УДК 510.225

Б. С. БАЙЖАНОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть ω^{ω} — множество функций из ω в ω. Для множества $A \subset \omega^{\omega}$ определим игру G_A следующим образом: игроки I и II попеременно записывают натуральные числа. В итоге они выписывают $f \in \omega^{\omega}$. Считаем, что выиграл I игрок, если $f \in A$, в противном случае выиграл II игрок. Под стратегией I (II) игрока будем понимать функцию $\alpha(\beta)$, определенную по индукции от предыдущих значений функции на конечных последовательностях четной (нечетной) длины. Множество A называется детерминированным, если один из игроков имеет выигрышную стратегию. Для стратегии I и II игроков введем понятие скелета стратегии:

$$S(\alpha) = \{f / f \in \omega^{\omega} \text{ для любого } n < \omega,\ f(n) = (a_1, \dots, a_n),$$

где

$$a_{2k+1} = \alpha\ (a_1, \dots, a_{2k}),\ 2k \leqslant n\};$$

$$S(\beta) = \{f / f \in \omega^{\omega} \text{ для любого } n < \omega,\ f(n) = (a_1, \dots, a_n),$$

где $a_{2k} = \beta(a_1, \dots, a_{2k-1})$, $2k \leqslant n\}$.

Зафиксируем пересчет множества всех стратегий I и II игроков: α_l, β_l, $l < 2^{\omega}$. Пусть p — функция из $\{1, \dots, n\}$ в ω. Будем говорить, что p согласована с множеством стратегий $T \subset 2^{\omega}$, если существуют $f \in S(\alpha_t)$, $t \in T$. Будем говорить, что p является отказом от множества стратегий T, если для любого $k (k \leqslant n-1)$, $p(k)$ согласована с T, а p нет. Будем говорить, что A вполне детерминировано, если A — детерминировано, и в случае отказа выигрывающего игрока от всех выигрышных стратегий у другого игрока появляется выигрышная стратегия.

Т е о р е м а 1. Существуют детерминированные не вполне детерминированные множества.

Доказательство. Возьмем стратегию α_0, обозначим через $D = \{p / p \text{ — отказ от } \alpha_0\}$.

$$B_p = \{f / f(n) = p,\ f \in \omega^{\omega}\}.$$

Для каждого $p \in D$ будем строить $E^p \subset B_p$ следующим образом.

Шаг 1. $t(1, p) = \min\{l / S(\alpha_l) \cap B_p \neq \varnothing\}$.

Выбираем $x_1^p \in S(\alpha_{t(1,p)} \cap B_p$.

$$K_1^p = \{x_1^p\},\ r(1, p) = \min\{l / S(\beta_l) \cap B_p \neq \varnothing\}.$$

Выбираем $y_1^p \in (S(\beta_{r(1,p)}) \cap B_p) \setminus K_1^p$. Выбирать y_1^p можно, так как $S(\beta_{r(1,p)}) \cap B_p| = 2^{\omega}$, $|K_1^p| < 2^{\omega}$, $E_1^p = \{y_1^p\}$.

Шаг $m+1$. $m+1 < 2^{\omega}$, $t(m+1, p) = \min\{l / l > t(m, p),\ S(\alpha_l) \cap B_p \neq \varnothing\}$.

Выбираем $x_{m+1}^p \in (S(\alpha_{t(m+1,p)}) \cap B_p) \setminus (E_m^p \cup K_m^p)$.

$$K_{m+1}^p = K_m^p \cup \{x_{m+1}^p\},\ r(m+1, p) = \min\{l / l > r(m, p),\ S(\beta_l) \cap B_p \neq \varnothing\}.$$

Выбираем $y_{m+1}^p \in (S(\beta_{r(m+1,p)}) \cap B_p) \setminus (E_m^p \cup K_m^p)$.

Существование таких x_{m+1}^p, y_{m+1}^p следует из того, что

$$|S(\alpha_{t(m+1,p)}) \cap B_p| = |S(\beta_{r(m+1,p)}) \cap B_p| = 2^{\omega},\quad |K_m^p| = |E_m^p| < 2^{\omega}.$$

На предельных шагах определяем $(E_m^p)' = \bigcup_{s<m} E_s^p$:

$$t(m, p) = \min\{l / l > t(s, p),\ s < m,\ S(\alpha_l) \cap B_p \neq \varnothing\}.$$

Обозначим $E^p = \bigcup E_m^p$, $m < 2^{\omega}$; $K^p = \bigcup K_m^p$, $m < 2^{\omega}$.

Заметим, что для любого p, $K^p \cap E^p = \varnothing$, $E^p \subset B_p$, $K^p \subset B_p$.

Определим $A = S(\alpha_0) \cup \bigcup_{p \in D} E^p$. Оно детерминировано, но не вполне детерминировано. В самом деле, в качестве выигрышной стратегии I игроку можно использовать стратегию α_0. Но любой отказ от стратегии α_0 означает попадание игры в B_p, $p \in D$. Предположим, что у I игрока существует выигрышная стратегия α_e, а это означает $\varnothing \neq S(\alpha_e) \cap B_p \subset E^p$. Но это противоречит тому, что $K^p \subset B_p \setminus E^p$. Предположение, что у II игрока существует выигрышная стратегия, противоречит определению K^p и E^p.

Отсюда следует, что у I игрока в игре G_A одна выигрышная стратегия α_0, и при любом отказе от α_0 у II игрока не появляется выигрышная стратегия. Следовательно, A не вполне детерминировано.

Определим на ω^ω топологию, взяв за базис открытых множеств $\{B_p\}$, тогда любое открытое множество имеет вид $\cup B_p$, а замкнутое $\omega^\omega / \cup B_p$.

Теорема 2. Класс детерминированных множеств, содержащий все открытые и замкнутые и замкнутый относительно булевых операций, является классом вполне детерминированных множеств.

Доказательство. Пусть A детерминировано с выигрышем I игрока, тогда A имеет вид $A = \bigcup_{t \in T} S(\alpha_t) \cup C$, причем $C \cap \cup S(\alpha_t) = \varnothing$, где T — множество индексов всех выигрышных стратегий I игрока в игре G_A. Рассмотрим $D_T = \{p/p\text{-отказ от } T\}$. Здесь два случая: 1) $D_T = \varnothing$; 2) $D_T \neq \varnothing$.

1) Это означает, что отказа от стратегий у I игрока нет. Следовательно, A вполне детерминировано.

2) Обозначим через $E^p = A \cap B_p$, $p \in D_T$. Заметим, (*). Для любого $p \in D_T$, для любого $e < 2^\omega$ $S(\alpha_e) \cap B_p \not\subset E^p$.

Выберем $e(p)$ такое, что $S(\beta_{e(p)}) \cap B_p \neq \varnothing$.

Рассмотрим множества $A_p = [\omega^e \setminus (S(\beta_{e(p)}) \cup B_p)] \cup E^p$.

Так как полученные множества A_p снова лежат в классе детерминированных множеств, то A_p детерминированы, но не могут выигрываться I игроком из-за определения A^p и (*). Следовательно, они выигрываются II. Отсюда следует, что в каждом множестве B_p II игрок выигрывает, а это говорит о вполне детерминированности.

Из теорем Мартина [1, 2] и теоремы 2 вытекают:

Следствие 1. (ZFC). Все борелевские множества вполне детерминированы.

Следствие 2 ($ZFC+$существует измеримый кардинал). Аналитические множества вполне детерминированы.

В работе [3] обсуждалась аксиома детерминированности проективных множеств (PD).

Следствие 3 $(ZFC+PD)$. Все проективные множества вполне детерминированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Donald A. Martin.** Measurable cardinals and analytic games. — «Fund. Math.», 1970, N 66, p. 287—291.
2. **Donald A. Martin.** Borel determinacy. — «Ann. of Math.», 1975, N 102, p. 363—371.
3. **Yiannis N.** Moschovakis. a new methods and results in Diseriptive zet Theory, Proceedings of International Congress of Math, Vancover, Canada, 1974.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова, г. Алма-Ата

Статья поступила в редакцию 30 января 1978 г.

УДК 517.9

Н. К. БЛИЕВ

НЕПРЕРЫВНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

где

$$|q(z)| \leqslant q_0 < 1 \quad (q_0 = \text{const}). \qquad (2)$$

Система вещественных дифференциальных уравнений