U(x,g_j)\wedge B_1(x,\bar{e}_1)) = -1$.

Тогда формулы $\exists x(U(x,y)\wedge B_1(x,\bar{e}_1)\wedge\psi(y,\bar{c}_k))$, $\neg(\exists x(U(x,y)\wedge B_1(x)\wedge\psi(y,\bar{c}_k))$ разбивают сильно минимальную формулу $\psi(y,\bar{c}_k)$ на две бесконечные части. Противоречие.

б) Найдется тип с помощью которого в некоторой модели разложим подформулу $\neg\phi(x)$.

$\{\psi(y,\bar{c}_k)\}\cup\{y\neq g_j)/j<\omega\}\cup\{\exists^{\geq\omega}x\,U(x,y)\}$ это множество локально совместно.

Так же локально совместно множество $\{\psi(y_j,\bar{c}_k)/j<\omega\}\cup\{y_j\neq g_i/i\neq j<\omega\}\cup\{\exists^{\geq\omega}x\,U(x,y_j)/j<\omega\}\cup\{y_i\neq y_j/i\neq j<\omega\}$

Формула $U(x,y)$ разлагает подформулу $\neg\phi(x)$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом наше предположение о существовании K неверно.

П р е д л о ж е н и е 5. В п р е д п о л о ж е н и и

3) $|\{j<\omega/r(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j))=1\}|=\omega$

Доказательство: Будем доказывать от противного. Пусть $|\{j<\omega/r(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)))=1\}|<\omega$, тогда возникают два противоположных случая

а) $\exists t<\omega,\ \forall j<\omega\setminus I,\ d(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)))<t$

б) $\Leftrightarrow\neg$а) $\Leftrightarrow\forall t<\omega\ \exists j\in\omega\setminus I,\ d(\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)))>t$

Рассуждая, как в случаях а) и б) п р е д п о л о ж е н и я 4 – приходим к противоречию с предположением предложения.

П р е д п о л о ж е н и е 6. В п р е д п о л о ж е н и и 3) формула $\exists y(U(x,y)\wedge\psi(y,\bar{z}))$ разлагает $\exists y\,U(x,y)$.

Доказательство повторяет доказательство п р е д л о ж е н и я 3.

Истинность п р е д л о ж е н и я 6 приводит к противоречию с условием теоремы. Следовательно предположение 3) неверно.

4) $r(U(b_{k+1},y,a_2,\dots,b_k))=1$. При этом имеем $r(\exists x(U(x,y))=r(U(x,a_1))=2$. Пусть формулы $\psi(y,\bar{c}_j),\ j<\omega$ разлагает $\phi(y)$, а формулы $\varphi_i(x),\ i<\omega$ формулы ранга I лежащие в $\neg\phi(x)$. Возникают 5 случаев.

А. $\forall^{a} i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=0$

Б. $\exists^{\omega} i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=0$

В. $\forall^{a} i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=1$

Г. $\exists^{\omega} i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=1$

Д. $\forall^{a} i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=2$

Прежде чем приступить к рассмотрению случаев А-Д, рассмотрим идеализированные случаи.

I. $\forall i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=0$

П. $\forall i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=1$

Ш. $\forall i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=2$

I распадается на два случая

а) $\exists t<\omega \quad \forall^{a} i<\omega \quad d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))<t$

б) $\overset{\omega}{\exists} i,j<\omega \; [\, d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))<d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_j))\Leftrightarrow i<j\,]$

I. б) распадается на два противоречия между собой случаев.

I. б) I) $\exists s<\omega,\ \overset{\omega}{\exists} i,j<\omega\,[\, d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar c_s)))< d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_j(x)\wedge\psi(y,\bar c_s)))\Leftrightarrow i<j\,]$

I. б) 2) $\Leftrightarrow\ \neg(\exists s<\omega\ \overset{\omega}{\exists} i,j<\omega\ [\, d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar c_s)))<d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_j(x)\wedge\psi(y,\bar c_s)))\Leftrightarrow i<j\,])$.

I. а) В этом случае мы можем разбить $\neg\varphi(x)$ на бесконечное число бесконечных формульных множеств, определяемых одной формулой с разными константами, что противоречит условию теоремы.

I. б) I) В этом случае мы можем разбить сильно минимальную формулу $\psi(y,\bar c_s)$ на две бесконечные формульные части.

I. б) 2) Рассмотрим $\psi(y,\bar c_i)$ которые имеют бесконечное число прообразов $\tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar c_i)))\geq 1$.

Формула $\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar c_j)$ разлагает $\neg\varphi(x)$.

Таким образом случая I в условиях теоремы не может быть.

II. $\forall i<\omega \quad \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=1$

Этот случай разбивается на два случая

а) $\forall^{q} i<\omega \ \forall j<\omega \ \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)))=0$

б) $\exists^{\omega} i<\omega \ (\exists^{\omega} j<\omega \ \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar{c}_j)))=1$

II. а) разбивается в свою очередь на два противоположных случая.

I) $\exists t<\omega, \ \exists^{\omega} i<\omega, \ \tau(\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar{c}_t)))=1$

2) $\forall t<\omega, \ \forall i<\omega, \ \tau(\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)\wedge\psi(y,\bar{c}_t)))\leq 0$

II. б) в свою очередь разбивается на два противоположных случая.

I) $\exists^{\omega} i,j<\omega \ [d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))<d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_j(x)))\iff i<j]$.

2) $\exists s<\omega, \ \forall i<\omega \ [d(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))<s]$

II. а) I) Формулу $\neg\phi(x)$ можно разделить на бесконечное число бесконечных множеств одной формулой $\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar{c}_t)$ меняя константы y y.

II. а) 2) Формулу $\neg\phi(x)$ можно разделить на бесконечное число бесконечных формульных множеств одной формулой $\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar{z}))$ меняя константы $\bar{z}$.

II. б) I) Рассмотрим следующее множество формул

$\{\neg\varphi_i(x)/i<\omega\}\cup\{\exists^{\geq\omega}y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar{z}_i'))/i<\omega\}\cup$
$\{\neg(\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar{z}_i')))/j<\omega\}\cup\{\bar{z}_i\neq\bar{z}_j/i\neq j<\omega\}\cup\{\bar{z}_j'\neq\bar{z}_i'/i\neq j<\omega\}$

Локальная выполнимость этого множества формул следует из условия. Реализация этого типа говорит о том, что $\phi(y)$ имеет степень 2.

II. б) 2) Формула $\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar{z}))$ разлагает формулу $\neg\phi(x)$.

Ш. $\forall i<\omega\ \tau(\exists x(\mathcal{U}(x,y)\wedge\varphi_i(x)))=2.$

начала докажем в предположении Ш.

I) $\forall^a i<\omega\quad \forall^a x[(\models\varphi_i(x)\Rightarrow\tau(\lambda y\,\mathcal{U}(x,y))=2]$

Доказательство: Предположим противное $\exists^\omega i<\omega,\exists^\omega x\in\varphi_i(M)$. $\tau(\lambda y\,\mathcal{U}(x,y))=1$. Но тогда возникают два случая

а) $\exists^\omega i<\omega,\ \forall^a x_0\in\varphi_i(M),\ \exists t<\omega[\tau(\mathcal{U}(x_0,y)\wedge\psi(y,\bar c_t))=1]$.

б) $\forall i<\omega,\ \forall^a x_0\in\varphi_i(M),\ \forall t<\omega[\tau(\mathcal{U}(x_0,y)\wedge\psi(y,\bar c_t))\leq 0]$

) Формула $\exists y[\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar z_1))\wedge\neg(\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar z_2)))$ вляется разлагающей формулой формулы $\neg\Phi(x)$.

) Зафиксируем $i<\omega$. Рассмотрим формулу $\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar c_i)$. Иеняя y заметим, что $\neg\Phi(x)$ разделилось на бесконечное исло (бесконечных или конечных) формульных множеств. Если бесконечных, то приходим к противоречию. Предположим конечных для каждого $i<\omega$. Тогда взяв $\exists y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar z))$ и меняя константы переменной $\bar z$ получим разложение формулы $\neg\Phi(x)$. Таким образом в условиях Ш выполняется (1). Рассмотрим следующее множество формул $\{\neg\varphi_i(x)/i<\omega\}\cup\{\exists^{\geq\omega}y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar z_i)/i<\omega\}\cup\{\exists^{\geq\omega}y(\mathcal{U}(x,y)\wedge\psi(y,\bar z_i)\wedge\neg\psi(y,\bar z_j))/i\neq j<\omega\}$.

Это множество локально совместно ввиду условия (I). Но константа b_{k+1} не удовлетворяет этому множеству формул. Следовательно подставив b_{k+1} вместо x, получим противоречивое множество формул. Из противоречивости всего множества будет следовать противоречивость конечного множества (теорема компактности А.И.Мальцева ([5])). Возьмем конечную часть $R(b_{k+1},\bar z_1,\dots,\bar z_k,a_1,\dots,b_k)$. Рассмотрим формулу $\exists\bar z_1,\dots\bar z_k\ R(x,\bar z_1,\dots,\bar z_k,a_1,\dots,b_1,\dots,b_k)=Q(x,a_1,\dots,b_k)$. Ясно, что $\forall^a i<\omega,\ \models\forall x[\neg Q(x)\Leftrightarrow\neg\varphi_i(x)]$. Но тогда $\tau(\neg Q(x,a_1,\dots,a_m,$

$b_1,\dots,b_k))<2$ ввиду того формулу $\neg Q(x)\wedge\neg\Phi(x)$ не разложишь формулами ранга I. Следовательно пришли к противоречию с тем, что $\{a_2,\dots,a_m,b_1,\dots,b_{k+1}\}$ независимо. Случаев А,Б, В,Г,Д не может быть из-за того, что не может случаев I,П,Ш. Поэтому не может быть случая 4). Таким образом мы доказали, что не может быть случаев I) 2) 3) 4). Следовательно $\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_{k+1}\}$ независимое множество и теория T имеет размерность.

В заключение выражаю глубокую признательность Мустафину Т.Г., Палютину Е.А., Тайманову А.Д. за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

(I) Lachlan A. „Dimension and totally transcendental theories of rank 2", Lect. Notes Math., 1976, 537, 153-183

(2) Shelah S. „Stability, the f.c.p. and superstability model-theoretical propeeties of formulas in first order theory" Ann. Math. Log., 1971, 4, 271-362

(3) Lachlan A. „Two conjectures regarding the stability of ω-categorical theories", Fund. Math. 81, 1974, 133-145

(4) Lachlan A. „A property of stable theories." Fund. Math., 77, 1972, 9-20

(5) Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. "Математическая логика", Наука, I979.

(6) Мустафин Т.Г. "О сильной базе элементарных типов теорий". Сибирский математический журнал, I977, т.ХУШ, № 6, I356-I366.

ечатается в соответствии с решением редакционной коллегии
"Сибирского математического журнала" АН СССР от 21 марта 1980 г.

ечать от 1 VIII.80
р. 1 Цена 1 руб. 15 коп. Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403

ИМ Зак. 378. Тир. 200