Министерство образования и науки Республики Казахстан
Институт математики и математического моделирования

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ»,
посвященная 100-летию со дня рождения академика
Тайманова Асана Дабсовича
Алматы 22-25 августа 2017 года

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2017

УДК 51

ББК 22.1

Печатается по решению Учённого совета от 11 августа 2017 года, протокол №8

Международная конференция «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики», посвященная 100-летию со дня рождения академика Тайманова Асана Дабсовича

Издание - Институт математики и математического моделирования МОН РК. -Алматы: ИМММ. - 2017. 173 с.

В книге представлены тезисы докладов конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Тайманова Асана Дабсовича. Тезисы докладов разделены на 3 секции: Алгебра, геометрия и математическая логика; Дифференциальные уравнения и теория функций; Математическое моделирование, вычислительные и информационные технологии.

Книга предназначена для широкого круга читателей - научным работникам в области математики, механики и информатики; преподователям; студентам высших учебных заведений механико-математического профиля: магистрантам, докторантам, а также всем тем, кто интересуется актуальными проблемами чистой и прикладной математики.

УДК 51

ББК 22.1

Программный комитет

- академик НАН РК Т. Ш. Кальменов председатель (Алматы, Казахстан)
- академик РАН Ю. Л. Ершов, сопредседатель (Новосибирск, Россия)
- академик РАН И. А. Тайманов, сопредседатель (Новосибирск, Россия)
- профессор Л. А. Алексеева (Алматы, Казахстан)
- профессор С. А. Бадаев (Алматы, Казахстан)
- член-корреспондент НАН РК Б. С. Байжанов (Алматы, Казахстан)
- профессор М. А. Бектемисов (Алматы, Казахстан)
- профессор Г. И. Бижанова (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК Н. К. Блиев (Алматы, Казахстан)
- академик РАН С. С. Гончаров (Новосибирск, Россия)
- профессор Н. С. Даирбеков (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК А. С. Джумадильдаев (Алматы, Казахстан)
- член-корреспондент РАН С. И. Кабанихин (Новосибирск, Россия)
- член-корреспондент НАН РК Б. Ш. Кулпешов (Алматы, Казахстан)
- профессор Ф. А. Мурзин (Новосибирск, Россия)
- профессор Е. А. Палютин (Новосибирск, Россия)
- академик НАН РК Т. С. Рамазанов (Алматы, Казахстан)
- профессор С. В. Судоплатов (Новосибирск, Россия)
- профессор Д. А. Тусупов (Астана, Казахстан)
- академик НАН РК С. Н. Харин (Алматы, Казахстан)
- профессор Н. Г. Хисамиев (Усть-Каменогорск, Казахстан)
- профессор А. А. Шкаликов (Москва, Россия)
- член-корреспондент НАН РК Д. Сураган (Алматы, Казахстан)
- д.ф.-м.н. В. В. Вербовский, ученый секретарь (Алматы, Казахстан)

Организационный комитет

- Б.С. Байжанов, председатель (ИМММ)
- М.А. Бектемисов, сопредседатель (КазНУ)
- Б.Ш. Кулпешов, сопредседатель (ИМММ)
- М.И. Алькенов (ИМММ)
- С.С. Байжанов (КазНУ, ИМММ)
- М.И. Бекенов (ЕНУ)
- М.М. Еримбетов (ИМММ)
- А.Д. Ершигешова (ИМММ)
- Т.Е. Жакупбеков (ИМММ)
- Т.С. Замбарная (КазНУ, ИМММ)
- К.К. Закирьянов (КазАСТ)
- Ф.Е. Кобдикбаева (КазНУ, ИМММ)
- А.Т. Нуртазин (ИВИТ)
- М.А. Сахауева (ИМММ)
- О.А. Умбетбаев (ИМММ)
- З.Г. Хисамиев (ИВИТ)
- А. Муканкызы, ответственный секретарь (КазНУ, ИМММ)

СЕКЦИИ:

1. Алгебра, математическая логика и геометрия

Председатель секции – Кулпешов Бейбут Шайыкович

2. Дифференциальные уравнения и теория функций

Председатель секции – Дженалиев Мувашархан Танабаевич

3. Математическое моделирование, вычислительные и информационные технологии

Председатель секции – Алексеева Людмила Алексеевна

Содержание

1 Алгебра, геометрия и математическая логика

ОБОГАЩЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ УНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

САЯН БАЙЖАНОВ[1,a], БЕЙБУТ КУЛПЕШОВ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан*

[2] *Международный университет информационных технологий, ул. Манаса/ Джандосова, 34А/8А, Алматы, 050040, Казахстан*

E-mail: [a]sayan-5225@mail.ru, [b]b.kulpeshov@iitu.kz

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данном докладе мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах.

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ (соответственно $b < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M.

Напомним, что полная теория T называется *счетно категоричной*, если любые две счетные модели данной теории изоморфны.

Определение. [3] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:

Второй автор был поддержан грантом 0830/ГФ4 КН МОН РК.

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие, что:

- Для любых $i,j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- Для каждого $i \in \omega \quad RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$ и $E(M,b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

Рангом выпуклости 1*-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

Пусть $M := \langle M, \Sigma \rangle$ — счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Обогатим структуру $M := \langle M, \Sigma \rangle$ до структуры $M' := \langle M, \Sigma, U^1 \rangle$ посредством добавления в сигнатуру нового унарного предиката $U(x)$, выделяющего выпуклое множество в M. Согласно основному результату из [3] $T' := Th(M')$ остается слабо о-минимальной теорией. Заметим, что обогащение унарным предикатом $U(x)$, выделяющим конечное число (скажем, m) выпуклых множеств в M, равносильно обогащению m унарными предикатами $U_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, выделяющими выпуклые множества в M (поскольку, очевидно, каждое такое выпуклое множество является $\emptyset$-определимым). Так как M — счетно категорична, то существует лишь конечное число неалгебраических 1-типов над $\emptyset$ $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Пусть для определенности

$$p_1(M) < p_2(M) < \ldots < p_s(M).$$

Предположим, что $U(M) \cap p_i(M) \neq \emptyset$ для каждого $1 \leq i \leq 3$, при этом $p_2(M) \subset U(M)$, а также существуют $a_1, a_2 \in p_1(M)$, $b_1, b_2 \in p_3(M)$ такие, что

$$M' \models a_1 < a_2 \wedge \neg U(a_1) \wedge U(a_2) \wedge b_1 < b_2 \wedge U(b_1) \wedge \neg U(b_2)$$

Тогда введение предиката $U(x)$ равносильно введению двух выпуклых предикатов $U_1(x)$ и $U_2(x)$, где

$$U_1(x) := P_1(x) \wedge \neg U(x) \text{ и } U_2(x) := P_3(x) \wedge U(x).$$

Поэтому далее рассматриваем предикат $U(x)$ такой, что для некоторого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\emptyset)$

$$U(M) \subset p(M), \quad U(M)^- = p(M)^-,$$

т.е существует $a \in p(M)$ такой, что $U(M) < a$.

Если правая граница предиката $U(x)$ определяется некоторым элементом $b \in M$, то обогащение предикатом $U(x)$ равносильно обогащению структуры M одной константой. Понятно, что в этом случае T' остается счетно категоричной. Поэтому далее рассматриваем случай, когда правая граница предиката $U(x)$ определяет иррациональное сечение в M.

В работе [4] были полностью описаны счетно категоричные слабо о-минимальные теории конечного ранга выпуклости. Используя это описание, нами доказана следующая теорема, устанавливающая что такие свойства как счетная категоричность и ранг выпуклости сохраняются при обогащении выпуклыми унарными предикатами:

Теорема. *Пусть M — модель счетно категоричной слабо о-минимальной теории ранга выпуклости k для некоторого $k < \omega$, M' — обогащение модели M произвольным конечным семейством выпуклых унарных предикатов $\{U_i \mid i < m\}$ для некоторого $m < \omega$. Тогда $Th(M')$ — счетно категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости k.*

Список литературы

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields* // Transactions of The American Mathematical Society, **352**:12, 5435–5483 (2000).

[2] B.Sh. Kulpeshov, *Weakly o-minimal structures and some of their properties* // The Journal of Symbolic Logic, **63**:4, 1511–1528 (1998).

[3] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates* // The Journal of Symbolic Logic, **66**:3, 1382-1414 (2001).

[4] Б.Ш. Кулпешов, *Счетно категоричные слабо о-минимальные структуры конечного ранга выпуклости* // Сибирский математический журнал, **57**:4, 776–791 (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

БАЗИСЫ КВАЗИТОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГРУППОИДОВ

АЙНУР БАШЕЕВА

Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010000, Казахстан

E-mail: basheeva@mail.ru

Универсальное хорново предложение с непустой позитивной частью называется *квазитождеством*. Аксиоматизируемый класс алгебр называется *квазимногообразием*, если он аксиоматизируется с помощью множества квазитождеств. Существует множество квазитождеств Σ, которое называется *базисом квазитождеств* квазимногообразия $\mathbf{K}$, если $\mathbf{K}$ совпадает с классом всех алгебр, на которых истинны все квазитождества из Σ. Базис квазитождеств Σ квазимногообразия $\mathbf{K}$ называется *независимым*, если$\mathbf{K} \neq Mod(\Sigma \setminus \varphi)$ для любого $\varphi \in \Sigma$. Базис квазитождеств Σ квазимногообразия $\mathbf{K}$ называется *ω-независимым*, если существует разбиение $\Sigma = \bigcup_{i\in\omega} \Sigma_n$ такое, что $\mathbf{K} \neq Mod(\Sigma \backslash \Sigma_n)$ для любого $n \in \omega$.

Вопрос о существовании независимых базисов квазитождеств был поднят в работах А. И. Мальцева [1] и А. Тарского [2].

В данной работе продолжается изучение независимой базируемости квазимногообразий, начатые в работе [3]. Основным результатом работы является построение континуума квазимногообразий дифференциальных группоидов, которые не имеют независимого базиса квазитождеств, но имеют ω-независимый базис квазитождеств. Отметим, что независимо аналогичный результат был получен также в работе [4].

Список литературы

[1] Мальцев А. И., *Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей*, Сиб. мат. журн. **8** (1967), 1005–1014.

[2] Tarski A., *Equational logic and equational theories of algebras*, Contrib. Math. Logic **8** (1966), 275–288.

[3] Basheyeva A., Nurakunov A., Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A., *Lattices of subclasses. III*, Сиб. электр. матем. изв. **14** (2017), 252–263.

[4] A. V. Kravchenko, A. M. Nurakunov, M. V. Schwidefsky, *On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras*, submitted for publication in 2017.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

РЕШЕТКА ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ

МАХСУТ БЕКЕНОВ

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010000, Казахстан

E-mail: bekenov50@mail.ru

Пусть $\hbar_L$ – множество всех полных теорий счетного языка L первого порядка.

Определение 1. *Прямым произведением* полных теорий T_i, $i \in I$ языка L (обозначаем $\prod_{i\in I} T_i$ или $T_1 \bullet T_2$) называется полная теория любого прямого произведения моделей $\prod_{i\in I} A_i$, где A_i модель теории T_i.

Алгебра $\hbar_{\mathcal{L}} = \langle \hbar_L; \bullet \rangle$ является коммутативной полугруппой с единицей. Эта алгебра также замкнута относительно бесконечных произведений. Проводятся исследования свойств этой алгебры и ее подалгебр. В частности квазимногообразий и подквазимногообразий. Можно говорить о фильтрованных произведениях, ультропроизведениях теорий.

Определение 2. Полная теория $Y \in \hbar_L$ *наследница* полной теории $X \in \hbar_L$, тогда и только тогда, когда некоторая подсистема некоторой модели теории X является моделью теории Y.

Определение 3. Полная теория $Y \in \hbar_L$ *гомоморфный образ* полной теории $X \in \hbar_L$, тогда и только тогда, когда некоторая модель теории Y является гомоморфным образом некоторой модели теории X.

Определение 4. Подмножество T_V множества полных теорий языка L назовем *квазимногообразием (многообразием) полных теорий* тогда и только тогда, когда T_V замкнуто относительно ультропроизведений, прямых произведений и наследственности (и гомоморфных образов).

Теорема 1. *Каждому квазимногообразию (многообразию) моделей языка L соответствует единственное квазимногообразие (многообразие) полных теорий. Это соответствие взаимнооднозначное.*

Например, квазимногообразию всех моделей языка L соответствует множество всех полных теорий языка L.

Теорема 2. *Для любых полных теорий T_1, T_2, T_3 языка L, если $T_1 = T_1 \bullet T_2 \bullet T_3$, то $T_1 = T_1 \bullet T_2$.*

Определение 5. Полную теорию T назовем *мультипликативной*, если $T \bullet T = T$.

Теорема 3. *В каждом многообразии полных теорий $\hbar_M$ имеется единственная мультипликативная теория $T_M \in \hbar_M$ такая, что для любой полной теории $T \in \hbar_M$ языка L имеем $T \bullet T_M = T_M$, то есть формульно определяющая это многообразие полных теорий. Причем, различным многообразиям полных теорий соответствуют различные полные теории, определяющие эти многообразия.*

Определение 6. Множество $P_{\hbar LM}$ – всех теорий, определяющих все подмногообразия теорий многообразия теорий $\hbar_L$, назовем *ядром подмногообразий теорий многообразия теорий* $\hbar_L$, а $P_{\hbar LVM}$ – множество всех теорий, определяющих все подмногообразия теорий квазимногообразия теорий $\hbar_V$ – *ядром подмногообразий теорий квазимногообразия теорий* $\hbar_V$.

Можно также говорить о ядре подмногообразий некоторого многообразия.

Теорема 4. *Пусть* $Y_1, Y_2 \in P_{\hbar LM}$, *тогда произведение* $Y_1 \bullet Y_2 \in P_{\hbar LM}$, *то есть* $P_{\hbar LM}$ *замкнуто относительно конечных прямых произведений.*

Введем на $\hbar_L$ двухместное отношение $\leq$, то есть $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \bullet y = y$.

Предложение 1. *Отношение* $\leq$ *является отношением частичного порядка на* $\hbar_L$.

Рассмотрим на $P_{\hbar LM}$ двухместную операцию $\wedge$, такую что, что если $Y_1, Y_2 \in P_{\hbar LM}$, то $Y_1 \wedge Y_2$ это теория, которая определяет наименьшее квазимногообразие теорий, содержащее множество $\{X \mid X \in \hbar_L, X \bullet Y_1 = Y_1\} \cap \{X \mid X \in \hbar_L, X \bullet Y_2 = Y_2\}$, в качестве подмножества.

Теорема 5. *Ядро* $P_{\hbar LM}$ *относительно операций* $\bullet$ *и* $\wedge$ *образует решетку.*

Теорема 6. *Решетка подмногообразий полных теорий многообразия полных теорий* $\hbar_M$ *изоморфна решетке ядра* $P_{\hbar LVM}$ *многообразия теорий* $\hbar_M$.

Следствие 1. *Решетка подмногообразий моделей некоторого многообразия моделей изоморфна решетке ядра подмногообразий соответствующего многообразия полных теорий.*

Показана также некоторая формульная выразимость ядра подмногообразий.

Список литературы

[1] A. Maltsev, *Algebraic systems* // Nauka, 1970.

[2] G. Keisler, H. Cheng *Model Theory* // Mir, 1977.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ

ВИКТОР ВЕРБОВСКИЙ

Университет имени Сулеймана Демиреля, ул. Абылайхана 1/1, Каскелен, Казахстан
E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com

В последние годы в теории моделей стали особенно актуальными вопросы применения техники теории стабильности для исследования нестабильных теорий, это направление некоторые специалисты по теории моделей называют неостабильностью.

Существуеют разных подходы к переносу техники теории стабильности. Один из них принадлежит С. Шелаху, он ввел различные ранги, которые характеризуют сложность поведения параметрического семейства формул. Также исследуют возможности переноса методов геометрической теории стабильности, которая наиболее хорошо зарекомендовала себя при изучении простых теорий, но которая, как оказалось, достаточно сложно применима для теорий, в которых определим порядок, в частности для линейно упорядоченных структур.

Данный доклад посвящен локализации теории стабильности, в частности, упорядоченной стабильности, где стабильность определяется внутри дедекиндовых сечений.

Одним из основных методов в теории моделей является изучение полных типов. Первый вопрос при изучении типов — это определимость типов.

С. Шелах ввел понятие ранга формулы, при помощи которого можно проверять определимость типов, и доказал фундаментальную теорему, что теория стабильна тогда и только тогда, когда все ее типы над любым множеством определимы.

Но есть и нестабильные формулы. В данной работе мы вводим новый ранг, который представляет из себя локализованную версию ранга Шелаха, и который позволяет доказывать определимость типов.

В частности, доказано, что если тип над моделью стабильной с точносью до Δ теории является определимым тогда и только тогда, когда его Δ-часть определима.

На основе предложенного ранга формулы мы получаем определение относительно стабильной теории. Если же не ограничиваться только n-типами для некоторого фиксированного числа n, а рассматривать вариант относительной стабильности, где мы принимаем во внимание малость числа полных n-типов для различных чисел n, то мы получаем обобщенную относительную стабильность, которая удивительным образом связана с такими классическими понятиями теории моделей, как стабильность, элиминация кванторов, счетная категоричность, сильная минимальность, о-минимальность, слабая о-минимальность, квази-о-минимальность, упорядоченная стабильность, и другими.

Автор был поддержан грантом 5125/ГФ4 КН МОН РК.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

О ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫХ МЕТРИКАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И БОГАТЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ И МНОГОСОРТНЫХ МОДЕЛЯХ

А.А. ВИКЕНТЬЕВ

Институт Математики СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: vikent@math.nsc.ru

В последнее время интенсивно изучаются теоретико-модельные метрики на множествах высказываний (экспертов) многозначных логик. Оставался открытым вопрос об описании всех таких метрик, которые получаются с привлечением конечного класса моделей предложенных автором. Здесь будет дан ответ на этот вопрос. Весь доклад посвящен обобщению и уточнению результатов и теорем о двукардинальных (богатых) множествах типов,доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности (некоторые из них вошли в диссертацию автора Теории с покрытием и формульные подмножества, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова под названием "Two cardinal theorems for sets of types in stable theory Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, которые были доложены Алма–Ате и Новосибирске на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100–летию акад. А.И. Мальцева и др.) на случай богатых семейств типов (формул) над параметрами модели многосортной, многозначной теории с–компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми моделями со свойством -отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов вложенной модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых, вычислимых(стабильных) типов или неразличимых элементов. Стабильность теорий не предполагается, а многие известные теоремы в обычном случае получаются как следствия. А также краткому обзору имеющихся результатов по применению многозначных исчислений для кластеризации множеств высказываний.

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей,вычислимости, в частности, для логических исчислений, локальной стабильности и наличия (даже локально) подходящих компактных измеримых (нужных малых мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$–отделимости

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 14–07–00851a, 14–7–00249a и кафедры НГУ, НГТУ

над реализациями семейств стабильных (определимых, рекурсивных) типов. Продолжено изучение числа двукардинальных моделей в классе теорий с покрытиями введенных автором. Рассмотрены вопросы определимости систем с метрикой в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств и их свойств двукардинальности. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов прикладной теории, логических закономерностей для кластеризации и упорядочения таких 'знаний' с помощью привлечения конечных, метрических или измеримых систем и расстояний между множествами моделей. Все это служит для введения новых метрик на классах неэквивалентных формул (логических высказываний экспертов или типов (совместных совокупностей высказываний) на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических, измеримых) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации многозначных формул–знаний в логиках, нпример, Лукасевича. В настоящее время найдены различные теоретико-модельные новые метрики, разработаны методы кластеризации по метрикам для конечных множеств формул в различных логических исчислениях с привлечением различных подклассов моделей(частично совместно с аспирантом Авиловым М.С., Фефеловой В.В.), изучены различные индексы качества для сравнений и способы введения коллективных метрик. Проведены совместно с Фефеловой В.В. модельные эксперименты с помощью разработанной программы, поддерживающей все необходимые алгоритмы и нахождение по расстояниям кластеризаций. Показано, что коллективные расстояния имеют более высокие индексы кластеризаций по сравнению с другими введенными метриками.В дальнейшем планируется использование лучших кластеризаций для локальной структуризации баз знаний.Новым шагом в приложениях наших подходов является использование различных малых конечных классов моделей, предложенных автором доклада, и взятие по ним (в конечном числе) коллективного расстояния, которое обеспечивает эффективную и оптимальную коллективную кластеризацию данных множеств формул. Ответ на поставленный выше вопрос важен для полного учета различных расстояний для малых конечных(малых) подклассов классов моделей, и будет использоваться в поисках лучшей из (разумных) возможных кластеризаций с применением коллективных расстояний.

Теорема. *Найдены все способы задания теоретико-модельных метрик на формулах многозначной логики высказываний (при фиксированной размере N многозначной логики).*

Список литературы

[1] Vikent'ev A. A. Distances and Degrees of Uncertainty in Many-Valued Propositions of Experts and Application of These Concepts in Problems of Pattern Recognition and

Clustering // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2014. Vol.24.n4. P. 409-421.

[2] Викентьев А. А., Фефелова В. В. Новые модельные расстояния и меры достоверности формул логики Лукасевича в автоматической кластеризации высказываний баз данных // Algebra and Model Theory 10. Collection of papers(Eds.: A.G.Pinus, K.N.Ponomaryov, S.V.Sudoplatov, and E.I.Timoshenko.) 2015, - Novosibirsk : NSTU. C. 197-209.

[3] Vikent'ev A. A., Avilov M. C. New Model Distances and Uncertainty Measures for Multivalued Logic // Artificial Intelligence: Methodology, Systems, and ApplicationsC.(Dichev, G. Agre (Eds.)),Lecture Notes on Computer Science, LNCS 9883, 2016. pp 89–98.

— ⁂ —

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРИКИ

П.Т. ДОСАНБАЙ, С.П. ДОСАНБАЙ

Казахский Национальный университет имени Аль Фараби , ул. Тимирязева, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: dosanbaip@gmail.com

В докладе рассматриваются вопросы определимости в арифметических структурах и их связи с некоторыми известными задачами комбинаторики и теории чисел. А. Вудс доказал, что разрешимость арифметической структуры с функцией следования и отношением простоты без отношения равенства эквивалентна известной теоретико числовой гипотезе П. Эрдеша. В этой связи несомненный интерес представляет изучение определимых отношений в арифметической структуре с отношением соседства и взаимной простоты. В работе также обсуждается связь понятия определимости с некоторыми задачами аддитивной комбинаторики.

— ⁂ —

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

ДМИТРИЙ ЕМЕЛЬЯНОВ[a], СЕРГЕЙ СУДОПЛАТОВ[b]

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный технический университет, пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия;

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия;

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: [a]dima-pavlyk@mail.ru, [b]sudoplat@math.nsc.ru

В работе рассматриваются алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул [1, 2] элементарных теорий $T(\mathrm{spm})$ s-полигонометрий spm и, в частности, элементарных теорий $T(\mathrm{strm})$ s-тригонометрий strm пар групп (G_1, G_2) [3].

Так как любая теория $T(\mathrm{spm})$ имеет единственный 1-тип p, ее алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул совпадает с моноидом $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.

Напомним [3], что линейно упорядоченная группа сторон G_1 любой s-полигонометрии spm коммутативна, а ее действие на каждой линии из spm задается положительным конусом $\mathrm{Pos}(G_1)$.

Для тригонометрических теорий бинарные изолирующие формулы задаются предикатами Q_g, где $g \in \mathrm{Pos}(G_1)$. При перемножении Q_g и $Q_{g'}$ образуется множество параметров сторон треугольников, у которых две стороны имеют параметры g и g', а параметры углов варьируются произвольно в рамках группы G_2.

Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории, вообще говоря, не сводится к указанным перемножениям, поскольку многоугольники могут не распадаться на треугольники и, следовательно, перемножения для меток u и v, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k),$$

$$(g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант №0830/ГФ4), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

двух ломаных, определяют множество меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

с произвольным $\beta \in G_2$.

Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ для теории $T(\mathrm{spm})$ называется *интервальной*, если для любых меток u и v соответствующих предикатам Q_{g_1} и $Q_{g'_1}$, $g_1, g'_1 \in \mathrm{Pos}(G_1)$, множество $u \cdot v$ состоит из всех меток w, соответствующих предикатам Q_g таким, что элементы g образуют некоторый интервал I_{g_1,g'_1} в $\mathrm{Pos}(G_1)$. При этом каждое множество $u \cdot v$ обозначается через $I_{u,v}$ и образует интервал относительно линейного порядка, порождаемого линейным порядком группы G_1.

Таким образом, каждой паре (u, v) соответствует как интервал I_{g_1,g'_1}, так и интервал $I_{u,v}$, задаваемый интервалом I_{g_1,g'_1}.

Заметим, что в силу $|g_1 - g'_1|, g_1 + g'_1 \in I_{g_1,g'_1}$ имеет место включение

$$[|g_1 - g'_1|, g_1 + g'_1] \subseteq I_{g_1,g'_1}. \tag{1}$$

Система $\mathcal{I}$ интервалов I_{g_1,g'_1}, удовлетворяющих (1), называется *согласованной* с умножением меток.

Теорема. *Для любой коммутативной линейно упорядоченной группы G_1 и согласованной системы $\mathcal{I}$ интервалов существует s-тригонометрия $\mathrm{strm} = \mathrm{strm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ такая, что теория $T(\mathrm{strm})$ обладает интервальной алгеброй бинарных изолирующих формул, определяющей систему $\mathcal{I}$.*

Список литературы

[1] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[2] S.V. Sudoplatov, *Classification of Countable Models of Complete Theories* // Novosibirsk: NSTU, 2014.

[3] S.V. Sudoplatov, *Group polygonometries* // Novosibirsk: NSTU, 2013.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ВОПРОС О СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ВЫБОРА

М.М. ЕРИМБЕТОВ

Институт математики и математического моделирования, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: emm_49@mail.ru,

Определение 1.

φ - функция выбора на семействе непустых множеств $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$, если $(\forall \alpha \in I)\varphi(\alpha) \in A_\alpha$.

Определение 2.

Семейство функций выбора $\{\varphi_\beta | \beta \in J\}$ для $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ покрывает это семейство, если $\cup_{\beta \in J}\{\varphi_\beta(\alpha) | \alpha \in I\} = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Заметим, что: если **U** – модель **ZFC** , то в **U** любое семейство $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ имеет покрывающее семейство функций выбора $\{\varphi_\beta | \beta \in J\}$.

Вопрос:

*Существует ли модель **U** теории **ZF** без **AC** такая, что для любого семейства $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ из **U**, если существует функция выбора φ на этом семействе, то существует семейство функций выбора $\{\varphi_\beta | \beta \in J\}$, которое покрывает это семейство множеств $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$?*

Список литературы

[1] Томас Йех, *Теория множеств и метод форсинга* // издательство «Мир», Москва, 1973.

— ⁂ —

СВОЙСТВО JSB ДЛЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП В ОБОГАЩЁННОМ ЯЗЫКЕ

АЙБАТ ЕШКЕЕВ[a], МАЙРА КАСЫМЕТОВА[b], ОЛЬГА УЛЬБРИХТ[c]

ул. Университетская, 28, Караганды, 100028, Казахстан

E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]mairushaasd@mail.ru, [c]ulbrikht@mail.ru

Рассмотрим язык L_P, полученный прибавлением к языку L одноместного предиката $P(x)$. Обозначим через T_P теорию, полученную добавлением к T аксиом, утверждающих, что интерпретация P также есть модель теории T. Мы можем сказать, что P интерпретируется как экзистенциально замкнутая подструктура, т.е. для каждой бескванторной формулы φ в языке L верно следующее: $(\forall \bar{x})\,[P(\bar{x}) \wedge (\exists \bar{y})\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\exists \bar{z})P(\bar{z}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z})]$, где $P(\bar{x})$ означает $P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$.

Модель теории T_P называется йонсоновской парой (J-парой) моделей T. Будем обозначать эту пару (N, M), где M – интерпретация предиката $P(\bar{x})$. В этой паре назовём N – большой моделью, а M – малой моделью.

Обозначим через $T_{P_{\text{АГ}}}$ теорию йонсоновских пар теории абелевых групп. Пусть M – класс моделей $T_{P_{\text{АГ}}}$.

Лемма 1

Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M$; $\mathfrak{C} \in M$ *и* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$; $|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}|$, *то существует такая система* $\mathfrak{D} \in M$, *что* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$.

Лемма 2

Если M абстрактный и удовлетворяет лемме 1, то M удовлетворяет и свойству амальгамируемости (AP).

Теорема 1

Теория $T_{P_{\text{АГ}}}$ – совершенная йонсоновская теория.

Следующее понятие было рассмотрено Д. Гудриком в работе [1] и там же он обозначает его как свойство Шрёдера-Бернштейна (SB).

Теория T допускает свойство SB если для любых двух взаимно элементарно-вложимых моделей теории T следует, что они изоморфны.

Но при этом Д. Гудрик отмечает, что впервые данное свойство было рассмотрено для ω-стабильных теорий Нурмагамбетовым Т.А. в работах [2], [3]. В частности, Нурмагамбетовым Т.А. был получен следующий результат относительно свойства SB.

Теорема 1.2 из [2]

Если T является ω-стабильной теорией, тогда T имеет SB свойство тогда и только тогда, когда T ограниченной размерности.

Д.Гудриком в работе [1] получено описание свойства SB для классифицируемой (суперстабильной, с NDOP и NOTOP) теории с ограниченной размерностью. В частности, в работе [4] Д.Гудрик и М.Ласковский описали свойство SB для слабо минимальных теорий.

В дальнейшем Д.Гудрик [5] нашёл необходимые и достаточные условия того, что теория абелевых групп допускает свойство SB. А именно, им была доказана следующая теорема:

Теорема 3.8 из [5]

Если G - абелева группа, то следующие условия эквивалентны:

1. $Th(G, +)$ имеет свойство Шрёдера Бернштейна;

2. $Th(G, +)$ – ω-стабильна;

3. G есть прямая сумма делимой группы и группы с кручением ограниченной экспоненты;

4. $Th(G, +)$ - суперстабильна, и если $(\overline{G}, +) \equiv (G, +)$ является насыщенной, тогда каждое отображение в $Aut(\overline{G}/\overline{G}^0)$ является унипотентным.

Нами было переопределено данное понятие для йонсоновских теорий и обозначено как JSB, а именно: йонсоновская теория T имеет свойство JSB, если для любых двух экзистенциально замкнутых моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ теории T из того, что они взаимно изоморфно вкладываются друг в друга следует, что они изоморфны.

Следующий результат является йонсоновским аналогом теоремы 3.8 из работы [5] в обогащенном языке, а именно:

Теорема 2

Пусть $T_{P_{A\Gamma}}$ – теория йонсоновских пар теории абелевых групп, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T_{P_{A\Gamma}}$ *– J-ω-стабильна;*
2. $T^*_{P_{A\Gamma}}$ *– ω-стабильна;*
3. $T_{P_{A\Gamma}}$ *обладает свойством JSB.*

Список литературы

[1] J. Goodrick *When are elementarily bi-embeddable models isomorphic?* // PhD thesis, University of California, Berkeley, 2007.

[2] Т.А. Нурмагамбетов *О взаимно элементарной вложимости моделей* // Теория алгебраических структур: сборник научных трудов, Караганда, 109-115 (1985).

[3] Т.А. Нурмагамбетов *Характеризация ω-стабильных теорий ограниченной размерности* // Алгебра и логика, **28**:5, 584–596 (1989).

[4] J. Goodrick, M.C. Laskowski *The Schröder-Bernstein property for a-saturated models* // Proc. AMS, **142**:3, 1013–1023 (2014).

[5] J. Goodrick *The Schröder-Bernstein property for theories of abelian groups* // arXiv.org > math > arXiv:0705.1850v1, 2007.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

РЕШЁТКИ ПОЗИТИВНО ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛ Δ-ЙОНСОНОВСКИХ ФРАГМЕНТОВ В ДОПУСТИМЫХ ОБОГАЩЕНИЯХ СИГНАТУРЫ

АЙБАТ ЕШКЕЕВ[a], МАЙРА КАСЫМЕТОВА[b], ОЛЬГА УЛЬБРИХТ[c]

ул. Университетская, 28, Караганды, 100028, Казахстан

E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]mairushaasd@mail.ru, [c]ulbrikht@mail.ru

В данном тезисе рассматриваются позитивные йонсоновские фрагменты счетного языка первого порядка, а именно Δ-йонсоновские фрагменты. Получен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами йонсоновского фрагмента, центрального пополнения данного йонсоновского фрагмента и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этого йонсоновского фрагмента.

Рассматриваются позитивные йонсоновские фрагменты в обогащенном языке и на языке центральных типов для них доказываются «позитивные йонсоновские» аналоги теорем [1] на основе результатов из [1], [2].

Пусть L - язык первого порядка. Пусть – йонсоновский фрагмент языка L. Обозначим через $E_n(L)$ множество всех экзистенциальных формул языка L с n свободными переменными, $E(L) = \bigcup\limits_{n<\omega} E_n(L)$. Пусть $E_n(T)$ – дистрибутивная решетка классов эквивалентности $\varphi^T = \{\psi \in E_n(L) \,|\, T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$, $\varphi \in E_n(L)$, $E(T) = \bigcup\limits_{n<\omega} E_n(T)$.

Установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1

Пусть - полный для ∃-предложений йонсоновский фрагмент. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *T совершенный йонсоновский фрагмент, как йонсоновская теория;*

2. *T^* модельно полный;*

3. *$E_n(T)$ - булева алгебра,*

где полнота йонсоновского фрагмента для ∃-предложений означает, что любые две модели этого фрагмента относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга.

В связи с вышеуказанными результатами относительно введенных понятий получены результаты, связанные с йонсоновскими фрагментами. В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновского фрагмента и позитивной модельной полноты центрального пополнения йонсоновского фрагмента йонсоновской теории T.

Теорема 2

Пусть T – полный для $\exists$-предложений йонсоновский фрагмента, T^* - центр йонсоновского фрагмента. Тогда:

1. *T^* допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;*

2. *T^* позитивно модельно полный тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет позитивное экзистенциальное дополнение.*

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновского фрагмента.

Теорема 3

Пусть T – йонсоновский фрагмент. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *T – совершенный йонсоновский фрагмент, как йонсоновская теория;*

2. *$E_n(T)$ слабо дополняема;*

3. *$E_n(T)$ - алгебра Стоуна.*

Все неопределенные в данном тезисе понятия и, связанные с ними, определения можно найти в [1], [2].

Список литературы

[1] V. Weispfenning *The model-theoretic significance of complemented existential formulas* // The Journal of Symbolic Logic, **46**:4, 843–849 (1981).

[2] А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова *Йонсоновские теории и их классы моделей* // Монография, Караганда, Изд-во КарГУ, 2016.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГРУПП УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

А.А. КОНЫРХАНОВА[1,a], Н.Г.ХИСАМИЕВ[2,b]

[1]*Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан*

[2]*Восточно-Казахстанский государственный университет им. С.Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан*

E-mail: [a]*ErkeshanK@mail.ru*, [b]*hisamiev@mail.ru*

Через $UT_n(K)$ обозначим группу всех верхних унитреугольных матриц над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей. Элемент g группы G называется *универсальным*, если уравнение $[g,x]=f$ разрешимо для любого элемента $f \in G'$. Это понятие введено В.А.Романьковым. Это понятия находит применение в исследовании разрешимость данной системы уравнений над группой G. В работе Н.С. Бахта [1] доказано, что любой элемент $f \in UT_n'(K)$ представим в виде $[g,x]$, где g - фиксированный элемент группы $UT_n(K)$. В качестве элемента g можно взять любой элемент, который имеет первую побочную диагональ, состоящую из единиц. Кроме этого, в [2] аналогичные результаты получены для членов нижнего центрального ряда группы $UT_n(K)$ (см. также [3]). В [4] содержится обзор результатов по разрешимости уравнений в группах, упоминающий обсуждаемые результаты. В работах А.А.Конырхановой [5,6] впервые были получены некоторые необходимые и достаточные условия универсальности элемента для групп $UT_n(\mathbb{F})$ и $UT_n(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{F}$ - произвольное поле и $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел.

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия универсальности элемента для групп унитреугольных матриц произвольной конечной размерности над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей и над евклидовым кольцом.

Если $n=2$, то $G \leftrightharpoons UT_2(K) \cong K^+$, т.е. G - абелева группа, поэтому $G'=E$, где E - единичная матрица. Отсюда любой элемент из G универсален. Поэтому, в дальнейшем рассматриваются группы $UT_n(K)$ размерности $n \geq 3$.

Лемма 1. *Если φ - автоморфизм группы G, то элемент $g \in G$ универсален тогда и только тогда, когда его образ $\varphi(g)$ универсален.*

Пусть K - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Введем следующие мат-

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № 3953 (GF4)).

рицы из $UT_n(K)$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ 0 & 1 & g_{23} & \dots & g_{2,n-1} & g_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & g_{3,n-1} & g_{3n} \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, g^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & g^*_{13} & \dots & g^*_{1,n-1} & g^*_{1n} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & g^*_{2,n-1} & g^*_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & g^*_{3,n-1} & g^*_{3n} \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = 1$, если $g_{n-1,n} \neq 0$, в противном случае $\varepsilon = 0$, и элементы $g_{i,i+1} \neq 0$ при $i = 1, 2, ..., n-2$, а в g^* все элементы первой побочной диагонали равны 1 за возможным исключением ε.

Обозначим через $diag_i a$ (где $i = 1, 2, ..., n$) диагональную матрицу из группы всех треугольных матриц $T_n(K)$, у которой на i–м месте главной диагонали стоит $a \in K/0$, а на остальных местах главной диагонали стоят единицы.

Теорема 1. *Пусть матрица g из группы всех унитреугольных матриц $UT_n(K)$ над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей такова, что все её элементы первой побочной диагонали кроме возможно последнего обратимы в K. Тогда найдется матрица g^* из $UT_n(K)$ вида (1), сопряженная с g в группе $T_n(K)$, и такая, что справедливо следующее утверждение: матрица g универсальна тогда и только тогда, когда g^* универсальна.*

Теорема 2. *Матрица $g \in UT_3(K)$, где K - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, универсальна тогда и только тогда, когда g_{12} и g_{23} взаимно просты.*

Следствие 1. *Существует алгоритм, который по любой матрице $g \in UT_3(\mathbb{Z})$ определяет ее универсальность.*

В дальнейшем предполагается, что $n > 3$.

Теорема 3 *(необходимое условие универсальности). Пусть K - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда из универсальности элемента $g \in UT_n(K)$, следует, что*

$$g_{i-1,i} \neq 0, 2 < i < n.$$

Теорема 4 *(достаточное условие универсальности). Пусть K - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей 1. Если все элементы первой побочной диагонали матрицы $g \in UT_n(K)$, $n \geq 3$, кроме возможно последнего обратимы в K, то g универсальна.*

Теорема 5 *(достаточное условие универсальности). Пусть K - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Если все элементы первой побочной диагонали матрицы $g \in UT_n(K)$, $n \geq 3$, кроме возможно первого, обратимы в K, то g универсальна.*

Следствие 2. *Если все элементы первой побочной диагонали матрицы $g \in UT_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, кроме возможно последнего или первого равны 1 или -1, то g универсальна.*

Лемма 2. *Пусть в евклидовом кольце E нет обратимых элементов, кроме 1 и -1. Тогда для любых элементов g_1, g_2 из E отличных от нуля справедлива эквивалентность:*

элементы g_1, g_2 не имеют общих делителей, отличных от 1, тогда и только тогда, когда найдутся $u_1, u_2 \in E$ такие, что:

$$g_1u_1 + g_2u_2 = 1.$$

Теорема 6 *(Необходимые условие универсальности). Пусть E - евклидово кольцо не имеющее обратимых элементов, кроме 1 и -1. Тогда из универсальности матрицы $g \in UT_n(E)$, $n > 3$ следует, что все элементы её первой побочной диагонали, кроме возможно крайних, равны ± 1, т.е.:*

$$|g_{i-1,i}| = 1, 2 < i < n.$$

Следствие 3. *Пусть R – либо кольцо целых чисел, либо кольцо полиномов $\mathbb{Z}[x]$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда из универсальности матрицы g из $UT_n(R)$ следует, что все элементы её первой побочной диагонали, кроме крайних, равны 1 или -1.*

Известно, что если E - евклидовое кольцо, где нет обратимых элементов кроме 1 и -1, то кольцо многочленов $E(x)$ такое же евклидовое кольцо.

Следствие 4. *Пусть E - евклидовое кольцо , где нет обратимых элементов кроме 1 и -1. Тогда из универсальности матриц g из $UT_n(E(x))$ над кольцом полиномов от одной переменной следует, что все её элементы первой побочной диагонали, кроме возможно крайних, равны 1 или -1.*

Список литературы

[1] Н.С. Бахта, *О представимости коммутанта группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной* // Вестник Омского университета, №2, 44–46 (2012).

[2] Н.С. Бахта, *О представимости членов нижнего центрального ряда группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной* // Вестник Омского университета, №4, 13–15 (2013).

[3] А.В. Меньшов ,В.А. Романьков, *О p-разрешимости некоторых регулярных уравнений над p-группой Гейзенберга* // Вестник Омского университета, №3, 11–14 (2014).

[4] V. Roman'kov, *Equations over groups*// Groups Complexity Cryptology.№2,Vol.4, 191–240 (2012).

[5] А.А. Конырханова, *Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над полем*// Вестник Омского университета.№4(78), 18–20 (2015).

[6] А.А. Конырханова, *Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над кольцом целых чисел*//Вестник Омского университета.№2, 11–13 (2016).

— ⁂ —

О КОМПЛЕКСНОЙ МЕРЕ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА

ИВАН ЛАТКИН[a], ЛЮДМИЛА ЛАТКИНА[b]

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, ул. Серикбаева, 19, Усть-Каменогорск, 070004, Казахстан

E-mail: [a]lativan@yandex.ru, [b]ludalat@yandex.ru

Простейшая мера сложности реализации алгоритма — время работы машины Тьюринга, т.е. количество выполненных ею элементарных операций на ленте, в чистом виде далеко не всегда адекватно отображает истинную сложность алгоритма, как показывают несложные примеры [2,3]. Подобные эффекты отмечены и разработчиками практических алгоритмов — известны примеры, когда программы, написанные на основе субэкспоненциальных алгоритмов считают не хуже написанных на основе полиномиальных. Причина этого кроется в том, что временная сложность в чистом виде не учитывает характеристик используемых программ. Таким образом, истинная мера сложности должна быть *комплексной*, т.е. учитывать и время работы машины, и сложность её программы. Известно несколько подходов к оценке сложности программ (сложности описания алгоритма): это может быть число внутренних состояний или число внешних символов, или число команд. Как правило, гёделевская нумерация машин Тьюринга строится с учётом всех этих параметров и монотонно зависит от них, поэтому сам номер является неплохой оценкой сложности программы, в случае подобной монотонной гёделевской нумерации.

Это можно уточнить следующим образом. В теории вычислимости алгоритмом часто называют реализацию на машине Тьюринга какой-то вычислимой функции, а номером алгоритма — гёделевский номер этой машины, т.е. алгоритм понимается как n-местная функция. На практике алгоритм обычно трактуется как процедура общего характера, производящая вычисления при всех n и любых данных $x_1,\ldots,x_{\alpha(n)}$ (не обязательно $\alpha(n)=n$), т.е. как функция из $\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^t$ в $\mathbb{N}$. В [2] для согласования этих подходов предложено считать, что *реализация числового алгоритма* $\mathcal{A}$, с номером $t=c(l,r)$ и работающего с наборами длины $\varphi_r(n)=\alpha(n)$, это — функция φ_l такая, что для всякого n число $m=\varphi_l(n)$ — гёделевский номер $\alpha(n)$-местной вычислимой функции, которая при любых $x_1,\ldots,x_{\alpha(n)}$ выдаёт результат $\varphi_m(x_1,\ldots,x_{\alpha(n)})$, применения алгоритма $\mathcal{A}$ к $x_1,\ldots,x_{\alpha(n)}$.

Такой подход позволяет найти средство для косвенной оценки *комплексной меры сложности* для подкласса числовых алгоритмов — так называемых *практических алгоритмов* $\mathcal{A}lgpr(F)$ [2] (с ограниченной сложностью программ и вычислений), когда вводятся ограничения сверху подходящей примитивно рекурсивной функцией F на величину $\varphi_m(x_1,\ldots,x_{\alpha(n)})$, и самое главное — на величину $m=\varphi_l(n)$ и/или время её получения.

Работа выполнена при частичной поддержке Комитета по науке МОН РК (грант № 3953/ГФ4).

Классы реализаций числовых и практических алгоритмов и их подклассы, в частности подкласс $\mathcal{A}lgpr(F)$ реализаций практических алгоритмов с ограниченной сложностью программ и вычислений, удобно задавать определением их индексных множеств, т.е. множеством их номеров t. Подкласс $\mathcal{A}lgpr(F)$ достаточно широк — при подходящей ограничивающей функции F почти все применимые на практике алгоритмы обладают реализациями из этого класса. В то же время он вполне обозрим, так как его индексное множество принадлежит классу Σ^0_2. При введении более жёстких ограничений получаются подклассы с Π^0_1- или Σ^0_1-вычислимыми индексными множествами.

Для практических алгоритмов имеется возможность делать оценки их истинной сложности, а не просто времени работы, довольно просто: можно наряду с числом элементарных шагов $T(m, x_1, \ldots, x_{\alpha(n)})$ машины Тьюринга P_m на входе $\langle x_1, \ldots, x_{\alpha(n)}\rangle$ также оценивать величины номеров m или необходимое для их вычисления время, а затем просуммировать время вычисления величин $\varphi_m(x_1, \ldots, x_{\alpha(n)})$ и m. Несложно понять, что подобная мера сложности K не является ещё желаемой комплексной мерой сложности, а только её верхней границей, и вполне может быть, что достаточно грубой. Таким образом, истинная мера сложности алгоритма с номером t на входе $\langle x_1, \ldots, x_{\alpha(n)}\rangle$ заключена между величинами $T(m, x_1, \ldots, x_{\alpha(n)})$ (снизу) и K (сверху).

Сделаем упрощение определений из [2], в частности, теперь числовые и практические алгоритмы будем рассматривать как вычислимые функции двух аргументов: наборы $\langle x_1, \ldots, x_{\alpha(n)}\rangle$ заменим их канторовским номером, а вторым аргументом считаем параметр n, который играет роль *структурной размерности*. Все доказанные в [2] свойства при этом сохраняются и получаются новые.

Подкласс $\mathcal{PA}lgpr(f)$ (или $\mathcal{E}^{(k)}\mathcal{A}lgpr(f)$) реализаций алгоритмов с полиномиальной (или экспоненциальной уровня k) сложностью вычислений, получаются из класса $\mathcal{A}lgpr(f)$ добавлением к ограничению на величину результата алгоритма в определении 3 из [2] полиномиального (или экспоненциального уровня k) ограничения на время его вычисления. Эти подклассы также имеют индексные множества из Σ^0_2. Из определения имеем, что для всех $n \in \omega$ верно

$$\mathcal{PA}lgpr(f) = \mathcal{E}^{(0)}\mathcal{A}lgpr(f) \subseteq \mathcal{E}^{(1)}\mathcal{A}lgpr(f) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{E}^{(n+1)}\mathcal{A}lgpr(f).$$

В связи с этим фактом, иерархия Ершова Σ^m_n разностей вычислимо перечислимых множеств, изученная в [1], естественным образом продолжена в [2] до иерархии $\Sigma^m_{2,n}$ разностей Σ^0_2-множеств (считаем, что $\Sigma^m_{1,n}$ — это Σ^m_n):

Определение. *Считаем, что множество $M \in \Sigma^m_{2,n}$ при $n > 0$ в том и только том случае, когда существует такая упорядоченная n-ка $\langle R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}\rangle$ Σ^0_2-множеств $R_0 \supseteq R_1 \supseteq \ldots \supseteq R_{n-1}$, что $M = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant k}(R_{2i} \setminus R_{2i+1})$, где k — целая часть от деления $n-1$ на 2, и $R_n = \emptyset$, если n — нечётное. Положим $\Sigma^m_{2,0} = \Pi^m_{2,0} = \Delta^m_{2,0}$, и $M \in \Pi^m_{2,n} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus M \in \Sigma^m_{2,n}$.*

Теорема. *Имеется такая вычислимая функция f, что при всяком $n > 0$ множество*

$M_n = \bigcup_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathcal{E}^{(n-1-2i)}\mathcal{A}lg(f) \setminus \mathcal{E}^{(n-2i-2)}\mathcal{A}lgpr(f))$ (где k — целая часть от деления $n-1$ на 2, и $\mathcal{E}^{(-1)}\mathcal{A}lgpr(f) = \varnothing$, если n — нечётное) — m-универсально (m-полно) в классе $\Sigma^m_{2,n}$. Более того, последовательность $\langle \mathcal{E}^{(n-1)}\mathcal{A}lgpr(f), \mathcal{E}^{(n-2)}\mathcal{A}lgpr(f), \ldots, \mathcal{E}^{(0)}\mathcal{A}lgpr(f)\rangle$ — m-универсальна (m-полна) в классе последовательностей $\langle C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}\rangle$ Σ^0_2-множеств таких, что $C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots \supseteq C_{n-1}$.

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций.* – М.: Наука, 1977.

[2] И. В. Латкин, Л. П. Латкина, *Разности Σ^0_2-множеств и практические алгоритмы* // Матер. II междунар. научно-практ. конф. «Тенденции и перспективы развития современного научного знания». – М., Инстит. стратег. исследований., 44–56 (2012).

[3] И. В. Латкин, А. В. Селиверстов, *Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел* // Вестник КарГУ, **77**:1, 47–55 (2015).

— ⁂ —

СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ВХОЖДЕНИЯ В ИЗОЛЯТОРЫ ЦЕНТРАЛОВ В ВЫЧИСЛИМЫХ ГРУППАХ

ИВАН ЛАТКИН[a], НУРЛАН МАРХАБАТОВ[b]

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, ул. Серикбаева, 19, Усть-Каменогорск, 070004, Казахстан

E-mail: [a]lativan@yandex.kz, [b]nur_24.08.93@mail.ru

Мы исследуем сложность вычисления изоляторов членов нижнего центрального ряда (централов) у вычислимой группы без кручения, а также вычислимость фактор групп по этим подгруппам. Эти вопросы тесно связаны с вопросами о сложности вычисления членов в верхнем и нижнем центральных рядах вычислимой группы; точнее, с проблемой вхождения в коммутанты и члены этих центральных рядов у конструктивных групп. Последний вопрос интересен тем, что многие алгебраические свойства нильпотентных групп доказываются индукцией по ступени нильпотентности; для этой цели часто рассматриваются члены верхнего и нижнего центральных рядов и фактор группы по ним. Естественно ожидать, что этот метод применим и к вычислимым группам.

Эти надежды частично оправданы для R-групп, допускающих позитивную нумерацию, размерность коммутанта которых конечна [1], а также для матричных групп. Кроме того,

Работа выполнена при частичной поддержке Комитета по науке МОН РК (грант № 3953/ГФ4).

вложенность членов центральных рядов друг в друга создает иллюзию того, что способность решать проблему вхождения для любого из членов этих рядов позволит нам легче решить такие вопросы для других.

Это верно для конечно порожденных групп. Действительно, пусть $(G;\nu)$ — такая позитивно нумерованная группа. Тогда $\nu/(\gamma_n G)$ является позитивной нумерацией конечно порожденной нильпотентной группы $G/(\gamma_n G)$, поскольку проблема равенства слов для таких групп разрешима, группа $(G/(\gamma_n G),\ \nu/(\gamma_n G))$ — конструктивная. Кроме того, элемент g группы G принадлежит центру тогда и только тогда, когда равенство $[g,x]=1$ для каждого образующего x из G. Поэтому индукцией по параметру i нетрудно доказать, что каждый член $\zeta_i G$ верхнего центрального ряда может быть эффективно вычислен в вычислимой конечно порожденной группе G.

Таким образом, основное внимание мы уделяем бесконечно порожденным нильпотентным вычислимым группам. В общем случае сложность проблемы вхождения в любой нетривиальный член такого ряда может быть независимой от сложности этой проблемы для других членов этих рядов даже для нильпотентных групп без кручения [3, 3], как показывают следующие теоремы.

Теорема 1 [3]. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ существует n-ступенно нильпотентная группа $G(n)$ без кручения такая, что для любого набора вычислимо Тьюринговых перечислимых степеней $\widehat{a} = \langle a_2, \dots, a_n\rangle$ найдётся конструктивизация $\nu(\widehat{a})$ группы $G(n)$, при которой сложность проблемы вхождения в i-й централ равна a_i.*

Теорема 2 [3]. *Зафиксируем $n > 2$ и два набора вычислимо перечислимых Тьюринговых степеней $d_1, ..., d_{n-1}$ и $e_2, ..., e_n$. Существует конструктивная группа без кручения (G, α), ступени нильпотентности n сложность проблемы вхождения в i-й гиперцентр равна d_i для $1 \leqslant i \leqslant n-1$, а в i-й централ равна e_i для $2 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, (G, α) допускает вычислимый порядок, поэтому это вычислительное свойство независимости выполняется и для вычислимых упорядоченных нильпотентных групп.*

В случае нильпотентных групп, имеющих кручение, сложность проблемы вхождения в централы и гиперцентры может не зависеть также и от вычислимой нумерации всей группы [3, 3]. Кроме того, подобная независимость наблюдается и в вопросе о вычислимости факторов по членам этих крайних центральных рядов [3].

Теорема 3 [3]. *Для каждого натурального $n \geqslant 2$ и произвольного набора $\widehat{a} = \langle a_2, \dots, a_n\rangle$ вычислимо перечислимых степеней существует нильпотентная группа $G(\widehat{a})$ ступени n, обладающая следующими свойствами:*

(i) сложность проблемы вхождения i-й централ равна a_i для каждой конструктивизации ν группы $G(\widehat{a})$;

(ii) фактор группа $G(\widehat{a})/\gamma_i G(\widehat{a})$ вычислима тогда и только тогда, когда $a_i = 0$;

(iii) для каждой вычислимо перечислимой степени b существует такая конструктивизация μ группы $G(\widehat{a})$, что сложность проблемы вхождения в периодическая часть $\tau G(\widehat{a})$

равна b. В частности, эта группа не является автоустойчивой.

Таким образом, можно утверждать, что не существует необходимых и достаточных условий для вычислимости нильпотентных групп, использующих индукцию по ступени нильпотентности, в общем случае. Долгое время оставалась надежда, что подобные признаки верны для класса нильпотентных групп без кручения, если индукцию вести не по членам верхнего и нижнего центральных рядов, а по изоляторам централов. Однако и в этом случае картина достаточно сложная и эта надежда не оправдана.

Пусть G — группа и $H \leqslant G$. Напомним, что изолятором подгруппы H называется группа, порожденная всеми элементами g из G, для которых существует ненулевое число n, что $g^n \in H$, то есть, $IH = gr\{g \in G | (\exists n \in Z \setminus \{0\})(g^n \in H)\}$ — изолятор подгруппы H. В частности, $I\gamma_k G = gr\{g \in G | (\exists n \in Z \setminus \{0\})(g^n \in \gamma_k G)\}$ — изолятор k-го централа.

Интерес к изоляторам подгрупп объясняется следующими простыми и известными фактами, которые изложены и доказаны в [5]. Если G – нильпотентная ступени r группа, то изолятор k-го централа $I\gamma_k G$ — нормальная подгруппа. Если G группа без кручения, то $G/(I\gamma_k G)$ — нильпотентная группа без кручения ступени не более чем $k-1$.

Если $\langle G, \mu \rangle$ — позитивно нумерованная нильпотентная группа без кручения, то все фактор группы $\gamma_j G/(I(\gamma_{j+1}) \cap \gamma_j G)$ и $I(\gamma_j G)/I(\gamma_{j+1})G$ — позитивно нумеруемые абелевы группы без кручения, а потому и вычислимые [6], здесь $I(\gamma_1 G) = \gamma_1 G = G$; в частности, фактор группа $G/I(\gamma_2 G)$ по изолятору второго централа — всегда вычислимая для вычислимой группы G. Вопрос о вычислимости факторов по изоляторам третьего и более централов существенно сложнее как показывает следующая теорема.

Теорема 5. *Для каждого натурального $n \geqslant 3$ и произвольного набора $\widehat{d} = \langle d_3, \ldots, d_n \rangle$ вычислимо перечислимых тьюринговых степеней существует вычислимая нильпотентная ступени n группа без кручения $G(\widehat{d})$, обладающая следующими свойствами:*

(i) сложность проблемы вхождения в изолятор i-го централа не меньше d_i для любой конструктивизации группы $G(\widehat{d})$;

(ii) фактор группа $G(\widehat{d})/\gamma_i G(\widehat{d})$ вычислима тогда и только тогда, когда $d_i = 0$.

Список литературы

[1] Н. Г. Хисамиев, *О позитивных и конструктивных группах* // Сибирский математический журнал, **53**:2, 1133-1141 (2012).

[2] И.В. Латкин, *Алгоритмическая сложность проблемы вхождения в коммутанты и члены нижнего центрального ряда* // Сибирский математический журнал, **28**:5, 102-110 (1987).

[3] B. F. Csima, R. Solomon, *The complexity of central series in nilpotent omputable groups* // Annals of Pure and Applied Logic, No 162., 667-778 (2011).

[4] Ф. Холл, *Нильпотентные группы* // Математика, **12**:1, 3-36 (1968).

[5] Н. Г. Хисамиев, *Иерархии абелевых групп без кручения* // Алгебра и логика, **25**:2, 205-226 (1986).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕТОК ПОДПОЛУГРУПП ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

СВЕТЛАНА ЛУЦАК[1,a], МАРИНА ШВИДЕФСКИ[2,b]

[1] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010000, Казахстан;*

[2] *Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия*

E-mail: [a] *sveta_lutsak@mail.ru;* [b] *semenova@math.nsc.ru*

Авторами изучается сложность строения решетки $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ подполугрупп полугруппы элементарных теорий класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ алгебраических систем сигнатуры σ. В настоящее время существует несколько подходов к понятию сложности. Среди прочих известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: Q-универсальность и невычислимость множества всех их конечных подрешеток (свойство невычислимости Нуракунова или иррациональность). Понятие Q-универсальности было введено М. В. Сапиром в 1985 г. в работе [3]. Квазимногообразие $\mathbf{K}$ называется *Q-универсальным*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. В этом случае решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ также называется *Q-универсальной*.

Понятия, здесь не определенные, могут быть найдены в [2, 3]. Пусть ω обозначает множество натуральных чисел. Пусть $P_{fin}(\omega)$ обозначает множество конечных подмножеств в ω. Для любого $n < \omega$ через $\mathcal{B}_n$ мы обозначаем полурешетку подмножеств n-элементного множества относительно пересечения.

Запись $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ означает, что система $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна системе $\mathcal{B}$. Запись $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ используется нами для обозначения элементарной теории системы $\mathcal{A}$. Для произвольной алгебры $\mathcal{S} = \langle S, * \rangle$ пусть $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ обозначает решетку подалгебр алгебры $\mathcal{S}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

Для фиксированной сигнатуры σ через $\mathbf{K}(\sigma)$ обозначаем класс всех систем сигнатуры σ. Под сигнатурой мы понимаем множество σ, состоящее из функциональных, предикатных и константных символов.

Пусть класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ замкнут относительно декартовых произведений. Для алгебраических систем $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{K}$ полагаем $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) * \mathrm{Th}(\mathcal{B}) = \mathrm{Th}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. Алгебра $\mathcal{T}_{\mathbf{K}} = \langle \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}, * \rangle$ является коммутативной полугруппой с единицей. Эту полугруппу мы называем *полугруппой элементарных теорий класса* $\mathbf{K}$.

Мы обобщаем понятие Q-универсальности на полные решетки, см. определение 1, и показываем, что для ряда Q-универсальных классов $\mathbf{K}$ решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ подполугрупп полугруппы элементарных теорий класса $\mathbf{K}$ также является Q-универсальной, см. следствия 1 и 2. Нами найдены достаточные условия для того, чтобы решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ содержала решетку идеалов свободной решетки счетного ранга в качестве подрешетки, см. теорему 1. Также мы отмечаем несколько открытых вопросов.

Определение 1. Пусть класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ замкнут относительно декартовых произведений. Класс $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ называем $\mathrm{T}_{\mathbf{K}}$-*классом*, если $\mathbf{A}$ удовлетворяет следующим условиям:

(T_0) система $\mathcal{A}_{\varnothing}$ тривиальна;

(T_1) для любых $F, G \in P_{fin}(\omega)$ если $\mathcal{A}_F \equiv \mathcal{A}_G$, то $F = G$;

(T_2) для любых $F, G \in P_{fin}(\omega)$ справедливо $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_G \equiv \mathcal{A}_{F \cup G}$.

Определение 2. Класс $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ называем $\mathrm{T}'_{\mathbf{K}}$-*классом*, если $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям (T_0)-(T_1), а также следующему условию:

(T'_2) для любых $F, G \in P_{fin}(\omega)$ справедливо $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_G \equiv \mathcal{A}_{F \cap G}$.

Определение 3. Полная решетка L называется Q-*универсальной*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры решетка квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке L.

Теорема 1. *Пусть класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ замкнут относительно декартовых произведений, а класс $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_F \mid F \in P_{fin}(\omega)\} \subseteq \mathbf{K}$ является $\mathrm{T}_{\mathbf{K}}$-классом или $\mathrm{T}'_{\mathbf{K}}$-классом, то решетка $\prod_{n<\omega} \mathrm{Sub}(\mathcal{B}_n)$ вложима в решетку $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$. В частности, решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ содержит подрешетку, изоморфную решетке идеалов свободной решетки счетного ранга, и является Q-универсальной.*

Следствие 1. *Пусть для сигнатуры σ имеет место один из следующих случаев:*

1. *σ содержит по крайней мере один функциональный символ;*

2. *σ содержит по крайней мере один как минимум бинарный предикатный символ;*

3. *σ бесконечна.*

Тогда решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}(\sigma)})$ *содержит подрешетку, изоморфную решетке идеалов свободной решетки счетного ранга, и является* Q*-универсальной.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{K}$ *является одним из следующих классов систем:*

1. *многообразие всех точечных абелевых групп;*
2. *многообразие всех коммутативных колец с единицей;*
3. *квазимногообразие всех [ориентированных, соответственно] графов;*
4. *многообразие всех унаров;*
5. *многообразие* MV*-алгебр;*
6. *многообразие модулярных решеток.*

Тогда решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ *содержит подрешетку, изоморфную решетке идеалов свободной решетки счетного ранга, и является* Q*-универсальной.*

В связи с доказанными теоремой и следствиями 1 и 2 естественными представляются следующие **вопросы**.

1. Какие решетки вложимы в решетки подполугрупп элементарных теорий?
2. Пусть сигнатура σ конечна и содержит лишь константные и одноместные предикатные символы. Является ли решетка подполугрупп элементарных теорий $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}(\sigma)})$ Q-универсальной?
3. Пусть класс $\mathbf{K}$ Q-универсален. Является ли решетка подполугрупп элементарных теорий $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ также Q-универсальной?

Список литературы

[1] M. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups* // Algebra Universalis, **21**:2/3, 172–180 (1985).

[2] V. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties* // Plenum, 1998.

[3] Yu. Ershov, E. Palyutin, *Mathematical Logic* // Nauka, 1987.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Исследования финансируются по гранту Комитета Науки МОН РК №0665/ГФ4

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ФИНИТАРНОГО И ИНФИНИТАРНОГО СЕМАНТИЧЕСКОГО СЛОЯ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЫРАЗИТЕЛЬНОЙ СИЛЫ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

МИХАИЛ ПЕРЕТЯТЬКИН

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: peretyatkin@math.kz

Базовыми категориями логического подхода в математике является работа с обьектами конечного и бесконечного типа. Общая теория моделей рассматривает алгебраические системы произвольных конечных и бесконечных мощностей. Также развито направление исследования структур над бесконечными областями и, соответственно, полных теорий над бесконечным универсумом. Вместе с тем, рассмотрение класса только конечных моделей представляется менее естественным так как при таком подходе перестают действовать теорема компактности и теорема Гёделя о полноте, и появляется алгоритмическая сложность выше перечислимых степеней неразрешимости.

Для вопроса о выразительных возможностях логики предикатов более продуктивным является альтернативный подход основанный на изучении методов преобразования теорий первого порядка, [1]. В качестве метода рассматривается преобразование теории первого порядка в другую такую теорию с сохранением теоретико-модельных свойств. Целью метода является приведение теории к более простому виду или же к форме с заданными требованиями. Существуют финитарные и инфинитарные методы, [1], [2]. Примерами финитарных методов первого порядка являются процедуры редукции конечных сигнатур, декартовы и факторно-декартовы расширения теорий, [3]. Что касается факторно-декартовых расширений теорий, они не применяются в процедурах редукции конечных сигнатур и поэтому играют второстепенное значение, тем более, что такие методы несут определённый алгебраический акцент конфликтующий с практикой работы в теории моделей. Примерами инфинитарных методов первого порядка являются процедура редукции бесконечных сигнатур к конечным и разные версии универсальной конструкции конечно аксиоматизируемых теорий, [4]. Важно отметить что естественным будет рассмотрение класса всех финитарных методов, или же объединённого класса финитарных и инфинитарных методов, тогда как отдельное рассмотрение класса только инфинитарных методов является нелогичным.

За основу комбинаторики первого порядка берутся процедуры редукции сигнатур которые считаются частными случаями комбинаторных методов в логике предикатов. Для финитарной комбинаторики берутся методы преобразования конечных сигнатур, а для инфинитарной комбинаторики берутся методы сведения бесконечных сигнатур к конечным.

Задача состоит в том чтобы обобщить эти частные методы до максимально широкого общего подхода, для которого было бы логичным использовать такой весомый термин как 'комбинаторика'. Понятие 'метод' понимается как некоторый способ $\mathfrak{m}$ преобразования одной вычислимо аксиоматизируемой теории T первого порядка в другую такую же теорию S, который определяет вычислимый изоморфизм алгебр Тарского-Линденбаума $\mu : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(S)$, а утверждение что μ сохраненяет теоретико-модельное свойство $\mathfrak{p}$ означает что изоморфизм μ без искажения передаёт это свойство $\mathfrak{p}$ от любого пополнения T' исходной теории T к соответствующему пополнению S' получаемой теории S.

Для приложения описанного концептуального подхода к вопросу о выразительных возможностях логики предикатов необходимо дать определение понятия теоретико-модельного свойства используемого в реальной практике исследований по теории моделей. В работе [3] предложено определение понятия теоретико-модельного свойства и указано несколько его конкретных спецификаций расчитанных на разные предпочтения специалистов работающих в области теории моделей. Предлагаются следующие варианты подходов: *наивный*, *примитивный*, *прагматический*, и *максималистский*. Дано обоснование того, что прагматический подход является наиболее подходящим для конкретных применений.

Возникает естественный вопрос о характеризации семантического слоя *FinL* включающего теоретико-модельные свойства, которые сохраняются финитарными методами первого порядка, и семантического слоя *InfL* включающего теоретико-модельные свойства, которые сохраняются инфинитарными методами первого порядка.

Два следующих утверждения характеризуют финитарный семантический слой:

Теорема 1. *Финитарный семантический слой FinL включает все существующие реальные теоретико-модельные свойства.*

Теорема 2. *Процедура редукции конечных сигнатур сохраняет тип вычислимого изоморфизма алгебры Тарского-Линденбаума и все реальные теоретико-модельные свойства соответствующих пополнений этих теорий.*

Характеризация инфинитарного семантического слоя выполняется путём сравнения силы универсальной конструкции и процедуры редукции бесконечной сигнатуры к конечной.

Теорема 3. *По модулю представительного списка теоретико-модельных свойств, [1],[3], слой UniL сохраняемый универсальной конструкцией совпадает со слоем I2fL сохраняемым процедурой редукции бесконечной сигнатуры к конечной.*

Универсальную конструкцию конечно аксиоматизируемых теорий можно считать улучшенной версией процедуры редукции бесконечной сигнатуры к конечной. Так как нелогично ожидать, что можно создать новую версию универсальной конструкции которая контролировала бы больше теоретико-модельных свойств чем может сохранять процедура редукции бесконечной сигнатуры к конечной, то это даёт следующее утверждение:

Теорема 4. *По модулю представительного списка теоретико-модельных свойств, стандартная версия универсальной конструкции имеет максимально возможную силу.*

Согласно Теореме 1, финитарный семантический слой *FinL* состоит из всех реальных теоретико-модельных свойств, что говорит о его фундаментальной природе. Теорема 4 характеризует выразительную силу универсальной конструкции, показывая фундаментальный характер инфинитарного семантического слоя *InfL*. Это показывает что, в пределах семантического слоя *InfL* теоретико-модельных свойств, выразительные возможности конечно аксиоматизируемых теорий точно совпадают с возможностями вычислимо аксиоматизируемых теорий. Важный момент состоит в том что, хотя предлагаемое определение понятия реального теоретико-модельного свойства использует неформальную аргументацию, тем не менее, получаемые результаты с использованием выражения "все реальные теоретико-модельные свойства" оказываются математически точными утверждениями.

Список литературы

[1] M.G. Peretyat'kin, *Introduction in first-order combinatorics providing a conceptual framework for computation in predicate logic* // Computation tools, IARIA, 2013, pp. 31–36.

[2] M.G. Peretyat'kin, *A transformation scheme for infinitary first-order combinatorics presenting computational level of expressiveness in predicate logic* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015, V. 36, No 4, pp. 408–419.

[3] M.G. Peretyat'kin, *First-order combinatorics and model-theoretical properties that can be distinct for mutually interpretable theories* // Siberian Advances in Mathematics, 2016, Vol. 26, No 3, pp. 196–214.

[4] M.G. Peretyat'kin, *Finitely axiomatizable theories* // Plenum Publ. Co., New York, London, Moscow, (monograph), 1997. 294 p.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

К КЛАССИФИКАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ ПО ФОРМУЛЬНЫМ ПОДМНОЖЕСТВАМ И ТИПАМ

АЛЕКСАНДР ПИНУС

Новосибирский Государственный технический университет, пр. К.Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

В силу не менее чем континуальности решеток функциональных клонов на не менее чем трехэлементных множествах (и, значит, невозможности детального, подобного Постовскому для случая двухэлементного множества, описания этих решеток), а также в силу того, что любой функциональный клон F на множестве A является клоном термальных функций $T(\mathfrak{A}_F)$ для универсальной алгебры $\mathfrak{A}_F =< A; F >$, представляется довольно естественной попытка классификации клонов F на множестве A с помощью производных структур алгебр $\mathfrak{A}_F$, в том числе алгебраических и логических геометрий и булевых алгебр формульных подмножеств этих алгебр.

Клоны F_1, F_2 на множестве A назовем *алгебраически эквивалентными* ($F_1 \sim_{alg} F_2$), если совпадают алгебраические геометрии алгебр $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$(т. е. совокупности алгебраических множеств этих алгебр, определение см., к примеру, в [1]). *Клоны* F_1, F_2 на A назовем *L-логически эквивалентными* ($F_1 \sim_{log} F_2$), если совпадают булевы алгебры бескванторно формульных множеств алгебр $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$. *Клоны* F_1, F_2 на A назовем *элементарно эквивалентными* ($F_1 \sim F_2$), если совпадают их логические геометрии (см. [2]), т.е. совокупности множеств алгебр $\mathfrak{A}_{F_1}$ и $\mathfrak{A}_{F_2}$ выделяемых в них с помощью элементарных типов.

Через $PCT(F)$, $CT(F)$, $ECT(F)$ обозначим, соответственно, функциональные клоны позитивно условно термальных, условно термальных, элементарно условно термальных функций алгебры (определения см., к примеру, в [3]).

Имеет место

ТЕОРЕМА. Для любого конечного множества A и любого клона F на A:

а) $F \sim_{alg} PCT(F)$;

б) $F \sim_{log} CT(F)$; в) $F \sim ECT(F)$.

Через F_A обозначим совокупность всех функциональных клонов на множестве A.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого конечного множества A фактор-множества $F_A/\sim_{alg}$, $F_A/\sim_{log}$, $F_A/\sim$ конечны.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Э.Ю.Даниярова, А.Г.Мясников, В.Н.Ремесленников. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами.- Из-во СО РАН, Новосибирск, 2016.

2. B.Plotkin, Unitiped algebras, Proc.of the Steklov Institut of Math., v.278, №1,2012,p.91-115.

3. А.Г.Пинус. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений.- Успехи математических наук, т.56, №4, 2001, с.35-72.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

АВТОМОРФИЗМ ПОЛЕЙ ХАРАКТЕРОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.М. Попова, Е.В. Грачев

Новосибирский Государственный технический университет, пр. К.Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

E-mail: ampopova@ngs.ru

Вопрос об автоморфизмах полей характеров представлений конечных групп, который рассматривается в данной работе возникает в связи с изучением автоморфизмов целочисленных групповых колец конечных групп. Мы изучаем эти автоморфизмы с помощью теории представлений, а именно, от кольца ZG переходим к изоморфному кольцу $Z[R(G)]$, где $R(G)$ — правое регулярное матричное представление конечной группы $G = \{e, g_2, \cdots, g_n\}$. Если $T_1(G), \cdots, T_s(G)$ — все неприводимые неэквивалентные представления G, то, как известно существует такая матрица $t \in GL_n(C)$, что матрицы $(R(G))^t$ имеют клеточно-диагональный вид, в который каждое представление $T_i(G)$ входит ровно n_i раз, где n_i - степень этого представления. Если χ_i характер представления $T_i(G)$, $Q(\chi_i)$ — поле характера χ_i, $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$, τ' — продолжение τ до автоморфизма поля представления $T_i(G)$, то на алгебре $Q[T_i(G)]$ можно определить автоморфизм $\hat{\tau'}$ по правилу $\hat{\tau'}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau'})$.

Для кольца $Z[(R(G))^t]$ существуют автоморфизмы, которые представляют собой композиции $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$, где φ_s — сопряжение некоторой единицей s алгебры $Q[(R(G))^t]$. Возникает естественный вопрос: для любого ли $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$ найдется такая матрица s, что композиция $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $Z[(R(G))^t]$?

Необходимым условием существования s является условие совпадения Q - алгебр $Q[(R(G))^t] = Q[((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}]$. Если эти алгебры совпадают и $R_l(G)$ — левое регулярное представление группы G, то для любого $g_i \in G, i = 1, \cdots, n$ справедливо представление

$$L(g_i) = \frac{p_1^i}{q_1^i} R_l(e) + \frac{p_2^i}{q_2^i} R_l(g_2) + \cdots + \frac{p_n^i}{q_n^i} R_l(g_n)$$

Теорема.

Если $Q[(R(G))^t] = Q[((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}]$, то для данного $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$ существует единица s алгебры $Q[(R(G))^t]$ такая, что композиция $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $Z[(R(G))^t]$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия. Существует вектор $u = (u_1, \cdots, u_n) \in Z^n$ такой, что

1)$uL(g_i) \in Z^n, i = 1, \cdots, n$;

2) векторы $uR(g_i)$, $g_i \in G, i = 1, \cdots, n$ линейно независимы

Данный подход применим для целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}A_4$.

Известно, что группа A_4 имеет 4 неприводимых неэквивалентных представления, 3 одномерных и 1 трехмерное.

Путь $t_1 = (R((123)))^t$, $t_2 = (R((12)(34)))^t$ - матричные представления порождающих группы A_4.

Обозначим матрицы редуцированного регулярного представления $(R(g_i))^t$ через $R'(g_i)$.

Подействуем на эти матрицы автоморфизмом поля характера τ $(\tau(\omega_3) = \omega_3^2)$. Здесь $\omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ первообразный корень третьей степени из единицы. Обозначим $(R'(g_i))^{\hat{\tau}} = R''(g_i)$. Пусть $R''(g_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} R'(g_j)$, где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Тогда $L(g_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} R_l(g_j)$.

$$
\text{В нашем случае } L(t_1) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
L(t_2) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\
\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\
\frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Найдем целочисленный вектор u, такой чтобы все векторы $uL(g_i)$ были целочисленными. Пусть $u = (u_1, \cdots, u_n)$, тогда вычислим $s = u_1 R_l(e) + u_2 R_l(g_2) + \cdots + u_n R_l(g_n)$. Если матрица s обратима и все матрицы $(L(g_i))^s$ целочисленные, то задача решена.

В нашем случае $u = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 2)$ и

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что s обратима и все матрицы $(L(g_i))^s$ целочисленные. Тем самым мы показали, что для автоморфизма τ поля характера χ_2 группы A_4 существует единица s алгебры $\mathbb{Q}[(R(A_4))^t]$, такая что композиция $\hat{\tau} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $\mathbb{Z}[(R(A_4))^t]$.

А так как $Aut(Q(\chi_2)) = \{\tau_1 = id, \tau_2 = \tau\}$, то для кольца ZA_4 предложенная факторизация справедлива.

— ⁜ ⁜ ⁜ —

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ОГРАНИЧЕННОЙ c-РАЗМЕРНОСТИ И ГИПОТЕЗЕ БОРОВИКА–ХУХРО

ДАНИЛА РЕВИН

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: revin@math.nsc.ru

Следуя А. Мясникову и П. Шумяцкому [3], назовем *c-размерностью* группы высоту ее решетки централизаторов, т. е. максимальную длину цепи вложенных централизаторов подмножеств в этой группе.

Рассматриваются группы конечной c-размерности. Ясно, что такие группы, являются $\mathfrak{M}_C$*-группами*, т. е. удовлетворяют условию минимальности для централизаторов. Р. Брайант и Б. Хартли [2] доказали, что каждая периодическая локально разрешимая $\mathfrak{M}_C$-группа G разрешима и является "нильпотентной-на-абелеву-на-конечную" группой, т. е. *радикал Хирша–Плоткина* (наибольшая локально нильпотентная нормальная подгруппа) $F(G)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00065).

группы G нильпотентен и факторгруппа $G/F(G)$ содержит абелеву подгруппу подгруппу конечного индекса (эту абелеву подгруппу можно считать нормальной: если группа X содержит подгруппу Y конечного индекса m, то Y содержит подгруппу Z, нормальную в G и такую, что $|G : Z| \leq m!$). Если ограничиться группами конечной c-размерности, то естественно спросить, можно ли ограничить функцией от c-размерности а) ступень разрешимости и б) минимальный индекс абелевой-на-нильпотентную подгруппы? Е.Хухро [4] показал, что ответ на первый вопрос "да", а на второй — хотя ответ "нет", но факторгруппа по второму радикалу $F_2(G)$ Хирша–Плоткина — полному прообразу $F(G/F(G))$ — содержит подгруппу, индекс которой ограничен функцией от c-размерности группы G. Условие локальной разрешимости существенно: c-размерность простых групп $G = PSL_2(q)$ равна 2, в то время как индекс единственной (равной 1) абелевой нормальной подгруппы в $G/F_2(G) \cong G$ сколь угодно велик при подходящем выборе q.

В этой же работе Хухро [4] приведена высказанная А.Боровиком:

Гипотеза Боровика–Хухро. *Существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со следующим свойством. Пусть G — локально конечная группы c-размерности $k \in \mathbb{N}$ и S — полный прообраз в G обобщенной подгруппы Фиттинга группы $G/F(G)$. Тогда факторгруппа G/S содержит абелеву подгруппу индекса, не превосходящего $f(k)$.*

Напомним, что *обобщенная подгруппа Фиттинга* группы G — это произведение радикала Хирша–Плоткина $F(G)$ на т. н. *слой* $E(G)$ группы G — подгруппу, порожденную всеми субнормальными квазипростыми подгруппами, а *квазипростой* называется группа, совпадающая со своим коммутантом и которой факторгруппа по центру проста.

Мы строим контрпример к гипотезе Боровика–Хухро, но доказываем, что для конечных групп выполнен ее ослабленный аналог:

Теорема.

Существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со следующим свойством. Пусть G — конечная группа c-размерности k. Положим $\overline{G} = G/F_3(G)$. Тогда группа $\overline{G}/E(\overline{G})$ содержит абелеву подгруппу индекса, не превосходящего $f(k)$.

Построение контрпримера опирается на теоретико-числовой результат работы [1]: *для бесконечно многих простых чисел p разность $p^2 - 1$ имеет не более 21 простого делителя.* Это утверждение тесно связано с известной гипотезой Л.Диксона [3] о линейных формах, которая, в свою очередь, обобщает теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии, гипотезу близнецов, гипотезу о простых числах Софи Жермен и ряд других.

Результаты получены в соавторстве с А.Бутурлакиным и А.Васильевым.

Список литературы

[1] *K. Alladi, R. Solomon, A. Turull, Finite simple groups of bounded subgroup chain length* // J. Algebra, **231**, 374–386 (2000).

[2] *R. Bryant, B. Hartley, Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers* // J. Algebra, **61**, 328–334 (1979).

[3] *L.E. Dickson, A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers* // Messenger of mathematics, **33**, 155–161 (1904).

[4] *E.I. Khukhro, On solubility of groups with bounded centralizer chains* // Glasgow Math. J., **51**, 49–54 (2009).

[5] *A. Myasnikov, P. Shumyatsky, Discriminating groups and c-dimension* // J. Group Theory, **7**, 135–142 (2004).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ УМНОЖЕНИИ ТОЧКИ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

КАЙСАР ТУЛЕНБАЕВ[a], УЛЖАН ОСПАНОВА[b]

Институт математики и математического моделирования, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: [b]ulzan.ospanova.93@mail.ru, [a]tulen75@hotmail.com

Эллиптическая криптография — раздел криптографии, который изучает асимметричные криптосистемы, основанные на эллиптических кривых над конечными полями. Основное преимущество эллиптической криптографии заключается в том, что на сегодняшний день не известно существование субэкспоненциальных алгоритмов решения задачи дискретного логарифмирования. Использование эллиптических кривых для создания криптосистем было независимо предложено Нилом Коблицем (англ.) и Виктором Миллером (англ.) в 1985 году. Особый интерес к криптографии эллиптических кривых обусловлен теми преимуществами, которые дает её применение в беспроводных коммуникациях - высокое быстродействие и небольшая длина ключа.[1] Асимметричная криптография основана на сложности решения некоторых математических задач. Ранние криптосистемы с открытым ключом, такие как алгоритм RSA, криптостойки благодаря тому, что сложно разложить составное число на простые множители. При использовании алгоритмов на эллиптических кривых полагается, что не существует субэкспоненциальных алгоритмов для решения задачи дискретного логарифмирования в группах их точек.

Арифметические операции с точками на эллиптической кривой не эквивалентны этим арифметическим операциям с их координатами. Точки эллиптической кривой над конечным полем представляют собой группу. Умножение сводится к многократным удвоению и суммированию[2].

Например, $G + G \neq 2G$ (это разные операции), $2G + 2^{115G} = 2^{115G} + 2G$ (суммирование коммутативно);

$2G = 2 \cdot G; 4G = 2 \cdot 2G; 8G = 2 \cdot 4G; 16 \cdot G = 2 \cdot 8G$, и т. д. (для двух одинаковых точек - только операция удвоения);

$25 \cdot G; 25 = 11001$ (in binary); $25 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 8 + 16; 25G = 16G + 8G + G = 1 \cdot (2^4)G + 2 \cdot (2^3)G + 1 \cdot G$ (операция суммирования).

$24G/3G = 24G \cdot (3G^{-1} modP); 5G - 3G = 5G + (3G^{-1} modP); 3G^{-1} modP$ - modular multiplicative inverse.

Пусть – эллиптическая кривая определенная над конечным полем F_q и – точка на бесконечности[3]. Рассмотрим эндоморфизм $\phi : \longrightarrow$, удовлетворяющий $\varphi(O) = O$ Мы находим представление $kG = k_1 G + k_{2\phi}(G)$, что позволяет улучшить алгоритм дешифровки.

Список литературы

[1] О О. Н. Василенко, Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии //МЦНМО ,2003

[2] N N. Koblitz, CM-curves with good cryptographic properties // Advances in Cryptology – Crypto, 1992

[3] R Robert P. Robert J. Lambert1, and Scott A. Faster Point Multiplication on Elliptic Curves with Efficient Endomorphisms // 2001

— ⁂ ⁂ ⁂ —

КОСЕМАНТИЧНОСТЬ ФРАГМЕНТОВ СОВЕРШЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОСТОЙ ЙОНСОНОВСКОЙ ТЕОРИИ

НАЗГУЛЬ ШАМАТАЕВА

ул. Университетская, 28, Караганды, 100028, Казахстан

E-mail: naz.kz85@mail.ru

С помощью введенных определений йонсоновских множеств [1], мы сможем перенести много свойств для йонсоновских теорий на произвольные подмножества семантической модели. Мы говорим, что два йонсоновских множества (эквивалентно семантически, категоричны), соответственно, если будут (йонсоновски эквивалентно косемантичны, категоричны, синтаксически подобны, семантически подобны и т.д.) моделями, которые получаются при соответствующем замыкании этих множеств.

Рассмотрим, например, косемантичность. Два йонсоновских множества косемантичны, если они косемантичны, если соответствующие замыкание, и т. д.

Самым инвариантным понятием является синтаксическое подобие теорий, т.к. оно сохраняет все свойства рассматриваемых теорий.

Для случая йонсоновских множеств, мы определим синтаксическое подобие следующим образом: Два (алгебраических) йонсоновских множества синтаксически подобны между собой, если синтаксически подобны будут элементарные теории их соотвествующих замыканий.

Если $\forall\exists$-следствия этих элементарных теорий будут давать йонсоновские теории, то в этом случае мы сможем рассмотреть их йонсоновское синтаксическое подобие, т.е., в силу инвариантности семантической модели наше определение корректно.

На основании вышеуказанных определений мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1

Пусть $T_{M_{X_1}}$ и $T_{M_{X_2}}$ фрагменты соответственно йонсоновских множеств X_1, X_2, совершенной выпуклой экзистенциальной простой йонсоновской теории . Причем C_1 семантическая модель $T_{M_{X_1}}$,C_2 семантическая модель $T_{M_{X_2}}$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1. $C_1 \rhd \lhd_J C_2$;

2. $C_1 \equiv_J C_2$;

3. $C_1 =_J C_2$.

Теорема 2

Пусть M_{X_1} и M_{X_2}- экзистенциально замкнутые подмодели семантической модели совершенной выпуклой экзистенциальной простой йонсоновской теории . X_1, X_2 -йонсоновские множества в этой теории . Тогда эквивалентны следующие условия:

1. $M_{X_1} \rhd \lhd_J M_{X_2}$;
2. $\forall\exists(M_{X_1}) \rhd \lhd_J \forall\exists(M_{X_2})$.

Все неопределенные в данном тезисе понятия и, связанные с ними, определения можно найти в [1].

Список литературы

[1] А.Р. Ешкеев, Н.К. Шаматаева *Кемел йонсондық теорияларды зерттеу тесілдері* // Монография, Караганда, Изд-во КарГУ, 2016.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON SINGULAR POINTS OF THE NORMALIZED RICCI FLOW ON SPECIAL GENERALIZED WALLACH SPACES

NURLAN ABIEV

M. Kh. Dulaty Taraz State University, Tole bi st., 60, Taraz, 080000, Kazakhstan E-mail: abievn@mail.ru

We will discuss some properties of the normalized Ricci flow equation

$$\dot{\mathbf{g}} = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2n^{-1}\mathbf{g}(t)S_{\mathbf{g}}, \tag{1}$$

studied in [2–4] for one special class of Riemannian manifolds $\mathcal{M}^n$ called generalized Wallach spaces (see [5] and references therein for definitions and details), where $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ and $S_{\mathbf{g}}$ are the Ricci tensor and the scalar curvature of the Riemannian metric $\mathbf{g}$ respectively. Consider the case $a_1 = a_2 = a_3 := a \in (0, 1/2)$ of generalized Wallach spaces (in general they are characterized by a triple $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ of real parameters). The system (1) can be reduced to the following system of ODE's observing that $x_1x_2x_3 \equiv 1$ is its first integral (see [4] for details):

$$\dot{x}_1 = x_1x_2^{-1}+x_2x_1^2-2-2ax_1\left(2x_1^2-x_2^2-x_1^{-2}x_2^{-2}\right), \;\; \dot{x}_2 = x_2x_1^{-1}+x_1x_2^2-2-2ax_2\left(2x_2^2-x_1^2-x_1^{-2}x_2^{-2}\right), \tag{2}$$

The project was supported by Grant 1452/GF4 of MES of the Republic of Kazakhstan.

where $x_i > 0$ are parameters of the metric $\mathbf{g}$. Using the scale invariant variables $w_1 := \frac{x_3}{x_1}$ and $w_2 := \frac{x_3}{x_2}$ we obtained in [3] the following more convenient system

$$\dot{w}_1 = (w_1 - 1)(w_1 - 2aw_1w_2 - 2aw_2), \quad \dot{w}_1 = (w_2 - 1)(w_2 - 2aw_1w_2 - 2aw_1). \tag{3}$$

Clearly there exists a homeomorphism $(x_1, x_2) \mapsto (w_1, w_2) := \left(x_1^{-2}x_2^{-1}, \, x_1^{-1}x_2^{-2}\right)$, which provides topological equivalence of phase portraits of the systems (2) and (3) for every fixed value of the parameter a (see [2]). In the present talk *we will discuss* some results obtained in [1–3]: the system (3) admits four non-degenerate singular points (Einstein metrics) at $a \in (0, 1/2) \setminus \{1/4\}$: three of them are *saddles* $E_1 := (q, 1)$, $E_2 := (1, q)$, $E_3 := (q^{-1}, q^{-1})$, and one is an *unstable node* $E_0 := (1, 1)$, where $q := 2a(1 - 2a)^{-1}$; at $a = 1/4$ the system (3) has a unique singular point E_0 which is a degenerate saddle of the *linearly zero* type with six hyperbolic sectors around it. The value $a = 1/4$ is also interesting from the point of view of algebraic geometry: the point $(1/4, 1/4, 1/4)$ is an *elliptic umbilic* (in the sense of Darboux) or a *point of the type* D_4^- (in the terminology of V. Arnold) of a specific surface $\Omega := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(a_1, a_2, a_3) = 0\}$ introduced in [4] as a tool of studying degenerate singular points of (1) on generalized Wallach spaces, where $Q(a_1, a_2, a_3)$ is a symmetric polynomial of degree 12 in the variables a_1, a_2, a_3. The structures of the sets $(0, 1/2]^3 \cap \Omega$ and $(0, 1/2]^3 \setminus \Omega$ were studied in [1].

Список литературы

[1] Abiev N.A. *On topological structure of some sets related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces*// Vladikavkaz. Mathematical Journal, **17**:3, 5–13, (2015) (Russian).

[2] Abiev N.A. *On evolution of invariant Riemannian metrics on a class of generalized Wallach spaces under the normalized Ricci flow*// Matematicheskie Trudy, **20**:1 (2017), 1–18 (Russian, in press).

[3] Abiev N.A., Nikonorov Yu.G. *The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow*// Annals of Global Analysis and Geometry, **50**:1 (2016), 65–84.

[4] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. *The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces*// Differential Geometry and its Applications, **35**, Supplement, (2014), 26–43.

[5] Nikonorov Yu.G. *Classification of generalized Wallach spaces*// Geometriae Dedicata, **181**:1, (2016), 193–212.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

CONSERVATIVE EXTENSIONS OF A MODEL OF DEPENDENT THEORY

BEKTUR BAIZHANOV

Institute of mathematics and mathematical modeling, Pushkin street 125, Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan

E-mail: baizhanov@math.kz

Type $p \in S(A)$, $A \subset M \models T$ is called to be definable, if for any formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ there exists formula $\psi_\varphi(\bar{y}, \bar{a}), \bar{a} \in A$, called φ-definition of p, such that $\forall \bar{b} \in A$,

$$[\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in p \Leftrightarrow M \models \psi_\varphi(\bar{b}, \bar{a})].$$

Let $M \prec N$, we say that N is n-conservative extension if for any $\bar{\alpha} \in N \setminus M, l(\bar{\alpha}) = n$, $tp(\bar{\alpha}/M)$ is definable and we denote it by $M \prec_{n,c} N$. $M \prec_c N$, N is conservative extension of M, if $M \prec_{n,c} N, \forall n < \omega$.

Theorem. *[S. Shelah [7]] Let T be a complete theory. T is stable iff for any $A \subseteq M \models T$, any type $p \in S(A)$ is definable.*

So, for any model M of a stable theory any elementary extension of M is conservative.

However, there exist non-stable theory with a model having only conservative elementary extensions.

Theorem. *[L. Van den Dries [2]] For ordered field of all real numbers $\mathbb{R} = \langle R; =, <, +, *, -, 0, 1\rangle$ any type over R is definable i.e. any elementary extension of $\mathbb{R}$ is conservative.*

D. Marker and Ch. Steinhorn strengthened this result for the class of o-minimal theories and as corollary obtained L. Van den Dries Theorem.

Theorem. *[Marker-Steinhorn[3]; A. Pillay[4]] Let $M \prec N \models T$, be a pair of models of o-minimal theory. Then $M \prec_{1,c} N$ iff $M \prec_c N$.*

For the class of weakly o-minimal theories this property is not true.

Theorem. *[B. Baizhanov [5]] There exists a weakly o-minimal theory having pair of models such that: $M \prec_{1,c} N$ and $M \not\prec_{2,c} N$.*

An analysis of proofs of the Marker-Steinhorn, Pillay and the nature of the counter-example leads to the fact that the main role here is played by the interaction of different types, which is expressed through the concept of weak orthogonality of two types [Shelah, 1978]. Let $p(\bar{x}), q(\bar{y})$ be two types from $S(A)$, A be a subset of a model of complete theory. Then p is weakly orthogonal to q ($p \perp^w q$), if $p(\bar{x} \cup q(\bar{y})$ is $(l(\bar{x}) + l(\bar{y}))$-complete type.

Theorem 1. *[Main theorem] Let $M \prec N \models T$, T be a weakly o-minimal theory, $\bar{\alpha} \in N \setminus M$. Then $tp(\bar{\alpha}/M)$ is definable iff for any irrational one-type $q \in S_1(M)$ $tp(\bar{\alpha}/M) \perp^w q$, or*

Research supported by the grant 5125/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

equivalently, $tp(\bar{\alpha}/M)$ is non-definable iff there exists irrational one-type $q \in S_1(M)$ such that $tp(\bar{\alpha}/M) \not\perp^w q$.

Theorem. *[B. Baizhanov [3]] Let M be a model of a weakly o-minimal theory. Any expansion of M by family of convex unary predicates has weakly o-minimal theory.*

It follows from Theorem 1 and theorem of Baizhanov [3] on expansion by convex predicate

Corollary 1. *(Analogue of Theorem of L.van den Dries for weakly o-minimal theory) Let M be a model of weakly o-minimal theory. There is a weakly o-minimal expansion M^+ of M by family of convex unary predicate such that any elementary extension of M^+ is conservative.*

For any complete 1-type $p \in S_1(A)$ over set A of ordered complete theory there is a partial subtype of $p^c \subseteq p$ containing only convex 1-formulas from p. Denote by $S_{1,p}$ the following set $\{q \in S_1(A) : q^c = p^c\}$. An ordered theory is called to be ordered stable in λ, if for any A such that the cardinality of A is equal to λ, for any 1-type $p \in S_1(A)$ the cardinality of $S_{1,p}$ is less or equal to λ. An ordered theory is ordered stable (o-stable) if it is stable in some λ. The o-minimal, weakly o-minimal, quasi o-minimal theoris are o-stable and any o-stable theory has not independent property [2].

Theorem. *[Baizhanov-Verbovskiy [8]] Let T be an o-stable theory, $p \in S_1(A)$, A be an definable set. Then $p \in S_1(A)$ is definable iff $p^c \in S_1^c(A)$ is definable.*

We don't know is it true for arbitrary non-definable A. For special case we have

Theorem 2. *Let T be an o-stable theory $M \prec N \models T, \bar{\alpha} \in N \setminus M$ such that $tp(\bar{\alpha}/M)$ is definable. Then for any $p \in S(M \cup \bar{\alpha})$ the following is true: p is definable iff $p^c \in S_1^c(M \cup \bar{\alpha})$ is definable.*

Corollary 2. *Let T be an o-stable theory. Let $M \prec N \models T, \bar{\alpha} \in N \setminus M$ then $tp(\bar{\alpha}/M)$ is non-definable iff there exists irrational one-type $q \in S_1(M)$ such that $tp(\bar{\alpha}/M) \not\perp^w q$.*

Theorem. *[V.Verbovskiy [9]] Let M be a model of o-stable theory, any expansion of M by family of convex unary predicates has o-stable theory.*

By Theorems 1,2 and Theorem of V.Verbovskiy we have

Corollary 3 *[Analogue of Theorem of L. van den Dries for o-stable theory] Let M be a model of o-stable theory. There is an o-stable expansion M^+ of M by family of convex unary predicate such that any elementary extension of M^+ is conservative.*

Corollary 4 *[Corollary of proof of Main Theorem and Corollary 2] let $M \prec N \models T$, be a pair of models of o-stable theory. If for any 1-types from $S_1^c(A)$ the property non-weakly orthogonality ($\not\perp^w$) coincide with non-almost orthogonality ($\not\perp^a$) then $[M \prec_{1,c} N \Leftrightarrow M \prec_c N]$.*

The coincidence of two notions (non-weakly and non-almost orthogonality)is true for o-minimal theory and consequently, Theorem of Marker-Steinhorn-Pilay is corollary of Main Theorem. Such coincidence is true for quasi o-minimal theory.

Corollary 5 *[Analogue of Theorem of Marker-Steinhorn for quasi o-minimal theory]*

Let $M \prec N \models T$, be a pair of models of quasi o-minimal theory. Then $M \prec_{1,c} N$ iff $M \prec_c N$.

Список литературы

[1] S. Shelah, *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models.* // Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1978. — 685 p.

[2] L. Van den Dries, *Tarski's problem and Pfaffian functions* // Logic Colloquium'84 / J.B. Paris, A.J. Wilkie and G.M. Wilmers, editors. — Amsterdam: North-Holland, 1986. — P. 59–90.

[3] D. Marker, Ch. Steinhorn, *Definable types in o-minimal theories* // The Journal of Symbolic Logic. — 1994. — Vol. 59. — P. 185–198.

[4] A. Pillay, *Definability of types, and pairs of o-minimal structures* // he Journal of Symbolic Logic. — 1994. — Vol. 59. — P. 1400–1409.

[5] B.S. Baizhanov, *Definability of 1-Types in Weakly o-Minimal Theories* // Siberian advances in mathematics. — 2006. — Vol. 16, №2. — P. 1–33.

[6] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates* // Journal of Symbolic Logic, **66**:3 (2001), 1382–1414.

[7] B.S. Baizhanov, V.V. Verbovskiy, *O-stable theories* // Algebra and Logic, **50**:3 (2011), 211–225.

[8] B.S. Baizhanov, V.V. Verbovskiy, *On definability of 1-types in ordered stable theories* // Mathematicheskiy zhurnal, **15**:4 (2015), 5–14.

[9] V.V. Verbovskiy, *Ordered stable groups* // Mathematicheskie Trudy, **13**:2 (2010), 84–127.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

SOME PROPERTIES OF FORMULAS AND TYPES OF SMALL ORDERED THEORIES WITH FEW COUNTABLE MODELS

BEKTUR BAIZHANOV[a], TATYANA ZAMBARNAYA[b]

Institute of mathematics and mathematical modelling, Pushkin street, 125, Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]t.zambar@gmail.com

The authors were supported by the grant no. 5125/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

In the report we consider small countable theories with an $\emptyset$-definable relation of linear order.

A complete countable theory T is called *small* if $|\bigcup_{n<\omega} S_n(T)| = \omega$, where $S_n(T)$ is the set of all n-types over $\emptyset$. A complete countable theory T has a *few number of countable models* if the number of countable non-isomorphic models $I(T, \omega)$ is less than 2^ω.

We give a notion of a formula quasi-successor and consider the following theorem.

Theorem. *Let $\mathfrak{N}$ be a countable saturated model of a small theory T with an $\emptyset$-definable relation of a linear order. Let A be a finite subset of N, $\phi(x, y)$ be an A-definable quasi-successor on a type $p(x) \in S_1(A)$. Then T has 2^ω countable non-isomorphic models.*

Let A be a subset of a countable saturated model $\mathfrak{N}$ of a small linearly ordered theory T. Denote by R_A the set of all A-definable 1-formulas $\phi(x, \bar{a})$, such that $\mathfrak{N} \models \exists y(\phi(N, \bar{a}) < y)\}$.

For formulas ϕ and $\psi \in R_A$ put

$$[\phi <_r \psi \iff \psi(N)^+ \subset \phi(N)^+];$$
$$[\phi \sim_r \psi \iff \phi(N)^+ = \psi(N)^+];$$

and denote $\phi/\sim_r := \{\Theta \in R_A | \Theta \sim_r \phi\}$, $R_A/\sim_r := \{\phi/\sim_r | \phi \in R_A\}$. And let L_A be a set of formulas $\phi(x, \bar{a})$ with $\mathfrak{N} \models \exists y(y < \phi(N, \bar{a}))$. Relations on this set are defined analogically to the relations on R_A.

Proposition. *Let T be a small ordered theory, A be a finite subset of a model of T. Then $\langle R_A/\sim_r; <_r\rangle$ and $\langle L_A/\sim_l; <_l\rangle$ do not contain dense intervals.*

Let A be a finite subset of a countable saturated model $\mathfrak{N}$, and $H(x)$ and $\Theta(x)$ be A-definable 1-formulas such that $H(N) \subset \Theta(N)$.

Denote $E_{H,\Theta}(x, y) := H(x) \wedge H(y) \wedge (x < y \to \forall z((x < z < y \wedge \Theta(z)) \to H(z))) \wedge (y < x \to \forall z((y < z < x \wedge \Theta(z)) \to H(z))$. $E_{H,\Theta}(x, y)$ is an A-definable relation of equivalence on $H(N)$ such that any $E_{H,\Theta}$-class is convex in $\Theta(N)$.

We say that an ordered theory T has the *property of finiteness of discrete chains convex equivalences* (*FDCCE*) if for every two one-formulas $H(x)$ and $\Theta(x)$ such that $H(N) \subset \Theta(N)$, for any k $(1 < k < \omega)$ every discrete chain of convex $E_{H,\Theta}$-classes is finite.

The following is a corollary of the first theorem.

Corollary. *If T is a complete ordered theory with a few number of countable models then T has the FDCCE property.*

We say that the set of A-definable one-formulas $C \subset F_1(A)$ is a $BH-algebra$ if it is closed under the following logical operations: $\wedge, \neg, \vee, \triangleleft_k^i$ $(0 < i < k, 1 < k < \omega)$.

Theorem. *Let T be a small ordered theory with FDCCE, A be a finite subset of a countable saturated model N of the theory T. Then for every finite set of A-definable one-formulas $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$, $n < \omega$ the BH-algebra generated by this set is finite.*

Theorem. *Let T be a small theory of a pure order. Then T is ω-categorical if and only if T has FDCCE.*

Corollary. *Let T be a non-ω-categorical small theory of a pure order. Then there is an $\emptyset$-definable 1-formula $\phi(x)$ such that for some elements $\alpha, \beta \in \phi(N)$ $(\alpha < \beta)$, $(\alpha, \beta) \cap \phi(N)$ is an infinite discrete chain.*

Corollary. *Let T be a countable complete ordered theory in a language L and $T_0 \subset T$ be a complete theory in a language $L_0 := \{=, <\} \subset L$. If T_0 is non-ω-categorical then $I(T, \omega) = 2^\omega$.*

Let $p(\bar{x})$ be a type over some subset $A \subseteq M$ of a model $\mathfrak{M}$ of a theory T. An A-definable formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, is said to be *p-n-preserving*, if for any realizations $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, ..., $\bar{\beta}_n$ of the type p, $\varphi(\bar{x}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a}) \vdash p(\bar{x})$. A p-n-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \bar{a})$ is called nontrivial, if for any model $\mathfrak{M}' \models T$ and any realizations $\bar{\beta'}_i$ of the type p in $\mathfrak{M}'$ $(1 < i < n)$ the set $\varphi(M', \bar{\beta'}_1, \bar{\beta'}_2, ..., \bar{\beta'}_n, \bar{a})$ contains at least one element other than $\bar{\beta'}_1, \bar{\beta'}_2, ..., \bar{\beta'}_n$.

Theorem. *Let T be a countable complete theory, $p(\bar{x}) \in S(A)$ be a non-principal type over a finite subset $A \subseteq N$ of a countable saturated model $\mathfrak{N} \models T$. If for any $n < \omega$ any A-definable p-n-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \bar{a})$ is trivial, then $I(T \cup tp(\bar{a}/\emptyset), \omega) \geq \omega$, where $\bar{a}$ is a tuple enumerating the set A.*

Theorem. *Let T be a small countable complete theory with a dense linear order without endpoints. If there exists a finite subset A of a countable saturated model $\mathfrak{M} \models T$ and a non-principal type $q(x) \in S_1(A)$, such that the set $S^c_q = \{p \in S_1(A) | p^c = q^c\}$ is infinite, and for any natural n, any A-definable q-n-preserving formula is trivial, then T has 2^ω countable non-isomorphic models.*

For a model $\mathfrak{M} \models T$ denote by $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ the set of all complete types from $S(T)$ which are realized in $\mathfrak{M}$. This set is called the *finite diagram* of $\mathfrak{M}$.

Theorem. *If there is a countable complete theory T with $I(T, \omega) = \omega_1$, then there is a finite diagram D, such that $D = \mathcal{D}(\mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{M}_i \in Mod(T)$, $i < \omega_1$, and all the $\mathfrak{M}_i$ are non-homogeneous.*

Список литературы

[1] A.A. Alibek, B.S.,Baizhanov, T.S Zambarnaya, *Discrete order on a definable set and the number of models* // Matematicheskij zhurnal, **14**:3 (2014), 5–13.

[2] B.S. Baizhanov, V.V. Verbovskiy, *O-stable theories* // Algebra and Logic, **50**:3 (2011), 211–225.

[3] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates* // Journal of Symbolic Logic, **66**:3 (2001), 1382–1414.

[4] K. Tent, M. Ziegler, *A Course in Model Theory* // Lecture Notes in Logic, Book 40, Cambridge University Press, 2012.

[5] B.S. Baizhanov, S.S. Baizhanov, T. Saulebayeva, T.S. Zambarnaya, *One-formulas and one-types in ordered theories* // Matematicheskij zhurnal, **16**:2 (2016), 104–125.

[6] M. Rubin, *Theories of linear order* // Israel Journal of Mathematics, **17** (1974), 392–443.

[7] S. Shelah, *End extensions and numbers of countable models*, Journal of Symbolic Logic, vol. 43 (1978), pp. 550–562.

[8] B.S. Baizhanov, N.S. Tazabekova, A.D. Yershigeshova, T.S. Zambarnaya, *Types in small theories* // Matematicheskij zhurnal, **15**:1 (2015), 38–56.

[9] A. Alibek, B. Baizhanov, J. Baldwin, A. Yershegeshova, T. Zambarnaya, *Diagrams and small theories* // Book of Abstracts. 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Logic Colloquium 2015, (2015), 753.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

EXPANSION OF STABLE THEORIES AND CONDITION OF TRIVIALITY

SAYAN BAIZHANOV

IMMM KazNU, Almaty, Kazakhstan

E-mail: sayan-5225@mail.ru,

We will show, that any expansion by unary predicate of model of theory satisfying condition of triviality preserves stability

Set A is called definable, if there exists formula $\varphi(\bar{x})$ of signature Σ, s.t. $\{\bar{b} \in M | M \models \varphi(\bar{b})\} = A$, this set usually denoted as $\varphi(M)$.

Consider a model $\mathbb{M} = \langle M, \Sigma \rangle$. Then $\mathbb{M}^{+} = \langle M, \Sigma \cup \{P^n\} \rangle$ is an expansion of model $\mathbb{M}$. $P^n \notin \Sigma$ and there is no formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $P^n(M) = \varphi(M, \bar{a})$ for any $\bar{a}$.

Definition. We say that theory T satisfies condition of triviality for algebraic closure if next conditions holds:

1. For any model M, for any $a_1, a_2, ..., a_n \in M : acl(a_1, a_2, ..., a_n) = \bigsqcup\limits_{i=1} acl(a_i)$, $M = \bigsqcup\limits_{a_i \in M} acl(a_i)$.
2. For any model M, for any $a, b \in M : \forall a, b (a \in acl(b) \leftrightarrow b \in acl(a))$.

Research supported by the grant 5125/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

3. For any element a, $acl(a)$ defines model.

Theorem 1. *Let T be a stable theory. Then any unary predicate expansion is stable iff T satisfy condition of triviality.*

Список литературы

[1] Baizhanov B.S., Baldwin J.T. Local homogeneity , *Journal of Symbolic Logic*, **1**:Volume 69, Issue 4 (2004), 1243–1260.

— ※ ※ ※ —

EXCHANGE PRINCIPLE AND MORLEY RANK

SAYAN BAIZHANOV[1,a], AKNUR MUKANKYZY[2,b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: [a]sayan-5225@mail.ru, [b]amukankyzy@gmail.com

dp-minimal theories covers wide area of NIP theories, including o-minimal and strongly minimal theories. Exchange principle holds on both of them, the question on if the exchange lemma holds on dp-minimal theory in general naturally occurs.

Definition 1. We say that sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, (a_i^2)_{i<\omega}, (a_i^3)_{i<\omega}$ are mutually indiscernible over A if each $(a_i^k)_{i<\omega}$ is indiscernible over $A \cup \{(a_i^j)_{i<\omega} : j \neq k\}$

Definition 2. A theory has dp-rank $\geq$ n, if there are formulas $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), ..., \varphi_n(x, y)$ and mutually indescernible sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, (a_i^2)_{i<\omega}, ..., (a_i^n)_{i<\omega}$, such that for any function $\sigma : \{1, ..., n\} \to \omega$ the type

$$\{\varphi_k(x, a_{\sigma(k)}^k) : k \leq n\} \cup \{\neg\varphi_k(x, a_i^k) : i \neq \sigma(k), k \leq n\}$$

is consistent

Theory is said to be dp-minimal if it has dp-rank equal to 1.

Exchange principle. We say, that for a theory T exchange principle for algebraic closure holds if for any model M of T for any $X \subset M$ $a, b \in X$ $(a \in acl(b)\backslash acl(X) \leftrightarrow b \in acl(a)\backslash acl(X))$

Proposition: There is a complete theory T, such that it is dp-minimal and exchange principle fails.

The authors were supported by the grant no. 5125/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Definition 3. Suppose that M is an L-structure and $\varphi(\bar{v})$ is an L_M-formula. We will define $RM_M(\varphi)$ the Morley rank of φ in M. First, we inductively define $RM_M(\varphi) \geq \alpha$ for α an ordinal:

i) $RM_M(\varphi) \geq 0$ if and only if $\varphi(M)$ is non empty;

ii) if α is limit ordinal, then $RM_M(\varphi) \geq \alpha$ if and only if $RM_M(\varphi) \geq \beta$, for all $\beta < \alpha$;

iii) for any ordinal α, $RM_M(\varphi) \geq \alpha+1$ if and only if there are L_M-formulas $\psi_1(\bar{v}), \psi_2(\bar{v}), \ldots$, such that $\psi_1(M), \psi_2(M), \ldots$ is an infinite family of pairwise disjoint subsets of $\varphi(M)$ and $RM_M(\psi_i) \geq \alpha$ for all i.

Theorem. On the type of the finite Morley rank holds exchange principle.

Список литературы

[1] A. Dolich, J. Goodrick, D. Lippel *dp-Minimality: Basic Facts and Examples,* Notre Dame J. Formal Logic, ***52****, Number 3 (2011), 267–288.*

[2] J.T. Baldwin, A.H. Lachlan *On Strongly Minimal Sets,* J. Symbolic Logic, ***36****, Issue 1 (1971), 79–96.*

— ⋇⋇⋇ —

ON JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL–LUCAS IDENTITIES WITH MULTINOMIAL COEFFICIENTS

TARAS GOY

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Shevchenko, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine

E-mail: tarasgoy@yahoo.com

The *Jacobsthal* and *Jacobsthal–Lucas* sequences $\{J_n\}_{n\geq 0}$ and $\{j_n\}_{n\geq 0}$ are defined by the recurrence relations $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, $J_0 = 0$, $J_1 = 1$, and $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$, $j_0 = 2$, $j_1 = 1$, for $n \geq 1$. The numbers J_n appear as the integer sequence A001045 from [6] while the numbers j_n is A014551. Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas sequences have a rich history and many remarkable properties (see [1–5] for more details).

Theorem 1. *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. The following formulas hold:*

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_0^{t_1} J_1^{t_2} \cdots J_{n-1}^{t_n} = -F_{n-1},$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_0^{t_1} J_1^{t_2} \cdots J_{n-1}^{t_n} = \frac{\sqrt{13}}{13}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_0^{t_1} J_2^{t_2} \cdots J_{2n-2}^{t_n} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_0^{t_1} J_2^{t_2} \cdots J_{2n-2}^{t_n} = \frac{\sqrt{13}}{13}\left(\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_1^{t_1} J_2^{t_2} \cdots J_n^{t_n} = \big((-1)^n - 1\big) \cdot 2^{\frac{n-3}{2}},$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_1^{t_1} J_2^{t_2} \cdots J_n^{t_n} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left((1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_1^{t_1} J_3^{t_2} \cdots J_{2n-1}^{t_n} = -\frac{1}{2}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} + (2-\sqrt{2})^{n-1}\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_1^{t_1} J_3^{t_2} \cdots J_{2n-1}^{t_n} = \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{3})^n + (3-\sqrt{3})^n\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_2^{t_1} J_3^{t_2} \cdots J_{n+1}^{t_n} = 0, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_2^{t_1} J_3^{t_2} \cdots J_{n+1}^{t_n} = 2^{n-1} F_{n+1}, \qquad n \geq 3,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_2^{t_1} J_4^{t_2} \cdots J_{2n}^{t_n} = -2^{n-1} n,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_2^{t_1} J_4^{t_2} \cdots J_{2n}^{t_n} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left((3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_3^{t_1} J_4^{t_2} \cdots J_{n+2}^{t_n} = (-2)^n, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_3^{t_1} J_5^{t_2} \cdots J_{2n+1}^{t_n} = -2^{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) J_3^{t_1} J_5^{t_2} \cdots J_{2n+1}^{t_n} = \frac{1}{16}\left((4+\sqrt{8})^{n+1} + (4-\sqrt{8})^{n+1}\right),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_4^{t_1} J_5^{t_2} \cdots J_{n+3}^{t_n} = -(-2)^{n-1}(2n+3),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) J_4^{t_1} J_6^{t_2} \cdots J_{2n+2}^{t_n} = 0, \qquad n \geq 3,$$

where the summation is over integers $t_i \geq 0$ satisfying $t_1 + 2t_2 + \cdots + nt_n = n$, $T = t_1 + \cdots + t_n$, $p_n(t) = \frac{(t_1+\cdots+t_n)!}{t_1!\cdots t_n!}$ is multinomial coefficient, and F_n is the n-th Fibonacci number (sequence A000045 in [6]).

Theorem 2. *Let $n \geq 1$, except when noted otherwise. The following formulas hold:*

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_0^{t_1} j_1^{t_2} \cdots j_{n-1}^{t_n} = \frac{\sqrt{13}-11}{6\sqrt{13}} \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{13}+11}{6\sqrt{13}} \left(\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) j_0^{t_1} j_1^{t_2} \cdots j_{n-1}^{t_n} = \frac{7\sqrt{13}-13}{26} \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \frac{7\sqrt{13}+13}{26} \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_0^{t_1} j_2^{t_2} \cdots j_{n-2}^{t_n} = \frac{19\sqrt{13}+65}{26} \left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)^n - \frac{19\sqrt{13}-65}{26} \left(\frac{-\sqrt{13}-3}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_1^{t_1} j_2^{t_2} \cdots j_n^{t_n} = (-1)^{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} \cdot \frac{(4+\sqrt{2})(\sqrt{2})^n + (4-\sqrt{2})(-\sqrt{2})^n}{4},$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_1^{t_1} j_3^{t_2} \cdots j_{2n-1}^{t_n} = 9(-1)^{\lfloor \frac{4n-1}{2} \rfloor} \cdot \Big((2-i\sqrt{2})^{n-3} + (2+i\sqrt{2})^{n-3}\Big),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_2^{t_1} j_3^{t_2} \cdots j_{n+1}^{t_n} = \frac{9(-4)^n}{8}, \qquad n \geq 2,$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} p_n(t) j_2^{t_1} j_4^{t_2} \cdots j_{2n}^{t_n} = 2^{n-2}\big((-1)^n 9 - 1\big),$$

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} (-1)^T p_n(t) j_3^{t_1} j_5^{t_2} \cdots j_{2n+1}^{t_n} = -9(-2)^{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

where the summation is over integers $t_i \geq 0$ satisfying $t_1 + 2t_2 + \cdots + nt_n = n$, $T = t_1 + \cdots + t_n$, $p_n(t) = \frac{(t_1+\cdots+t_n)!}{t_1!\cdots t_n!}$, $i = \sqrt{-1}$, and $\lfloor \alpha \rfloor$ is the floor of α.

Список литературы

[1] Z. Čerin, *Sums of squares and products of Jacobsthal numbers* // J. Integer Seq., **10**:2 (2007), Article 07.2.5.

[2] C.K. Cook and M.R. Bacon, *Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations* // Ann. Math. Informat., **41** (2013), 27–39.

[3] A.F. Horadam, *Jacobsthal and Pell curves* // Fibonacci Quart., **26**:1 (1988), 77–83.

[4] A.F. Horadam, *Jacobsthal representation numbers* // Fibonacci Quart., **34**:1 (1996), 40–54.

[5] H.-C. Li, *A proof about the Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas sequences* // Far East J. Math. Sci., **2**:2 (2012), 605–614.

[6] N.J.A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Published electronically at https://oeis.org.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

UNIVERSAL ENVELOPING BICOMMUTATIVE ALGEBRAS FOR METABELIAN LIE ALGEBRAS

ASKAR DZHUMADIL'DAEV[a], KAISAR TULENBAEV[b], NURLAN ISMAILOV[c]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Pushkin street, 125, Almaty, 050100, Kazakhstan

E-mail: [c]tulen75@@hotmail.com

We establish Poincare-Birkhoff-Witt theorem (PBW theorem) for metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras.

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field with characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, is product. An algebra $(A, \circ)$ is called *Bicommutative*, if

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b (RCom)$$

$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c) (LCom)$$

for any $a, b, c \in A$. We mention that bicommutative algebra over new commutator operation

$[a, b] = a \circ b - b \circ a$ satisfies the following three equations:

$$1. [a, b] = -[b, a]$$

$$2. [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

$$3. [[a, b], [c, d]] = 0.$$

It means bicommutative algebra over new commutator operation is Lie metabelian algebra. Let us remain that an algebra A is called We use description of linear basis of algebras metabelian Lie algebras. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra generating on free variables $a_1, \cdots, a_r$. Then linear basis of F will be the following right-normed products $[[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}], \cdots, a_{i_k}]$ where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$

This research is financially supported by grants from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan under the grant number 4075/GF4.

Also we give description of basis of Bicommutative algebra in terms of Young diagrams of special type, which we call hooks. In Novikov algebras and in bicommutative algebras base elements can be formed by elements that are right-bracketed products of left-bracketed elements. To denote such products we will use special notation hook. We write them as a sequence of rows put down each other. Rows corresponds to left-bracketed elements and columns to right-bracketed elements. Priority is given for rows. For example,

$$a(b(cd)) = \begin{array}{ll} c & d \\ b & \\ a & \end{array},$$

$$((ab)c)d = \begin{array}{llll} a & b & c & d \end{array}$$

$$((ab)c)(((xy)z)(((de)f)g)) = \begin{array}{llll} d & e & f & g \\ x & y & z & \\ a & b & c & \end{array}$$

So, left-bracketed element $((a_1a_2)\cdots)a_n$ we write as a row

$$a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \ ,$$

right-bracketed element $a_1(\cdots(a_{n-1}a_n)\cdots)$ as a column

$$\begin{array}{ll} a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \\ a_1 & \end{array},$$

and the following hook

$$L(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_l) = \begin{array}{llll} a_k & b_1 & \cdots & b_l \\ a_{k-1} & & & \\ \vdots & & & \\ a_1 & & & \end{array}$$

will denote the element $a_1(\cdots(a_{k-1}\Big((\cdots(a_kb_1)\cdots)b_l\Big))\cdots)$. For example,

$$L(a_1; b_1) = a_1b_1,$$

$$L(a_1; b_1, \ldots, b_l) = (\cdots((a_1b_1)b_2)\cdots)b_l = L(L(a_1; b_1 \ldots, b_{l-1}); b_l),$$

$$L(a_1, \ldots, a_k; b_1) = a_1(\cdots(a_{k-1}(a_kb_1))\cdots) = L(a_1; L(a_2, \ldots, a_k; b_1)).$$

Below notation of a form $a \stackrel{rel}{=} b$ will mean that $a = b$ because of relation "rel".

Also we use another representation of hook as a pair (X,Y) Let us introduce order on bicommutative monomials. Degree of (X,Y) is equal to sum of degree X and degree Y. We say that $Z = (X, Y) < Z_1 = (X_1, Y_1)$ if $degZ < degZ_1$. When $degZ = degZ_1$ we will compare Y and Y_1 as monomials in associative and commutative algebra with deg-lex order.

Theorem 1. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra and $B = B < x_1, \cdots, x_r >$ be free Bicommutative then mapping $\phi : F \to B$ expanding from generating elements $\phi(a_i) = x_i$ is injective homomorphism.

Proof. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra generating on free variables $a_1, \cdots, a_r$. Then linear basis of F will be the following right-normed products $[[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}], \cdots, a_{i_k}]$ where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$ If we consider free Bicommutative algebra $B = B < x_1, \cdots, x_r >$ over new commutator operation and mapping ϕ, extending by values on generators $\phi(a_i) = x_i$. It is possible to do because F is free metabelian and algebra (B,[,]) is metabelian. Let us consider homogeneous element of Bicommutative algebra b to be linear combination of right-normed products $[[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}]$ where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$. Let us check that $b \neq 0$. We choose i_1 to be maximum and among such i_2 to be minimum. We will open commutators using order on bicommutative monomials

$$[[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}] =$$

$$= (((x_{i_1} \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}) \cdots) \circ x_{i_k} -$$

$$-(((x_{i_2} \circ x_{i_1}) \circ x_{i_3}) \cdots) \circ x_{i_k} + y$$

, where y has order smaller then b Element $x = (((x_{i_1} \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}) \cdots) \circ x_{i_k}$ can not be deleted by another element $t = (((x_{j_1} \circ x_{j_2}) \circ x_{j_3}) \cdots) \circ x_{j_k}$ or an element $s = (((x_{j_2} \circ x_{j_1}) \circ x_{j_3}) \cdots) \circ x_{j_k}$,where $j_1 > j_2 \leq j_3 \leq j_k$. Because i_1 is maximum then $j_1 = i_1$, so $s \neq x$ because $j_2 < j_1$. Also $x \neq t$, because i_2 is minimum and $i_2 \leq i_3 \leq i_k$. Therefore $j_p = i_p$ for $p \geq 2$. Q. E. D.

Let I be an ideal of free metabelian Lie algebra F. Denote $< \phi(I) >$ an ideal of Bicommutative algebra B, generated by $\phi(I)$. Also we find that the following lemma is true.

Lemma 1. $\phi(I) =< \phi(I) > \cap \phi(F)$.

Proof. Let $F = F < a_1, \cdots, a_r >$ be free Lie metabelian algebra generating on free variables $a_1, \cdots, a_r$. Then linear basis of F will be the following right-normed products $[[[a_{i_1}, a_{i_2}], a_{i_3}], \cdots, a_{i_k}]$ where $i_1 > i_2 \leq i_3 \leq i_k$. It is easy to see that $\phi(I) \subseteq < \phi(I) > \cap \phi(F)$. Let us check that $phi(I) \supseteq < \phi(I) > \cap \phi(F)$. Suppose element $u \in \phi(I) =< \phi(I) > \cap \phi(F)$. So because $u \in \phi(F)$, we can write $u = \sum \lambda \cdot [[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}]$

We choose i_1 to be maximum and among such i_2 to be minimum. We will open commutators using order on bicommutative monomials

$$[[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}] =$$

$$= (((x_{i_1} \circ x_{i_2}) \circ x_{i_3}) \cdots) \circ x_{i_k} -$$

$$-(((x_{i_2} \circ x_{i_1}) \circ x_{i_3}) \cdots) \circ x_{i_k} + y$$

, where y has order smaller then b On other hand $u \in < \phi(I) >$, so $u = u = \sum \mu \cdot a \circ ([[[x_{j_1}, x_{j_2}], x_{j_3}], \cdots, x_{j_s}] \circ b) + \sum \gamma \cdot (c \circ ([[[x_{p_1}, x_{p_2}], x_{p_3}], \cdots, x_{p_t}]) \circ d$ Using properties of bicommutative algebras any product $a \circ ([[[x_{j_1}, x_{j_2}], x_{j_3}], \cdots, x_{j_s}] \circ b)$ we can represent as product circ $x_{n_1} \circ (x_{n_2} \circ (\cdots (\circ (x_{n_w} \circ ((((((([[[x_{j_1}, x_{j_2}], x_{j_3}], \cdots, x_{j_s}]) \circ x_{m_1}) \circ x_{m_2}) \cdots) \circ x_{m_v})))))$ Using order on bicommutative monomials, we obtain that $n_w = 0$ (have no multiplication from left) and $i_1 = j_1$ and ordered set $j_2, j_3, \cdots, j_s, m_1, m_2, cdots, m_v$ coincides with ordered set $i_2, i_3, \cdots, i_k$. Let us consider element $v = u - \lambda \cdot [[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}]$ v has smaller order then u and $v \in \phi(F) \cap < \phi(I) >$ Using induction on order of v, we have $v \in \phi(I)$. Therefore $u = v + \lambda \cdot [[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \cdots, x_{i_k}]$ is also element of $\phi(I)$

As consequence of this Lemma 1, we prove

Theorem 2. Any metabelian Lie algebra L is subalgebra of (B,[,])for some bicommutative algebra B.

Proof. We can represent any metabelian Lie algebra L as factor-algebra of free metabelian Lie algebra F<A> on some alphabet A by an ideal I. By Theorem 1 injective homomorphism ϕ from F<A> to B<X> exists, where alphabet X is corresponding to alphabet A. By Lemma 1 $\phi(I) =< \phi(I) > \cap \phi(F)$. Let us check that ϕ can be extended from F<X> to homomorphism from F<X>/I to B<X>/$< \phi(I) >$. We remain that $\phi(a_i) = x_i$. Let us attach left adjacent class $a_i + I$ to left adjacent class $x_i + < \phi(I) >$. We check that ψ, given on generators by $\psi(a_i + I) = x_i + < \phi(I) >$, is injective. Suppose $\psi(f) = 0$ then $\phi(f) \in < \phi(I) >$. By Lemma 1 we have $f \in I$.

Given construction of Bicommutative give us universal enveloping Bicommutative for metabelian Lie algebra. Now we can prove analog of Poincare-Birkhoff-Witt theorem (PBW theorem) for metabelian Lie algebras and Bicommutative algebras.

Theorem 3. Let $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ be linearly independent set, generating (as algebra) metabelian Lie algebra L then there exists universal enveloping Bicommutative algebra B with the same generating as Bicommutative algebra set X, such that for any homomorphism $\tau : L \to D$, where D is Bicommutative algebra with commutator operation [,] exists only one homomorphism $\theta : B \to D$ as Bicommutative algebras and $\tau = \theta \circ \phi$.

Proof. We can represent our metabelian Lie algebra L as factor-algebra of free metabelian Lie algebra $F < X >$ on our generating set X by an ideal I. By Theorem 2 $L = F < X > /I$ is injectively enveloped into $B = B < X > / < \phi(I) >$. Suppose for us given homomorphism $\tau : L \to D$, so we can define $\theta : B \to D$ as homomorphism of Bicommutative algebras by expanding $\theta(x) = \tau(x)$ for every $x \in X$. It is easy to see that $\tau(x) = \theta \circ \phi(x)$. Let us check universal property of bicommutative algebra B. Suppose exists bicommutative algebra U with the same property of enveloping of metabelian Lie algebra L. It means that exists homomorphism as Lie algebras $\psi : L \to U$ such that elements of $\psi(L)$ generates U as bicommutative algebra and for any homomorphism $\tau : L \to D$, where D is Bicommutative algebra with commutator operation [,] exists only one homomorphism $\delta : U \to D$ as

Bicommutative algebras and $\tau = \delta \circ \psi$

. Let us take U instead of D. Therefore we have the following identities $\psi =$

Theorem 4. Let $\theta : L_1 \to L_2$ is homomorphism of metabelian Lie algebras.

Список литературы

[1] Yu. A. Bahturin. Identical relations in Lie algebras. VNU Science Press, 1987

[2] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev, *Bi-commutative algebras,*// Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149-150=engl.transl. Russian Math. Surv., 1196-1197.

[3] A.S. Dzhumadil'daev, N. A.Ismailov K.M. Tulenbaev. Free Bicommutative algebras // Serdica Mathematical Journal., 2011, V.37,No.1, P.25–44

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SPECIAL LEIBNIZ-LIE AND SPECIAL LEIBNIZ-JORDAN ALGEBRAS

A. DJUMADIL'DAEV, N. ISMAILOV

Kazakh-British Technical University, Suleyman Demirel University (Kazakhstan, Almaty)

E-mail: nurlan.ismail@gmail.com

The standard questions in algebra for an adjoint class of a variety via commutator or anti-commutator products are to determine whether the class is a variety and determine a set of special identities for the class. For some varieties these questions are solved or partially solved and for some varieties are still open. In this work we consider these questions for variety of Leibniz algebras.

An algebra with identity

$$(ab)c = a(bc) - b(ac)$$

is called *(left)-Leibniz* algebra. Let $\mathcal{L}eibniz$ be the variety of Leibniz algebras and $\mathcal{L}eib(X)$ be a free Leibniz algebra generated on X. Define $\mathcal{L}eibniz^{(+)}$ and $\mathcal{L}eibniz^{(-)}$ as the classes of algebras defined by *anti-commutator* $\{x, y\} = xy + yx$ and *commutator* $[x, y] = xy - yx$, respectively on the space $A \in \mathcal{L}eibniz$. Algebras of the class $\mathcal{L}eibniz^{(+)}$ are called *special Leibniz-Jordan* and algebras of the class $\mathcal{L}eibniz^{(-)}$ are called *special Leibniz-Lie*. In [1] it was proved that any Leibniz-Jordan is commutative and metabelian, and there is no other special identity for $\mathcal{L}eibniz^{(+)}$. In [2] there were studied special identities for $\mathcal{L}eibniz^{(-)}$ up to degree 5.

Let $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ be a set. Let $\mathbf{K}$ be a field whose charactersitic is not equal to 2. By $SLJ(X)$ and $SLL(X)$ denote the free special Leibniz-Jordan and Leibniz-Lie algebras respectively on X.

Main result of our work are the following theorems.

Theorem 1. Any homomorphic image of $SLJ(X)$ is special.

Theorem 2. The algebra $SLL(x_1, x_2)$ has a homomorphic image that is exceptional.

Corollary 3. The class of all special Leibniz-Jordan algebras is a variety.

Corollary 4. The class of all special Leibniz-Lie algebras is a not a variety.

Let us consider the polynomial

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$[[[\ldots[J(x_1, x_2, x_3), x_4], \ldots], x_{n-2}], [x_{n-1}, x_n]]+$$

$$2J([[\ldots[J(x_1, x_2, x_3), x_4], \ldots], x_{n-2}], x_{n-1}, x_n)$$

where

$$J(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$$

is Jacobian of elements x, y, z.

Theorem 5. Let A be a Leibniz algebra. Then $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ in A for any $n > 4$ and $a_1, \ldots, a_n \in A$. Moreover, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ is the unique special identity for $\mathcal{L}eibniz^{(-)}$ up to n=8.

Список литературы

[1] A. Dzhumadil'daev, *Jordan elements and left-center of a free Leibniz algebra* // Elevtronic Research Announcements In Mathemcatical Sciences, **18**:(2011), 31-49.

[2] A. Dzhumadil'daev, *q-Leibniz algebras* // Serdica Math.J., **34**:(2008), 415-440.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

LOWER ESTIMATES FOR THE ENERGY FUNCTIONAL ON A FAMILY OF HAMILTONIAN-MINIMAL LAGRANGIAN TORI IN $\mathbb{C}P^2$

AKNAZAR KAZHYMURAT

NIS for Physics and Mathematics, Zhamakaeva, 145, Almaty, 55000, Kazakhstan
E-mail: fourier845@gmail.com

The energy functional for Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ was introduced in [1]. It is defined as the integral of the potential of the associated 2D Schrödinger operator. For a Lagrangian torus $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ it equals

$$E(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma + \frac{1}{8}\int_\Sigma |H|^2 d\sigma,$$

where $d\sigma$ is the induced area element and H is the mean curvature vector. The energy conjecture [1] states that the Clifford torus $\Sigma_{Cl} \subset \mathbb{C}P^2$ is the unique (up to ambient isometries) global minimum of the energy functional. A certain family Σ_M of Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ has been constructed in [3]. We prove the energy conjecture for this family of tori.

Theorem. *The following inequality holds*

$$E(\Sigma_M) > E(\Sigma_{Cl}).$$

Список литературы

[1] H. Ma, A. E. Mironov, D. Zuo, Energy functional for Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$, arXiv:1701.07211.

[2] A. E. Mironov, On Hamiltonian minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ (Russian), Sib. Math. J., **44**:6 (2003), 1324-1328.

— ⁂ —

Author has been partially supported by вЂќOrkenвЂќ scholarship of JSC NIS
The second author was supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

COUNTABLE MODELS AND STRICTLY ORDER PROPERTY

FARIZA KOBDIKBAYEVA[1,a], TATYANA ZAMBARNAYA[2,b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: [a]e.fariza@bk.ru, [b]zambar@gmail.com

Definition.[1] A formula $\varphi(x, y)$ has the order property(OP) if there are $(a_i)_i < \omega$ and $(b_i)_i < \omega$ such that $\models \varphi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$.

Definition.[1] A formula $\varphi(x, y)$ has the strict order property(SOP) if there are $(a_i)_i < \omega$ such that $\models \exists x(\varphi(x, a_j)) \wedge \neg\varphi(x, a_i) \Leftrightarrow i < j$.

Definition.[1] A formula $\varphi(x, y)$ as the independence property (IP) if there are $(a_i)_i < \omega$ and $(b_I)_I \subseteq \omega$ such that $\models \varphi(a_i, b_I) \Leftrightarrow i \subseteq I$.

S.Shelah proved [2] that theory T is stable if and only if T has not order property(OP) and T has OP if and only if T has strictly OP or IP.

Notice,that T has strictly order property if and only if there is definable partial order with infinite chain.

To prove the following theorem, we use theorem about linear order.[2]

Theorem. Let T be a small countable theory. Suppose there is a formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$, which determines a partial order and for any $n < \omega$ there exists a discrete chain $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ of a length at least n. Then the number of non-isomorphic countable models of T is equal to 2^ω.

Список литературы

[1] S. Shelah,*Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models* // North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1978).

[2] A.A. Alibek, B.S. Baizhanov, T.S. Zambarnaya,*Discrete order on a definable set and the number of models* // Matematicheskij zhurnal, **14:3 (2014), 5–13.**

— ⁂ ⁂ ⁂ —

THE COMPLEXITY OF QUASIVARIETY LATTICES

SVETLANA LUTSAK

The L.N. Gumilev Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010000, Kazakhstan
E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

One of the known problems in universal algebras and lattice theory is the question, which lattices are isomorphic to quasivariety lattices; nowadays it is called the Birkhoff-Maltsev problem and is of a big interest [1, 2].

We explore the complexity of structure of (relative) quasivariety lattices for different classes of algebraic structures of a fixed signature. This paper considers two complexity measures of the structure of quasivariety lattices: Q-universality (after M.V. Sapir) and non-computability of the set of finite sublattices of the quasivariety lattice (the Nurakunov non-computability property or unreasonability after K. Herrmann).

The concept of a Q-universality was introduced by M.V. Sapir in 1985 in the paper [3] and reflects the complexity degree of the structure of quasivariety lattices. After M.V. Sapir [3], a quasivariety $\mathbf{K}$ is Q-universal if, for any quasivariety $\mathbf{R}$ of a finite signature, a quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{R})$ is a homomorphic image of some sublattice of the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. Now it is known a lot of Q-universal classes of algebraic structures, see the papers [1–8].

The concept of unreasonability was introduced by K. Herrmann in 2007 and was developed in the papers of A.M. Nurakunov. We say that a quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ for the class $\mathbf{K}$ of algebraic structures of a fixed signature has the Nurakunov non-computability property if the set of all finite sublattices of the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ is not computable, t.i. there is no algorithm which would determine, for a given finite lattice, this lattice is embeddable into the considered quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ or not. In this case we also say that the class $\mathbf{K}$ has the Nurakunov non-computability property. The first examples of unreasonable quasivarieties (namely, the quasivariety of unary algebras, the quasivariety of pointed Abelian groups) were found by A.M. Nurakunov in the papers [6, 9]. Unreasonable classes of algebraic structures were also built in the paper [8].

In the paper [8] it was proved that the class K of all algebraic structures of a fixed signature is Q-universal if and only if it contains an unreasonable subclass, i.e. such that the set of all finite sublattices of its quasivariety latice is not computable. In this regard, it is arisen the following problem [7, 8]. Does any Q-universal class $\mathbf{K}$ of algebraic structures of a fixed signature contain an unreasonable subclass? Is there an unreasonable class of algebraic structures which is not Q-universal? A positive answer to the first question was given by M.V. Schwidefsky for almost all the known Q-universal quasivarieties [7]. The author gives a positive answer to the second question. The main result of this paper states that, for many particular classes $\mathbf{K}$ of algebraic structures of a fixed signature (namely, for classes which are AD-classes), there are continuum many subclasses $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ which have the Nurakunov non-computability property but which are not Q-universal, see theorems 2 and 3. We note that the definition of AD-class can be found in the paper [10]. The result of theorems 2 and 3 is due to the fact that we have found a non-trivial identity T_3 holding in quasivariety lattices for the considered subclasses of algebraic structures, see theorem 1 and corollary 1.

Theorem 1. *A non-trivial lattice-theoretical identity* T_3 *is held in lattice of* $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$, *for any* $n \in \omega \setminus \{0,1,2\}$.

Corollary 1. *A non-trivial identity* T_3 *is held in lattice of* $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$, *for arbitrary* $N \subseteq \omega \setminus \{0,1,2\}$.

We note that $\mathcal{K}_n$, $n \in \omega \setminus \{0,1,2\}$, is a finite lower semilattice of type “crown”; $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ is a lattice of lower subsemilattices of $\mathcal{K}_n$.

Theorem 2. *If a class* $\mathbf{K}$ *of algebraic structures of finite signature is an AD-class then it contains continuum many proper subclasses* $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ *which have the Nurakunov non-computability property but which are not* Q*-universal.*

Theorem 3. *For the following classes* $\mathbf{K}$ *of algebraic structures of a fixed signature there are continuum many subclasses* $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ *which have the Nurakunov non-computability property but which are nevertheless not* Q*-universal:*

1. *the variety of all unary algebras;*
2. *the variety of all pointed Abelian groups;*
3. *the quasivariety of all [directed] graphs;*
4. *the variety of all differential groupoids;*
5. *the variety of all commutative rings with unit;*
6. *the “finite-to-finite” universal quasivarieties;*
7. *the variety of MV-algebras;*
8. *the variety of Cantor algebras;*
9. *the variety of modular (0,1)-lattices*
10. *the Sapir quasivariety which is generated by a single semigroup.*

In case (1) *the classes* $\mathbf{K}'$ *can be chosen as quasivarieties.*

Theorem 2 can be applied to almost all known Q-universal quasivarieties. It follows from theorem 2 that almost all the Q-universal classes of algebraic structures of a fixed signature contain continuum many proper subclasses which are not Q-universal. Only the most well-known of *AD*-classes are listed in theorem 3. The result of theorem 3 holds for many other classes of algebraic structures.

The results obtained are of a theoretical nature and can be applied in further research in the field of universal algebra and lattice theory.

Список литературы

[1] M. Adams, K. Adaricheva, W. Dziobiak, A. Kravchenko, *Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev* // Stud. Log., **78**:1/2 (2004), 357–378.

[2] V. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties* // Plenum, 1998.

[3] M. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups* // Algebra Universalis, **21**:2/3 (1985), 172–180.

[4] M. Adams, W. Dziobiak, *Q-universal quasivarieties of algebras* // Proc. Amer. Math. Soc., **120**:4 (1994), 1053–1059.

[5] M. Adams, W. Dziobiak, *Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal* // Algebra Universalis, **46**:1/2 (2001), 253–283.

[6] A. Nurakunov, *Quasivariety lattices of pointed Abelian groups* // Algebra and Logic, **53**:3 (2014), 372–400.

[7] M. Schwidefsky, *On the complexity of quasivariety lattices* // Algebra and Logic, **54**:3 (2015), 381–398.

[8] M. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio, *Lattices of subclasses. II* // Internat. J. Algebra Comput., **24**:8 (2014), 1099–1126.

[9] A. Nurakunov, *Unreasonable lattices of quasivarieties* // Internat. J. Algebra Comput., **22**:3 (2012), 1–17.

[10] S. Lutsak, *The complexity of quasivariety lattices* // Siber. Electr. Math. Rep., **14** (2017), 92–97.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

GRADED CHARACTERISTIC LIE ALGEBRAS OF SLOW GROWTH

DMITRY MILLIONSHCHIKOV

Lomonosov Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie gory, 1, Moscow, 119992, Russia

E-mail: million@mech.math.msu.su

Shalev and Zelmanov studied [2] Lie algebras of GK-dimension 1. They introduced a special class of graded two-generated Lie algebras with the slowest possible growth ($\dim V^n = n+1$), the so-called Lie algebras of maximal class.

A pro-nilpotent Lie algebra $\mathfrak{g}$ is called naturally graded if it is isomorphic to $\mathrm{gr}_C\mathfrak{g}$, its associated graded Lie algebra with respect to the filtration by ideals $C^i\mathfrak{g}$ of its lower central series.

Pro-nilpotent naturally graded Lie algebras $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{N}}\mathfrak{g}_i$ satisfying

$$\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3,\ i \in \mathbb{N},$$

were classified in [1]. Graded Lie algebras of maximal class obviously satisfy this estimate, however there are other examples of Lie algebras growing a bit faster than Lie algebras of maximal class. Some of these examples are related the theory of characteristic Lie rings of the Klein-Gordon equation $u_{xy} = f(u)$ [3]. We relate these examples to the general classification obtained in [1].

Acknowledgements: this work is partially supported by RFBR grant 17-01-00671.

Список литературы

[1] Millionschikov D.V. Naturally graded Lie algebras (Carnot algebras) of slow growth // arXiv:1705.07494

[2] Shalev A., Zelmanov E.I. Narrow algebras and groups // J. of Math. Sciences. 1999. V. 93, N 6. P. 951–963.

[3] Zhiber A. V., Murtazina R. D., Habibullin I. T., Shabat A. B. Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics// Ufa Math. J. 2012. V. 4, N 3. P. 17–85.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

The research was supported by Ministry of Education and Sciences of Kazakhstan, grant 3953/GF4.

ULTRAPRODUCTS PRESERVE FINITE SUBDIRECT REDUCIBILITY

ANVAR M. NURAKUNOV

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences, Chu pr., 265a, Bishkek, 720071, Kyrgyzstan

E-mail: a.nurakunov@gmail.com

An algebraic structure A is said to be *finitely subdirectly reducible* if A is not finitely subdirectly irreducible. We show that for any signature providing only finite many relation symbols, the class of finitely subdirectly reducible algebraic structures is closed with respect to the formation of ultraproducts. We provide some corollaries and examples for axiomatizable classes that are closed with respect to the formation of finite subdirect products, in particular, for varieties and quasivarieties.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

DERIVATIVE STRUCTURES IN MODEL THEORY AND GROUP THEORY

SERGEY SUDOPLATOV

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Academician Koptyug Avenue, 4, Novosibirsk, 630090, Russia; Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, Russia; Novosibirsk State University, Pirogova street, 1, Novosibirsk, Russia; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Pushkina Street, 125 Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We consider a series of derivative structures used for a classification of structures and their elementary theories:

- Rudin–Keisler preorders and distribution functions for limit models of a given theory, producing spectra of countable models [1, 2, 3, 4, 5];
- Algebras for distributions of formulas over families of types [2, 6, 7, 8, 9, 10];

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0830/GF4), by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (Grant No. NSh-6848.2016.1), and by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531).

- Hypergraphs of models of a theory [2, 11, 12, 13];
- Generic classes and their limits [2, 14, 15, 16, 17, 18];
- Topologies, closures, generating sets and e-spectra for families of theories with respect to E-operators and P-operators [2, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

In these directions, a survey of recent and new results is proposed.

In particular, based on [26, 2], the following theorems for hypergraphs $\mathrm{Hp}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hm}(\mathcal{A})$, $H(\mathcal{A})$ of respectively, prime, minimal, prime minimal submodels of Abelian groups $\mathcal{A}$ hold.

Theorem 1. *For any Abelian group $\mathcal{A}$ exactly one of the following conditions is satisfied:* 1) $\mathrm{Hp}(\mathcal{A}) = \emptyset$; 2) $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| = 1$ (*with finite Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p [25] besides that ones for which $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, as well as with $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))| = 1$ for the periodic part $T(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$, and with at most one group $\mathbf{Q}$ obtained from $\mathcal{A}$ as direct summand forming a prime model $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$*); 3) $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| \geq \omega$; *here the presence of infinite invariant $\alpha_{p,n}$, or infinite β_p, or infinite γ_p besides that ones for which $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, or the group $\mathbf{Q}^{(\omega)}$, obtained from $\mathcal{A}$ as direct summand, with $\mathbf{Q}$ in a prime model $\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$, implies $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| \geq 2^\omega$; if $\mathcal{A}$ has $\lambda \geq \omega$ copies of the group $\mathbf{Q}$, forming the direct sum, then $|\mathrm{Hp}(\mathcal{A})| = 2^\lambda$.*

Theorem 2. *For any Abelian group $\mathcal{A}$ or the form*

$$\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \oplus_p \mathbf{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbf{Q}^{(\varepsilon)},\ \varepsilon \in \{0,1\}, \tag{1.1}$$

exactly one of the following conditions is satisfied: 1) $\mathrm{Hm}(\mathcal{A}) = \emptyset$; 2) $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| = 1$ (*with finite Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p besides that ones for which $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$, as well as with $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A}/T(\mathcal{A}))| = 1$*). *Allowing to vary ε in the Abelian group $\mathcal{A}$ of the form* (1.1) *we have $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| \geq \omega$ for $\varepsilon \geq 2$, $\beta_p = \gamma_p = 0$ with any p and finite $|\{\langle p,n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| < \omega$. If additionally $\varepsilon \geq \omega$ then $|\mathrm{Hm}(\mathcal{A})| \geq 2^\omega$.*

Theorem 3. *For any Abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:* 1) $H(\mathcal{A}) \neq \emptyset$; 2) *all Szmielew invariants for $\mathcal{A}$ are finite and some of the following conditions is satisfied:* a) $\mathcal{A} \equiv T(\mathcal{A})$; b) *the reduced part of $T(\mathcal{A})$ is bounded and $H(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) \neq \emptyset$, i. e., there is a finite set P_0 of prime numbers and $\lambda \in \omega$ such that $\gamma_p(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = \lambda$ for $p \in P_0$ and $\gamma_p(\mathcal{A}/T(\mathcal{A})) = 0$ for $p \notin P_0$.*

Список литературы

[1] S.V. Sudoplatov, *Complete theories with finitely many countable models. I* // Algebra and Logic, **43**:1 (2004), 62–69.

[2] S.V. Sudoplatov, *Classification of Countable Models of Complete Theories* // Novosibirsk: NSTU, 2014.

[3] R.A. Popkov, S.V. Sudoplatov, *Distributions of countable models of complete theories with continuum many types* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 267–291.

[4] B.Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, *Vaught's conjecture for quite o-minimal theories* // Annals of Pure and Applied Logic, **168**:1 (2017), 129–149.

[5] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, *Linearly ordered theories which are nearly countably categorical* // Mathematical Notes, **101**:3 (2017), 94–102.

[6] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[7] S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 408–433.

[8] S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions of formulas with respect to generalized semi-isolation* // Algebra and Model Theory 9. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU, 2013. — P. 67–100.

[9] D.Yu. Emel'yanov, B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures* // Algebra and Logic, **56**:1 (2017), 13–36.

[10] K.A. Baikalova, D.Yu. Emel'yanov, B.Sh. Kulpeshov, E.A. Palyutin, S.V. Sudoplatov, *On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered expansions* // Russian Mathematics. (to appear)

[11] S.V. Sudoplatov, *Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories* // Journal of Mathematical Sciences, **169**:5 (2010), 680–695.

[12] S.V. Sudoplatov, *On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory* // Bulletin of the Karaganda University — Mathematics, **82**:2 (2016), 113-120.

[13] S.V. Sudoplatov, *On hypergraphs of minimal and prime models of theories of abelian groups* // Preprint, Novosibirsk, 2017.

[14] S.V. Sudoplatov, *Syntactic approach to constructions of generic models* // Algebra and Logic, **46**:2 (2007), 134–146.

[15] S.V. Sudoplatov, *Generative and pre-generative classes* // Proceedings of the 10-th Panhellenic Logic Symposium, June 11-15, 2015, Samos, Greece. University of Aegean, University of Crete, and University of Athens, 2015. — P. 30–34.

[16] S.V. Sudoplatov, *Classes of structures and their generic limits* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **36**:4 (2015), 426–433.

[17] S.V. Sudoplatov, *Generative classes generated by sets of diagrams* // Algebra and Model Theory 10. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU, 2015. — P. 163–174.

[18] S.V. Sudoplatov, Y. Kiouvrekis, P. Stefaneas, *Generic constructions and generic limits* // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics (PROMS) “Algebraic Modeling of Topological and Computational Structures and Applications”. (to appear)

[19] S.V. Sudoplatov, *Combinations of structures* // arXiv:1601.00041v1 [math.LO], 2016.

[20] S.V. Sudoplatov, *Closures and generating sets related to combinations of structures* // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **16** (2016), 131–144.

[21] S.V. Sudoplatov, *Families of language uniform theories and their generating sets* // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”, **17** (2016), 62–76.

[22] S.V. Sudoplatov, *On semilattices and lattices for families of theories* // arXiv:1701.00208v2 [math.LO], 2017.

[23] S.V. Sudoplatov, *Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 135–150.

[24] S.V. Sudoplatov, *Relative e-spectra, relative closures, and semilattices for families of theories* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 296–307.

[25] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical logic* // Moscow: FIZMATLIT, 2011.

[26] R. Deissler, *Minimal and prime models of complete theories of torsion free Abelian groups* // Algebra Universalis, **9** (1979), 250–265.

[27] *Molokov A. V. Prime models of theories of Abelian groups* // Some problems and tasks in Analisys and Algebra: Scientific proceedings. Novosibirsk: NSU, 1985. — P. 113–119.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

TRANSFORMATION AND INDEX SET OF ITS PRESENTATIONS

J.A. TUSSUPOV

Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

E-mail: tussupov@mail.ru

Определение. *Structure $\mathcal{A}_0$ of signature σ_0 is called a transformation of a structure $\mathcal{A}$ of signature $\sigma =< P_1, ..., P_k >$ where predicates P_i of m_i - arity, $1 < i < k$ if structure $\mathcal{A}_0$ constructed from the structure $\mathcal{A}$ by some algorithm and exist formulas $\varphi_0((\overline{x}, \overline{y})$, $\varphi_1(\overline{x}, \overline{y}_0), \overline{y_1})$,...,$\theta_i(\overline{x}, \overline{y}_0), \overline{y_1}, ..., \overline{y(m_i)}, \overline{x} = (x_1, ..., x_n), \overline{y} = (y_1, ..., y_m), \overline{y_i} = (y_(1)^i, ..., y_m^i), 1 \leq i \leq k$, of signature σ_0, parameters $c_1, ..., c_n$ from $\mathcal{A}_0$ and the following conditions hold:*

(1) $\overline{B} = \overline{b} : \overline{b} \in |\mathcal{A}_0^m, A_0| = \varphi_0(\overline{c}, \overline{b}$;

(2) the formula $\varphi_1(\overline{x}, \overline(y_0), \overline(y_1))$, defines a congruence η on the structure $\overline{B} = \left\langle \overline{B}, \overline{Q_i^(m_i)} \right\rangle$ where predicates $Q_i^(m_i)$ correspond to formulas $\theta_i(\overline{x}, \overline{y}_0), \overline{y_1}, ..., \overline{y_(m_i)}, 1 \leq i \leq k$;

(3) the structure $\overline{B}/\eta$ is isomorphic to the structure $\mathcal{A}$.

Let $\mathcal{A}_0$ is a transformation of a structure $\mathcal{A}$. We consider classes of all presentations of structure $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_0$. We denote their $Pr(\mathcal{A})$ and $Pr(\mathcal{A}_0)$. We consider structures of the following signatures:
σ the signature of a partial order (an oriented graph);
σ_0 the signature of an irreflexive symmetric graph;
σ_1 the signature of a nilpotent group of class 2 and prime exponent;
σ_2 the signature of a lattice;
σ_3 the signature of a ring;
σ_4 the signature of an integral domain; σ_5 the signature of a commutative semigroup;
σ_6 the signature of a bipartite graph;
σ_7 the signature with two equivalences.
For $i = 0, ..., 7$ we have the following theorems.

Теорема 1.1. *For any signature σ_i, $i = 0, ..., 7$ there exist transformation $\mathcal{A}_i$ of the structure $\mathcal{A}$ of the signature σ such that indexes sets of $Pr(A)$ and $Pr(A_0)$ are computable isomorphic.*

Список литературы

[1] S. S. Goncharov. *somorphisms and definable relations on computable models.* ***J. of Symbolic Logic,*** Lect. NotesLog., 28, Cambridge Univ. Press, Assoc. SymbolicLogic, Cambridge (2008), pp. 26-45.

[2] A. H. Mekler. *Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent*,J. Symb. Log.,46, 534-562 (1981).

[3] D. R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R. A. Shore, and A. M. Slinko *Degree spectra andcomputable dimensions in algebraic structures.* ***Ann. Pure Appl. Log., 115, Nos. 1-3, 71-113(2002)***

[4] D. A. Tussupov *Isomorphisms And Algorithmic Properties Of Structures With Two Equivalences* ***Algebra and Logic, Vol. 55, No. 1, March, 2016, 50-57***

— ⁂ —

EXPANSIONS OF GEOMETRIC STRUCTURES BY DENSE/CODENSE SUBSETS

YEVGENIY VASILYEV

Memorial University of Newfoundland – Grenfell Campus, 20 University Drive, Corner Brook, NL A2H 5G4, Canada

E-mail: yvasilyev@grenfell.mun.ca

A theory T is called *geometric* if in all the models of T the operator of algebraic closure satisfies the exchange property, and T eliminates the $\exists^\infty$ quantifier. Examples include supersimple theories of SU-rank 1 (in particular, strongly minimal theories) and o-minimal theories. We call a subset P of a model M of a geometric theory *dense/codense*, if any infinite subset of M definable over a finite set A has a non-empty intersection with P and $M \setminus acl(A \cup P)$.

We can impose further conditions on the set P. If P is assumed to be algebraically closed, one gets a *lovely pair* of geometric structures [1], first introduced in the SU-rank 1 and simple contexts in [3] an [3]. If we require P to be algebraically independent, we get the notion of an H*-structure* [4], first studied in the o-minimal context in [5]. Adding a predicate for the subset, in both cases we obtain a complete theory in the expanded language.

Both lovely pair and H-structure expansions allow a good description of definable sets and preserve many important stability/simplicity-theoretic and combinatorial conditions (e.g. superstability, supersimplicity, NIP). In the SU-rank 1 case, we get a reasonable description of forking in the expanded language. In the case of H-structure expansion of an SU-rank 1 theory, we obtain a clear description of canonical bases in terms of those in the original theory T [4]. The main application of lovely pairs was that it allowed us to extend the notion of linearity from the classical settings of strongly minimal and o-minimal structures to the general context of geometric theories and to connect it to the presence of projective geometries over division

The author was partially supported by a NSERC grant.

rings [6], in the absence of the usual stability theoretic or topological tools available in the strongly minimal or o-minimal cases.

We will also discuss an example of an "intermediate" version of dense/codense expansion, where P is neither algebraically closed nor independent: an algebraically closed or real closed field with a dense/codense linearly independent multiplicative subgroup. This is an example of the expansion of a field by a multiplicative subgroup satisfying the Mann property [7, 8].

Список литературы

[1] A. Berenstein, E. Vassiliev, *On lovely pairs of geometric structures* // Annals of Pure and Applied Logic, **161**:7 (2010), 866–878.

[2] E. Vassiliev, *Generic pairs of SU-rank 1 structures* // Annals of Pure and Applied Logic, **120** (2003), 103–149.

[3] I. Ben Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev, *Lovely pairs of models* // Annals of Pure and Applied Logic, **122**:7 (2003), 235–261.

[4] A. Berenstein, E. Vassiliev, *Geometric structures with a dense independent subset* // Selecta Mathematica – New Series, **22**:1 (2016), 191–225.

[5] A. Dolich, C. Miller, C. Steinhorn, *Expansions of o-minimal structures by dense independent sets* // Annals of Pure and Applied Logic, **167**:8 (2016), 684–706.

[6] A. Berenstein, E. Vassiliev, *Weakly one-based geometric theories* // Journal of Symbolic Logic, **77**:2 (2012), 392–422.

[7] L. van den Dries, A. Gunaydin, *The fields of real and complex numbers with a multiplicative subgroup* // Proceedings of London Mathematical Society, **93** (2006), 43 – 81.

[8] H. Göral, *Model theory of fields and heights* // Ph.D. Thesis, Université Claude Bernard – Lyon 1, 2015.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

2 Дифференциальные уравнения и теория функций

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОСНОВНОЙ МОДЕЛИ НАВЬЕ–СТОКСА

МАКСУТ АБЕНОВ

Институт механики и машиноведения им.ак.У.А.Жолдасбекова КН МОН РК, ул. Курмангазы, 29, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: abenov60@gmail.com

В данной работе, в терминах начальных данных, сформулированы достаточные условия глобальной (по времени) и однозначной разрешимости задачи Коши для уравнений вязкого политропного газа. Классическое решение задачи строится в явном виде.

Постановка задачи.

В области $G = R^3 \times [0, \infty)$ доказать существование и единственность гладкого решения основной системы уравнений Навье—Стокса [1]

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla P = \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (div \vec{V}) + \rho \vec{F} \tag{2.1}$$

с условием неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho V_3)}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

и с начальными условиями:

$$\rho(0, x, y, z) = \rho_0(x, y, z); V_k(0, x, y, z) = \varphi_k(x, y, z), k = \overline{1, 3} \tag{2.3}$$

Заданные компоненты вектора массовых сил $\vec{F} = (F_1(t, x, y, z), F_2, F_3)$ и вектора начальной скорости $\vec{\varphi} = (\varphi_1(x, y, z), \varphi_2, \varphi_3)$ считаются сколь-угодно гладкими и ограниченными функциями, исчезающими на бесконечности, вместе с производными любого порядка и, без ограничения общности, $0 \leq \varphi_1(x, y, z) \leq c$. Начальная плотность газа также является сколь-угодно гладкой, положительной и ограниченной функцией всюду в трехмерном пространстве: $0 < m \leq \rho_0(x, y, z) \leq M < \infty$.

Далее, пусть $q(x, y, z) \in C^\infty(R^3)$ — ограниченная функция. Тогда можно определить следующие ограниченные функции $q^+(t, x, y, z), q^-(t, x, y, z) \in C^\infty(G)$:

$$q^+(t, x, y, z) = q(x + ct, y, z); q^-(t, x, y, z) = q(x - ct, y, z) \tag{2.4}$$

Определение 1.

Известные данные задачи (1)—(3) назовем глобально согласованными, если выполнены следующие условия (5)–(9):

$$\frac{\partial(\rho_0\varphi_1)}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho_0\varphi_2)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho_0\varphi_3)}{\partial z} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 c)}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho_0\varphi_2)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho_0\varphi_3)}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 c)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho_0\varphi_1)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho_0\varphi_3)}{\partial x} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 c)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho_0\varphi_1)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho_0\varphi_2)}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$F_k(t,x,y,z) = \Psi_k(f_0, f_1, f_2, f_3), k = \overline{1,3} \tag{2.9}$$

где :

$$f_0 = \rho_0^+(c+\varphi_1^+); f_1 = \rho_0^-(c-\varphi_1^-); f_2 = \rho_0^+(\varphi_2^+ + \varphi_3^+); f_3 = \rho_0^-(\varphi_2^- - \varphi_3^-) \tag{2.10}$$

Для фунции $\Psi_k(f_0, f_1, f_2, f_3)$ известны их точные аналитические выражения. Эти громоздкие формулы мы здесь не приводим из-за экономии места.Далее, при выполнении глобальных условий согласования (5)–(9), справедливо следующее утверждение.

Теорема.

Пусть известные данные задачи Коши (1)—(3) глобально согласованы. Тогда существует ее единственное решение: $\rho, P, V_1, V_2, V_3 \in C^\infty(G)$, которое дается следующими формулами:

$$\rho(t,x,y,z) = \frac{f_0+f_1}{2c} \tag{2.11}$$

$$V_1(t,x,y,z) = \frac{c(f_0-f_1)}{f_0+f_1} \tag{2.12}$$

$$V_2(t,x,y,z) = \frac{c(f_2+f_3)}{f_0+f_1} \tag{2.13}$$

$$V_3(t,x,y,z) = \frac{c(f_2-f_3)}{f_0+f_1} \tag{2.14}$$

$$P(t,x,y,z) = P_\infty + \frac{1}{3}\mu div\vec{V} + \frac{c^2(\rho_\infty-\rho)}{2} - \frac{\rho}{2}[V_1^2+V_2^2+V_3^2+\frac{2\mu}{\rho^2}\frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x}] \tag{2.15}$$

При этом, справедлива следующая оценка для найденной плотности:

$$0 < \frac{m}{2} \le \rho(t,x,y,z) \le \frac{3M}{2} < \infty$$

а компоненты скорости $V_1, V_2, V_3 \in C^\infty(G)$,ограничены и исчезают на бесконечности, вместе с производными любого порядка. Найденное давление $P \in C^\infty(G)$ является ограниченной и положительной функцией.

Решение задачи Коши существует и единственно в глобальном смысле. При этом температура газа T определяется однозначно, из уравнения состояния:

$$T(t,x,y,z) = \frac{P(t,x,y,z)}{R\rho(t,x,y,z)}$$

Здесь: R — универсальная газовая постоянная.

Список литературы

[1] С.Н. Антонцев,А.В.Кажихов,В.Н.Монахов. *Краевые задачи механики неоднородной жидкости* // Издательство Наука, 1983.

[2] О.А Ладыженская. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* // Издательство Наука, 1970.

[3] J. Serrin. *On the uniqueness of compressible fluid motions* // Arch.Rational Mech. and Analysis, 1959,v.3, №3, p.271-299.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СРЕДНЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В МНОГОМАСШТАБНОМ СЛУЧАЙНОМ ТЕЧЕНИИ

Н.АКАНБАЙ[a], М.С.НУРХАНОВА[b] З.И.СУЛЕЙМЕНОВА[c]

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: [a]noureke1953@gmail.com, [c]suleymenova2474@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена теории среднего магнитного поля в многомасштабном случайном течении.

Ключевые слова: Магнитное поле, дельта-коррелированное течение, течение с обновлением, многомасштабное течение, осреднение, среднее магнитное поле.

Задача об эволюции магнитного поля в случайном турбулизованном потоке проводящей жидкости (или плазмы) является одной из самых важных во многих физических приложениях. С математической точки зрения речь идет о решении задачи Коши для параболической системы

$$\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = v_m \triangle \overrightarrow{H} - \left(\overrightarrow{V} \triangle\right) \overrightarrow{H} + \left(\overrightarrow{H} \triangle\right) \overrightarrow{V}, \quad \overrightarrow{H}(0,x) = \overrightarrow{H}_0(x). \tag{1}$$

где $\overrightarrow{V}(t,x)$ – заданное случайное векторное поле скоростей несжимаемой жидкости ($div\overrightarrow{V} = 0$), v_m– магнитная вязкость, характеризующая свойства электропроводности среды. Начальное магнитное поле $\overrightarrow{H}_0(x)$ предполагается также бездивергентным.

Одним из самых первых и знаменитых работ в этой области была теория среднего поля Штейнбека-Краузе-Рэдлера (ШКР) для дельта-коррелированных течении [1]. К настоящему времени более-менее подробно исследованы задачи об осреднении уравнения (1) в случае так называемого течения с обновлением, т.е. течения, имеющего один временной масштаб или время памяти (отметим, при стремлении времени обновления к нулю течение с обновлением превращается в дельта-коррелированное течение).

Основной недостаток гипотез о дельта-коррелированности поля $\overrightarrow{V}(t,x)$ или же его обновления состоит в том, что эти гипотезы неправильно описывают связь между пространственными и временными корреляциями. Современная теория турбулентности, берущая свое начало из знаменитых работах А.Н. Колмогорова ([2], [3]), представляет турбулентное течение как совокупность вихрей различного размера, живущих в различное время, т.е. такой поток имеет иерархию масштабов. Для того, чтобы отразить это обстоятельство в теории, в данной работе была введена так называемая многомасштабная модель, в которой поле $\overrightarrow{V}(t,x)$ представлен в виде суммы $\overrightarrow{V}(t,x)=\sum_{j=0}^{N}\overrightarrow{V}_j(t,x)$ полей скоростей, имеющих различные времена обновления и различные пространственные корреляционные масштабы. Если эти времена обновления по прежнему малы, то можно развивая методы вышеназванной работы [4] вывести уравнения для любых моментов магнитного поля. Однако здесь процесс осреднения по полю $\overrightarrow{V}$ должен проводиться последовательно в несколько этапов.

Данная работа посвящена теории среднего магнитного поля в многомасштабном течении. Основными результатами являются: Выведено уравнение для среднего магнитного поля; Получена формула, дающая вероятностное решение общей параболической системы; Выписаны явные формулы для коэффициентов осредненного уравнения; Введено понятие магнитодиссипационного масштаба; Найдены приближенные формулы для вычисления коэффициентов турбулентной диффузии и средней спиральности.

Список литературы

[1] M. Steenbeck, F. Krause, K.-H. Radler, *Berechung der inittberen Lorentz-Feldstarke* $\overrightarrow{\mathrm{V}}\times\overrightarrow{\mathrm{B}}$ *fur ein elektrisoh leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Krafte beeinflubter bewegung* // Z.Naturforsch, **Bd.21a**, 369–376 (1966).

[2] А.Н. Колмогоров, *Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса* // ДАН СССР, **30**:4, 299–303 (1941).

[3] А.Н. Колмогоров, *Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности* // ДАН СССР, **32**:6, 19–21 (1941).

[4] Н. Аканбай, *Эволюция магнитного поля в многомаситабном случайном потоке* // Тезисы докладов Четвертого Сибирского Конгресса по индустриальной и прикладной математике (ИН-ПРИМ-2000), часть II, Изд. Института матем., Новосибирск, Россия, стр. 152, 2000.

— ⁂ —

АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОВЕДЕНИЯХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАВНЕНИЙ

Н.АКАНБАЙ[a], З.И.СУЛЕЙМЕНОВА[b]

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: [a]noureke1953@gmail.com, [c]suleymenova2474@gmail.com

Аннотация. В работе найдены асимптотические виды распределении ряда случайных параболических уравнений. В частности доказана асимптотическая нормальность решения уравнения теплопроводности со случайной правой частью.

Ключевые слова: случайное параболическое уравнение, асимптотическое распределение, асимптотическая нормальность, инфинитезимальный оператор, условное математическое ожидание по траекториям процесса.

Хорошо известна связь диффузионных процессов с уравнениями в частных производных, причем эта связь двусторонняя. Так, например, решение параболического уравнения

$$u_t^{'} = Au(t,x) + c(x)u(t,x) + g(x), \qquad u(0,x) = f(x), (t \geq 0, \ \ x \in R^n) \tag{1}$$

можно записывать [1] в виде

$$u(t,x) = M_x \left[e^{\int_0^t c(\xi_s)ds} f(\xi_t) + \int_0^t \left(e^{\int_0^t c(\xi_u)du} g(\xi_s)ds \right) \right], \tag{2}$$

где A – инфинитезимальный оператор (являвшегося решением некоторого стохастического дифференциального уравнения) случайного процесса ξ_t, знак M_x означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальный момент $t = 0$ из точки xтраекториям процесса ξ_t, а $c(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – удовлетворяющие определенным условиям функций. Отметим, что аналогичную формулу можно будет написать и в случае, когда последние функции зависят также от временной переменной.

Основная идея нашей работы заключается в использовании вероятностных представлении вида (2) для нахождения предельных распределении решения уравнения (1). Кроме того, нами будет использована следующая

Лемма. Если $\eta(t) = \int_0^t f(t,s)dw(s)$ – стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу w_t, $f(t,s)$, $f_t'(t,s)$ – неслучайные и непрерывные по обеим аргументам функции, то стохастический дифференциал процесса $\eta(t)$ равен $d\eta(t) = f(t,t)dw(t) + \left(\int_0^t f_t'(t,s)w(s)\right)dt$.

В работе нами были рассмотрены уравнения следующих видов (ниже у нас $\dot{w}_t$ – «белый шум», причем $\int_{t_1}^{t_2} \dot{w}(t)dt = w(t_2) - w(t_1)$ при $t_1 < t_2$) и найдены асимптотические распределения их решений для некоторых частных случаев:

1. $u_t^{'} = \frac{1}{2}u_{xx}^{''} + f(x)q(\dot{w}_t), \qquad u(0,x) = g(x);$
2. $u_t^{'} = \frac{1}{2}u_{xx}^{''} + f(x)q(w_t)\dot{w}_t, \quad u(0,x) = g(x);$
3. $u_t^{'} = \frac{1}{2}u_{xx}^{''} + f(x)\dot{w}_t, \qquad u(0,x) = g(x).$

Список литературы

[1] А.Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов* // М.: Наука, 1996, 320 с.

— ⁂ —

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ХАРДИ

ШЕРАЛИ БИЛАЛ

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: bilal44@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается интегральный оператор типа Харди с тремя мерами, действующий из L_q в L_p. Изучается весовое $L_q - L_p$ неравенство с этим оператором. Проводится детальное изучение весового неравенства типа Харди при $0 < p,q < +\infty$ в пространстве Лебега с произвольными мерами. Получены необходимые и достаточные условия на весовые функции для выполнения изучаемого неравенства.

Постановка задачи. Обозначим через $\mathcal{B} := \mathcal{B}(X)$ σ- алгебру борелевских подмножеств множества X. Символ $\mathcal{M} := \mathcal{M}(X)$ обозначает σ - алгебру подмножеств множества X, содержащую $\mathcal{B}$. Через $\{\mathcal{M}\}^+$ обозначим класс всех $\mathcal{M}$ - измеримых функций $f : X \to [0, +\infty)\bigcup\{+\infty\}$.

Необходимо провести доказательство критерия выполнения неравенства Харди вида:

$$\Big(\int\limits_{[a,b]} v(x)(\int\limits_{[a,x]} fudx)^q d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\int\limits_{[a,b]} f^p wdv\Big)^{\frac{1}{p}}, \ \ \forall f \in \{\mathcal{M}_\lambda\}^+,$$

Работа выполнена по гранту № 0823/ГФ4 КН МОН РК

где $1 < p < +\infty$, $0 < q < +\infty$; μ, λ, v -σ - конечная мера на $[a,b]$, λ, v - определены на $\sigma-$ алгебре $\mathcal{M}_\lambda; u, w \in \{\mathcal{M}_\lambda\}^+$.

Данная задача рассматривается в различных вариациях. В общей постановке, т.е. при $0 < p$, $q < +\infty$. эта задача рассмотрена в работах Степанова В.Д. [1]. В нашем случае $p = \infty$, $q < +\infty$.

Итак, нами рассматривается неравенство:

$$\left(\int\limits_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} f u dx\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leq C \sup_{x\in[a,b]} f(x) \tag{1}$$

Необходимо получить необходимое и достаточное условие его выполнения.

Теорема. *Пусть* $p = +\infty$, $1 < q < +\infty$, μ *и* λ *суть* σ *- конечная мера на* $[a,b]$; $u \in \{\mathcal{M}\}_\lambda^+$, $v \in \{\mathcal{M}\}_\mu^+$. *Неравенство*

$$\|v \int\limits_{[a,x]} f u dx\|_{q,[a,b]} \leq C\|f\|_{p,[a,b]},$$

или то же самое (1) выполнено тогда и только тогда, когда

$$A < +\infty, \text{ где } A := \sup_{t\in[a,b]} A(t) = \sup_{t\in[a,b]} v(t)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{[a,t]} u^{p'} dt\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Более того, для наименьшей константы в неравенстве (1) справедливо $C \approx A$.

Список литературы

[1] Д.В. Прохоров, В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова, *Интегральные операторы Харди- Стеклова* // МИ им. В.А. Стеклова РАН, 2016.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

НЕТЕРОВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГА КАРЛЕМАНА В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.К.БЛИЕВ[a], К.Е. ШЕРНИЯЗОВ[b]

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: [a]bliyev.nazarbay@mail.ru , [b]ksh10@mail.ru

Пусть Γ ляпуновский замкнутый контур класса C^1_ν, $\frac{2}{p}-1<\nu\leq 1$, $1<p<2$. Рассмотрим в пространстве Бесова $B(\Gamma)\equiv B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, $1<p<2$ следующее сингулярное интегральное уравнение

$$L\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+b(t)\varphi[\alpha(t)]+c(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+d(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}d\tau+$$

$$+\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=g(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ и $g(t)$ принадлежат пространству $B(\Gamma)$, $\alpha(t)$ сдвиг Карлемана, т.е. гомеоморфно отображает Γ на себя с сохранением или изменением ориентации на Γ и $\alpha[\alpha(t)]=t$. Предполагается также, что существует производное $\alpha'(t)$ принадлежащая пространству $H_\mu(\Gamma)$ функций непрерывных по Гельдеру с показателем $\frac{2}{p}-1<\nu\leq 1$. Ядра $K_j(t,\tau), j=1,2$ имеют такие слабые особенности, что соответствующие интегральные операторы вполне непрерывны в $B(\Gamma)$. Заметим, что $B(\Gamma)$ вложено в класс непрерывных функций $C(\Gamma)$, но не вложено в $H_\mu(\Gamma)$, $0<\mu\leq 1$, является коммутативной банаховой алгеброй с единицей с обычными операциями сложения и умножения функций [1, 2]. Уравнение (1) рассматривалось в [3] в пространствах $H_\mu(\Gamma)$, $0<\mu\leq 1$, и $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$. Нами получены условия нетеровой разрешимости уравнения (1) в $B(\Gamma)$ и формулы его индекса. При этим использованы результаты [4].

Список литературы

[1] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. Наука – фмл, 1996. 345 с..

[2] Блиев Н.К. Сингулярные интегральные операторы с ядром Коши в дробных пространствах. Сиб. мат. журнал, 2006. т. 47, №1, с. 37 – 45.

[3] Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. Наука – фмл. 1977, 448 с.

[4] Блиев Н.К. Система сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши в пространствах Бесова. Докл. АН РК, 2007, №5, с. 5 – 9.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

МУВАШАРХАН ДЖЕНАЛИЕВ[a], МУРАТ РАМАЗАНОВ[b], САГЫНДЫК ИСКАКОВ[c]

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

[2]*Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан*

[3]*Карагандинский государственный университет им.Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан*

E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ramamur@mail.ru*, [c]*isagyndyk@mail.ru*

Доклад посвящен вопросам разрешимости следующего особого интегрального уравнения:

$$\varphi(t) - \int\limits_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ t > 0, \tag{2.16}$$

где

$$K(t,\tau) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} -$$
$$-\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\left[-\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right], \tag{2.17}$$

$$f(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^{5/2}}\right]\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau -$$
$$-\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}v_0(\tau)d\tau + 2a^2\cdot v_1(t). \tag{2.18}$$

Отметим, что ядро $K(t,\tau)$ (2.17) обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = 1.$$

Это означает, что к интегральному уравнению (2.16) не применим метод последовательных приближений. Поэтому, в докладе интегральное уравнение (2.16) названо особым.

Работа выполнена по гранту № 0823/ГФ4 КН МОН РК

Замечание 1. Однородное интегральное уравнение (2.16) (при $f(t)\equiv 0$) ранее нами было исследовано в работе [2].

Интегральное уравнение (2.16) возникает при изучении следующей граничной задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0,\ \{x,t\}\in G=\{x,t:\,0<x<t,\ t>0\}; \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0}=v_0(t),\ b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=k\,t}+\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}=v_1(t); \tag{2.20}$$

где $\tilde{u}(t)=u(k\,t,t),\ b>0,\ k>0.$

Отметим, что задача (2.19)–(2.20), изучена в работе [1]. Для простоты, коэффициенты из указанной работы принимаем равными: $k=b=1$. Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в работе [1], случай неоднородной граничной задачи "... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами". Например, для однофазной задачи "... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурной температурой $u(x,t)$ занимает отрезок $0<x<s(t)$, при $x=0$ задается положительный поток тепла, а свободная граница $x=s(t)$ начинается у твердой стенки $x=0$, т.е. выполняется условие $s(0)=0$". В работе [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гельдеровских пространствах.

Интегральное уравнение (2.16) будем рассматривать в весовом классе

$$L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\,\sqrt{t}\right)=\{v|\ v(t)\sqrt{t}\in L_\infty(\mathbb{R}_+)\}. \tag{2.21}$$

Для интегрального уравнения (2.16) построена в явном виде резольвента $R(t,\tau)$ и установлена следующая теорема.

Теорема. *Для любой правой части $f(t)\in L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\,\sqrt{t}\right)$ из класса (2.21) интегральное уравнение (2.16) имеет общее решение $\varphi(t)\in L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\,\sqrt{t}\right)$:*

$$\varphi(t)=f(t)+\int\limits_0^t R(t,\tau)f(\tau)d\tau+C\cdot\varphi_{hom}(t),\ C=const,$$

где $\varphi_{hom}(t)$ определено выражением

$$\varphi_{hom}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi_k^{(1)}(t)-\varphi_k^{(2)}(t)\right],\ \ 0<t<\infty, \tag{2.22}$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(t)=\varphi_{1,k}^{(1)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\},\ \varphi_k^{(2)}(t)=\varphi_{1,k}^{(2)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}. \tag{2.23}$$

и для резольвенты $R(t,\tau)$ имеет место оценка

$$|R(t,\tau)|\le C\frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\},\ \ 0<\tau<t<+\infty. \tag{2.24}$$

Замечание 2. Возникает вопрос: существуют ли в задаче (2.19)–(2.20) такие заданные функции $g(x,t)$, $u_0(t)$ и $u_1(t)$, чтобы правая часть $f(t)$ (2.18) интегрального уравнения (2.16) принадлежала пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+;\sqrt{t})$? Это имеет место, например, для функций $g(x,t)\equiv 0$, $u_0(t)\in L_\infty(\mathbb{R}_+;\sqrt{t})$ и $u_1(t)\in L_\infty(\mathbb{R}_+;1/\sqrt{t})$.

Замечание 3. В дальнейшем, нами будет рассмотрен более общий случай задачи (2.19)–(2.20), когда $k>0$ и $b>0$.

Список литературы

[1] В.А. Солонников, А. Фазано, *Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами* // Записки научных семинаров ПОМИ, **269**, 322–338 (2000).

[2] M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov, *On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain* // AIP Conference Proceedings, **1759**, 020085-1–020085-6 (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЖАНАТ ДЖОБУЛАЕВА

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан E-mail: zhanat-78@mail.ru

Исследуется разрешимость модельной задачи в пространстве Гёльдера с малыми параметрами в условиях сопряжения для уравнений теплопроводности. Доказаны существование, единственность и коэрцитивные оценки решения с константами, не зависящих от малых параметров, а также оценки возмущенных членов относительно малых параметров.

Установленные результаты будут использованы для доказательства разрешимости нелинейной задачи со свободной границей с двумя малыми параметрами. Исходная нелинейная задача со свободной границей описывает процесс фазового перехода (плавление, затвердевание) вещества с учетом примеси неизвестной концентрации.

Работа выполнена в рамках проекта № 3358/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

— ⁂ —

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

КАЛИМУЛЛА МУСАБЕКОВ

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, ул. Абая, 76, Кокшетау, 020000, Казахстан

E-mail: it.kgu@mail.ru

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}, Q_T = \Omega \times (0,T), T$ - фиксированное число. В области Q_T рассмотрим систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью неадиабатического трубчатого реактора:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c \cdot v_1 \cdot f(v_2), \\ \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + k \cdot v_1 \cdot f(v_2) + g \cdot (v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = p \cdot (\int\limits_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)) + u(t) \cdot (E - v_3(t)) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot \frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b \cdot \frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30} \qquad (3)$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$ (в работе [1] доказана справедливость неравенства $v_2(x,t) \neq 0, (x,t) \in \overline{Q_T}$); a, b, c, Γ, k, g, p, E, v_{30} константы, положительные параметры системы; $u(t)$ —управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t), v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt \qquad (4)$$

т.е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)-(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x,t)$:

$$0 \leq u(t) \leq u_0 = const, \qquad (5)$$

$$v_2(x,t) \leq v_2^* = const. \qquad (6)$$

Таким образом здесь имеем задачу оптимального управления (1)-(5) с фазовым ограничением (6). Для каждого измеримого управления $u(t)$ удовлетворяющего условию (5) система (1)-(3) имеет [1],[2] единственное решение $v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, $v_3(t) \in C_1[0,T]$, где $C_1[0,T]$–пространство непрерывных функций удовлетворяющих условию Липшица. Для задачи (1)-(6) существует [1] оптимальное управление.

Для удобства учета фазового ограничения (6) функционал (4) заменяется функционалом

$$J_A(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt + A \cdot \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi(v_2(x,t))dxdt, \tag{7}$$

где A–положительная постоянная величина (штрафной коэффициент), $\Phi(v_2)$–штрафная функция $\Phi(v_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_2 \le v_2^* \\ (v_2 - v_2^*)^2, & \text{если } v_2 > v_2^*, \} \end{cases}$ v_2^*–верхний допустимый потолок для температуры.

Для задачи (1)-(5), (7) построен алгоритм поиска оптимального управления в форме метода последовательных приближений (м.п.п.). Однако, последовательности управлений построенных как в м.п.п., так и при исследованиях сходимости в методе штрафов имеют слабую сходимость в пространстве $L_2(0,T)$. Для решения рассматриваемой задачи требуется сходимость последовательности управлений хотя бы по норме $L_2(0,T)$. С этой целью осуществляется регуляризация функционала. Поэтому параллельно с функционалами (4), (7) здесь будет рассматриваться функционал

$$J_A^\beta(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt + A \cdot \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi(v_2(x,t))dxdt + \frac{\beta}{2} \cdot \int\limits_0^T (u(t))^2 dt, \tag{8}$$

$\beta > 0$ - числовой параметр.

Таким образом здесь возникает следующая задача оптимального управления:

$$J_A^\beta(u) \to \min$$

при условиях (1)-(3),(5),(8).

Фиксируем $\beta > 0$ и рассмотрим положительную монотонно возростающую последовательность чисел $\{A_n\}$ такую, что $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда последовательности A_n соответствует последовательность оптимальных управлений $u^n(t)$ задачи (1)-(3), (5), (8). В работе [3] показана сходимость $u^n(t)$ по норме $L_2(0,T)$.

При сведении задачи оптимального управления с фазовым ограничением (6) к задаче со штрафом, возникает необходимость указать способ изменения параметра A штрафа.

В данной работе приводится алгоритм изменения параметра штрафа и выбор его начального значения. В конечном итоге, правильный выбор закона изменения параметра штрафа позволяет построить обоснованный алгоритм решения рассматриваемой задачи.

Список литературы

[1] К. Мусабеков, Теоремы существование решения в задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация. Управляемые системы. **22**, 30–50 (1982).

[2] К. Мусабеков, Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **10**:2, 71–84 (2010).

[3] К. Мусабеков, Метод штрафных функций в одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением с фазовым //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **13**:2, 86–98 (2013).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОГРАНИЧЕНОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПРЕАТОРОВ В ВЕСОВОСОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

АЙГЕРИМ КАЛЫБАЙ[a], РЫСКУЛ ОЙНАРОВ[b]

КИМЕП, Алматы, Казахстан;

ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: [a]kalybay@kimep.kz, [b]o_ryskul@mail.ru

Пусть $I = (a, b) \subseteq R$. Пусть $1 < p, q, r < \infty$. Предположим, что v и u - положительные и измеримые функции на I. Обозначим через $W^1_{p,r}(u, v)$ множество локально абсолютно непрерывных функций f на I со следующей конечной нормой

$$\|f\|_{W^1_{p,R}} = \|uf'\|_r + \|vf\|_p, \tag{1}$$

. Пусть $\overset{\circ}{AC}(I)$ - Множество локально абсолютно непрерывных функций с компактными носителями на I. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_p(u, v)$ замыкание множества $\overset{\circ}{AC}(I) \bigcap W^1_p(u, v)$ по норме (1).

Рассмотрим проблему ограниченности и компактности интегрального оператора $Kf(x) = \int\limits_a^x K(x, t)f(t)dt$, $x \in (A, b)$ из весового пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_{pp}(u, v)$ в весовое пространство Соболева $W^1_{p,r}(u, v)$ при некоторых предположениях на ядра $K(x, t) \geq 0$.

Авторы были поддержаны грантом №5499/GF4 МОН РК.

Список литературы

[1] R. Oinarov, *Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space* // Complex Variabeles and Elliptic Equations., **56**, 1021-1038 (2011).

[2] Р. Ойнаров, *Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева* // Известия РАН, Серия математическая. -2014. -Т. 78, N 4. -С. 207-2023.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ШАРЕ

МАХМУД САДЫБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: sadybekov@math.kz

Хорошо известно, что краевые задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций. В одномерном случае, или при рассмотрении задачи в многомерном параллелепипеде, к основным задачам относят также и периодические краевые задачи.

Ранее, в нашей работе [1] для случая круга $\Omega = \{z = x + iy : |z| < 1\}$ были сформулированы аналоги периодической ($k = 0$) и антипериодической ($k = 1$) задач для уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$\begin{cases} u(z) - (-1)^k u(z^*) = \tau(z), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(z) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(z^*) = \nu(z), \end{cases} \quad |z| = 1,\ y > 0.$$

Были рассмотрены два варианта, когда $z^* = x - iy$ или $z^* = -x - iy$.

В настоящем докладе мы построим аналоги краевой задачи Самарского-Ионкина для уравнения Лапласа в шаре $\Omega = \{|x| < 1\}$ из R^n:

$$\begin{cases} u(x) - \alpha u(x^*) = \tau(x), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) = \nu(x), \end{cases} \quad |x| = 1,\ x_1 > 0.$$

Работа выполнена по гранту 0824/ГФ4 КН МОН РК

Здесь каждой точке
$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$$
мы сопоставляем *«противоположную»* ей точку
$$x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega,$$
где α_j принимают одно из значений ± 1, $j = 2, ..., n$. Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$.

В докладе будут рассмотрены вопросы корректности сформулированной задачи, гладкости ее решения, будут сформулированы спектральные задачи. Мы покажем методику построения собственных значений и собственных функций задачи.

При построении решения задач существенно используется явный вид функции Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в многомерном шаре, впервые построенный в нашей работе [2].

Список литературы

[1] М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов, *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге* // Дифференциальные уравнения, **50**:2, 264–268 (2014).

[2] M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov, *Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball* // Complex Variables and Elliptic Equations, **61**:1, 104–123 (2016).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА

АЙГУЛЬ САРСЕКЕЕВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, пр. аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: aigul.sarsekeyeva@gmail.com

Изучена линеаризованная многомерная двухфазная задача с двумя свободными границами для параболических уравнений. Такая задача возникает при решении нелинейной задачи, которая описывает реальные физические процессы - течение вязкой жидкости в трубе при известном давлении. Например, при транспортировке нефти, содержащей примесь, по трубопроводу образуются три фазы состояния вещества: внешняя область - твердая фаза, промежуточная область - жидкая фаза, а во внутренней области находится желеобразное вещество. Границы раздела этих трех фаз - две свободные (неизвестные) границы. При исследовании мы рассматриваем только твердую и жидкую фазы.

В пространствах Гельдера доказаны существование, единственность решения и установлены коэрцитивные оценки решения линейной многомерной двухфазной задачи с двумя свободными границами для параболических уравнений.

Доказательство существования решения задачи доказывается при помощи построения регуляризатора и метода сжимающих отображений, а оценки решения устанавливаются методом Шаудера. Для построения регуляризатора область покрывается конечным числом шаров малых радиусов, строится система гладких срезающих функций, подчиненных этому покрытию, в результате задача сводится к решению модельных задач с постоянными коэффициентами - задач Коши, первой краевой задачи в полупространстве, задач сопряжения в пространстве для параболических уравнений.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

АБДИЖАХАН САРСЕНБИ

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

ЮКГУ им.М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан

E-mail: abzhahan@mail.ru

Аннотация:Установлены теоремы о базисности собственных векторов дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Рассматриваются одномерные дифференциальные операторы с инволюцией вида

$Lu = \alpha u''(-x) + \beta u''(x) + q(x)\, u(x)\,, \quad -1 < x < 1,$

с какими- нибудь двухточечными краевыми условиями. Построена теория базисности корневых векторов дифференциальных операторов с инволюцией. На основе созданной теории функции Грина краевых задач для дифференциальных уравнений с инволюцией, установлены теоремы о базисности собственных функций в терминах коэффициентов краевых условий [1-3]. Развита теория базисности В.А. Ильина [4] на случай дифференциальных операторов с инволюцией. Построен пример спектральной задачи с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций, система собственных и присоединенных функций которой образует базис пространства $L_p(-1,1)$ [5]. Установлен критерий безусловной базисности корневых векторов оператора L.

Для оформления литературы, пожалуйста, используйте следующий образец:

Список литературы

[1] Sarsenbi A.M., *Unconditional bases related to a non classical second-order differential operator* // Differential Equations, **46**:4, 509–514 (2010).

[2] Sarsenbi A.M., *The Green's function of the second-order differential operator with an involution and its application* // AIP Conference Proceedings, **1676**, 020010 (2015).

[3] Sarsenbi A. M., *The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involution* // AIP Publishing, **1759**:1, 020030 (2016).

[4] Il'in V.A. and Kritskov L.V., *Properties of spectral expansions corresponding to nonself-adjoint differential operators* // J. Math. Sci. (NY), **116**:5, 3489–3550 (2003).

[5] Kritskov L.V., Sarsenbi A.M., *Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution* // Electronic Journal of Differential Equations, **2015**:278, 1–9 (2015).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СИСТЕМА ТИПА РИМАНА СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ

ЖАКСЫЛЫК ТАСМАМБЕТОВ

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, ул. пр. Молдагуловой, 34, Актобе, 030000,Казахстан

E-mail: tasmam@rambler.ru

Изучены возможности построения решений системы состоящей из трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} r &= a_1\cdot p + a_2\cdot g + a_3\cdot Z,\\ s &= b_1\cdot p + b_2\cdot g + b_3\cdot Z,\\ t &= c_1\cdot p + c_2\cdot g + c_3\cdot Z, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ – коэффициенты в виде многочленов двух переменных, $Z = Z(x,y)$ – общая неизвестная, а $p = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$, $g = \dfrac{\partial Z}{\partial y}$, $s = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ и $t = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ производные от неизвестной функции $Z(x,y)$.

Завершая исследования Похгаммера [1], М.Е.Пикар [2] определил наиболее общей вид коэффициентов a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$, когда заданная система приводится к виду системы типа Римана. Этот случай остается малоисследованными.

Целью данной работы является уточнение условия совместности системы (1), изучение связи с гипергеометрическими системами Я.Горна, классификация регулярных и иррегулярных особенностей и построение решений вблизи этих особенностей.

В качестве конкретного примера рассмотрена система связанная с системами Я.Горна [2], одним из уравнений которой является уравнение Эйлера-Дарбу

$$(x-y)\cdot s = (1-\lambda')\cdot p - (1-\lambda)\cdot q.$$

Решение этого уравнения представлена вблизи особенности $x = y$ в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}\cdot x^m \cdot y^n, \tag{2}$$

где коэффициент

$$a_{m,n} = \frac{(\beta)_m\cdot(\beta')_n}{m!\cdot n!}\cdot\Psi(m+n) \tag{3}$$

($(\alpha)_m = \alpha\cdot(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)$ – обозначение Похгаммера) показывает, что ряд (2) является гипергеометрическим [3,с. 218]. $\Psi(m+n)$ принимает разные значения для различных гипергеометрических функций двух переменных со списка Горна. Например, в случае функций Аппеля F_1

$$\Psi(m,n) = \frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_{m+n}}.$$

Список литературы

[1] Pochhammer. *Ueber hypergeometrischen Funktionen hoheren Ordnungen* // J.R.A.M., t. LXXI, 1870, p. 216.

[2] M.E.Picard. *Sur une extension aux functions de deux variables du probleme de Riemann relatif aux functions hypergeometriques* // (Annales de Ecole normale superieure,), t.X, 1880, p.1267.

[3] Г.И.Бейтмен, А.Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции, ч.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра* // М: Наука, 1965, 294 с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ НОРМАЛЬНЫХ И НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЯДОВ

ЖАКСЫЛЫК ТАСМАМБЕТОВ[a], МЕЙРАМГУЛЬ ТАЛИПОВА[b], РЫСКУЛЬ ЖАХИНА[c]

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, ул. пр.Молдагуловой, 34, Актобе, 030000, Казахстан

E-mail: [a]tasmam@rambler.ru, [b]mira_talipova@mail.ru, [c]riscul_75@mail.ru

Целью работы является изучение произведения функций Матье представленных в виде нормальных и нормально-регулярных рядов. Эти ряды играют важную роль при построении решения уравненения Матье, часто выражаемые через функции Бесселя и параболического цилиндра.

В работе используя различные представления функций параболического представления $D_n(z)$ доказаны ряд теорем. Можно доказать [1], что функция $D_n(z)$ с помощью нормально-регулярных рядов представляется в виде

$$D_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{1}{4}Z^2}\cdot F\left(-\frac{1}{2}n;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}Z^2\right)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}\cdot Z\cdot e^{-\frac{1}{4}Z^2}\cdot F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n;\frac{3}{2};\frac{1}{2}Z^2\right).$$

Теорема 1. *Произведение*

$$y = D_\nu(u)\cdot D_\nu(v)$$

является решением уравнения третьего порядка

$$y''' + 4\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)\cdot y' - x\cdot y = 0.$$

Теорема 2.

Произведение двух функций параболического цилиндра представимо в виде

$$y = D_n(u)\cdot D_n(v) = 2^{-n}\cdot e^{-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}}\cdot H_{n,n}\left(\frac{u}{\sqrt{2}},\frac{v}{\sqrt{2}}\right),$$

где $H_{n,n}\left(\frac{u}{\sqrt{2}},\frac{v}{\sqrt{2}}\right)$ *– произведения двух многочленов Эрмита.*

Теорема 3.

Произведения $y(u,v) = D_\nu(u) \cdot D_\nu(v)$ *является решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \left[\left(\nu_1 + \frac{1}{2} - \frac{u^2}{4}\right) + \left(\nu_2 + \frac{1}{2} - \frac{v^2}{4}\right)\right] \cdot y = 0.$$

Список литературы

[1] Э.Т.Уиттекер, Дж. Н.Ватсон. *Курс современного анализа. Трансцендентные функции.* // М: ГИФМЛ, 1963, Т.II, 515 с.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

БАТИРХАН ТУРМЕТОВ

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

Университет Ахмета Ясави,ул.Б.Саттарханова,29, Туркестан,161200, Казахстан

E-mail: turmetovbh@mail.ru

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - единичная сфера. Обозначим $\partial\Omega_+ = \{x \in \partial\Omega : x_n \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \{x \in \partial\Omega : x_n \leq 0\}$, $I = \cap\{x \in \partial\Omega : x_n = 0\}$. Каждой точке $x \in \Omega$ сопоставим "противоположную"ей точку $x* = \bar{\alpha}x$, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_n = -1$, а остальные $\alpha_j, j = \overline{1, n-1}$ принимают один из значений ± 1. Обозначим $D_\nu^m u(x) = \frac{\partial^m u(x)}{\partial \nu^m}, m \geq 1$, v-вектор нормали к $\partial\Omega, D_\nu^0 u(x) = u(x)$.

Рассмотрим в области Ω следующую задачу $(k = 1, 2)$:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in \Omega \tag{1}$$

$$D_\nu^m u(x) = g(x), x \in \partial\Omega \tag{2}$$

$$D_\nu^{\ell_1} u(x) - (-1)^k D_\nu^{\ell_1} u(x*) = g_1(x), x \in \partial\Omega_+ \tag{3}$$

$$D_\nu^{\ell_2} u(x) + (-1)^k D_\nu^{\ell_2} u(x*) = g_2(x), x \in \partial\Omega_+ \tag{4}$$

Работа выполнено при финансовой поддержке программно-целевого финансирования научных исследований МОН РК (№ 0085 / ПЦФ-14).

где $0 \leq m \leq 3, 0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq 3, \ell_1 \neq m, \ell_2 \neq m$.

Решением задачи (1) - (4) назовем функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^\ell(\bar{\Omega}), \ell = \max(m, \ell_1, \ell_2)$, удовлетворяющую условиям (1) - (4) в классическом смысле.

Пусть $\partial^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}, \beta-$ мультииндекс с $|\beta| \leq 3, \partial^0 = I-$ единичный оператор.

Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^\ell(\bar{\Omega})$ являются условия согласования

$$\partial^\beta g_1(\tilde{x}, 0) + (-1)^k \partial^\beta g_1(\tilde{\alpha}\tilde{x}, 0) = 0, |\beta| \leq p, \partial^\beta g_2(\tilde{x}, 0) + (-1)^k \partial^\beta g_2(\tilde{\alpha}\tilde{x}, 0) = 0, |\beta| \leq q \qquad (5)$$

где $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1}), \tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$, p и q принимают значения 0,1,2,3 в зависимости от порядка граничных операторов $D_\nu^{l_1}$ и $D_\nu^{l_2}$.

Отметим, что аналогичные задачи в случае эллиптических уравнений второго порядка исследовались в работах [1-3].

В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости задачи (1) - (4) для случаев: 1) $m = 0$ или $l_1 = 0$; 2) $m \geq 1$ или $l_1 \geq 1$;

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. *Пусть $m = 0, l_1 = 1, l_2 = 2, k = 1, 2, f(x), g(x), g_j(x), j = 1, 2$ достаточные гладкие функции и выполняются условия согласования (5). Тогда решение задачи (1) - (4) существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть $l_1 = 0, m = 1, l_2 = 2, k = 1, 2, f(x), g(x), g_j(x), j = 1, 2$ достаточные гладкие функции и выполняются условия согласования (5). Тогда*

1) если $k = 1$, то решение задачи (1)-(4) существует и единственно.

2) если $k = 2$,то для разрешимости задачи (1)-(4) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(y) ds_y = \int\limits_{\partial\Omega_+} g_2(y) ds_y - \int\limits_{\partial\Omega} g_1(y) ds_y.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Теорема 3. *Пусть $l_1 = 0, l_2 = 1, m = 2, k = 1, 2, f(x), g(x), g_j(x), j = 1, 2$ достаточные гладкие функции и выполняются условия согласования (5). Тогда*

1) если $k = 1$, то решение задачи (1)-(4) существует и единственно.

2) если $k = 2$,то для разрешимости задачи (1)-(4) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(y) ds_y = \int\limits_{\partial\Omega} g_2(y) ds_y - \int\limits_{\partial\Omega_+} g_1(y) ds_y.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Теорема 4. *Пусть $k = 1, f(x), g(x), g_j(x), j = 1, 2$ достаточные гладкие функции и выполняются условия согласования (5). Тогда необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1)-(4) имеют вид*

1) если $m = 1, l_1 = 2, l_2 = 3$, *то*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(1-|x|^2)f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega_+} g_1(x)dS_x - \int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS_x,$$

2) если $m = 2, l_1 = 1, l_2 = 3$, *то*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(1-|x|^2)f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS_x - \int\limits_{\partial\Omega_+} g_1(x)dS_x$$

и

$$\frac{n-1}{2}\int\limits_{\Omega} x_j|x|^2 f(x)dx - \frac{n-3}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x_j f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega_+} x_j g_2(x)dS_x - \int\limits_{\partial\Omega} x_j g(x)dS_x$$

при всех $j \in \{1,2,...,n\}$ *для которых выполняется равенство* $\alpha_j = -1$.

3) если $m = 3, l_1 = 1, l_2 = 2$, *то*

$$\frac{n-1}{2}\int\limits_{\Omega}|x|^2 f(x)dx - \frac{n-3}{2}\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} g(x)dS_x,$$

и

$$\frac{n-1}{2}\int\limits_{\Omega} x_j|x|^2 f(x)dx - \frac{n-3}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x_j f(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} x_j g(x)dS_x - \int\limits_{\partial\Omega_+} x_j g_2(x)dS_x,$$

при всех $j \in \{1,2,...,n\}$ *для которых выполняется равенство* $\alpha_j = -1$.

Аналогичное утверждение верно и в случае $k = 2$.

Список литературы

[1] M.A. Sadybekov, B.Kh. Turmetov , *On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in ball* // Eurasian Mathematical Journal, **3**:1, 143–146 (2012).

[2] М.А. Садыбеков, Б.Х. Турметов, *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге* Дифференциальные уравнения, **50**:2, 264–268 (2014).

[3] M.A. Sadybekov, B.T. Torebek , *On some spectral inequalities for a nonlocal elliptic problem* // AIP Conference Proceedings, **1759**, 020123 (2016).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Работа выполнено при финансовой поддержке программно-целевого финансирования научных исследований МОН РК (№ 0085 / ПЦФ-14).

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

БАТИРХАН ТУРМЕТОВ

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

Университет Ахмета Ясави,ул.Б.Саттарханова,29, Туркестан,161200, Казахстан

E-mail: turmetovbh@mail.ru

Пусть $m \in N, \varrho, \nu_j, \mu_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, ..., m, \overline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m), \overline{\mu} = (\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m)$. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{E}_\rho(z, \overline{\nu}, \overline{\mu}) = \Gamma\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \nu_0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{n} \Gamma\begin{pmatrix} \rho k + \nu_1 \\ \rho k + \mu_1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \Gamma\begin{pmatrix} \rho k + \nu_m \\ \rho k + \mu_m \end{pmatrix} \right\} z^n \qquad (1),$$

где $\Gamma(a)-$ гамма функция Эйлера, $\Gamma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Gamma(a)/\Gamma(b)$.

Данная функция в случае $m = 1$ рассмотрена в работе [1] и является модификацией известной обобщенной функции типа Миттаг-Леффлера, введенной в работе [2]:

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, c_0 = 1, c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\begin{pmatrix} \alpha(km + \ell) + 1 \\ \alpha(km + \ell + 1) + 1 \end{pmatrix}, n \geq 1. \qquad (2)$$

Свойства и применения функции (2) изложены в работе [3].

В настоящей работе исследуются свойства функции (1) и их применения для представления явного решения некоторых интегро - дифференциальных уравнений дробного порядка.

Список литературы

[1] Е.Н. Огородников , *О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг-Леффлера, их свойствах и применении* // Вестник Сам.гос.тех.ун-та.Сер.Физ.-мат.науки. **1**:26, 52–65 (2012).

[2] A.A. Kilbas, M. Saigo , *On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations* // Integral Transform. Spec. Funct., **4**, 355–370 (1996).

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava , J.J. Trujillo , *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* // Elsevier, Amsterdam, 2006.

— ⁂ —

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА НЕПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КОЛЕБЛЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ

АЛИБЕК ЕСКЕРМЕСУЛЫ

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010000, Казахстан

E-mail: aleke1410@gmail.com

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения спектра неполуограниченного дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2(-\infty, +\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = y^{(4)} + q_1(x)y, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{2.25}$$

В монографии [2] были получены асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$ – функции распределения собственных значений самосопряженных расширений минимального дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2(-\infty, +\infty)$ дифференциальным выражением вида (2.25) в случае, когда $q_1(x)$ – "регулярная" в смысле Титчмарша-Левитана функция. Под регулярностью функции $q_1(x)$ понимается следующее:

- функция $q_1(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой;
- $q_1'(x)$, $q_1''(x)$ не меняют знак для достаточно больших x, $|x| > R$, $R > 0$;
- $q_1(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$;
- $q_1'(x) = o(q_1^{\gamma}(x)), \;\; |x| \to +\infty, \;\; 0 < \gamma < \frac{5}{4}$.

Целью нашей работы является получение асимптотических формул для функции $N(\lambda)$ в случае, когда функция $q_1(x)$ не удовлетворяет условиям регулярности типа Титчмарша-Левитана и является колеблющейся функцией. Примером таких нерегулярных функций являются, например, функции вида

$$q_1(x) = q(x) + h(x),$$

где $q(x)$ – "регулярная" , а $h(x)$ содержит осцилляцию

$$h(x) = \sum a_k(x) \cdot S_k\left(\varphi_k(x)\right),$$

Работа выполнена при поддержке Комитета Науки Министерства Образования и Науки Республики Казахстан (грант № 5499/ГФ4) по приоритетному направлению "Интеллектуальный потенциал страны".

где $S_k(t)$ – периодические функции, а $a_k(x)$, $\varphi_k(x)$ – достаточно гладкие монотонные функции.

Асимптотические (как по x, так и по λ) формулы для фундаментальной системы решения (далее ФСР) уравнений вида

$$-y'' + (q(x) + h(x))y = \lambda y$$

с подобными потенциалами изучались в работах [4], [3]. В работе [1] был предложен новый метод построения таких асимптотических при $x \to +\infty$ формул, для уравнения четвертого порядка. Оказалось, что данный метод позволяет также получить асимптотические формулы для ФСР уравнения (2.25) при $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, где

$$\Gamma = \{\lambda : \sigma + i\tau;\ \sigma > 0,\ \xi \leq \tau \leq \sigma^{\gamma},\ \xi > 0,\ 0 < \gamma < 1\},$$

равномерные по $x \in (-\infty, +\infty)$.

Список литературы

[1] Н.Ф. Валеев, А. Ескермесулы, Э.А. Назирова *Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами.* // Математический журнал ИМММ КН РК, **16**:1, 58–76 (2016).

[2] А.Г. Костюченко, И.С. Саргсян *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* // Наука, 1979.

[3] Х.Х Муртазин, Я.Т. Султанаев *К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля.* // Математические заметки **28**:4, 545–553 (1980).

[4] Я.Т. Султанаев *Об индексах дефекта и спектре одномерных сингулярных дифференциальных операторов в вырожденном случае.* ДАН СССР, **284**:3, 551—555 (1985).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

ОЛЕГ ПЕНКИН

Казахстанско-Британский Технический Университет, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: o.m.penkin@gmail.com

Под стратифицированных множеством понимается связное подмножество Ω пространства $\mathbb{R}^d$, составленное из конечного числа гладких многообразий σ_{kj}, регулярно примыкающих друг к другу. На таком множестве удаётся определить аналог оператора дивергенции ∇ (на специальным образом определяемых касательных векторных полях) по специальной мере

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}),$$

где μ_k – k-мерная мера Лебега на страте σ_{kj}. На этой основе удается определить аналог оператора Лапласа и эллиптические операторы более общего вида.

Мы приводим результаты, касающиеся разрешимости (слабой и классической) задачи Дирихле с такими операторами, а также задачи Дирихле для p-лапласиана, определяемом на стратифицированном множестве аналогично обычному p-лапласиану в области пространства $\mathbb{R}^d$.

Мы описываем также некоторые новые результаты, касающихся качественных свойств гармонических и субгармонических функций на стратифицированном множестве, полученных автором и некоторыми из его учеников. В их числе теорема об устранимой особенности и неравенство Харнака для так называемого "мягкого" лапласиана, на основе которых удаётся удаётся реализовать метод Перрона доказательства разрешимости задачи Дирихле с таким лапласианом.

Некоторые подробности, касающиеся применяемого нами математического аппарата можно найти в книге [1].

Список литературы

[1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2005

— ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ХАЙРУЛЛИН Е.М.[a], ТУЛЕШЕВА Г.А.[b], СЕЙТКУЛОВА Ж.Н.[c]

Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Республика Казахстан

E-mail: [a]khairullin_42_42@mail.ru

Аннотация. Рассматривается особая краевая задача для бипараболического интегро-дифференциального уравнения (БПИДУ) в многомерном пространстве для полосы. Решение краевой задачи ищется в виде суммы функции Коши для БПИДУ и специальных потенциалов. Приводятся леммы о скачках специальных потенциалов в окрестностях гиперплоскостей. На основании леммы краевая задача для БПИДУ сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ). Использованием операторов дробного интегрирования и дифференцирования, решение СИДУ найдено в явном виде через заданные функции.

В области $Q_T \equiv \{(x,t) : (x', x_n, t), \quad x' \in R^{n-1}, \quad x_n \in]0, l[, \quad t \in]0, T[\}$ найти решение $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(Q_T)$ БПИДУ

$$L^2[u(x,t)] = \lambda \int\limits_0^t \Delta^2 u(x,\tau) d\tau + f(x,t), \tag{2.26}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad D_t u(x,t)\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.27}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} D^2_{x_n} u(x,t)\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t), \quad D^3_{x_n} u(x,t)\Big|_{x_n=0} = \varphi_2(x',t), \\ D^2_{x_n} u(x,t)\Big|_{x_n=l} = \varphi_3(x',t), \quad D^3_{x_n} u(x,t)\Big|_{x_n=l} = \varphi_4(x',t), \\ (x',t) \in Q^{(1)}_t = Q_T \backslash x_n, \end{gathered} \tag{2.28}$$

где $L \equiv D_t - a^2\Delta$, $D_{x_n} = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$; Δ – оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, λ – некоторый параметр.

Решение краевой задачи (1) – (3) ищется в виде:

$$\begin{gathered} u(x,t) = 2a^4\sigma_1 * G_{n-1} D_{x_n} Q_1[x,t] + 2a^4\sigma_2 * tG_n[x,t] + \\ +2a^4\mu_1 * G_{n-1} D_{x_n} Q_1[x', x_n - l, t] + 2a^4\mu_2 * tG_n[x', x_n - l, t] + f * tH_n[x', t], \end{gathered} \tag{2.29}$$

This research is financially supported by grants from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan under the grant number 4075/GF4.

где $H_n(x,t)$ – функция Коши для БПИДУ[1], $G_n(x,t)$ - фундаментальное решение (ф. р.) уравнения теплопроводности в R^n, представимое в виде

$$G_n(x,t) = G_{n-1}(x',t)G_1(x_n,t),$$

причем $G_1(x_n,t)$ – (ф. р.) одномерного уравнения теплопроводности;

$$Q_1[x_n,t) = \int\limits_0^t G_1(x_n,t-z)dz;$$

$$\sigma_j * G_n[x,t] = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} \sigma_j(\xi',\tau)G_n(x'-\xi',x_n,t-\tau)d\xi';$$

$\sigma_j(x',t)$, $\mu_j(x',t)$, $(j=1,2)$ – неизвестные функции.

Нетрудно убедиться, что функция $u(x,t)$, определяемая равенством (4) удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Неизвестные функции $\sigma_j(x',t)$ и $\mu_j(x',t)$ выберем так, чтобы выполнялись граничные условия (3).

Подставляя функцию $u(x,t)$ определяемую формулой (4) в граничные условия (3), получим относительно функций $\sigma_j(x',t)$, $\mu_j(x',t)$ систему ИДУ

$$\sigma_j(x',t) - (L_1)^{j-1}\sigma_{3-j} * \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{2(2-j)} \frac{G_{n-1}}{a\sqrt{\pi t}}[x',t] \equiv \Phi_j(x',t), \quad j=1,2. \tag{2.30}$$

$$\mu_j(x',t) + (L_1)^{j-1}\mu_{3-j} * \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{2(2-j)} \frac{G_{n-1}}{a\sqrt{\pi t}}[x',t] \equiv \Phi_{j+2}(x',t), \quad j=1,2. \tag{2.31}$$

где $L_1 \equiv D_t - a^2\Delta_{x'}$, $\Delta_{x'}$ – оператор Лапласа по параметрам $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$$\Phi_j(x',t) = \varphi_j(x',t) - \sum_{j=1}^{2} \mu_i * K_{ji}[x',t] - D_{x_n}^{j+1} f * tH_n[x',t],$$

$$\Phi_{j+2}(x',t) = \varphi_{j+2}(x'-t) - \sum_{j=1}^{2} \sigma_i * K_{j+2,i}[x',t] - D_{x_n}^{j+1} f * tH_n[x',t],$$

причем $K_{ji}(x',t)$, $K_{j+2,i}(x',t)$ – регулярные ядра.

Применяя параболический оператор дробного интегрирования и дифференцирования к системе (5) и (6) можно найти

$$\sigma_j(x',t) = 2\Phi_j(x',t) + aJ^{\frac{1}{2}}[\Phi_j], \tag{2.32}$$

$$\mu_j(x',t) = 2\Phi_{j+2}(x',t) + \frac{2}{a}D^{\frac{1}{2}}\Phi_{j+2}, \quad j=1,2, \tag{2.33}$$

где $J^{\frac{1}{2}}[\Phi_j] = \int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{R^{n-1}} \Phi(\xi',\tau)G_{n-1}(x'-\xi',t-\tau)d\xi'$, $D^{\frac{1}{2}} = L_1 J^{\frac{1}{2}}$ – параболический оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha = \dfrac{1}{2}$

Справедлива следующая

Теорема. Если функции $f(x,t)$ и $\sigma_j(x',t)$, $\mu_j(x',t)$ соответственно из классов $C_{x,t}^{\alpha,0}(Q_T)$ и $C_{x,t}^{\alpha,1}(Q_T^{(1)})$ то краевая задача (1) – (3) имеет решение $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}(Q_T)$, определяемое равенством (4), где неизвестные функции определяются формулами (7) и (8).

Список литературы

[1] Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А. Функция Коши для бипараболического интегро-дифференциального уравнения в R^n. // Труды Международных Сатпаевских чтений "Роль и место молодых ученых в реализации стратегии Казахстан-2050" , посвященных 80-летию КазНТУ им. К.И. Сатпаева, 2014. – С. 544-548.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SOLUTION OF THE NONREGULAR PROBLEMS FOR THE PARABOLIC EQUATIONS IN THE WEIGHTED HöLDER SPACES

GALINA BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: bizhanova@math.kz; galina_math@mail.ru

We consider the initial and boundary value problems for the second order parabolic equation with singular coefficients with respect to t at $t = 0$ at the first order spatial derivatives in the parabolic equation. There are proved the existence, uniqueness, estimates of the solutions in weighted Hölder space with powers of t weights. These problems have the physical sense.

When we study boundary value problems for the parabolic equations in the Hölder space $C_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, l – positive noninteger, we should require that boundary of the domain belongs to the C^{2+l} or $C_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}$, if boundary is moving, because the solutions of these problems belonging to this space are continuous with all their acceptable derivatives up to the boundary of a domain.

Sometimes the boundary of a domain of the problems, which are the mathematical models of the physical processes (for instance, of heating or cooling of substance), has the less smoothness, but process goes and the problems can have the solutions.

After the nondegenerate coordinate transformations the problems for the parabolic equations in the domains with moving boundaries, which have the less smoothness, than necessary, the free boundary problems for the parabolic equations are reduced to the problems for the parabolic equation with singular coefficients with respect to t at $t = 0$ at the first order spatial derivatives in the equation.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

THE BOUNDARY CONDITION FOR CLASSICAL WAVE POTENTIAL

TYNYSBEK KALMENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: kalmenov@math.kz

It is known that a self-adjoint differential operator is always generated by the boundary conditions. Consequently, the operator

$$u(x) = \varepsilon_n * f = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x-y) f(y) dy, \tag{2.34}$$

is the inverse of the operator of some well-posed boundary value problem for the equation

$$-\triangle u = f, \ n \geq 2. \tag{2.35}$$

Where $\varepsilon_n(x-y)$ is the fundamental solution of the Laplace operator.

Thus we arrive at the problem of constructing boundary conditions for the integral operator (2.34).

Systematic studies of boundary conditions of Newton potential, heat potential and other potentials are investigated recently. We refer for our main works in this direction.

In the work [1] we have found the boundary condition of the Newton potential. It has the following form

$$\frac{1}{2}u(x) = -\int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, x \in \partial\Omega. \tag{2.36}$$

We define the Cauchy potential by the formula

$$u = L_K^{-1} f = \int_{\Omega} \varepsilon(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \tag{2.37}$$

where $\varepsilon(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ is the fundamental solution of the equation

$$L\varepsilon \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2} + a_1(x_1, x_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + a(x_1, x_2)\varepsilon = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \tag{2.38}$$

In this case, $u = L_K^{-1} f$ it satisfies the initial condition of Cauchy

$$u = L_K f \mid_{x_2=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_2} \mid_{x_2=0} = \frac{\partial L_K^{-1} f}{\partial x_2} \mid_{x_2=0} = 0 \tag{2.39}$$

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 4075/GF4)

The author was supported in parts by the EPSRC grant EP/K039407/1 and by the Leverhulme Grant RPG-2014-02, as well as by the MESRK grant 5127/GF4. No new data was collected or generated during the course of research.

and the equation

$$Lu = f. \tag{2.40}$$

In the present report, the lateral boundary conditions of this wave potential will be constructed.

Список литературы

[1] T.Sh. Kalmenov, D. Suragan, *To the spectral questions of the volume potential* // Doklady Mathematics, **80**:2 (2009), 646–649.

— ⁂ —

ON S-NUMBER INEQUALITIES OF TRIANGULAR CYLINDERS FOR THE HEAT OPERATOR

TYNYSBEK KALMENOV[a], AIDYN KASSYMOV[b], DURVUDKHAN SURAGAN[c]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Pushkin street, 125, Almaty, 050100, Kazakhstan

E-mail: [a]kalmenov@math.kz, [b]kassymov@math.kz, [c]suragan@math.kz

In this talk we prove that the first s-number of the Cauchy-Dirichlet heat operator is minimized in the equilateral cylinder among all Euclidean triangular cylindric domains of a given volume as well as we obtain spectral geometric inequalities for the Cauchy-Dirichlet-Neumann heat operator in the right and equilateral triangular cylinders. It is also established that maximum of the second s-number of the Cauchy-Neumann heat operator is reached by the equilateral triangular cylinder among all triangular cylinders of given volume. In addition, we prove that the second s-number of the Cauchy-Neumann heat operator is maximized in the circular cylinder among all cylindrical Lipschitz domains of fixed volume. This talk is partially based on the papers [1]-[2].

Список литературы

[1] A. Kassymov and D. Suragan, *Some Spectral Geometry Inequalities for Generalized Heat Potential Operators* // Complex Anal. Oper. Theory, to appear 2016, doi:10.1007/s11785-016-0605-9.

This research is financially supported by grants from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan under the grant number 4075/GF4.

[2] T. Sh. Kalmenov, A. Kassymov and D. Suragan, *On S-number inequalities of triangular cylinders for the heat operator* // submitted.

— ⁕⁕⁕ —

ON AMERICAN VIX OPTIONS UNDER THE GENERALIZED 3/2 AND 1/2 MODELS

YERKIN KITAPBAYEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: kitapbaev@math.kz

In this paper, we extend the 3/2 model for VIX studied by Goard and Mazur and introduce the generalized 3/2 and 1/2 classes of volatility processes. Under these models, we study the pricing of European and American VIX options, and for the latter, we obtain an early exercise premium representation using a free-boundary approach and local time-space calculus. The optimal exercise boundary for the volatility is obtained as the unique solution to an integral equation of Volterra type. We also consider a model mixing these two classes and formulate the corresponding optimal stopping problem in terms of the observed factor process. The price of an American VIX call is then represented by an early exercise premium formula. We show the existence of a pair of optimal exercise boundaries for the factor process and characterize them as the unique solution to a system of integral equations.

Список литературы

[1] Broadie, M., Jain, A. (2008). Pricing and hedging volatility derivatives. Journal of Derivatives, 15(3), 7вЂ“24.

[2] Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 53(2), 385вЂ“407.

[3] De Angelis, T. (2015). A note on the continuity of free-boundaries in finite-horizon optimal stopping problems for one- dimensional diffusions. SIAM Journal on Control and Optimization, 53(1), 167вЂ“184.

[4] Detemple, J. (2006). American-style derivatives. Boca Raton, FL: Chapman Hall/CRC.

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 3493/GF4). This thesis is based on work of J. Detemple and Y. Kitapbayev, On American VIX options under the generalized 3/2 and 1/2 models, Mathematical Finance, (2017) DOI: 10.1111/mafi.12153.

[5] Detemple, J., Osakwe, C. (2000). The valuation of volatility option. European Finance Review, 4(1), 21вЂ“50.

[6] Drimus, G. (2012). Options on realized variance by transform methods: A non-affine stochastic volatility model. Quantitative Finance, 12(11), 1294вЂ“1679.

[7] Du Toit, J., Peskir, G. (2007). The trap of complacency in predicting the maximum. The Annals of Probability, 35(1), 340вЂ“365.

[8] Egloff, D., Leippold, M., Wu, L. (2010). The term structure of variance swap rates and optimal variance swap invest- ments. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 45(5), 1279вЂ“1310.

[9] Elliott, R., Siu, T., Chan, L. (2007). Pricing volatility swaps under HestonвЂ™s stochastic volatility model with regime switching. Applied Mathematical Finance, 14(1), 41вЂ“62.

[10] Gatheral, J. (2008). Consistent modeling of SPX and VIX options. Presented at the Fifth World Congress of the Bachelier Finance Society, London. Available at http://www.math.nyu.edu/fellows-fin-math/gatheral/Bachelier2008.pdf

[11] Goard, J., Mazur, M. (2013). Stochastic volatility models and the pricing of VIX options. Mathematical Finance, 23(3), 439вЂ“458.

[12] Grasselli, M. (2016). The 4/2 stochastic volatility model. Mathematical Finance. Advance online publication. doi:10.1111/mafi.12124

[13] Grünbichler, A., Longstaff, F. (1996). Valuing futures and options on volatility. Journal of Banking and Finance, 20(6), 985вЂ“1001.

[14] Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies, 6, 327вЂ“343.

[15] Heston, S. L. (1997). A simple new formula for options with stochastic volatility. Working paper, Washington University.

[16] Liu, H. K. (2015). Properties of American volatility options in the mean-reverting 3/2 volatility model. SIAM Journal on Financial Mathematics, 6(1), 53вЂ“65.

[17] Mencia, J., Sentana, E. (2013). Valuation of VIX derivatives. Journal of Financial Economics, 108(2), 367вЂ“391. Peskir, G. (2005a). A change-of-variable formula with local time on curves. Journal of Theoretical Probability, 18(3), 499вЂ“535.

[18] Peskir, G. (2005b). On the American option problem. Mathematical Finance, 15(1), 169вЂ“181.

[19] Platen, E. (1997). A non-linear stochastic volatility model. Working paper, Australian National University.

[20] Protter, P. (1990). Stochastic integration and differential equations. Berlin: Springer-Verlag.

[21] Sepp, A. (2008). Pricing options on realized variance in Heston model with jumps in returns and volatility. Journal of Computational Finance, 11(4), 33вЂ“70.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ABOUT SOLVABILITY AND CONSTRACTION OF CORRECT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE INHOMOGENEOUS POLYHARMONIC EQUATION IN A BALL

BAKHYTBEK KOSHANOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan E-mail: koshanov@list.ru

Let m be a positive integer. We shell consider in the n – dimensional unit ball $\Omega = \{x : |x| < 1 \} \subseteq R^n$ the nonhomogeneous polyharmonic equation (PHE)

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

with the boundary value problems (BVPs)

$$\left. \frac{\partial^{k_j}}{\partial n_x^{k_j}} u \right|_{x \in \partial\Omega} = \varphi_j(x), \;\; j = \overline{1,m}, x \in S, 0 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq 2m-1. \tag{2}$$

By *a regular solution* to problems (1)-(2) we mean a function $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, satisfying the equation (1) and the boundary conditions (2).

It is known, see [1,2], that the existence of regular solutions to the original data $f(x)$, $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ imposes limitations of two types: (i) some loss of smoothness, (ii) certain conditions such as orthogonality to the solutions of the homogeneous adjoint equation. The solvability of BVPs for the PHEs and for elliptic equations in different spaces is investigated in [1-4].

In this paper [4,5], the focus is aimed at clarifying the limitations of type (ii), i.e. it is found out what the necessary and sufficient conditions of type (ii) the functions $f(x)$, $\varphi_1(x), ...,$ $\varphi_m(x)$ should satisfy if their smoothness properties are standard. Therefore, in the given work we find a final result associated with necessary and sufficient conditions for the solvability of the nonhomogeneous PHEs in a ball on the given data and the solution is given in explicit form by the Green function for the PHD equation, as well as built some classes correct BVPs in a ball.

In [6], for boundary value problems for a polyharmonic equation with normal derivatives under boundary conditions, a sufficient condition for the Fredholm property of these problems was obtained and a formula of their index is given.

The work was supported by Grant 3492/GF4 Ministry of Education and Science of Kazakhstan Republic.

Список литературы

[1] I.N. Vekua *Generalized analytic functions.*- Moscow: Nauka, 1956. - 608 p.

[2] S.L. Sobolev *Introduction to the Theory of Curvature*, Moscow.: Nauka, 1974. - 808 p.

[3] H. Begehr, J. Du, Y. Wang *A Dirichlet problem for polyharmonic functions*// Ann. Mat. Pura Appl. (2008), vol. 187, no. 4, pp. 435-457.

[4] T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko *Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere*// Comp. Var. and Ell. Eq. (2008), vol. 53, no. 2, pp. 177-183.

[5] B.E. Kanguzhin, B.D. Koshanov *Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation*// Ufa Math. J. (2010), no 2, pp. 41-52.

[6] B.D. Koshanov, A.P. Soldatov *Boundary value problem with normal derivatives for a higher order elliptic eguation on the plane* // Diff. Eq. (2016), vol. 52, no 12, pp. 1-16.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

WEIGHTED L^p-HARDY AND L^p-RELLICH INEQUALITIES

BOLYS SABITBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty
E-mail: b.sabibtek@math.kz

In this work we present the generalized weighted L^p-Hardy and L^p-Rellich inequalities with boundary terms on stratified Lie groups. As consequences, most of the Hardy type inequalities and Heisenberg-Pauli-Weyl type uncertainty principles on stratified group were recovered. Moreover, a weighted L^2-Rellich type inequality with the boundary term is obtained.

Список литературы

[1] Adimurthy, P. K. Ratnakumar and V. K. Sohani. A Hardy-Sobolev inequality for the twisted Laplacian. *Proc. R. Soc. Edinb. A*, 147(1), 1–23, 2017.

[2] A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis. The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality Springer International Publishing, 2005.

[3] N. Badiale, G. Tarantello. A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 163, 259–293, 2002.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni. Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.

[5] D. M. Bennett. An extension of RellichвЂ™s inequality. *Proc. Am. Math. Soc.*, 106, 987–993, 1989.

[6] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg. First order interpolation inequalities with weights. *Compos. Math.*, 53, 259–387, 1984.

[7] P. Ciatti, M.G. Cowling, F. Ricci. Hardy and uncertainty inequalities on stratified Lie groups. *Adv. Math.* 227, 365–387, 2015.

[8] E. B. Davies. One-Parameter Semigroups. Academic, London, 1980.

[9] E. B. Davies, A. M. Hinz. Explicit constants for Rellich in $L_p(\Omega)$. *Math. Z.* 227(3), 511–523, 1998.

[10] V. Fisher and M. Ruzhansky. Quantization on nilpotent Lie groups. *Progress in Mathematics*, Vol. 314, Birkhäuser, 2016.

[11] G. B. Folland. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. *Ark. Math.*, 13, 161–207, 1975.

[12] J. A. Goldstein and I. Kombe. The Hardy inequality and nonlinear parabolic equations on Carnot groups. *Nonlinear Anal.*, 69, 4643–4653, 2008.

[13] E. H. Lieb and M. Loss. Analysis, Second Edition Graduate Studies in Mathematics, Volume 14, 2001.

[14] F. Rellich. Perturbation theory of eigenvalue problems. Godon and Breach, New York, 1969.

[15] T. Ozawa, M. Ruzhansky, D. Suragan. L^p-Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities on homogeneous groups. arXiv:1605.02520, 2016.

[16] M. Ruzhansky and D. Suragan. On horizontal Hardy, Rellich, Caffarelli-Kohn-Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups. *J. Differential Equations*, 262, 1799–1821, 2017.

[17] M. Ruzhansky and D. Suragan. Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups. *Adv. Math.*, 308, 483–528, 2017.

[18] M. Ruzhansky and D. Suragan. Local Hardy and Rellich inequalities for sums of squares of vector fields. *Adv. Diff. Equations*, 22, 505–540, 2017.

[19] U. W. Schmincke. Essential selfadjointness of a Schrödinger operator with strongly singular potential. *Math. Z.*, 124, 47–50, 1972.

[20] Z. Wang and M. Zhu, Hardy inequalities with boundary terms. *EJDE*, 2003(43), 1–8, 2003.

[21] L.P. Rothdchild and E.M. Stein Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.*, 137, 247–320, 1976.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

EXPLICIT NUMERICAL METHOD FOR BOLTZMANN'S ONEDIMENSIONAL NONLINEAR SIXMOMENT SYSTEM OF EQUATIONS WITH VLADIMIROV-MARSHAK BOUNDARY CONDITIONS

A.SAKABEKOV[a], G. TLEUOVA[b]

Kazakh National Research Technical University after K.I.Satpaev, Satpayev street, 22a, Almaty, 050013, Kazakhstan

Al-Farabi Kazakh National University, al-Farabi Ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan

E-mail: [a]auzhani@gmail.com, [b]gaynyt@gmail.com

An approximate solution of the initial and boundary value problem for the Boltzmann equation can be determined by the moment method. According to the moment method particle distribution function decomposed into an infinity series of complete orthogonal system of functions. Boltzmann's equation is equivalent to an infinite system of differential equations relative to the moments of the particle distribution function in the complete system of eigenfunctions of linearized operator. As a rule we limit study by finite moment system of equations because solving infinite system of equations does not seem to be possible. There arises the problem of boundary conditions for a finite system of equations that approximate the microscopic boundary conditions for Boltzmann's equation and solvability of the initial and boundary value problem for Boltzmann's moment system of equations.

Moment methods differs from each other by choosing different systems of basis functions. For instance, Grad [1,2] obtained the moment system by expanding the particle distribution function in Hermitte polynomials near the local Maxwell distribution. Grad used Cartesian coordinates of velocities and Grad's moment system contained as coefficients such unknown hydrodynamic characteristics like density, temperature, average speed, and so forth. In work [3] we have obtained the moment system which differs from Grad's system of equations. We used spherical velocity coordinates and decomposed the distribution function into a series of eigenfunctions of the linearized collision operator, which is the product of Sonine polynomials and spherical functions. The expansion coefficients, moments of the distribution function is defined differently than in the Grad. The resulting system of equations, which correspond to the partial sum of series and which we called Boltzmann's moment system of equations, is a nonlinear hyperbolic system in relation to the moments of the particles distribution function. The differential part of the resulting system is linear in relation to the moments of the distribution function and nonlinearity is included as moments of collision integral. The moments of a nonlinear collision operator are expressed through coefficients of Talmi and Klebsh-Gordon. Note that Boltzmann's moment equations are intermediate between Boltzmann(kinetic theory) and hydrodynamic levels of description of state of the rarefied gas and form class of nonlinear partial differential equations.

We consider the initial and boundary value problem for six-moment Boltzmann's system equations with Vladimirov-Marshak boundary conditions in a vector-matrix form:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial w}{\partial x}=J_{1,} \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+A'\frac{\partial u}{\partial x}=J_2\ ,\ t\in(0,T]\ ,\ x\in(-a,a)\,, \tag{2.42}$$

$$u|_{t=0}=u_0\,(x)\,,$$

$$w|_{t=0}=w_0\,(x)\,,\ x\in[-a,a]\,, \tag{2.43}$$

$$(Aw\mp Bu)\,|_{x=\pm a}=0\ ,\ t\in(0,T] \tag{2.44}$$

Where $\mathrm{u}=(\mathrm{f}_{00},\mathrm{f}_{02},\mathrm{f}_{10})'$, $\mathrm{w}=(\mathrm{f}_{01},\mathrm{f}_{03},\mathrm{f}_{11})'$, $\mathrm{J}_1=(0,\mathrm{J}_{02},0)'$, $\mathrm{J}_2=(0,\mathrm{J}_{03},\mathrm{J}_{01})'$,

$$A=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{\sqrt3}&\frac{3}{\sqrt5}&-\frac{2\sqrt2}{\sqrt{15}}\\ -\sqrt{\frac23}&0&\sqrt{\frac53}\end{pmatrix},B=-\frac{1}{\alpha\sqrt\pi}\begin{pmatrix}\sqrt2&\sqrt{\frac23}&-\frac{1}{\sqrt3}\\ \sqrt{\frac23}&2\sqrt2&-1\\ -\frac{1}{\sqrt3}&-1&\frac{3}{\sqrt2}\end{pmatrix},$$

matrixes A and B are nonsingular, $J_{02}=\frac{(\sigma_2-\sigma_0)\left(f_{00}f_{02}-\frac{f_{01}f_{01}}{\sqrt3}\right)}{2}$,

$$J_{03}=\frac14\left(\sigma_3+3\sigma_1-4\sigma_0\right)f_{00}f_{03}+\frac{1}{4\sqrt5}\left(2\sigma_1+\sigma_0-3\sigma_3\right)f_{01}f_{02},$$

$$J_{11}=\left(\sigma_1-\sigma_0\right)\left(f_{00}f_{11}+\frac12\sqrt{\frac53}f_{10}f_{01}-\frac{\sqrt2}{\sqrt{15}}f_{01}f_{02}\right)$$

are moments of the collision integral, where $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ *and* σ_3- are the Fourier coefficients, and u_0 (x) and w_0(x)are given initial vector functions. It requires to find the solution of the system (1-2) with the initial conditions (2.43) and boundary conditions (2.44).

Theorem. If $w_0(x)$, $u_0(x) \in L^2[-a,a]$ then problem (2.41)-(2.44) has unique solution on the region $[-a,a]\times$[0,T] belonging to the space $C([0,T];L^2[-a,a])$, moreover $\|U\|_{C([0,T];L^2[-a,a])} \leq C\|U_0\|_{L^2[-a,a]}$, where $U=(u,w)\,, U_0=(u_0,w_0)\,,\ T \sim O\left(\|U_0\|^{-1}{}_{L^2[-a,a]}\right)$.
We use the explicit method for solving the initial and boundary value problem numerically [4].
We use the next initial values:

$f^0_{00}(x) = 1-x,\ f^0_{10}(x) = x(1-x)\,,\ f^0_{02}(x) = x,\ f^0_{01}(x) = 1-x^2,\ f^0_{03}(x) = x^2,\ f^0_{11}(x) = x^2(1-x^2)\,,$

$$\sigma_0 = 0.3\ ,\ \sigma_1 = 0.5\ ,\ \sigma_2 = 0.7\ ,\ \sigma_3 = 0.9\ ,\ \alpha = 1, n \in [1,10]\,, i \in [1,9]\,.$$

Список литературы

[1] Grad, Harold. "On the kinetic theory of rarefied gases.” Communications on Pure and Applied Mathematics (1949): 331-407.

[2] Grad, Harold. "Principle of the kinetic theory of gases.” Handbuchder Physik (1958): 205-294.

[3] Sakabekov, Auzhan. Initial-Boundary Value Problems for the Boltzmann’s Moment System Equations. Almaty: Gylym, 2002.

[4] Sakabekov A., Tleuova G. The numerical solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary nonlinear Boltzmann’s six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary conditions // Vestnik KazNU, Mathematics, Mechanics, Informatics series, 2017, N1 (93), pages 46-54.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

COMPARISON PRINCIPLE AND UNIQUENESS OF POSITIVE SOLUTIONS FOR NONLINEAR P-SUB-LAPLACIAN EQUATIONS ON STRATIFIED LIE GROUPS

DURVUDKHAN SURAGAN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: suragan@math.kz

In this talk we propose analogues of Green's and Picone's identities for the p-sub-Laplacian on stratified Lie groups. In particular, these imply a generalised Díaz-Saá inequality for the p-sub-Laplacian on stratified Lie groups. Using these we derive a comparison principle and uniqueness of a positive solution to nonlinear hypoelliptic equations on general stratified Lie groups extending to the setting of the general stratified Lie groups previously known results on Euclidean and Heisenberg groups.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON A REGULARIZED TRACE FORMULA FOR m-LAPLACIAN

NIYAZ TOKMAGAMBETOV

Al–Farabi Kazakh National University, Al–Farabi ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan
E-mail: niyaz.tokmagambetov@gmail.com

In this paper we extend results on regularized trace formulae which were established in [1, 2] for the Laplace and m-Laplace operators in a punctured domain with the fixed iterating order $m \in \mathbb{N}$. By using techniques of Sadovnichii and Lyubishkin [3], the authors in the papers [1, 2] described regularized trace formulae in the spatial dimension $d = 2$. In this remark one is to be claimed that the formulae are also valid in the higher spatial dimensions, namely, $2 \leq d \leq 2m$.

Список литературы

[1] B. E. Kanguzhin, N. E. Tokmagambetov, *On Regularized Trace Formulas for a Well-Posed Perturbation of the m–Laplace Operator* // Differential Equations, **51**:12 (2015), 1583–1588.

The author was supported in parts by the EPSRC grant EP/K039407/1 and by the Leverhulme Grant RPG-2014-02, as well as by the MESRK grant 5127/GF4. No new data was collected or generated during the course of research.

[2] B. E. Kanguzhin, N. E. Tokmagambetov, *A regularized trace formula for a well-perturbed Laplace operator* // Doklady Mathematics, **91**:1 (2015), 1–4.

[3] V. A. Sadovnichii, V. A. Lyubishkin, *Finite-dimensional perturbations of discrete operators and trace formulas* // Funktsional. Anal. i Prilozhen., **20** (1986), 55–65. In Russian.

— ⁂ —

CRITICAL EXPONENTS OF FUJITA TYPE FOR A FRACTIONAL NON-LINEAR PROBLEM

Berikbol T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: torebek@math.kz

In the present paper we consider the Cauchy problem for an ordinary fractional differential inequality:

$$\begin{cases} D^{\alpha,\mu}u(t) \geq t^{\beta}\left|u(t)\right|^{p}, \, t>0, p>1, 0<\alpha\leq\mu<1, \\ I^{1-\alpha}u(0)=\varphi\in\mathbb{R} \end{cases}, \tag{2.45}$$

where $D^{\alpha,\mu}$ is Hilfer fractional derivative and $I^{1-\alpha}$ is Riemann-Liouville fractional integral operator (see. [1]).

A nonexistence result is proved and the critical exponent separating existence from nonexistence is found. This is proved in the absence of any regularity assumptions.

Список литературы

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*
North-Holland. Mathematics studies. 2006.

— ⁂ —

CRITICAL EXPONENTS OF FUJITA TYPE FOR A FRACTIONAL NON-LINEAR PROBLEM

Berikbol T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: torebek@math.kz

In this paper a nonlocal problem for the nonhomogeneous bi-Laplacian equation:

$$\Delta^2 u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in D, \tag{2.46}$$

$$u(x,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \in [0,T], \tag{2.47}$$

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), u_t(x,0) = -\alpha u_t(x,T),\ x \in \overline{\Omega} \tag{2.48}$$

$$\Delta u(x,T) = \alpha \Delta u(x,0), \frac{\partial \Delta u}{\partial t}(x,T) = -\alpha \frac{\partial \Delta u}{\partial t}(x,0),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{2.49}$$

in a cylindrical domain $D = \Omega \times (0,T)$ is considered.

It is shown that this problem is ill-posed as well as the harmonic Cauchy problem. The method of spectral expansion in eigenfunctions of the nonlocal problem for bi-Laplacian operator establishes a criterion of the strong solvability of the considered nonlocal problem. It is shown that the ill-posedness of the nonlocal problem is equivalent to the existence of an isolated point of the continuous spectrum for a nonself-adjoint problem for the bi-Laplacian operator.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

3 Математическое моделирование, вычислительные и информационные технологии

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕКСТУР НА МИКРОФОТОГРАФИЯХ

ГУЛЬЗИРА АБДИКЕРИМОВА[1,a], АЛЕКСЕЙ БЫЧКОВ[2], ВЕЙ СИНЬЮЙ[3],ФЕДОР МУРЗИН[4,b],
НИКОЛАЙ РУССКИХ[4], ЕЛЕНА РЯБЧИКОВА[5],СЕРГЕЙ ХАЙРУЛЛИН[4]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан*

[2]*Институт химии твердого тела и механохимии СО РАН, ул. Кутателадзе, 18, Новосибирск, 630128, Россия*

[3]*Хэйлунцзянский университет, Харбин, КНР*

[4]*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия*

[5]*Институт химической биологии и фундаментальной медицины СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 8, Новосибирск, 630090, Россия*

E-mail: [a]gulzira1981@mail.ru, [b]murzin@iis.nsk.su

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена анализу текстур. Источником изображений являются микрофотографии растительного сырья, размолотого на специальных мельницах. Работа выполнена для Института химии твердого тела и механохимии Сибирского Отделения Российской Академии Наук. Конечная цель работы – определение по микрофотографии химической реактивности сырья. В эта задача не решена, это требует более глубоких исследований. Основное внимание уделено разработке инструмента для анализа, а именно, библиотеке программ для анализа текстур и графического интерфейса к данной библиотеке. Далее, используя наборы текстурных признаков и экспериментальные данные о химической реактивности, можно применить алгоритмы машинного обучения, например, на основе нейрокомпьютерного подхода. Таким образом, натренировав систему на наборе данных, можно будет потом ее использовать для предсказания химической реактивности, пористости и т.д. Были проведены предварительные эксперименты по применению R/S-анализа и фрактального анализа.

1. Анализ текстурных признаков

Текстуры [1-3] находят целый ряд применений в анализе многих типов изображений. Они непосредственно присутствуют во всех изображениях, получаемых с помощью спутников, в микроскопических изображениях культур клеток, препаратов тканей в биомедицинских исследованиях и т.п.

Для анализа текстуры, необходимо определить размер скольязщего окна, с помощью которого выделяются ее фрагменты. Далее вычисляются так называемые текстурные признаки. Это числовые характеристики, зависящие от окна в целом. Обычно их разделяют на несколько групп: признаки, основанные на измерении пространственных частот; признаки, основанные на статистических характеристиках уровней интенсивности элементов разложения; признаки, основанные на описании структурных элементов и др. В ряде публикаций приводят до тридцати признаков, а всего их известно более двухсот.

Следует отметить, что не все текстурные характеристики одинаково информативны при анализе и классификации тех или иных изображений, поэтому для увеличения вычислительной эффективности алгоритмов необходимо решать задачу анализа информативности и оптимизации системы признаков. Основной вопрос при построении системы признаков заключается в том, чтобы определить, какие и сколько признаков необходимо выделить для надежного анализа объектов. В нашем случае текстурные признаки необходимо связать с определенной химической активностью биологического материала.

В настоящее время рассмотрены несколько методов (текстурных признаков), основанных на анализе плотностей перепадов, автокорреляционных функциях и различных статистических характеристиках серий. Рассмотрены признаки на основе анализа длин серий. Серией называется непроизводный элемент, состоящий из максимальной связной совокупности вытянутых в прямую линию точечных элементов изображения одинаковой яркости. Серия характеризуется яркостью, длиной и направлением. Всего в работе используются 19 текстурных признаков.

Стандартный подход для вычисления текстурных признаков следующий. Необходимо выбрать так называемое бегущее окно с нечетной стороной: 3, 5, 7 пикселей. Признак вычисляется внутри бегущего окна. Размер локального фрагмента является носителем текстурных свойств. Значение признака записывается в новую матрицу того же размера, что и исходная. В новой матрице значение записывается в точку с координатами равными координатам центра бегущего окна. Элементы новой матрицы получаются в некотором интервале [A,B]. Далее обычно этот интервал линейно отображается в отрезок [0,255]. После этого имеется возможность визуализировать результат вычисления текстурного признака.

Было обнаружено, что стандартный подход в нашем случае мало информативен. Поэтому было решено использовать нестандартный подход. А именно, текстурные признаки вычисляются по большим окнам (в том числе, по неквадратным), которые пользователь может задавать, выбирая область, которая может представлять для него интерес. То есть речь идет о вычислении числовых характеристик, относящихся к обширным областям, включающих различного рода артефакты.

2. R/S-анализ и синергетический подход

Метод R/S-анализа – это совокупность статистических приёмов и методов анализа временных рядов или числовых последовательностей (преимущественно финансовых), позволяющих определить некоторые важные их характеристики, такие как наличие непериодических циклов, «памяти» у процесса, степень хаотичности и т.д. Метод применим и для анализа изображений, т.к. можно рассматривать последовательность значений функции яркости вдоль некоторой прямой или кривой линии. Интересно, что метод применяется в химии для анализа микрофотографий (например, лигнина), и метод показал определенную эффективность [4-5]. Важной характеристикой, вычисляемой методом R/S-анализа, является показатель Хёрста, который характеризует степень хаотичности процесса.

Синергетический подход используется с целью выявления закономерностей на основе обработки временных рядов [6-7]. Данный метод позволяет вычислить так называемую фрактальную размерность временного ряда. В случае изображения рассматривается последовательность значений функции яркости вдоль некоторой прямой или кривой линии. Исследования показывают, что результаты получаются более качественные, нежели просто проводить анализ по частотным характеристикам. Метод применяется в химии для анализа микрофотографий, в частности, лигнина, и метод показал определенную эффективность. В настоящее время этот метод также реализован.

Список литературы

[1] Н.В. Колодникова, *Обзор текстурных признаков для задач распознавания образов* // Доклады ТУСУРа, 117–118 (2004).

[2] Г.А. Андреев, *Анализ и синтез случайных пространственных текстур* // Г.А. Андреев О.В. Базарский, А.С. Глауберман, А.И. Колесников, Ю.В. Коржик, Я.Л. Хлявич // Зарубежная радиоэлектроника, №2,3–33 (1984).

[3] Р.М. Харалик, *Статистический и структурный подходы к описанию текстур* // ТИИЭР, 1979.

[4] А.П. Карманов, Лигнин,*Структурная организация и самоорганизация* // Институт химии Коми научного центра Уральского отделения РАН, Сыктывкар, 66–67 (1999).

[5] А.П. Карманов, Д.В. Матвеев *Проблемы химии древесины и лесохимии* // Институт химии Коми научного центра Уральского отделения РАН, Сыктывкар, 50–52 (2001).

[6] Э. Петерс, *Хаос и порядок на рынках капитала* // М.: Мир, –272 (2000).

[7] В.В. Петров, *Структура телетрафика и алгоритм обеспечения качества обслуживания при влиянии эффекта самоподобия* // Московский энергетический институт, Москва, 2004.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МОДЕЛИРОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННО ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЯ

АСЕЛЬ БЕКЕТАЕВА[a], АЙНУР МАНАПОВА[b]

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: [a]*azimaras10@gmail.com*, [b]*manapova.aynur@mail.ru*

Характерная черта моделирования низкоскоростных течений на основе сжимаемой формы уравнений Эйлера или Навье-Стокса состоит в возникновении неустойчивости численного решения, а также в уменьшении скорости сходимости итерационного процесса в связи с малой разницей между скоростями акустических и конвективных волн [1]. Предобусловливание (preconditioning) позволяет модифицировать разностные уравнения таким образом, что собственные значения якобиана (скорости распространения волн) модифицированной системы уравнений имели одинаковый порядок величины. Применение метода предобуславливания [3, 3, 4, 5] в основном приводит к ускорению сходимости стационарного решения схем установления. При аппроксимации пространственных производных обычно использовались центрально-разностные, или, как в случае со схемой в [3], схемами со специальной аппроксимацией. Целью работы является построение численного алгоритма для решения задачи вдува дозвуковых струй из круглых отверстий, расположенных симметрично на верхней и нижней стенках канала, перпендикулярно низкоскоростному потоку совершенного газа с применением метода предобуславливания.

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, замкнутая моделью турбулентности $k-\omega$. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе u_∞, ρ_∞, T_∞ давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является диаметр круглого отверстия струи.

На входе, а также в качестве начальных данных заданы параметры потока. На верхней границе задано условие симметрии. На нижней стенке задано условие прилипания и теплоизоляции. На боковых границах задано условие Неймана. На выходной границе задано условие неотражения. На струе заданы параметры струи. Начальные данные для параметров k, ω определены, исходя из предположения равенства порождения турбулентности и ее диссипации. На стенке заданы граничные условия для параметров $k-\omega$ модели турбулентности. Вблизи стенки задан пограничный слой. Также задан пристенный слой (10% от пограничного слоя). Профиль продольной скорости определяется степенным законом.

Авторы были поддержаны грантом № 0827 / GF4 министерства Образования и Науки Республики Казахстан.

Для более точного учета течения, вводится сгущение сетки с помощью преобразований [6]. Решение исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса осуществляется с помощью алгоритма построенного на основе ENO-схемы [6, 7]. Для устранения проблемы связанной с исходной системой уравнений при числе Маха $M \to 0$ используется метод предобуславливания. Идея метода состоит в модификации системы уравнений путем домножения членов с производной по времени на матрицу предобуславливания. Был произведен переход к примитивным переменам, где используется матрица Туркеля [4]. После нахождения правых и левых собственных векторов предобуславленных матриц Якоби производится обратный переход к консервативным переменам с помощью матрицы перехода.

Список литературы

[1] К.Н. Волков, Предобусловливание уравнений Эйлера и Навье-Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктированных сетках // Computational Mathematics and Mathematical Physics, **49**:10, 1868–1884 (2009).

[2] Д. Чой, Ч.Л. Меркл, Применение метода установления для расчета низкоскоростных течений // Аэрокосмическая техника, 7, 29–37 (1986).

[3] М.Х. Стрелец, М. Шур, Метод масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха // ЖВМ и МФ, **28**, 254–266 (1988).

[4] E. Turkel, Priconditioned Method for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations // J.of Comp.Phisics, **72**, 277–298 (1987).

[5] A.G. Tomboulides, S.A. Orzag, A quasi-two-dimensional benchmark problem for low Mach number compressible codes // J.of Comp.Phisics, **146**:2, 691–706 (1998).

[6] А.О. Бекетаева, А.Ж. Найманова, Применение eno-схемы (essentially nonoscillatory) для моделирования течения многокомпонентный газовой смеси // Вычислительные технологии, **12**:S4, 17–25 (2007).

[7] А.О. Бекетаева, А.Ж. Найманова, Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа при наличии поперечного вдува струй // Прикладная механика и техническая физика, **52**:6, 1–10 (2011).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Можете здесь вставить ссылку на грант.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕКАЧКИ НЕФТИ

Т.Т. БЕКИБАЕВ, У.К. ЖАПБАСБАЕВ, Г.И. РАМАЗАНОВА

Казахстанско-Британский технический университет, ул.Толе би, 59, Алматы, 050000, Казахстан

E-mail: gaukhar.ri@gmail.com

Гидравлические и тепловые характеристики потока нефти являются определяющими параметрами перекачки по магистральным нефтепроводам.

Гидравлическое сопротивление нефтепровода находится в зависимости от вязкости, шероховатости, скорости потока высоковязкой, высокозастывающей нефти. Вязкость нефти сильно изменяется по длине трубопровода из-за снижения температуры. Шероховатость стенок труб может изменяться по причине выпадения асфальтопарафиносмолистых отложений. В результате становится невозможной в точности определить коэффициент сопротивления.

Теплообмен между горячей нефтью и холодным грунтом приводит к изменению температуры нефти по длине трубопровода. Коэффициент теплопередачи определяется в зависимости от теплопроводности грунта на участке магистрального нефтепровода. Этот параметр зависит от вида грунта, его влажности, плотности и температуры. Большая протяжённость участка магистрального нефтепровода (тысячи километров) и изменение влажности грунта приводит к тому, что найти теплопередачу не представляется возможным.

Определение гидравлического сопротивления и коэффициента теплопередачи проводится путем решения обратной задачи системы уравнений движения и теплообмена:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta \frac{\rho_0 u^2}{2D} - \rho_0 g \frac{dz}{dx} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{4k(\lambda_{гр})}{\rho_0 D c_p}(T - T_{гр}) + \frac{ugi}{c_p} \tag{3.3}$$

где c – скорость звука, ζ – коэффициент гидравлического сопротивления, $k(\lambda_{гр})$, $\lambda_{гр}$ - коэффициенты теплопередачи и теплопроводности грунта.

Система уравнений (3.14) – (3.16) решается численным методом при заданных краевых условиях. Коэффициенты гидравлического сопротивления и теплопередачи находятся путем сравнения расчетных и опытных данных.

В докладе приводятся результаты решения обратной задачи по определению гидравлических и тепловых характеристик потока нефти в магистральных нефтепроводах.

— ⁂ —

О КРУГОВЫХ И СПИРАЛЬНЫХ ОРБИТАХ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Беков А.А.[1], Астемесова К.С[2], Момынов С.Б[2], Рахимжанов Б.Н.[3]

[1] *АО "Национальный центр космических исследований и технологий", Казахстан, Алматы*

[2] *Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И.Сатпаева, Казахстан, Алматы*

[3] *Кокшетауский государственный университет им. Ш.Уалиханова, Казахстан, Алматы*

E-mail:bekov@mail.ru

В нестационарных гравитирующих системах с осевой симметрией имеется определенный класс круговых и спиральных орбит, играющих особую роль в динамике таких систем [1]. Выясним условия устойчивости круговых и спиральных орбит в нестационарном гравитационном поле. При этом используем метод исследования устойчивости неавтономных динамических систем [3]. Такие нестационарные круговые и спиральные орбиты представляют интерес для некоторых астрономических задач, поскольку реальные гравитирующие системы, по существу, являются нестационарными.

Пусть силовая функция в цилиндрических координатах ρ, λ, z с осью z, совпадающей с осью симметрии, имеет вид

$$U(\rho, z, t) = f(t)\tilde{U}(\rho, z), \tag{1}$$

где f - функция функция времени вида

$$f(t) = \frac{1}{\alpha t + \beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{2}$$

Рассмотрим движение в поле (1) при наличии силы трения вида

$$\overrightarrow{F}_{friction} = v(t)\dot{\overrightarrow{r}} \quad (v = \frac{\dot{f}}{2f}), \tag{3}$$

где $\overrightarrow{r}$ - радиус-вектор материальной точки.

В этом случае допускается круговое движение

$$\rho = \rho_0;\ \dot{\rho} = 0;\ \mathit{\Omega} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\alpha t + \beta}};\ z = z_0;\ \dot{z} = 0, \tag{4}$$

с непрерывно убывающей секторной скоростью $\frac{\Omega}{2} = \rho^2 \frac{\dot{\lambda}}{2}$.

Движение (4) исследуется на устойчивость в смысле Ляпунова относительно величин ρ, $\dot{\rho}$, Ω, z, $\dot{z}$. Для этого методом Н.Г.Четаева строится функция Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений возмущенного движения [1]. В результате условия устойчивости круговых орбит (4) имеют вид

$$(\ddot{U}_{\rho\rho}+\frac{3}{\rho}\dot{U}_{\rho})_0<0;\quad [(\ddot{U}_{\rho\rho}+\frac{3}{\rho}\dot{U}_{\rho})\ddot{U}_{zz}-\ddot{U}^2_{\rho z}]_0>0. \tag{5}$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке ρ_0, z_0.

Если силовое поле обладает симметрией относительно плоскости $z=z_0$, т.е $(\ddot{U}_{\rho z})_0=0$, то условия устойчивости (5) упрощаются и их можно привести к более компактному виду. В самом деле, если рассматриваемое движение происходит внутри гравитирующей среды непрерывной плотности, то уравнение Пуассона для силовой функции имеет следующий вид:

$$\ddot{U}_{\rho\rho}+\ddot{U}_{zz}+\frac{1}{\rho}\dot{U}_{\rho}=-4\pi G\mu(P), \tag{6}$$

где G - гравитационная постоянная; $\mu(P)$ -плотность во внутренней точке P среды. Пользуясь уравнением (6), получим условие устойчивости

$$[2\rho^2\dot{U}_{\rho}-4\pi G\rho^3\mu]_0<[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^3\dot{U}_{\rho})]_0<0, \tag{7}$$

которое является обобщением условий устойчивости стационарных круговых движений, приводимых в работах [3, 4].

Многообразие круговых орбит (4) определяется набором значений ρ_0, z_0, величиной секторной скорости $\frac{\Omega}{2}$ и функцией f. Отметим, что круговые орбиты (4) при больших значениях времени t близки к соответствующим стационарным круговым орбитам с малой секторной скоростью в слабом силовом поле.

Пусть силовая функция имеет вид

$$U(r,z,t)=\gamma^2\tilde{U}(r\gamma,z\gamma), \tag{8}$$

где

$$\gamma(t)=\frac{1}{\gamma t+\beta},\quad (\alpha,\beta-const), \tag{9}$$

В этом случае в поле (8) возможны спиральные движения вида

$$r=r_0(\alpha t+\beta);\ \dot{r}=\alpha r_0;\ \Omega=\Omega_0;\ z=z_0(\alpha t+\beta);\ \dot{z}=\alpha z_0, \tag{10}$$

Спиральное движение (10) исследуется на устойчивость в смысле Ляпунова по отношению к величинам r, $\dot{r}$, Ω, z, $\dot{z}$. Аналогично [1] находится функция Ляпунова способом связки интегралов по Н.Г.Четаеву. В результате имеем условия устойчивости движения (10)

$$(\ddot{U}_{rr}+\frac{3}{r}\dot{U}_{r})_0<0;\quad [(\ddot{U}_{zz})(\ddot{U}_{rr}+\frac{3}{r}\dot{U}_{r})-(\ddot{U}_{rz})^2]_0>0, \tag{11}$$

где индекс 0 означает, что взято значение функции в точке $r_0(\alpha t+\beta)$, $z_0(\alpha t+\beta)$.

Частные решения (10) представляют собой широкий класс спиральных орбит, многообразие которых определяется самой функцией γ, темпом ее изменения и набором значений r_0, z_0, Ω_0. Частным случаем указанных орбит являются плоские спиральные орбиты ($z_0 = 0$). В случае очень медленного изменения функции γ со временем ($\alpha \approx 0$) рассматриваемые спиральные орбиты будут близки к круговым:

$$r = \beta r_0;\ \dot{r} = 0;\ \Omega = \Omega_0;\ z = \beta z_0;\ \dot{z} = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, в нестационарном осесимметричном гравитационном поле вида (8) при выполнении условий (11) существуют устойчивые спиральные орбиты (10). При прекращении нестационарности силового поля спиральные орбиты переходят в соответствующие устойчивые круговые орбиты.

Список литературы

[1] Беков А.А. Динамика двойных гравитирующих систем с переменными массами – Saarbrucken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing. GmbH and Co. KG. - 2015. – 224 с.

[2] Беков А.А. Об устойчивости неавтономных динамических систем // Известия МН- АН РК, серия физ.-мат., 1998, № 4, с. 57-60.

[3] Чанрасекар С. Принципы звездной динамики. М., ИЛ, 1948. – 263 с.

[4] Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.- 352 с.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ФУНКЦИЯ МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ С ДАННЫМ НАБОРОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

ПЕТР ИВАНЬШИН

Казанский Федеральный Университет, ул.Кремлевская, 37, Казань, 420043, Россия
E-mail: pivanshi@yandex.ru

Решение одной задачи аэрогидродинамики [1], [3] привело к следующей проблеме, родственной вопросу из [3]:

Задача 1. На множестве U интегрируемых на $[0, 2\pi]$ функций $F(t)$, с заданным конечным набором коэффициентов Фурье $C_1, \ldots, C_n$, $C_n \in \mathbb{C}$, найти такую функцию $F_1(t)$, что

$$\|F_1\|_\infty = \min_U \|F\|_\infty.$$

Лемма 1. *Существуют такие константа C и семейство точек $x_1, \ldots, x_{2*n}$, что кусочно-постоянная функция $f_{[x_{2k+1}, x_{2k+2})} = -f_{[x_{2k+2}, x_{2k+3})} = C$, $k = 0, \ldots, n$ — решение задачи 1.*

Лемма 2. *Кусочно-постоянное решение задачи 1 единственно.*

Теорема. *Кусочно-постоянная функция — единственное решение задачи 1 для нормы $\|\cdot\|_\infty$.*

Список литературы

[1] П. Иваньшин, *О квазирешениях обратной краевой задачи аэрогидромеханики* // Известия высших учебных заведений. Математика, 5, 13–24 (2013).

[2] P. Ivanshin, *Conditional Optimization and One Inverse Boundary Value Problem* // Mathematical Problems in Engineering, 9 pages (2015).

[3] H. Dette, V. B. Melas, *A note on some extremal problems for trigonometric polynomials* // Technical Reports from Technische Universitaet Dortmund, Sonderforschungsbereich 475: Komplexitaetsreduktion in multivariaten Datenstrukturen, 17 pages, 2005.

— ⁎⁎⁎ —

ОБЛАЧНЫЕ СРЕДСТВА ПОДДЕРЖКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ВИКТОР КАСЬЯНОВ

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, пр.Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: kvn@iis.nsk.su

Параллельные вычисления в настоящее время являются одной из главных парадигм современного программирования и охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов разработки программ. Ввиду значительно более сложной природы параллельных вычислений по сравнению с последовательными большое значение приобретают методы автоматизации

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 15-07-02029).

разработки параллельного программного обеспечения, основанные на применении техники формальных моделей, спецификаций и преобразований параллельных программ.

Используя традиционные языки и методы, очень трудно разработать высококачественное, переносимое программное обеспечение для параллельных компьютеров. В частности, параллельное программное обеспечение не может быть разработано с малыми затратами на последовательных компьютерах и потом перенесено на параллельные вычислительные системы без существенного переписывания и отладки. Поэтому высококачественное параллельное программное обеспечение может разрабатываться только небольшим кругом специалистов, имеющих прямой доступ к дорогостоящему оборудованию.

Однако, используя языки программирования с неявным параллелизмом, такие как функциональный язык Sisal [1], можно преодолеть этот барьер и предоставить широкому кругу прикладных программистов, не имеющих достаточного доступа к параллельным вычислительным системам, но являющихся специалистами в своих прикладных областях, возможность быстрой разработки высококачественных переносимых параллельных алгоритмов на своем рабочем месте. Функциональная семантика языков программирования с неявным параллелизмом гарантирует детерминированные результаты для параллельной и последовательной реализации то, что невозможно гарантировать для традиционных языков, подобных языку Фортран. Пропадает необходимость переписывания исходного кода при переносе его с одного компьютера на другой. Гарантировано, что программа с неявным параллелизмом, правильно исполняющаяся па персональном компьютере, будет давать те же результаты при ее исполнении на высокоскоростном параллельном или распределенном вычислителе. Более того, по сравнению с императивными языками (подобными языку Фортран) функциональные языки, такие как Sisal, упрощают работу программисту. В функциональной программе программист должен только специфицировать результаты вычислений и может переложить большую часть работ по их организации на компилятор, который отвечает за отображение алгоритма на определенную архитектуру вычислителя (включая планирование команд, передачу данных, синхронизацию вычислений, управление памятью и т. д.). По сравнению с другими функциональными языками язык Sisal поддерживает типы данных и операторы, присущие научным вычислениям, такие как циклы и массивы.

Доклад посвящен создаваемой в лаборатории конструирования и оптимизации программ Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН облачной интегрированной визуальной среде CSS параллельного программирования на базе функционального языка программирования Cloud Sisal. Цель проекта – дать возможность широкому кругу лиц, находящихся в удаленных населенных пунктах или в местах с недостаточными вычислительными средствами, но имеющих выход в Интернет, дистанционно и без установки дополнительного программного обеспечения на своих недорогих вычислительных устройствах в визуальном стиле создавать и отлаживать переносимые параллельные программы на языке Cloud Sisal, а также затем дистанционно (в облаке) осуществлять эффективное решение своих задач, исполняя на некоторых супервычислителях, доступным им по сети, созданные и отлаженные переносимые Cloud-Sisal-программы, предварительно адаптировав их под используемые супервычислители с помощью облачного оптимизирующего кросс-компилятора, предоставляемого средой. Среда CSS содержит интерпретатор, визуальный отладчик и облачный оптимизирующий кросс-компилятор. Она использует внутреннее теоретико-графовое представление функциональных и параллельных программ, ориентированное на их визуальную обработку и основанное на атрибутированных иерархических графах [2].

Разработанный нами язык Cloud Sisal продолжает традицию предыдущих версий языка Sisal [1],[3], оставаясь функциональным потоковым языком, ориентированным на написание больших научных программ, содержащим циклы и массивы, и расширяет их возможности средствами визуальной поддержки облачных супервычислений. Заметим, что использование циклов и массивов не является обычным для функциональных языков программирования, где, как практически всё по возможности выражается в терминах списков и рекурсии. Но массивы существенно упрощают некоторые задачи вычислительного программирования, в частности, с массивами существенно понятней становится описание матрицы. При этом массивы сами по себе не являются императивным или последовательным элементом. Например, покомпонентное перемножение векторов на языке Cloud Sisal можно определить следующим образом:
for i in 1, N do R := A[i] * B[i] returns array of R end for

Язык Cloud Sisal реализует модель всюду завершаемых частичных вычислений, что означает наличие специального «ошибочного» значения, просачиваемого по графу потока данных. Например, при вычислении матрицы часть элементов в результате может иметь ошибочное значение, что означает ошибку. Таким образом, семантика языка является изначально удобной для параллельных вычислений, и сложного контроля со стороны системы времени исполнения не требуется.

Язык Cloud Sisal допускает использование утверждений (прагм), описывающих известные программисту свойства программы в виде формализованных комментариев. Прагма задаёт свойства конструкции, идущей за ней следом, и может, например, задавать ограничение на значение переменной, выражения или на возвращаемое функцией значение в виде логического выражения, содержащего имена, видимые в месте расположения данной прагмы. Заданные с помощью прагм свойства могут использоваться как при отладке программы, так и при выполнении оптимизирующих преобразований. Механизм прагм поддерживает также методы аннотированного программирования [4] и конкретизирующих преобразований [5], что позволяет в рамках декларативного стиля программирования настраивать процессы адаптации параллельных программ на классы задач и архитектуру вычислителя с сохранением их корректности и с использованием знаний пользователей о задачах, программах и вычислителе.

Список литературы

[1] J.-L. Gaudiot, T. DeBoni, J. X Feo, et al. *The Sisal project: real world functional programming* // Lecture Notices in Computer Science,**1808**, 84–72 (2001).

[2] В.Н. Касьянов, Е.В. Касьянова,*Визуализация информации на основе графовых моделей* // Научная визуализация, **6**:1, 31–50 (2014).

[3] V.N. Kasyanov, *Sisal 3.2: functional language for scientific parallel programming* // Enterprise Information Systems, **7**:2, 227–236 (2013).

[4] В.Н. Касьянов, *Аннотирование программ и их преобразование* //Программирование, 4, 3–16 (1989).

[5] В.Н. Касьянов, *Трансформационный подход к конкретизации программ*// Кибернетика, 6, 28–32 (1989).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ ВОРОНОГО С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОБЪЕМЫ ОБЛАСТЕЙ

БАХЫТ МАТКАРИМОВ

Национальная лаборатория Астана, Назарбаев университет, пр. Кабанбай батыра, 53, Астана, 010000, Казахстан

E-mail: bmatkarimov@nu.edu.kz

Выбор определенного размещения точек в некоторой области метрического пространства необходим для задач численного интегрирования, например на сфере [1], кроме того хорошо известны специфические задачи размещения точек, такие как формулы механических кубатур [2], пикселизация звездного неба [3], а также множество приложений центроидных диаграмм Вороного [4]. Диаграммы Вороного широко используются как для определения различных свойств размешения точек, так и для определения размещений точек с определенными свойствами, в частности одним из критериев равномерного размещения множества точек в определенной области метрического пространства является равенство объемов областей этих точек в диаграмме Вороного, построенной на их основе. Одной из

ПЦФ 0124/PTF-14-MES(0115PK03029)

задач анализа астрофизических данных является оценка неравномерности/анизотропии размещения точечных данных астрофизических событий, которая может быть эффективно решена с использованием диаграмм Вороного с одинаковыми объемами областей, определяющими степень пространственного разрешение, путем анализа статистики числа точек в различных областях диаграммы. Диаграммы Вороного с различными объемами областей применяются для анализа прострасвенных конфигураций биологических макромолекул.

В данной работе предлагается численный метод построения диаграмм Вороного для конечного N числа точек с ограничениями на объемы областей диаграммы, в частности для построения диаграмм Вороного с одинаковыми объемами областей. Объем области диаграммы может быть определен для каждой точки. В предлагаемом методе можно использовать произвольное исходное размещение точек. Далее точки перемещаются таким образом, что конечное размещение точек является стационарным состоянием некоторой динамической системы. Вычисление диаграммы Вороного производится при каждом изменении топологии размещения точек, или просто на каждом шаге перемещения точек. Существует множество способов построения динимических систем для перемещения точек, в частности возможно сохранение полной группы симметрии исходного размешения точек.

Список литературы

[1] K. Hesse, I.H. Sloan, R.S. Womersley, *Handbook of GeoMathematics* // Springer, 2010, pp. 1189-1221

[2] С.Л. Соболев, В.Л. Васкевич, *Кубатурные формулы*, Новосибирск, 1996

[3] О.В. Верходанов, А.Г. Дорошкевич, *Успехи физических наук*, **183**:8, 849—862 (2013)

[4] Q.Du, V.Faber, M.Gunzburger, *SIAM Review*, **41**:4, 637—676 (1999)

— ⁂ —

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

ЗАЙНЕЛ МУРЗАБЕКОВ[a], ШАМШИ АЙПАНОВ[b]

Институт Математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, пр.аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: [a]*murzabekov-zein@mail.ru*, [b]*aipanov@mail.ru*

Рассмотрена задача оптимального быстродействия для экономической модели, состоящей из трех секторов ($i = 0,\ 1,\ 2$), в каждом из которых производится свой агрегированный продукт:

– в материальном секторе ($i = 0$) – предметы труда (топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы);

– в фондосоздающем секторе ($i = 1$) – средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.д.);

– в потребительском секторе ($i = 2$) – предметы потребления.

Математическая модель объекта управления (см. [1]) состоит из

а) трех функций удельного выпуска типа Кобба – Дугласа:

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0,\ 1,\ 2); \tag{3.4}$$

б) трех дифференциальных уравнений, описывающих динамику фондовооруженностей секторов:

$$\dot{k}_i = -\lambda_i k_i + (s_i/\theta_i)x_i, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad (i = 0,\ 1,\ 2); \tag{3.5}$$

в) трех балансовых соотношений:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \tag{3.6}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 \geq 0, \quad \theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 \geq 0, \tag{3.7}$$

$$(1 - \beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0. \tag{3.8}$$

Здесь состояние экономической системы описывается вектором фондовооруженностей (k_0, k_1, k_2); управляющие воздействия образуют вектор $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$, где (s_0, s_1, s_2) – доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов, $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – доли секторов в

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК по гранту № 2013/ГФ4.

распределении трудовых ресурсов; x_i – удельный выпуск (количество выпускаемой продукции в i-м секторе в расчете на одного работающего от общего количества трудовых ресурсов); β_i – прямые материальные затраты при выпуске единицы продукции в i-м секторе. Начальное состояние системы равно (k_0^0, k_1^0, k_2^0), где k_i^0 – фондовооруженность i-го сектора $(i = 0, 1, 2)$ в момент времени $t = 0$.

Ставится задача перевода нелинейной экономической системы (2) из начального состояния в конечное положение за кратчайшее время. В качестве желаемого конечного состояния выбрано положение равновесия системы (k_0^*, k_1^*, k_2^*), которое определяется путем приравнивания к нулю правых частей дифференциальных уравнений (2):

$$k_1^* = (s_1 A_1/\lambda_1)^{1/(1-\alpha_1)}, \quad k_0^* = s_0\theta_1 A_1 (k_1^*)^{\alpha_1}/(\lambda_0\theta_0), \quad k_2^* = s_2\theta_1 A_1(k_1^*)^{\alpha_1}/(\lambda_2\theta_2). \tag{3.9}$$

Значения фондовооруженностей k_i^* $(i = 0, 1, 2)$ в состоянии равновесия (6) зависят от управлений $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$, для которых можно выбрать значения $(s_0^*, s_1^*, s_2^*, \theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*)$, решая задачу нелинейного программирования с целью максимизации удельного потребления: $x_2 \to \max$ при условии выполнения соотношений (1), (3)-(5) [2].

Далее долю инвестиций в материальный сектор и доли трудовых ресурсов во всех секторах будем считать фиксированными: $s_0(t) \equiv s_0^*$, $\theta_i(t) \equiv \theta_i^*$, $(i = 0, 1, 2)$. В этом случае, как следует из соотношений (2), (3), динамика фондовооруженностей в секторах $i = 1, 2$ в интервале времени $[0, T]$ будет описываться дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{k}_1(t) &= -\lambda_1 k_1(t) + s_1(t) A_1 k_1^{\alpha_1}(t), \quad k_1(0) = k_1^0, \\ \dot{k}_2(t) &= -\lambda_2 k_2(t) + \frac{1 - s_0^* - s_1(t)}{\theta_2^*}\theta_1^* A_1 k_1^{\alpha_1}(t), \quad k_2(0) = k_2^0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $x(t) = (k_1(t), k_2(t))'$ является вектором состояния системы, $u(t) = s_1(t)$ – управлением, удовлетворяющим ограничениям

$$0 \le s_1(t) \le 1 - s_0^*, \quad t \in [0, T]. \tag{3.11}$$

В силу условия (3) доля инвестиций в потребительский сектор и соответствующие ограничения будут определены следующим образом:

$$s_2(t) = 1 - s_0^* - s_1(t), \quad 0 \le s_2(t) \le 1 - s_0^*, \quad t \in [0, T]. \tag{3.12}$$

С учетом функций удельного выпуска (1) и материального баланса (5) можно выразить фондовооруженность $k_0(t)$ для сектора $i = 0$ через фондовооруженности двух других секторов $(i = 1, 2)$:

$$k_0(t) = \left[\frac{\beta_1\theta_1^* A_1 k_1^{\alpha_1}(t) + \beta_2\theta_2^* A_2 k_2^{\alpha_2}(t)}{(1-\beta_0)\theta_0^* A_0}\right]^{1/\alpha_1}, \quad t \in [0, T]. \tag{3.13}$$

Таким образом, приходим к задаче перевода системы (7) из заданного начального положения $x_0 = (k_1^0, k_2^0)'$ в желаемое конечное состояние $x_* = (k_1^*, k_2^*)'$ за кратчайшее время, используя управление $s_1(t)$, удовлетворяющее двусторонним ограничениям вида (8). Конечный момент времени T заранее не задан, его требуется определить путем решения задачи оптимального быстродействия $T \to \inf$.

Для решения поставленной задачи был использован метод сведения задачи оптимального быстродействия к линейно-квадратичной задаче (LQ-задаче) оптимального управления, предложенный в [3, 4]. Поскольку объект управления (7) является нелинейным, применена процедура квазилинеаризации [5], в которой на каждом шаге итерационного процесса используется аналитический метод решения LQ-задачи с закрепленными концами траекторий [6, 7]. Уменьшая на каждом шаге итерации значение T, можно найти минимальный интервал времени, в течение которого можно обеспечить перевод нелинейной системы (7) из x_0 в x_* при ограниченном управлении (8).

Список литературы

[1] В.А. Колемаев, *Экономико-математическое моделирование* // М.: Юнити-Дана, 2005.

[2] Z. Murzabekov, M. Milosz, K. Tussupova, *Modeling and optimization of the production cluster* // Advances in intelligent systems and computing, **430**, 99–108 (2016).

[3] Sh. Aipanov, *A numerical method for solving the time-optimal control problem* // International conference dedicated to the 90-years anniversary of L.S. Pontryagin, Abstracts, **3**, 14–16, M.: Steklov MI, 1998.

[4] Ш.А. Айпанов, *Решение задачи оптимального быстродействия путем сведения к линейно-квадратичной задаче* // Труды IX Международной азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 11–12, Алматы: ИПИУ, 2013.

[5] Р. Беллман, Р. Калаба, *Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи* // М.: Мир, 1968.

[6] Sh. Aipanov, Z. Murzabekov, *The solution of a linear-quadratic optimal control problem for fixed endpoints of system trajectories* // Differential equations, **32**:6, 848–849 (1996).

[7] Sh. Aipanov, Z. Murzabekov, *Optimal control of linear systems with fixed ends of trajectories and with quadratic functional* // Journal of Computer and Systems Sciences International, **34**:2, 166–172 (1996).

— ⁂ —

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ТЕКСТА ПОИСКОВОМУ ЗАПРОСУ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМ ТЕКСТОВ

Ф.А. Мурзин[1,2,a], А.С. Еримбетова[1,3,b], С.К. Сагнаева[4,c],
Т.В. Батура[1,2,d], Д.Ф. Семич[2,e], А.М. Бакиева[1,f]

[1]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия*

[2]*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия*

[3]*Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М.Тынышпаева, ул. Шевченко, 97, Алматы, 050012, Казахстан*

[4]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан*

E-mail: [a]*murzin@iis.nsk.su*, [b]*aigerian@mail.ru*, [c]*sagnayeva_tar@mail.ru*,
[d]*tatiana.v.batura@gmail.com*, [e]*deiman32@ngs.ru*, [f]*m_aigerim0707@mail.ru*

Для эффективного принятия решений относительно выбора и развития новых научных направлений исследований и разработок современных технологий, а также принятия управленческих решений, необходимо наличие достаточного объёма данных и знаний, касающихся решаемых проблем. При этом в качестве источника актуальной информации часто используется сеть Интернет, роль которой в современном обществе неуклонно возрастает.

Однако, характеризуясь наличием огромного объёма данных и знаний по любым предметным областям, Интернет, в то же время, содержит не меньший объём неактуальной информации и «информационного шума». Отсюда возникает задача определения релевантности текста поисковому запросу. Релевантность – это фундаментальное понятие теории информационного поиска, и в настоящее время задача определения релевантности не нашла окончательного решения.

Целью данной работы является разработка алгоритмов поиска, основанных на контексте поискового запроса и анализе его синтаксической структуры, оценки релевантности текста поисковому запросу, а также разработка методов, позволяющих определять темы текстов. Предложенные алгоритмы основываются на использовании диаграмм связей, создаваемых программным приложением Link Grammar Parser (LGP) [1].

Разрабатываемые методы позволяют сопоставлять конструкции естественного языка и в ряде случаев отождествлять даже перефразированные варианты предложений, основываясь на анализе их синтаксических структур (на основе диаграмм LGP). Таким образом, можно сопоставить поисковый запрос и текст, взятый из сети Интернет или других источников, с целью определения релевантности (соответствия) текста поисковому запросу.

Одна из часто возникающих проблем при анализе текстов на естественном языке состоит в том, что перестановка слов в предложении может существенно менять его смысл. Это приводит к некорректной работе алгоритмов, оперирующих отдельными ключевыми словами, их частотами и т. д. В работах Нираджа Кумара предложен некоторый подход, позволяющий учитывать порядок слов [2]. Авторами предложено обобщение данного подхода, базирующееся на использовании синтаксических отношений между словами, возникающих на выходе системы LGP, что существенно повышает качество работы алгоритмов поиска. Это является важным и для развития теоретических исследований в области компьютерной лингвистики.

Теоретические исследования и реализуемые программные компоненты ориентированы на обработку текстов на нескольких языках: русском, английском, казахском, узбекском (в двух вариантах – на кириллице и на латинице) и турецком. Очевидно, что кроме прикладных аспектов, данная разработка позволит внести вклад в исследование тюркских языков с точки зрения их изучения формальными методами и развития компьютерных алгоритмов обработки текстов на этих языках [3].

В процессе работы используются:

– понятия и методы из классической и математической лингвистики;

– методы математической логики;

– различные программные инструменты и системы: синтаксические и морфологические анализаторы, стимеры, программы кластеризации и визуализации, базы данных;

– другие методы, относящиеся к информационным технологиям и используемые при обработке текстов на естественном языке.

В итоге, были получены следующие результаты:

1. Разработаны новые алгоритмы информационного поиска с учетом синтаксиса и элементов семантики, в том числе, для тюркоязычных текстов, позволяющих информационно-поисковым системам (ИПС) сопоставлять конструкции естественного языка и в ряде случаев отождествлять даже перефразированные варианты предложений.

2. Разработан метод, позволяющий определять темы текстов (обобщение алгоритма Нираджа Кумара). При этом алгоритмы основываются на использовании диаграмм связей, создаваемых программным приложением LGP.

3. Разработан программный инструментарий для анализа текстов на естественном языке, включающий различные алгоритмы: определения степени близости предложений, построения графов по предложениям, вычисления весов слов, центральностей и других характеристик.

4. Разработана версия системы LGP, ориентированная на тюркские языки (казахский, турецкий, узбекский).

Список литературы

[1] D. Sleator, D. Temperley *Parsing English with a Link Grammar* // Pittsburgh: School of Computer Science Carnegie Mellon University, –93 (1991).

[2] N. Kumar, K. Srinathan, V. Varma *Using graph based mapping of co-occurring words and closeness centrality score for summarization evaluation* // CICLing Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Text Processing, Vol.2, 353–365 (2012).

[3] T.V. Batura, F.A. Murzin, A.M. Bakiyeva, S.Zh. Tazhibayeva, A.S. Yerimbetova, S.K. Sagnayeva *Link Grammar Parser for turkic languages and algorithms for estimation the relevance* // The 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies(AICT2016), Baku: Azerbaijan, 104–107 (2016).

— ⁂ —

ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ЛОГ-НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ

ОЛЬГА СОБОЛЕВА

Новосибирский технический университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики, Новосибирский государственный университет, ул.Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: olgasob@gmail.com

Полномасштабное численное моделирование процесса распространения сейсмических волн в средах, включающих мелкомасштабные неоднородности, является задачей представляющей большой научный и практический интерес. Такие задачи возникают при исследовании подземных ядерных взрывов, землетрясений, геодинамики и поиска коллекторов в рудной и нефтегазовой геологии. При численном моделировании крупные неоднородные включения в среде учитываются в математической модели непосредственно с помощью граничных условий. Расчеты с учетом всех масштабов вариаций физических параметров требуют громадных вычислительных затрат. Чтобы решить эту проблему при

Работа поддежана Российским фондом фунтаметальных исследований 15-01-01458.

теоретическом и численном моделировании неупорядоченных сред используют асимптотические методы и эффективные коэффициенты. Задачи построения эффективных коэффициентов для слоистой среды рассматривались в работах [1], [2]. Для построения эффективного решения в детерминированной среде параметры которой являются пределом периодической функции использовались методы гомогенизации. Методы гомогенизации в детерминированных непериодических средах с двумя масштабами неоднородностей для двумерной задачи SH волн, а затем для P и SV волн рассматривались в работах [3], [4]. Геофизическая, среда, как правило, является многомасштабной, к тому же координаты мелкомасштабных неоднородностей точно неизвестны. Поэтому часто среда описывается статистическими полями. Лабораторные исследования кернов и полевые измерения показали, что в природных средах увеличивается разброс по величине параметров среды и уменьшается корреляционная длина, если масштаб измерений уменьшается [5], [6]. Такие геофизические неупорядоченные среды хорошо описываются мультипликативными иерархическими каскадами с негауссовским распределением вероятностей и фрактальными моделями [6], [7]. Этот факт позволяет для построения среднего решения в крупномасштабном пределе применять метод подсеточного моделирования [8]. Строится более простая модель, требующая меньшего количества вычислительных затрат, правильно описывающая поведение решения в крупномасштабном пределе. В настоящей работе с помощью метода подсеточного моделирования получены такие уравнения для эффективных коэффициентов в уравнении акустики и двумерной системе уравнений теории упругости, если параметры аппроксимируются непрерывными мультипликативными каскадами с логарифмически нормальным распределением в изотропной среде. Предполагается, что длина волны много больше максимального масштаба неоднородностей среды. Волны возбуждаются источником с доминантной частотой ω_0 и соответствующей этой доминантной частоте шириной спектара ω_1. Полученные теоретические результаты сравниваются с результатами прямого численного моделирования.

Список литературы

[1] G. Backus, *Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering* // Journal Geophysical Research, **67**:11, 4427-4440 (1962).

[2] Л.А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред* // Јатематические вопросы теории распространения волн: Зап. научн. сем. ЛОМИ , №89, 219-233 (1979).

[3] L. Guillot, Y. Capdevile and J.J. Marigo *2-D non periodic homogenization for the SH wave equation* // Geophysical Journal International, **182**, 1438-1454 (2010).

[4] Y. Capdeville, J.J. Marigo *A non-periodic two scale asymptotic method t o take account of rough topographies for 2-D elastic wave propagation* // Geophysical Journal International, **192**, 163–189 (2013).

[5] M. Sahimi and S.E. Tajer *Self-affine fractal distributions of bulk density, elastic moduli and seismic wave velocities of rock* // Physical Rewiew E. , **71**, 046301 (2005).

[6] F.J. Molz, and G. Boman, *Further evidence of fractal structure in hydraulic conductivity distributions,* // Geophys. Res. Lett. **22**, 2545-2548, (1995).

[7] Z. Koohi lai , S. Vasheghani Farahani , G.R. Jafari *Non-Gaussianity effect of petrophysical quantities by using q-entropy and multi fractal random walk* // Physica A:Statistical Mechanics and its Applications. **392** Issue 20, 5132-5137, (2013).

[8] Г.А. Кузьмин, О.Н. Соболева *Подсеточное моделирование фильтрации в пористых автомодельных средах*// ПМТФ., **43**:4, 115–126 (2002).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ПОЛНОТА СЛОВОИЗМЕНИТЕЛЬНЫХ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРАВИЛ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА ДЛЯ КАЗАХСКОГО ЯЗЫКА

УАЛШЕР ТУКЕЕВ

Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, пр. Ал-Фараби 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: ualsher.tukeyev@kaznu.kz

В работе выводится полная система словоизменительных морфологических правил машинного перевода для казахского языка, основанная на полной системе семантически допустимых словоизменительных окончаний казахского языка [1].

Система окончаний слов казахского языка состоит двух классов: окончания к именным основам (существительные, прилагательные, числительные) и окончания к глагольным основам (глаголы, причастия, деепричастия, наклонения, залоги). В работе [3] впервые было рассмотрено построение множества окончаний казахского языка и возможность его использования для эффективного обучению казахскому языку.

Рассмотрим вывод системы окончаний казахского языка к именным основам. Система окончаний к именным основам слов казахского языка имеет четыре типа: окончания множественного числа (обозначим через K), притяжательные окончания (обозначим через

Грант МОН РК 0749/ГФ4.

T), падежные окончания (обозначим через C), личные окончания (обозначим через J). Основу(stem) обозначим через S.

Рассмотрим всевозможные варианты размещений типов окончаний: из одного типа, из двух типов, из трех типов и из четырех типов. Число размещений определяется формулой:

$$A_n^k = n!/(n-k)!.$$

Тогда, количество размещений будет определяться следующим образом:

$$A_4^1 = 4!/(4-1)! = 4,\ A_4^2 = 4!/(4-2)! = 12,\ A_4^3 = 4!/(4-3)! = 24,\ A_4^4 = 4!/(4-4)! = 24.$$

Всего возможных размещений 64.

Рассмотрены какие из них семантически допустимы. Размещения по одному типу окончания (, T, C, J) являются все семантически допустимыми по определению.

Размещения по два типа окончаний могут быть следующие:

$$\mathbf{KT}, \mathbf{TC}, \mathbf{CJ}, JK,\ \mathbf{KC}, \mathbf{TJ},\ CT,\ JT,\ \mathbf{KJ},\ TK,\ CK,\ JC.$$

Анализ семантики размещений двух типов окончаний показывает, что выделенные жирным шрифтом размещения являются допустимыми (**KT**, **TC**, **CJ**, **KC**, **TJ**, **KJ**), а остальные размещения относим к недопустимым. Например, – после притяжательных окончаний окончания множественного числа не используются, CK – после падежных окончаний не принято ставить окончание множественного числа, JC- после личных окончаний не принято ставить падежные окончания, – после падежных окончаний не ставятся притяжательные окончания, JT- после личных окончаний не ставятся притяжательные окончания. К недопустимым отнесены и размещения типа JK, так как этот тип размещения покрывается окончаниями множественного числа личных окончаний. Тогда, количество допустимых (правильных) размещений из двух типов окончаний будет равно 6.

Для размещений из трех и четырех типов окончаний определение допустимых размещений окончаний делается по правилу: *если в размещении есть недопустимые размещения из двух типов, то это размещение – недопустимо.*

Тогда, допустимых размещений окончаний из трех типов будет 4: (**KTC**, **KTJ**, **TCJ**, **KCJ**) и допустимых размещений окончаний из четырех типов будет 1: (**KTCJ**).

Итого, допустимых размещений из одного типа - 4, из двух типов - 6, из трех типов - 4, из четырех типов - 1. Итак, суммарное число типов допустимых размещений в словах с именными основами - 15.

Рассмотрим вывод системы окончаний казахского языка к глагольным основам. Система окончаний казахского языка к глагольным основам включает следующие виды:

система окончаний глаголов; система окончаний причастий; система окончаний деепричастий; система окончаний наклонений; система окончаний залогов. Система окончаний к глагольным основам (глаголы) включают следующие типы: времена (8 времен), лицо (3 вида), отрицание. Тогда, количество возможных типов окончаний глаголов будет - 25. Система окончаний к глагольным основам причастия включают следующие типы: окончания причастия (обозначим R), окончания множественного числа (), окончания притяжательные (), окончания притяжательные (), падежные окончания (), личные окончания (J). Выведены возможные семантически допустимые варианты типов окончаний причастий – 11, деепричастий – 1, наклонений – 6 и залогов – 8. Общее количество типов окончаний слов с глагольными основами получилось – 51.

Итого, общее количество окончаний с именными основами плюс общее количество типов окончаний слов с глагольными основами будет равно 66.

По данным типам окончаний построены конечные множества окончаний для всех основных частей речи казахского языка. Так, для частей речи с именными основами количество окончаний равно 1213(учтены все варианты множественного числа), а количество окончаний частей речи с глагольными основами составляет: глаголы – 432, причастия – 1582, деепричастия – 48, наклонения – 240, залоги – 80. Итого, 3565 всего окончаний.

Утверждение 1. Выведенная система типов окончаний казахского языка является полной.

Доказательство данного утверждения основана на схеме вывода, основанной на рассмотрении всевозможных вариантов размещений базовой системы типов окончаний казахского языка и вывода множества типов окончаний семантически допустимых, представленной выше.

Схема вывода словоизменительных морфологических правил правил машинного перевода для казахского языка основывается на следующем: - исходным является полное множество типов окончаний казахского языка; - для каждого типа окончания (шаблона морфологической структуры типа окончания) казахского языка определяется эквивалентная грамматическая структура (логический шаблон) на целевом языке (для примера: русский или английский языки).

Утверждение 2. Система правил машинного перевода морфологических структур слов казахского языка в эквивалентные грамматические структуры целевого языка на основе полной системы окончаний казахского языка являются полной. Доказательство полноты выведенной системы правил машинного перевода морфологических структур слов казахского языка в эквивалентные грамматические структуры целевого языка основывается полнотой множества типов окончаний казахского языка (Утверждение 1) и построением для каждого типа окончания соответствующего правила машинного перевода. На основе полных систем словоизменителных морфологических правил машинного перевода казахского языка возможно построение программных структур правил машинного перевода для языковых пар, например, казахско-английской пары или казахско-русской пары.

Список литературы

[1] U. Tukeyev, *Automaton models of the morphology analysis and the completeness of the endings of the Kazakh language* // Proceedings of the international conference "Turkic languages processing" TURKLANG-2015 September 17-19, Kazan, Tatarstan, Russia, pp.91–100 (2015).

[2] К. Бектаев, А. Ахабаев, Е. Керимбаев, К. Молдабеков, *Краткий казахско-русский словаръ. Приложение 1- Список окончаний казахского языка.* // Алма-Ата: Главная редакция Казахской советской энциклопедии, 2001.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ С ПУЛЬСИРУЮЩИМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Худаяров Б.А.[a], Тураев Ф.[b]

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства
ул.К.Ниязий, 39, Ташкент, 100000, Узбекистан
E-mail: [a]bakht-flpo@yandex.ru, [b]t.fozil86@mail.ru

Вибрация трубопроводов является фактором, оказывающим существенное влияние на надёжность, долговечность, производительность и другие параметры при эксплуатации энергетических и технологических установок и присоединённых механических систем. Её воздействие может вызвать целый ряд негативных последствий: разрушение самих трубопроводов, соединений трубопроводов с другими агрегатами, нарушение герметичности уплотнений и т.д. [1,2]. Следует отметить, что аварии, связанные с разрушением трубопроводов энергетических и технологических установок, имеют тенденции к росту и вызывает другие опасные последствия, например, пожары, аварийные разливы технологических, горючих, экологически опасных жидкостей [3, 4]. Таким образом, необходимо проведение специальных исследований для решения задачи снижения вибрации трубопроводных систем [5].

Целью данный работы является разработка математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о нелинейных параметрических колебаниях вязкоупругих тонкостенных трубопроводов большого диаметра на базе теории оболочек [6, 7].

Рассмотрим поведение трубопровода типа цилиндрической оболочки, внутри которой протекает пульсирующая жидкость. Скорость жидкости изменяется по закону

$$U(t) = U_0(1 + \mu_1 cos\gamma_1 t).$$

Уравнения движения вязкоупругой оболочки в перемещениях запишется в виде:

$$\begin{gathered}(1-R^*)\Big\{\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tfrac{1-\mu}{2R^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \tfrac{1+\mu}{2R}\tfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial \theta} + L_1(w)\Big\} - \rho\tfrac{1-\mu^2}{E}\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\\ (1-R^*)\left\{\tfrac{1}{R^2}\tfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \tfrac{1-\mu}{2}\tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tfrac{1+\mu}{2R}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial \theta} + L_2(w)\right\} - \rho\tfrac{1-\mu^2}{E}\tfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,\\ D(1-R^*)\nabla^4 w + L_3^*(u,v,w) + \rho h\tfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q,\end{gathered} \tag{3.14}$$

где D– цилиндрическая жесткость трубы, μ – коэффициент Пуассона материала трубы, E - модуль упругости материала трубы, ρ- его плотность; $R-$радиус кривизны срединной поверхности; h – радиус кривизны срединной поверхности; h– толщина стенки трубы; μ_1- параметр возбуждения, γ_1 - частота возбуждения; R^*– интегральный оператор вида: $R^*\phi(t) = \int\limits_0^t R(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$ –ядро релаксации; операторы $L_1(w)$, $L_2(w)$, $L_3^*(u,v,\ w)$ будут такими:

$$\begin{gathered}L_1(w) = -\tfrac{\mu}{R}\tfrac{\partial w}{\partial x} + \tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1+\mu}{2R^2}\tfrac{\partial w}{\partial \theta}\tfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta} + \tfrac{1-\mu}{2R^2}\tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\ ,\\ L_2(w) = -\tfrac{1}{R^2}\tfrac{\partial w}{\partial x} + \tfrac{\partial w}{\partial \theta}\tfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \tfrac{1+\mu}{2R}\tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta} + \tfrac{1-\mu}{2R}\tfrac{\partial w}{\partial \theta}\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}L_3^*(u,v,\ w) = (1-R^*)\tfrac{Eh}{1-\mu^2}\Big\{-\tfrac{\mu}{R}\tfrac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{1}{R^2}\tfrac{\partial v}{\partial \theta} + \tfrac{w}{R^2} - \tfrac{\mu}{2R}\left(\tfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 -\\ -\tfrac{1}{R^3}\left(\tfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\Big\} - \tfrac{Eh}{1-\mu^2}\tfrac{\partial}{\partial x}\Big\{\tfrac{\partial w}{\partial x}(1-R^*)\left[\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\mu}{R}\tfrac{\partial v}{\partial \theta} - \tfrac{\mu w}{R}\right] +\end{gathered}$$

$$+\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial \theta}(1-R^*)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big\} -$$

$$\begin{gathered}-\tfrac{Eh}{1-\mu^2}\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial \theta}\Big\{\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial w}{\partial \theta}(1-R^*)\left[\mu\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial v}{\partial \theta} - \tfrac{w}{R}\right] +\\ + \tfrac{(1-\mu)}{2}\tfrac{\partial w}{\partial x}(1-R^*)\left(\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial u}{\partial \theta} + \tfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Big\}\ ,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\tfrac{Eh}{1-\mu^2}\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial}{\partial \theta}\left\{\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial w}{\partial \theta}(1-R^*)\left[\mu\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{R}\tfrac{\partial v}{\partial \theta} - \tfrac{w}{R}\right] +\right.\\ \left. + \tfrac{(1-\mu)}{2}\tfrac{\partial w}{\partial x}(1-R^*)\left(\tfrac{1}{R}\tfrac{\partial u}{\partial \theta} + \tfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},\end{gathered}$$

q- давление жидкости на стенку трубопровода:

$$q = -\phi_{\alpha m}^*\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U_0^2(1 + \mu_1 cos\gamma_1 t)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\ ,$$

где $-\phi_{\alpha m}^*\rho$ присоединенная масса жидкости; m – число волн, образующихся по окружности, α – волновой число или постоянной распространения фазы.

Решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) в частных производных (1) при различных граничных условиях и при наличии сингулярных ядер наследственности представляет собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным и получение системы разрешающих нелинейных ИДУ относительно функций времени. Будем искать приближенное решение системы (1) в виде:

$$u(x,\theta,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}(t)\,cos\frac{n\pi x}{L}sinm\theta,$$

$$v(x,\theta,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}(t)\,sin\frac{n\pi x}{L}cosm\theta,\quad w(x,\theta,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{nm}(t)\,sin\frac{n\pi x}{L}sinm\theta, \qquad (3.15)$$

где $u_{nm}(t)$, $v_{nm}(t)$, $w_{nm}(t)$ - неизвестные функции времени. Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова - Галёркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_{kl}+(1-R^*)\left(k^2\pi^2\delta^2\gamma^2+\frac{1-\mu}{2}l^2\delta^2\right)u_{kl}-\frac{1-\mu}{2}kl\pi\gamma\delta^2v_{kl}+$$
$$\left.\begin{array}{l}+\mu\delta^2\gamma^2k\pi w_{kl}+\sum\limits_{n,i=1m,}^{N}\sum\limits_{r=1}^{M}\left(\frac{ni^2\pi^2}{2}\gamma^3\delta+\frac{1-\mu}{2}\frac{nr^2}{2}\gamma\delta\right)\overline{\Delta}_{1klnmir}w_{nm}w_{ir}-\\ -\frac{1+\mu}{2}\sum\limits_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum\limits^{M}\frac{imr}{2}\gamma\delta\overline{\Delta}_{2klnmir}w_{nm}w_{ir}\end{array}\right\}=0\ ,$$

$$v_{kl}+(1-R^*)\left[\tfrac{1-\mu}{2}k^2\pi^2\delta^2\gamma^2+l^2\delta^2\right]v_{kl}-\tfrac{1+\mu}{2}kl\pi\gamma\delta^2u_{kl}-l\delta^2w_{kl}-$$
$$-\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}\tfrac{mr^2}{2\pi}\delta\overline{\Delta}_{3klnmir}w_{nm}w_{ir}+\tfrac{1+\mu}{2}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}\tfrac{inr\pi}{2}\gamma^2\delta\overline{\Delta}_{4klnmir}w_{nm}w_{ir}-$$
$$\left.-\tfrac{1-\mu}{2}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}\tfrac{i^2m\pi}{2}\gamma^2\delta\overline{\Delta}_{3klnmir}w_{nm}w_{ir}\right\}=0\ ,$$

$$(1+\phi^*_{\alpha l})\overset{\Xi}{w}_{kl}+(1-R^*)\left\{\left(\tfrac{1}{12}[k^2\pi^2\gamma^2+l^2]^2+\delta^2\right)w_{kl}+\pi\mu\gamma\delta^2ku_{kl}-\right\}$$
$$\left.-l\delta^2v_{kl}-\tfrac{\delta}{4\pi}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}mr\overline{\Delta}_{5klnmir}w_{nm}w_{ir}-\tfrac{\pi\mu\gamma^2\delta}{4}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}ni\overline{\Delta}_{6klnmir}w_{nm}w_{ir}\right\}+$$
$$+\tfrac{1-\mu}{4}\gamma\delta\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}w_{nm}n(1-R^*)\left[\gamma\pi irv_{ir}-r^2u_{ir}\right]\overline{\Delta}_{6klnmir}+$$
$$+\tfrac{\delta}{2}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}mw_{nm}(1-R^*)\left[ir\mu\gamma u_{ir}-\tfrac{r^2}{\pi}v_{ir}+\tfrac{r}{\pi}w_{ir}\right]\overline{\Delta}_{5klnmir}+$$
$$+\tfrac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}mw_{nm}(1-R^*)\left[ir\gamma u_{ir}-\gamma^2i^2\pi v_{ir}\right]\overline{\Delta}_{5klnmir}-$$
$$-\tfrac{\delta}{2}\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}nw_{nm}(1-R^*)\left[ir\mu\gamma^2\pi v_{ir}-i^2\gamma^3\pi^2u_{ir}-\mu\pi i\gamma^2w_{ir}\right]\overline{\Delta}_{6klnmir}-$$
$$-\tfrac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}nmw_{nm}(1-R^*)\left[r\gamma u_{ir}-i\gamma^2\pi v_{ir}\right]\overline{\Delta}_{7klnmir}-$$
$$-\sum_{n,i=1m,r=1}^{N}\sum^{M}m^2w_{nm}(1-R^*)\left[i\mu\gamma u_{ir}-\tfrac{r}{\pi}v_{ir}+\tfrac{1}{\pi}w_{ir}\right]\tfrac{\delta}{2}\overline{\Delta}_{8klnmir}-$$

$$-\frac{1-\mu}{4}\delta\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}nmw_{nm}\left(1-R^{*}\right)\left[r\gamma u_{ir}-i\gamma^{2}\pi v_{ir}\right]\overline{\Delta}_{7klnmir}-$$

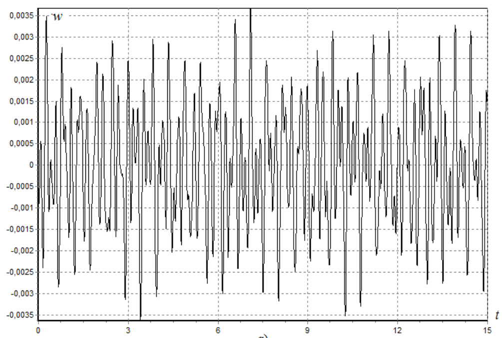
$$-\tfrac{\delta}{2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,r=1}^{M}n^{2}w_{nm}\left(1-R^{*}\right)\left[i\gamma^{3}\pi^{2}u_{ir}-\mu r\gamma^{2}\pi v_{ir}+\mu\gamma^{2}\pi w_{ir}\right]\overrightarrow{\Delta}_{8klnmir}- \tag{3.16}$$
$$-\delta^{2}M^{*^{2}}(1+\mu_{1}cos\gamma_{1}t)\gamma^{2}M_{E}^{2}k^{2}\pi^{2}w_{kl}=0.$$

$$u_{nm}\left(0\right)=u_{0nm},\quad \dot{u}_{\rm nm}(0)=\dot{u}_{0nm},\quad v_{nm}\left(0\right)=v_{0nm},$$

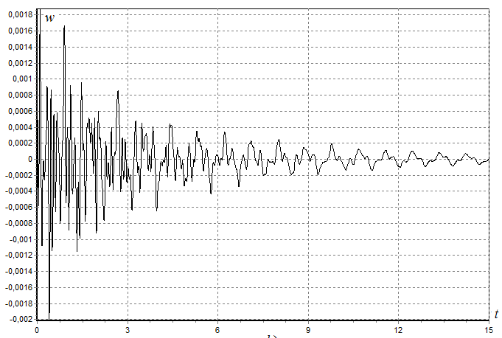
$$\dot{v}_{nm}(0)=\dot{v}_{0nm},\quad w_{nm}\left(0\right)=w_{0nm},\quad \dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm}.$$

Здесь $\delta=\frac{R}{h}$, $\gamma=\frac{R}{L}$, $M^{*}=\frac{U}{V_{\infty}}$, $M_{E}=\sqrt{\frac{E}{\rho V_{\infty}^{2}}}$, V_{∞}скорость звука, $\overline{\Delta}_{1k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{2k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{3k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{4k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{5k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{6k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{7k\ln mir}$, $\overline{\Delta}_{8k\ln mir}$ - безразмерные коэффициенты.

Решение ИДУ (3) находиться численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [8, 9]. Результаты вычислений, отражается графиками, приведенными на рис. 1, 2.

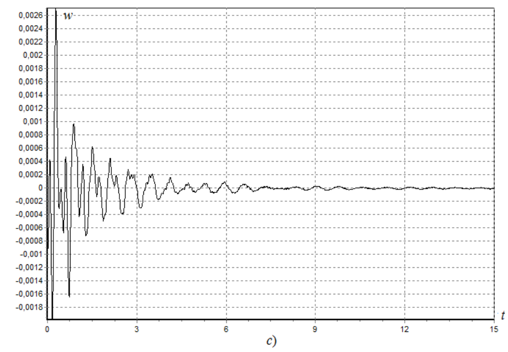


a)



b)

Рис. 1. Зависимости прогиба от времени при $A=0(a)$; $A=0,05(b)$; $A=0,1(c)$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,005$; $\gamma=0,2$; $\delta=12$; N=5; M=2.



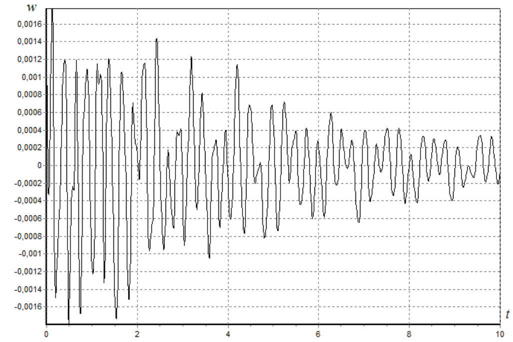


Рис. 1: a)

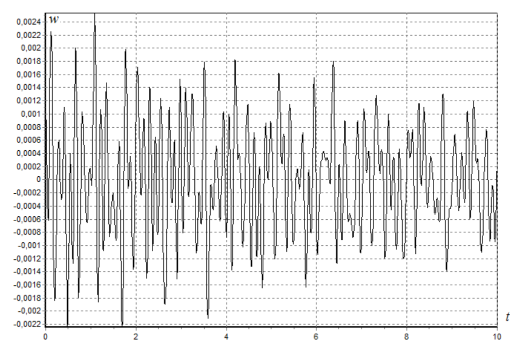


Рис. 2: b)

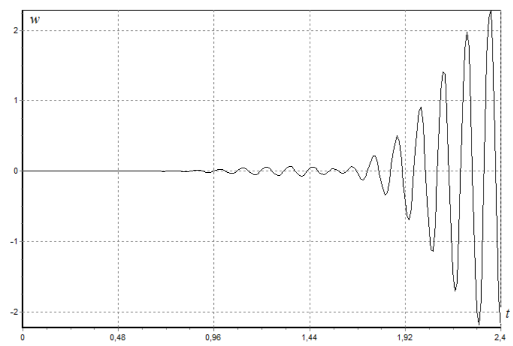


Рис. 3: c)

Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при $\gamma_1 = 75$ Гц(a), $\gamma_1 = 150$ Гц(b), $\gamma_1 = 250$ Гц(c); $A = 0,01$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,005$; $\delta = 10$; N=5; M=2.

На рис. 1 сопоставлены кривые изменения во времени перемещений w срединной точки упругой (A=0 - кривая a) и вязкоупругой трубопроводов типа цилиндрических оболочек (A=0,05; 0.1 - кривые b, c). Как видно из рисунка, учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к затуханию колебательного процесса, при этом, хотя решение упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние на решение. Аналогичная картина наблюдаются и при исследовании изменений функций u и v.

Влияние параметра γ_1 на колебательный процесс показано на рис.2. Из рисунка видно, что увеличение значения параметра возбуждения приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний.

Необходимо отметить, что алгоритм предлагаемого метода позволяет детально исследовать влияние геометрических нелинейностей и вязкоупругих свойств материала конструкций на колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов, в частности, при исследовании свободных и параметрических колебаний трубопроводов на базе теории идеально-упругих оболочек.

Список литературы

[1] Шорин В.П. , *Устранение колебаний в авиационных трубопроводах.* // М.: Машиностроение. 1980.

[2] Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В. *Моделирование виброакустических процессов в трубопроводных системах.*// Самара. Изд-во САГУ, 2008.

[3] Васильев А.В., Кипуров О.В., Васильев Е.В. [и др.]. *Вибрация трубопроводных систем энергетических установок как фактор экологического риска и подходы к ее снижению* // ELIT 2011. Сб.тр.III Международного экологического конгресса. - Тольятти: ТГУ. 2011. Т.6. Ч.1. - С.99-104.

[4] Белов И.А. *О влиянии скорости жидкости на динамику прямого трубопровода*// Вестник ИГЭУ. Вып. 2. 2007. - С.1-3.

[5] Миронова Т.Б., Прокофьев А.Б., *Шорин В.П. Методики конечно-элементного моделирования виброакустических характеристик трубопроводов с пульсирующим потоком жидкости* // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. №1(32). 2012. - С.135-140.

[6] Вольмир А.С. *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости.* // М.: Наука. 1979. - 320 с.

[7] Григолюк Э.И., Мамай В.И. *Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций.* // М.: Наука. Физматлит, 1997. - 272 с.

[8] Бадалов Ф.Б. *Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости.* // Ташкент: Мехнат, 1987. - 269 с.

[9] Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. *О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости* // Прикладная математика и механика. - 1987. - Т. 51. - №5. - С. 867-871.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕНЫ НА НЕФТЬ

КАНАТ ШАКЕНОВ, РОЗА ШАКЕНОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, проспект аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

E-mail: shakenov2000@mail.ru

Постановка задачи прогноза. Прогнозирование. Предположим, что стационарный в широком смысле процесс $\{x(t),\, t \in T\}$ наблюдается в моменты времени $t \in T_0$, где $T_0 = \{t \in T : t \leq t_0\}$ либо $T_0 = \{t \in T : t_0 - h \leq t \leq t_0\}, h > 0$. Требуется на основе этих наблюдений дать наилучший среднеквадратичный прогноз этого процесса в некоторый будущий момент $t^* = t_0 + \tau$ $(\tau > 0)$, то есть требуется найти такой функционал $y(t^*) = g_{t^*}\big(x(t),\ t \in T_0\big)$ от значений процесса $x(t)$ в моменты $t \in T_0$, чтобы $\mathbf{E}\|x(t^*) - y(t^*)\|^2 \leq \mathbf{E}\|x(t^*) - y_1(t^*)\|^2$, где $y_1(t^*)$ – любой другой функционал от значений процесса $x(t)$ в моменты $t \in T_0$. Пусть теперь $x(t),\ t = ..., -1, 0, 1, ...$ – произвольный вещественный стационарный процесс с $\mathbf{E}\big(x(t)\big) = 0$ и функцией ковариаций $\gamma(h)$. Для такого процесса $\gamma(-h) = \gamma(h)$. Теперь для этого случая определим функцию ковариаций $\gamma(h)$. Сначала, для любого целого M, определим спектральную функцию стационарного процесса $F(\omega)$ на $[-\pi,\ +\pi]$ следующим образом: $F(\omega) = \lim\limits_{M\to\infty} F_M(\omega)$, где

$$F_M(\omega) = \frac{1}{\pi M}\left(\sum_{p\neq q=1}^{M} \gamma(p-q)\left(\frac{\sin((p+q)\omega)}{2(p+q)} + \frac{\sin((p-q)\omega)}{2(p-q)}\right) + \gamma(0)\sum_{p=1}^{M}\frac{\sin(p\omega)\cos(p\omega)}{2p} + \frac{\gamma(0)M}{2}(\omega+\pi)\right).$$

Отсюда $\gamma(h) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(h\omega) dF(\omega)$. $F(\omega)$ называется спектральной функцией стационарного процесса $x(t)$. Если $F(\omega)$ абсолютно непрерывна и $f(\omega)$ – её производная, то $f(\omega)$ называют спектральной плотностью процесса. Оценка спектральной функции. Пусть стационарный процесс $x(t),\ t = ..., -1, 0, 1, ...,$ имеет среднее (математическое ожидание) μ и спектральную плотность $f(\omega)$ (неизвестна). Рассмотрим задачу оценивания $f(\omega)$ по выборке $x(1), \ldots, x(n)$ считая μ известным. Решение. $f_n(\omega) = \dfrac{1}{n\pi}\Big(y(1)\cos(\omega) + \cdots + y(n)\cos(n\omega)\Big)^2$, где $y(t) = x(t) - \mu$. $f_n(\omega)$ оказывается асимптотически несмещенной оценкой $f(\omega)$ для $[-\pi, +\pi]$, $\omega \neq 0$.

Линейное прогнозирование стационарных процессов. Пусть нам известны значения процесса $\{x(t)\}$ в моменты $t = \ldots, -2, -1, 0$, и мы хотим предсказать $x(1)$ с помощью линейной комбинации значений $\ldots, x(-2), x(-1), x(0)$, воспользовавшись методом наименьших квадратов. Постановка задачи. При каких условиях на процесс среднее значение квадрата ошибки предиктора (прогноза) положительно и при каких условиях оно равно нулю? Ответ на этот вопрос был дан А.Н. Колмогоровым в 1941 году, [1], и, Н. Винером в 1949 году, [2]. Решение. Обозначим через $\overline{x}_n(1)$ предиктор для $x(1)$, построенный по $x(-n), \ldots, x(-1), x(0)$. Тогда $\overline{x}_n(1) = \sum\limits_{i=-n}^{0} \overline{a}_{in} x(i)$, где коэффициенты $\overline{a}_{in}$, $i = -n, \ldots, -1, 0$, минимизируют относительно a_{in} выражение $\mathbf{E}\Big(x(1) - \sum\limits_{i=-n}^{0} a_{in} x(i)\Big)^2 \to \min$. Отсюда находим, что $\overline{a}_{in} = \sum\limits_{j=-n}^{0} \sigma^{ij}\gamma(j-1)$, где $[\sigma^{ij}] = [\sigma_{ij}]^{-1}$ и $[\sigma_{ij}]$ – матрица размера $(n+1)\times(n+1)$ образованная числами $\gamma(h) = \gamma(-h) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(h\omega) f(\omega) d\omega$.

Пусть теперь $x(t),\ t = ..., -1, 0, 1, ...$ – стационарный процесс, спектральная плотность которого равна $f(\omega) = \dfrac{1}{\pi^2}\big(\pi - |\omega|\big)$, $-\pi \le \omega \le +\pi$. Тогда функция ковариаций имеет вид $\gamma(h) = 1,\ h = 0$, $\gamma(h) = \Big(\dfrac{2}{\pi h}\Big)^2$, если h нечетно, $\gamma(h) = 0$, если h четно. Решение. Оценим $f(\omega)$ по выборке $\{x(1), \ldots, x(n)\}$. Она имеет вид $f_n(\omega) = \dfrac{1}{n\pi}\Big(y(1)\cos(\omega) + \cdots + y(n)\cos(n\omega)\Big)^2$, где $y(t) = x(t) - \mu$. Далее, по выборке $\{x(1), \ldots, x(n)\}$ оценим среднее (математическое ожидание) μ, то есть $\mu = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x(i)$, определим $f_n(\omega)$. Заменяем $f(\omega)$ на $f_n(\omega)$ и вычислим по формуле $\gamma(h) = \gamma(-h) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(h\omega) f_n(\omega) d\omega$. Далее, находим $\overline{a}_{in} = \sum\limits_{j=-n}^{0} \sigma^{ij}\gamma(j-1)$, затем построим предиктор (прогноз), то есть $\overline{x}_n(1) = \sum\limits_{i=-n}^{0} \overline{a}_{in} x(i)$ Задача прогнозирование является стохастической задачей. [3], [4].

Практическое применение. Нами была прогнозирована цена на нефть сорта Brent на Лондонской международной бирже (International Petroleum Exchange, ITE).

Список литературы

[1] А.Н. Колмогоров, *Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве* // Бюллетень Московского университета, **2**:6, 1–40 (1941).

[2] N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series* // New York: John Wiley, 1949.

[3] С. Уилкс, *Математическая статистика* // М.: Наука, 1967.

[4] K. Shakenov, *The Solution of the Inverse Problem of Stochastic Optimal Control* // Rev. Bull. Cal. Math. Soc., **1**:20, 43–50 (2012).

— ⁂ —

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУИ

НУРТОЛЕУ ШАХАН

Институт математики и математического моделирования, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: shakhan-nurtoleu@mail.ru

Перпендикулярный вдув струи в сверхзвуковой воздушный поток является эффективной технологией перемешивания веществ топлива с окислителем в сверхзвуковых камерах сгорания. Вследствие натекания основного потока перед струей образуется головной, косой и замыкающий скачки уплотнения, хорошо описанные в литературе [1, 2]. Однако при вдуве струи в канал головной скачок уплотнения достигает верхней стенки и взаимодействует с пограничным слоем, в результате чего появляется дополнительная система скачков уплотнений. Данное взаимодействие создает положительный градиент давления на верхней стенке, который оказывается достаточным для отрыва пограничного слоя. В соответствии с вышеизложенным взаимодействия сверхзвукового потока с перпендикулярной струей [1, 2] и падающего скачка уплотнения с пограничным слоем [3], как правило, рассматриваются отдельно. В настоящей работе вышеуказанные физические механизмы взаимодействия моделируется в рамках одной проблемы.

Для математического моделирования рассматриваемой проблемы используются осредненные по Фавру двумерные уравнения Навье-Стокса, записанные в безразмерной форме. Замыкание осуществляется с помощью двухпараметрической $k-\omega$ моделью турбулентности. Разработанный численный алгоритм решения уравнений строится на основе

WENO схемы четвертого порядка точности [4]. Дискретизация по времени осуществляется с помощью схемы Бима-Уорминга второго порядка точности. Основное внимание уделяется исследованию взаимодействия ударно-волновой структуры с пограничными слоями на нижней и верхней стенках в условиях внутреннего турбулентного течения, а именно, проведено детальное изучение механизмов взаимодействия, а также условии отрывов и смешения струи и потока в зависимости от параметра нерасчетности (отношение давления струи к давлению потока). В частности выявлено, что рост параметра нерасчетности увеличивает глубину проникновения струи в поток.

Список литературы

[1] V. Viti, R. Neel, J. Schetz, *Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field* // Physics of Fluids, (2009).

[2] A. Beketaeva, A. Naimanova, *Numerical Simulation of a Supersonic Flow with Transverse Injection of Jets* // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, (2004).

[3] V. Pasquariello, M. Grilli, S. Hickel, N.A. Adams, *Large-Eddy Simulation of passive Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction Control* // Journal of Heat and Fluid Flow, (2014).

[4] M. Lagha, X. Zhong, J. Eldredge, J. Kim, *A Hybrid WENO Scheme for Simulation of Shock Wave-Boundary Layer Interaction* // 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition, (2009).

— ⁂ —

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПОТОКА РИЧЧИ НА ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА

АЛЕКСАНДР ШЕВЦОВ, АЙГУЛЬ ЧАНБАЕВА, ЖАНАР КЕУЛИМЖАЕВА

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати, ул. Толе би, 60, Тараз, 080000, Казахстан

E-mail: t-science@mail.ru

В докладе обсуждаются вопросы компьютерного моделирования нормализованного потока Риччи на специальном классе однородных многообразий $SU(3)/T_{\max}$, $Sp(3)/Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(1)$ и $F_4/Spin(8)$, известных как пространства Уоллаха (см. [3] для определений).

Работа выполнена при поддержке гранта 1452/ГФ4 МОН Республики Казахстан.

Написана и отлажена программа на языке Delphi, обеспечивающая визуальную интерпретацию качественного поведения траекторий плоской динамической системы, полученной и изученной в работах [1,2].

Список литературы

[1] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. *The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces*// Differential Geometry and its Applications, **35**, Supplement, (2014), 26–43.

[2] Abiev N.A., Nikonorov Yu.G. *The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow*// Annals of Global Analysis and Geometry, **50**:1 (2016), 65–84.

[3] Wallach N.R., *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*// Annals of Mathematics, **96**:2, (1972), 277–295.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELASTIC HALF-SPACE BY SUBSONIC VELOCOITIES OF TRANSPORT LOADS

LYUDMILA ALEXEYEVA

Institute of mathematics and mathematical modeling , Pushkin street, 125, Almaty 050010, Kazakhstan

E-mail: alexeeva@math.kz

Transport loads are very widespread in practice. As those we understand the moving loads which form doesn't change over time, but their position are changing in the environment. Dynamic deformation processes, which arise in the ground under their influence, expand with different speeds, characterizing elastic properties of the medium. In isotropic elastic medium there are two sound speeds c_1, c_2 of expansion of dilatation waves and shift waves (longitudinal and cross waves, $c_1 > c_2$). The relation of speed of transport load to the sound velocities significantly influences to the stresses and deformations in the elastic medium . We consider here the subsonic case, when speeds of a loads are less then shift waves speed. This case is characteristic for transport tasks as the speed of the movement of the most modern vehicles is many less then the speeds of elastic waves propagation.

From transport loads we especially distinguish stationary ones which move in the fixed direction with a constant speed. This class of loads allows to investigate diffraction processes in isotropic elastic medium in an analytical form. In papers [1-3] the fundamental and generalized solutions of the Lame's equations are constructed and investigated which describe the movement of elastic medium at an action of concentrated on an axis and distributed loading in all range of speeds (subsonic, sound, transonic and supersonic ones). On this basis in [4-7] the method of boundary integral equations has been developed for solving the transport BVP in elastic medium with cylindrical boundaries. This class of problems is very important for applications in the field of dynamics of underground constructions, trans tunnels and excavations of deep laying.

However there is a class of model transport tasks (for example, road problems) when loadings move on the surface of a half-space. It is known that there is also sound speed in an elastic half-space with which superficial Rayleigh waves are propagating. The Rayleigh's speed is less, but is very close to the speed of shift waves [8]. Rayleigh's waves don't create tensions on half-space border, but significantly influence on the tensions and deformations of the massif near a free surface. For the first time such task was considered and solved for a subsonic pre-Ryleigh case by flat deformation in work of J. Cole, J. Huth [9].

Here the first boundary value problem of the theory of elasticity for an elastic half-space at the movement on its surface of subsonic transport load in 3D-space is considered. The speed of motion is less or more than the speed of distribution of elastic Rayleigh waves. On the basis of the generalized Fourier's transformation the fundamental solution of a task is constructed which describes dynamics of the massif at the movement of the concentrated force on and along its surface. Based on this, an analytical solution is constructed for arbitrary transport loads distributed over the surface, moving with the pre- Rayleigh and super-Rayleigh velocities. It is shown that when the Rayleigh wave velocity is exceeded, the transport loads generate surface Rayleigh waves. This task is particular case of the transport problems for elastic half-space which was considered by author in [10] for arbitrary moving mass loads.

This mathematical model gives possibility to determine the stress-strain state and waves dynamics of the massif near road transport.

Список литературы

[1] Zh.S. Erzhanov , Sh.M. Aytaliev , L.A. Alexeyeva , *Dynamics of tunnels and underground pipelines* // Almaty: "Nauka 1989.

[2] L.A. Alekseeva , *Fundamental solutions in an elastic space in the traveling load case* // Applied mathematics and mechanics, **55**:5 (1991), 840–848.

[3] L.A. Alexeyeva , G.K. Kayshibaeva , *Fundamental solutions in an elastic space in the traveling load case. Shock waves* // Computational mathematics and mathematical physics, **56**:7 (2016), 1343-1354.

[4] L.A. Alekseeva , *Somigliana's formulae for solving the elastodynamics equations for traveling loads* // Applied mathematics and mechanics, **58**:1 (1994), 109–116.

[5] L.A. Alekseyeva , *Boundary value problems of elastodynamics under stationary moving forces using boundary integral equation method* // Engineering Analysis with Boundary Element, **22**:11 (1998), 327-331.

[6] L.A. Alexeyeva , *Singular border integral equations of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads* // Differential equations, **46**:4 (2010), 512-519.

[7] L.A. Alexeyeva , *Singular Boundary Integral Equations of Boundary Value Problems of the Elasticity Theory under Supersonic Transport Loads* // Differential equations, **53**:3 (2017), 317-332.

[8] V. Nowazky. , *Theory of elasticy* // Moscow: "Mir 1978.

[9] J. Cole , J. Huth, *Stresses produced in a half plane by moving loads*//Applied Mechanics,**25** (1958), 433–436.

[10] L.A. Alexeyeeva , *Dynamics of elastic half-space by the action of running load* // Applied mathematics and mechanics, **71**:4 (2007), 561-569.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON THE LOW FREQUENCIES OF NATURAL OSCILLATIONS OF A SPECIAL TWO DIMENSIONAL NETWORK OF ELASTIC STRINGS

B.K. KALDYBEKOVA

KBTU, Tole bi st. 59 , 050000, Almaty city Republic of Kazakhstan
E-mail: bekzat_87@inbox.ru

We study the low frequency part of the spectrum of small oscillations of the special two dimensional network of elastic strings. This network consists of a finite number of strings attached to each other as it is shown in the Figure 1.

The natural oscillations of the network could easily be converted into a following Sturm - Liouville problem on graph G (see [1]):

$$u_e'' + \frac{\lambda}{2}\, u_e = 0, \quad e \in E \tag{3.17}$$

$$\sum_{e \succ v} u_e'(v) - hu(v) = 0, \quad v \in V_0 \tag{3.18}$$

$$u_e(v) = u(v), \quad for\ e \succ v, \quad v \in V_0 \tag{3.19}$$

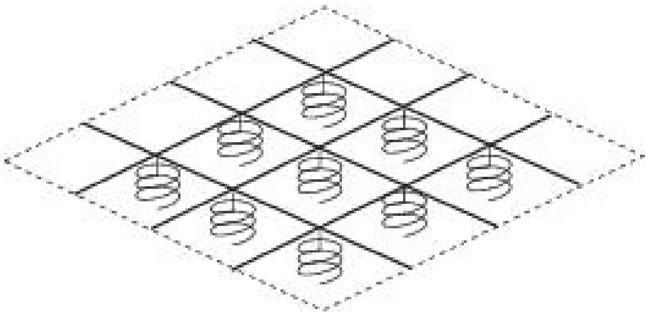


Figure 1 – A grid of strings

$$u(v) = 0, \quad v \in \partial G, \tag{3.20}$$

where, u_e - restriction of the function $u : G \to \mathbb{R}$ on the edge e, $u'_e(v)$ - the derivative in the internal direction of the edge e (from the vertex v into the interior of the edge e), V_0 - the set of internal vertices. In (3.17) a differentiation relates to the natural parameter,here an orientation of the edge does not play any role, because the second derivative is independent on the orientation.

Under natural mechanical assumptions the low frequency part of the spectrum of the network is close to the low frequency part of spectrum of some membrane stretched over the same square:

$$\Delta u - u + \lambda u = 0, \tag{3.21}$$

$$u\Big|_Q = 0, \tag{3.22}$$

where $Q = [0; 1] \times [0; 1]$.

Theorem. Let $\Lambda^h = \{\lambda_1^h, \lambda_2^h, \ldots, \lambda_n^h, \ldots\}$ be a spectrum of the set of all eigenvalues of the problem (3.17)-(3.20), and $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ be a spectrum of the set of eigenvalues of the problem (3.21),(3.22).Then the spectrum Λ^h tends to the spectrum Λ as h approaches 0 in the following sense: for each natural N and a positive ϵ there exist a positive δ, such that for all $h < \delta$ the inequalities $|\lambda_i^h - \lambda_i| < \epsilon$ hold for all $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. (see [2])

Список литературы

[1] O. M. Penkin, V.L. Pryadiev and others. Differential equations on geometric graphs, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow,2005, 272 pp. ISBN: 5-9221-0425-X

— ⁕ ⁕ ⁕ —

INVERSE PROBLEMS OF HEAT AND MASS TRANSFER IN MULTILAYER REGION

Zh.O.KARASHBAYEVA[1] , O. OLZHAYEV[2]

[1]*International Information Technology University, Almaty*

[2]*International Information Technology University, Almaty*

E-mail: [1]*zhanat.k.o.91@gmail.com,* [2]*o.olzhaev@gmail.com*

This works studies a combined movement of heat and moisture in the multilayer region. A mathematical model of the process is described by a system of nonlinear differential equations. Boundary conditions are set as close as possible to the real processes. To carry out numerical calculations, we need original thermal and moisture permeability characteristics of materials. One of the complicated specified parameters of moisture movement is a capillary diffusion coefficient. At the time, Reynolds pointed to the instability of this coefficient with respect to measurement operations. After numerous experiments, Gardner came to the conclusion that the capillary diffusion coefficient depends on the moisture. An approximate method to calculate a sought quantity was developed based on the assumption of linear dependence of the capillary diffusion coefficient from the moisture [1]. Moreover, some of the mathematical properties of developed schemes for calculating the capillary diffusion coefficient were researched. In this paper, using the idea of the work [2], we constructed a system of difference conjugate equations on the difference level and simultaneously obtained iterative schemes to calculate required quantities. In other words, the coefficient inverse problem is solved. Software is developed and numerical calculations are conducted. Calculation results are compared with analogous data of other researchers [3].

Список литературы

[1] B. Rysbaiuly, A. Baimankulov, *Development and justification of the method of calculation the capillary diffusion of the soil* // Wulfenia Journal,// Volume 20,//Issue 12, **483-500** (2014).

[2] A. Hasanov., *Identification of space wise and time dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurement at a final time* // International Journal of Heat and Mass Transfer,//55, **2069-2080** (2012).

[3] M.I. Nizovtsev, A.N. Sterlyagov, V.I. Terekhov, *Determination of Moisture Diffusivity in Porous Building Materials Using Gamma-method* // Proceedings The Fist International Conference on Building Energy and Environment,//Dalian, China, //July 13вЂ“16, **1788-1795** (2008).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON A MODEL OF THE PHASE TRANSFORMATION KINETICS DURING HEATING OF THE ELECTRICAL CONTACS

A.A. KAVOKIN[a], A.T. KULAHMETOVA[b], Yu.R. SHPADI[c]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [a]kavokin_alex@yahoo.com, [b]kulakhmetova@mail.ru, [c]yu-shpadi@yandex.ru

For evaluation the accuracy of approximate analytical methods for calculating temperature and the coordinates of the free boundary of molten material in electrical contacts, it is possible to use a mathematical model that includes the parabolic heat equations with a discontinuous coefficients and the following equation for the kinetics of the melting phase, [1]:

$$\frac{dX}{dt} = K \cdot \mathrm{sign}(X_{eq} - X) \cdot |X - X_{eq}|^P, \tag{1}$$

where: X is the volume fraction of the molten substance; $t > 0$ is the time; X_{eq} is an equilibrium content of the phase X, determined from the state equations; K is the kinetic coefficient of phase transformation, $[1/sec]$, corresponding to the material of the contacts.

To estimate the dependence of values K on a thermophysical characteristics of the process, we consider the model problem of melting a sphere with an initial temperature equal to the temperature of the phase transformation (melting) which is heated from the surface, which can be presented in the following dimensionless form:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{dr^2} \quad (t > 0; \;\; \alpha(t) < r < 1), \tag{2}$$

where: $T(r,t)$ is the temperature, r is the radius, and $\alpha(t)$ is the free boundary of the melting phase.

The boundary conditions on the heated surface of the sphere and at the free boundary are:

$$T(1,t) = 1, \qquad T(\alpha(t),t) = 0, \tag{3}$$

and the Stefan condition at $r = \alpha(t)$ is:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = L \cdot \alpha(t)\frac{d\alpha}{dt}, \qquad (\alpha(0) = 1), \tag{4}$$

where the coefficient L is explicitly determined through the thermophysical characteristics of the contact material – thermal diffusivity, latent heat of phase transformations, etc.

The study was supported by a grant #5133/GF4 from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

To solve the non-linear problem (2) – (4) in the degenerate domain, we've used a hybrid method: an asymptotic solution for time t at which $1-\alpha(t) \leq \varepsilon \ll 1$, and then the finite-difference method (with catching the free boundary by grid node) for values t at which $\varepsilon < \alpha(t) < 1$. The found values of $\alpha(t)$ are used for the mean-integral evaluation of the coefficient K in equation (1) by the formula:

$$K = \frac{1}{t_0} \int\limits_0^{t_0} F\left(\alpha(\tau), \frac{d\alpha}{d\tau}, L\right) d\tau,$$

where the specific type of the function $F\left(\alpha(\tau), \frac{d\alpha}{d\tau}, L\right)$ is determined on the basis of the chosen form of the kinetics equation (1). Calculations of K for some materials with different thermophysical characteristics and comparison of the above method with the self-similar solution for one-dimensional problem have been performed.

Список литературы

[1] Kavokin A.A., Kharin S.N., Yasir Munir, *Comparison Stefan's and kinetic models of phases transformation processes* // Herald of Khazakh-British University, #3 (10), (2009), 47-53.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

FINDING THE INDUSTRIAL PARAMETERS OF THE UNDERGROUND PIPELINE

A.N. SATYBALDINA[1] , T.B. AKISHEV[2], G. TOKEN[3]

[1]*International Information Technology University, Almaty*

[2]*Ekibastuz technical and engineering institute named after the academician K.I. Satpayev, Ekibastuz*

[3]*International Information Technology University, Almaty*

E-mail: [1]*aigul1191@gmail.com,* [2]*toleu_ab@mail.ru,* [3]*gazizatoken@gmail.com*

Mathematical and computer modeling of the steady and unsteady flows in the systems of production and transportation of oil or gas is a vital problem today.

Getting oil to market is a process that requires various transportation and storage technologies, usually referred to as вЂњmidstreamвЂќ. Oil is often produced in remote locations away from where it will be consumed; therefore, transportation networks have been built to transport the crude oil to refineries where it is processed and to ship the refined products to where they will be consumed (like a gas station). Storage facilities are used to balance supply and demand of oil and refined products. Oil is normally transported by one of four options: pipeline, rail, truck, ship [1].

It is caused by the requirements to increase the reliability of design and operation of the pipeline systems of the oil transportation for the farther distances. Furthermore, during operation of oil transportation system in conditions of low temperature emergency situation can occur. It is connected with various deposit formations of hydrates and paraffin, and also formation of oil spills, for example, unsanctioned siphoning. The problems can be effective solved not only with the aid of the full-scale observations, but also via computational experiments. Therefore, any modeling is considered as promising and urgent in the oil-producing industry [2].

In each real process, the parameters do not remain constant due to various reasons, they can be changed in sufficiently wide range. Therefore, it is necessary to carry out a performance analysis of the modelled process with a change in different parameters.

There are three basic goals:

1) to construct a mathematical and computer models of finding parameters of fluid;

2) to check mathematical and computer models on the efficiency using changing parameters;

3) to modify the model for the purpose of the expansion of the range of its productivity and improvement in its operating characteristics.

This work is aimed to find industrial parameters of the underground pipeline. It was considered a pipe as a 4-layered, which consists of oil, paraffin, steel, thermal insulation.

Список литературы

[1] V.I. Klimko, *Criterial equation for number of the Nusselt of the oil and their products transportation by pipeline and by using heating (in russian)* // V.V. Pshenin, V.I. Klimko// Pipeline transportation: theory and practice., **3** (2013), 2425.

[2] Oil Transport, *https://www.studentenergy.org/topics/ff-transport.*

— ⁂ —

EXACT SOLUTION OF GENERALIZED HEAT EQUATION IN DOMAIN WITH MOVING BOUNDARY

M.M. SARSENGELDIN[1], A. ZHAILAUBEK[2]

Kazakh National Research Technical University, 050013, Satpayev street, 22a, Almaty city, Republic of Kazakhstan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Pushkin str, 125,050010, Almaty, Republic of Kazakhstan

E-mail: [1]merey@mail.ru, [2]akerkezhailaubek@mail.ru

We develop mathematical apparatus proposed by P.Appel, D.V.Widder, P.C.Rosenbloom [1,2] to solve generalized Heat equation in domains with moving and free boundaries.

It's required to find solution of generalized Heat equation with moving boundary:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right),\quad 0<r<\alpha(t),\ t>0$$

with Neumann and Robin type boundary conditions.

The solution of the equation is represented in the following form of series:

$$U(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nQ_{n,\nu},$$

where
$$Q_{n,\nu}=\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{n!\Gamma(\beta+1)\cdot r^{2n-2k}\cdot t^k}{k!\cdot(n-k)!\cdot\Gamma(\beta+1+n-k)}=\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{n!\cdot r^{2n-2k}\cdot t^k}{k!\cdot(n-k)!\cdot(\beta+1)\cdot(\beta+2)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-k)},$$

coefficients A_n have to be determined.

$$\left(\gamma\frac{\partial U}{\partial r}+\beta U\right)\Big|_{r=\alpha(t)}=\gamma\cdot\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\cdot 2^{n+k}\cdot(2n-2k)\cdot t^k\cdot(\alpha(t))^{2n-2k-1}}{k!\cdot(n-k)!\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+3)\cdot\ldots\cdot(\nu+2(n-k)-1)}+$$

$$\beta\cdot\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\cdot 2^{n+k}\cdot t^k\cdot(\alpha(t))^{2n-2k}}{k!\cdot(n-k)!\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+3)\cdot\ldots\cdot(\nu+2(n-k)-1)}=g(t).$$

We utilize Faa-di-Bruno's formula and the general Leibniz's rule to determine A_n coefficients from Robin's condition shown above. This approach enables one to model diverse electric contact phenomena and solve Stefan type problems.

Список литературы

[1] P. Appel, *Sur lequation et la chaleur*, J. Math. Pures Appl., Vol. 8, pp. 187-216, 1892.

[2] P.C. Rosenbloom, D.V. Widder, *Expansions in terms of heat polynomials and associated functions*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 92, pp. 220-336, 1959.

— ⁕⁕⁕ —

DEVELOPMENT OF A NEW ENCRYPTION ALGORITHM BASED ON FIBONACCI SEQUENCE

RAUSHAN SERIKKAZHIYEVA, MARZHAN ABDRAZAKOVA, MAULENBEK ABDULKHAIROV

ITMO University, Kronverkskiy prospesct, 49, Saint Petersburg, 197101 , Russia
E-mail: raushanserikkazhiyeva@gmail.com

Nowadays information security has become an integral part of modern systems. All of systems, such as e-commerce, electronic document management, telecommunication systems need their data to be protected. Cryptography is one of the main aspects in providing information security. The goal of this project was to analyze existing encryption methods and development of a new one, which is unique and strong.

There were several tasks have been observed such as:

- searching and analyzing the appropriate information
- choosing technologies and tools in order to realize the project
- developing the structure and design of the application
- testing and practicing the new application

There are two basic types of encryption: symmetric key and asymmetric key encryption[1]. The symmetric key encryption uses the same key for encryption and decryption. As regards the asymmetric key encryption, the key and algorithm for encryption and decryption are different from each other. The key for encryption is made public but the key for decryption is only known by the receiver. Both of them have their own benefits and shortcomings and are applicable in different spheres.

During the research there has been basic symmetric and asymmetric encryption methods analyzed, such as AES, MD5, RSA, SM4 and etc. [2]. It has been deducted that the encryption methods may use hash functions and block ciphering in the process of enciphering.

The encryption algorithm in this handiwork is symmetric. It includes various mathematical operations and uses Fibonacci sequence for ciphering. The desktop application has been established to illustrate the processes of encrypting and decrypting of the data. The application has been implemented by using C# programming language. The interface includes 3 buttons as: encrypt, decrypt and clear.

Moreover, a website for online-shop has been composed. The website lets represent the use of the cipher in the system[3]. The system allows to pay the order by card. When the user enters the data of his or her card, all entered data becomes encrypted. In addition, there were different diagrams, such as use case diagram, class diagram implemented for the detailed consideration of actions made over the system.

In conclusion, this research project is conducted for creating and realizing of an encryption algorithm, which has been made by performing numerous mathematical operations and by using the Fibonacci sequence. For demonstrating of the method there has been desktop application developed. Likewise there has been an online shop website designed as an evidence for application of the encryption method.

Список литературы

[1] D. Liu, *Next Generation SSH2 Implementation* //Securing Data in Motion , 2009.

[2] P. Patil, P. Narayankar *A Comprehensive Evaluation of Cryptographic Algorithms: DES, 3DES, AES, RSA and Blowfish* // Procedia Computer Science, **618**:1 (2016), 612–624.

[3] A. Shemin, S. Viminkumar *E вЂ“Payment System Using Visual and Quantum Cryptography* //Procedia Technology , **1625**:1 (2016), 1623–1628.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Предметный указатель

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ»,

посвященная 100-летию со дня рождения академика Тайманова Асана Дабсовича

Алматы-2017

Собственник книги: Институт математики и математического моделирования МОН РК

Отпечатано в типографии Институт математики и математического моделирования МОН РК, 050010, г.Алматы, ул.Пушкина, 125, тел.8(727)2 72 70 93