Б. С. Байжанов, Определимость 1-типов в слабо o-минимальных теориях, *Матем. тр.*, 2005, том 8, номер 2, 3–38

УДК 510.67

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2005, том 8, № 2, 3–38

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ 1-ТИПОВ В СЛАБО *o*-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Б. С. Байжанов

В работе получен критерий определимости 1-типов над множествами слабо o-минимальных теорий в терминах левой и правой сходимости формулы к типу.

Л. ван ден Дриес доказал, что любой тип над полем всех вещественных чисел определим. Усиливая этот результат, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн, а затем и А. Пиллай установили, что в любой o-минимальной теории для любой пары моделей $M \prec N$ тип над M любого кортежа элементов из N определим, если любой элемент из N имеет определимый тип над M.

В статье строится слабо o-минимальная теория, для которой не выполняется теорема Маркера — Стейнхорна, т. е. некоторая пара моделей этой теории обладает тем свойством, что все элементы из большей модели имеют определимые 1-типы над меньшей моделью, но существует кортеж элементов из большей модели, имеющий неопределимый 2-тип над меньшей моделью.

Ключевые слова и фразы: определимость типа, слабо o-минимальная теория, неортогональность типов.

§ 1. Введение

Статья содержит четыре параграфа. В § 1 даются общие факты об определимости типов, вводятся понятия квазимодельного типа, слабой и сильной сходимости формулы к типу, устанавливается связь между этими понятиями и известными понятиями из теории стабильности (предложение 15). В § 2 приводятся обозначения, определения и известные факты (без доказательств) из теории неортогональности 1-типов для слабо o-минимальных теорий. § 3 содержит доказательство критерия определимости 1-типа над множеством модели слабо o-минимальной теории (теорема 31) в терминах левой и правой сходимости формул к типу (определение 28).

Пусть M — элементарная подмодель N. Мы говорим, что пара моделей (M, N) является D-1-*парой*, если для любого элемента $\alpha \in N$ тип α

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований (CRDF, AWARD KM2-2246).

над M $\big(\mathrm{tp}(\alpha/M)\big)$ определим, и D-*парой*, если для любой конечной последовательности элементов $\overline{\alpha}$ из N тип $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ определим. Аналогично M будет D-1-*моделью*, если любой 1-тип над M определим, и D-*моделью*, если любой тип над M определим. Л. ван ден Дриес доказал [13], что D-1-модель теории вещественно замкнутого поля является D-моделью. Д. Маркер и Ч. Стейнхорн показали [17], что для любой o-минимальной теории любая D-1-пара есть D-пара и, следовательно, любая D-1-модель является D-моделью.

В § 4 строится D-1-пара моделей счетно категоричной слабо o-минимальной теории, которая не является D-парой (теорема 37).

На протяжении всей статьи мы полагаем, что M — линейно упорядоченная структура языка L.

Определение 1. Разбиение (A, B) модели M называется *сечением*, если $A < B$. Здесь $A < B \iff \forall a \in A \ \forall b \in B \ (a < b)$. Сечение называется *рациональным*, если A имеет максимальный элемент или B — минимальный, или одно из них пусто. Мы говорим, что сечение *квазирационально*, если A и, следовательно, B определимы (с параметрами). Неквазирациональное сечение называется *иррациональным*. Модель M называется *дедекиндово полной*, если любое ее сечение рационально. Мы говорим, что M — *квазидедекиндово полная модель*, если любое ее сечение квазирационально. Пусть M — элементарная подмодель N. Скажем, что сечение (A, B) в M реализуется в N, если существует $\alpha \in N \setminus M$ такой, что $A < \alpha < B$.

Определение 2 [12, 20]**.** Линейно упорядоченная структура M называется *o-минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением точек в M и интервалов (a, b), $a \in M \bigcup\{-\infty\}$, $b \in M \bigcup \{\infty\}$.

Заметим, что в o-минимальной модели M любое квазирациональное сечение является рациональным.

Определение 3 [17]**.** Пусть M — элементарная подмодель N, где $N \models T$ и T — o-минимальная теория. Модель M называется *дедекиндово полной в* N, если не существует нерационального сечения в M, реализованного в N.

Определение 4. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если любой элемент M, лежащий между двумя элементами A, лежит в A. В частности, любое пустое или одноэлементное множество выпукло. Мы говорим, что формула $\phi(x)$ *выпукла*, если множество $\phi(M) := \big\{\alpha \in M \mid M \models \phi(\alpha)\big\}$ выпукло.

Определение 5 [11, 15]**.** Линейно упорядоченная структура M называется *слабо o-минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением выпуклых подмножеств.

Теория T *слабо o-минимальна*, если любая ее модель слабо o-минимальна.

Заметим, что любая o-минимальная модель является слабо o-минимальной.

Определение 6. Пусть M — элементарная подмодель N, где $N \models T$ и T — слабо o-минимальная теория. Мы говорим, что M *квазидедекиндово полна в* N, если не существует иррационального сечения в M, реализованного в N.

Определение 7. Пусть A — множество в модели M и $M \models T$, $n < \omega$, $p \in S_n(A)$. Тип p является $\phi(\overline{x}_n, \overline{v})$*-определимым* для $\phi(\overline{x}_n, \overline{v}) \in L(\overline{x}_n)$, если существует формула $R_\phi(\overline{v}) \in L(A)$ (A-определимая формула) такая, что для любого $\overline{a} \in A$ имеем $\phi(\overline{x}_n, \overline{a}) \in p$, если и только если $M \models R_\phi(\overline{a})$.

Тогда формула $R_\phi(\overline{v})$ называется $\phi(\overline{x}_n, \overline{v})$*-определением* типа p. Скажем, что тип p *определим*, если p является $\phi(\overline{x}_n, \overline{v})$-определимым для любой формулы $\phi(\overline{x}_n, \overline{v}) \in L(\overline{x}_n)$, $n < \omega$.

Кортеж $\overline{\gamma} \in M$ называется ht*-определимым над* A, если его тип над A определим.

Напомним [17, лемма 2.3], что в o-минимальной теории для любого сечения в модели M существует только один 1-тип над M, расширяющий его. Этот тип определим, если и только если сечение рационально. Поэтому любая o-минимальная модель M является D-1-моделью тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна. Любая пара (M, N) произвольной o-минимальной теории является D-1-парой тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна в N.

Л. ван ден Дриес изучал определимые типы над вещественно замкнутым полем и доказал следующее утверждение.

Теорема 8 [13]**.** *Любой тип над* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ *определим (здесь* $\mathbb{R}$ *— множество всех вещественных чисел).*

Д. Маркер и Ч. Стейнхорн расширили этот результат на o-минимальные теории.

Теорема 9 [17]**.** *Пусть* T *— o-минимальная теория,* $M \models T$*. Тогда выполняется следующее.*

1. *Модель* M *дедекиндово полна тогда и только тогда, когда каждый тип из* $S(M) := \bigcup_{n<\omega} S_n(M)$ *определим.*

2. *Пусть M — элементарная подмодель N. Тогда для любого $\overline{\alpha} \in N \setminus M$ тип* $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ *определим тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна в N.*

Из утверждения 21 следует, что для слабо o-минимальной теории T любая пара моделей (M, N) является D-1-парой тогда и только тогда, когда M квазидедекиндово полна в N, и произвольная модель M теории T является D-1-моделью, если и только если M квазидедекиндово полна.

Некоторые общие факты об определимости типов.

Центральным понятием в данной работе является понятие сходимости формулы к типу.

Пусть T — произвольная полная теория языка L, N — достаточно насыщенная модель теории T, $A \subset N$, $\overline{\alpha} \in N$, и пусть q — неизолированный тип из $S(A)$, а $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ — A-определимая формула. Мы говорим, что формула $\phi(\overline{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in N$, *делит* $C \subset N^l$ (l — длина кортежа $(\overline{x})$, C необязательно определимо), если $\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \varnothing$, $\neg\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \varnothing$. Часто мы будем писать $\phi(N, \bar{b})$ вместо $\phi(N^l, \bar{b})$.

Мы говорим, что A-определимая формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ *слабо сходится к типу* $q(\overline{x}) \in S(A)$ и обозначаем это через $\mathrm{WEC}\big(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x})\big)$, если для любой $\Theta \in q$ существует $\overline{a} \in A$ такой, что $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ делит $\Theta(N)$.

Мы говорим, что A-определимая формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ *сильно сходится к типу* $q(\overline{x})$ и обозначаем это через $\mathrm{STC}\big(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x})\big)$, если для любой $\Theta \in q$ существует $\overline{a} \in A$ такой, что $\phi(N, \overline{a}) \subset \Theta(N)$. Почти всегда мы будем опускать $\overline{x}$ при написании $q(\overline{x})$.

Допустим, что выполняется $\mathrm{WEC}\big(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x})\big)$ для $q \in S(A)$, и пусть $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ — график некоторой A-определимой функции $f(\overline{y})$ $\big($т. е. $\phi(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{x} = f(\overline{y})\big)$. Тогда справедливо $\mathrm{STC}\big(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q(\overline{x})\big)$. В этом случае говорим, что *значения функции $f(\overline{y})$ сходятся к типу q*, и пишем $\mathrm{STC}\big(f(\overline{y}), q\big)$.

Мы говорим, что кортеж $\overline{\alpha}$ *слабо ортогонален типу q*, если для любой A-определимой формулы $\phi(\overline{x}, \overline{y})$, формула $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ не делит $q(N) = \bigcap_{\Theta \in q} \Theta(N)$ (обозначаем это через $\overline{\alpha} \perp^w q$), и говорим, что $\overline{\alpha}$ *не слабо ортогонален* типу q, если существует A-определимая формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ такая, что $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ делит $q(N)$ ($\overline{\alpha} \not\perp^w q$).

Заметим, что $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ делит $q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой $\Theta \in q$ формула $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ делит $\Theta(N)$. Тогда для всех $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ таких, что $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/A) = \mathrm{tp}(\overline{\beta}/A)$, имеем $\overline{\alpha} \not\perp^w q \iff \overline{\beta} \not\perp^w q$. Таким образом, $p \in S(A)$ слабо ортогонален типу $q \in S(A)$ ($p \perp^w q$), если существует $\overline{\alpha} \in p(N)$ $\big($при этом годится любой $\overline{\alpha} \in p(N)\big)$ такой, что $\overline{\alpha} \perp^w q$ или, что эквивалентно (см. [21, определение V. 1.1 (i)]), $p(\overline{x}) \cup q(\overline{y})$ определяет полный $\big(l(\overline{x})+l(\overline{y})\big)$-тип. Заметим, что если $p \not\perp^w q$, то $q \not\perp^w p$ [21, лемма V. 1.1 (i)].

Определение 10. Пусть Γ — неизолированное совместное множество формул, определимых над A. Мы говорим, что Γ — *квазимодельное множество*, если для любой формулы $\Theta \in \Gamma$ существует $\overline{a} \in A$ такой, что $N \models \Theta(\overline{a})$.

Утверждение 11. *Для любого неизолированного квазимодельного множества Γ формул над A, замкнутого относительно конечных конъюнкций, существует квазимодельный тип над A, расширяющий Γ.*

Доказательство. Для любой A-определимой формулы $Q(\overline{y})$ по крайней мере одно из множеств формул $\Gamma(\overline{y}) \cup \{Q(\overline{y})\}$, $\Gamma(\overline{y}) \cup \{\neg Q(\overline{y})\}$ квазимодельно. $\square$

Пусть $q(\overline{x})$ тип из $S(A)$, $A \subset N$. Мы говорим, что q — *строго определимый* (или *слабо изолированный*) тип, если для любой A-определимой формулы $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ существует A-определимая формула $\Theta(\overline{x}) \in q$ такая, что для всех $\overline{a} \in A^{l(\overline{y})}$ имеем

$$N \models \exists \overline{x} \left(\Theta(\overline{x}) \wedge \phi(\overline{x}, \overline{a})\right) \to \forall \overline{x} \left(\Theta(\overline{x}) \to \phi(\overline{x}, \overline{a})\right).$$

Очевидно, что любой изолированный тип является строго определимым, а строго определимый тип $q \in S(A)$ — определимым, и в этом случае существует формула $\Theta \in q$ такая, что $\phi(\overline{x}, \overline{y})$-определением типа $q(\overline{x})$ будет A-определимая формула $\Psi_\phi(\overline{y}) := \forall \overline{x} \left(\Theta(\overline{x}) \to \phi(\overline{x}, \overline{y})\right)$.

Утверждение 12. *Пусть q — тип из $S(A)$. Тип $q(\overline{x})$ строго определим тогда и только тогда, когда для любой формулы $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ языка L имеет место $\neg\mathrm{WEC}\left(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q\right)$.*

Утверждение 13. *Пусть q — тип из $S(A)$. Тогда выполняется следующее.*

1. *Если существует A-определимая формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ такая, что имеет место $\mathrm{WEC}\left(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q\right)$, то существует квазимодельный тип $r \in S(A)$ такой, что для любого $\overline{\alpha} \in r(N)$ формула $\phi(x, \overline{\alpha})$ делит $q(N)$, т. е. $r \not\perp^w q$.*
2. *Если для некоторого квазимодельного типа $r \in S(A)$ выполняется $r \not\perp^w q$, то для некоторой A-определимой формулы $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ имеет место $\mathrm{WEC}\left(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q\right)$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим в качестве Γ следующее множество A-определимых формул:

$$\left\{K(\Theta)(\overline{y}) \mid \Theta \in q,\, K(\Theta)(\overline{y}) := \exists x\left[\phi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \Theta(\overline{x})\right] \wedge \exists x\left[\neg\phi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \Theta(\overline{x})\right]\right\}.$$

Ясно, что Γ — квазимодельное множество, замкнутое относительно конечных конъюнкций. Тогда по утверждению 11 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$, расширяющий Γ. Поэтому для любого $\overline{\gamma} \in$

$r(N) \subseteq \Gamma(N)$ формула $\phi(x, \overline{\alpha})$ делит $q(N)$. Это значит, что $\overline{\gamma} \not\angle^w q$ и, следовательно, $r \not\angle^w q$.

2. Пусть $\overline{\alpha}$ — кортеж из $r(N)$ и $\overline{\alpha} \not\angle^w q$. Тогда для некоторой формулы $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ формула $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ делит $q(N)$. Отсюда следует, что $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ делит $\Theta(N)$ для любой $\Theta(\overline{x}) \in q$. Последнее означает, что $N \models K(\Theta)(\overline{\alpha})$. Таким образом, имеем $K(\Theta)(\overline{y}) \in r$, и в силу квазимодельности r существует $\overline{a} \in A$ такой, что $N \models K(\Theta)(\overline{a})$. Тогда имеет место $\mathrm{WEC}\big(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q\big)$. $\square$

Утверждение 14. *Пусть r, q — типы из $S(A)$, r — квазимодельный тип, и пусть $H(\overline{x}, \overline{y})$ — A-определимая формула. Если существует $\overline{\gamma} \in r(N)$, для которого $H(N, \overline{\gamma}) \subset q(N)$ $\big($при этом годится любой $\overline{\gamma} \in r(N)\big)$, то имеет место $\mathrm{STC}\big(H(\overline{x}, \overline{y}), q\big)$.*

Доказательство. Имеем $H(N, \overline{\gamma}) \subset q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\Theta \in q$ выполняется включение $H(N, \overline{\gamma}) \subset \Theta(N)$. В свою очередь это равносильно тому, что для любой формулы $\Theta \in q$ имеет место $N \models \forall \overline{x}\big(H(\overline{x}, \overline{\gamma}) \to \Theta(\overline{x})\big)$. В силу того, что $\forall \overline{x}\big(H(\overline{x}, \overline{y}) \to \Theta(\bar{x})\big) \in r$ и r — квазимодельный тип, получаем $\mathrm{STC}\big(H(\overline{x}, \overline{y}), q\big)$. $\square$

Для слабо o-минимальной теории понятие слабой сходимости формулы к 1-типу конкретизируется (трансформируется) в понятия левой, правой и двусторонней сходимости (определение 28, лемма 36). В этих терминах и сформулированы критерий определимости 1-типа над произвольным множеством (теорема 31) и его следствие, критерий определимости 1-типа над объединением модели с ht-определимой над ней конечной последовательностью (предложение 35).

Замечание. Понятие сходимости формулы к неизолированному типу неявно использовалось в доказательствах теорем по упорядоченным моделям [5, 7, 17, 19] и моделям стабильных теорий [1, 3, 8, 9, 14, 21]. Понятие квазимодельного типа неявно использовалось в доказательствах теорем в работах [2, 5]. Чтобы завершить мотивацию введения этих понятий, приведем один простой факт, который поможет объяснить природу понятия сходимости формулы к типу с помощью хорошо известных понятий из теории стабильности.

Предложение 15. *Пусть T — стабильная теория, N — большая насыщенная модель теории T, $A \subset N$, $q \in S(A)$ и $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ — A-определимая формула. Тогда выполняется следующее.*

1. *Если q — квазимодельный тип, то q стационарен.*
2. *Если имеет место $\mathrm{WEC}(\phi(\overline{x}, \overline{y}), q)$, то существует квазимодельный (стационарный) тип $r \in S(A)$ такой, что $r \not\angle^a q$.*
3. *Пусть M — элементарная подмодель N, где $p \in S(N)$ и p не ответвляется над M. Тогда для любого $\overline{\alpha} \in N \setminus M$ тип $p_1 := \big\{\theta(\overline{x}) \in p \bigm| \theta(\overline{x})$ — $(M \cup \overline{\alpha})$-определимая формула$\big\}$ квазимодельный.*

4. *Пусть* $\overline{\alpha}$ — *кортеж из* $N \setminus A$, $q = \mathrm{tp}(\overline{\alpha} \mid A)$ *и формула* $\phi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ *делится над* A [21, определение V.1.3]. *Тогда для любого типа* $p \in S(A)$ *такого, что* $p(N) \cap \phi(N, \overline{\alpha}) \neq \varnothing$, *имеем* $p(N) \cap \neg\phi(N, \overline{\alpha}) \neq \varnothing$, *т. е.* $\overline{\alpha} \not\perp^w p$ *и, следовательно,* $q \not\perp^w p$.

Доказательство. 1. Из [21, определение III. 1.7, определение III. 4.1, лемма III. 4.18, следствие III. 2.9 (ii)] следует, что если для любой A-определимой эквивалентности $E(\overline{x}, \overline{z})$ с конечным числом E-классов существует $\overline{a} \in A$ такой, что $E(\overline{x}, \overline{a}) \in q$, то q — стационарный тип.

Пусть $E(\overline{x}, \overline{y})$ — A-определимое отношение эквивалентности с конечным числом E-классов. Положим $\phi_0(\overline{x}) := (\exists\,\overline{z})E(\overline{x}, \overline{z}) \in q$. Так как q — квазимодельный тип, существует $\overline{a}_0 \in A$ такой, что $N \models (\exists\,\overline{z})E(\overline{z}, \overline{a}_0)$. Если $E(\overline{x}, \overline{a}_0) \notin q$, то $\phi_1(\overline{x}) := \exists\,\overline{z}\big[E(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \neg E(\overline{x}, \overline{a}_0)\big]$ — A-определимая формула и $\phi_1 \in q$. Пусть $\overline{a}_1 \in A$ такой, что $N \models \phi_1(\overline{a}_1)$. Далее, положим $\phi_i(\overline{x}) := \exists\,\overline{z}\big[E(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \bigwedge_{j<i} \neg E(\overline{x}, \overline{a}_j)\big]$. Это — A-определимая формула, и $\phi_i \in q$. Тогда $N \models \bigwedge_{j \neq n < i} \neg E(\overline{a}_j, \overline{a}_n)$. Таким образом, если для каждого $i < \omega$ выполняется $\phi_i(\overline{x}) \notin q$, то получаем противоречие с тем, что E имеет только конечное число E-классов.

Следовательно, $q(N)$ — подмножество одного из A-определимых E-классов для любого A-определимого отношения эквивалентности $E(\overline{x}, \overline{z})$.

2. Из [8, с. 143] следует, что два типа $p, q \in S(A)$ почти ортогональны ($p \perp^a q$), если любые кортежи $\overline{\alpha} \in p(N)$ и $\overline{\beta} \in q(N)$ A-независимы и из $p \perp^a r$ и стационарности p или r следует, что $p \perp^w r$. По утверждению 13 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$ такой, что $p \not\perp^w r$ и, следовательно, в силу стационарности r ввиду п. 1 предложения 15 имеем $p \not\perp^a r$.

3. Из [21, теорема III. 0.1. (4), следствие III. 4.10] вытекает, что тип $p \in S(N)$ не ответвляется над M, где $M \prec N$, если и только если p конечно реализуем в M $\big(p$ конечно реализуем в модели M, если для любой формулы $\phi \in p$ существует $\overline{a} \in M$ такой, что $N \models \phi(\overline{a})\big)$. Рассмотрим произвольную $(M \cup \overline{\alpha})$-определимую формулу $\theta(\overline{x}, \overline{\alpha}) \in p$. Поскольку p конечно реализуем в M, существует $\overline{a} \in M$ такой, что $N \models \theta(\overline{a}, \overline{\alpha})$. Это значит, что p_1 — квазимодельный тип.

4. Пусть $\overline{\gamma}$ — кортеж из пересечения $p(N) \cap \phi(N, \overline{\alpha})$. Из определения деления над A следует существование $n < \omega$, $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n \in q(N)$ таких, что $N \models \neg\exists\,\overline{x}\big(\phi(\overline{x}, \overline{\alpha}) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n} \phi(\overline{x}, \overline{\alpha}_i)\big)$. Тогда для некоторого $\overline{\alpha}_i$ выполняется $\overline{\gamma} \notin \phi(N, \overline{\alpha}_i)$. Далее, в силу того, что $\mathrm{tp}(\overline{\alpha} \mid A) = \mathrm{tp}(\overline{\alpha}_i \mid A) = q$ и $\overline{\gamma} \in p(N)$, $p \in S(A)$, найдется $\overline{\gamma}_i \in p(N)$ такой, что $\overline{\gamma}_i \notin \phi(N, \overline{\alpha})$. Последнее доказывает п. 4 предложения 15. $\square$

§ 2. Обозначения, определения, факты

Всюду далее предполагаем, что M и N — произвольные модели слабо o-минимальной теории T такие, что $M \prec N$ и N — достаточно насыщенная модель. Для любого $A \subset N$ положим

$$A^+ := \{x \in N \mid \forall\, a \in A,\ x > a\},$$
$$A^- := \{x \in N \mid \forall\, a \in A,\ x < a\}.$$

Пусть $\overline{y}$ — кортеж $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$. Длину кортежа $\overline{y}$ обозначим через $l(\overline{y})$ $\big(l(\overline{y}) = n\big)$. Иногда мы будем писать $\overline{a} \in A$ вместо $\overline{a} \in A^{l(\overline{a})}$.

Пусть B — множество в модели N. *B-определимая формула* — это результат подстановки последовательности параметров $\bar{b} \in B^{l(\overline{x})}$ в L-формулу $\phi(\overline{x}, \overline{y})$, образующий формулу $\phi(\overline{x}, \bar{b})$. Подмножество $X \subset M^l$ называется *B-определимым*, если $X = \phi(M^l, \bar{b}) := \big\{\overline{a} \in M^l / M \models \phi(\overline{a}, \bar{b})\big\}$ для некоторой B-определимой формулы $\phi(\overline{x}, \bar{b})$ с $l(\overline{x}) = l$. Иногда мы будем писать «$L(B)$-формула» вместо «B-определимая формула». Пусть B — произвольное выпуклое множество (необязательно определимое). Говорим, что формула $U(x)$ *расщепляет* B, если $U(N)$ и $\neg U(N)$ суть выпуклые множества и $U(N) \cap B \neq \varnothing$, $\neg U(N) \cap B \neq \varnothing$. Если $A \subset M$, то $S_n(A)$ — множество n-типов над A и $S(A) = \bigcup_{n<\omega} S_n(A)$. Часто мы будем записывать формулы первого порядка через отношения формульных множеств, например:

$$x < \phi(N) \equiv \forall\, y\big(\phi(y) \to x < y\big);$$
$$x \in (\beta_1, \beta_2) \equiv \beta_1 < x < \beta_2;$$
$$\phi(N) \bigcap \theta(N) \neq \varnothing \equiv N \models \exists\, x\big(\phi(x) \wedge \theta(x)\big);$$
$$\phi(N) < \theta(N)^+ \equiv N \models \forall\, t\Big(\forall\, y\big(\theta(y) \to y < t\big) \to \forall\, x\big(\phi(x) \to x < t\big)\Big).$$

Мы говорим, что два выпуклых множества C и D *отделимы элементом a* (*a-отделимы*), если $C < a < D$ или $D < a < C$. Говорим, что семейство выпуклых множеств *E-отделимо*, если эти множества попарно отделимы элементами из E.

Утверждение 16 [2, 7]**.** *Теория T слабо o-минимальна тогда и только тогда, когда для любой формулы $\phi(x, \overline{y})$ существует натуральное число $n_\phi < \omega$ такое, что для любой модели $M \models T$ и любого $\overline{a} \in M$ множество $\phi(M, \overline{a})$ — это объединение менее n_ϕ $\overline{a}$-определимых выпуклых $\neg\phi(M, \overline{a})$-отделимых подмножеств.*

Замечание 17. Пересечение семейства выпуклых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества выпукло, и, следовательно, по утверждению 16 для любого 1-типа $p \in S_1(A)$, $A \subset M \models T$, множество $p(M)$ выпукло. Если M — $|A|^+$-насыщенная модель и p — неалгебраический 1-тип, то $p(M)$ не имеет ни минимального, ни максимального элемента.

Из утверждения 16 и замечания 17 следует

Замечание 18. Если существует $\overline{a}$-определимая формула, которая делит выпуклое множество B, то существует $\overline{a}$-определимая формула, которая расщепляет B.

Утверждение 19. *Пусть p — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели M и $M \models T$. Тогда тип p определим, если и только если p является $\phi(x, \overline{y})$-определимым для любой формулы $\phi(x, \overline{y})$ такой, что для любого $\bar{b} \in M$ множество $\phi(M, \bar{b})$ выпукло.*

Определение 20 [5]**.** Пусть p — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели M и $M \models T$. Мы говорим, что тип *p квазирациональный вправо*, если существует A-определимая выпуклая формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ имеем $U_p(N)^+ = p(N)^+$. Говорим, что *p квазирациональный влево*, если существует A-определимая выпуклая формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ имеем $U_p(N)^- = p(N)^-$. Квазирациональный вправо и влево тип называется *изолированным*. Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он квазирациональный либо вправо, либо влево. Неквазирациональный и неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Пусть p — n-тип над A, $F \subset p$. Мы говорим, что *p определяется F* (или *F определяет p*), если для любой формулы $\phi(\overline{x}) \in p$ существует $\theta(\overline{x}) \in F$ такая, что $N \models \forall \overline{x}\big(\theta(\overline{x}) \to \phi(\overline{x})\big)$.

Говорим, что 1-тип $p \in S_1(A \cup B)$ *определяется квазирациональным сечением* (A, B), если p определяется следующим множеством формул: $\big\{a < x \wedge U(x) \bigm| a \in A\big\}$ или $\big\{x < b \wedge \neg U(x) \bigm| b \in B\big\}$. Здесь, $U(x)$ — $(A \cup B)$-определимая формула такая, что $A \subset U(N)$, $U(N) \cap B = \varnothing$.

Утверждение 21 [5, 7]**.** *Пусть p — тип из $S_1(M)$, $M \models T$. Тогда*

1) *p — неопределимый тип, если и только если p — иррациональный тип, если и только если p определим иррациональным сечением в M;*
2) *p — определимый тип, если и только если p — квазирациональный тип, если и только если p определяется квазирациональным сечением в M.*

Заметим, что утверждение 21 является обобщением аналогичного факта для o-минимальных теорий, доказанного Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [17, лемма 2.3], и для o-минимальных теорий определимые 1-типы над моделями определяются рациональными сечениями.

Предложение 22 [5]**.** *Пусть p и r — типы из $S_1(A)$, A — множество в модели N и $N \models T$, $\overline{\gamma} \in N \setminus A$.*

1. *Если $p \not\perp^w r$, то $r \not\perp^w p$.*
2. *Если $\overline{\gamma}$ ht-определим над A и $\overline{\gamma} \not\perp^w p$, то p — определимый тип.*
3. *Если $p \not\perp^w r$, то p определим, если и только если r определим.*

Доказательство. 1. Напомним, что $p \perp^w r$ тогда и только тогда, когда $p(x) \cup r(y)$ — полный 2-тип.

2. Пусть $K(x, \overline{y})$ — A-определимая формула такая, что $K(N, \overline{\gamma}) \cap p(N) \neq \varnothing$, $\neg K(N, \overline{\gamma}) \cap p(N) \neq \varnothing$. Тогда по замечанию 18 существует $(A \cup \overline{\gamma})$-определимая выпуклая формула $H(x, \overline{y})$ такая, что $H(N, \overline{\gamma}) < \neg H(N, \overline{\gamma})$ и существуют $\beta_1, \beta_2 \in p(N)$, для которых $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_1 \in H(N, \overline{\gamma})$, $H(N, \overline{\gamma}) < \beta_2$.

Пусть $\theta(x, \overline{z})$ — произвольная формула. Согласно утверждению 19 можно предположить, что для любого $\bar{b} \in N$ формула $\theta(x, \bar{b})$ выпукла. Для любого $\overline{a} \in A^{l(\overline{z})}$ верно следующее:

$$\begin{aligned}
\theta(x, \overline{a}) \in p &\Longleftrightarrow (\beta_1, \beta_2) \subset p(N) \subset \theta(N, \overline{a}) \\
&\Longleftrightarrow N \models \forall x\big(x \in (\beta_1, \beta_2) \to \theta(x, \overline{a})\big) \\
&\Longleftrightarrow N \models \exists x_1, x_2 \Big(H(x_1, \overline{\gamma}) \wedge \neg H(x_2, \overline{\gamma}) \wedge x_1 \\
&\qquad\qquad < x_2 \wedge \forall x\big(x \in (x_1, x_2) \to \theta(x, \overline{a})\big)\Big).
\end{aligned}$$

Обозначим последнюю формулу через $Q(\theta)(\overline{\gamma}, \overline{a})$. Тогда в силу определения 7 существует A-определимая формула $R_{Q(\theta)}(\overline{z})$ такая, что

$$N \models Q(\theta)(\overline{\gamma}, \overline{a}) \Longleftrightarrow N \models R_{Q(\theta)}(\overline{a}).$$

Положим $\mu_\theta(\overline{z}) := R_{Q(\theta)}(\overline{z})$. Таким образом,

$$\theta(x, \bar{a}) \in p \Longleftrightarrow N \models \mu_\theta(\overline{a}).$$

3. Заметим, что если $p \not\perp^w r$, то $\alpha \not\perp^w r$ для любого $\alpha \in p(N)$. Тогда из 1 и 2 получаем утверждение 3. $\square$

Напомним один элементарный факт, который непосредственно следует из определений типа и насыщенной модели.

Утверждение 23. *Пусть M — модель любой теории первого порядка такая, что для некоторого $A \subset M$ модель M будет $|A|^+$-насыщенной. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Пусть существуют $n, m < \omega$, A-определимая формула $\psi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$, $p \in S_m(A)$, $l(\overline{x}_1) = \dots = l(\overline{x}_n) = m$ такие, что $M \models \psi(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$ для любого $\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n \in p(M^m)$. Тогда найдется $\theta(\overline{x}) \in p$ такая, что $M \models \forall \overline{x}_1, \dots, \forall \overline{x}_n \big(\bigwedge \theta(\overline{x}_i) \to \psi(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \big)$.*

(ii) *Если $p \in S_m(A)$, $m < \omega$ — неизолированный тип, то множество $p(M^m)$ не является M-определимым.*

(iii) *Пусть p и r — типы из $S(A)$, $\overline{\alpha}$ — кортеж из $p(M)$, $\overline{\beta}_1$ и $\overline{\beta}_2$ — кортежи из $r(M)$, а $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ является A-определимой формулой такой, что $M \models \phi(\overline{\beta}_1, \overline{\alpha}) \wedge \neg\phi(\overline{\beta}_2, \overline{\alpha})$. Тогда для любого $\overline{\beta} \in r(M)$ существуют $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \in p(M)$ такие, что $M \models \phi(\overline{\beta}, \overline{\alpha}_1) \wedge \neg\phi(\overline{\beta}, \overline{\alpha}_2)$.*

Определение 24. Формула $K(x, y)$ *монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B*, если выполняется

$$\forall b_1, \forall b_2 \big[(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \to K(N, b_1) < K(N, b_2)^+ \big].$$

Аналогично можно определить монотонное убывание.

Теорема 25 [5–7]. *Если $p(y) \not\perp^w q(x)$, то существует A-определимая формула $K(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *$K(x, y)$ монотонна по y на некотором $\Theta(N)$, $\Theta(y) \in p$, и монотонна по x на некотором $\mu(N)$, $\mu(x) \in q$;*
2) *$K(x, \alpha)$ расщепляет $q(N)$ и $K(\beta, y)$ расщепляет $p(N)$ для любого $\alpha \in p(N)$ и любого $\beta \in q(N)$.*

Заметим, что в o-минимальном случае формула $K(x, y)$ из теоремы 25 является графиком некоторой монотонной функции (см. [2, 16, 18]).

Отметим, что утверждение теоремы 25 верно и для более общего случая, когда A является подмножеством слабо o-минимальной модели конечной глубины, теория которой необязательно слабо o-минимальна [4].

Предложение 26 [5–7]. *Пусть p и q — типы из $S_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда:*

1) *p строго определим $\iff$ q строго определим;*
2) *p — иррациональный тип $\iff$ q — иррациональный тип;*
3) *p — квазирациональный тип $\iff$ q — квазирациональный тип;*
4) *$\not\perp^w$ — отношение эквивалентности на $S_1(A)$.*

Заметим, что предложение 26 является обобщением аналогичного факта для 1-типов над o-минимальной моделью, доказанного Д. Маркером в [16].

§ 3. Определимость 1-типов

Цель параграфа — дать критерий неопределимости 1-типов (теорема 31) и одну из его форм (предложение 35).

Утверждение 27. *Любой квазирациональный тип $p \in S_1(A)$ определим.*

Доказательство. Положим для определенности, что p квазирационален вправо. Случай, когда тип p квазирационален влево, рассматривается аналогично. Пусть $U_p(x)$ — A-определимая формула такая, что $U_p(x) \in p$, $U_p(N)^+ = p(N)^+$. Пусть $\varphi(x, \overline{y})$ — произвольная A-определимая $\big(l(\overline{y}) + 1\big)$-формула. Рассмотрим следующую A-определимую $l(\overline{y})$-формулу:

$$\Theta_\varphi(\overline{y}) := \exists\, x\Big(\big(\varphi(x, \overline{y}) \wedge U_p(x)\big) \wedge \forall\, z\big(x < z < U_p(N)^+ \to \varphi(z, \overline{y})\big)\Big).$$

Ясно, что для всякого $\overline{a} \in A^{l(\overline{y})}$ верно $N \models \Theta_\varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \varphi(x, \overline{a}) \in p$. $\square$

Пусть q — тип из $S_1(A)$, $A \subset N$. Обозначим

$$L(q) := \big\{G(x)/G(x) \text{ — } A\text{-определимая формула такая, что } G(N) < q(N)\big\},$$

$$R(q) := \big\{D(x)/D(x) \text{ — } A\text{-определимая формула такая, что } q(N) < D(N)\big\}.$$

Определение 28. Пусть q — тип из $S_1(A)$, $A \subset N$, а $\theta(\overline{y})$ и $H(x, \overline{y})$ — A-определимые формулы, $X := \theta\big(N^{l(\overline{y})}\big) \cap A^{l(\overline{y})}$.

Мы говорим, что выполняется *условие левой сходимости* формулы $H(x, \overline{y})$ на множестве X или $\theta(\overline{y})$ к типу q, и обозначаем это через

$$\mathrm{LC}\big(H(x, \overline{y}), X, q\big) \ \text{ или } \ \mathrm{LC}\big(H(x, \overline{y}), \theta(\overline{y}), q\big),$$

если верно следующее:

$$\forall\, G(x) \in L(q),\ \exists\, \overline{a} \in X,\ N \models \exists\, x\big(G(N) < x < H(N, \overline{a})^+\big),\ H(N, \overline{a}) < q(N).$$

Говорим, что выполняется *условие правой сходимости* $H(x, \overline{y})$ на X к q, и обозначаем это через $\mathrm{RC}\big(H(x, \overline{y}), X, q\big)$, если

$$\forall\, D(x) \in L(q),\ \exists\, \overline{a} \in X,\ N \models \exists\, x\big(H(N, \overline{a}) < x < D(N)\big),\ q(N) < H(N, \overline{a})^+.$$

Также говорим, что выполняется условие *двусторонней сходимости* $H(x, \overline{y})$ на X или $\theta(\overline{y})$ к q, и обозначаем это через $\mathrm{C}\big(H(x, \overline{y}), X, q\big)$ или $\mathrm{C}\big(H(x, \overline{y}), \theta(\overline{y}), q\big)$, если $\mathrm{LC}(H, X, q)$ и $\mathrm{RC}(H, X, q)$ имеют место одновременно.

Отметим, что в определениях как левой, так и правой сходимостей формулы $H(x, \overline{y})$ мы использовали правую границу формулы $H(x, \overline{a})$, $\bar{a} \in A$. Можно было бы определить сходимость и по левой границе формулы, но мы этого в данной статье делать не будем.

Заметим, что фактически в [17, 19] была рассмотрена (левая) сходимость значений функции к типу q.

Замечание 29. Пусть q — тип из $S_1(A)$. Тогда если q квазирационален вправо, то для любых A-определимых формул $H(x, \overline{y})$, $\theta(\overline{y})$ имеет место $\neg\mathrm{LC}(H, \theta, q)$, и если q квазирационален влево, то для любых A-определимых формул $H(x, \overline{y})$, $\theta(\overline{y})$ имеет место $\neg\mathrm{RC}(H, \theta, q)$.

Из замечания 29 следует, что если для $L(A)$-формул $H(x, \overline{y})$, $\theta(\overline{y})$ и 1-типа $q \in S_1(A)$ верно $\mathrm{C}(H, \theta, q)$, то q должен быть иррациональным. Из утверждения 27 заключаем, что вопрос неопределимости 1-типа надо рассматривать только для иррациональных типов.

Замечание 30. Пусть $H(x, \overline{y})$, $\theta(\overline{y})$ — A-определимые формулы такие, что имеет место $\mathrm{C}(H, \theta, q)$ для некоторого $q \in S_1(A)$. Тогда для любой A-определимой формулы $\theta_1(\overline{y})$ верно следующее.

(i) Если $\mathrm{LC}(H, \theta_1, q)$ и $\neg\mathrm{RC}(H, \theta_1, q)$, то $\mathrm{RC}\big(H, \theta(\overline{y}) \wedge \neg\theta_1(\overline{y}), q\big)$.

(ii) Если $\models \forall\,\overline{y}\big(\theta(\overline{y}) \to \theta_1(\overline{y})\big)$, то $\mathrm{C}(H, \theta_1, q)$.

Теорема 31. *Пусть A — множество в модели M и $M \models T$, T — слабо о-минимальная теория, q — иррациональный 1-тип над A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *q неопределим*;

(ii) *существует A-определимая формула $H(x, \overline{y})$ такая, что для любой A-определимой формулы $\theta(\overline{y})$ выполняется*

$$\mathrm{C}\big(H(x, \overline{y}), \theta(\overline{y}), q\big) \bigvee \mathrm{C}\big(H(x, \overline{y}), \neg\theta(\overline{y}), q\big).$$

Доказательство. Отметим, что условие «q — иррациональный тип» означает, что среди формул $L(q)$ нет наибольшей, а среди формул $R(q)$ нет наименьшей. Сущность доказательства необходимости заключается в том, что по крайней мере одна из границ (левая или правая) формулы, для которой выполняется неопределимость типа, с помощью констант из A аппроксимирует как $L(q)$, так и $R(q)$. При доказательстве же достаточности по формуле, которая одновременно аппроксимирует $L(q)$ и $R(q)$, строится формула, которая дает неопределимость типа q.

Необходимость. Пусть $\varphi(x, \overline{y})$ — A-формула такая, что q не является $\varphi(x, \overline{y})$-определимым. По утверждению 19 можно допустить, что для любого $\overline{b}$ из M множество $\varphi(x, \overline{b})$ выпукло. Пусть

$$H_1(x, \overline{y}) := x < \varphi(N, \overline{y}), \qquad H_2(x, \overline{y}) := \varphi(x, \overline{y}).$$

Тогда $H_i(x,\overline{y})$, $i=1,2$, — A-определимые формулы.

Пусть $\theta(\overline{y})$ — произвольная A-формула.

Замечание 32. Для $j=1,2$ выполняется $\neg\mathrm{RC}(H_j,\theta,q)$ тогда и только тогда, когда существует $D_j(x)\in R(q)$ такая, что верно:

$$\forall\,\overline{a}\in\theta\big(N^{l(\overline{y})}\big)\cap A^{l(\overline{y})}\Big[N\models\exists x\big(H_j(N,\overline{a})<x<D_j(N)\big)\Longleftrightarrow H_j(N,\overline{a})<q(N)\Big].$$

Замечание 33. Для $j=1,2$ выполняется $\neg\mathrm{LC}(H_j,\theta,q)$ тогда и только тогда, когда существует $G_j(x)\in L(q)$ такая, что верно:

$$\forall\,\overline{a}\in\theta\big(N^{l(\overline{y})}\big)\cap A^{l(\overline{y})}\Big[N\models\exists\,x\big(G_j(N)<x<H_j(N,\overline{a})^+\big)\Longleftrightarrow q(N)<H_j(N,\overline{a})^+\Big].$$

Мы утверждаем, что по крайней мере одна из двух формул H_1 или H_2 удовлетворяет условию (ii). Предположим противное, т. е. существуют две A-формулы $\theta_1(\overline{y})$, $\theta_2(\overline{y})$ такие, что выполняются условия

$$\neg\mathrm{C}(H_1,\theta_1,q),\quad \neg\mathrm{C}(H_1,\neg\theta_1,q),\quad \neg\mathrm{C}(H_2,\theta_2,q),\quad \neg\mathrm{C}(H_2,\neg\theta_2,q).$$

Тогда из определения двусторонней сходимости получаем

$$\begin{aligned}&\big(\neg\mathrm{LC}(H_1,\theta_1,q)\vee\neg\mathrm{RC}(H_1,\theta_1,q)\big)\\ &\quad\bigwedge\big(\neg\mathrm{LC}(H_1,\neg\theta_1,q)\vee\neg\mathrm{RC}(H_2,\neg\theta_1,q)\big)\\ &\quad\bigwedge\big(\neg\mathrm{LC}(H_2,\theta_2,q)\vee\neg\mathrm{RC}(H_2,\theta_2,q)\big)\\ &\quad\bigwedge\big(\neg\mathrm{LC}(H_2,\neg\theta_2,q)\vee\neg\mathrm{RC}(H_2,\neg\theta_2,q)\big).\end{aligned}$$

Для условий $\neg\mathrm{RC}(H_i,\theta_i,q)$, $\neg\mathrm{RC}(H_i,\neg\theta_i,q)$, $i=1,2$, обозначим соответственно через $D_{i,1}(x)$ и $D_{i,2}(x)$ A-формулы, полученные по замечанию 32.

Для условий $\neg\mathrm{LC}(H_i,\theta_i,q)$, $\neg\mathrm{LC}(H_i,\neg\theta_i,q)$, $i=1,2$, обозначим соответственно через $G_{i,1}(x)$ и $G_{i,2}(x)$ A-формулы, полученные по замечанию 33.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_{1,1}(\overline{y}):=\begin{cases}\exists\,x\big(H_1(N,\overline{y})<x<D_{1,1}(N)\big), & \text{если } \neg\mathrm{RC}(H_1,\theta_1,q);\\ H(N,\overline{y})<G_{1,1}(N)^+, & \text{если } \mathrm{RC}(H_1,\theta_1,q)\\ & \text{и } \neg\mathrm{LC}(H_1,\theta_1,q);\end{cases}$$

$$\mu_{1,2}(\overline{y}):=\begin{cases}\exists\,x\big(H_1(N,\overline{y})<x<D_{1,2}(N)\big), & \text{если } \neg\mathrm{RC}(H_1,\neg\theta_1,q);\\ H(N,\overline{y})<G_{1,2}(N)^+, & \text{если } \mathrm{RC}(H_1,\neg\theta_1,q)\\ & \text{и } \neg\mathrm{LC}(H_1,\neg\theta_1,q);\end{cases}$$

$$\mu_{2,1}(\overline{y}) := \begin{cases} D_{2,1}(N)^- < H_2(N, \overline{y})^+, & \text{если } \neg\mathrm{RC}(H_2, \theta_2, q); \\ \exists\, x\big(G_{2,1}(N) < x < H(N, \overline{y})^+\big), & \text{если } \mathrm{RC}(H_2, \theta_2, q) \\ & \text{и } \neg\mathrm{LC}(H_2, \theta_2, q); \end{cases}$$

$$\mu_{2,2}(\overline{y}) := \begin{cases} D_{2,2}(N)^- < H_2(N, \overline{y})^+, & \text{если } \neg\mathrm{RC}(H_2, \neg\theta_2, q); \\ \exists\, x\big(G_{2,2}(N) < x < H(N, \overline{y})^+\big), & \text{если } \mathrm{RC}(H_2, \neg\theta_2, q) \\ & \text{и } \neg\mathrm{LC}(H_2, \neg\theta_2, q). \end{cases}$$

Очевидно, что $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,1}$ и $\mu_{2,2}$ являются A-формулами. Рассмотрим A-формулу

$$\mu(\overline{y}) := \exists\, x\varphi(x, \overline{y}) \land \big[\theta_1(\overline{y}) \to \mu_{1,1}(\overline{y})\big] \land \big[\neg\theta_1(\overline{y}) \to \mu_{1,2}(\overline{y})\big]$$
$$\land \big[\theta_2(\overline{y}) \to \mu_{2,1}(\overline{y})\big] \land \big[\neg\theta_2(\overline{y}) \to \mu_{2,2}(\overline{y})\big].$$

Согласно замечаниям 32 и 33 имеем

$$\forall\, \overline{a} \in A^{l(\overline{y})}\ \big[N \models \mu(\overline{a}) \iff H_1(N, \overline{a}) < q(N) < H_2(N, \overline{a})^+\big].$$

Напоминаем, что

$$\varphi(x, \overline{a}) \in q \iff q(N) \subset \varphi(N, \overline{a}) \iff \varphi(N, \overline{a})^-$$
$$< q(N) < \varphi(N, \overline{a})^+ \iff H_1(N, \overline{a}) < q(N) < H_2(N, \overline{a})^+.$$

Тогда $\forall\, \overline{a}\big[N \models \mu(\overline{a}) \iff \varphi(x, \overline{a}) \in q\big]$. Следовательно, q является $\varphi(x, \overline{y})$-определимым типом. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $H(x, \overline{y})$ — A-формула, удовлетворяющая условию (ii). Пусть также $D(x)$ — произвольная A-формула такая, что $q(N) < D(N)$.

Положим $\varphi(x, \overline{y}) := H(N, \overline{y}) < x < D(N)$. Покажем, что тип q не является $\varphi(x, \overline{y})$-определимым.

Допустим, что выполняется следующее условие: существует A-формула $\mu(\overline{y})$ такая, что

$$\big[N \models \mu(\overline{a}) \iff \varphi(x, \overline{a}) \in q\big] \qquad (*)$$

для любого $\overline{a} \in A^{l(\overline{y})}$. Но для любого $\overline{a} \in A^{l(\overline{y})}$ мы имеем

$$\big[N \models \mu(\overline{a}) \iff \varphi(x, \overline{a}) \in q \iff H(N, \overline{a}) < q(N)\big].$$

Отсюда, получаем условие

1) $\mathrm{LC}(H, \mu, q)$, $\neg\mathrm{RC}(H, \mu, q)$.

Возьмем произвольную формулу $G \in L(q)$. Тогда по замечанию 33 имеем $\neg\mathrm{LC}(H, \neg\mu, q)$. В силу утверждения (ii) теоремы 31, только что полученного условия 1 и п.(i) замечания 30 имеем

2) $\mathrm{RC}(H, \neg\mu, q)$, $\neg\mathrm{LC}(H, \neg\mu, q)$.

Одновременное выполнение условий 1 и 2 означает, что

$$\neg\mathrm{C}(H, \mu, q) \wedge \neg\mathrm{C}(H, \neg\mu, q),$$

а это противоречит выбору $H(x, \overline{y})$. Таким образом, условие $(*)$ не выполняется, и тип q не является $\varphi(x, \overline{y})$-определимым.

Утверждение 34*. *Пусть $\overline{\alpha}$ — кортеж из $N \setminus M$, тип $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ определим и выполняется $\mathrm{LC}\big(H(x, \overline{y}, \overline{\alpha}), \Theta(\overline{y}, \overline{\alpha}), q\big)$. Тогда существует M-формула $\mu(\overline{y})$ такая, что $\mathrm{LC}\big(H(x, \overline{y}, \overline{\alpha}), \mu(\overline{y}), q\big)$.*

Доказательство. По определению $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ существует M-формула $\mu_\Theta(\overline{y})$ такая, что $\forall \overline{a} \in M\ \big[N \models \Theta(\overline{a}, \overline{\alpha}) \Longleftrightarrow M \models \mu_\Theta(\overline{a})\big]$. Тогда для проверки сходимости достаточно рассмотреть только кортежи элементов M. $\square$

Предложение 35. *Пусть $\overline{\alpha}$ — кортеж из $N \setminus M$, тип $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ определим, $\beta \in N \setminus (M \cup \overline{\alpha})$, $q := \mathrm{tp}(\beta/M \cup \overline{\alpha})$ — иррациональный и нестрого определимый тип. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *существуют $(M \cup \overline{\alpha})$-определимые формулы $H(x, \overline{y})$, $\Theta(\overline{y})$ такие, что имеет место*

$$\mathrm{LC}(H, \Theta, q),\ \neg\mathrm{RC}(H, \Theta, q)\ \ \textit{или}\ \ \neg\mathrm{LC}(H, \Theta, q),\ \mathrm{RC}(H, \Theta, q);$$

(ii) *тип q определим.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Допустим, что имеет место $\mathrm{LC}(H, \Theta, q)$ и $\neg\mathrm{RC}(H, \Theta, q)$. Случай $\neg\mathrm{LC}(H, \Theta, q)$, $\mathrm{RC}(H, \Theta, q)$ рассматривается аналогично. Предположим (см. утверждение 34), что $\Theta(\overline{y})$ — M-формула. Положим $X := \Theta(M^k)$, $Z := \Theta(N^k)$. Таким образом, выполняется $H(N, \overline{a}, \overline{\alpha}) < q(N)$ для любого $\overline{a} \in X$. Пусть $\varphi(x, \overline{y}, \overline{\alpha})$ — произвольная $(M \cup \overline{\alpha})$-формула такая, что для любого $\overline{\gamma} \in N$ множество $\phi(N, \overline{\gamma}, \overline{\alpha})$ выпукло. Тогда положим

$$S_1(\overline{z}, \overline{y}_1, \overline{\alpha}) := \varphi(N, \overline{z}, \overline{\alpha})^- < H(N, \overline{y}_1, \overline{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\overline{y}_1),$$
$$S_2(\overline{z}, \overline{y}_2, \overline{\alpha}) := \varphi(N, \overline{z}, \overline{\alpha})\ \ < H(N, \overline{y}_2, \overline{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\overline{y}_2).$$

В силу определимости типа $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M)$ найдутся M-формулы $Q_1(\overline{z}, \overline{y}_1)$ и $Q_2(\overline{z}, \overline{y}_2)$ такие, что

$$N \models S_1(\overline{a}, \overline{b}_1, \overline{\alpha}) \Longleftrightarrow M \models Q_1(\overline{a}, \overline{b}_1),$$
$$N \models S_2(\overline{a}, \overline{b}_2, \overline{\alpha}) \Longleftrightarrow M \models Q_2(\overline{a}, \overline{b}_2)$$

* Для o-минимального случая это утверждение доказано в [17].

для всех $\overline{a}$, $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2 \in M$. Тогда для формулы

$$Q(\overline{z}) := \exists\, \overline{y}_1 Q_1(\overline{z}, \overline{y}_1) \wedge \neg\exists\, \overline{y}_2 Q_2(\overline{z}, \overline{y}_2)$$

выполняется

$$\forall\, \overline{a} \in M^{l(\overline{z})} \quad \big[M \models Q(\overline{a}) \Longleftrightarrow \varphi(x, \overline{a}, \overline{\alpha}) \in q\big].$$

Действительно, из $M \models Q(\overline{a})$ следует, что существует $\overline{b}_1 \in M$, для которого

$$M \models Q_1(\overline{a}, \overline{b}_1), \quad \text{и} \quad M \models \forall\, \overline{y}_2 \neg Q_2(\overline{a}, \overline{y}_2).$$

Поскольку справедливы предложения

$$\big[M \models Q_1(\overline{a}, \overline{b}_1) \Longleftrightarrow \varphi(N, \overline{a}, \overline{\alpha})^- < q(N)\big],$$
$$\big[M \models \forall\, \overline{y}_2 \neg Q_2(\overline{a}, \overline{y}_2) \Longleftrightarrow q(N) < \varphi(N, \overline{a}, \overline{\alpha})^+\big],$$

импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) доказана.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Для доказательства нам понадобится первая часть следующего утверждения.

Лемма 36. *Пусть q — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели N, $\phi(x, \overline{y})$ — произвольная формула без параметров.*

(a) *Если* $\mathrm{WEC}\big(\phi(x, \overline{y}), q\big)$, *то* $\mathrm{LC}\big(H(x, \bar{y}), \overline{y} = \overline{y}, q\big)$ *или (и)* $\mathrm{RC}\big(H(x, \overline{y}), \overline{y}, = \overline{y}, q\big)$

$\big($*здесь $H(x, \overline{y})$ является либо* $\phi(x, \overline{y})$, *либо* $\phi(x, \overline{y})^- := \neg\phi(x, \overline{y}) \wedge x < \phi(N, \overline{y})\big)$.

(b) *Если* $\mathrm{STC}\big(\phi(x, \overline{y}), q\big)$, *то* $\mathrm{LC}\big(\phi(x, \overline{y})^-, \overline{y} = \overline{y}, q\big)$ *и* $\mathrm{RC}\big(\phi(x, \overline{y}), \overline{y}, = \overline{y}, q\big)$.

Доказательство. (a) Для L-формулы $\phi(x, \overline{y})$ определим по индукции формулы ϕ_i, $i < \omega$, следующим образом:

$$\phi_0(x, \overline{y}) := \phi(x, \overline{y}) \wedge \forall\, x_1 \Big[\big(\phi(x_1, \overline{y}) \wedge x_1 < x\big) \to \forall\, z\big(x_1 < z < x \to \phi(z, \overline{y})\big)\Big];$$

$$\phi_{i+1}(x, \overline{y}) := \phi(x, \overline{y}) \wedge \phi_i(N, \overline{y}) < x \wedge \forall\, x_1 \Big[\big(\phi(x_1, \overline{y}) \wedge \phi_i(N, \overline{y}) < x_1 < x\big) \to \forall\, z\big(x_1 < z < x \to \phi(z, \overline{y})\big)\Big].$$

Из определения формул вытекает, что для любого $i < \omega$ и любого $\overline{b} \in N$ множество $\phi(N, \overline{b})$ является выпуклым (пустое множество по определению выпукло).

Из утверждения 16 следует, что для некоторого $n_\phi < \omega$ справедлива эквивалентность

$$\phi(x, \overline{y}) \equiv \bigvee_{i < n_\phi} \phi_i(x, \overline{y}).$$

Покажем, что из выполнения $\mathrm{WEC}\big(\phi(x,\overline{y}),q\big)$ вытекает существование такого $i<n_\phi$, что имеет место $\mathrm{WEC}\big(\phi_i(x,\overline{y}),q\big)$. Предположим противное, т. е. $\neg\mathrm{WEC}\big(\phi_i(x,\overline{y}),q\big)$ для любого $i<n_\phi$. Тогда существуют $L(A)$-формулы $\mu_i(x)\in q$, $i<n_\phi$, такие, что для любого $\overline{b}\in A$ и любого $i<n_\phi$ верно одно из двух: $\phi_i(N,\overline{b})\cap\mu_i(N)=\varnothing$ или $\mu_i(N)\subseteq\neg\phi_i(N,\overline{b})$. Положим $\mu(x):=\bigwedge\mu_i(x)$. Очевидно, что $\mu(x)\in q$. Зафиксируем произвольный кортеж $\overline{b}\in A$. Предположим, что $\phi_i(N,\overline{b})\cap\mu_i(N)=\varnothing$ для любого $i<n_\phi$. Так как $\mu(N)\subseteq\mu_i(N)$, имеем $\phi_i(N,\overline{b})\cap\mu(N)=\varnothing$. Отсюда

$$\phi(N,\overline{b})\cap\mu(N)=\bigcup_i\big(\phi_i(N,\overline{b})\cap\mu(N)\big)=\varnothing,$$

и, следовательно, $\phi(x,\overline{b})$ не делит $\mu(N)$.

Если же для некоторого $i<n_\phi$ имеем $\mu_i(N)\subseteq\phi_i(N,\overline{b})$, то

$$\mu(N)\subseteq\mu_i(N)\subseteq\phi_i(N,\overline{b})\subseteq\bigcup_i\phi_i(N,\overline{b})=\phi(N,\overline{b}),$$

и, следовательно, $\phi(x,\overline{b})$ не делит $\mu(N)$. В обоих случаях $\phi(x,\overline{b})$ не делит $\mu(N)$, что противоречит условию $\mathrm{WEC}\big(\phi(x,\overline{y}),q\big)$ в силу произвольности выбора $\overline{b}\in A$.

Таким образом, в дальнейшем полагаем, что в условии $\mathrm{WEC}\big(\phi(x,\overline{y}),q\big)$ формула $\phi(x,\overline{y})$ обладает следующим свойством: $\phi(x,\overline{b})$ — выпуклая формула для любого $\overline{b}\in N$.

Рассмотрим произвольную выпуклую $L(A)$-формулу $\mu(x)$ такую, что $\mu(x)\in q$. Последнее означает, что $q(N)\subset\mu(N)$. Так как q — иррациональный 1-тип, существуют $\gamma_1,\gamma_2\in\mu(N)$ такие, что

$$\gamma_1<q(N)<\gamma_2.$$

Следовательно, $\mu(N)$ распадается на три неформульных выпуклых подмножества $\mu(N)=X_1(\mu)\cup q(N)\cup X_2(\mu)$, причем

$$X_1(\mu)<q(N)<X_2(\mu).$$

Из $\mathrm{WEC}\big(\phi(x,\overline{y}),q\big)$ следует существование такого $\overline{b}\in A$, что $\phi(x,\overline{b})$ делит $\mu(N)$. Иррациональность q влечет неформульность как левой, так и правой границ выпуклого множества $q(N)$. Отсюда,

(∗) выпуклая формула $\phi(x,\overline{b})$, которая делит $\mu(N)$, не может проходить по границам $q(N)$ и должна делить по меньшей мере одну из выпуклых составляющих $\mu(N)$, $X_1(\mu)$ или $X_2(\mu)$.

Предположим, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$. Тогда в силу выпуклости формульного множества $\phi(N,\,\overline{b})$ и неформульного $X_1(\mu)$ имеем $\phi(N,\,\overline{b}) < q(N)$ или $q(N) \subset \phi(N,\,\overline{b})$. Отсюда, если для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x) \in q$ найдется $\overline{b} \in A$ такой, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$ и $\phi(N,\,\overline{b}) < q(N)$, то имеем $\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$. Если же для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x) \in q$ найдется $\overline{b} \in A$ такой, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$ и $q(N) \subset \phi(N,\,\overline{b})$, то имеет место $\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y})^-,\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$, где $\phi(x,\,\overline{y})^- := \neg\phi(x,\,\overline{y}) \wedge x < \phi(N,\,\overline{y})$.

Отметим, что если для некоторой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x) \in q$ и любого $\overline{b} \in A$ такого, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$, выполняется соотношение $\neg\big(q(N) \subset \phi(N,\,\overline{b})\big)$ и, следовательно, $\phi(N,\,\overline{b}) < q(N)$, то для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu'(x) \in q$, $\mu'(N) \subset \mu(N)$, и любого $\overline{b} \in A$ такого, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu')$, имеем $\neg\big(q(N) \subset \phi(N,\,\overline{b})\big)$ и, следовательно, $\phi(N,\,\overline{b}) < q(N)$. Другими словами,

$(**)$ если для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x) \in q$ существует $\overline{b} \in A$ такой, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$, то $\neg\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y})^-,\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ влечет $\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$.

Аналогично рассуждая, получим утверждение:

$(**)'$ если для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x) \in q$ существует $\overline{b} \in A$ такой, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_2(\mu)$, то $\neg\mathrm{RC}\big(\phi(x,\,\overline{y})^-,\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ влечет $\mathrm{RC}\big(\phi(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$.

Предположим, что $\phi(x,\,\overline{b})$ не делит $X_2(\mu)$ для некоторой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu(x)$ из типа q и любого $\overline{b} \in A$. Тогда для любого $\overline{b} \in A$ такого, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $\mu(N)$, формула $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $X_1(\mu)$.

Более того, для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\mu'(x)$ из типа q такой, что $\mu'(N) \subset \mu(N)$, и для любого $\overline{b} \in A$ такого, что $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $\mu'(N)$, формула $\phi(x,\,\overline{b})$ не делит $X_2(\mu')$ и делит $X_1(\mu')$.

Таким образом, принимая во внимание, что одновременное выполнение условий $\neg\mathrm{RC}\big(\phi(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ и $\neg\mathrm{RC}\big(\phi(x,\,\overline{y})^-,\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ обеспечивает существование выпуклой формулы $\mu(x) \in q$ такой, что для любого $\overline{b} \in A$, если $\phi(x,\,\overline{b})$ делит $\mu(N)$, то $\phi(x,\,\overline{b})$ не делит $X_2(\mu)$ и делит $X_1(\mu)$. Последнее в силу $\mathrm{WEC}\big(\phi(x,\,\overline{y}), q\big)$, $(*)$ и $(**)$ означает выполнение

$(***)$ $\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ или (и) $\mathrm{LC}\big(\phi(x,\,\overline{y})^-,\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$.

Суммируя $(*)$, $(**)$ и $(***)$ получаем утверждение (a) леммы 36.

Доказательство утверждения (b) проводится аналогично. □

Ввиду нестрогой определимости иррационального типа q в силу леммы 36 (a) выполняется $\mathrm{LC}\big(H(x,\,\overline{y}),\,\overline{y} = \overline{y}, q\big)$ или (и) $\mathrm{RC}\big(H(x,\,\overline{y}), \bar{y} = \overline{y}, q\big)$. Если формула $\overline{y} = \overline{y}$ не годится в качестве $\Theta(\overline{y})$ из условия (i), то имеем

$\mathrm{C}\big(H(x,\overline{y}),\,\overline{y}=\bar{y},q\big)$. Так как q — определимый тип, по теореме 31 для формулы $H(x,\overline{y})$ находим $L(M\cup\overline{\alpha})$-формулу $\Theta(\overline{y})$. $\square$

§ 4. Пример D-1-пары моделей слабо o-минимальной теории, не являющейся D-парой

Теорема 37. *Существует слабо о-минимальная теория T с двумя моделями $M_b \prec M$ такая, что тип $\mathrm{tp}(\overline{\alpha}/M_b)$ неопределим для некоторого кортежа элементов $\overline{\alpha}\in M$, а модель M_b квазидедекиндово полна в M.*

Доказательство. Сконструируем модель (M,L_0) одновременно с доказательством слабой o-минимальности элементарной теории модели (M,L_0). Представим элементарную теорию $\mathrm{Th}((M,L_0))$ модели (M,L_0) конечным множеством аксиом T_0. Доказательство непротиворечивости, полноты и слабой o-минимальности теории T_0 разделим на следующие этапы доказательств и построений.

4.1. Аксиомы T_0. Если множество T_0 непротиворечиво, то теория, выводимая из T_0, ω_0-категорична.
4.2. Построение модели (M,L), $L\supset L_0$, такой, что $T_0\vdash_L T:=\mathrm{Th}(M,L)$.
4.3. Доказательство того, что T допускает сокращение кванторов и является слабо o-минимальной.
4.4. Пример пары моделей $(M_b,L)\prec(M,L)$ такой, что (M_b,M) является D-1-парой, но не является D-парой.

4.1. Аксиомы T_0. *Если T_0 — непротиворечивое множество, то теория, выводимая из T_0, ω_0-категорична.*

Зафиксируем язык $L_0:=\{=,P^1,<^2,E^3\}$ для T_0. Дадим список аксиом из T_0.

Ак (I). *Символ $<$ суть отношение плотного линейного порядка без концевых точек.*

Ак (II). *Справедлива формула*

$$\forall x\,\forall y\Big(\Big(\big(P(x)\wedge\neg P(y)\big)\to y<x\Big)\wedge\forall z\,\forall x\,\forall y\big(P(z)\to\neg E(x,y,z)\big)\Big).$$

Ак (III). *Формула $\forall z\ \big(\neg P(z)\to E(x,y,z)$ есть отношение эквивалентности по x, y на P; каждый E_z-класс — непустое выпуклое множество без концевых точек; порядок, приведенный на множестве E_z-классов, является плотным; существует минимальный E_z-класс и нет максимального$\big)$.*

Ак (IV). *Для любых z, t, x если выполняется $P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \neg P(t) \wedge z < t$, то каждый E_z-класс из x находится в E_t-классе из x; каждый E_t-класс (кроме минимального) не содержит ни минимального E_z-класса, ни максимального E_z-класса; и минимальный E_t-класс содержит минимальный E_z-класс и не содержит максимального E_z-класса.*

Положим

$$H^2(x,z) := P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \forall\, y\Big(\big(P(y) \wedge y < x\big) \to E(x,y,z)\Big),$$

$$\varepsilon^2(x,y) := \exists\, z\big(\neg P(z) \wedge E(x,y,z) \wedge \neg H(x,z)\big).$$

Формула $H^2(x,z)$ означает, что x находится в минимальном E_z-классе; $\varepsilon^2(x,y)$ означает, что x и y не лежат в минимальном E_z-классе для некоторого z из $\neg P$.

Ак (V). *Справедлива формула*

$$\forall\, x\, \forall\, y\Big(\varepsilon^2(x,y) \leftrightarrow \forall z\big(H(x,z) \leftrightarrow H(y,z)\big)\Big).$$

Заметим, что аксиомы Ак (V) и Ак (IV) означают, что ε^2 — это отношение эквивалентности на P. При этом каждый ε-класс представляет собой бесконечное выпуклое множество, и множество ε-классов образует плотный линейный порядок без концевых точек. Заметим, что каждое утверждение может быть записано на языке первого порядка и выведено из Ак (I)–Ак (V).

Ак (VI). *Выполняются предложения*

(i) $\forall\, x\, \forall\, y\Big(\big(\varepsilon^2(x,y) \wedge x \neq y\big) \to \exists\, z\big(\neg P(z) \wedge \neg E(x,y,z)\big)\Big)$;

(ii) $\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\Big(\big(E(x,y,z) \wedge \neg H(x,z)\big) \to \exists\, t\big(t < z \wedge E(x,y,t)\big)\Big)$.

Положим

$$\varepsilon^4(x,y;u,v) := x < y \wedge u < v \wedge \varepsilon^2(x,y) \wedge \varepsilon^2(y,u) \wedge \varepsilon^2(u,v)$$
$$\wedge\, \forall\, z\Big(\neg P(z) \to \big(E(x,y,z) \leftrightarrow E(u,v,z)\big)\Big).$$

Отметим, что ε^4 — это отношение эквивалентности на упорядоченных парах из ε^2-классов, причем каждый ε^4-класс определяет разбиение $\neg P$ на два выпуклых множества без концевых точек (расщепляет $\neg P$). Для любой упорядоченной пары элементов a_1, a_2, лежащих в одном ε^2-классе, выпуклое множество элементов $b \in \neg P$ таких, что a_1, a_2 лежат в одном E_b-классе, определяет «степень близости» a_1 и a_2, и можно сказать, что чем больше это выпуклое множество, тем «ближе» a_1 и a_2. Кроме того, необходимо отметить, для любых $a_1, a_2, a_3 \in P$ формулы $\varepsilon^4(a_1,a_2,x,a_3)$, $\varepsilon^4(a_1,a_2,a_3,x)$, $\varepsilon^4(a_1,a_2,x,a_2)$, $\varepsilon^4(a_1,a_2,a_1,x)$ выпуклы.

Ак (VII). *Справедливы следующие предложения*:

(i) $$\forall u_2 \forall u_4 \Bigg(\big(\varepsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_4\big) \\ \to \exists u_1 \exists u_3 \exists u_5 \bigg(\bigwedge_{i<j} u_i < u_j \wedge \varepsilon^2(u_1,u_5) \\ \wedge \bigwedge_{1\le i<j<k<r\le 5} E(u_i,u_j,u_k,u_r)\bigg)\Bigg);$$

(ii) $$\forall u_2 \forall u_3 \forall u_4 \Bigg(\big(\varepsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_3 < u_4\big) \\ \to \exists u_1 \exists u_5 \big(u_1 < u_3 < u_5 \wedge \varepsilon^4(u_2,u_4,u_1,u_3) \\ \wedge \varepsilon^4(u_2,u_4,u_3,u_5)\big)\Bigg);$$

(iii) $$\forall u_2 \forall u_4 \Bigg(\big(\varepsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_4\big) \\ \to \exists u_1 \exists u_3 \exists u_3' \exists 5 (u_1 < u_2 < u_3 < u_{3'} < u_4 < u_5) \\ \wedge \forall u \forall u' \Big((u_1 \le u \le u_3 \wedge u_{3'} < u' < u_5) \\ \to \big(\varepsilon^4(u_2,u_4,u,u_4) \wedge \varepsilon^4(u_2,u_4,u_2,u')\big)\Big)\Bigg).$$

Отметим, что из аксиомы Ак (VII) следует бесконечность каждого ε^4-класса, плотность расположения упорядоченных пар в одном ε^4-классе и то, что для любых $a_1, a_2, a_3 \in P$, лежащих в одном ε^2-классе и удовлетворяющих условию $a_1 < a_3 < a_2$, формулы

$$\varepsilon^4(a_1,a_2,x,a_2), \quad \varepsilon^4(a_1,a_2,a_1,x), \quad \varepsilon^4(a_1,a_2,x,a_3), \quad \varepsilon^4(a_1,a_2,a_3,x)$$

определяют непустые выпуклые множества без концевых точек.

Ак (VIII). *Выполняется предложение*

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \Bigg(\big(\varepsilon^2(x,y) \wedge \varepsilon^2(u,v) \wedge x < y \wedge u < v \wedge \neg\varepsilon^2(x,u)\big) \\ \to \exists z \Big(\neg P(z) \wedge \big(E(x,y,z) \wedge \neg E(u,v,z)\big) \\ \vee \big(E(u,v,z) \wedge \neg E(x,y,z)\big)\Big)\Bigg).$$

Заметим, что аксиома Ак (VIII) говорит о том, что любые два различных ε^2-класса «отделимы» отношением E_z для некоторого z из $\neg P$.

Ак (IX). *Выполняется предложение*

$$\forall x \forall y \forall u \Big(P(x) \wedge P(u) \wedge \varepsilon^2(x,y) \wedge \neg\varepsilon^2(x,u) \\ \to \exists z \big(H(u,z) \wedge \neg E(x,y,z) \big) \vee \big(\neg H(u,z) \wedge E(x,y,z) \big) \Big).$$

Заметим, что аксиома Ак (IX) говорит о том, что любой элемент из P, не лежащий в данном ε^2-классе, «отделяется» от ε^2-класса отношениями H_z, E_z для некоторого z из $\neg P$.

Предложение 38. *Если множество T_0 непротиворечиво, то теория, выводимая из T_0, ω-категорична.*

Доказательство. Для каждой модели M теории, выводимой из T_0, на объединении множеств всех ε^2-классов, ε^4-классов и множества всех элементов, удовлетворяющих $\neg P$, можно определить порядок $\triangleleft$. Полученный линейный порядок будем называть моделью языка $L' = \{=, \triangleleft\}$ и его универсум будем обозначать через N, а саму модель — через (N, L'). Для произвольных счетных моделей (M_1, L_0) и (M_2, L_0) теории T_0 построим изоморфизм g с помощью изоморфизма t между (N_1, L') и (N_2, L') и эти два изоморфизма определим одновременно индукцией по $n < \omega$ как объединения возрастающих последовательностей частичных изоморфизмов.

Пусть (M, L_0) — произвольная модель теории, выводимой из T_0. Положим $A := P(M)$, $B := \neg P(M)$, $C := \big\{(a,a') : a, a' \in A, M \models \varepsilon^2(a,a') \wedge a < a'\big\}$. Введем следующую систему обозначений для элементов из C: если $c = (a_1, a_2) \in C$, то $c = c(a_1, a_2)$ и $l(c) = a_1$, $r(c) = a_2$. Заметим, что для любого $c \in C$ выполняется $M \models \varepsilon^2\big(l(c), r(c)\big) \wedge l(c) < r(c)$.

Пусть $a \in A$, $c \in C$. Положим

$$\widehat{c} := \varepsilon^4(M^2, c) = \big\{c' \in C : M \models \varepsilon^4(c', c)\big\}, \quad \widehat{C} := \{\,\widehat{c} : c \in C\},$$
$$\widehat{a} := \varepsilon^2(M, a) \ = \big\{a' \in A : M \models \varepsilon^2(a', a)\big\}, \quad \widehat{A} := \{\,\widehat{a} : a \in A\}.$$

Из определений ε^2 и ε^4 видно, что выполняется

$$\forall c_1 \in C \; \forall c_2 \in C \; \Big[\hat{l}(c_i) = \widehat{r}(c_i), \ i = 1, 2, \\ \big(\widehat{c}_1 = \widehat{c}_2 \to \hat{l}(c_1) = \hat{l}(c_2) = \widehat{r}\,(c_1) = \widehat{r}\,(c_2) \big) \Big].$$

Определим модель следующим образом:

$$(N, L') := \big(\widehat{A} \cup \widehat{C} \cup B; =, \triangleleft \big).$$

Пусть $a, a_1 \in A$; $b, b_1 \in B$; $c, c_1 \in C$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&N \models b \lhd b_1 &&\Leftrightarrow M \models b < b_1,\\
&N \models \widehat{a} \lhd \widehat{a}_1 &&\Leftrightarrow M \models \neg\varepsilon^2(a, a_1) \wedge a < a_1,\\
&N \models \widehat{c} \lhd b &&\Leftrightarrow M \models E\big(l(c), r(c), b\big),\\
&N \models b \lhd \widehat{c} &&\Leftrightarrow M \models \neg E\big(l(c), r(c), b\big),\\
&N \models \widehat{a} \lhd b &&\Leftrightarrow M \models H(a, b),\\
&N \models b \lhd \widehat{a} &&\Leftrightarrow M \models \neg H(a, b),\\
&N \models \widehat{c} \lhd \widehat{a} &&\Leftrightarrow M \models \exists\, x\Big(\neg P(x) \wedge E\big(l(c), r(c), x\big) \wedge \neg H(a, x)\Big),\\
&N \models \widehat{a} \lhd \widehat{c} &&\Leftrightarrow M \models \exists\, x\Big(\neg P(x) \wedge \neg E\big(l(c), r(c), x\big) \wedge H(a, x)\Big),\\
&N \models \widehat{c} \lhd \widehat{c}_1 &&\Leftrightarrow M \models \exists\, x\Big(\neg P(x) \wedge E\big(l(c_1), r(c_1), x\big) \wedge \neg E\big(l(c_2), r(c_2), x\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Из определения ε^2, ε^4, H^2 и аксиом Ак (I)–Ак (IX) следует, что понятие $\lhd$ определено корректно.

Заметим, что определение $\lhd$ непосредственно влечет:

$$
\begin{aligned}
&N \models \widehat{c} \lhd \widehat{a} &&\Leftrightarrow \exists\, b \in B, \quad N \models \widehat{c} \lhd b \wedge b \lhd \widehat{a},\\
&N \models \widehat{a} \lhd \widehat{c} &&\Leftrightarrow \exists\, b \in B, \quad N \models \widehat{a} \lhd b \wedge b \lhd \widehat{c},\\
&N \models \widehat{c} \lhd \widehat{c}_1 &&\Leftrightarrow \exists\, b \in B, \quad N \models \widehat{c}_1 \lhd b \wedge b \lhd \widehat{c}_2.
\end{aligned}
$$

Обозначим $C_l(a) := \big\{c \in C : l(c) = a\big\}$, $C_r(a) := \big\{c \in C : r(c) = a\big\}$.

Утверждение 39.

(i)$'$ *Для любых $a \in A$, $c_1, c_2 \in C_l(a)$ если $N \models \widehat{c}_1 \lhd \widehat{c}_2$, то $r(c_1) < r(c_2)$ и $\widehat{c}\big(r(c_1), r(c_2)\big) = \widehat{c}_2$.*

(i)$''$ *Для любых $a \in A$, $c_1, c_2 \in C_r(a)$ если $N \models \widehat{c}_1 \lhd \widehat{c}_2$, то $l(c_1) < l(c_2)$ и $\widehat{c}\big(l(c_1), l(c_2)\big) = \widehat{c}_2$.*

(ii) *Системы $\big(\widehat{A}, =, \lhd\big)$, $(B, =, \lhd)$, $\big(\widehat{C}, =, \lhd\big)$ суть плотные линейные порядки без концевых точек.*

(iii) *Отношение $\lhd$ есть отношение плотного линейного порядка на $\widehat{A} \cup \widehat{C} \cup B$, и каждое из множеств $\widehat{A}$, $\widehat{C}$, B является $\lhd$-плотным в $\widehat{A} \cup \widehat{C} \cup B$.*

(iv)$'$ *Для любого $a \in A$ выполняется равенство $\widehat{C}_l(a) = \widehat{C}_r(a)$.*

(iv)$''$ *Для любого $a \in A$ множество $\widehat{C}_l(a)$ плотно в $(-\infty, \widehat{a})_N$.*

Доказательство. (i)$'$ Пусть $N \models \widehat{c}_1 \lhd \widehat{c}_2$. Тогда для некоторого $b_0 \in B$ имеем

$$
M \models E\big(a, r(c_1), b\big) \wedge \neg E\big(a, r(c_2), b_0\big) \;\text{ и }\; a < r(c_1), \quad a < r(c_2).
$$

Из выпуклости $E(a,M,b_0)$ следует, что $r(c_1)<r(c_2)$.

Покажем, что $\widehat{c}\big(r(c_1),r(c_2)\big)=\widehat{c}_2$. Пусть b — элемент из B такой, что $M\models E\big(a,r(c_2),b\big)$. Так как любой E_b-класс суть выпуклое множество и $a<r(c_1)<r(c_2)$, имеем $M\models E\big(r(c_1),r(c_2),b\big)$.

Предположим существование элемента $b_1\in B$ такого, что

$$M\models E\big(r(c_1),r(c_2),b_1\big)\wedge\neg E\big(a,r(c_2),b_1\big).$$

Тогда $E(M,a,b_1)\wedge E\big(M,r(c_1),b_1\big)=\varnothing$ и, следовательно, $r(c_1)\notin E(M,a,b_1)$. Последнее в силу Ак (IV) означает, что $E(M,a,b_1)\subset E(M,a,b_0)$ и $b_1<b_0$. Так как $r(c_1)\in E(M,a,b_0)$, по Ак (IV) имеем $E\big(M,r(c_1),b_1\big)\subset E(M,a,b_0)$. Из предположения, что $r(c_2)\in E\big(M,r(c_1),b_1\big)$, вытекает включение $r(c_2)\in E\big(M,r(c_1),b_0\big)$, что противоречит выбору b_0. Следовательно, для любого $b\in B$ имеем

$$\Big[M\models E\big(a,r(c_2),b\big)\Longleftrightarrow M\models E\big(r(c_1),r(c_2),b\big)\Big].$$

Пункт (i)$''$ доказывается аналогично (i)$'$.

(ii) Согласно Ак (I) и Ак (II) заключаем, что $(B,=,\lhd)$ — плотный линейный порядок без концевых точек. Из Ак (I)–Ак (V) следует, что $(\widehat{A},=,\lhd)$ является плотным линейным порядком без концевых точек. Покажем, что $(\widehat{C},=,\lhd)$ удовлетворяет требуемым свойствам. Антирефлексивность $\lhd$ в $\widehat{C}$ следует из определений ε^4-класса и $\lhd$. Покажем транзитивность. Пусть c_1,c_2,c_3 — элементы из C такие, что $N\models\widehat{c}_1\lhd\widehat{c}_2\wedge\widehat{c}_2\lhd\widehat{c}_3$. Тогда существуют b, $b_1\in B$ такие, что

$$\begin{aligned}M\models E\big(l(c_1),r(c_1),b\big)\wedge\neg E\big(l(c_2),r(c_2),b\big)\wedge E\big(l(c_2),r(c_2),b_1\big)\\ \wedge\neg E\big(l(c_3),r(c_3),b_1\big).\end{aligned}$$

Из того, что $M\models\neg E\big(l(c_2),r(c_2),b\big)\wedge E\big(l(c_2),r(c_2),b_1\big)$, и из Ак (IV) следует, что $b<b_1$. Так как $M\models\neg E\big(l(c_3),r(c_3),b_1\big)\wedge b<b_1$, в силу Ак (IV) имеем $M\models\neg E\big(l(c_3),r(c_3),b\big)$. Тогда $M\models E\big(l(c_1),r(c_1),b\big)$ означает, что $N\models\widehat{c}_1\lhd\widehat{c}_3$. Несимметричность следует из транзитивности и антирефлексивности.

Докажем плотность. Пусть $N\models\widehat{c}_1\lhd\widehat{c}_2$. Тогда найдется $b\in B$ такой, что

$$M\models E\big(l(c_1),r(c_1),b\big)\wedge\neg E\big(l(c_2),r(c_2),b\big).$$

По Ак (VI) (b) найдется $b_1<b$ такой, что $M\models E\big(l(c_1),r(c_1),b_1\big)$.

Тогда согласно Ак (IV) существует $a\in E\big(l(c_1),M,b\big)\setminus E\big(l(c_1),M,b_1\big)$ такой, что $a>E\big(l(c_1),M,b_1\big)$. Обозначим через c пару $\big(l(c_1),a\big)$. Тогда

$N \models \widehat{c}_1 \lhd \widehat{c}$. Поскольку $M \models E\big(l(c_1), a, b\big) \wedge \neg E\big(l(c_2), r(c_2), b\big)$, имеем $N \models \widehat{c} \lhd \widehat{c}_2$.

(iii) Пусть b, b_1 — элементы из B, $M \models b < b_1$. Из Ак (IV) следует, что $H(M, b_1) \setminus H(M, b) \neq \varnothing$. Выберем элемент $a \in H(M, b_1) \setminus H(M, b)$. Тогда $N \models b \lhd \widehat{a} \wedge \widehat{a} \lhd b_1$. Для заданного a согласно Ак (VI) (i) существуют $a_1 \in \varepsilon^2(M, a)$, $b_2 \in B$ такие, что $M \models \neg E(a, a_1, b) \wedge E(a, a_1, b_2)$. Это означает, что

$$N \models b \lhd \widehat{c}\,(a, a_1) \wedge \widehat{c}\,(a, a_1) \lhd b_2,$$

$E(M, a, b_2) \subset \varepsilon^2(M, a) \subset H(M, b_1)$ и $b_2 \lhd b_1$. Последовательно по транзитивности получаем $N \models b \lhd \widehat{c} \lhd b_1$.

Рассуждая аналогично, можно заметить, что

$$(d, d') \bigcap \widehat{A} \neq \varnothing, \quad (d, d') \bigcap B \neq \varnothing, \quad (d, d') \bigcap \widehat{C} \neq \varnothing$$

для любых d, $d' \in \widehat{A} \cup \widehat{C} \cup B$, $d \lhd d'$.

(iv)$'$ Пусть c — элемент из $C_l(a)$. Согласно Ак (VII) существуют a_1 и a, $a_1 < a$, такие, что $\widehat{c} = \widehat{c}\,(a_1, a)$. Таким образом, так как $c(a_1, a) \in C_r(a)$, имеем $\widehat{C}_l(a) \subseteq \widehat{C}_r(a)$. Аналогично рассуждая, получаем $\widehat{C}_r(a) \subseteq \widehat{C}_l(a)$.

(iv)$''$ Пусть b_1, b_2 — элементы из $(-\infty, \widehat{a})$. Тогда $N \models b_1 \lhd \widehat{a} \wedge b_2 \lhd \widehat{a}$. Следовательно, $M \models \neg H(a, b_1) \wedge \neg H(a, b_2)$. Предположим, что $b_1 < b_2$. Тогда $E(M, a, b_1) \subset E(M, a, b_2)$.

Пусть a_1, a_2 — элементы из $E(M, a, b_2) \setminus E(M, a, b_1)$ такие, что $a_2 < E(M, a, b_1) < a_1$. Отсюда заключаем, что

$$N \models b_1 \lhd \widehat{c}_1 \wedge b_1 \lhd \widehat{c}_2 \wedge \widehat{c}_1 \lhd b_2 \wedge \widehat{c}_2 \lhd b_2$$

для $c_1 = (a, a_1) \in C_l(a)$ и $c_2 = (a_2, a) \in C_r(a)$. Произвольно выбирая $b_1, b_2 \in B$, приходим к (iv)$''$. $\square$

Пусть (M_1, L_0) и (M_2, L_0) — произвольные счетные структуры, удовлетворяющие T_0. Пусть (N_1, L') и (N_2, L') — структуры, построенные как объединения соответствующих множеств B_i и множеств классов отношений эквивалентностей ε^2 и ε^4. Индукцией по n определим последовательность частичных изоморфизмов

$$\begin{aligned} g_n &\colon \big(M_1^{(n)}, L_0\big) \to \big(M_2^{(n)}, L_0\big), \\ t_n &: \big(N_1^{(n)}, L'_0\big) \to \big(N_2^{(n)}, L'\big), \end{aligned} \qquad n < \omega,$$

таким образом, чтобы фиксировались конечные множества $M_i^{(n)} \subset M_i$, $N_i^{(n)} \subset N_i$, выбранные после шага n, и выполнялись следующие условия:

(U$_1$) $g_{n-1} \subset g_n$, $t_{n-1} \subset t_n$; g_n — биекция, сохраняющая $<$ и P^1; t_n — L'-изоморфизм;

(U$_2$) $t_n(\widehat{a}) = \widehat{g}_n(a)$ для любого $a \in A_1^{(n)} \subset A_1$;

(U$_3$) $t_n(\widehat{c}) = \widehat{\gamma}\big(g\big(l(c)\big), g\big(r(c)\big)\big)$ для любого $c \in C \bigcap A_1^{(n)} \times A_1^{(n)}$.

Здесь γ — элемент из $\Gamma = \big\{(\alpha_1, \alpha_2) \bigm| \alpha_1, \alpha_2 \in A_2,\ M \models \alpha_1 < \alpha_2 \wedge \varepsilon^2(\alpha_1, \alpha_2)\big\}$.

Четный шаг n определяет g_n, а нечетный — g_n^{-1}. Предположим, что модели M_1 и M_2 имеют фиксированные m- и μ-нумерации:

$$M_1 = \{m_i \mid i < \omega\}, \quad M_2 = \{\mu_i \mid i < \omega\}.$$

Ш а г n. Пусть n — четное число. Рассуждение для нечетного n такое же, как и для четного. Выбираем элемент с наименьшим m-номером из $M_1 \setminus (A_1^{(n)} \cup B_1^{(n)})$. Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $a_n \in A_1 \setminus A_1^{(n)}$ — элемент с наименьшим m-номером. Строим множество $\varepsilon^2(M_1, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)}$. Для него выполняется один из следующих подслучаев:

1.1. $\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)} = \varnothing$;

1.2. $\big|\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)}\big| = 1$;

1.3. $\big|\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)}\big| \geq 2$.

1.1. Пусть даны два элемента d и $d' \in N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{a}_n \in (d, d')_{\triangleleft}$ и $(d, d')_{\triangleleft} \bigcap N_1^{(n-1)} = \varnothing$, где $(\cdot\,, \cdot)_{\triangleleft}$ — интервал по отношению $\triangleleft$. Пусть $t_n(\widehat{a}_{2n})$ — произвольный элемент из $\big(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d')\big)_{\triangleleft} \bigcap \widehat{A}_2$. Поскольку t_{n-1} — L'-изоморфизм, имеем $\big(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d')\big)_{\triangleleft} \bigcap N_2^{(n-1)} = \varnothing$.

Пусть $t_n(\widehat{a}_n) = \widehat{\alpha}$ для некоторого $\alpha \in A_2$. Возьмем произвольный элемент $\alpha_n \in \varepsilon^2(M_2, \alpha)$ и положим $g_n(a_n) = \alpha_n$.

1.2. Пусть a_i — элемент из $A_1^{(n-1)}$ такой, что $\varepsilon^2(M, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)} = \{a_i\}$, $i < n$.

Допустим, что $a_i < a_n$. Пусть d, d' — элементы из $N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{c}(a_i, a_n) \in (d, d')_{\triangleleft}$ и $(d, d')_{\triangleleft} \bigcap N_1^{(n-1)} = \varnothing$. Они существуют по Ак (VIII), Ак (IX) и по утверждению 39 (iii). Заметим, что $d' \triangleleft \widehat{a}_i = \widehat{a}_n$ или $d' = \widehat{a}_i$, так как $\widehat{c}(a_i, a_n) \triangleleft \widehat{a}_n = \widehat{a}_i$ ввиду пп.(iv)$'$ и (iv)$''$ утверждения 39. По условию U$_2$ имеем $t_{n-1}(d') \triangleleft t_{n-1}(\widehat{a}_i) = \widehat{g}_{n-1}(a_i) = \widehat{\alpha}_i$ или $t_{n-1}(d') = \widehat{a}_i$. Тогда по утверждению 39 (iv)$''$ множество $\Gamma_l(\alpha_i)$ является плотным в $\big(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d')\big)_{\triangleleft}$. Пусть γ — элемент из $\big(t(d), t(d')\big)_{\triangleleft} \bigcap \Gamma_l(\alpha_i)$. Ясно, что $l(\gamma) = \alpha_i$. Положим $t_n(\widehat{a}_n) := \gamma$, $g_n(a_n) := r(\gamma)$, $\alpha_n := r(\gamma)$.

Случай $a_n < a_i$ рассматривается аналогично.

1.3. Положим

$$\widehat{c}_n = \min_{\triangleleft}\Big\{\, \widehat{c} \mid c = (a_n, a_i) \ \text{ или } \ c = (a_i, a_n),\ a_i \in A_1^{(n-1)},\ M \models \varepsilon^2(a_n, a_i)\Big\}.$$

Рассмотрим два подслучая:

1.3 a) Существуют a_k, $a_j \in A_1^{(n-1)}$, для которых $\widehat{c}(a_k, a_j) = \widehat{c}_n$;

1.3 b) $\widehat{c}_n \neq \widehat{c}(a_k, a_j)$ для любых $a_k \in A_1^{(n-1)}$, $a_j \in A_1^{(n-1)}$.

1.3 a. Пусть $a_k < a_j$, $c_n = (a_n, a_i)$. Предположим, что $a_k < a_n < a_j < a_i$. Тогда ввиду Ак (VII) и минимальности $\widehat{c}_n$ имеем

$$\widehat{c}(a_k, a_n) = \widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_n, a_i) = \widehat{c}(a_k, a_j).$$

Отсюда можно предположить, что $a_n \in (a_k, a_j)_{\triangleleft}$ и $(a_k, a_j) \bigcap A_1^{(n-1)} = \varnothing$.

Аналогично, используя Ак (VII) и минимальность $\widehat{c}_n$, получаем три случая:

(1) $\alpha_n \in (a_i, a_j)$, $(a_i, a_j) \bigcap A_1^{(n-1)} = \varnothing$;

(2) $a_n < a_i$, $(a_n, a_i) \bigcap A_1^{(n-1)} = \varnothing$;

(3) $a_j < a_n$, $(a_j, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)} = \varnothing$.

(1) Пусть $\alpha_i = g_{n-1}(a_i)$, $\alpha_j = g_{n-1}(a_j)$. Находим внешний $\alpha_n \in (\alpha_i, \alpha_j)$ такой, что $\widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_n) = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j) = \widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j)$. Существование такого α_n следует из Ак (VII). Положим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

(2) Находим внешний $\alpha_n < \alpha_i$ такой, что $\widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i) = \widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j) = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j)$. Существование такого α_n вытекает из аксиомы Ак (VII). Положим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

(3) Рассуждаем аналогично (2).

Заметим, что в случаях (1)–(3) имеем $N_1^{(n-1)} = N_1^{(n)}$, так как $\widehat{A}_n = \widehat{a}_i$, $\widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_i, a_j)$ и для любых $a_s \in A_1^{(n-1)}$ из минимальности $\widehat{c}_n$ следует, что $\widehat{c}(a_n, a_s) = \widehat{c}(a_i, a_s)$ или $\widehat{c}(a_s, a_n) = \widehat{c}(a_s, a_j)$ на основании пп. (i)$'$, (i)$''$ утверждения 39.

1.3 b. Рассмотрим случай, когда $a_n < a_i$ и $\widehat{c}_n = \widehat{c}(a_n, a_i)$, $i < n$, $a_i \in A_1^{(n-1)}$.

Из пп. (i)$'$, (i)$''$ утверждения 39 и минимальности $\widehat{c}_n$ следует, что

$$\forall\, j < n\Big[\big(\widehat{c}(a_j, a_n) = \widehat{c}(a_j, a_i) \text{ или } \widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_n, a_i)\big) \\ \text{ и } (a_n, a_i) \cap A_1^{(n-1)} = \varnothing\Big].$$

Пусть d, d' — элементы из $N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{c}(a_n, a_i) \in (d, d')_{\triangleleft}$ и $(d, d')_{\triangleleft} \cap N_1^{(n-1)} = \varnothing$. Существование таких d, d' вытекает из ограниченности $N_1^{(n-1)}$. Заметим, что $d' \triangleleft \widehat{a}_i$. Тогда $t_{n-1}(d') \leq t_{n-1}(\widehat{a}_i) = \widehat{g}_{n-1}(a_i) = \widehat{\alpha}_i$. Следовательно, $\Gamma_r(\alpha_i)$ плотно в $\big(t(d), t(d')\big)_{\triangleleft}$.

Положим $\alpha_n := l(\gamma)$. Предположим, что $t\big(\widehat{c}(a_n, a_j)\big) = \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i)$, $g(a_n) = \alpha_n$.

Случай 2. Пусть $b_n \in B_1 \setminus B_1^{(n-1)}$ — элемент с наименьшим m-номером, элементы $d, d' \in N_1^{(n-1)}$ таковы, что $b_n \in (d, d')_\triangleleft$, $(d, d') \cap N_1^{(n-1)} = \varnothing$. Рассмотрим интервал $\big(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d')\big)_\triangleleft$. Так как t_{n-1} — частичный L'-изоморфизм, имеем $\big(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d')\big)_\triangleleft \cap N_1^{(n-1)} = \varnothing$. Итак, β_n — произвольный элемент из $\big(t(d), t(d')\big)_\triangleleft \cap B_2$. Предположим, что $t_n(b_n) = g_n(b_n) = \beta_n$.

Вернемся к доказательству предложения 38. Для любых элементов $d \in N_1^{(n-1)}$ и $e \in M_1^{(n-1)}$ определим $t_n(d) = t_{n-1}(d)$ и $g_n(e) = g_{n-1}(e)$. Из определения и выбора элементов $g_n(a_n)$, $g_n(b_n)$, $t_n\big(\widehat{c}(a_n, a_i)\big)$, $t_n(\widehat{a}_n)$, $t_n(b_n)$ следует, что g_n, t_n удовлетворяют условиям U_1–U_3. Таким образом, по условию U_1 имеем

$$g = \bigcup_{n<\omega} g_n \colon \big(M_1, =, <, P^1\big) \to \big(M_2, =, <, P^1\big),$$
$$t = \bigcup_{n<\omega} t_n \colon \big(N_1, =, \triangleleft\big) \to \big(N_2, =, \triangleleft\big),$$

g — L_0'-изоморфизм, t — L'-изоморфизм, где $L_0' = \{=, <, P_1\}$.

Докажем, что g — L_0-изоморфизм. Пусть a, $a' \in A_1$, $b \in B_1$. Тогда

$$\begin{aligned} &M_1 \models E(a, a', b) \wedge a < a' \\ &\qquad \Longleftrightarrow N_1 \models \widehat{c}(a, a') \triangleleft b \\ &\qquad \Longleftrightarrow N_2 \models t\big(\widehat{c}(a, a')\big) \triangleleft g(b) \\ &\qquad \Longleftrightarrow N_2 \models \widehat{\gamma}\big(g(a), g(a')\big) \triangleleft g(b) \text{ по условию } U_3 \\ &\qquad \Longleftrightarrow M_2 \models E\big(g(a), g(a'), g(b)\big) \wedge g(a) < g(a'). \end{aligned}$$

Таким образом, $M_1 \models E(a, a, b) \Longleftrightarrow M_2 \models E\big(g(a), g(a), g(b)\big)$. $\square$

Прямым следствием из доказательства предложения 38 является

Утверждение 40. *Предположим, что T_0 — непротиворечивое множество. Пусть M — модель теории, выводимой из T_0. Тогда любое иррациональное сечение (B_1, B_2) в $(B, <)$ является M-определимым в (M, L_0) тогда и только тогда, когда выполняется $\exists a \in P(M)(B_1 \triangleleft \widehat{a} \triangleleft B_2)$ или $\exists a_1, a_2 \in P(M)\big(B_1 \triangleleft \widehat{c}(a_1, a_2) \triangleleft B_2\big)$.*

4.2. Построим модель (M, L) такую, что $L \supset L_0$ и $T_0 \vdash_L T := \mathrm{Th}(M, L)$. Пусть дан язык $L := \{=, P^1, <^2, E^3, H^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, S^4, S^3\}$, $M := K \cup Q$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел и множество K определяется по индукции.

Построение K. Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $I := \{C \mid C \subset \mathbb{R},\ C \cap \mathbb{Q} = \varnothing,\ C$ счетное и плотное в $\mathbb{R}\}$, J — подмножество множества I такое, что для любых $C_1 \neq C_2 \in J$ имеем $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ и $|J| > \omega$. Пусть

$$S := \Big\{a \mid a = (\ldots, a_b, \ldots)_{b\in\mathbb{Q}'},\ \big(\forall\, b \in \mathbb{Q}',\, a_b \in \mathbb{Q}\big),\ \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q},$$
$$\text{если } \mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}, \text{ то выполняется } \exists\, e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \forall\, b \in \mathbb{Q}\big(b < e \to b \in \mathbb{Q}'\big)\Big\}$$

— множество всех $\mathbb{Q}$-последовательностей из рациональных номеров и

$$2^{<\omega} := \Big\{\tau \;\Big|\; \exists\, n < \omega,\ \tau = \big(\tau(1), \ldots, \tau(n)\big),\ \forall\, i\,(1 \le i \le n),\ \tau(i) \in \{0, 1\}\Big\}.$$

Строим K со следующими условиями.

(Z_1) $K = \bigcup_{n<\omega} K_n \subset S$, $K_n \cap K_{n+1} = \varnothing$, $|K_n| = \omega$.

(Z_2) Функция $g\colon K_n \to (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{n+1}$ такова, что для любого $d \in K_n$ если $g(d) = \big(g_0(d), \ldots, g_n(d)\big)$, то $g_0(d) > g_1(d) > \cdots > g_n(d)$.

(Z_3) Функция $\mathbf{C}\colon K \to J$ $\big($положим $\mathbf{C}(\mathrm{d}) := C_d\big)$ такова, что $C_{d_1} \neq C_{d_2}$ для любых $d_1 \neq d_2 \in K$.

Зафиксируем произвольный элемент $a = (\ldots, a_b, \ldots)_{b\in\mathbb{Q}}$ из S.

Шаг 0. Фиксируем произвольный элемент $C_0 \in J$. Для любого $\gamma \in C_0$ пусть $a^\gamma = (\ldots, a^\gamma_b, \ldots)_{b\in\mathbb{Q},\, b<\gamma}$ — элемент из S такой, что $a^\gamma_b = a_b$ для всех $b \in \mathbb{Q}$ $(b < \gamma)$. Положим $K_0 := \{a^\gamma \mid \gamma \in C_0\}$, $g_0(a^\gamma) := \gamma$, $g(a^\gamma) := (\gamma)$.

Шаг $n+1$. Для любых $d \in K_n$, $\gamma \in C_d$ $\big(\gamma < g_n(d)\big)$, $\tau \in 2^{<\omega}$ определим $d^{\gamma\tau} := (\ldots, d^{\gamma\tau}_b \ldots)_{b\in\mathbb{Q},\, b<g_0(d)}$ следующим образом:

$$\forall\, b \in \mathbb{Q}\left[\big(\gamma < b < g_0(d) \Rightarrow d^{\gamma\tau}_b = d_b\big) \wedge \left(b < \gamma \Rightarrow d^{\gamma\tau}_b = d_b + \sum_{i=1}^{l(\tau)} \frac{(-1)^{\tau(i)}}{(n+2)^i}\right)\right].$$

Таким образом,

$$K_{n+1} := \big\{d^{\gamma\tau} \mid d \in K_n,\ \gamma \in C_d,\ \gamma < g_n(d),\ \tau \in 2^{<\omega}\big\}, \quad g(d^{\gamma\tau}) := \big(g(d), \gamma\big).$$

Так как $|K_n| = \big|\bigcup_{d\in K_n} C_d\big| = |2^{<\omega}| = \omega$, имеем $|K_{n+1}| = \omega$.

Поскольку $|J| > \omega$, можно определить $\mathbf{C}\colon K_{n+1} \to J$. Заметим, что

$$\forall\, c, d \in K,\ \forall\, b \in \mathbb{Q}\Big[\big(b < g_0(d) = g_0(c) \wedge d_b = c_b\big)$$
$$\Rightarrow \forall\, b' \in \mathbb{Q}\big(b < b' < g_0(d) \Rightarrow d_{b'} = c_{b'}\big)\Big].$$

Определение модели (M, L). Пусть d, c, e, f, b — элементы из M. Тогда справедливы следующие эквивалентности:

$$\Big[M \models P^1(d) \Longleftrightarrow d \in K\Big];$$

$$\Bigg[M \models d <^2 c \Longleftrightarrow \big(\{d,c\} \subset \mathbb{Q} \wedge d < c\big) \vee (d \in \mathbb{Q} \wedge c \in K)$$

$$\vee \Bigg(\{d,c\} \subset K$$

$$\wedge \Bigg(g_0(d) < g_0(c)$$

$$\vee \Big(g_0(d) = g_0(c) \wedge \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge \exists\, b'$$

$$\in \mathbb{Q}\Big[b' < x < g_0(d) \wedge \forall\, b$$

$$\in \mathbb{Q}\Big(\big[x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b\big]$$

$$\wedge \big[b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b\big]\Big)\Big]\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg];$$

$$\Big[M \models E^3(c,d,b) \Longleftrightarrow \{c,d\} \subset K \wedge b \in \mathbb{Q}$$

$$\wedge \Big(b > \max\big\{g_0(d), g_0(c)\big\} \vee \big(b < g_0(d) = g_0(c) \wedge c_b = d_b\big)\Big)\Big];$$

$$\Big[M \models H^2(d,b) \Longleftrightarrow d \in K \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge g_0(d) < b\Big];$$

$$\Big[M \models \varepsilon^2(c,d) \Longleftrightarrow \{c,d\} \subset K \wedge g_0(c) = g_0(d)\Big];$$

$$\Bigg[M \models \varepsilon^4(d,c,e,f) \Longleftrightarrow \{d,e,c,f\} \subset K \wedge \exists\, n < \omega,$$

$$g_n(d) = g_n(c) = g_n(e) = g_n(f) \wedge g_{n+1}(d) \neq g_{n+1}(c) \wedge g_{n+1}(e) \neq g_{n+1}(f),$$

$$\exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \exists\, b' \in \mathbb{Q}\Big[b' < x < g_n(d) \wedge \forall\, b \in \mathbb{Q}$$

$$\Big(\big[x < b < g_n(d) \Rightarrow (c_b = d_b \wedge e_b = f_b)\big]$$

$$\wedge \big[b' < b < x \Rightarrow (d_b < c_b \wedge e_b < f_b)\big]\Big)\Big]\Bigg];$$

$$
\begin{aligned}
\Big[M \models S_1^4(d,c,e,f) \iff{}& \{d,c,e,f\} \subset K \\
&\wedge g_0(d) = g_0(c) \wedge g_0(e) = g_0(f) \wedge \exists\, b \in \mathbb{Q}(d_b = c_b \wedge e_b \neq f_b) \wedge \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
&\wedge \exists\, b' \in \mathbb{Q}\Big[b' < x < g_0(d) \wedge \forall\, b \in \mathbb{Q}\Big(\,[x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \big[b'{<}b{<}x \Rightarrow d_b{<}c_b\big]\Big)\Big] \wedge \exists\, x{\in}\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
&\wedge \exists\, b' \in \mathbb{Q}\Big[b' < x < g_0(e) \wedge \forall\, b \in \mathbb{Q}\Big(\,[x < b < g_0(e) \Rightarrow e_b = f_b] \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \big[b < b < x \Rightarrow e_b < f_b\big]\Big)\Big]\Big];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big[M \models S_2^3(d,c,f) \iff{}& \{d,c,f\} \subset K \wedge g_0(d) \\
&= g_0(c) \wedge \Big(g_0(d) > g_0(f) \to \exists\, b \in \mathbb{Q}\big(b < g_0(f) \wedge d_b = c_b\big)\Big) \wedge \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
&\wedge \exists\, b' \in \mathbb{Q}\Big[b' < x < g_0(d) \wedge \forall\, b \in \mathbb{Q}\Big(\,[x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \big[b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b\big]\Big)\Big]\Big].
\end{aligned}
$$

Заметим, что отношения $\varepsilon^2, \varepsilon^4, S_1^4, S_2^3, H^2$ определены в $\big(M, =, P^1, <^2, E^3\big)$ и $(M, L_0) \models$ Ак (I)–Ак (IX).

Пусть a, a_1, a_2, a_3 — элементы из $P(M)$, N — модель из предложения 38. Тогда справедливы следующие условия:

F1) $[M \models S^3(a_1, a_2, a) \iff N \models \widehat{c}(a_1, a_2) \lhd \widehat{a}\,]$;

F2) $[M \models S^4(a, a_1, a_2, a_3) \iff N \models \widehat{c}\,(a, a_1) \lhd \widehat{c}\,(a_2, a_3)]$;

F3) $[M \models \neg\varepsilon^2(a_1, a_2) \wedge a_1 < a_2 \iff N \models \widehat{a}_1 < \widehat{a}_2]$.

4.3. Докажем, что T допускает сокращение кванторов и является слабо o-минимальной.

Предложение 41. *Теория* $T{=}\mathrm{Th}\big((M, L)\big)$ *ω-категорична, конечно аксиоматизируема, допускает сокращение кванторов и слабо o-минимальна.*

Доказательство. Пусть M — счетная модель теории T. Пусть $A_i \subset P(M)$, $B_i \subset \neg P(M)$, $i = 1, 2$, такие, что множество $(A_1 \cup B_1)$ конечно и $(A_1{\cup}B_1, L) \cong (A_2{\cup}B_2, L)$. Введение $H^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, S^3, S^4$ позволяет определять конечные L'-структуры $\big(N(A_i \cup B_i), =, \lhd\big)$ и L'-изоморфизм

$$
t\colon \big(N(A_1 \cup B_1), =, \lhd\big) \to \big(N(A_2 \cup B_2), =, \lhd\big)
$$

так, что t удовлетворяет условию U_2 из предложения 38.

Действительно, пусть a, a_1, a_2, a_3 — элементы из A, $b \in B$. Тогда $\widehat{a}$ определено при помощи ε^2; $\widehat{c}(a, a_1)$ — при помощи $\varepsilon^4, \varepsilon^2, <^2$; $\widehat{a}$ и b $\lhd$-сравнимы с помощью H^2; $\widehat{a}$ и $\widehat{c}(a_1, a_2)$ — $\lhd$-сравнимы с помощью S^3 (см. F1); b и $\widehat{c}(a_1, a_2)$ — помощью E^3; $\widehat{c}(a, a_1)$ и $\widehat{c}(a_2, a_3)$ — с помощью S^4 (см. F2); $\widehat{a}_1$ и $\widehat{a}_2$ — с помощью $\varepsilon^2, <^2$ (см. F3).

Используя метод доказательства предложения 38, можно расширить изоморфизм между $(A_1 \cup B_1, L)$ и $(A_2 \cup B_2, L)$ до автоморфизма (M, L). Это означает, что T допускает сокращение кванторов [10]. В силу того, что теория T ω-категорична (предложение 38) и допускает сокращение кванторов, слабая o-минимальность теории T будет следовать из выпуклости атомных 1-формул с параметрами (в данной ситуации любая 1-формула, определимая конечным множеством параметров из $(A \cup B)$, является булевой комбинацией $(A \cup B)$-определимых атомных 1-формул). Выпуклость атомных 1-формул вида

$$x < a(b), \quad a(b) < x, \quad P(x), \quad H(x, b), \quad H(a, y), \quad E(x, a, b), \quad E(a, x, b),$$
$$E(a_1, a_2, y), \quad \varepsilon^2(x, a), \quad \varepsilon^2(a, x), \quad \varepsilon^4(x, a_1, a_2, a_3), \quad \varepsilon^4(a_1, x, a_2, a_3),$$
$$\varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_3), \quad \varepsilon^4(a_1, a_2, a_3, x), \quad S^3(x, a_1, a_2), \quad S^3(a_1, x, a_2), \quad S^3(a_1, a_2, x),$$
$$S^4(x, a_1, a_2, a_3), \quad S^4(a_1, x, a_2, a_3), \quad S^4(a_1, a_2, x, a_3), \quad S^4(a_1, a_2, a_3, x)$$

следует из Ак (I)–Ак (IX), свойств линейного порядка $\lhd$ на N. В самом деле, пусть $a_1', a_1, a_1'', a_2, a_3$ — элементы из $P(M)$ такие, что

$$M \models S^3(a_1', a_2, a_3) \wedge S^3(a_1'', a_2, a_3) \wedge a_1' < a_1 < a_1''.$$

Тогда по F1 имеем $N \models \widehat{c}(a_1', a_2, a_3) \lhd \widehat{a}_3 \wedge \widehat{c}(a_1'', a_2) \lhd \widehat{a}_3$. Так как $a_1' < a_1 < a_1''$, из определения ε^4 и $\lhd$ следует, что

$$N \models \Big(\widehat{c}(a_1', a_2) \lhd \widehat{c}(a_1, a_2) \vee \widehat{c}(a_1', a_2) = \widehat{c}(a_1, a_2)\Big)$$
$$\wedge \Big(\widehat{c}(a_1, a_2) \lhd \widehat{c}(a_1'', a_2) \vee \widehat{c}(a_1, a_2) = \widehat{c}(a_1'', a_2)\Big).$$

Отсюда, в силу транзитивности $\lhd$ заключаем, что $N \models \widehat{c}(a_1, a_2) \lhd \widehat{a}_3$. Тогда по F1 имеем $M \models S^3(a_1, a_2, a_3)$, что означает выпуклость $S^3(x, a_2, a_3)$. Аналогично проверяется выпуклость всех атомных 1-формул вида S^3, S^4 (выпуклость остальных атомных 1-формул является непосредственным следствием определений и аксиом). $\square$

4.4. Пример пары моделей $(M_b, L) \prec (M, L)$ такой, что (M_b, M) является D-1-парой, но не является D-парой.

Пусть (M, L) — модель из п. 4.2, b — произвольный элемент из $\mathbb{Q}$ $\big($т. е. $\neg P(M)\big)$. Обозначим через Q_b множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < b\}$, через K_b — множество $\bigcup_{b' < b} H(M, b')$, через M_b — $Q_b \cup K_b$. Легко увидеть, что (M_b, L) —

подмодель модели (M, L). Так как $\mathrm{Th}(M)$ допускает сокращение кванторов, имеем $(M_b, L) \prec (M, L)$.

Утверждение 42. *Пусть $d_1 \neq d_2$ — элементы из $P(M) \setminus M_b$ такие, что существует $n < \omega$, для которого $n > 0, g_n(d_1) = g_n(d_2) < b$. Тогда тип $\mathrm{tp}(d_1 d_2 / M_b)$ неопределим.*

Доказательство. Согласно аксиоме Ак (VII) формула $E(d_1, d_2, x)$ определяется по некоторому иррациональному сечению (B_1, B_2) в $(\mathbb{Q}, <)$ и по условию $g_n(d_1) = g_n(d_2) < b$, $B_1 < b$. Тогда иррациональное сечение $\Big(B_1, \big(B_2 \cap \{b\}^-_M\big) \cup P(M_b)\Big)$ неопределимо в (M_b, L) по утверждению 40 и условию (Z_3) из конструкции K в п. 4.2. Пусть $p \in S_1(M_b)$ — единственный 1-тип, который расширяет сечение $\Big(B_1, \big(B_2 \cap \{b\}^-_M\big) \cup P(M_b)\Big)$. Заметим, что по предложению 26 имеем $p \perp^w \mathrm{tp}(d_1/M_b)$, так как p — иррациональный тип и $\mathrm{tp}(d_1/M_b)$ — квазирациональный тип. Пусть $q := \mathrm{tp}(d_2/M_b \cup d_1)$, $p' \in S_1(M_b \cup d_1)$, $p \subseteq p'$. Имеем $d_1 d_2 \not\perp^w p$ и, следовательно, $q \not\perp^w p'$, так как $p(M) = p'(M)$. Отметим, что p' — иррациональный тип, который определяется сечением. Следовательно, p' — неопределимый тип. Тогда из предложения 22 следует, что таковым является и тип q. Отсюда $\mathrm{tp}(d_1 d_2/M_b)$ — неопределимый тип. Последнее означает, что (M_b, M) не является D-парой. $\square$

Заметим, что (M_b, L) — квазидедекиндово полная модель в (M, L), так как $P(M) \setminus P(M_b) > P(M_b)$, $\neg P(M) \setminus \neg P(M_b) > \neg P(M_b)$. Таким образом, из утверждения 42 следует теорема 37. $\square$

В заключение, автор выражает благодарность Е. А. Палютину за упрощение формулировки и доказательства теоремы 31, В. В. Вербовскому и Б. Ш. Кулпешову за полезные обсуждения примера, обосновывающего теорему 37, и оказанную помощь в оформлении данной статьи.

Литература

1. *Байжанов Б. С.* Спектральные вопросы тотально трансцендентных теорий конечного ранга // *Теория моделей и ее приложения.* Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1980. С. 25–44.

2. *Байжанов Б. С.* Обогащение *o*-минимальной модели унарными выпуклыми предикатами // *Исследования в теории алгебраических систем.* Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. С. 3–23.

3. *Байжанов Б. С.* Пары моделей и свойство NBAM // *Проблемы информатики и управления* / Сб. науч. тр. Алматы: Гылым, 1995. С. 81–89.

4. *Байжанов Б.*, *Вербовский В.*, *Туреханова Г.* Неортогональность 1-типов в слабо o-минимальных структурах конечной глубины // *Algebra and Model Theory* 4 / Collection of Papers / Под ред. A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1999. С. 7–14.

5. *Baizhanov B. S.* *Classification of One-Types in Weakly o-Minimal Theories and Its Corollaries* / Preprint. Алматы: Изд-во Ин-та проблем информатики и управления АН Республики Казахстан, 1996.

6. *Baizhanov B. S.* Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // *Algebra and Model Theory* 2 / Collection of Papers / Eds. Pinus A. G. and Ponomaryov K. N. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1999. P. 5–28.

7. *Baizhanov B. S.* Expansions of a model of a weakly o-minimal theory by a family of convex unary predicates // *J. Symbolic Logic*. 2001. V. 66, N 3. P. 1382–1414.

8. *Baldwin J. T.* *Fundamentals of Stability Theory*. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1988.

9. *Buechler S.* Pseudoprojective strongly minimal sets are locally projective // *J. Symbolic Logic*. 1991. V. 56, N 4. P. 1184–1194.

10. *Chang C. C. and Keisler H. J.* *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1973.

11. *Dickmann M. A.* Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // *Proc. of the Third Easter Model Theory Conf. at Gross Koris*. Berlin: Humboldt-Univ., 1985. V. 70. P. 64–88.

12. *van den Dries L.* Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbb{R}, +, *, \exp)$ // *Proc. Logic Colloquium'* 82, 1984. P. 240–266.

13. *van den Dries L.* Tarski's problem and Pfaffian functions // *Logic Colloquium'*84 / Eds. Paris J. B., Wilkie A. J., and Wilmers G. M. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 59–90.

14. *Lachlan A. H.* Dimension and totally transcendental theories of rank 2 // *Set Theory and Hierarchy Theory* / Lecture Notes in Math. (Mem. Tribute A. Mostowski, Bierutowice 1975) / Eds. Marek W., Srebrny M., and Zarach A. Berlin: Springer-Verlag, 1976. V. 537. P. 153–183.

15. *Macpherson D.*, *Marker D.*, *and Steinhorn Ch.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 352, N 12. P. 5435–5483.

16. *Marker D.* Omitting types in o-minimal theories // *J. Symbolic Logic*. 1986. V. 51. P. 63–74.

17. *Marker D. and Steinhorn Ch.* Definable types in o-minimal theories // *J. Symbolic Logic.* 1994. V. 59, N 1. P. 185–198.

18. *Mayer L.* Vaught's conjecture for o-minimal theories // *J. Symbolic Logic.* 1988. V. 53, N 1. P. 146–159.

19. *Pillay A.* Definability of types, and pairs of o-minimal structures // *J. Symbolic Logic.* 1994. V. 59, N 4. P. 1400–1409.

20. *Pillay A. and Steinhorn Ch.* Definable sets in ordered structures. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 295. P. 565–592.

21. *Shelah S.* *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models.* Amsterdam: North-Holland, 1978.

Байжанов Бектур Сембиулы

Институт проблем информатики и управления
Министерства образования и науки
Республики Казахстан,
ул. Пушкина 125, 480100, г. Алматы, КАЗАХСТАН.
E-mail: baizhanov@ipic.kz

Статья поступила
19 февраля 2004 г.