УДК 518.49

Б.Байжанов, Б.Омаров

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ ТЕОРИИ НА ФОРМУЛУ

А.Лахлан в работе [I] вводит понятие ограничения теории на формулу и утверждает (без доказательства), что для ω -стабильной теории любая модель ограниченной теории T' получается из некоторой соответствующей модели теории T путем ограничения на формулу. Цель заметки доказать следующее:

Теорема. Если T счетная, полная квазитотально трансцендентна, тогда для любой формулы любая модель ограниченной теории T' может быть восстановлена до модели теории T, в которой универсум модели T' есть область истинности этой формулы.

Введем необходимые определения и понятия. Пусть M модель теории T, $\bar{a} \in |M|$, $\varphi(x,\bar{a})$ бесконечная формула, т.е. имеет бесконечно много решений. Будем строить новую теорию T' следующим образом. Опишем новую структуру M' в новом языке. $|M'| = \varphi(M,\bar{a})$ – универсум модели есть множество истинности формулы $\varphi(x,\bar{a})$ в модели M. Для любой формулы с n -свободными переменными языка $L \cup \{C_a / a \in \bar{a}\}$ $\theta(x,\bar{a})$ определим предикат R_θ. $M' \models R_{\theta(x,\bar{a})}(\bar{b})$ тогда и только тогда, когда на модели $M \models \theta(\bar{b},\bar{a})$. $Th(M') = T'$.

Конечно, эта конструкция не зависит от выбора M. Теория T называется **квазитотально трансцендентной**, если для любого $U \in K(T)$, ($K(T)$ – категория всех подсистем всех моделей для T и всех мономорфизмов) множество рангованных (по Морли) точек пространства SU образуют плотное подмножество [2] . Возьмем произвольную модель $\mathcal{N}$ теории T' . Рассмотрим теорию языка $L_1 = L \cup \{c_b / b \in \mathcal{N}\}$.

$$T_1 = T \cup \{\theta(\bar{b}, \bar{a}) / \mathcal{N} \models R_{\theta(\bar{x}, \bar{a})}(\bar{b})\}.$$

Теория T_1 локально совместна, так, как на $\mathcal{N} \models T'$. T_1 – полная теория. В самом деле, рассмотрим произвольное предложение языка L_1 , $\Phi(\bar{b}, \bar{a})$. По формуле $\Phi(\bar{y}, \bar{a})$ найдем предикат $R_{\Phi(\bar{y}, \bar{a})}(\bar{y})$ и проверим истинность этого предиката на модели $\mathcal{N}$ и на элементах $\bar{b} \in \mathcal{N}$. Если этот предикат истинен, то $\Phi(\bar{b}, \bar{a}) \in T_1$. Если $\mathcal{N} \models \neg\Phi(\bar{b}, \bar{a})$, то $\Phi(\bar{b}, \bar{a}) \bar{\in} T_1$. Отсюда следует полнота теории T_1 . Так как T_1 локально совместна, то по теореме А.И.Мальцева имеет модель M_1 мощности модели $\mathcal{N}$. $\mathcal{N} \subset M_1 \in Mod\, T_1$. Но если ограничиться языком L , то модель $M_2 = M_1 \upharpoonright L$ есть модель теории T, $\mathcal{N}(\bar{a}) \in K(T)$. По следствию 32.4 [2] , $\mathcal{N}(\bar{a})$ имеет простое модельное расширение $\mathcal{N}(\bar{a}) < M_3$. Рассмотрим непротиворечивое множество $q_0 = \{\varphi(x, \bar{a})\} \cup \{x \neq c_b / b \in \mathcal{N}\}$,

q_0 – неглавное множество формул. Предположим противное, т.е. существует формула $\psi(x, \bar{c}, \bar{a})$, что $\exists x\, \psi(x, \bar{c}, \bar{a}) \in T_1$, (I)

$\vdash \forall x(\psi(x, \bar{y}, \bar{a}) \to \varphi(x, \bar{a}))$, (2)

$T_1 \vdash \forall x(\psi(x, \bar{c}, \bar{a}) \to x \neq b)$ (3)

для любого $b \in \mathcal{N}$.

По (I) $\mathcal{N} \models R_{\exists x \psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(\bar{c})$. (4)

По (2) из теории T' выводится

$\forall y(R_{\exists x \psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(\bar{y}) \to \exists x R_{\psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(x, \bar{y}))$. (5)

Проверим (5). В самом деле, пусть $\bar{a}$ такое, что $M \models R_{\exists x \psi(x, \bar{y}, \bar{a})}$ это означает по определению, что на $M \models \exists x \psi(x, \bar{a}, \bar{a})$. Тогда

найдется по (2) элемент $e \in M$, что $M \models \psi(e, \bar{a}, \bar{a}) \wedge \varphi(e, \bar{a})$. Это означает, что $M' \models R_{\psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(e, \bar{a})$; отсюда $M' \models \exists x R_{\psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(x, \bar{a})$. По (4) и (5)

$\mathcal{N} \models \exists x R_{\psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(x, \bar{c})$. (6)

Находим элемент $e \in \mathcal{N}$, что

$\mathcal{N} \models R_{\psi(x, \bar{y}, \bar{a})}(e, \bar{c})$. (7) Переходя к теории T_1 , получаем $\psi(e, \bar{c}, \bar{a}) \in T_1$ (8). Но (8) и (3) противоречивы. Следовательно q_0 –неглавное множество формул. По теореме 32.6 [2] простое модельное расширение является атомным, и следовательно в модели M_3 не найдется элементов, отличных от $\mathcal{N}$ и удовлетворяющих формуле $\varphi(x, \bar{a})$. Таким образом $\varphi(M_3, \bar{a}) = |\mathcal{N}|$ и т.д.

Литература

I. *A.H. Lachlan „Dimension and totally transcendental theories of rank 2", Lect. Notes Math, 1976, V 537, 153-183.*

2. Дж.Сако. Теория насыщенных моделей. Москва, "Мир", 1976.

УДК 5I9.49

Б.Байжанов, Б.Омаров

О КОНЕЧНЫХ ДИАГРАММАХ

Дана полная счетная теория T . $S(T)$ – множество всех полных типов теории T . Для любой модели $\mathcal{U}$ теории T обозначим $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \{p / p \in S(T),\ p$ реализуется в $\mathcal{U}\}$. $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ называется "конечная диаграмма модели $\mathcal{U}$ " (Шелах [I]). Пусть $n(T, \lambda)$ – число неизоморфных моделей