Министерство образования и науки Республики Казахстан
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция
в честь Дня работников науки Республики Казахстан.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2022

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан

Председатель Программного комитета – академик НАН РК Кальменов Т.Ш.
Председатель Организационного комитета – член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С.
Ученый секретарь – к.ф.-м.н. Сахауева М.А.

Члены Программного комитета:
академик НАН РК Кальменов Т.Ш., председатель (Алматы, Казахстан)
профессор Алексеева Л.А. (Алматы, Казахстан)
профессор Асанова А.Т. (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Джумадильдаев А.С. (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б.Ш. (Алматы, Казахстан)
профессор Нурсултанов Е.Д. (Нур-Султан, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Харин С.Н. (Алматы, Казахстан)
к.ф.-м.н. Сахауева М.А., ученый секретарь (Алматы, Казахстан)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:
Байжанов Б.С., председатель (ИМММ)
Ж.Т. Адил (ИМММ)
А.О. Бекетаева (ИМММ)
М.И. Алькенов (ИМММ)
Т.Е. Жакупбеков (ИМММ)
Э.А. Бакирова (КазНУ, ИМММ)
Ж.М. Кадирбаева (ИМММ)
О.А. Умбетбаев (ИМММ).

Содержание

Пленарные доклады 9

Секционные доклады 26

1 Алгебра, математическая логика и геометрия 27

Пленарные доклады

Председатели: член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
академик НАН РК Кальменов Т.Ш.
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б.Ш.

Бикватернионные обобщения уравнений Максвелла и Дирака и свойства их решений

АЛЕКСЕЕВА Л.А.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: alexeeva@math.kz

В настоящей работе строятся решения краевых задач для бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений. Эти уравнения являются бикватернионными обобщениями уравнений Максвелла и Дирака. Отметим, что кватернионное представление уравнений Максвелла началось с работ Дж. Максвелла и имеет довольно обширную библиографию ([1-12] и др.). Бикватернионные волновые уравнения относятся к классу гиперболических и описывают решения гиперболических систем из восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Теория краевых задач для таких систем уравнений пока не получила значительного развития. Здесь развивается подобная теория для биволновых уравнений с использованием методов теории обобщенных функций, основные идеи которого для классического волнового уравнения изложены автором в работах [13, 14].

В основе МОФ лежит представление краевой задачи в пространстве обобщенных функций, что позволяет краевые условия перевести в правую часть дифференциальных уравнений с использованием сингулярных обобщенных функций - простых слоев на границе области определения решения. Плотности этих слоев определяются граничными значениями решения. Свойства фундаментального решения - функции Грина биволнового уравнения - дают возможность строить решение полученного уравнения в пространстве обобщенных функций в виде его свертки с правой частью этого уравнения.

Регулярное интегральное представление обобщенного решения дает
классическое решение краевой задачи, которое позволяет найти решение внутри области по его граничным значениям, часть которых известна, а часть подлежит определению. Эти формулы являются аналогом известной формулы Грина для уравнения Лапласа. Для определения неизвестных граничных функций, используя предельные свойства решения при приближении к границе области, строятся разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения. Метод позволяет строить решения с учетом ударных волн, характерных для гиперболических уравнений, на фронтах которых производные терпят скачки. Этот метод используется в настоящей работе для построения обобщенных решений краевых задач и их интегральных представлений. Основные положения этого доклада со строгими доказательствами изложены в [15].

Автором на основе этих уравнений построены бикватернионная модель электро- гравимагнитного поля и электрогравимагнитных взаимодействий, которые являются полевыми аналогами трех зщаконов Ньютона классической механики. При этом бикватернионный полевой аналог второго закона Ньютона помимо известных физических сил, содержит новые. Получены формулы для внутренней энергии и первое начало термодинамики, которые содержит также новые, ранее неизвестные составляющие, связанные с этими новыми силами [16,17].

Решения этих уравнений предложены для описания фотонов, элементарных частиц и элементарных атомов и построена периодическая система элементарных атомов на основе простой музыкальной гаммы [18,19].

Литература

[1] Rastall R.Quaternions in relativity - Review of modern physics. 1964. P.820-832.

[2] Edmonds J.D. Eight Maxwell equations as one quaternionic // Amer. J. Phys. 1978. Vol. 46. №4. P. 430.

[3] Шпилькер Г.Л. Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. №6. С. 1359-1363.

[4] Rodrigues W.A. Jr., Capelas de Oliviera E. Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spinClifford bundles // Int. J. of Theor. Phys. 1990. Vol. 29. P. 379-412.

[5] Finkelstein, Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys. 1992. Vol. 3. P. 207-220.

[6] Adler S.L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. New York, 1995.

[7] De Leo S., Rodrigues W.A. Jr. Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions // Int. J. Theor. Phys. 1997. Vol. 36. P. 2725-2757.

[8] Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. Т. 1. №1. С. 111-127.

[9] Acevedo M., Lopez-Bonilla M.J., Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations // Apeiron. 2005. Vol. 12. №4. P. 371.

[10] Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффдорда. М., 2009.

[11] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford Algebras and Their Applications. 2012. V. 7. №1. P. 19-39.

[12] Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // Proc. of the 8th Congress of ISAAC (Moscow, Aug 22-27, 2011). Moscow, 2011. P. 153-161.

[13] Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения начально-краевой задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №8. С. 1451-1453.

[14] Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Мат. журн. 2006. Т. 6. №1. С. 16-32.

[15] Alexeyeva L.A. Biquaternionic Wave Equations and Properties of Their Generalized Solutions //Differential Equations. 2021. Vol. 57, №5. P.594-604.

[16] Alexeyeva L.A. Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimag-netic fields, charges, currents, and their interactions // J. of Phys. Math. 2009. Vol. 1. P. 15.

[17] Alexeyeva L.A. Biquaternionic form of laws of electro-gravimagnetic charges and currents interactions // J. of Modern Phys. 2016. Vol. 7. P. 1351-1358.

[18] Alexeyeva L. A Periodic system of atoms in biquaternionic representation// J. of Modern Physics. Vol.9, no.8. P. 1633-1644. doi: 10.4236/jmp.2018.98102

[19] Alexeyeva L.A. Ether and photons in biquaternionic presentation// SSRG Int. J. of Applied Physics. 2020.Vol. 7, no 1. P. 1-7. doi: 10.14445/23500301/IJAP-V7I1P114

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Математическое моделирование многокомпонентного слоя смешения с вдувом твердых частиц

Асель БЕКЕТАЕВА[1,a], Алтыншаш НАЙМАНОВА[1], Гульзана АШИРОВА[1]

[1] *Институт математики и математического моделирования КН МОН, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]azimaras10@gmail.com

Турбулентные сдвиговые слои смешения с наличием частиц имеют большое практическое приложение с целью улучшения процесса горения топлива в камерах сгорания.

В настоящее время двухфазные потоки (твердые, капельные или пузырьковые суспензии) интенсивно изучаются как экспериментально [1-2], так и путем численного моделирования [3]. Однако следует отметить, что в основном в этих работах изучена проблема взаимодействия частиц с однокомпонентным газом, тогда как проблемы взаимодействия частиц с многокомпонентным газом в сдвиговом слое практически не рассматриваются.

В настоящей работе численно моделируется плоское сверхзвуковое турбулентное течение в слое смешения образованного двумя потоками многокомпонентных газов (верхний поток это водородно-азотная смесь, нижний поток-воздух), т.е. поверхностями раздела двух параллельных потоков с наличием вдува твердых частиц алюминия.

Математическая модель состоит из двух этапов. На первом этапе для газовой фазы исходной является система двумерных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси (эйлеров подход), на втором этапе для описания движения твердых частиц вдоль их траекторий с учетом влияния несущей среды на дисперсную фазу - лагранжев подход. Для дисперсной фазы в данном исследовании принимаются следующие допущения: частицы представляют собой сферы одинакового размера; взаимодействие частиц между собой не учитывается; движение частиц не влияет на течение газа; силы Сэфмена, Магнуса не учитываются, вследствии того, что рассматриваются алюминиевые частицы малых размеров.

В качестве параметров обезразмеривания приняты характерные величины нижнего воздушного потока, характерным параметром длины является входная толщина завихренности. В тонком слое смешения физические переменные определяются функцией гиперболического тангенса. На входе для образования нестационарной крупномасштабной структуры слоя смешения осуществляется постановка нестационарных граничных условий где амплитуда пертурбации, принимается 0.2-0.3 процентов от максимальной скорости газов на входе.

Численное решение системы уравнений Навье-Стокса, т.е. газовой фазы, осуществляется в два этапа. На первом этапе вычисляются термодинамические параметры, причем алгоритм численного расчета основан на конечно-разностной ENO схеме. На втором этапе по вычисленным термодинамическим параметрам определяются массовые концентраций методом скалярной прогонки. Обыкновенные дифференциальные уравнения для частиц решаются явным методом Эйлера второго порядка. Предполагается, что турбулентное течение является квазидвумерным, и решение системы уравнений Навье-Стокса производится 2D-DNS подходом без привлечения дополнительных замыкающих моделей турбулентности.

Была изучена динамика формирования вихревой системы в слое смешения и ее влияние на распределение твердых частиц в слое смешения при течении двух параллельных потоков водорода (верхний высокоскоростной) и воздуха (нижний низкоскоростной). Проведен детальный численный анализ влияния скорости воздушного потока на формирование вихревых структур и на распределение твердых частиц в сдвиговом слое смешения с числами Маха на входе в диапазоне $0.5 \leq M_\infty \leq 4$. Изучено влияние массовой концентрации водорода (в диапазоне $0.1 \leq Y_{H_2} \leq 1$) на динамику роста слоя смешения водородно-воздушной смеси при одних и тех же конвективных числах Маха .

Ключевые слова: двухфазный поток, твердые частицы, многокомпонентный газ, уравнения Навье-Стокса, Эйлерево-Лагранжев метод.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76J20.

Литература

[1] Kuerten J.G., Ando A., Maeda M. Point-Particle DNS and LES of Particle-Laden Turbulent flow - a state-of the art review, *Flow Turbulence Combust*, **97** (2016), 689–713.

[2] Balachandar S., Eaton J.K. Turbulent dispersed multiphase flow, *Annu Rev Fluid Mech.*, **42** (2010), 111–133.

[3] Luo K., Dai X., Liu X., Fan J. Effects of wall roughness on particle dynamics in a spatially developing turbulent boundary layer, *Int. J. Multiphase Flow*, **111** (2018), 414–421.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

Критерий минимальности оператора Трикоми

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[a], Нурбек КАХАРМАН[b], Александр РОГОВОЙ[c]

Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kalmenov.t@mail.ru, [b]n.kakharman@math.kz, [c]rog2005@list.ru

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область ограниченная при $y > 0$ гладкой кривой, а при $y < 0$ характеристиками

$$AC: \ x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0, \ \ BC: \ x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1,$$

уравнения

$$Lu = yu_{xx} + u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Через L_0 - обозначим замыкание дифференциального оператора (1) на тождестве фукции $u \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$u\Big|_{AC} = 0, \ \ u\Big|_{BC} = 0. \tag{3}$$

Задача (1)-(3) является задачей переопределенными граничными условиями, поэтому требуется найти необходимые и достаточные условия на $f(x, y)$ для однозначной разрешимости этой задачи.

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap y > 0, \ \ \Omega^- = \Omega \cap y < 0$.

Имеет место

Теорема 1. *Оператор L_0 обратим тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_{\Omega^+} \varepsilon(x, y.\xi, \eta)\tilde{f}(\xi, \eta)d\xi d\eta\Big|_{\partial\Omega^+} = 0,$$

где

$$\varepsilon(x, y.\xi, \eta) = k_2(\frac{4}{3})(r_1^2)^{-1/6} \cdot (1 - \sigma)^{2/3}.$$

$F(5/6, 5/6, 5/3, 1 - \sigma)$-фундаментальное решение уравнения (1) в Ω^+,

$$\tilde{f} = f^+(x, y) - \varphi(x, y)y\left[\frac{\partial}{\partial y}L_\Gamma^{-1}f^-\right]\Big|_{y=0}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} f^+(x, y), & y > 0, \\ f^-(x, y), & y < 0. \end{cases}$$

где функция $\varphi(x, y) \equiv 0$ в окрестности $\partial\Omega$ и $\varphi(x, y) \equiv 1$ в окрестности $y = 0$, $0 < x < 1$. Здесь

$$L_\Gamma^{-1}f = \int_0^\xi d\xi_1 \int_1^\eta R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)f(\xi_1, \eta_1)d\eta_1$$

оператор Гурса, а $R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1)$ -функция Римана уравнения (1) в Ω^- задаваемой формулой

$$R(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) = k_2\frac{(\eta_1 - \xi_1^{1/3})}{(\eta - \xi_1)^{1/6}(\eta_1 - \xi)^{1/6}} \cdot F(\beta, \beta, 1, \sigma),$$

$$\sigma = \frac{(\xi_1 - \xi)(\eta_1 - \eta)}{(\xi_1 - \eta)(\eta_1 - \xi)}, \quad k_2 = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(2/3)}$$

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}.$$

— ⁎ ⁎ ⁎ —

On the cones generated by a generalized fractional maximal function

Nurzhan BOKAYEV[1,a], Amiran GOGATISHVILI[2,b] Azhar ABEK[1,c]

[1] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic*
E-mail: [a]*bokayev2011@yandex.ru*, [b]*gogatish@math.cas.cz*, [c]*azhar.abekova@gmail.com*

Definition 1. Let $R \in (0;\infty]$.Let $\Phi : (0;R) \to R_+$. We say that the function Φ belongs to the class $A_n(R)$ if:(1) Φ decreases and is continuous on $(0;R)$; (2) $\Phi(r)r^n \uparrow,\ \ r \in (0,R)$.

The function Φ belongs to the class $B_n(R)$ if the following conditions hold:(1) Φ decreases and is continuous on $(0;R)$;(2) There exists a constant $C \in R_+$ such that $\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \le C\Phi(r)r^n$.

The function Φ belongs to the class $E_n(R)$ if $\int\limits_0^{r^n} \frac{ds}{\Phi(s^{1/n})s} \le \frac{C}{\Phi(r)}, r \in (0;R)$.

Lemma 1. $E_n(R) \subset B_n(R) \subset A_n(R)$.

Definition 2.Let $\Phi \in \Im_n(\infty)$. The *generalized fractional-maximal function* $M_\Phi f$ is defined for the function f as $M_\Phi f(x) = \sup_{r>0} \Phi(r) \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy$,

where $B(x,r)$ is a ball with the center at the point x and radius t.

We denote by $M_E^\Phi = M_E^\Phi(R^n)$ the set of the functions u, for which there is a function $f \in E(R^n)$ such that $u(x) = (M_\Phi f)(x)$, $\|u\|_{M_E^\Phi} = inf\{\|f\|_E : f \in E(R^n),\ \ M_\Phi f = u\}$.

Let $\Im_T = \{K(T)\}$ for $T \in (0,\infty]$ be a set of cones considering from measurable non-negative functions on $(0,T)$, equipped with positive homogeneous functionals $\rho_{KM(T)} : K(T) \to [0,\infty)$ with properties: (1) $h \in K(T),\ \ \alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha h \in K(T),\quad \rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha\rho_{K(T)}(h)$;
(2) $\rho_{K(T)}(h) = 0 \Rightarrow h = 0$ almost everywhere on $(0,T)$.

Definition 3 [1]-[2]. Let $K(T), M(T) \in \Im_T$. The cone $K(T)$ *covers the cone* $M(T)$ (notation: $M(T) \prec K(T)$) if there exist $C_0 = C_0(T) \in R_+$, and $C_1 = C_1(T) \in [0,\infty)$ with $C_1(\infty) = 0$ such that for each $h_1 \in M(T)$ there is $h_2 \in K(T)$ satisfying $\rho_{K(T)}(h_2) \le C_0\rho_{M(T)}(h_1),\ \ h_1(t) \le h_2(t) + C_1\rho_{M(T)}(h_1),\ \ t \in (0,T)$. The equivalence of the cones means mutual covering:

$$M(T) \approx K(T) \Leftrightarrow M(T) \prec K(T) \prec M(T).$$

Let f^* be the non-increasing rearrangement of function f.The function f^{**} is defined as $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau;\ \ t \in R_+$

Let E is rearrangement-invariant space (briefly: RIS). We consider the following four cones of decreasing rearrangements of generalized fractional maximal functions equipped with homogeneous functionals, respectively:

$$K_1 \equiv KM_E^\Phi = \{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = u^*(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in M_E^\Phi\},$$

$$\rho_{K_1}(h) = \inf\{\|u\|_{M_E^\Phi} : u \in M_E^\Phi;\ u^*(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\};$$

$$K_2 \equiv K\widetilde{M}_E^\Phi = \{h : h(t) = u^{**}(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in M_E^\Phi\},$$

$$\rho_{K_2}(h) = \inf\{\|u\|_{M_E^\Phi} : u \in M_E^\Phi;\ u^{**}(t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

$$K_3 = \widetilde{K}_E^\Phi = \big\{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{**}(\tau),\ t \in \mathbb{R}_+,\\ u \in E(\mathbb{R}^n)\big\},$$

$$\rho_{K_3}(h) = inf\big\{\|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{**}(\tau),\ t \in \mathbb{R}_+\big\},$$

$$K_4 = \widetilde{\widetilde{K}}{}_E^{\Phi} = \big\{h \in L^+(\mathbb{R}_+) : h(t) = t\Phi(t^{1/n})u^{**}(t) + \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{*}(\tau), \\ t \in \mathbb{R}_+,\ u \in E(\mathbb{R}^n)\big\},$$

$$\rho_{K_4}(h) = inf\big\{\|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : h(t) = t\Phi(t^{1/n})u^{**}(t) + \\ \sup_{t<\tau<\infty} \tau\Phi(\tau^{1/n})u^{*}(\tau),\ t \in \mathbb{R}_+\big\}.$$

Theorem 1. *Let* $\Phi \in B_n(\infty)$*. Then* $K_1 \approx K_2 \approx K_3$.
Theorem 2. *Let* $\Phi \in E_n(\infty)$*. Then* $K_1 \approx K_2 \approx K_3 \approx K_4$.

References

[1] Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials,*Math. Notes*, **104**: 3 (2018), 356-373.

[2] Goldman M.L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **55**: 8-10 (2010), 817-832.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Generalization of nonassociative algebras for one and two generators

Nurlan ISMAILOV

Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: nurlan.ismail@gmail.com

Let $\mathcal{V}$ be a variety of algebras over $\mathbb{F}$ defined by a set of multilinear polynomial identities of degree no more than n. For k with $1 \le k \le n$ and the variety of algebras $\mathcal{V}$, we define $\mathcal{V}_k$ as the class of algebras if each of their k-generated subalgebra belongs to $\mathcal{V}$.

Then we have the following stabilizing chain of these varieties:

$$\mathcal{V}_1 \supseteq \mathcal{V}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{V}_n = \cdots = \mathcal{V}.$$

This raises a question about determining sets of defining polynomial identities for the varieties of algebras. This question was studied for classical varieties of algebras such as associative and Lie algebras. We give generating identities of varieties of binary Leibniz, mono and binary Zinbiel algebras.

Theorem 1.[1] *The defining identities for the variety of binary Leibniz algebras* $\mathcal{L}eib_2$ *over a field of characteristic different two:*

$$(a \circ a) \circ b = 0,$$

$$b \circ (a \circ a) + (a, b, a) = 0,$$

$$(a \circ b) \circ (a \circ b) - a \circ (b \circ (a \circ b)) + b \circ (a \circ (a \circ b)) = 0.$$

Theorem 2. [2] *Let* $\mathbb{F}$ *be a field of characteristic zero. An algebra* A *over* $\mathbb{F}$ *is mono Zinbiel if and only if it satisfies the following identities:*

$$a \circ (a \circ a) = 2(a \circ a) \circ a,$$

$$(a \circ a) \circ (a \circ a) = 3((a \circ a) \circ a) \circ a.$$

Theorem 3. [2] *Let $\mathbb{F}$ be a field of characteristic different from two. An algebra A over $\mathbb{F}$ is binary Zinbiel if and only if it satisfies the following identities:*

$$a \circ (b \circ a) = (a \circ b + b \circ a) \circ a,$$

$$a \circ (a \circ b) = 2(a \circ a) \circ b.$$

Funding: The author was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant no. AP08052405).

Keywords: polynomial identities, variety of algebras, Leibniz and Zinbiel algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50.

References

[1] Ismailov N., Dzhumadil'daev A. Binary Leibniz algebras *Math. Notes*, **110**:3 (2021), 322-328.

[2] Ismailov N., Mashurov, F., Smadyarov N. Defining identities for mono and binary Zinbiel algebras *To appear in Journal of Algebra and its Applications.*

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Stefan problems with enhanced nonlinearity and its applications

Stanislav KHARIN [1,2,a], Targyn NAURYZ [1,2,b]

[1] *Insitute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*staskharin@yahoo.com*, [b]*targyn.nauryz@gmail.com*

In Stefan problem with temperature-dependent thermal coefficients to determine heat process between on melting isotherm is an important to give attention to temperature dependence of specific heat and thermal conductivity [1]. Similarity principle is very useful method to solve these kind of problems that enable us to reduce free boundary partial differential problem to ordinary differential equation with fixed boundary. One phase non-classical Stefan problem with time, temperature dependent and variable thermal coefficients are studied in [2]-[4].

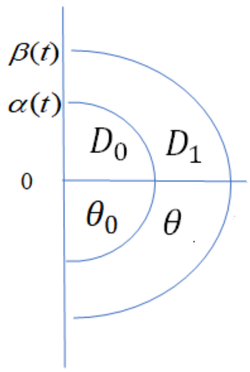

Figure 1: Spherical model electrical contact process. D_0-the sphere of metallic vapours, D_1-the sphere of liquid metal.

We consider the mathematical model with instantaneous explosion of a microasperity. This model can be applied for the total process of arcing from the arc ignition to its extinction. According to this model a touching microasperity of a contact explodes instantaneous due to arc ignition with the power P applied to touching point $r = 0$, which can be desribed by the δ-function

$$P_0\delta(r,t) = P_0\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Two domains D_0 and D_1 should be introduced for modeling of heat transfer. The region $D_0(0 < r < \alpha(t))$ is the zone of metal vapors, $D_1(\alpha(t) < r < \beta(t))$ is the liquid zone correspondingly (see Figure 1).

Modeling of the temperature field in the vapor zone D_0 is a complicate problem, thus we suggest that the temperature θ_i in this zone decreases from temperature which is required for ionization of metallic vapors at the point of explosion $r = 0$ to the boiling temperature θ_b on the boundary of vapor and liquid zone $r = \alpha(t)$. Taking into account that the thickness of the vapor zone is sufficiently small in comparison with the liquid zone, this zone D_0 can be considered as a heat resistance between arc and liquid zone, i.e. the temperature decreasing is linear

$$\theta_0(r,t) = \theta_i - (\theta_i - \theta_b)\frac{r}{\alpha(t)}.$$

The free boundary $r = \alpha(t)$ can be defined from the balance of the heat fluxes on this boundary

$$\frac{P_0}{\sqrt{\pi t}} = -\lambda_b\frac{\partial\theta_0}{\partial r}\bigg|_{r=\alpha(t)} + L_b\gamma_b\frac{d\alpha}{dt}.$$

The solution of this equation is $\alpha(t) = 2\alpha_0\sqrt{t}$ where α_0 is the solution of the quadratic equation

$$\alpha_0^2 - 2A\alpha_0 - B = 0$$

where

$$A = \frac{P_0}{\sqrt{\pi}L_b\gamma_b}, \quad B = \frac{2\lambda_b(\theta_i - \theta_b)}{L_b\gamma_b}.$$

The mathematical model describing the process of the interaction of the electrical arc with electrodes and the dynamics of their melting is based on the spherical model. The temperature for liquid zone can be modelled as:

$$c(\theta)\gamma(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\theta}{\partial r}\left[\lambda(\theta)r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right], \quad \alpha(t) < r < \beta(t), \ \ t > 0, \tag{1}$$

$$-\lambda(\theta(\alpha(t),t))\frac{\partial\theta}{\partial r}(\alpha(t),t) = \frac{P_0e^{-\frac{\alpha_0^2}{a}}}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\theta(\beta(t),t) = \theta_m, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$-\lambda(\theta(\beta(t),t))\frac{\partial\theta}{\partial r}(\beta(t),t) = L\gamma\beta'(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$\beta(0) = 0, \tag{5}$$

where $c(\theta)$, $\gamma(\theta)$ and $\lambda(\theta)$ are the heat capacity, mass density and thermal conductivity of the electrical contact material that depend of temperature $\theta(r,t)$ in liquid phase which has to be determined, θ_m - melting temperature, $P_0e^{-\alpha_0^2/a}/(\sqrt{\pi}t)$ represents heat flux entering in electrical contact spot at free boundary $r = \alpha(t)$ and $P_0 > 0$ is the given constant. We suppose that the left free boundary $\alpha(t)$ is known and $\beta(t)$ denotes the location of the moving melting interface which has to be determined, L is the latent heat of melting and γ is the density of the material.

If we use the following dimensionless transformation

$$T(r,t) = \frac{\theta(r,t) - \theta_m}{\theta_m} \tag{6}$$

the problem (1)-(5) becomes

$$\tilde{N}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\tilde{L}(T)r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right], \quad \alpha(t) < r < \beta(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$\tilde{L}(T(\alpha(t),t))\frac{\partial T}{\partial r}(\alpha(t),t) = -\frac{P_0 e^{-\frac{\alpha_0^2}{a}}}{\lambda_0\sqrt{\pi t}\theta_m}, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$T(\beta(t),t) = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\tilde{L}(T(\beta(t),t))\frac{\partial T}{\partial r}(\beta(t),t) = -\frac{L\gamma\beta'(t)}{\lambda_0\theta_m}, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$\beta(0) = 0, \tag{11}$$

where c_0, γ_0, λ_0 and $a = \lambda_0/(c_0\gamma_0)$ are heat capacity, density, thermal conductivity and thermal diffusivity of the material and

$$\tilde{L}(T) = \frac{\lambda(\theta_m(T+1))}{\lambda_0}, \quad \tilde{N}(T) = \frac{c(\theta_m(T+1))\gamma(\theta_m(T+1))}{c_0\gamma_0}.$$

To solve the problem (7)-(11) we use the following similarity substitution

$$T(r,t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{at}}. \tag{12}$$

From (9)-(12), it can be supposed that given and unknown free boundaries must be proportional to $\sqrt{at}$ and can be presented as follows:

$$\alpha(t) = 2\alpha_0\sqrt{at}, \quad \beta(t) = 2\mu\sqrt{at}. \tag{13}$$

where α_0 is given positive constant and μ is an unknown constant to be found.

With help of (12), the problem (7)-(11) becomes

$$[L^*(u)\xi^2 u']' + 2\xi^3 N^*(u)u' = 0, \quad \alpha_0 < \xi < \mu, \tag{14}$$

$$L^*(u(\alpha_0))u'(\alpha_0) = -p*, \tag{15}$$

$$u(\mu) = 0, \tag{16}$$

$$u'(\mu) = -K\mu, \tag{17}$$

where $p^* = \dfrac{2P_0\sqrt{a}e^{-\frac{\alpha_0^2}{a}}}{\lambda_0\sqrt{\pi}\theta_m}$, $K = \dfrac{2aL\gamma}{\theta_m\lambda(\theta_m)}$ and

$$L^*(u) = \frac{\lambda(\theta_m(u+1))}{\lambda_0}, \quad N^*(u) = \frac{c(\theta_m(u+1))\gamma(\theta_m(u+1))}{c_0\gamma_0}. \tag{18}$$

We can deduce that $(\xi, u(\xi))$ is the solution of the problem (14)-(17) if and only if $(\xi, u(\xi))$ satisfy the integral equation

$$u(\xi) = p^*\big(F[\mu, u(\mu)] - F[\xi, u(\xi)]\big) \tag{19}$$

where

$$F[\xi, u(\xi)] = \int\limits_{\alpha_0}^{\xi} \frac{E[s, u(s)]}{s^2 L^*(u(s))} ds, \tag{20}$$

$$E[s, u(s)] = \exp\left(-2 \int\limits_{\alpha_0}^{s} t \frac{N^*(u(t))}{L^*(u(t))} dt \right) \tag{21}$$

together with condition (17) which becomes

$$p^* \frac{E[\mu, u(\mu)]}{K\lambda(\theta_m)} = \mu^3. \tag{22}$$

From (22) we can determine unknown constant μ for free boundary $\beta(t)$.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258948 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Stefan problem, nonlinear thermal coefficients, similarity solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

References

[1] Kharin S.N. *Mathematical Models of Phenomena in Electrical contacts, The Russian Academy of Sciences*, Siberian Branch, A.P. Ershow Institute of Informatics System, Novosibirsk (2017).

[2] Briozzo A.C., Natale M.F., Tarzia D.A. Existence of an exact solution for one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients from Tirskii's method, *Nonlinear Anal.*, **67**:7 (2007), 1989–1998.

[3] Ajay K., Abhishek K.S., Rajeev A Stefan problem with temperature and time dependent thermal conductivity, *Journal of King Saud University - Science*, **32**:1 (2020), 97–101.

[4] Kharin S.N., Nauryz T.A. One-phase spherical Stefan problem with temperature dependent coefficients, *Eurasian Mathematical Journal*, **12**:1 (2021), 49–56.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the convolution operator in Morrey spaces

E. D. NURSULTANOV[1,a], D. SURAGAN[2,b]

[1] *Kazakhstan Division of Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan*
[2] *Department of Mathematics, Nazarbayev University, Kazakhstan*
E-mail: [a]*er-nurs@yandex.ru*, [b]*durvudkhan.suragan@nu.edu.kz*

Let $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ and $0 < p < \infty$. Set of all measurable by Lebesque functions $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ is called Morrey space if the following value is finite:

$$\|f\|_{M_p^\lambda} \equiv \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty.$$

Here $B_r(x)$ is the ball with center at point x and with radius $r > 0$.

In 1938 Morrey introduced the Morrey spaces. These spaces were studied as a consequence of questions of regular solutions of nonlinear elliptic equations and systems. In the last two decades, great interest has been shown in the study of the classical operators of function theory acting in these spaces.

In this paper, we study estimates for the norm of the convolution operator

$$(Tf)(x) = (K * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy,$$

which is acted from one Morrey space to another Morrey space.

One of the most important convolution operators is the Riesz potential. Let $f \in L_1^{loc}$. The Riesz potential I_α is defined by

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n.$$

The classical Hardy-Littlewood-Sobolev inequality implies that I_α is bounded from L_p to L_q if and only if

$$1 < p < q < \infty \quad \text{and} \quad \alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \tag{1}$$

A generalization of this inequality was obtained by O'Neil.

Let $1 < p, q, r < \infty$ and $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, then

$$\|Tf\|_{L_q} \leq c\|K\|_{L_{r,\infty}} \|f\|_{L_p},$$

here $L_{r,\infty}$ is the Marcinkiewicz space.

The boundedness of operator I_α in Morrey spaces was investigated by S. Spanne, J. Peetre [3], and D. Adams [1,2].

Let

$$0 \leq \gamma < \frac{n}{p}, \quad 0 \leq \lambda < \frac{n}{q}, \quad \alpha = \lambda - \gamma + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \tag{2}$$

If one of the conditions is met: $1 < p < q < \infty, \quad \lambda = \gamma$ *or* $1 < p < q < \infty, \quad q\lambda = p\gamma$ *or* $1 < p < \infty, \quad q = p$.

Then the operator I_α *is bounded from* M_p^γ *to* M_q^λ.

In the present paper, we prove an analogue of the Young-O'Neil inequality for the classical Morrey spaces. The following theorem is a consequence of the obtained results of this paper.

Theorem Let either

$$\max(q, 1) \leq p < \infty, \quad 0 < \lambda < \frac{n}{q}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{n}{p} \tag{3}$$

or

$$1 \leq p < q < \infty, \quad 0 < \lambda < \frac{n}{q}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\lambda q}{p}. \tag{4}$$

If

$$0 < \alpha = \lambda - \gamma + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < n, \tag{5}$$

then the Riesz operator I_α is bounded from M_p^γ to M_q^λ.

Funding:This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08856479).

Keywords: Morrey spaces, convolution operator, Young-O'Neil inequality, interpolation theorems, Riesz's potential.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 47G10, 47B06, 35Q79, 35K05, 35K20.

References

[1] Adams D. R.: A note on Riesz potentials, Duke Math. 42 (1975) 765-778.

[2] Adams D. R.: Morrey Spaces. Birkhäuser, 2015, 124 p.

[3] Peetre J.: On the theory of Lp spaces, Journal Funct. Analysis 4 (1969) 71-87.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Elementary theories, their arities and distributions of countable models

Sergey SUDOPLATOV

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We present a survey of results considering natural and valuable structural characteristics of elementary theories and their models including values for arities and almost arities of theories [1, 2] and their formulae as well as distributions of countable models of theories in general [3], and for spherically ordered theories [1, 2, 4] which are based on a series of results for linearly and circularly ordered theories [5–10].

Similarly to a series of algebraic realizations of arbitrary arities [11] a series of geometric ones based on spherical orders is suggested [1, 4].

We propose an approach classifying spherical generalizations of o-minimal and weakly o-minimal theories and structures.

Definition. Let $S \subseteq M$, where $\mathcal{M} = \langle M, K_n, \ldots \rangle$ is a n-spherically ordered structure, i.e., a structure with a n-spherical order K_n, $n \geq 3$. The set S is said to be an *open n-segment surface* if $S = \{b \in M \mid \mathcal{M} \models K_n(a_1, b, a_3, \ldots, a_n) \wedge \bigwedge\limits_{i \neq 2} \neg a_i \approx b\}$ for some pairwise distinct $a_1, a_3, \ldots, a_n \in M$; it has endpoints $a_1, a_3, \ldots, a_n$. For an open n-segment surface S of a n-spherically ordered set, sometimes we will write $S = (a_1, a_3, \ldots, a_n)$ if we wish to indicate the endpoint frame of S. Similarly, we may define *closed*, *partially open*, etc., n-segment surfaces in $\mathcal{M}$ including all/some coordinates a_i. By a *n-segment surface* in $\mathcal{M}$ we shall mean, ambiguously, any of the above types of n-segment surfaces in $\mathcal{M}$. It is obvious that both a n-segment surface and a point are *convex sets*, i.e., sets $A \subseteq M$ satisfying the following condition: if $a_1, a_3, \ldots, a_n \in A$ then for any $b \in M$ with $\models K_n(a_1, b, a_3, \ldots, a_n)$ we have $b \in A$ or for any $b \in M$ with $\models \neg K_n(a_1, b, a_3, \ldots, a_n)$ we have $b \in A$.

The structure $\mathcal{M}$ is said to be *n-spherically minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a positive Boolean combination of segment surfaces and points in $\mathcal{M}$. The structure $\mathcal{M}$ is said to be *weakly n-spherically minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets.

A complete theory T is said to be (*weakly*) *n-spherically minimal* if all its models are (weakly) n-spherically minimal.

Theorem. *Let T be a countable constant expansion of a n-spherically minimal ω-categorical theory, $n \geq 3$. Then either T has 2^ω countable models or T has exactly $\prod\limits_{k \in n \setminus \{1\}} (2^k+2)^{r_k}$ countable models, where r_k are natural numbers. Moreover, for any $r_0, \ldots, r_{n-1} \in \omega$ there is an aforesaid theory T with exactly $\prod\limits_{k \in n \setminus \{1\}} (2^k+2)^{r_k}$ countable models.*

Funding: This research has been funded by Science Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), by Russian Scientific Foundation (Project No. 22-21-00044), and by State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: elementary theory, arity, distribution of countable models.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C07, 03C64, 03C50.

References

[1] Sudoplatov S.V. Arities and aritizabilities of first-order theories, *arXiv:2112.09593v1 [math.LO]* , (2021).

[2] Sudoplatov S.V. Almost n-ary and almost n-aritizable theories, *arXiv:2112.10330v1 [math.LO]* , (2021).

[3] Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*. Novosibirsk : NSTU, 2018.

[4] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories. *Preprint*. Almaty, Novosibirsk, 2022.

[5] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly*, **51**:4 (2005), 377–399.

[6] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, *Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference.* Eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. Singapore : World Scientific, 2006. P. 31–40.

[7] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories, *Annals of Pure and Applied Logic*, **45** (2007), 354–367.

[8] Altaeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost binary weakly circularly minimal structures, *Bulletin of Karaganda University, Mathematics*, **78**:2 (2015), 74–82.

[9] Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15** (2018), 719–727.

[10] Kulpeshov, B.Sh., Sudoplatov, S.V. Distributions of countable models of quite o-minimal Ehrenfeucht theories, *Eurasian Mathematical Journal*, **11**:3 (2020), 66–78.

[11] Semenov A.L. Finiteness Conditions for Algebras of Relations, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **242** (2003), 92–96.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Sharp Poincaré inequality for sub-Laplacians

Durvudkhan SURAGAN[1,2,a],

[1] *Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*suragan@list.ru*

This talk is based on our joint work with Tohru Ozawa [1].

A (connected and simply connected) Lie group $\mathbb{G}$ is graded if its Lie algebra $\mathfrak{g}$ is graded, that is,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i,$$

where $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ...,$ are subspaces of $\mathfrak{g}$, only finitely many not $\{0\}$, and

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \;\; \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

If $\mathfrak{g}_1$ generates $\mathfrak{g}$ through Lie commutators, the group is said a Carnot group.

Example 1 (Abelian case). The abelian group $(\mathbb{R}^n, +)$ is a Carnot group: its Lie algebra $\mathbb{R}^n$ is trivially graded, i.e. $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^n$.

Example 2 (Heisenberg group). The Heisenberg group $\mathbb{H}_n$ is a Carnot group: its Lie algebra $\mathfrak{h}_n$ can be decomposed as $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ where $\mathfrak{g}_1 = \oplus_{j=1}^n \mathbb{R}X_j \oplus \mathbb{R}Y_j$ and $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}T$, where

$$X_j = \partial_{x_j} - \frac{y_j}{2}\partial_t, \;\; Y_j = \partial_{y_j} + \frac{x_j}{2}\partial_t, \;\; j = 1, \dots, n, \;\; T = \partial_t.$$

Let $\mathbb{G}$ be a Carnot group, i.e. there is $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ (the first stratum), with its basis $X_1, \dots, X_{N_1}$ generating $\mathfrak{g}$ through their commutators. Then the sub-Laplacian

$$\mathcal{L} := X_1^2 + \cdots + X_{N_1}^2$$

is hypoelliptic, and $\nabla_H = (X_1, \dots, X_{N_1})$ is called a horizontal gradient.

In every equivalence class of isomorphic Carnot groups there is at least one group which is the so-called homogeneous Carnot group:

(i) For natural numbers $N_1 + ... + N_r = n$ the decomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{N_1} \times ... \times \mathbb{R}^{N_r}$ holds, and for each $\lambda > 0$ the dilation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ given by $\delta_\lambda(x) \equiv \delta_\lambda(x^{(1)}, ..., x^{(r)}) := (\lambda x^{(1)}, ..., \lambda^r x^{(r)})$ is an automorphism of the group $\mathbb{G}$. Here $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{N_k}$ for $k = 1, ..., r$.

(ii) Let N_1 be as in (i) and let $X_1, ..., X_{N_1}$ be the left invariant vector fields on $\mathbb{G}$ such that $X_k(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}|_0$ for $k = 1, ..., N_1$. Then the Hörmander condition

$$\operatorname{rank}(\operatorname{Lie}\{X_1, ..., X_{N_1}\}) = n$$

holds for every $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. the iterated commutators of $X_1, ..., X_{N_1}$ span the Lie algebra of $\mathbb{G}$.

That is, we say that the triplet $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \circ, \delta_\lambda)$ is a homogeneous Carnot group. The above number r is called the step of $\mathbb{G}$ and the left invariant vector fields $X_1, ..., X_{N_1}$ are called the (Jacobian) generators of $\mathbb{G}$. They are represented by the formula

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x_k^{(1)}} + \sum_{l=2}^{r} \sum_{m=1}^{N_l} a_{k,m}^{(l)}(x^{(1)}, ..., x^{(l-1)}) \frac{\partial}{\partial x_m^{(l)}}, \tag{1}$$

where $a_{k,m}^{(l)}$ is a δ_λ-homogeneous polynomial of degree $l-1$. The number $Q = \sum_{k=1}^{r} kN_k$ is called the homogeneous dimension of $\mathbb{G}$. We also recall the standard Lebesgue measure dx on $\mathbb{R}^n$ is the Haar measure for $\mathbb{G}$. It makes the class of homogeneous Carnot groups convinient for the analysis. For further discussions in this direction we refer a recent open access book [2].

Let $\Omega \subset \mathbb{G}$ be an open set and we denote its boundary by $\partial\Omega$. The notation $u \in C^1(\Omega)$ means $\nabla_H u \in C(\Omega)$.

Theorem 1. *Let $\Omega \subset \mathbb{G}$ be a set supporting the divergence formula on $\mathbb{G}$. Then we have*

$$0 \leq \int_\Omega \left| \nabla_H u - \frac{\nabla_H \phi}{\phi} u \right|^2 dx = \int_\Omega \left(|\nabla_H u|^2 + \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi} |u|^2 \right) dx \tag{2}$$

for all $u \in C_0^1(\Omega)$ and any $\phi \in C^2(\Omega)$. The equality case holds if and only if u is proportional to ϕ.

Note that to the best of our knowledge all available literature studies the following three issues separately:

- Proof of the inequality with some constant.
- Characterization of the best constant and its existence.
- Characterization of nontrivial extremizers and their existence.

Theorem 1 gives an answer to those three questions at once.

Keywords: Poincaré inequality, sharp constant, nontrivial extremizer, stratified group, sub-Laplacian.

2010 Mathematics Subject Classification: 39B62, 39B99, 22E30.

References

[1] Ozawa T., Suragan D. Sharp remainder of the Poincaré inequality, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148** (2020), 4235–4239.

[2] Ruzhansky M., Suragan D. *Hardy inequalities on homogeneous groups*, Progress in Mathematics, vol. 327, Birkhauser/Springer, Cham (2019).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Optimal decay estimates for diffusion and sub-diffusion equations

Berikbol TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan
E-mail: torebek@math.kz

We prove sharp estimates for the decay in time of solutions to the diffusion and subdiffusion equations with time dependent coefficients on a bounded domain subject to the Dirichlet boundary condition. Our proofs rely on Fourier methods and energy estimates. The results can be generalized to p-Laplace diffusion equation, porous medium equation and mean curvature diffusion equation.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08052046)

Keywords: diffusion equation, subdiffusion equation, decay estimates.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Boundedness of the Calderón operator in symmetric spaces

K.S. TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: tulenov@math.kz

In this talk, we deal with Φ-estimate of the Calderón operator and the Hilbert operator for bounded and summable functions. Similar problems were studied in [1] by martingale methods. We present its new and considerably shorter, and simpler proof. This is the second part of the recently accepted (to Studia Math.) joint paper with australian mathematicians where authors obtain a weak type (1,1) estimate for a higher dimensional version of the Hilbert operator answering a recent problem by A. Osękowski [1].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258335 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Φ-estimate, Hilbert operator, summable function, bounded function.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B10, 47B38, 26B15, 46A16, 47B01.

References

[1] Osękowski A. Inequalities for Hilbert operator and its extensions: The probabilistic approach, *Ann. Probab.*, **45**:1 (2017), 535–563.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On ordered groups in o-stable theories

Viktor VERBOVSKIY

Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com,

Here we investigates properties of ordered groups whose elementary theory belongs to the various but connected classes of NIP theories, such as dp-minimal and o-stable. Both classes are generalization of the notion of o-minimality, introduced by A. Pillay and C. Steinhorn.

Definition 1. [1] (1) An ordered structure $\mathcal{M}$ is *o-stable in* λ if for any $A \subseteq M$ with $|A| \leq \lambda$ and for any cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ there are at most λ 1-types over A which are consistent with the cut $\langle C, D\rangle$.

(2) A theory T is *o-stable in* λ if every model of T is o-stable. Sometimes we write T is o-λ-stable. A theory T is *o-stable* if there exists an infinite cardinal λ in which T is o-stable.

We recall the basic definitions of inp-patterns and dp-rank.

Definition 2. (1) An *inp-pattern of depth* κ is a family $\{\varphi_i(\overline{x}; \overline{a}_{i,j}) : i < \kappa, j < \omega\}$ of formulas over parameters $\overline{a}_{i,j}$ and a collection $\{k_i : i < \kappa\}$ of positive integers k_i such that:

(a) for each $i < \kappa$, the collection of formulas $\{\varphi_i(\overline{x}; \overline{a}_{i,j}) : j < \omega\}$ is k_i-inconsistent (that is, the conjunction of any k_i of them is inconsistent); and

(b) for each function $\eta : \kappa \to \omega$, the partial type $\{\varphi_i(\overline{x}; \overline{a}_{i,\eta(i)}) \,:\, i < \kappa\}$ is consistent.

(2) An *ict-pattern of depth* κ is a family $\{\varphi_i(\overline{x}; \overline{a}_{i,j}) \,:\, i < \kappa, j < \omega\}$ of formulas over parameters $\overline{a}_{i,j}$ such that for every $\eta : \kappa \to \omega$, the partial type

$$\{\varphi_i^{if j=\eta(i)}(\overline{x}; \overline{a}_{i,j}) \,:\, i < \kappa\}$$

is consistent, where the exponent "if $j = \eta(i)$" signifies that we take a positive instance of $\varphi(\overline{x}; \overline{a}_{i,j})$ if $j = \eta(i)$, and its negation otherwise.

(3) Let κ_{inp} be the supremum of the depths of all inp-patterns in T in which the tuple $\overline{x}$ in the definition above consists of a single variable x (or "∞" if the depths are not bounded), and similarly let κ_{ict} be the supremum of the depths of all ict-patterns in T in a single variable.

(4) T is *dp-minimal* if $\kappa_{ict} = 1$, and T is *inp-minimal* if $\kappa_{inp} = 1$.

Note that each dp-minimal ordered group is o-stable [3].

We say that G contains *boundedly many definable convex subgroups* if there is a cardinal λ such that in any group which is elementarily equivalent to G the number of convex definable subgroups does not exceed λ. Otherwise we say that G has *unboundedly many definable convex subgroups.*

Theorem 1. *Let $\mathcal{G}$ be an inp-minimal densely ordered abelian group with boundedly many definable convex subgroups. Then for any definable unary function $f : G \to G$, there is a finite definable partition of G into sets $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ such that for each $i < n$, the restriction $f \restriction Y_i$ of f to Y_i is continuous and either locally increasing, locally decreasing, or locally constant.*

Theorem 2. *Let $\mathcal{G}$ be an ordered abelian group whose theory is dp-minimal and which has boundedly many definable convex subgroups. Then any definable $B \subseteq G$ is eventually equal to a finite union of cosets of nG for some $n \in \omega$.*

Funding: The author was supported by the grant no. AP09259295 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: o-minimality, dp-minimality, NIP, stability, ordered groups.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64.

References

[1] Baizhanov B. and Verbovskii V. O-stable theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 211–225.

[2] Verbovskiy V. O-stable ordered groups, *Siberian Advances in Mathemtics*, **22**:1 (2012), 60–74.

[3] Verbovskiy V. Dp-minimalnye i uporyadochenno stabilnye uporyadochennye structury, *Matematicheskiy zhurnal*, **10**:2 (2010), 35–38.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Секционные доклады

1 Алгебра, математическая логика и геометрия

Председатели:	член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С. академик НАН РК Джумадильдаев А.С.
Секретарь:	Умбетбаев О.А.

Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий сильных произведений графов

Дмитрий ЕМЕЛЬЯНОВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Продолжается изучение алгебр бинарных изолирующих формул [1,2,4] для произведений графов.

Определение 1. *Сильное произведение* графов G и H — это граф, такой, что [3]: множество вершин $G \boxtimes H$ является прямым произведением $V(G) \times V(H)$ различные вершины (u, u') и (v, v') связаны ребром в $G \boxtimes H$ тогда и только тогда, когда $u = v$ и u' смежна с v' , или $u' = v'$ и u смежна с v, или u смежна с v и u' смежна с v' .

При $H_1 = H_2 = \ldots = H_k = H$ сильное произведение $H \boxtimes H \boxtimes \ldots \boxtimes H$ называется *k-й сильной степенью* графа H и обозначается через H^k.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул [2] для теорий сильного произведений. Рассмотрены правила умножения для правильных фигур от отрезка до шестиугольника. Для них получены таблицы сильного умножения вида $G \boxtimes H^k$, где G — граф правильного многоугольника, H^k — k-я сильная степень графа отрезка. Исследуя сильные произведения алгебры для отрезка и правильных многоугольников, обнаружили наличие симплексов в графах начилая с умножений вида $H \boxtimes H$.

Теорема 1. *Если в результате сильного умножении алгебр бинарных изолирующих для n-угольников получается хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.*

Funding: Автор был поддержан Грантом РФФИ No 20-31-90004/20 и грантом Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, No AP08855544.

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, сильное произведение, теория моделей, модель теории, произведение графов.

Литература

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.

[2] Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*, NSTU, Novosibirsk (2018).

[3] Wilfried Imrich, Sandi Klavar, Douglas F. Rall. Graphs and their Cartesian Product. — A. K. Peters (2008). — ISBN 1-56881-429-1.

[4] Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий декартовых произведений графов, в: *Algebra and model theory 12. Collection of papers*, NSTU, Novosibirsk (2019), 21–31.

[5] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов. Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher (2017), 66–74.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Теория J-прекрасных пар в допустимом обогащении

ЕШКЕЕВ А.Р.[a], КАСЫМЕТОВА М.Т.[b], ЖУМАБЕКОВА Г.Е.[c]

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]modth1705@mail.ru,[b]mairushaasd@mail.ru, [c]galkatai@mail.ru

Дадим некоторые определения для нашего основного результата.

Определение 1.[1] Обогащение $\overline{\top}$ йонсоновской теории T называется допустимым, если любой ∇-тип (это означает, что ∇ подмножество языка L_σ и любая формула из этого типа принадлежит ∇) в этом обогащении определим в рамках $\overline{\top}_\Gamma$-стабильности.

Определение 2.[1] Йонсоновская теория называется наследственной, если при любом ее допустимом обогащении любое расширение ее в этом обогащении будет йонсоновской теорией.

Рассмотрим некоторое обогащение сигнатуры σ и рассмотрим центральный тип этого обогащения.

Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma = \sigma \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $\overline{T} = Th_{\forall\exists}(C, c_a)_{a\in C} \cup Th_{\forall\exists}(E_T) \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\}$, где $\{"P \subseteq "\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ_Γ. Т.е. интерпретацией символа P является решение следующего уравнения $P(C) = M \in E_T$ в языке σ_Γ. В силу наследственности теории T, теория $\overline{T}$ является йонсоновской теорией. Рассмотрим все пополнения теории $\overline{T}$ в языке сигнатуры σ_Γ. Так как $\overline{T}$ является йонсоновской теорией, она имеет свой центр и мы обозначим его через $\overline{T}^*$ и этот центр является одним из вышеуказанных пополнений теории $\overline{T}$. При обеднении сигнатуры σ_Γ до $\sigma \cup P$, в силу законов логики первого порядка так как константа c уже не принадлежит этой сигнатуре, эту константу мы можем заменить на символ переменной, например x. И тогда теория $\overline{T}^*$ становится полным 1-типом от переменной x. Этот тип мы и назовем центральным типом теории $\overline{T}$ в данном обогащении. Данное обогащение обозначим через $\odot$.

Фундаментальный порядок является средством сравнения типов над моделями полной теории: он измеряет степень сложности типа в смысле реализации [2]. Этот порядок особенно эффективен в случае стабильной теории. Так как центр T^* йонсоновской теории является полной теорией, и фундаментальный порядок сможем рассмотреть для центральных типов. Если йонсоновская теория будет совершенной теорией, тогда T^* будет йонсоновской теорией.

Пусть T - йонсоновская теория, $S^J(X)$ множество всех экзистенциальных n-полных типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Определение 3. [3]Мы говорим, что йонсоновская теория T J-λ-стабильна, если для любой T - экзистенциально замкнутой модели A, для любого подмножества X множества A, $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.

Определение 4. Пусть T – $\exists$-полная йонсоновская теория, M_1, M_2 – экзистенциально-замкнутые модели теории T. $M_1 \preceq_{\exists_1} M_2$. Тогда пара (M_1, M_2) называется J-прекрасной парой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. M_1 является $|T|^+$-$\exists_1$- насыщенной;

2.Для каждого кортежа $\bar{b}$, извлеченного из M_2, каждый $\exists$-тип над $M_1 \cup \{\bar{b}\}$ реализуется в M_2.

T^J назовем теорией J-прекрасных пар. $\exists_1$-насыщенность означает насыщенность относительно экзистенциональных 1-типов. Рассмотрим частный случай J-прекрасной пары, который является основным результатом.

Теорема 1. Пусть T– $\exists$-полная и J-λ- стабильная йонсоновская теория, C – семантическая модель теории T. (C, M_1) и (C, M_2) - две J - прекрасные пары, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ кортежи, взятые из каждой из них, M_1, $M_2 \in E_T$. Тогда $(C, M_1) \equiv_{\forall\exists} (C, M_2)$, если их центральные типы эквивалентны в фундаментальном порядке $\overline{T}^*$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260237 КН МОН РК.

Ключевые слова: йонсоновская теория, допустимое обогащение, центральный тип, J-λ стабильная теория, J-прекрасные пары.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Yeshkeyev, A.R., Omarova, M.T., Zhumabekova, G.E. The J-minimal sets in the hereditary theories, *Bulletin of the Karaganda University – Mathematics*, **94**:2 (2019), 92–98.

[2] Poizat B Paires de structure stables, *J. Symb. Logic*, **V**:48 (1983), 239–249.

[3] Ешкеев А.Р.,Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016).

— ⁂⁂⁂ —

Алгебраически простые и атомные множества

ЕШКЕЕВ А.Р.[a], УЛЬБРИХТ О.И.[b], ИСАЕВА А.К.[c]

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]ulbrikht@mail.ru, [c]isa_aiga@mail.ru

Основной результат данного тезиса связан с проблематикой, определённой в работе Дж. Болдуина и Д. Киккера об алгебраически простых моделях [1]. А именно, была получена эквивалентность атомной и простой модели, полученных с помощью некоторого оператора замыкания, заданного на определимых подмножествах семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории.

Определение 1. [2] Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель теории T является насыщенной моделью теории T^*.

Пусть T – совершенная йонсоновская теория полная для Π_1 предложений, C – семантическая модель теории T.

Определение 2. [3] Модель называется атомной, если каждый кортеж её элементов реализует некоторую полную формулу.

Определение 3. [4] Модель $\mathfrak{A}$ теории T называется хорошей почти-слабо (Σ_1, Σ_2)-cl атомной моделью T, если каждая ω-последовательность элементов $\mathfrak{A}$ реализует Σ_1-главный Σ_2-ω-тип.

Определение 4. [5] Модель $\mathfrak{A}$ теории T называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель этой теории.

Определение 5. [4] Множество A назовем (Γ_1, Γ_2)-cl-алгебраически простым в теории T, если $cl(A) = M$, M является (Γ_1, Γ_2)-cl-атомной моделью теории T, $M \in E_T \cap AP_T$, где $AP_T \bigcap E_T \neq 0$, при этом полученная модель M называется (Γ_1, Γ_2)-cl-алгебраически простой моделью теории T.

Пусть $X \subseteq C$ – йонсоновское множество, заданное некоторой экзистенциальной сильно-минимальной формулой $\varphi(x)$ и $cl(X) = M \in E_T$.

В силу того, что рассматриваемая теория совершенна, следует, что её центр является модельно полной теорией. Поэтому Σ_1-полнота рассматриваемой теории будет эквивалентна Π_1-полноте этой теории.

Теорема 1. *Пусть T совершенная йонсоновская теория полная для Π_1-предложений, тогда T имеет хорошую почти-слабо (Σ_1, Σ_1)-cl-атомную модель.*

Теорема 2. *Пусть T совершенная йонсоновская теория полная для Π_1-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{A}$ – (Σ_1, Σ_1)-cl-алгебраически простая модель теории T.

2) $\mathfrak{A}$ хорошая почти-слабо (Σ_1, Σ_1)-cl-атомная модель T.

При доказательстве теоремы 2 используется результат Палютина Е.А. о существовании простой модели над базисным множеством из [6].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260237 КН МОН РК.

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, простая модель, атомная модель, алгебраически простая модель, предгеометрия, йонсоновское множество, определимое множество.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C50, 03C10.

Литература

[1] Baldwin J.T., Kueker D.W. Algebraically prime models, *Ann. Math. Logic*, **20** (1981), 289–330.

[2] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T. *Jonsson theories and their classes of models*, Monograph, KarGU, Karaganda (2016).

[3] Vaught R.L. Denumerable models of complete theories, *Proc. Sympos. on Foundations of Mathematics: Infinitistic Methods*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw (1959) and Pergman Press, Krakow (1961), 303–321.

[4] Yeshkeyev A.R., Issayeva A.K., Shamatayeva N.K. On atomic and algebraically prime models obtained by closure of definable sets, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series.*, **103**:3 (2021), 124–130.

[5] Robinson A. *Introduction to the Model theory and the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam (1963).

[6] Палютин Е. А. Позитивно простые модели над нормальным базисным множеством, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **4** (2007), 596–604.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об обычных и ограниченных когомологиях классических модулярных алгебр Ли

ИБРАЕВ Ш.Ш.

Кызылординский университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан
E-mail: ibrayevsh@mail.ru,

В работе изучаются связи между обычными и ограниченными когомологиями алгебр Ли полупростых односвязных алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики с коэффициентами в простых модулях, а также их связи соответствующими когомологиями алгебраических групп. Установлены примеры нетривиальных изоморфизмов между этими когомологиями. Мы рассматриваем простых модулей, связанные с модулями Вейля с фильтрацией Янцена глубины 1 и глубины 2. Обозначим старшие веса модулей Вейля глубины 1 через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, а глубины 2 через $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{s-1}$. Их описание с помощью доминантных элементов аффинной группы Вейля и элементов нижнего аффинного алькова приведены в работе [1].

Теорема 1. *Пусть G – полупростая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > h$, где h – число Кокстера, G_1 – ядро Фробениуса для G и $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Запишем λ_i в виде: $\lambda_i = w_i \cdot 0 + p\nu_i$, где w_i – элемент группы Вейля W, ν_i – доминантный элемент некоторого аффинного алькова. Обозначим через $l(w)$ длину элемента $w \in W$ относительно образующих W. Тогда имеет место нетривиальный изоморфизм $H^n(\mathfrak{g}, L(\lambda_i)) \cong H^n(G_1, L(\lambda_i))$ только в следующих случаях:*

(a) $n = i$ и $i \in \{1, 2, \cdots, t_\lambda\}$;
(b) $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли типа B_l, $n = i$ и $i = t_\lambda + 1$;
(c) $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли типа B_l, $n = l(w_i)$ и $i \in \{t_\lambda + 2, t_\lambda + 2, \cdots, s\}$;
(d) $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли типа C_l, $n = i$ и $i = s$.

Здесь $t_\lambda = \begin{cases} s, & \text{если } \mathfrak{g} = A_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, \\ s - l + 1, & \text{если } \mathfrak{g} = B_l, \\ s - 1, & \text{если } \mathfrak{g} = C_l. \end{cases}$

Теорема 2. *Пусть G – полупростая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > h$, где h – число Кокстера, G_1 – ядро Фробениуса для G и $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Запишем μ_j в виде: $\mu_j = u_j \cdot 0 + p\delta_j$, где*

u_j – элемент группы Вейля W, δ_j – доминантный элемент некоторого аффинного алькова. Тогда имеет место нетривиальный изоморфизм $H^n(\mathfrak{g}, L(\mu_j)) \cong H^n(G_1, L(\mu_j))$ только в следующих случаях:

(a) $\mathfrak{g} = A_l$ $(l \geq 2)$, $n = j+1$ *и* $j = 1$;
(b) $\mathfrak{g} = B_l$ $(l \geq 2), C_l$ $(l \geq 3), D_l$ $(l \geq 4)$, $n = j+2$ *и* $j = 1$;
(c) $\mathfrak{g} = A_l$ $(l \geq 2)$, $n = j-1$ *и* $j \in \{2, 3, \cdots, s-1\}$;
(d) $\mathfrak{g} = B_l$ $(l \geq 2), C_l$ $(l \geq 3), D_l$ $(l \geq 4)$, $n = j$ *и* $j \in \{2, 3, \cdots, s-1\}$;

Теоремы 1 и 2 описывают все нетривиальные изоморфизмы между обычными и ограниченными когомологиями классических модулярных алгебр Ли с коэффициентами в простых модулях со старшими весами $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s;\ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{s-1}$.

Теорема 3. *Пусть G – полупростая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > h$, где h – число Кокстера, G_1 – ядро Фробениуса для G. Запишем λ_i в виде: $\lambda_i = w_i \cdot 0 + p\nu_i$, где w_i – элемент группы Вейля W, ν_i – доминантный элемент некоторого аффинного алькова. Тогда имеет место нетривиальный изоморфизм $H^n(G_1, L(\lambda_i)) \cong H^n(G, L(\lambda_i))$ только для $n = i$ и $i \in \{1, 2, \cdots, t_\lambda\}$.*

$$\text{Здесь } t_\lambda = \begin{cases} s, & \text{если } \mathfrak{g} = A_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, \\ s-l+1, & \text{если } \mathfrak{g} = B_l, \\ s-1, & \text{если } \mathfrak{g} = C_l. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть G – полупростая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > h$, где h – число Кокстера, G_1 – ядро Фробениуса для G. Запишем μ_j в виде: $\mu_j = u_j \cdot 0 + p\delta_j$, где u_j – элемент группы Вейля W, δ_j – доминантный элемент некоторого аффинного алькова. Тогда имеет место нетривиальный изоморфизм $H^n(G_1, L(\mu_j)) \cong H^n(G, L(\mu_j))$ только в следующих случаях:*

(a) $\mathfrak{g} = A_l$ $(l \geq 2)$, $n = j+1$ *и* $j = 1$;
(b) $\mathfrak{g} = B_l$ $(l \geq 2), C_l$ $(l \geq 3), D_l$ $(l \geq 4)$ $n = j+2$ *и* $j = 1$;
(c) $\mathfrak{g} = A_l(l \geq 2)$, $n = j-1$ *и* $j \in \{2, 3, \cdots, s-1\}$;
(d) $\mathfrak{g} = B_l(l \geq 2)$, $n = j$ *и* $j \in \{2, 3, \cdots, t_\lambda\}$;
(e) $\mathfrak{g} = C_l(l \geq 3), D_l$ $(l \geq 4)$ $n = j$ *и* $j \in \{2, 3, \cdots, t_\mu\}$;

$$\text{Здесь } t_\lambda \text{ – что и в теореме 1 и } t_\lambda = \begin{cases} s-1, & \text{если } \mathfrak{g} = D_l, \\ s-2, & \text{если } \mathfrak{g} = C_l. \end{cases}$$

Теоремы 3 и 4 описывают все нетривиальные изоморфизмы между обычными когомологиями классических модулярных алгебр Ли и соответствующими когомологиями алгебраических групп с коэффициентами в простых модулях со старшими весами
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s;\ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{s-1}$.

Funding: Автор был поддержан грантом AP08855935 МОН РК.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебраическая группа, простой модуль, когомология, обычная когомология, ограниченная когомология.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B20, 17B45, 20G05.

Литература

[1] Ibraev Sh.Sh. Some Weyl modules and cohomology for algebraic groups, *Comm. Algebra.*, **48**:2 (2020), 3859 – 3873.

— ⁂ —

Одно свойство автоморфизма Нагаты

Рашид Конырбаевич КЕРИМБАЕВ

Казахский национальный университет имени ал-Фараби
E-mail: ker_im@mail.ru ,

Автоморфизм Нагаты δ задается следующими многочленами:

$$\delta(x) = x - 2\left(xz + y^2\right)y - \left(xz + y^2\right)^2 z;$$

$$\delta(y) = y + (xz + y^2)z;$$

$$\delta(z) = z.$$

K- поле, $A = Aut\,(K\,[x, y, z])$-группа автоморфизмов кольца многочленов $K\,[x, y, z]$, KA - ее группавая алгебра. Если $\varphi, \psi \in KA$, то положим $(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $t \in \{x, y, z\}$. Инварианты маирицы Якоби автоморфизма Нагата являются следующие многочлены:

$$I_1 = I_1(x, y, z) = 3 - 2\left(xz + y^2\right)z^2 - \text{след матрицы Якоби}$$

$$I_2 = I_2(x, y, z) = 3 - 2\left(xz + y^2\right)z^2 - \text{след союзной мтрицы,}$$

$$I_3 = I_3(x, y, z) = 1 - \text{якобиан.}$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. $\delta(I_1) = I_1, \quad \delta(I_2) = I_2, \quad \delta(I_3) = I_3.$

Теорема Гамильтона-Кэли выполняется для матрицы Якоби, но для автоморфизма Нагаты не выпоняется. Действительно, $\varphi = \delta^3 - I_1\delta^2 + I_2\delta - \; I_3\varepsilon \neq 0$, а именно $\varphi(z) = 0$, $\varphi(y) = 0$, $\varphi(x) = -2\left(xz + y^2\right)^2\left(2y + 3\left(xz + y^2\right)z\right)z^2 \neq 0$. Несмотря для автоморфизма Нагаты справедлива следующая теорема.

Теорема. $\delta^3 - 3\delta^2 + 3\delta - \varepsilon = 0$, те есть $(\delta - \varepsilon)^3 = 0$, где ε - тождественный автоморфизм. Другими словами, справедливо следующее равенство $\delta^3 - I_1(0)\,\delta^2 + I_2(0)\,\delta - \; I_3\varepsilon = 0$.

— ⁕⁕⁕ —

Об алгебрах бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий с нетривиальным определимым замыканием

Бейбут Шайыкович КУЛПЕШОВ[1,a], Сергей Владимирович СУДОПЛАТОВ[2,3,4,b]

[1] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
[2] *Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[3] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*
[4] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]*b.kulpeshov@kbtu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

Данный доклад касается понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально изученного в [1]. Пусть $A \subseteq M$, где $\mathcal{M}$ — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ справедливо $c \in A$. *Слабо циклически минимальная структура* есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, K, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть $\mathcal{M}$ — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группа G называется *k-транзитивной*, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \ldots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \ldots, g(a_k) = b_k$. *Конгруэнцией* на $\mathcal{M}$ называется любое G-инвариантное отношение эквивалентности на $\mathcal{M}$. Группа G называется *примитивной*, если G является 1-транзитивной и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на $\mathcal{M}$.

Пусть f — унарная функция в M с $Dom(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим что f является *монотонной вправо (влево) на I*, если она сохраняет (обращает) отношение K, т.е. для любых $a, b, c \in I$ таких, что $K(a, b, c)$, мы имеем $K(f(a), f(b), f(c))$ $(K(f(c), f(b), f(a)))$.

Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория имеет *ранг выпуклости* 1, если не существует определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

В работе [2] были описаны счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 с нетривиальным определимым замыканием с точностью до бинарности.

Алгебры бинарных формул являются инструментом для исследования связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Мы будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [3, 4], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$, не имеющая параметров и такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S_1(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, можно также найти в работах [3, 4]. В последние годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в работах [5]–[8].

В настоящем докладе мы обсуждаем алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1 с 1-транзитивной непримитивной группой автоморфизмов и нетривиальным определимым замыканием. Также мы представляем критерий коммутативности таких алгебр. Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $dcl(a) \neq \{a\}$ для некоторого*

$a \in M$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_M$ бинарных изолирующих формул коммутативна $\Leftrightarrow$ существует $\emptyset$-определимая нетривиальная монотонная вправо биекция на M.

Funding: Данное исследование поддержано Министерством образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544) и Российским научным фондом (Проект 22-21-00044).

Ключевые слова: слабая циклическая минимальность, алгебра бинарных изолирующих формул, коммутативность.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15.

Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly* **51**:4 (2005), 377–399.

[2] Kulpeshov B.Sh. On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures, *Mathematical Logic Quarterly* **52**:6 (2006), 555–574.

[3] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, Издательство НГТУ, Новосибирск (2018).

[4] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports* **11** (2014), 362–389.

[5] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах, *Алгебра и логика*, **56**:1 (2017), 20–54.

[6] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **57**:6 (2018), 662–683.

[7] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий, *Алгебра и логика*, **59**:4 (2020), 432–457.

[8] Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **60**:4 (2021), 369–399.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О типах предгеометрий кубических теорий

МАЛЫШЕВ С.Б.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

Приводится описание видов предгеометрий [1] для кубических теорий [2], [3]. Вводятся новые понятия c-предгеометрии, c-модулярности и c-локально конечности:

Определение. *c-Предгеометрией называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{acl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:*

1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{acl}(X)$;

2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(X)) = \mathrm{acl}(X)$;

3) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{acl}(X)$, то $a \in \mathrm{acl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

Определение. *c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется* c-модулярной, *если для любых* acl-*замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$,* т.е. *для любых* конечномерных acl-*замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:*

1) если существует бесконечномерный куб C, для которого $X \cap Y \cap C = \emptyset$, $X \cap C \neq \emptyset$, $Y \cap C \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) +$$
$$+\rho(X \cap C, Y \cap C) = \dim_c((X \cup Y) \cap C), \tag{1}$$

где $\rho(X \cap C, Y \cap C)$ — кратчайшее расстояние между вершинами $x \in X \cap C$ и $y \in Y \cap C$;

2) в остальных случаях для компонент связности C выполняется равенство:

$$\dim_c(X \cap C) + \dim_c(Y \cap C) - \dim_c(X \cap Y \cap C) = \dim_c((X \cup Y) \cap C). \tag{2}$$

Определение. *c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется* локально конечной, *если для любого конечного подмножества $A \subseteq S$, множество $\mathrm{cl}(A)$ конечно.*

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) насыщенной модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняется одно из следующих двух условий:*

1) все компоненты связности модели M конечны и имеют ограниченную мощность, а предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная;

2) модель M имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ, а c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ является c-модулярной.

Теорема 2. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняется следующее условие:*

c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ не является c-локально конечной тогда и только тогда, когда имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < Inv_T(n) < \infty$.

Следствие. *Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R\rangle$ теории T выполняется одно из следующих условий: 1) c-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ является c-локально конечной; 2) алгебраическое замыкание любого множества $A \subseteq M$ бесконечно.*

Funding: Настоящее исследование поддержано Российским научным фондом, проект No 22-21-00044.

Ключевые слова: предгеометрия, кубическая теория, c-предгеометрия, c-модулярность, c-локально конечность.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C30, 05C63.

Литература

[1] Pillay A. *Geometric Stability Theory*, Oxford : Clarendon Press (1996).

[2] Sudoplatov S.V. *Group polygonometries*, Novosibirsk : NSTU (2013).

[3] Sudoplatov S.V. Models of cubic theories, *Bulletin of the Section of Logic*, **43**:1-2 (2014), 19–34.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Алгоритм определения непустоты множество решения систем линейных уравнений с параметрами

А.Р. МАМАТОВ[1,a], Н.Р. ЗАРИПОВА[2]

[1] *Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова, Самарканд, Узбекистан*

[2] *Специализированная общеобразовательная школа №33, Самаркандская область, Нарпайский район, Узбекистан*

E-mail: [a]akmm1964@rambler.ru

Пусть заданы множества

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\}, Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, \quad Ax + By = b\}.$$

Здесь $x, f_*, f^* \in \mathbb{R}^n, y, g_*, g^* \in \mathbb{R}^l, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{mxn}, B \in \mathbb{R}^{mxl}, rankB = m < l.$

Рассматривается задача: требуется определить, для любого параметра $x \in X$ соответствующая множество $Y(x)$ пусто или нет.

Предлагается алгоритм решения рассматриваемой задачи.

Алгоритм иллюстрируются на примерах при:

$$a) f_* = -10, f^* = 3, g_*' = (0;0;0;0;0), g^{*\prime} = (6;7;100;100;100),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b' = (4;10;5).$$

$$c) f_* = (-5; -30; 0), f^* = (3; 25; 40),$$
$$g_* = (-109; -6; -101; -10; -3), g^* = (44; 6; 298; 10; 15),$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b' = (5; 4)$$

Ключевые слова: система линейных уравнений, параметр, алгоритм.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24.

— ⁂ —

О числе счетных моделей мультипликативной теории натуральных чисел

Икромжон УКТАМАЛИЕВ

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: i.uktamaliev@g.nsu.ru

В монографии [1] поставлена проблема описания распределения простых над конечными множествами, предельных и остальных счетных моделей для различных естественных классов теорий алгебраических систем.

Определение. [1], [2] Набор $(P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$, состоящий из числа простых, числа предельных и числа остальных счётных моделей теории T, называется *тройкой распределения числа счетных моделей* теории T и обозначается через $\mathrm{cm}_3(T)$.

Для теорий T с континуальным числом типов число счётных моделей равно 2^ω, и, значит, хотя бы одно из значений $P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T)$ равно 2^ω. В [1] и [2] установлена следующая:

Теорема 1. *В предположении континуум-гипотезы для любой немалой теории T тройка $\mathrm{cm}_3(T)$ принимает одно из следующих значений:* 1) $(2^\omega, 2^\omega, \lambda)$, *где* $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$; 2) $(0, 0, 2^\omega)$; 3) $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, *где* $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \{\omega, 2^\omega\}$. *Все указанные значения имеют реализации в классе немалых теорий.*

Используя [3] и [4], доказана следующая теорема путем рассмотрения моноида $\mathbb{Q}^+$ вместо группы $\mathbb{Q}$, а также его модификаций.

Теорема 2. Для теории $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle)$ в тройке распределения $\mathrm{cm}_3(T)$ имеет место $P(T) = 2^\omega$, $L(T) = 2^\omega$ и $\mathrm{NPL}(T) = 2^\omega$.

Ключевые слова: счетная модель, мультипликативная теория натуральных чисел.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C15, 03C30.

Литература

[1] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 2.*, Новосибирск: Изд-во НГТУ (2018).

[2] Popkov R.A., Sudoplatov S.V. Distributions of countable models of theories with continuum many types, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **12** (2015), 267–291.

[3] Попков Р.А. О числе простых и предельных моделей теории аддитивной группы целых чисел, *Вестник Омского университета*, **72**:2 (2014), 34–36.

[4] Попков Р.А. Распределение счетных моделей теории группы целых чисел, *Сиб. матем. журн.*, **56**:1 (2015), 185–191.

— ⁂ —

Almost o-minimal theories and 1-conservative pair of models

Bektur BAIZHANOV[a], Zhanar ADIL[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]z.adil@math.kz

Let $p, q \in S_1(A)$, A be a set in a saturated model $\mathfrak{M}$ of weakly o-minimal theory. One-type p is not almost orthogonal to q ($p \not\perp^a q$) [1], if there is an A-formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ such that for any $\bar{\alpha} \in p(\mathfrak{M})$, there are $\beta_1, \beta_2 \in q(\mathfrak{M})$ such that $\beta_1 < \phi(M, \alpha) < \beta_2$. The binary relation $\not\perp^a$ on the set of all 1-types over A is a relation of equivalence for weakly o-minimal theory [1]. We say that weakly o-minimal theory is *almost o-minimal* if for two 1-types p, q, non weakly orthogonality implies non almost orthogonality.

Let T be an almost o-minimal theory and $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be models of theory T such that $\mathfrak{N}$ is a 1-conservative extension of $\mathfrak{M}$.

Take elements $\bar{c}, d \in N \setminus M$. Suppose that $tp(\bar{c}/M)$ and $tp(d/M)$ are definable and $tp(d/M \cup \bar{c})$ is non-definable. Then by [2], there exists $(M \cup \bar{c})$-definable formula $H(x, \bar{y}, \bar{c})$ with condition

$$\mathfrak{N} \models \forall \bar{y} [\forall z_1 \forall z_2 ((H(z_1, \bar{y}, \bar{c}) \wedge \neg H(z_2, \bar{y}, \bar{c})) \to z_1 < z_2)]$$

such that for any $(M \cup \bar{c})$-definable formula $\theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c})$ holds two-side convergence for exactly one of two formulas $\theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c})$, $\neg\theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c})$:

$$C\big(H(x, \bar{y}, \bar{c}), \theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c}), tp(d/M \cup \bar{c})\big) \bigvee C\big(H(x, \bar{y}, \bar{c}), \neg\theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c}), tp(d/M \cup \bar{c})\big).$$

Suppose that formula $H(x, \bar{y}, \bar{c})$ is two-side convergent to type $tp(d|M \cup \bar{c})$ on $\theta(\bar{y}, \bar{m}, \bar{c})$. Assume that $length(\bar{y}) = 1$. Since $tp(\bar{c}/M)$ is definable there exists controlling formula $D_\theta(y, \bar{m}', \bar{m_1})$. $\theta(M, \bar{m}, \bar{c})$ consists of finite number of convex sets. Since $tp(d/M \cup \bar{c})$ converges on θ, it converges at least on one of those sets, call it θ_i. Then there exists controlling formula for θ_i as well: $D_{\theta_i}(y, \bar{m}', \bar{m_1})$. Let's define elements lying on the right side of element d by following:

$$K(y, d, \bar{m}, \bar{c}) := \exists z (d < z \wedge H(z, y, \bar{m}, \bar{c}) \wedge \theta_i(y, \bar{m}, \bar{c})).$$

Following [1] and [2], we can assume that H is increasing. Let $b_1 \in D_{\theta_i}(M, \bar{m}', \bar{m_1}) \cap \neg K(N, d, \bar{m}, \bar{c})$ and $b_2 \in D_{\theta_i}(M, \bar{m}', \bar{m_1}) \cap K(N, d, \bar{m}, \bar{c})$, $A(y, \bar{m}, b_1, b_2, \bar{c}) := \theta_i(y, \bar{m}, \bar{c}) \wedge b_1 < y < b_2$.

There is a two-side convergence on A as well.

$C(y, b_1, \bar{m}, \bar{c}) := \exists y_1 (b_1 < y < y_1 \wedge H(M, y_1, \bar{m}, \bar{c}) \subset H(M, y, \bar{m}, \bar{c}))$.

$\chi(y, b_1, b_2, \bar{m}, \bar{c}) := \exists y_1 (b_1 < y < y_1 \wedge \forall z (y_1 < z < b_2 \to H(M, y, \bar{m}, \bar{c}) \subset H(M, z, \bar{m}, \bar{c}))) \wedge C(y, b_1, \bar{m}, \bar{c})$.

$L(y_1, y, b_1, b_2, \bar{m}, \bar{c}) := b_1 < y < y_1 \wedge \forall z (y_1 < z < b_2 \to H(M, y, \bar{m}, \bar{c}) \subset H(M, z, \bar{m}, \bar{c})) \wedge C(y, b_1, \bar{m}, \bar{c})$.

Now we intersect formula $\chi(M, b_1, b_2, \bar{m}, \bar{c})$ with $D_{\theta_i}(M, \bar{m}, \bar{m_1})$ and get on M some cut with element α. Then $tp(\alpha/M)$ is irrational. We expand $tp(\alpha/M) \subset tp(\alpha/M \cup \bar{c})$. Then $tp(\alpha/M \cup \bar{c})$ is not weakly orthogonal to $tp(d/M \cup \bar{c})$. Since we assume that non weakly orthogonality leads to non almost orthogonality, there exists formula $\psi(y, \bar{m}, \bar{c}, d)$ such that $\mathfrak{N} \models \exists y \psi(y, \bar{m}, \bar{c}, d)$. Since $\mathfrak{M} \prec_{1,c} \mathfrak{N}$, there exists element α whose type over M is irrational which contradicts 1-conservatism of models. Thus for almost o-minimal theory the existence of non-definable type by formula with variable of length 1 leads to contradiction with supposition of 1-conservative extension.

Funding: The second author was supported by the grant no. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: definability, conservative pair, almost o-minimal theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C40.

References

[1] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382-1414.

[2] Baizhanov B.S. Definiability of 1-Types in Weakly O-Minimal Theories, *Siberian advances in mathematics*, **16**:2 (2006), 1-33.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

External definability and expansion in ordered omega-stable theories

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Fatima SARGULOVA[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz*, [b]fsargulova@gmail.com

Let $\mathfrak{M}$ be elementary substructure of $\mathfrak{N}$. Let $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ and $p := tp(\alpha|M)$. Then for any formula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ define the predicate $R_{(\psi,p)}(\bar{y})$ on the set M, $\models R_{(\psi,p)}(\bar{a})$ iff $\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in tp(\bar{\alpha}|M)$ iff $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{\alpha}, \bar{a})$. Denote by $\mathfrak{M}^+ = \langle M; \Sigma^+ \rangle$, where $\Sigma^+ := \{R_{(\psi,p)}(\bar{y}) | p \in S(M),\ \psi \in \Sigma\}$. This expansion is called to be *external expansion*.

Macpherson-Marker-Steinhorn [1] and B. Baizhanov [2] considered expansion of models of o-minimal theories by convex sets that are external definable and proved that this expansion has weakly o-minimal theory. B. Baizhanov [3] proved that expansion by family of convex sets model of weakly o-minimal theory has weakly o-minimal theory and the formulas of expanded model are externally definable. S. Shelah [4] proved that any expansion of model of NIP theory by external definable set has NIP theory. A.Pillay [5] and V. Verbovskiy [6] reproved Theorem of Shelah.

B.Baizhanov-S.Baizhanov obtained some sufficient condition that expansion by all externally definable sets admits quantify elimination.

Theorem [7]. *Let T be a complete theory such that for any set A the following holds:*

1) For any $p \in S_1(A)$, for any $\bar{\gamma}$, $QV_p(\bar{\gamma}) = V_p(\bar{\gamma})$

2) For any $p, q \in S_1(A)$ the following holds. If $p \not\perp^a q$, then $q \not\perp^a p$.

Then for model of the theory T the expansion by all externally definable subsets admits quantifier elimination.

In our report we will discuss the expansion by all external definable sets of the models of o-omega-stable theory.

Keywords: expansion, external definability.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C40.

References

[1] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Translations of the American Mathematical Society, 352 (2000).

[2] B.S. Baizhanov, Extensions of o-minimal structures by convex unary predicates, In the book: ”Research in the theory of algebraic systems” (editor T.A. Nurmagambetov), Karaganda State University, 1995, 3-32. (in Russian)

[3] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), 1382-1414.

[4] S. Shelah, Dependent first order theories. Continued, Israel Journal of Mathematics 173:1 (2009).

[5] V. Verbovskiy, Dependent theories. The Shelah’s theorem, Proceeding of International conference ”Contemporary problems of mathematics, informatics and control”, dedicated to 60th anniversary of M.B. Aidarkhanov, October 2-3 (2008), Almaty.

[6] A. Pillay, On externally definable sets and a theorem of Shelah, Algebra, logic, set theory, Stud. Log.(Lond.), (2007) pdfs.semanticscholar.org 6.

[7] B.S. Baizhanov, S,S Baizhanov, Some questions on external definability. News of The National Academy of Sciences of the Republic Of Kazakhstan-Series Physico-Mathematical (2019), v.6 N.328, pp 146-150.

— ⁂ —

Expansion by constants and reducing the number of countable models

Bektur BAIZHANOV[1,a], Olzhas UMBETBAYEV[1,2,b], Tatyana ZAMBARNAYA[1,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz,* [b]*umbetbayev@math.kz,* [c]*zambarnaya@math.kz*

Let T be a countable complete theory in a countable language $\mathcal{L}$. The well-known Vaught's conjecture asks if $I(T,\aleph_0) > \aleph_0$ implies $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. We are investigating whether this number of countable non-isomorphic models is preserved when a new constant is added to the language. Since non-small theories have the maximal number of countable models, we restrict to a small theory T.

Let $p \in S(T)$ be non-principal, $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_n) \notin \mathcal{L}$ be a tuple of new constants. Denote $T^* := T \cup p(\bar{c})$. This is an $\mathcal{L}^*$ -theory, where $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. The transition from T to T^* preserves different properties of a theory. If the theory T is ω-stable, $\aleph_1$-categorical, o-minimal, weakly o-minimal, o-stable, (N)IP or (N)SOP, then so is T^*. If $I(T^*,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$, then $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. R.E. Woodrow gave an example of a theory T such that $I(T,\aleph_0) = 4$ and $I(T^*,\aleph_0) = \aleph_0$ for some T^* [1]. M.G. Peretyatkin constructed an example of a theory T such that $I(T,\aleph_0) = 3$ and $I(T^*,\aleph_0) = \aleph_0$ [2]. He also asked if there exists a theory T such that $I(T,\aleph_0)$ is finite or countable and $I(T^*,\aleph_0) < I(T,\aleph_0)$. A.D. Taimanov asked if it is possible that $I(T,\aleph_0) = 2^{\omega}$ and $I(T^*,\aleph_0)$ is finite or countable. In [3] B. Omarov proved that for every $n < \omega$ there exists a theory T_n such that $I(T_n,\aleph_0) = n+5$ and $I(T_n^*,\aleph_0) = 5$. He showed that the case $I(T,\aleph_0) = \aleph_0$, $I(T^*,\aleph_0) < \omega$ is also possible, and tried to construct an example with $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ and $I(T^*,\aleph_0) < \omega$. Taimanov's question is still open. Thus, we study if such a reduction from a theory with $2^{\aleph_0}$ countable models to an extension with a finite or countable number of countable models is possible.

Definition. Let $\mathfrak{M}$ be a countable saturated model of a countable theory T. Let $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(T)$ be non-principal. The type p is said to be not almost orthogonal to the type q, $p \not\perp^a q$, if there exists a formula $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ such that for some (equivalently, for every) realization $\bar{\alpha} \in p(\mathfrak{M})$ $\emptyset \neq \varphi(M,\bar{\alpha}) \subsetneq q(\mathfrak{M})$.

Note that, in general, the relation of not almost orthogonality is transitive, but not symmetric. A equivalence relation can be defined by setting $p \sim_{\not\perp^a} q$ if and only if $p \not\perp^a q$ and $q \not\perp^a p$. In weakly o-minimal theories the relation of not almost orthogonality is symmetric.

Hypothesis. *Let T be a small countable complete theory of a countable language T^*. Let $I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. Then there exists a non-principal type $p \in S_1(T)$ such that $I(T^*,\aleph_0) \leq \omega$, where $T^* := T \cup p(c)$ and c is a new constant, if and only if the following holds:*

1) There exists a family of non-principal 1-types $p, p_1, p_2, ..., p_n, ... \in S_1(T)$ $(n < \omega)$ such that $tp(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}) \perp^a p_j$ for all $k < \omega$, and all pairwise different $i_1, i_2, ..., i_k, j < \omega$ such that $\alpha_{i_1} \in p_{i_1}(\mathfrak{M})$, $\alpha_{i_2} \in p_{i_2}(\mathfrak{M}), ..., \alpha_{i_k} \in p_{i_k}(\mathfrak{M})$, where $\mathfrak{M}$ is a countable saturated model of T.

2) For every $i < \omega$ we have $p \not\perp^a p_i$.

3) For every non-principal $q \in S_1(T)$ either $q \sim_{\not\perp^a} p$, or $q \sim_{\not\perp^a} p_i$ for some $i < \omega$.

Funding: The second and third authors were supported by the grant no. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, number of countable models, expansion by constants.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15.

References

[1] Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models, *The Journal of Symbolic Logic*, **43** (1978), 442–445.

[2] Peretyatkin M.G. Theories with three countable models, *Algebra and Logic*, **19**:2 (1980), 224–235.

[3] Omarov B. Nonessential extensions of complete theories, *Algebra and Logic*, **22**:5 (1983), 390–397.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Almost even colored necklaces

A.S. Dzhumadil'daev[a], S.A. Abdykassymova[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [a] askar56@gmail.com, [b] saule_asan@hotmail.com

A necklace with n beads and q colors is a sequence $m = (i_1, \dots, i_n)$ with components $i_l \in Q$, where Q is set of colors. Usually Q is identified by the set $\{1, 2, \dots, q\}$ or by $\{0, 1, \dots, q-1\}$. Let M is set of necklaces. For $m \in M$ we say that m has *color type* $(l_1, \dots, l_n)$ if l_i is number of components of m equal to $i \in Q$. So, l_i is a number of beads colored by color i.Then $\sum_{i=1}^{q} i l_i = n$ where $l_i \geq 0$, for any $i \in Q$. Necklace m is called *even colored*, if l_i is even for all $i \in Q$. Necklace m is called *almost even colored*, if l_i is even for all $i \in Q$. except, may be one $i_0 \in Q$.

Recall that a sequence $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, with $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ is called partition of m with length k if $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = m$. For λ, partition of m with length k, we use the following notations: $\lambda \vdash m$, $k = l(\lambda)$ and $\lambda = 1^{p_1} 2^{p_2} \cdots m^{p_m}$, where p_i is multiplicity of i. Let

$$q_{(i)} = q(q-1)\cdots(q-i+1)$$

be falling factorial. For even n we set

$$L_n(q) = \sum_{\lambda \vdash n/2} \frac{n!}{2!^{p_1} 4!^{p_2} \cdots n!^{p_{n/2}} p_1! p_2! \cdots p_{n/2}!} \; q_{(l(\lambda))}.$$

Theorem 1. *Let $\mathcal{L}(x,q)$ be exponential generating function for polynomials $L_n(q)$. Then*

$$\mathcal{L}(x,q) = \cosh^q x (1 + q \tanh x).$$

In terms of hyperbolic cosines and sines

$$\mathcal{L}(x,q) = -\delta_0(q)\, \frac{(q-1)!!}{q!!} + 2^{1-q} \sum_{i=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \binom{q}{i} \left(\cosh{(q-2i)x} + (q-2i)\sinh{(q-2i)x}\right),$$

where

$$\delta_0(q) = \begin{cases} 1, & \text{if } q \text{ is even} \\ 0, & \text{if } q \text{ is odd} \end{cases}$$

Take place formulas

$$L_{2n-1}(q) = L_{2n}(q),$$

$$L_{2n}(q) = 2^{1-q} \sum_{i=0}^{\lfloor (q-1)/2 \rfloor} \binom{q}{i} (q-2i)^{2n}, \qquad q \geq 0, n > 0,$$

$$L_{2n}(q) = (2x\partial - q)^{2n} ((1+x)/2)^q|_{x=1},$$

where $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$,

$$L_{2n}(q) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{2i}(2i(q+1)-2n)L_{2(n-i)}(q),$$

$$L_{2n}(q_1+q_2) = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}L_{2i}(q_1)L_{2(n-i)}(q_2),$$

$$L_{2n-1}(q_1+q_2) - L_{2n-1}(q_1) - L_{2n-1}(q_2) = \sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i}L_{2i-1}(q_1)L_{2n-2i-1}(q_2).$$

Theorem 2. *Number of orbits of almost even colored G-necklaces can be obtained from (q,u)-cyclic index by umbral method, by substituting L-polynomial instead of u-powers,*

$$N_{G,M,0}(q) = Z_{G,M}(q,u))\big|_{u^i \to L_{i+\delta_i}(q)}.$$

Moreover,

$$Z_{G,M}(-q,u)\big|_{u^i \to L_{i+\delta_i}(q)} = 0$$

is identity.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08855944 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: necklaces, Polya enumeration, even type sequences.

2010 Mathematics Subject Classification: 05A10, 05A15, 05A18.

References

[1] G. Pólya. *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen,* Acta Math., vol. 68 (1937), pp. 145-253.

[2] N. J. Fine *Classes of periodic sequences,* Illinois J. Math., 2 (1958), pp. 285-302.

[3] E.N. Gilbert, J.Riordan, *Symmetry types of periodic sequences,* Illinois J.Math. 5 (1961), no.4, pp. 657– 665.

[4] N.G. de Bruijn, *Generalization of Pólya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis,* Ind. Math. 21 (1959), pp. 59-69.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Jordan elements in a free assosymmetric algebras

Yerdaulet KUDAIBERGEN[a], Farukh MASHUROV[b]

Suleiman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

E-mail: [a]*m.erdaulet@gmail.com,* [b]*f.mashurov@gmail.com*

Assosymmetric algebras are defined by the following left-symmetric and right-symmetric identities:

$$(x,y,z) = (x,z,y), \quad (x,y,z) = (y,x,z),$$

where $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ [1]. We describe Jordan elements up to degree 5 in a free assosymmetric algebra generated by three elements.

Let $F(X)$ and $A(X)$ be a free nonassociative and assosymmetric algebras on the set X, respectively. We define *reversal* operator ρ on $F(X)$ as linear mapping $\rho : F(X) \to F(X)$ defined as follows

$$\rho(x_i) = x_i, \ \textit{for } x_i \in X,$$

$$\rho(uv) = \rho(v)\rho(u), \ \textit{for } u, v \in F(X).$$

If $u \in F(X)$, then $\rho(u)$ is called the reverse of u, and u is reversible, if $\rho(u) = u$.

Theorem 1. *Every reversible element $u \in F(\{x_1, x_2, x_3\})$, with length ≤ 4 is Jordan element in a free assosymmetric algebra $A(\{x_1, x_2, x_3\})$.*

Funding: The authors were supported by the grant "Tauelsizdik urpaqtary" of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan and by internal grant of the Suleiman Demirel University.

Keywords: assosymmetric algebras, Jordan elements.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50.

References

[1] Kleinfeld E. Assosymmetric rings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8** (1957), 983–986.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On constant expansions of dense spherical orders

Beibut KULPESHOV[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]*b.kulpeshov@kbtu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We consider theories of constant expansions of n-spherical orders K_n [1, 2] which naturally generalize linear orders K_2 and circular orders K_3 [3, 4, 5].

A *n-spherical* order relation, for $n \geq 2$, is described by a n-ary relation K_n satisfying the following conditions:
(nso1) $\forall x_1, \ldots, x_n (K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to K_n(x_2, \ldots, x_n, x_1))$;
(nso2) $\forall x_1, \ldots, x_n \Bigg((K_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \wedge$

$$\wedge K_n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)) \leftrightarrow \bigvee_{1 \leq k < l \leq n} x_k \approx x_l \Bigg)$$

for any $1 \leq i < j \leq n$;
(nso3) $\forall x_1, \ldots, x_n \Bigg(K_n(x_1, \ldots, x_n) \to$

$$\to \forall t \left(\bigvee_{i=1}^{n} K_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right) \Bigg);$$

(nso4) $\forall x_1, \ldots, x_n (K_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \vee$

$$\vee K_n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)), \ 1 \leq i < j \leq n.$$

A n-spherical order K_n is called *dense* if it contains at least two elements and for each $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in K_n$ with $a_1 \neq a_2$ there is $b \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ with $\models K_n(a_1, b, a_3, \ldots, a_n) \wedge K_n(b, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Structures $\mathcal{A}_n = \langle A_n, K_n \rangle$ with (dense) n-spherical orders are called (*dense*) *n-spherical orders*, too, and the theories $T_n = \mathrm{Th}(\mathcal{A}_n)$ are called the (*dense*) *n-spherical theories.*

Theorem 1. *Let T be a countable constant expansion of the dense n-spherical theory T_n, $n \geq 3$. Then either T has 2^ω countable models or T has exactly $\prod_{k \in n \setminus \{1\}} (2^k + 2)^{r_k}$ countable* *models, where r_k are natural numbers. Moreover, for any $r_0, \ldots, r_{n-1} \in \omega$ there is an aforesaid theory T with exactly $\prod\limits_{k \in n \setminus \{1\}} (2^k+2)^{r_k}$ countable models.*

Funding: This research has been funded by Science Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), and by Russian Scientific Foundation (Project No. 22-21-00044).

Keywords: spherical order, number of countable models.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15, 03C50.

References

[1] Sudoplatov, S.V. Arities and aritizabilities of first-order theories, *arXiv:2112.09593v1 [math.LO]* , (2021).

[2] Sudoplatov, S.V. Almost n-ary and almost n-aritizable theories, *arXiv:2112.10330v1 [math.LO]* , (2021).

[3] Kulpeshov, B.Sh., Macpherson, H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly*, **51**:4 (2005), 377–399.

[4] Altaeva, A.B., Kulpeshov, B.Sh. On almost binary weakly circularly minimal structures, *Bulletin of Karaganda University, Mathematics*, **78**:2 (2015), 74–82.

[5] Kulpeshov, B.Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures, *Eurasian Mathematical Journal*, **7**:2 (2016), 38–49.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

On topological quasivarieties generated by certain finite modular lattices

Svetlana LUTSAK[a], Olga VORONINA[b]

M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan

E-mail: [a]sveta_lutsak@mail.ru, [b]oavy@mail.ru

Recall that a quasivariety is a class of algebras of the same type that is closed with respect to subalgebras, direct products (including the direct product of an empty family), and ultraproducts. The smallest quasivariety containing a class $\mathbf{K}$ is denoted by $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$. If $\mathbf{K}$ is a finite family of finite algebras then $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ is called finitely generated. If $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}\}$ we write $\mathbf{Q}(\mathcal{A})$.

A finite algebra $\mathcal{A}$ with discrete topology τ generates a topological quasivariety $\mathbf{Q}_\tau(\mathcal{A})$ consisting of all topologically closed subalgebras of non-zero direct powers of $\mathcal{A}$ endowed with the product topology. Profinite algebras are exactly those that are isomorphic to inverse limits of finite algebras. Such algebras are naturally equipped with Boolean topologies. A topology τ is Boolean if it is compact, Hausdorff, and totally disconnected. A topological quasivariety $\mathbf{Q}_\tau(\mathcal{A})$ is standard if every Boolean topological algebra with the algebraic reduct in $\mathbf{Q}(\mathcal{A})$ is profinite. In this case, we say that algebra $\mathcal{A}$ generates a standard topological quasivariety [1].

We construct the specific finite modular lattice $\mathcal{T}$ that does not satisfy to one of the Tumanov's conditions [2] but quasivariety $\mathbf{Q}(\mathcal{T})$ generated by this lattice is not finitely based. We investigate the topological quasivariety generated by the lattice $\mathcal{T}$ and prove that it is not standard. And we would like to note that there is an infinite number of lattices similar to the lattice $\mathcal{T}$.

The main result of this work is as follows.

Theorem 1. *The topological quasivariety generated by the lattice $\mathcal{T}$ is not standard.*

The proof of the Theorem 1 gives us the following more general result.

Theorem 2. *Let $\mathcal{L}$ be a finite lattice such that $\mathcal{M}_{3,3} \not\leq \mathcal{L}$, $\mathcal{T} \leq \mathcal{L}$ and $\mathcal{L}_n \not\leq \mathcal{L}$ for all $n > 1$ ($\mathcal{M}_{3,3}$ and $\mathcal{L}_n$ are certain lattices). Then the topological quasivariety generated by the lattice $\mathcal{L}$ is not standard.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, topological quasivariety.

2010 Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15.

References

[1] Clark D.M., Davey B.A., Freese R.S., Jackson M. Standard topological algebras: syntactic and principal congruences and profiniteness, *Algebra Univ.*, **52** (2004), 343–376.

[2] Tumanov V.I. On finite lattices having no independent bases of quasi-identities, *Math. Notes*, **36** (1984), 625–634.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On finite modular lattices and quasivarieties generated by them

Svetlana LUTSAK[a], Olga VORONINA[b], Gulzhiyan NURAKHMETOVA[c]

M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan
E-mail: [a]sveta_lutsak@mail.ru, [b]oavy@mail.ru, [c]gulzhiayn@mail.ru

A quasivariety is a class of lattices that is closed with respect to subalgebras, direct products, and ultraproducts. Equivalently, a quasivariety is a class of lattices axiomatized by a set of quasi-identities. A quasi-identity is a universal Horn sentence with the non-empty positive part, that is of the form

$$(\forall \bar{x})[p_1(\bar{x}) \approx q_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge p_n(\bar{x}) \approx q_n(\bar{x}) \to p(\bar{x}) \approx q(\bar{x})],$$

where $p, q, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ are lattice's terms. A variety is a quasivariety which is closed under homomorphisms. According to Birkhoff theorem [1], a variety is a class of similar algebras axiomatized by a set of identities. An identity is a sentence of the form $(\forall \bar{x})[s(\bar{x}) \approx t(\bar{x})]$ for some terms $s(\bar{x})$ and $t(\bar{x})$.

In 1970 R. McKenzie [2] proved that any finite lattice has a finite basis of identities. However the similar result for quasi-identities is not true. That is there is a finite lattice that has no finite basis of quasi-identities (V.P. Belkin [3]). The problem "Which finite lattices have finite bases of quasi-identities?" was suggested by V.A. Gorbunov and D.M. Smirnov in [4]. V.I. Tumanov [5] found sufficient condition consisting of two parts under which the locally finite quasivariety lattice has no finite (independent) basis for quasi-identities. Also he conjectured that a finite (modular) lattice has a finite basis of quasi-identities if and only if a quasivariety generated by this lattice is a variety. In general, the conjecture is not true. W. Dziobiak [6] found a finite lattice that generates finitely axiomatizable proper quasivariety. Also we would like to point out that Tumanov's problem is still unsolved for modular lattices.

By $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ we denote the smallest quasivariety containing a class $\mathbf{K}$. If $\mathbf{K}$ is a finite family of finite algebras then $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ is called finitely generated. In the case $\mathbf{K} = \{\mathcal{A}\}$ we write $\mathbf{Q}(\mathcal{A})$ instead of $\mathbf{Q}(\{\mathcal{A}\})$.

The work finds a finite modular lattice $\mathcal{T}$ that does not satisfy to one of the Tumanov's conditions but quasivariety $\mathbf{Q}(\mathcal{T})$ generated by this lattice is not finitely based (has no finite basis of quasi-identities).

Theorem 1. *Quasivariety $\mathbf{Q}(\mathcal{T})$ generated by the lattice $\mathcal{T}$ is not finitely based.*

Moreover, there is an infinite number of lattices similar to the lattice $\mathcal{T}$.

Theorem 2. *Suppose $\mathcal{L}$ is a finite lattice such that $\mathcal{M}_{3,3} \not\leq \mathcal{L}$, $\mathcal{T} \leq \mathcal{L}$ and $\mathcal{L}_n \not\leq \mathcal{L}$ for all $n > 1$ ($\mathcal{M}_{3,3}$ and $\mathcal{L}_n$ are certain lattices). Then quasivariety $\mathbf{Q}(\mathcal{L})$ generated by the lattice $\mathcal{L}$ is not finitely based.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, finite basis of quasi-identities.

2010 Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15.

References

[1] Birkhoff G. Subdirect union in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 764–768.

[2] McKenzie R. Equational bases for lattice theories, *Math. Scand.*, **27** (1970), 24–38.

[3] Belkin V.P. Quasi-identities of finite rings and lattices, *Algebra and Logic*, **17** (1979), 171–179.

[4] Gorbunov V.A., Smirnov D.M. Finite algebras and the general theory of quasivarieties, *Colloq. Mathem. Soc. Janos Bolyai. Finite Algebra and Multipli-valued Logic*, **28** (1979), 325–332.

[5] Tumanov V.I. On finite lattices having no independent bases of quasi-identities, *Math. Notes*, **36** (1984), 625–634.

[6] Dziobiak W. Finitely generated congruence distributive quasivarieties of algebras, *Fund. Math.*, **133** (1989), 47–57.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On pseudofiniteness of equivalence relations

Nurlan MARKHABATOV

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia
E-mail: nur_24.08.93@mail.ru,

The paper [2] raised the question of describing the cardinality and types of approximations for natural families of theories. In the present paper, a partial answer to this question is given, and the study of approximation of natural classes of theories is also continued.

Let $L = \{R\}$, where R is a binary relation symbol. The theory T of equivalence relations is given by the sentences:

$\forall x R(x,x)$,

$\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$,

$\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$.

Definition [1]. An infinite L-structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if for all L-sentences φ, $\mathcal{M} \models \varphi$ implies that there is a finite $\mathcal{M}_0$ such that $\mathcal{M}_0 \models \varphi$. The theory $T = Th(\mathcal{M})$ of the pseudofinite structure $\mathcal{M}$ is called pseudofinite.

Theorem. *Any theory of equivalence relations on an infinite set is pseudofinite.*

Funding: The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855497), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003).

Keywords: pseudofinite theory, equivalence relation.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C50.

References

[1] Ax J. The elementary theory of finite fields, *Ann. Math.*, **88**:2 (1968), 239–271.

[2] Sudoplatov S. V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 715–725. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On approximations of theories of regular graphs

Nurlan MARKHABATOV[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, NSTU, NSU, Russia*
E-mail: [a]*nur_24.08.93@mail.ru*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

The paper [4] raised the question of describing the cardinality and types of approximations for natural families of theories. In the present paper, a partial answer to this question is given, and the study of approximation and topological properties of natural classes of theories is also continued.

Definition [4]. Let $\mathcal{T}$ be a family of theories and T be a theory such that $T \notin \mathcal{T}$. The theory T is said to be *$\mathcal{T}$-approximated,* or *approximated by the family $\mathcal{T}$*, or a *pseudo-$\mathcal{T}$-theory,* if for any formula $\varphi \in T$ there exists $T' \in \mathcal{T}$ for which $\varphi \in T'$.

Definition [2]. A graph $\Gamma = \langle G, R\rangle$ is said to be *homogeneous* if, for $U, V \subseteq G$, the statement that $\langle U, R \upharpoonright U^2\rangle \cong \langle V, R \upharpoonright V^2\rangle$ implies the existence of an automorphism of Γ mapping U to V. Thus, in particular, a *homogeneous graph* is a graph having its own property that any partial isomorphism between finite induced subgraphs extends to an automorphism of the graph.

Definition [3]. *The regular graph* is a graph where each vertex has the same number of neighbors. A regular graph with vertices of degree k is called a *k-regular* graph or regular graph of degree k.

Definition [1]. An L-structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if for all L-sentences φ, $\mathcal{M} \models \varphi$ implies that there is a finite $\mathcal{M}_0$ such that $\mathcal{M}_0 \models \varphi$. The theory $T = Th(\mathcal{M})$ of the pseudofinite structure $\mathcal{M}$ is called pseudofinite.

Theorem. *Any infinite regular graph Γ is pseudofinite and is homogeneous.*

Funding: The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: pseudofinite theory, regular graph, homogeneous.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C50.

References

[1] Ax J. The elementary theory of finite fields, *Ann. Math.*, **88**:2 (1968), 239–271.
[2] Gardiner A. Homogeneous graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, **20**:1 (1976), 94–102.
[3] Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley (1969).
[4] Sudoplatov S. V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 715–725. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049.

— ⁂ —

Differential invariants of one parametrical group of transformations

Khurshid SHARIPOV[a], Jakhongir NORKULOV[b]

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: [a]sh_xurshid@yahoo.com, [b]jaxongirnorkulov93@gmail.com

In this paper differential invariants of Lie group of one parametric transformations of the space of two independent and three dependent variables are studied. It is shown method of construction of invariant differential operator. Obtained results applied for finding differential invariants of surfaces.

Differential invariants of Lie group of transformations are studied in the papers [1-8].

Let G be a Lie group of transformations of the space of two independent u, v and three dependent x_1, x_2, x_3 variables , and following vector field

$$X = \xi_1(u,v,x)\frac{\partial}{\partial u} + \xi_2(u,v,x)\frac{\partial}{\partial v} + \sum_{i=1}^{3} \eta_i(u,v,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

is infinitesimal generator of the group G.

It is known that any Lie group is similar to the group of translations. This property of the groups is remarkable and its use permits simplification of finding of differential invariants of the group [8].

In order to use this possibility we produce the replacement of variables.

Let us consider functions $F_1(u,x)$ and $F_2(v,x)$ which are solutions of following equation $X(F) = 1$. Let $I_1(u,v,x)$, $I_2(u,v,x)$ and $I_2(u,v,x)$ be are functionally independent invariant functions of the group G, i.e. they are satisfy following equations $X(I_i) = 0, i = 1,2,3$.

We will replace the variables in the space of (u, v, x_1, x_3, x_3) by putting

$$s = F_1(u,x), t = F_2(v,x),$$

$$y_i = I_i(u,v,x),$$

where $i = 1,2,3$. Using easy deductions, we can verify that in variables (s,t,y_1,y_2,y_3) the vector field X has the following form

$$\mathbb{X} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

This form of the vector field X shows that the group G is similar to the group of translations. Moreover in the coordinates (s,t,y_1,y_2,y_3) for any $k \in N$ for $k-th$ prolongation $\mathbb{X}^{(k)}$ of the vector field $\mathbb{X}$ it holds equality $\mathbb{X}^{(k)} = \mathbb{X}$ [7].

Let us recall differentiation operator D is called invariant differentiation operator with respect group G if it holds $DX(F) = XD(F)$ for any smooth function F[6].

It follows from the form of the vector field $\mathbb{X}$ invariant differentiation operators for the group G are following operators of total derivatives: $D = D_s + D_t$.

Let denote by $D^k(F)$ derivatives $D_s^k + D_t^k(F)$ of order k.

Thus we have the following theorem.

Theorem. *Suppose I_1, I_2, I_3 are independent invariants of the group G, $F_1(u,x)$, $F_2(v,x)$, are solutions of the equation $X(F) = 1$. Then functions $I_i(u,v,x)$ and $D^k(I_i)$ are differential invariants of order k.*

Keywords: Lie group of transformations, differential invariant, vector field, invariant differential operator.

2010 Mathematics Subject Classification: 57R30, 58A10.

References

[1] Alekseevsky D.V., Vinogradov A.M., Lychagin V.V. Basic ideas and concepts of differential geometry. The results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions. - VINITI, Moscow (1988),-298 p.

[2] Golubitskii M., Guiyemin V. Stability maps and their singularities. Moscow publishing house, Mir (1977).

[3] Felix Klein. A comparative review of recent researches in geometry, trans. M. W. Haskell, Bull. New York Math. Soc. 2 (1892-1893), 215-249.

[4] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101, Cambridge: Cambridge University Press (2007) 496.

[5] Narmanov A.,Parmonov H. On the geometry of Hamilton symmetries. *Mathematics and Statistics*, **3**:8 (2020).

[6] Olver P. J. Differential invariants and invariant differential equations, *Lie Groups and their Appl*, **1** (1994), 177-192.

[7] Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer (1993).

[8] Ovsiannikov L. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press (1982).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Two-dimensional Unary Zinbiel algebras

TULENBAYEV K.M.[1,a], KUNANBAYEV A.K.[1,b], NURZHAUOV S.D.[1,c], MAMBETOV S.A.[2,d]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*kaysart1@mail.ru*, [b]*kunanbayev@math.kz*, [c]*dzhamartovich@mail.ru*, [d]*samatcom86@mail.ru*

A nonassociative algebra A over a field K is called a Unary Leibniz algebra if it satisfies the following identity: $(aa)a = 2a(aa)$. It is easy to see that this identity is equal to $(ab)c + (ac)b + (ba)c + (bc)a + (ca)b + (cb)a = 2(a(bc) + a(cb) + b(ca) + b(ac) + c(ab) + c(ba))$. Unary Leibniz algebras were introduced by A.S. Dzhumadil'daev. Nilpotency of Novikov algebras was proved by A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev in [1]. In given thesis we give classification of two-dimensional Unary Leibniz algebras over algebraically closed field of $charK \neq 2$ and find counterexamples to Engel and Nagata-Higman theorems.

Theorem 1. $A = lin\langle e_1, e_2\rangle$. An algebra A over algebraically closed field of $charK \neq 2$ is isomorphic for following types:

$e_1e_1 = 0$	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_1 = 0$
$e_1e_2 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_1e_2 = e_1$	$e_1e_2 = e_1$
$e_2e_1 = 0$	$e_2e_1 = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{4}e_1$	$e_2e_1 = -e_1$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1$
$e_2e_2 = \gamma_1 e_1$	$e_2e_2 = 0$	$e_2e_2 = 0$	$e_2e_2 = \gamma_1 e_1$

Corollary 2. The third type of algebras from Theorem 1 gives counter example to Engel theorem and the fourth type of algebras from Theorem 1 gives counter example to Nagata-Higman theorem.

Funding: The first author is supported by the MES RK grant AP08855944.

Keywords: Nonassociative algebras, Zinbiel algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50.

References

[1] A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbaev Nilpotency of Zinbiel algebras, *J. of Dyn. Control Syst., 11, no. 2,(2005), 195–213*

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Some properties of AP-theories

Aibat YESHKEYEV[a], Indira TUNGUSHBAYEVA[b], Maira KASSYMETOVA[c]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]intng@mail.ru, [c]mairushaasd@mail.ru

Definition.[1] A differential field is a field K with the given differentiation operator $D: K \to K$, such that

$$\forall x \forall y D(x+y) = D(x) + D(y),$$
$$\forall x \forall y D(x,y) = xDy + yDx,$$

where $x, y \in K$.

Definition.[1] A differential field K is called differentially closed if whenever $f, g \in K\{X\}$, g is nonzero and the order of f is greater than the order of g, there exists $a \in K$ such that $f(a) = 0$ and $g(a) \neq 0$.

The following definition is related to differential fields of characteristic p.

Definition.[2] A differentially perfect field F is a differential field such that $F^p = C$.

The theories of differential fields and differentially closed fields of characteristic 0 or p are denoted as DF_0, DF_p, DCF_0, DCF_p respectively. We write DPF_p for the theory of differentially perfect fields of characteristic p.

The main purpose of the work is to consider some of defined theories as Jonsson AP-theories.

Definition.[3] A theory T is called a Jonsson theory if: T has infinite models, T is an inductive theory, T has the amalgam property (AP) and the joint embedding property (JEP).

Definition.[4] A theory T is called to be
1) AP-theory if in theory T amalgam property implies joint embedding property;
2) JEP-theory if in theory T joint embedding property implies amalgam property;
3) AJ-theory if in theory T both properties are equivalent.
Otherwise, we say that for the theory T, the properties of AP and JEP are independent of each other.

The described classes form corresponding subclasses in the class of Jonsson theories. However, there are theories relating to some of the types 1–3, which are not Jonsson.

It can be proved that theories DF_0, DCF_0, DPF_p, DCF_p are AP-theories. Using this fact we obtained the following results:

Theorem 1.[4] *DF_0 is a perfect Jonsson theory.*

Theorem 2.[4] *DCF_0 is the center of DF_0.*

Theorem 3.[4] *DPF_p is a perfect Jonsson theory.*

Theorem 4.[4] *DCF_p is the center of DPF_p.*

Remark. DF_p is not a Jonsson theory, however it has the model companion DCF_p which is a perfect Jonsson theory. At the same time, the perfectness in the differential sense of DPF_p models is sufficient condition of perfectness in Jonsson sense of DPF_p.

All definitions of concepts related to the Jonsson theories can be found in [3], related to differential algebra in [1], [2], [5], [6].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09260237 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Jonsson theory, perfect Jonsson theory, differential field, differential closed field, differentially perfect field, amalgam property, joint embedding property, AP-theory, JEP-theory, strongly convex theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

References

[1] Robinson A. *On the concept of a differentially closed field*, Office of Scientific Research, U.S. Air Force (1959).

[2] Wood C.S. The Model Theory of differential fields of characteristic $p \neq 0$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **40**:2 (1973), 577–584.

[3] Yeshkeyev A.R. *Jonsson theories and their model classes*, izd. KarGU, Karaganda (2016).(in Russian)

[4] Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Kassymetova M.T. Connection between the amalgam and joint embedding properties, *Bulletin of the Karaganda University*, **150**:1 (2022), 127–135.

[5] Wood C.S. Prime model extensions for differential fields of characteristic $p \neq 0$, *Journal of Symbolic Logic*, **39**:3 (1974), 577–584.

[6] Blum L.C. *Generalized algebraic theories: A model theoretic approach (PhD thesis)*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts (1968).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Existentially positive Mustafin theories of S-acts over a group

A.R. YESHKEYEV[a], O.I. ULBRIKHT [b], A.R. YARULLINA[c],

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]modth1705@mail.ru, [b]ulbrikht@mail.ru, [c]linka14221@mail.ru

Definition. [1] Let A be non-empty set, $\langle S; \cdot, e\rangle$ be monoid. Algebraic system $\langle A; \langle f_\alpha : \alpha \in S\rangle\rangle$ with unary operations f_α, $\alpha \in S$, is called a S-act S, if the following conditions hold: $f_e(a) = a$ for all $a \in A$; $f_{\alpha\beta}(a) = f_\alpha(f_\beta(a))$ for all $a \in A$ and all $\alpha, \beta \in S$.

Let $a \in A$, then $S_a = \{f_\alpha(a) : \alpha \in S\}$; if $\bar{a}$ – tuple of elements from A, then $S_{\bar{a}} = \bigcup\limits_{a_i \in \bar{a}} S_{a_i}$. Hereinafter we will consider S-acts over the group G and, correspondingly, S-acts theory over a group.

Definition. [1] Pair $<\mathfrak{h}, \varepsilon>$ is called a characteristic if $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{p}(G), \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}), \varepsilon : Q \to [\infty] \cup \omega$ and $\varepsilon(H) = 0 \Leftrightarrow H \notin \mathfrak{h}$.

Definition. [1] Let T be theory of S-acts and have an infinite model. Then 1) T is inductive; 2) if T has the joint embedding property, it also has the amalgamation property; 3) if T is complete, then it admits quantifiers elimination and is a primitive.

Definition. Model A of theory T will be called positively existentially closed with respect to Σ_n-formulas if $\forall\varphi(x) \in \Sigma_n^+$, $\forall a \in A$, for any model $B \supset A$, from the fact that $B \models \varphi(a)$ follows that $A \models \varphi(a)$

Theorem 1.[1]*(1) Every α-Jonsson theory of S-acts is perfect and is Jonsson, $0 \leq \alpha \leq \omega$. 2) Theory T of S-acts is Jonsson $\Leftrightarrow \forall 1 \leq n \leq \omega(T^{(n)}(G) = (T^{(1)}(G))^n)$.*

Definition. Let $0 \leq n \leq \omega$. The theory T is called an existentially positive Mustafin ($\exists PM$-theory) if

1) The theory T has infinite models,
2) theory T is Π^+_{n+2}-axiomatizable,
3) theory T admits $\exists_n JEP$,
4) theory T admits $\exists_n AP$

Theorem 2. *For every $\exists PM$-theory T of S-acts over group there can be possible two cases:*
1. a) T is Jonsson theory, then T is perfect; b) $\exists PJ$-theory T of S-acts is Jonsson $\Leftrightarrow \forall 1 \leq n \leq \omega$ $(T^{(n)}(G) = (T^{(1)}(G))^n)$.
2. T is not Jonsson. Then there is some $\exists PM$-theory T' such that T' is Johnson theory and it is a Kaiser shell for theory T.

Theorem 3.[1]*1) $ch(T_1(\mathfrak{h}, \varepsilon)) = ch(T_2(\mathfrak{h}, \varepsilon)) =<\mathfrak{h}, \varepsilon>$ for any characteristic $<\mathfrak{h}, \varepsilon>$; 2) Jonsson S-acts theories T_1 and T_2 are cosemantic $\Leftrightarrow ch(T_1) = ch(T_2)$; 3) T is Jonsson S-acts theory and $ch(T) =<\mathfrak{h}, \varepsilon>$ iff $T_1(\mathfrak{h}, \varepsilon) \subseteq T \subseteq T_2(\mathfrak{h}, \varepsilon)$.*

Theorem 4.*Let T_1 and T_2 be $\exists PM$-theory of S-acts over group for fixed $0 \leq n \leq \omega$. Then:*
1) $\mathrm{ch}(T_1(\mathfrak{h}, \varepsilon)) = ch(T_2(\mathfrak{h}, \varepsilon)) =<\mathfrak{h}, \varepsilon>$ for any characteristic $<\mathfrak{h}, \omega>$;
2) $T_1 \bowtie_{\exists PM} T_2 \Leftrightarrow ch(T_1) = ch(T_2)$;
3) There will be T as $\exists PM$-theory of S-acts over group such that $ch(T_1) =<\mathfrak{h}, \varepsilon>$ iff $T_1(\mathfrak{h}, \varepsilon) \subseteq T \subseteq T_2(\mathfrak{h}, \varepsilon)$

Theorem 5.*Let K_Π be a class of all S-acts over group,*

$[T_1], [T_2] \in PSp(K_\Pi)/_{\bowtie_{\exists PM}}$. Then

1) if $[T_1]$ and $[T_2]$ are classes of Jonsson $\exists PM$-theories then $C_{[T_1]} \bowtie_{\exists PM} C_{[T_2]} \Leftrightarrow ch([T_1]^*) = ch([T_2]^*)$;

2) if $[T_1]$ and $[T_2]$ are classes of not Jonsson $\exists PM$-theories, then there will be such classes of Jonsson $\exists PM$-theories $[\Delta_1], [\Delta_2] \in PSp(K_\Pi)/_{\bowtie_{\exists PM}}$, that Δ_i is the Kaiser shell for T_i, where $i = 1, 2$ $C_{[\Delta_1]} \bowtie_{\exists PM} C_{[\Delta_2]} \Leftrightarrow ch([\Delta_1]^*) = ch([\Delta_2]^*)$;

3) if $[T_1]$ is a class of Jonsson $\exists PM$-theories, and $[T_2]$ is a class of not Jonsson $\exists PM$-theories, then there will be such Jonsson $\exists PM$-theory Δ, that $C_{[T_1]} \bowtie_{\exists PM} C_{[\Delta]} \Leftrightarrow ch([T_1]^*) = ch([\Delta]^*)$.

All concepts that are undefined here can be found in [2].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09260237 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Jonsson theory, S-acts, theory of S-acts, Jonsson S-acts theory, existentially positive Mustafin theories.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

References

[1] T.G. Mustafin, E.S. Nurkhaydarov, Description of Jonsson S-acts theories over a group, *Research in the theory of algebraic systems* (1995), 67–73. (in Russ.)

[2] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T. *Jonsson theories and their classes of models*, KSU, Karaganda (2016). (in Russ.)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

2 Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Председатели:	профессор Асанова А.Т. профессор Нурсултанов Е.Д. член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
Секретари:	Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.

Обратная задача для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой

Обиджон АБДУЛЛАЕВ

Институт Математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: obidjon.mth@gmail.com

В данной работе рассматривается параболо-гиперболическое уравнение с нелинейной нагрузкой

$$f(x)=\begin{cases} u_{xx}-{}_C\,D^{\alpha}_{oy}u+p_1(x,y;u(x,0)), & \text{при } x>0,\ y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+p_2(x,y;u(x,0)), & \text{при } \ x>0,\ y<0\end{cases} \tag{1}$$

с дифференциальным оператором Капуто

$${}_CD^{\alpha}_{0y}f(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y(y-z)^{-\alpha}f'(z)dz,\quad 0<\alpha<1,$$

где $p_i(x,y;u(x,0))$, $(i=1,2)-$ заданные достаточно гладкие функции.

Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega\subset R^2$, ограниченной отрезками: $A_1A_2=\{(x,y):\ \ x=l,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ \ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):\ y=h,\ 0<x<l\}$ при $y>0$, и характеристиками: $A_1C\,:\ x-y=l$, $B_1C\,:\ x+y=0$ уравнения (1) при $y<0$, где $A_1\,(l;0)\,,\ A_2\,(l;h)\,,\ B_1\,(0;0)\,,\ B_2\,(0;h)\,,$ и $C\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$, $I_1=\left\{x:\ 0<x<\frac{l}{2}\right\}$, $I_2=\left\{x:\ \frac{1}{2}<x<l\right\}$.

Основной целью данной работы является исследовании однозначной разрешимости обратной задачи с нелинейным условием склеивания для уравнения (1).

Задача I. Требуется найти функцию $f(x)$ непрерывную в $(0,l)$ и решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций

$W=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap\ C^2(\Omega^-);\ u_{xx},{}_CD^{\alpha}_{oy}u\in C\left(\Omega^+\right);u(x,y)\in C^1(\bar\Omega^-\setminus A_1B_1)\right\}$ удевлетворяющие краевым условиям:

$$u_x(x,y)\left|_{A_1A_2}\right.=\varphi_1(y),\ \ u_x(x,y)\left|_{B_1B_2}\right.=\varphi_2(y),\ 0\le y<h;$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le\frac{l}{2};$$

$$u_n(x,y)\left|_{B_1C}\right.=\psi_1(x),\ \ 0\le x\le\frac{l}{2},\ \ u_n(x,y)\left|_{A_1C}\right.=\psi_2(x),\ \ \frac{l}{2}\le x\le l;$$

и нелийному условию склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)r\left(t,u(t,0)\right)+\lambda_3(x),\ 0<x<l$$

где $\varphi_i(y)$, $\psi_(x)$, $\psi_i(x)\,(i=1,2)$, $\lambda_k(x)\,(k=\overline{1,3})$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\sum\limits_{k=1}^{2}\lambda_k^2(x)\ne 0$.

Поставленная задача сведется к нелинейному интегральному уравнению типа Фрегольма второго рода, однозначная разрешимость которого доказывается методом последовательных приближений, при определенных условиях на заданных функций и на границу области.

Хотелось бы отметить, что если функции $p_i(x,y;u(x,0))$ $(i=1,2)$ в уравнение (1) не зависять от y, то однозначная разрешимость задачи I сведется к исследованию нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода. Естественно, в этом случае условие на границы области не налагается.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, нелинейная нагрузка, нелинейное условие склеивание, оператор Капуто, нелинейное интегральное уравнение.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35R11.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Об оценках линейных поперечников класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда

Габдолла АКИШЕВ

Казахстанский филиал МГУ, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru,

В докладе будут представлены оценки линейных поперечников класса Никольского-Бесова в анизотропном пространстве Лоренца-Зигмунда в разных метриках.

Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots p_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$ and $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}} := \Big[\int_0^1 \Big[\dots\Big[\int_0^1 (f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m))^{\tau_1}$$

$$\times \bigg(\prod_{j=1}^{m} \Big(1 + |\log_2 t_j|\Big)^{\alpha_j} t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}}\bigg)^{\tau_1} dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1], [2]). $a_{\overline{n}}(f)$– коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$ и

$\rho(\overline{s}) := \{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\}$,

$\langle\overline{y}, \overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) := \sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$.

Рассматривается аналог класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда:

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B := \Big\{f \in \mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} + \Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}\Big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq 1\Big\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$.

$\lambda_M(W)_X$ – линейный поперечник множества W в банаховом пространстве X определен В. М. Тихомировым [3]. В многомерном случае оценки линейных поперечников для классов Никольского-Бесова $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в $L_q(\mathbb{T}^m)$ получили Э. М. Галеев, В.Н. Темляков, А.С. Романюк, А.Д. Изаак, Д. Б. Базарханов (см. библиографии в [4], [5]). Основной результат доклада:

Теорема 1. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\bar{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_m^{(1)})$, $\bar{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_m^{(2)})$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ *и* $1 < p_j \leqslant 2$, $p_j' = p_j/(p_j - 1)$, $\max_{j=1,...,m} p_j' < \min_{j=1,...,m} q_j < +\infty$, $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$,

$j=1,\ldots,m$ *и* $0<r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-1=\min\{r_j+\frac{1}{q_j}-1:\ j=1,...,m\}$, $A=\min\{j: r_j+\frac{1}{q_j}-1=r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-1,\ j=1,...,m\}$, $j_1=\min\{j\in A\}$. *Тогда*

$$\lambda_M\big(S^{\bar r}_{\bar p,\bar\alpha,\bar\tau^{(1)},\bar\theta}B\big)_{\bar q,\bar\beta,\bar\tau^{(2)}} <<$$

$$M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{2})}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-1)+\sum\limits_{j\in A}(\beta_j-\alpha_j)+\sigma(A)},$$

где если $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_j^{(2)}<\infty$, $j=1,...,m$, то $\sigma(A)=0$ и $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,m$ и $A\backslash\{j_1\}=\emptyset$ или $\beta_j\geqslant 0$ для $j\in A$, а $\beta_j\in\mathbb{R}$ для $j\notin A$ и $A\setminus\{j_1\}\neq\emptyset$; если $1<\tau_j^{(2)}<\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,\ldots,m$, то $\sigma(A)=\sum\limits_{j\in A\backslash\{j_1\}}\big(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\big)$ и

$$\min\{\sum_{j\in A\backslash\{j'\}}\beta_j+\sum_{j\in A\backslash\{j_1\}}\big(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j}\big),\ \beta_{j'}+\frac{1}{\tau_{j'}^{(2)}}-\frac{1}{\theta_{j'}}\}>0$$

и $j'=\max\{j\in A\}$, $|A|$–количество элементов множества A, число $M>1$.

Замечание. В случае $\alpha_j=\beta_j=0$ и $p_j=\tau_j^{(1)}=p$, $q_j=\tau_j^{(2)}=q$, $\theta_j=\theta$ для $j=1,...,m$ и $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\leq...\leq r_m$ из теоремы следуют результаты Э. М. Галеева, В. Н. Темлякова, А.С. Романюка (см. библиографию в [4], [5]) и при $\alpha_j=\beta_j=0$ теорема 3 в [6].

Funding: Автор был поддержан грантом AP 08855579 МОН РК.

Ключевые слова: пространство Лоренца-Зигмунда, класс Никольского-Бесова, линейный поперечник.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 42A05.

Литература

[1] D.E. Edmunds, W.D. Evans *Hardy operators, function spaces and embedding*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. (2004).

[2] Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263** (1981), 146–167.

[3] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений, *Усп. мат. н.*, **15**:3 (1960), 81–120.

[4] Тихомиров В.М. Теория приближений, в *Современные проблемы математики*, М. (1987). 103–270.

[5] Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation, в *arXiv: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan*, (2016). 1–154.

[6] Акишев Г. Оценки линейных поперечников классов в пространстве Лоренца, *Мат. жур.*, **13**:3 (2013), 5–25.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

Серик АЛДАШЕВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

Введение. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x=(x_1,...,x_m), m\geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находиться в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе [1,2].

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги интенсивно исследуются (см. например, монографии [2,3] и приведенные в них библиографии).

Проблема корректности смешанных задач для гиперболо-эллиптических уравнений в многомерных ограниченных областях все еще остается открытым [4].

Многомерный аналог задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе была поставлена в [4,5] (см. также [6]). В работах [7,8] доказана, эта задача имеет не единственное решение.

Естественно, возникает важный вопрос: в какой смешанной области решение задачи Трикоми является единственной.

В настоящей работе приводится смешанная область, в которой задача Трикоми имеет единственное решение.

Получен также критерий единственности и критерий однозначной разрешимости классического решения.

Здесь также следует отметить работу [9], где изучается задача Трикоми в трехмерной области.

Постановка задачи и результат. Пусть $\Omega_\varepsilon-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma : |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = -t + \varepsilon$, $K_1 : |x| = 1 + t$, $\frac{\varepsilon-1}{2} \le t \le 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 \le \varepsilon < 1$. Обозначим через Ω^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через $S^\varepsilon-$ общую часть границ области Ω^+, Ω_ε^- представляющих множество $\{t = 0,\ \varepsilon < |x| < 1\}$ точек из E_m. Часть конусов K_ε, K_1, ограничивающих области Ω_ε^-, обозначим через S_ε, S_1 соответственно.

В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\Delta_x u + (sgnt)u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, ...,\ m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Следуя [4,5], в качестве многомерной задачи Трикоми рассматривается следующая

Задача Т. Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t \ne 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\cap$ $\cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\varepsilon^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_\Gamma = \varphi(r,\theta), u\Big|_{S_\varepsilon} = \psi_1(r,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_\Gamma = \varphi(r,\theta), u\Big|_{S_1} = \psi_2(r,\theta), \tag{3}$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ задача (1), (3) в одном частном случае была исследована [5].

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, ...-$ пространства Соболева.

Далее, через $\varphi_n^k(r,\theta), \psi_{1n}^k(r,\theta), \psi_{2n}^k(r,\theta)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям соответственно функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(r,\theta)$, $\psi_2(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$B^l(S^\varepsilon) = \left\{ f(t,\theta) : f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{kn} \left(\|f_n^k(r)\|^2_{C([\varepsilon,1])} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ||f_n^k(r)||^2_{C^2((\varepsilon,1))}\right) exp2(n^2 + n(m-2)) < \infty, l \ge m-1 \right\}.$$

Справедлива критерия

Теорема 1. *Однородная задача, соответствующая задаче (1), (2) имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\varepsilon > 0$.

Пусть $\varphi(r,\theta) \in B^l(\Gamma), \psi_1(r,\theta) = r\psi_1^*(r,\theta), \psi_1^*(r,\theta) \in B^l(S_\varepsilon)$.

Тогда имеет место критерия.

Теорема 2. *Задача (1), (2) однозначна разрешима* $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Пусть далее $\varphi(r,\theta) \in W_2^l(\Gamma), \quad \psi_2(r,\theta) = \left(r - \frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}} \psi_2^*(r,\theta)$, $\psi_2^*(r,\theta) \in W_2^l(S_1), l > \frac{3m+4}{2}$.

Тогда справедлива

Теорема 3. $\forall \varepsilon \geq 0$ *задача (1), (3) имеет единственное решение.*

Схема доказательств теорем. Аналогично как в [10], сначала в области Ω^+ решив краевую задачу для многомерного уравнения Лапласа $\Delta_x u + u_{tt} = 0$ с условием $u\Big|_\Gamma = \varphi(r,\theta)$ при $t \to +0$ находим

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau(r,\theta) \tag{4}$$

Далее, учитывая краевые условия (2)-(4), приходим в области Ω_ε^- к задаче Дарбу-Проттера для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \tag{5}$$

с данными

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau(r,\theta), u\Big|_{S_\varepsilon} = \psi_1(t,\theta), \tag{6}$$

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau(r,\theta), u\Big|_{S_1} = \psi_2(r,\theta). \tag{7}$$

Далее теперь, используя результаты работ [11-14] относительно задач (5), (6) и (5), (7), устанавливаем справедливость сформированных теорем.

Отметим, что теорема опубликована в [15].

Funding: Работа поддержана грантом AP09260126 КН МОН РК.

Ключевые слова: Критерий, задача Трикоми, классические решение, многомерные уравнения смешанного типа.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35K05, 35R37.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, Наука, М. (1966).

[2] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М. (1981).

[3] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, Наука, М. (2006).

[4] Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа*, Изд-во АН СССР, М. (1959).

[5] Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, *ДАН СССР*, **110**:6 (1956), 901–902.

[6] Пулькин С.В. Сингулярная задача Трикоми, *Труды третьего всесоюзного математического съезда*, М. **1** (1956), 65–66.

[7] Алдашев С.А. Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Мат-лы межд. конф. "Дифференциальные уравнения. Функциональные пр-ва. Теории приближений" посв. 100 летию академика С.Л. Соболева*, ИМ СО РАН, Новосибирск (2008), 93.

[8] Алдашев С.А. Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, *Укр. матем. журнал*, **62**:2 (2010), 265–269.

[9] Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холомеева А.А. Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Дифференц. уравнения*, **50**:12 (2014), 1672–1675.

[10] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Укр. Математический Вестник*, **9**:3 (2012), 301–307.

[11] Алдашев С.А. О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения, *ДАН СССР*, **265**:6 (1982), 1289–1292.

[12] Алдашев С.А. О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волного уравнения, *Дифференц. уравнения*, **19**:1 (1983), 3–8.

[13] Алдашев С.А. *Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений*, Гылым, Алматы (1994).

[14] Алдашев С.А. О критериях единственности решения задачи Дарбу-Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений, *Математический журнал*, **2**:4 (2002), 26–29.

[15] Алдашев С.А. Критерий единственности решения задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Дифференц. уравнения*, **57**:11 (2021), 1564–1567.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

О разрешимости одной краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения с инволюцией

Динара АЛТИНБЕК[a], Майра КОШАНОВА[b]

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]dinara.altynbek1999@mail.ru, [b]maira.koshanova@ayu.edu.kz

В настоящей работе исследуется вопросы разрешимости одной краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с инволюцией. Пусть $a \in R, m, n \in N$. Рассмотрим в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ следующую задачу

$$t^m \left(\frac{\partial^{2k} u(x,t)}{\partial x^{2k}} + a \frac{\partial^{2k} u(p-x,t)}{\partial x^{2k}} \right) + (-1)^k \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} (0,t) = \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}} (p,t) = 0,\ l = 0,1,...,k-1,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le p. \tag{3}$$

Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x,t)$ из класса $u(x,t) \in C^{2k-1,0}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial^{2k} u(x,t)}{\partial x^{2k}}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ и удовлетворяющую условиям (1)-(3) в классическом смысле.

Отметим, что в случае $a = 0$ задача (1)-(3) изучена в работах [1,2].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $-1 < a < 1$, функция $f(x,t)$ обладает гладкостью $f(x,t) \in C^{2k,0}_{x,t}(\Omega)$, $\frac{\partial^{2k+1} f(p,t)}{\partial x^{2k+1}} \in L_2(\Omega)$ и удовлетворяет условиям*

$$\frac{\partial^{2l} f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0,\ l = 0,1,2,...,k.$$

Тогда решение задачи (1)-(3) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x,t) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) \int_0^t f_{2n}(\tau) e^{-(1-a)\lambda_{2n}^{2k} \frac{t^{m+1} - \tau^{m+1}}{m+1}} d\tau +$$

$$+(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n-1}(x) \int_0^t f_{2n-1}(\tau) e^{-(1+a)\lambda_{2n-1}^{2k} \frac{t^{m+1} - \tau^{m+1}}{m+1}} d\tau,$$

где

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p},$$

$f_n(t)-$ коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по системе $X_n(x), n \in N$.

В работе также изучена сопряженная краевая задача.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP09259074.

Ключевые слова: инволюция, вырождение, параболическое уравнение, классическое решение, существование, единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G15,35K35,35K65.

Литература

[1] Amanov D. Solvability and spectral properties of the boundary value problems for degenerating higher order parabolic equation, *Applied Mathematics and Computation*, **268** (2015), 1282–1291.

[2] Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial diffferential equations of even order, *AIP Conference Proceedings* , **1470**:3 (2012), 651–667.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О краевой задаче для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами

Юсупжон АПАКОВ[1,a], Санжарбек МАМАЖОНОВ[2,b]

[1]*Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан, Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан*

[2]*Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]yusupjonapakov@gmail.com, [b]sanjarbekmamajonov@gmail.com

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

здесь $a_i(x), i = \overline{1,3}$ и $f(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции.

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$u(0,y) = \psi_1(y),\ u(p,y) = \psi_2(y),$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_3(y),\ u_{xx}(p,y) = \psi_4(y),\ 0 \le y \le q,$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0,q], i = \overline{1,4}, f(x,y) \in C^{0,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$ заданные функции, причем

$$\psi_i'(0) = \psi_i'(q) = 0,\ i = \overline{1,4}.$$

Отметим, что в работе [1] рассмотрен случай $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -c(x,t)$, а в работах [2-3], когда $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Теорема 1. *Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \le 0$, $2a_3(x) + a_1''(x) - a_2'(x) \ge 0$ оно единственно.*

Теорема 2. *Если выполняется неравенство*

$$C < \min\left\{\frac{1}{2p^2(1+p+p^2)}, \frac{\mu_1^3(1-e^{-2\mu_1 p})^2}{p(3+3\mu_1(1+e^{-4\mu_1 p})+2\mu_1^2)}\right\},$$

то решение задача A существует. Здесь, $\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}$ и

$C = \max\limits_{\xi\in[0,p]} \left\{|a_i(\xi)|, |a_i'(\xi)|, |a_1''(\xi)|, i = \overline{1,3}\right\}$.

Единственность решение поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15.

Литература

[1] Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **1** (2013), 3–10.

[2] Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **25**:1 (2021), 51–66.

[3] Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:3 (2021), 632–640.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной краевой задаче для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

Юсупжон АПАКОВ[1,a], Рахматилла УМАРОВ[2,b]

[1]*Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан, Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан*

[2]*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан*

E-mail: [a]*yusupjonapakov@gmail.com*, [b]*r.umarov1975@mail.ru*

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка вида:

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x,y), \tag{1}$$

где $A_i, p, q \in R,\ i = \overline{1,4},\ g_1(x,y)$ заданные, достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x,y) = \exp\left(-\frac{A_1}{3}x + \frac{A_3}{2}y\right) u(x,y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x,y), \tag{2}$$

где

$$a_1 = -\frac{A_1^2}{3} + A_2, a_2 = \frac{2A_1^3}{27} + \frac{A_3^2}{2} - \frac{A_1 A_2}{3} + A_4, g(x,y) = \exp\left(\frac{A_1}{3}x - \frac{A_3}{2}y\right) g_1(x,y).$$

Задача A**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$u(p,y) = \psi_2(y), \quad u_x(p,y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(0,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le q,$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0,q], i = \overline{1,3},\ g(x,y) \in C^{0,1}_{x,y}[0,q]$ заданные функции, причём

$$\psi_i'(0) = \psi_i'(q) = 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Отметим, что в работах [1-2] рассмотрен случай $a_1 = a_2 = 0$. В работе [3] найдено решение уравнении (2), при $g(x, y) = 0$, в виде бесконечного ряда, используя метод разделения переменных.

Теорема 1. *Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$ оно единственно.*

Теорема 1. *Если выполняется следующее условие:*

$$C < \min\left\{\frac{1}{3p^2 + 2p^3}, \frac{\lambda_1^2}{Mp(\lambda_1 + 1)}\right\},$$

то решение задачи A существует. Здесь

$$C = \max\{|a_1|, |a_2|\}, \lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}, M = \frac{16}{3}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}.$$

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15.

Литература

[1] Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics, *Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius*, **16**:3 (2011), 255–269.

[2] Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, *Украинский математический журнал*, **64**:1 (2012), 1–11.

[3] Apakov, Y.P., Zhuraev, A.K. Third Boundary-Value Problem for a Third-Order Differential Equation with Multiple Characteristics, *Ukr Math J*, **70** (2019), 1467–1476.

— ⁕⁕⁕ —

Задача Дарбу для спектрально нагруженного уравнения колебания струны

Анатолий АТТАЕВ

ИПМА КБНЦ РАН, город Нальчик, Россия
E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

Для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u_{yy}(x_0, y)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x - y < l, \ 0 < x + y < l, \ 0 < x_0 < l\}$ рассматривается следующая задача

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$
$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 2x_0$$
$$u(x, x_0) = \psi(x), \quad x_0 \leq x \leq l - x_0.$$

При определенных условиях точечного характера на заданные функции $\tau(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и на заданный параметр λ в работе доказана теорема о существовании единственного регулярного в области Ω решения поставленной задачи. Для доказательства теоремы используется принцип сжатых отображений (теорема Банаха). В одной части области решение задачи строится методом последовательных приближений, а в оставшейся части - методом продолжения.

Ключевые слова: нагруженное волновое уравнение, задача Дарбу, метод продолжения по параметру, принцип сжатых отображений.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L20.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Корректная разрешимость краевой задачи для системы дифференциальных уравнений и условия сопряжения в соединительном узле

Гауhар АУЗЕРХАН[1,a], Жалгас КАЙЫРБЕК[2,b]

[1] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*auzerhanova@gmail.com*, [b]*kaiyrbek.zhalgas@gmail.com*

Рассмотрим звездный граф $= \{V, E\}$, где V-множество его вершин, занумерованных от 0 до $m+1$, а множество E означает его дуг $e_1, ..., e_m$. Введем вектор функцию $Y_j(x_j) = [y_{1j}(x_j)\ y_{2j}(x_j)\ y_{3j}(x_j)]^T$, $x_j \in e_j$, которая удовлетворяет следующей системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)a_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2}\right) + \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)b_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}\right) - \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)d_j(x_j)\frac{dy_{3j}(x_j)}{dx_j}\right) = g_{1j}(x_j), \\ \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)b_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2}\right) + \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)c_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}\right) - \frac{d^2}{dx_j^2}\left(\mu_j(x_j)f_j(x_j)\frac{dy_{3j}(x_j)}{dx_j}\right) = g_{2j}(x_j), \\ \frac{d}{dx_j}\left(\mu_j(x_j)d_j(x_j)\frac{d^2y_{1j}(x_j)}{dx_j^2}\right) + \frac{d}{dx_j}\left(\mu_j(x_j)f_j(x_j)\frac{d^2y_{2j}(x_j)}{dx_j^2}\right) \frac{d}{dx_j}\left(\mu_j(x_j)\frac{dy_{3j}(x_j)}{dx_j}\right) = g_{3j}(x_j). \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) линейных дифференциальных уравнений состоит из трех дифференциальных уравнении разных порядков и описывает совместные поперечные, продольные колебания стержней соединенных в одном узле. В дальнейшем считаем, что коэффициенты $\mu_j(x_j), a_j(x_j), b_j(x_j), c_j(x_j), d_j(x_j), f_j(x_j)$ представляют заданные вещественные непрерывные функций. Указанные коэффициенты имеют физический смысл. Длину дуги e_j считаем равной l_j при $j = 1, ..., m+1$. Если диаметр сечения $\omega(z)$ считать малым порядка ϵ тогда система уравнений (1) распадается три последовательно решаемые системы. В силу малости величин $d(z), l(z)$ третье уравнение системы (1) примет вид

$$-\frac{d}{dz}\Big(\mu(z)\Big(\frac{d\omega_3(z)}{dz}\Big)\Big) = F_3(z) \tag{2}$$

При естественных упрощающих допущениях это уравнение продольных колебаний стержня. Поэтому предварительно можно найти продольные смещения $\omega_3(z)$, а затем можно из первых двух уравнений системы (1) найти поперечные смещения.

$$\frac{d^2}{dz^2}\Big(\mu(z)\Big(a(z)\frac{d^2\omega_1(z)}{dz^2} + b(z)\frac{d^2\omega_2(z)}{dz^2} - d(z)\frac{d\omega_3(z)}{dz}\Big)\Big) = F_1(z) \tag{3}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Big(\mu(z)\Big(b(z)\frac{d^2\omega_1(z)}{dz^2} + c(z)\frac{d^2\omega_2(z)}{dz^2} - f(z)\frac{d\omega_3(z)}{dz}\Big)\Big) = F_2(z) \tag{4}$$

уравнений (3) и (4) распадается на две системы, каждая из которых решается независимо друг от друга. Дифференциальное уравнение четвертого порядка для поперечного смещения по оси Oy и по оси Ox. Таким образом, в этом случае поперечные смещения по осям Ox и Oy можно вычислять независимо друг от друга. Что подтверждает теорию изгибов балок Тимошенко, согласно которой изгибы определяются из дифференциальных уравнений четвертого порядка. Если диаметр сечения $\omega(z)$ считать малым порядка ϵ, тогда система (1) подтверждает теорию изгибов балок Тимошенко.Во многих инженерных расчетах считается, что движения разделяются: поперечные колебания не влияют на продольные и наоборот. Однако подобное разделение движений стержня не всегда оправдывается. Таким образом, в общем случае система (1) не всегда распадается на уравнения типа (2) и (3),(4).

В докладе выявлены условия сопряжения в соединительном узле и соответствующие условия закрепления в граничных вершинах, которым соответствует корректно разрешимый задачи для системы (1).

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP 08855402 МОН РК.

Ключевые слова: граф, балка,изгиб, условия сопряжения, условия закрепления.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

— ⁂ —

Нелокальная задача для вырождающегося уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа

Илхом АХМАДОВ

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент
E-mail: ahmadov.ilhom@mail.ru,

Заметим, что краевые задачи для невырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа, когда параболическая часть содержит оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто в специальных обла-стях мало изучены. Отметим работы [1-4].

Настоящая работа посвящена постановке и изучению нелокальной краевой задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - {}_cD_{0y}^{\alpha}u\,, & (x;y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - (-x)^m u_{yy}\,, & (x;y) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$m > 0\,, \qquad 0 < \alpha \le 1, \tag{3}$$

здесь Ω_1 – область, ограниченная отрезками AB AB_0, B_0A, A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_2 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси y–ов и двумя характеристиками

$$AC:\, y-(1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}}=0, \quad A_0C: y+(1-2\beta)(-x)^{\frac{1}{1-2\beta}}=1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $A_0(0,1)$, пересекающимися в точке $C\,(-0,5\,;\,0,5)$; $I=\{(x,y):\ 0<x<1,\ \ y=0\}$,

$J=\{(x,y):\ x=0,\ \ 0<y<1\}$, $J_1=\{(x,y): x=0,\ 0<y<c\}$,

$J_2=\{(x,y):\ \ x=0,\ \ c<y<1\}$, $c\in J$, $\qquad \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$,

где $f\ (x,\,y)$ – заданная функция, а $\beta=\frac{m}{2(m+2)}$, причем $f(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap L_2(\Omega)$ и

$$0<\beta<\frac{1}{2}. \tag{4}$$

${}_cD_{0y}^{\alpha}\,[\cdot]$ –оператор (в смысле Капуто) дробного порядка $\alpha\in(0,1]$ от функции $g(y)$ [4, стр. 341]:

$$ {}_cD_{0y}^{\alpha}g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y (y-t)^{-\alpha}g'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ \frac{d}{dy}g(y), & \alpha=1. \end{cases} \tag{5}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача. Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, $\quad y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in\ C(\Omega_1\bigcup I)$;

2) $u_{xx}\in C(\Omega_1\bigcup\Omega_2), u_{yy}\in C(\Omega_2)$, ${}_cD_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j (j=1,2)$;

3) $u_x \in C\left(\Omega_1 \bigcup J_1 \bigcup J_2\right) \bigcap C\left(\Omega_2 \bigcup J_1 \bigcup J_2\right)$ и на линии вырождения выполняются условия склеивания

$$u(+0,y) = u(-0,y), \quad (0,y) \in \bar{J},$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \lim_{x\to-0} u_x(x,y), \quad (0,y) \in J_1 \cup J_2;$$

4) $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\,(x,y)\,|_{BB_0} = \varphi\,(y)\,, (0,y) \in \bar{J},$$

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha} u_y(x,y) = \nu(x), \quad (x,0) \in I,$$

$$D_{0y}^{\beta} y^{2\beta-1} u\,[\theta_0\,(y)] = a_1(y) u\,(-0,y) + b_1\,(y)\,, (0,y) \in J_1,$$

$$D_{cy}^{\beta} (y-c)^{2\beta-1} u\,[\theta_1\,(y)] = a_2(y) u\,(-0,y) + b_2\,(y)\,, (0,y) \in J_2,$$

где $\theta_0(y) = \left(-\left(\frac{m+2}{4}y\right)^{\frac{2}{m+2}}, \frac{y}{2}\right)$ и $\theta_1(y) = \left(-\left(\frac{m+2}{4}(y-c)\right)^{\frac{2}{m+2}}, \frac{y+c}{2}\right)$ точка пересечения характеристик уравнения 1, выходящих из точки $(0,y)$, с характеристикой AC и A_0C соответственно, а $\varphi(y)$, $a_k(y)$, $b_k(y)$, $\nu(x)$– заданные функции, причем

$$\nu\,(x) \in C^2(I), \quad \varphi\,(y) \in C(\bar{J}) \cap C^1\,(J)\,, \tag{6}$$

$$a_k(y),\ b_k(y) \in C^1\left(\bar{J}_k\right) \cap C^3\left(J_k\right) \quad (k=1,2), \tag{7}$$

а $D_{\mu y}^{l}\,[\cdot]$ – интегро-дифференциальный оператор дробного порядка l в смысле Римана-Лиувилля [5].

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (3), (4), (6) и (7), то в области Ω существует единственное регулярное решение поставленной задачи.*

Единственность решение задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существования решения - методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: вырождающее уравнение смешанного типа, регулярное решение, оператор Капуто, принцип экстремума, нелокальное условие.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35K15.

Литература

[1] E.T.Karimov, J.S.Akhatov. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative., *Electronic Journal of Differential Equations*, **2014**:14 (2014), 1–6.

[2] Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области, *Научный вестник. Математика*, **2017**: 5 (2017), 25–30.

[3] B.I.Islomov, U.Sh.Ubaydullayev. On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **2020**: 41, №9 (2020), 1801–1810.

[4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, (1987).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об априорной оценке решения задачи Трикоми на сопряжение уравнения Гельмгольца с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода

Ж.А. БАЛКИЗОВ

ИПМА КБНЦ РАН, город Нальчик, Россия
E-mail: Giraslan@yandex.ru

Фундаментальные исследования по краевым задачам для уравнений смешанного типа второго порядка были проведены в работах [1]-[5] и др.

В большинстве научных работ, опубликованных по настоящее время, исследования проводились по краевым задачам для уравнений смешанного типа, порядок вырождения которых из гиперболической и эллиптической частей области совпадали.

В данной работе исследована краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа, которое совпадает с неоднородным уравнением Гельмгольца в области эллиптичности и с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода в области его гиперболичности. Получена априорная оценка решения исследуемой задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$, из которой следует единственность регулярного решения исследуемой задачи, а также существование слабого решения сопряженной задачи к исследуемой.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, вырождающееся гиперболическое уравнение, задача Трикоми.

2020 Mathematics Subject Classification: 35M12.

Литература

[1] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях второго порядка смешанного типа*, М.-Л.: Гостехиздат. (1947).

[2] Gellerstedt S. *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte*, Uppsala (1935).

[3] Gellerstedt S. *Quelques problemes mixtes pour l'equation* $y^m Z_{xx} + + Z_{yy} = 0$ // Arkiv Math. Astr. och Fysik. Bd.26 A, №3 (1938), 1–32.

[4] Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. *К проблеме уравнений смешанного типа* // Доклады АН СССР. Т. 70, №3 (1950), 373–376.

[5] Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа*, Издательство АН СССР, Москва (1959).

— ⁂ —

Об одном обобщении задачи Робена для уравнения Лапласа в круге

М.Э. БАЛТАБАЕВА[a], М.А. МУРАТБЕКОВА[b]

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]baltabayeva_me@bk.ru, [b]moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

Пусть $\Omega = \left\{(r,\varphi) \in R^2 :\ 0 \le r < 1, -\pi \le \varphi \le \pi\right\}$ - единичный круг, $u(r,\varphi)$ гладкая функция в области $\bar{\Omega}$. Для любого $\alpha \in (m-1, m]\,, m = 1, 2, ...,$ в качестве оператора дифференцирования дробного порядка мы рассмотрим следующий выражение

$$D_\mu^\alpha \left[u\right](r,\varphi) = \frac{r^{-\mu}}{\Gamma\left(m-\alpha\right)} \int\limits_0^r \left(\ln\frac{r}{s}\right)^{m-1-\alpha} \left(s\frac{d}{ds}\right)^m \left[s^\mu u\left(s,\varphi\right)\right] \frac{ds}{s}, \mu \ge 0.$$

Пусть $\mu \ge 0, m-1 < \alpha \le m, a_j, j = 0,1,2,3$ - действительные числа. Введем оператор

$$l_a[u] = a_0 D_\mu^\alpha u(r,\varphi) + a_1 D_\mu^\alpha u(r,\pi-\varphi) + a_2 D_\mu^\alpha u(r,\pi+\varphi) + a_3 D_\mu^\alpha u(r,2\pi-\varphi)$$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\Delta u\left(r,\varphi\right) = 0, (r,\varphi) \in \Omega, \tag{1}$$

$$l_a[u]\left(r,\varphi\right)\big|_{r=1}=g\left(\varphi\right),-\pi\leq\varphi\leq\pi. \tag{2}$$

Решением задачи (1) - (2) назовем функцию $u\left(x\right)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, для которой $D_\mu^\alpha\left[u\right]\left(r,\varphi\right)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничному условию (2) в классическом смысле.

Так как $J^0\left[u\right]\left(r,\varphi\right)=u(r,\varphi)$, то

$$D_\mu^1\left[u\right]\left(r,\varphi\right)\big|_{r=1}=r\,\frac{du(r,\varphi)}{dr}+\mu u(r,\varphi)\bigg|_{r=1}=\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial\nu}+\mu u(r,\varphi)\bigg|_{r=1},$$

где ν- вектор нормали к границе области Ω. Поэтому в случае $\alpha=1,\mu>0,a_0=1,a_j=0,j=1,2,3$, мы получаем классическую задачу Робена. Отметим, что в случае $\alpha=1,\mu=0$ задача (1)-(2) изучена в работе [1].

Пусть $\varepsilon_1=a_0+a_1+a_2+a_3;\varepsilon_2=a_0-a_1-a_2+a_3;\ \varepsilon_3=a_0-a_1+a_2-a_3;\varepsilon_4=a_0+a_1-a_2-a_3$. Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть в задаче (1) - (2) $\mu>0,\varepsilon_j>0,j=1,2,3,4$ и $g(\varphi)\in C\left[-\pi,\pi\right]$. Тогда решение задачи существует, единственно и представляется в виде*

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{a,\mu}(r,\varphi-\theta)g(\theta)d\theta,$$

где функция $P_{a,\mu}(r,\varphi-\theta)$ определяется по формуле

$$P_{a,\mu}(r,\varphi-\theta)=\frac{1}{2\varepsilon_1}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\frac{1-\tau^4r^4}{1-2\tau^2r^2\cos2(\varphi-\theta)+\tau^4r^4}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\frac{\tau r(1-\tau^2r^2)\cos(\varphi-\theta)}{1-2\tau^2r^2\cos2(\varphi-\theta)+\tau^4r^4}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_3}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\frac{\tau^2r^2\sin2(\varphi-\theta)}{1-2\tau^2r^2\cos2(\varphi-\theta)+\tau^4r^4}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_4}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu-1}\frac{\tau r\left(1+\tau^2r^2\right)sin(\varphi-\theta)}{1-2\tau^2r^2\cos2(\varphi-\theta)+\tau^4r^4}d\tau.$$

Теорема 2. *Пусть в задаче (1) - (2) $\mu=0,\varepsilon_j>0,j=1,2,3,4$ и $g(\varphi)\in C\left[-\pi,\pi\right]$. Тогда для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(\theta)d\theta=0.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP09259074.

Ключевые слова: уравнение Лапласа,оператор Адамара,нелокальная задача, задача Робена.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 35J05, 35J25.

Литература

[1] Turmetov B.Kh. Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation, *Differential equations*, **55**:9 (2019), 1134–1142.

— ⁂ —

О динамике сепарабельного кубического стохастического оператора с параметрами на двумерном симплексе

Баходир БАРАТОВ

Каршинский Государственный университет, Карши, Ул. Кучабог, 180100
E-mail: baratov.bahodir@bk.ru

Одна из основных задач в исследовании динамической системы состоит в изучении эволюции ее состояния. Эволюция популяции включает в себя определенные изменения состояния следующих поколений в результате воспроизводства и отбора. За более чем 80 лет эта теория была разработана и опубликована во многих работах. В последние годы она вновь стала представлять интерес в связи с ее многочисленными приложениями во многих областях математики, биологии и физики. В последнее время с большим интересом изучается динамика сепарабельных квадратичных стохастических операторов. В данной работе будет рассматриваться один из классов кубических стохастических операторов, называемый сепарабельным. Такой оператор порождается тремя квадратичными матрицами A, B и C. Мы будем исследовать динамику одного сепарабельного кубического стохастического оператора с двумя параметрами на двумерном симплексе.

Пусть $E = \{1, 2, ..., m\}$. Множество

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \ x_i \geq 0 \right\}, \tag{1}$$

называется $(m-1)$ мерным симплексом.

Мы рассмотрим трехмерные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} b & 1-c & c \\ b & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $b > 0, \ c \in [0, 1]$.

Тогда соответствующий оператор $W_{(A,B,C)}$ имеет вид:

$$W : \begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_1, \\ x_2' = (1 - \frac{1}{2}x_1)(1 - cx_1), \\ x_3' = (1 - \frac{1}{2}x_1)cx_1. \end{cases}$$

Теорема 1.

i) Для любых $c \in [0, 1]$ СКСО $W_{(A,B,C)}$ имеет единственную неподвижную точку $x^* = e_2$.

ii) При любой начальной точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2$ для СКСО $W_{(A,B,C)}$ имеет место равенство $\omega(x^{(0)}) = \{e_2\}$.

Ключевые слова: Кубический стохастический оператор, симплекс, сепарабельный кубический стохастический оператор, траектория.

2010 Mathematics Subject Classification: 37D45, 37N25, 37C70, 37E10.

Литература

[1] Rozikov U.A, Nazir S. Separable Quadratic Stochastic Operators, *Lobachevskii J. Math*, **31**:3 (2010), 215–221.

[2] Rozikov U.A., Zada A. On a class of separable quadratic stochastic operators, *Lobachevskii J. Math*, **32**:2 (2011), 385–394.

— ⁂ —

Теорема существования продолжения решений для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Амангельди БЕРДИМУРАТОВ

Лысьвенский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, Лысьва, Россия
E-mail: aman2460@mail.ru

Аннотация. В этой работе исследована теорема существования продолжения обобщенных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, определенное в некоторой окрестности объединения трех соседних граней параллелепипеда можно было продолжить в некоторую окрестность параллелепипеда классе обобщенных функций . Эту задачу можно рассматривать как некоторый аналог задачи Дарбу-Гурса-Бодо в классе обобщенных функций бесконечного порядка. При этом решение системы уравнений, заданное в окрестности трех соседних граней параллелепипеда играет роль системы начальных данных. Проблемами продолжения обобщенных решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами занимались Л. Эренпрайс, В. Мальгранж, Л. Хермандер, В. Паламодов, В. Грушин, Ш.А. Ахмедов, А.М. Бердимуратов. А.М. Бердимуратовым получен ряд результатов как теория существования и единственности разрешимости задачи Коши-Паламодова и Дарбу-Гурса-Бодо в пространствах обобщенных функций.

Введение. Рассматривается однородная система линейная дифференциальная уравнения с постоянными коэффициентами в матричной форме:

$$P\left(D\right)u=0 \tag{1}$$

где $P_{ij}\left(D\right), i=\overline{1,t}, j=\overline{1,s}$ произвольные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а числа t и s произвольны и где $u=(u_1,u_2,...,u_s)$ неизвестная вектор-функция.

Постановка задачи. Пусть π-параллелепипед в R^n, n -граней которого лежат в координатных подпространствах $\xi_i=0$, $i=1,2,...,n$. Обозначим через π_i его $(n-1)$-мерную грань, лежащую в подпространстве $\xi_i=0$, $i=1,2,3$. В этой работе исследуется следующая задача: при каких условиях всякое обобщенное решения уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами определенное в окрестности трех соседних граней параллелепипеда вR^n ,может быть продолжен в некоторую его окрестность. Эта задача является аналогом классической задачи Дарбу-Гурса -Бодо для обобщенных решений бесконечного порядка : вместо значений решения и его производных на гранях (которые не определены, если плоскости этих граней характеристические) решение задается сразу в некоторой его окрестности.

Теорема. *Пусть* $N'=\bigcup\limits_{k=1}^{3}\{z\in C^n; z_k=0\}$, *тогда существует число* $h<1$, *зависящее лишь от оператора* P, *такое, что для любого* β, *удовлетворяющего условию* $\beta>1$ *при* $h\le 0$ *и* $1<\beta\le\frac{1}{h}$ *при* $h>0$ *и любого* $B>0$ *и для любой окрестности* L *компакта* $\bigcup\limits_{k=1}^{3}\pi_k$ *существует окрестность* L' *параллелепипеда* π *такая, что всякую обобщенную функцию* $u\in\left[\mathcal{U}_L^{\beta}\right]^s$, *являющуюся решением системы (1) на* L', *причем, если* $u\in\left[\left(\mathcal{D}_L^{\beta,B}\right)'\right]^s$, *то* $\vartheta\in\left[\left(\mathcal{D}_L^{\beta,B\prime}\right)'\right]^s$ *и* $\|\vartheta\|_L^{\beta,B'}\le\kappa\cdot\|u\|_L^{\beta,B}$ *где константы* B' *и* k *не зависят от* u.

Заключение. Получено условие на характеристическое множество дифференциального оператора с постоянными коэффициентами обеспечивающее продолжаемости обобщенных решений уравнений в частных производных, с постоянными коэффициентами в специальном классе обобщенных функций бесконечного порядка.

Ключевые слова: несобственная точка, преобразование Фурье, выпуклый компакт, финитные функции, целые аналитические функции, характеристическая функция, алгебраическое множество.

2010 Mathematics Subject Classification: 34L05.

Литература

[1] Паламодов В.П. *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Физматгиз, М. (1967).

[2] Бердимуратов А.М. *Метод экспоненциального представления Паламодова и его приложение к некоторым аналогам классических задач в пространствах обобщенных функций*, КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек (2017).

[3] Бердимуратов А.М. О единственности обобщенных решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, **1** (2021), 24–33.

[4] Бердимуратов А.М. Теория разрешимости задачи Коши-Паламодова в пространствах обобщенных функций, in: *Тезисы докладов Традиционной международной апрельской конференции, посв. 75-летию академика РК Кальменова Т.Ш.*, Институт математики и математического моделирования, 5-8 апреля 2021, Алматы (2021), 20.

[5] Бердимуратов А.М. О единственности задачи Коши-Паламодова в классах обобщенных функций бесконечного порядка, in: *Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции*, 16-19 сентября 2021, Махачкала, РФ (2021), 73–75.

[6] Бердимуратов А.М. Разрешимость задачи Коши-Паламодова в классе обобщенных функций бесконечного порядка, *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки*, **4** (2021), 61–67.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Решение задачи для параболического уравнения с малым параметром при производной по времени в условии на границе области

Галина БИЖАНОВА

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан
E-mail: galina_math@mail.ru

Рассмотрена задача для параболического уравнения с малым параметром $\varepsilon > 0$ при производной по времени в граничном условии. Доказано, что решение возмущённой задачи (с малым параметром) сходится к решению невозмущённой задачи с $\varepsilon = 0$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве Гёльдера. Из полученных результатов следует, что погранфункция не возникает.

Funding: Доклад подготовлен по гранту OR11466188 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Краевые задачи для уравнения в частных производных с операторами Джрбашяна – Нерсесяна

Фатима БОГАТЫРЕВА

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

В области $\Omega = (0,p) \times (0,q)$, $p \le \infty$, $q \le \infty$ рассмотрим уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_x(x,y) + aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}u(x,y) + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

$D_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна порядков $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,1]$, Полагаем, что $\mu > \nu$, a, b – const, $f(x,y)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна ассоциированный с упорядоченной парой $\{\xi, \eta\}$, порядка $\sigma = \xi + \eta - 1$, определяется соотношением [1]: $D_{0y}^{\{\xi,\eta\}} = D_{0y}^{\{\xi,\eta\}} =$

$D^{\eta-1}_{0y}D^{\xi}_{0y}$, где $D^{\eta-1}_{0y}$ и D^{ξ}_{0y} – дробный интеграл и дробная производная Римана – Лиувилля, соответственно [2].

В работе исследован вопрос разрешимости начально-краевых задач для дифференциального уравнения (1). Показано, что распределение параметров операторов Джрбашяна – Нерсесяна влияет на постановку задач, а именно, обнаруживается эффект освобождения части границы от краевых условий. Рассмотрены все задачи индуцированные различными распределениями параметров операторов дифференцирования $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, уравнение дробного порядка, краевые задачи, оператор Джрбашяна – Нерсесяна.

2010 Mathematics Subject Classification: 35E15, 35E99.

Литература

[1] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. АН АрмССР. Матем.* **3**:1 (1968), 3–28.

[2] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Обобщенная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования

Луиза ГАДЗОВА

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: macaneeva@mail.ru

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial^{\alpha_j}_{0x} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in (1,2)$, λ, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m$, $\partial^{\gamma}_{0x}u(x)$ регуляризованная дробная производная [1, с. 11], известная также как производная Герасимова-Капуто [2, 3].

В настоящей работе сформулирована и решена обобщенная краевая задача для уравнения (1). Краевые условия задаются в форме линейных функционалов, это позволяет охватить достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий. В терминах специальных функций найдено представление решения. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости исследуемой задачи. Доказано теорема существования и единственности решения.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, производная Капуто, краевая задача, функционал, функция Райта.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34K06.

Литература

[1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Москва (2003).

[2] Килбас А.А. *Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (курс лекций), Методологическая школа-конференция «Математическая физика и нанотехнологии»*, Самара (2009).

[3] Новоженова О.Г. *Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных*, Москва: Перо (2018).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О разрешимости некоторых краевых задач для нелокального уравнения Пуассона с граничными операторами высокого порядка

И.Р. ГАППАРОВ[a], И. ОРАЗОВ[b]

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: $^{a}gapparov - 1998@mail.ru$, $^{b}isabek.orazov@ayu.edu.kz$

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $r = |x|, m \in N, \mu_1, ..., \mu_1 -$ положительные действительные числа. Введем операторы

$$\Gamma_{\mu_j} = r\frac{\partial}{\partial r} + \mu_j, j = 1, 2, ..., m, \Gamma_{\mu_1}^{-1}u(x) = \int\limits_0^1 t^{\mu_1 - 1}u(tx)dt$$

$$\Gamma_{\bar\mu}^m = \Gamma_{\mu_m} \cdot \Gamma_{\mu_{m-1}} \cdot ... \cdot \Gamma_{\mu_1}, \Gamma_{\bar\mu}^{-m} = \Gamma_{\mu_1}^{-1} \cdot \Gamma_{\mu_2}^{-1} \cdot ... \cdot \Gamma_{\mu_m}^{-1}.$$

Рассмотрим в области Ω следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, для которой $\Gamma_{\mu_1}^m[u](x) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условиям

$$a\Delta u(x) + b\Delta u(-x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\Gamma_{\mu_1}^m[u](x) = g(x) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

Задача 2. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, для которой $\Gamma_{\bar\mu}^m[u](x) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1) и граничному условию

$$\Gamma_{\bar\mu}^m[u](x) = g(x) \in \partial\Omega, \tag{3}$$

Отметим, что свойства операторов $\Gamma_{\mu_j}, \Gamma_{\bar\mu}^m$ были изучены в работах [1,2]. В качестве приложения для уравнения Лапласа были рассмотрены краевые задачи с участием этих операторов.

Сначала приведем следующее вспомогательное утверждение доказанное в работе [3].

Лемма. *Пусть выполняется условие $a \neq \pm b, F(x) \in C(\bar\Omega), g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи*

$$a\Delta v(x) + b\Delta v(Sx) = F(x), x \in \Omega; v(x)|_{\partial\Omega} = g(x).$$

существует и единственно.

Относительно задач 1 и 2 справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие $a \neq \pm b, f(x) \in C^m(\bar\Omega), g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = \Gamma_{\mu_1}^{-m}v(x),$$

где функция $v(x)$ является решением следующей задачи

$$a\Delta v(x) + b\Delta v(Sx) = \Gamma_{\mu_1+2}^m f(x), x \in \Omega; v(x)|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условие $a \neq \pm b, f(x) \in C^m(\bar\Omega), g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи 2 существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = \Gamma_{\bar\mu}^{-m}v(x),$$

где функция $v(x)$ является решением следующей задачи

$$a\Delta v(x) + b\Delta v(Sx) = \Gamma_{\bar\mu+2}^m f(x), x \in \Omega; v(x)|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP08855810.

Ключевые слова: нелокальное уравнение, уравнение Пуассона, оператор Баврина, существование,единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 35A09, 35C15, 35J05, 35J25.

Литература

[1] Баврин И. И. Операторы для гармонических функции и их приложения, *Диференциальные уравнения*, **21**:1 (1985), 9–15.

[2] Баврин И. И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения, *Диференциальные уравнения*, **24**:9 (1988), 1629–1631.

[3] Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation, *Turkish Journal of Mathematics*, **43** (2019), 1604–1625.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Условная корректность одной задачи с операторными коэффициентами

Илгор ГАФАРОВ

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: ilgorgafarov@mail.ru

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{d^4x\,(t)}{dt^4}+A_1\frac{d^3x\,(t)}{dt^3}+A_2x\,(t)=0, \tag{1}$$

$$x^{(i)}\,(t)\Big|_{t=0}=x_0^{(i)},\quad i=1,2,3. \tag{2}$$

где $x\,(t)$ - функция скалярного аргумента $t,\ 0\leq t\leq\infty$ со значениями в действительном Гильбертовом пространстве H , A_i самосопряженные, постоянные и перестановочные операторы с областью определения $D\,(A_i)\subset H$.

Теорема. *Предположим, что для любого* $x\in D\,(A_i)\,,\ (A_1x,x)\geq 0$ *или* $(A_1x,x)\leq 0$. *Тогда для любого решения задачи (1)-(2) на отрезке* $[0,T]$ *справедливо неравенство:*

$$\int\limits_0^T\|x\,(t)\|_H^2dt\leq[K\,(0)]^{1-\varpi(T,T)}[K\,(T)]^{\varpi(T,T)} \tag{3}$$

где

$$\varpi\,(T,T)=\frac{4T^2-(2T-T')^2}{3T^2},\qquad 0<T<T',$$

и

$$K\,(T)=K\left(\left\|A_1^Kx^{(i)}\,(t)\right\|,\left\|A_2^lx^{(j)}\,(t)\right\|\right),\quad i,j,k,l=0,1,2,3.$$

квадратичная форма, коэффициенты которой зависят только от t и T.

Доказательство. Доказательство приводим для случая $(A_1x,x)\geq 0$, в случае $(A_1x,x)\leq 0$ теорема доказывается аналогично.

Решение будем искать в виде:

$$x\,(t)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma(2T-t)^2\right]y\,(t)\,,$$

где

$$\sigma\geq\sqrt{\frac{96}{31}\cdot\frac{1}{T^2}}, \tag{4}$$

Тогда из (1) получим (если обозначим $2T - t = \theta$);

$$\begin{aligned} & y^{IY} + (4\sigma\theta + A_1)y^{III} + (6\sigma^2\theta^2 - 6\sigma + 3\sigma\theta A_1)y^{II} + \\ & +(4\sigma^3\theta^3 - 12\sigma^2\theta + 3\sigma^2\theta^2 A_1 - 3\sigma A_1)y^I + \\ & +(\sigma^4\theta^4 - 6\sigma^3\theta^2 + 3\sigma^2 + \sigma^3\theta^3 A_1 - 3\sigma^2\theta A_1 + A_2)y = L_\sigma y(t) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{gathered} \left(L_\sigma L_\sigma^+ - L_\sigma^+ L_\sigma\right) y(t) = 32\sigma y^{VI} + \left(-96\sigma^3\theta^2 - 48\sigma^2\theta A_1 - 18\sigma^2 A_1^2\right) y^{IV} + \\ + \left(384\sigma^3\theta + 96\sigma^2 A_1\right) y''' + \left(-96\sigma^3 + 96\sigma^5\theta^4 + 96\sigma^4\theta^3 A_1 + 36\sigma^3\theta^2 A_1^2\right) y'' + \\ + \left(-384\sigma^3\theta^3 - 288\sigma^4\theta^2 A_1 - 72\sigma^3\theta A_1^2\right) y' + \\ + \left(96\sigma^5\theta^2 + 48\sigma^4\theta A_1 + 6\sigma^3 A_1^2 - 32\sigma^7\theta^6 - 48\sigma^6\theta^5 A_1 - 18\sigma^5\theta^4 A_1^2\right) y \end{gathered} \tag{6}$$

где L_σ^+ - сопряженный оператор оператора L_σ в смысле Лагранжа. Умножим обе части равенства (6) скалярно на $y\left(t\right)$ и проинтегрируем по t от 0 до T. Далее, применяя формулу интегрирования по частям, получим следующее равенство:

$$\begin{gathered} M_1\left(t\right)|_0^T + \int_0^T \left\|L_\sigma^+ y\right\|^2 dt = M_2\left(t\right)|_0^T - 32\sigma \int_0^T \left\|y'''\right\|^2 dt - \\ -96\sigma^3 \int_0^T \left\|y'\right\|^2 dt - 96\sigma^3 \int_0^T \theta^2 \left\|y''\right\|^2 dt - \\ 48\sigma^2 \int_0^T \theta\left(A_1 y'', y''\right) dt - 18 \int_0^T \left\|A_1 y''\right\|^2 dt - \\ -96\sigma^5 \int_0^T \theta^4 \left\|y'\right\|^2 dt - 96^4 \int_0^T \theta^3 \left(A_1 y', y^1\right) dt - \\ 32\sigma^3 \int_0^T \theta^2 \left\|A_1 y'\right\|^2 dt + 96\sigma^5 \int_0^T \theta \left\|y\right\| dt - \\ -32\sigma^7 \int_0^T \theta^6 \left\|y\right\|^2 dt + 48\sigma^4 \int_0^T \theta\left(A_1 y,\, y\right) dt - \\ -48\sigma^6 \int_0^T \theta^5 \left(A_1 y, y\right) dt - 18\sigma^5 \int_0^T \theta^4 \left\|A_1 y\right\|^2 dt, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\left\|\cdot\right\| = \left\|\cdot\right\|_H$, $M_1\left(t\right)$ зависит от скалярных произведений вида $\left(\left[L_\sigma^+\left(t\right)\right]^i,\ y^{(k)}\left(t\right)\right)$, $i, k = 0, 1, 2, 3$, а от скалярных произведений вида $\left(y^{(i)}\left(t\right), y^{(k)}\left(t\right)\right)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $k = 0, 1, 2$. С помощью (4), легко проверить, что

$$\begin{gathered} 96\sigma^5 \int_0^T \theta^2 \left\|y\right\|^2 dt - 31\sigma^7 \int_0^T \theta^6 \left\|y\right\|^2 dt \le 0, \\ 48\sigma^4 \int_0^T \theta\left(A_1 y, y\right) dt - 48\sigma^6 \int_0^T \theta^5 (A_1 y, y) dt \le 0. \end{gathered}$$

Имея в виду эти неравенства отбросим положительные слагаемые в равенстве (7) и получим следующее неравенство:

$$\sigma^7 \int_0^T \theta^6 ||y(t)||^2 dt \le [M_2(t) - M_1(t)]_0^T, \tag{8}$$

Из (5) находим:

$$\begin{aligned} & y^{IY}(t) = \left(-4\sigma\theta - A_1\right) y'''\left(t\right) + \left(6\sigma^2\theta^2 + 6\sigma - 3\sigma\theta A_1\right) y''\left(t\right) + \\ & + \left(-4\sigma^3\theta^3 + 12\sigma^2\theta - 3\sigma^2\theta^2 A_1 + 3\sigma A_1\right) y'\left(t\right) + \\ & + \left(-\sigma^4\theta^4 + 6\sigma^3\theta^2 - 3\sigma^2 - \sigma^3\theta^3 A_1 + 3\sigma^2\theta A_1 - A_2\right) y\left(t\right). \end{aligned}$$

С помощью этого неравенства и дифференцирования выразим $y^{(V)}\left(t\right)$ и $\left[L_\sigma^+ y\left(t\right)\right]^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, через $y^{(i)}\left(t\right)$, $i = 0, 1, 2, 3$.
Тогда из неравенства (8) получим:

$$\sigma^7 \int_0^T \theta^6 ||y(t)||^2 dt \le [M_2(t)]_0^T, \tag{9}$$

где $M_3(t)$ зависит только от скалярных произведений вида

$$\left(A_1^i y^{(k)}(t), A_2^l y^{(m)}(t)\right),\ i,k,m=0,1,2,3; l=0,1.$$

Возвращаясь к функции $x(t)$ и используя неравенство $|(a,b)| \le \|a\|\cdot\|b\|$, из (8) получаем

$$\sigma^7 T^6 \int_0^T \exp\left(\sigma\theta^2\right)\|x(t)\|^2 dt \le \exp\left(\sigma T^2\right) M_4(T) + \exp\left(4\sigma T^2\right) M_4(0), \tag{10}$$

где

$$M_4(t) = M_4\left(\left\|A_1^k x^{(i)}(t)\right\|, \left\|A_2^l x^{(j)}(t)\right\|\right), i,j,k,l=0,1,2,3,$$

квадратичная форма. Очевидно, что степень σ при коэффициентах квадратичной формы не больше чем семь, если же она меньше семи, то, усилив неравенство (10) с помощью (4), можно добиться, чтобы она стала равной семи при всех коэффициентах квадратичной формы. После чего, используя теорему о среднем получим:

$$\begin{aligned}&\int_0^T ||x(t)||^2 dt \le [K(T')\exp\left\{-\sigma\left[(2T-T)-T^2\right]\right\}+\\&+K(0)\exp\left\{\sigma\left[4T^2-(2T-T)^2\right]\right\},\end{aligned}$$

где $0 < T' < T$. Минимизируя по σ правую часть последнего неравенства, с учётом (4) получим желаемое неравенство. *Теорема доказана.*

Ключевые слова: Условная корректность, оператор, скалярное произведение, самосопряженный оператор, оценка.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G10.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О краевой задаче для уравнения Бюргерса с граничными условиями типа Солонникова-Фазано

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Алибек АСЕТОВ[2,b]

[1] *ИМММ, Алматы, Казахстан*
[2] *КарУ, Караганда, Казахстан*
E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*bekaaskar@mail.ru*

В работах [1], [2] исследованы граничные задачи теплопроводности в угловых областях в Лебеговых классах и установлены теоремы об их разрешимости редукцией к особым интегральным уравнениям типа Вольтерра. В работе [3] изучены различные случаи неоднородности на границе и указано, что соответствующие граничные задачи могут быть разрешимы как однозначно, так и неоднозначно. В данной работе исследованы вопросы разрешимости граничной задачи для уравнения Бюргерса в вырождающейся угловой области с производными по времени в граничных условиях.

Пусть $Q_{xt_1} = \{x, t_1 \mid 0 < x < t_1,\ 0 < t_1 < T_1 < \infty\}$ – треугольная область, одна из вершин которой находится в начале координат, и Ω_{t_1} – сечение области Q_{xt_1} при фиксированной временной переменной $t_1 \in (0, T_1)$. В области Q_{xt_1} рассматривается следующая граничная задача для уравнения Бюргерса:

$$\partial_{t_1} u + u\partial_x u - \nu\partial_x^2 u = f,\ \ \nu > 0. \tag{1}$$

$$[\partial_{t_1} u - \partial_x u(x,t_1)]\,|_{x=0} = 0,\ \ [\partial_{t_1} u + 2\partial_x u(x,t_1)]\,|_{x=t_1} = 0, \tag{2}$$

где $f \in L_2(Q_{xt_1}) \cap C(\overline{Q}_{xt_1})$.

Получен следующий основной результат.

Теорема. *Пусть* $f(x,t_1) \in L_2(Q_{xt_1}) \cap C(Q_{xt_1})$. *Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение* $u(x,t_1) \in H^{2,1}(Q_{xt_1})/X_{xt_1}$.
Причем, следы решения удовлетворяют условиям $u(t_1,t_1)$, $u(0,t_1) \in H^1(0,T_1)$.

Funding: Авторы поддержаны грантом Комитета науки МОН Республики Казахстан (Grant No. AP08855372, 2020-2022).

Литература

[1] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain, *Boundary Value Problems* (2014), 213–215.

[2] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain, *Sib. Math. Jour. Vol. 56, 6* (2015), 982–995.

[3] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 216 (2017), 123–141.

— ⁂ —

О начально-граничных задачах для уравнения типа Буссинеска

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Мади ЕРГАЛИЕВ[1,2,b], Арнай КАСЫМБЕКОВА[1,2,c]

[1] *ИММM, Алматы, Казахстан*

[2] *КазНУ им.аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev.madi.g@gmail.com*, [c]kasar1337@gmail.com

Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $0 < t_0 < T < \infty$. В области $Q_{xt} = \Omega_t \times (t_0, T)$ рассматривается начально-граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u - \partial_x (|u|\partial_x u) = f, \ \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$u = 0, \ \{x,t\} \in \Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (t_0,T), \ u = u_0, \ x \in \Omega_{t_0} = (0,t_0). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{3/2}((t_0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t))$, $u_0 \in H^{-1}(\Omega_{t_0})$. *Тогда граничная задача (1)–(3) имеет единственное решение* $u \in L_3(Q_{xt})$.

Для доказательства Теоремы 1 мы рассмотрим вспомогательную граничную задачу. Для этой цели перейдем от переменных $\{x,t\}$ к $\{y,t\}$ по формулам $y = \frac{x}{t}$, $t = t$ и преобразуем трапецию Q_{xt} в прямоугольную область $Q_{yt} = \Omega \times (t_0,T)$, $0 < t_0 < T < \infty\}$, где $y \in \Omega = (0,1)$, $\partial\Omega = \{0\} \cup \{1\}$, $\Sigma_{xt} = \partial\Omega \times (t_0,T)$. Введя обозначения $w(y,t) = u(yt,t) = w(\frac{x}{t},t)$, $w_0(y) = u_0(yt_0,t_0)$ и $g(y,t) = f(yt,t)$, мы запишем вспомогательную граничную задачу для (1)–(2) в следующем виде:

$$\partial_t w - \frac{1}{t^2}\partial_y (|w|\partial_y w) - \frac{y}{t}\partial_y w = g, \ \{y,t\} \in Q_{yt}, \tag{3}$$

$$w = 0, \ \{y,t\} \in \Sigma_{yt}, \ w = w_0, \ y \in \Omega. \tag{4}$$

В силу взаимно-однозначности преобразования независимых переменных $\{x,t\} \to \{y,t\}$ получаем:

$$g \in L_{3/2}((t_0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega)), \ u_0 \in H^{-1}(\Omega). \tag{5}$$

Теорема 2. *При условиях (5) граничная задача (3)–(4) однозначно разрешима* $w \in L_3(Q_{yt})$.

Для доказательства Теорем 1 и 2 мы используем вложения $L_3(\Omega_t) \subset H^{-1}(\Omega_t) \equiv (H^{-1}(\Omega_t))' \subset L_{3/2}(\Omega_t)$ $\forall t \in (t_0,T)$, и априорные оценки. Вначале мы установим ряд вспомогательных утверждений. Для задачи (3)–(4) введем операторы

$$A(t,w) = \frac{1}{t^2}A_1(w) + \frac{1}{t}A_{21}(w), \ \text{где} \ A_1(w) = -\partial_y(|w|\partial_y w), \ A_2(w) = -y\partial_y w,$$

и оператор $A_2(w)$ представим в виде:

$$A_2(w) = A_{21}(w) + A_{22}(w), \text{ где } A_{21}(w) = w, \ A_{22}(w) = -\partial_y(yw).$$

Введем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \left[\left(-d_y^2\right)^{-1} \psi \right] dy, \ \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega), \tag{6}$$

$$\text{где } d_y^2 = \frac{d^2}{dy^2}, \ \tilde{\psi} = \left(-d_y^2\right)^{-1} \psi : \ -d_y^2 \tilde{\psi} = \psi, \ \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(1) = 0, \forall \psi \in H^{-1}(\Omega).$$

Лемма 1. *Оператор $A(t,w) = (t^{-2}A_1 + t^{-1}A_{21})(w)$ является монотонным в смысле скалярного произведения (6) в пространстве $H^{-1}(\Omega)$:*

$$\langle (A(t,w_1) - (A(t,w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq 0. \tag{7}$$

По аналогии с (6) введем скалярное произведение в области Ω_t.

Лемма 2. *Оператор эллиптической частью уравнения (1) $A_1(t,u)$ является монотонным в пространстве $H^{-1}(\Omega_t)$:*

$$\langle A_1(t,u_1) - A_1(t,u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq 0, \forall t \in (t_0, T).$$

Леммы 1 и 2 позволяют доказать Теоремы 2 и 1.

Результаты справедливы и для усеченного (наклонного) конуса для двумерного уравнения типа Буссинеска, т.е. если $x = (x_1, x_2)$, $\Omega_t = \{|x-t| < t\}$, $\partial\Omega_t = \{|x-t| = t\}$, $Q_{xt} = \Omega_t \times (t_0, T)$, $\Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (t_0, T)$, $0 < t_0 < T < \infty$; а также для уравнений с высоким порядком нелинейности.

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP09258892 МОН РК.

Ключевые слова: начально-граничная задача, нелинейное параболическое уравнение, монотонный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35K55, 47H05.

— ⁂ —

Спектральная задачи для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной

Ляззат ЖУМАНОВА[1,2,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a] *lyazzatzhuman@gmail.com*, [b] *sadybekov@math.kz*

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля при $q(x) \equiv 0$, заданного на интервале $(0;l)$:

$$L(y) = \begin{Bmatrix} -k_1^2 y''(x) \\ -k_2^2 y''(x) \end{Bmatrix} = \lambda y(x), \quad \begin{matrix} 0 < x < x_0 \\ x_0 < x < l \end{matrix} \tag{1}$$

$$k_1 \neq k_2$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} U_1(y) = a_{11}y'(0) + a_{12}y'(l) + a_{13}y(0) + a_{14}y(l) = 0, \\ U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y'(l) + a_{23}y(0) + a_{24}y(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

где a_{ij} – произвольные комплексные числа и условиями сопряжения

$$y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0), \qquad k_1 y'(x_0 - 0) = k_2 y'(x_0 + 0). \tag{3}$$

Обозначим через $A_{ij} = \det(A(i,j))$ определитель матрицы $A(i,j)$, составленной из i-го и j-го столбцов матрицы A граничных условий $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$, тогда характеристический определитель для нахождения собственных значений задачи (1)-(3) имеет вид:

$$\Delta_0(\lambda) = -\left(A_{13} + \frac{k_1}{k_2}A_{24}\right) + A_{34}\frac{k_1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\alpha\sqrt{\lambda}) - \\ -\left(\frac{k_1}{k_2}A_{23} + A_{14}\right)\cos(\alpha\sqrt{\lambda}) + A_{12}\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\sin(\alpha\sqrt{\lambda}) = 0$$

здесь использовано обозначение

$$\alpha = \frac{l}{k_2} + \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)x_0$$

Краевые условия (2) называются усиленно регулярными, если выполнено одно из трех соотношений:

1. $A_{12} \neq 0$;
2. $A_{12} = 0, \quad k_2A_{14} + k_1A_{23} \neq 0, \quad k_2A_{14} + k_1A_{23} \neq \mp(k_2A_{13} + k_1A_{24})$;
3. $A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = 0, \quad A_{34} \neq 0$

Теорема. *Если краевые условия (2) являются усиленно регулярными, то все собственные значения λ_n, кроме конечного числа, являются простыми. Другими словами, они являются асимптотически простыми. При этом общее количество присоединенных функций – конечно. Кроме того, собственные значения λ_n являются отделенными в том смысле, что существует такая постоянная $C_0 > 0$, что для всех собственных значений λ_n и λ_m с достаточно большими номерами имеем*

$$|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}| \geq C_0. \tag{4}$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP08855352 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальные краевые задачи, асимптотика собственных функций.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D2, *J. Math.Anal.Appl.*, **1**:2 (1990. Vol.146, No 1), 148–191.

[2] Marchenko V.A. Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, Ukraine (1977)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной краевой задаче для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области

Абдулла ЖУРАЕВ[a], Ойшахон ТУРСУНХУЖАЕВА

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: [a]*a-x-juraev@mail.ru*

В области $D^+ = \{(x,y): \ 0 < x < \infty, \ 0 < y < 1\}$ рассмотрим уравнения

$$u_{xxxxx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

Будем говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D) \cap C^{4,1}_{x,y}(D \cup \Gamma)$, $(\Gamma = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{y=1\})$ и ограниченно на бесконечности в месте с производными до 4-го порядка.

Задача A^+ **.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^+ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0) = 0, \qquad u(x,1) = 0 \tag{2}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \qquad u_x(0,y) = \varphi_2(y) \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x,y) = \lim_{x \to +\infty} u_x(x,y) = \lim_{x \to +\infty} u_{xx}(x,y) = 0,$$

где

$$\varphi_i(y) \in C^4[0,1], \quad \varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \varphi_i''(0) = \varphi_i''(0) = 0, \quad i = 1,2.$$

Отметим, что аналогичная задача для уравнения

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} u(x,y) + (-1)^n \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0$$

рассмотрена в работе [1], где решение построена методом потенциалов. В работе [2] рассмотрено когда $u(x,0) = 0$.

Теорема 1. *Если задача A^+ имеет решения, то оно единственно.*
Единственность поставленной задач доказано с помощью интегралом энергии.

Теорема 2. *Если функции $\varphi_i(y) \in C^4[0,1]$ и выполняются условия согласования $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \varphi_i''(0) = \varphi_i''(1) = 0, \ \ (i = 1,2,3)$, то решение задачи A^+ существует.*
Теорема существования решения поставленной задач доказан с помощью методом Фурье.

Ключевые слова: уравнение пятого порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G15.

Литература

[1] Cattabriga L. Potenziali di linia e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple. Rendiconti del Sem., *Mat. della Univ. di Padova*, **31** (1961), 1–45.

[2] Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области, *Украинский математический журнал*, **61**: 4 (2009), 21–28.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

К распределению собственных значений нагруженного оператора дифференцирование на отрезке

Нурлан ИМАНБАЕВ[1,2,a]

[1] *Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*imanbaevnur@mail.ru*

В функциональном пространстве $W_2^1[-1,1]$ рассматривается задача на собственные значение для нагруженного оператора дифференцирование

$$L_1 y = y'(t) + \lambda y(-1)\Phi(t) = \lambda y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{1}$$

с краевым условием

$$y(-1) = y(1), \tag{2}$$

где $\Phi(t)$- функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, λ-комплексное число, спектральный параметр.

Требуется найти те комплексные значения λ, при которых операторное уравнение (1) имеет ненулевые решения.

Лемма 1. *Характеристический определитель спектральной задачи для нагруженного оператора дифференцирование (1) на отрезке $[-1,1]$ с краевым условием (2) представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{\lambda} - \lambda \cdot \int_{-1}^{1} e^{\lambda t}\Phi(t)dt, \tag{3}$$

которая является целой аналитической функцией переменного $\lambda = x + iy$, $x = Re\lambda$, $y = Im\lambda$, $i = \sqrt{-1}$, где $\Phi(t)$-функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$.

Теорема 1. *Если $\Phi(t)$-функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, то все нули целой функции $\Delta_1(\lambda)$, т.е. все собственные значений нагруженного дифференциального оператора первого порядка L_1 принадлежат полосе $|Re\lambda| = |x| < k$, при некотором k, образуют счетное множество и имеют асимптотику $\lambda_n^{(1)} = i\pi n + O(1)$ при $n \to \infty$.*

Замечание 1. Сопряженная задача к (1)-(2) будет

$$L_1^* v = v'(t) = \overline{\lambda} v(t), \quad -1 \le t \le 1,$$

$$v(-1) - v(1) = \overline{\lambda} \cdot \int_{-1}^{1} v(t)\Phi(t)dt.$$

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (грант №AP09260752).

Ключевые слова:собственное значение, нагруженный оператор, дифференциальный оператор, сопряженная задача.

Литература

[1] Sadovnichii V.A., Lyubishkin V.A., Belabbasi Yu. *On regularized sums of root of an entire function of a certain class, Sov. Math. Dokl.,* **22** (1980), 613–616.

[2] Imanbaev N.S. *On nonlocal perturbation of the problem on eigenvalues of differentiation operator on a segment, Вестник Удмуртского университета. Математика.Механика. Компьютерные науки*, **30**:3 (2021), 186–193.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода

Бозор ИСЛОМОВ[1,a], Дилдора НОСИРОВА[2,b]

[1] *Национальный университет Узбекистана, г.Ташкент, Узбекистан,*
[2] *Ташкентский государственный технический университет, г.Ташкент, Узбекистан.*
E-mail: [a] *islomovbozor@yandex.com*, [b]*ndildora0909@gmail.com*

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию нелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^p u_y-\mu_1 u\left(x,0\right), & x>0,\ \ y>0,\\ u_{xx}-\left(-y\right)^m u_{yy}+\mu_2 u\left(x,0\right), & x>0,\ \ y<0,\end{cases} \tag{1}$$

где $m,\ p,\ \ \mu_1,\ \mu_2$ - любые действительные числа, причем

$$0<m<1, p>0, \mu_1>0, \mu_2<0. \tag{2}$$

где D_1 – область, ограниченная отрезками $AB,\ AA_0,\ BB_0,\ A_0B_0$, прямых $y=0,\ \ x=0,\ x=1,\ y=h$ соответственно при $y>0$, а D_2 – характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $I\equiv AB:\ 0<x<1,\quad y=0$,

$$AC:\quad x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0,\ \ BC:\quad x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=1,$$

уравнения (1) при $y<0$, $C\left(0;\ -\left(4/(2-m)\right)^{2/(m-2)}\right)$, здесь $2\beta=\dfrac{m}{m-2}$, причем

$$-1<2\beta<0. \tag{3}$$

Введем обозначения: $I=\{(x,y):\ \ 0<x<1,\ \ y=0\}$, $D=D_1\cup D_2\cup I$.

В области D для уравнения (1) исследуется следующая нелокальная задача.

Задача C_μ. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$; 2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(D_1)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области D_1; 3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в области D_2; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y),\qquad u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h,$$

$$\frac{d}{dx}u\left[\Theta_0(x)\right]+b\frac{d}{dx}u\left[\Theta_1(x)\right]=c(x),\qquad (x,0)\in I,$$

5) $u_y\in C\left(D_1\cup I\right)\cap C\left(D_2\cup I\right)$ и I на интервалах выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),(x,0)\in I\,,$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \psi_1(x)$ – заданные функции, причем $b=const\neq 0$,

$$\varphi_1\left(y\right),\ \ \varphi_2\left(y\right)\in C\left[0,h\right]\cap C^1\left(0,h\right), \tag{4}$$

$$c(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1), \tag{5}$$

здесь $\Theta_0\left(\frac{x}{2},-\quad\left(\frac{x}{2(1-2\beta)}\right)^{1-2\beta}\right)$ и $\Theta_1\left(\frac{1+x}{2},-\quad\left(\frac{1-x}{2(1-2\beta)}\right)^{1-2\beta}\right)$ - точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $x\in I$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Заметим, что задача C_μ для уравнения (1) при $\mu=0,\quad b=0$ с разрывным условиям изучены в работах[2-3].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия (2)-(5), то в области D существует единственное решение задачи C_μ.*

Единственность решение задачи доказывается с помощью принципа экстремума и методом интегралов энергии, а существования решения - методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, нагруженная уравнения второго рода, обобщенное решение, принцип максимума.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35L10, 35M10, 35M12, 45B05.

Литература

[1] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, Москва (1985).

[2] Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарскогодля уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. *Известия вузов. Математика. Россия.* №6 (2015), с. 43-52.

[3] Исламов Н. Б. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода. *Уфимск. матем. журн. Россия.* Т. 7, №1 (2015), с. 31-45.

— ⁂ —

Об одном приближенном методе решения краевой задачи для линейного нагруженного гиперболического уравнения

Сымбат КАБДРАХОВА[1,2,a], Жанеля АСАН[1,b]

[1] *КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Институт математики и математического моделирования МОН РК*

E-mail: [a]*symbat2909.sks@gmail.com*, [b]*zh.assanova98@gmail.com*

В области $\bar\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного нагруженного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t) + A_0(x,t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, и $f(x,t)$ непрерывны на $\bar\Omega$, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0)=\psi(T)$, и x_0 точка нагрузки. Пусть $C(\overline{\Omega})$ - пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u:\overline{\Omega}\to R$ $\overline{\Omega}$ с нормой $\|u\|_C = \max_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|$. Через $C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и непрерывно дифференцируемых на $\bar\Omega$ функций $u(x,t)$ с нормой $\|u\|_0 = \max(\|u\|_C, \|u_x\|_C, \|u_t\|_C)$ и $C^1\big([0,T]\big)$ – пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $\psi(t)$ с нормой $\|\psi\|_1 = \max\big(\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|,$
$\max_{t\in[0,T]}|\dot\psi(t)|\big)$.

Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u^2(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, называется решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$, на характеристике $x=0$ принимает данное значение $\psi(t)$, $t\in[0,T]$, на характеристиках $t=0$, $t=T$ имеет равные значения для $x\in[0,\omega]$.

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия краевой задачи (1)-(3). В данной работе выводится и обсуждается полунеявный метод конечных разностей для задачи (1)-(3). В ходе полученная система линейных уравнений решается методом прогонки. Численные результаты, полученные настоящими методами, сравнивались с точным решением. Численные методы также показывают, что они прекрасно согласуются с точным решением.

Funding: Авторы были поддержаны грантом "AP09058457 - Разработка методов исследования и решения краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений и их численная реализация"(МУ 2021-2023 гг.) МОН РК.

Ключевые слова: нагруженное гиперболическое уравнение, линейное гиперболическое уравнение, полупериодическая краевая задача, численное решение, полунеявная схема, метод прогонки.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L10, 35L20, 35L53, 65L10, 65N06.

Литература

[1] S. S. Kabdrakhova, O. N. Stanzhytskyi Necessary and sufficient conditions for the well-posed solvability of a boundary value problem for a linear loaded hyperbolic equation, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **112**:4 (2022), 3–12.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Метод продолжения в случае многоточечной задачи для волнового уравнения

Жалгас КАЙЫРБЕК[1,a], Гауһар АУЗЕРХАН[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]kaiyrbek.zhalgas@gmail.com, [b]auzerhanova@gmail.com

Хорошо известна формула Даламбера для решения задачи Коши в случае бесконечной струны, то есть решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t = 0$$

$$u\mid_{t=0} = f(x), u_t\mid_{t=0} = F(x) \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} F(\tau)d(\tau) \tag{2}$$

Когда струна конечной длины, то в зависимости от вида граничных условий осуществляется то или иное продолжения начальных формы и импульса на всю ось, а затем применяют формулы (2). В монографии [1] предложен вариант метода продолжения при решении смешанной задачи для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке действительной оси. Точнее говоря, решена задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \tag{3}$$

$$u\mid_{t=0} = f(x), \quad u_t\mid_{t=0} = F(x) \quad 0 < x < b \tag{4}$$

$$u_t - hu\mid_{x=0} = \varphi(t) \quad t > 0 \tag{5}$$

$$u_t + Hu\mid_{x=b} = \psi(t) \quad t > 0 \tag{6}$$

при некоторых предположениях о функциях q, F, f, φ, ψ. В работе [2] найдена формула Даламбера (2) для уравнения (1) в случае смешанной многоточечной задачи на отрезке. Здесь результаты работы [2] распространяются на волновое уравнение (3) с начальными условиями (4) и краевыми условиями

$$u\mid_{x=0} = 0, \quad \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u'_x\mid_{x=x_j} = 0 \quad t > 0 \tag{7}$$

где $\alpha_0 \neq 0, \quad \alpha_N \neq 0, \quad \sum_{j=0}^{N} \alpha_j = 1, \quad 0 = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} = b$

Будем предполагать, что $q(x)$ непрерывная на $[0,b]$ функция.Не умаляя общности можно предполагать $F(x)\equiv 0$. Продолжим функцию $q(x)$ на всю числовую ось с сохранением класса, а в остальном произвольно, и будем искать решение задачи (3), (4), (7) в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\tilde{f}(x+t)+\tilde{f}(x-t))+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\omega(x,t,s)\tilde{f}(s)d(s) \tag{8}$$

где $\tilde{f}$ некоторое продолжения функций f с отрезка $[0,b]$ на всю ось, $\omega(x,t,s)$ решения задачи Гурса [1].

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP 08855402 МОН РК.

Ключевые слова: волновое уравнение, формула Даламбера, струна, краевые условия.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию*, М: Наука, Москва (1970).

[2] Кангужин Б.Е., Кожатаева М.Ж. Формула Даламбера в случае многоточечной задачи, *Доклады НАН РК*, **1**:5 (1998), 18–23.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об асимптотике решения нелинейного интегро-дифференциального уравнение с нулевым оператором

Бурхан КАЛИМБЕТОВ

МКТУ им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: burkhan.kalimbetov@ayu.edu.kz,

В работе метод регуляризации С.А. Ломова [1,2] обобщается на задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения с быстро изменяющимся ядром и с быстро осциллирующей неоднородностью

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta}K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\varepsilon f\left(y,t\right)+h(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon)=y^0,\qquad t\in[0,T].$$

В задаче (1) сингулярности в ее решении описываются спектральными значениями ядра и быстро осциллирующей неоднородностей. Однако влияние нулевого оператора дифференциальной части сказывается на том, что в первом приближении асимптотика решения рассматриваемой задачи не будет содержать функций пограничного слоя, а сам предельный оператор будет вырожденным (но не нулевым). При этом условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, будут иметь вид не дифференциальных (как это было в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части [3]), а интегро-дифференциальных уравнений, причем на формирование этих уравнений существенную роль оказывает нелинейность. При этом могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации.

Рассмотрим задачу (1) при следующих условиях:

$$\begin{aligned}&1)\,\mu(t),\beta'(t)\in \mathrm{C}^\infty([0,T],\mathbb{R}),\ K(t,s)\in \mathrm{C}^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{R});\\&2)\,\mu(t)\ne\beta'(t)\ \ \forall t\in[0,T];\\&3)\,\mu(t)<0,\beta'(t)>0\ \ \forall t\in[0,T]\,;\end{aligned}$$

4) $f(y,t)$ — многочлен, т. е. $f(y,t)=\sum\limits_{m=0}^{N}f_m(t)y^m$ с коэффициентами

$$f_m(t)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{R}\right),m=\overline{0,N},N<\infty.$$

Введем новую неизвестную функцию $z = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta} K(t,s)y(s,\varepsilon)ds$, и дифференцируя ее по t, вместо (1) получаем систему

$$\begin{gathered}\varepsilon \tfrac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon A_1(t)w + \varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta} G(t,s)w(s,\varepsilon)ds + \\ +\varepsilon F(w,t) + H(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, \quad w(0,\varepsilon) = w^0 \equiv \{y^0, 0\},\end{gathered} \tag{2}$$

где $w = \{y, z\}, F(w,t) = \{f(y,t), 0\}, H(t) = \{h(t), 0\}$, а матрицы $A(t),\ A_1(t),\ \ G(t,s)$ имеют вид
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix},\ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t,t) & 0 \end{pmatrix},\ G(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} & 0 \end{pmatrix}.$$
Для удобства обозначим $\lambda_1(t) \equiv i\beta'(t),\ \ \lambda_2(t) \equiv \mu(t),\ \sigma = \sigma(\varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon}\beta(0)}$. Следует отметить, что при исследовании задачи (2) могут возникнуть резонансы между спектральными значениями $\lambda_1(t) \equiv i\beta'(t)$ и $\lambda_2(t) \equiv \mu(t)$, т.е. при всех $t \in [0,T]$ могут выполнятся тождества ($m = (m_1, m_2)$ - мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$)

$$\begin{aligned}&(m,\lambda(t)) \equiv m_1\lambda_1(t) + m_2\lambda_2(t) \neq 0, |m| \geq 2,\\ &(m,\lambda(t)) \equiv m_1\lambda_1(t) + m_2\lambda_2(t) \neq \lambda_j(t), |m| \geq 2, j \in 1,2.\end{aligned}$$

Однако, в силу того, что $\lambda_1(t)$ чисто мнимая функция, а $\lambda_2(t)$ действительная функция, то вышеуказанные тождества не выполняются, т.е. имеет место нерезонансный случай.

Согласно алгоритму метода регуляризации [1], произведя регуляризацию задачи (2), получим следующую общеитерационную задачу:

$$L_0 w(t,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(t)\frac{\partial w}{\partial \tau_j} - A(t)w = P(t,\tau), \tag{3}$$

где $P(t,\tau) = P_0(t) + \sum\limits_{j=1}^{2} P_j(t)e^{\tau_j} + \sum\limits_{|m|\geq 2}^{N_P} P^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U.$

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) – 3) и $P(t,\tau) \in U$. Для того чтобы система (3) имела решение в U необходимо и достаточно, чтобы*

$$(P_j(t), \chi_j(t)) = 0,\ \ j = 0,2,\ \ \forall t \in [0,T], \tag{4}$$

где $\chi_0(t), \chi_2(t)$ - собственные функции матрицы $A^*(t)$.

Ключевые слова: Сингулярное возмущение, метод регуляризации, резонанс, общеитерационная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K26, 45J05.

Литература

[1] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* Наука, Москва (1981).

[2] Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя.* Издательство Московского университета, Москва (2011).

[3] Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф. Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части, *Диффер. уравн.*, **2011**, 47:4, 519–536.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Весовые неравенства для одного класса квазилинейных интегральных операторов

Айгерим КАЛЫБАЙ[1,a], Рыскул ОЙНАРОВ[2,b]

[1] Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан
[2] Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: [a]kalybay@kimep.kz, [b]o_ryskul@mail.ru

В работе мы изучаем следующие неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_0^t K(t,s)f(s)\,ds\right)^r w(t)\,dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

и

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty\left(\int_t^\infty K(s,t)f(s)\,ds\right)^r w(t)\,dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty v(x)f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

для $f \ge 0$. Здесь ядро $K(\cdot,\cdot) \ge 0$ удовлетворяет условию: существует константа $d > 0$ такая, что

$$d^{-1}(K(t,\tau)+K(\tau,s)) \le K(t,s) \le d(K(t,\tau)+K(\tau,s)) \tag{3}$$

для $0 < s \le \tau \le t < \infty$. Более того, u, v и w являются весами, т.е. положительными функциями локально суммируемыми на интервале $I = (0,\infty)$.

В последние годы изучению неравенств типа (1) и (2) посвящено большое количество работ, так как они имеют применение в теории пространств Морри. Данные неравенства также применяются для нахождения характеризаций билинейных неравенств Харди. Используя подход, отличающийся от предыдущих методов изучения неравенств (1) и (2), мы находим необходимые и достаточные условия их выполнения при $0 < r < \infty$, $0 < q < p < \infty$ и $p \ge 1$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09259084.

Ключевые слова: интегральный оператор, неравенство типа Харди, весовая функция, ядро.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 26D15.

— ⁂ —

Критерии единственности решения краевой задачи для уравнения $l(\cdot) - A$ с волновым оператором A со смещением

Балтабек КАНГУЖИН[1,2,a], Бакытбек КОШАНОВ[3,b]

[1] Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
[2] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[3] Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kanguzhin53@gmail.com, [b]koshanov@list.ru

1. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порожденный дифференциальным выражением

$$l(w) \equiv \frac{d^n w}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(t)w(t), \quad 0 < t < T \tag{1}$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{kj}w^{(k)}(0) + \beta_{kj}w^{(k)}(T)] = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

где $p_j(t) \in C^{(n-j)}[0,T], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного $n = 2p-1$ следующие два определителя θ_0, θ_1 отличны от нуля ; в случае четного $n = 2p$ следующие два определителя θ_{-1}, θ_1 отличны от нуля.

2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – конечная область, ограниченная отрезком $OB : 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$ и характеристиками $OC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения

$$Av = v_{xx}(x,y) - v_{yy}(x,y) = f(x,y). \tag{3}$$

Задача K_a. Найти решение уравнения (3), удовлетворяющие условию

$$v(\theta,0) = 0,\ 0 \le \theta \le 1,$$
$$v\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{\theta}{2}\right) = a\, v\left(\frac{\theta+1}{2}, \frac{\theta-1}{2}\right),\ 0 \le \theta \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где a – произвольное комплексное число.

Оператор, соответствующий краевой задаче K_a, обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов $\eta_{k,m}$. Собственные функции оператора A обозначим через $v_{k,m}(x,y)$ соответствующих собственным значением $\eta_{k,m}$.

В работе [2] в явном виде вычислены собственные значения и собственные функции оператора A :

$$\eta_{k,m} = -4(i\ln(-a) + 2\pi k)(i\ln(-a) + 2\pi m),\ k, m = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5}$$

$$v_{k,m}(x,y) = (-a)^{-2x}\left(e^{\{2\pi i[(k+m)x+(k-m)y]\}} - e^{\{2\pi i[(k+m)x-(k-m)y]\}}\right). \tag{6}$$

Теорема K [2]. *При $a = 0$ оператор A является вольтерровым, а при $a(a+1) \ne 0$ имеет полную систему собственных функций $\{v_{k,m}(x,y),\ k, m = 0, \pm 1, \ldots\}$, задаваемых равенством (6).*

3. Пусть Ω – конечная область из предыдущего пункта. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial^{n-j}u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} =$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2} + f(x,y;t), \quad (x,y) \in \Omega, \quad 0 < t < T \tag{7}$$

с краевыми условиями по t

$$U_\nu(u(x,y;\cdot)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad (x,y) \in \Omega \tag{8}$$

и с условиями со смещением по (x,y)

$$u(\theta,0;t) = 0, \quad 0 \le \theta \le 1,$$
$$u\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{\theta}{2}; t\right) = a\, u\left(\frac{\theta+1}{2}, \frac{\theta-1}{2}; t\right), \quad 0 \le \theta \le \frac{1}{2}, \quad 0 < t < T. \tag{9}$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (7)–(8)–(9) имеет вид

$$Bu = Au(x,y;t) + f(x,y;t), \quad (x,y;t) \in Q. \tag{10}$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в пункте 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

Приведем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (10).

Теорема 1. *Пусть выполнено требование I и $a(a+1) \ne 0$. Тогда однородное операторное уравнение*

$$Bu = Au \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) \neq \varnothing, \tag{12}$$

где $\sigma(B)$ *и* $\sigma(A)$ *– спектры операторов* B *и* A *соответственно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантами AP 09559378, 08855402 МОН РК.

Ключевые слова: гиперболические операторы второго порядка, регулярные краевые задачи по времени, краевая задача со смещением, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05.

Литература

[1] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва (1969).

[2] Кальменов Т.Ш. Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 75–78.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Оценка решения одной задачи сопряжения для вырождающегося уравнения теплопроводности в гельдеровских классах

Умбеткул КОЙЛЫШОВ[1,a], Кулняр БЕЙСЕНБАЕВА[2,3,b]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахская академия логистики и транспорта, Алматы, Казахстан*

[3] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*koylyshov@mail.ru*, [b]*beisenbaeva@mail.ru*

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами и вырождающиеся уравнения параболического типа, каждое в отдельности давно и хорошо исследуются. Начально-краевые задачи для вырождающегося уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами мало изучены.

Данная работа посвящена исследованию одной задачи сопряжения для вырождающегося уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

Найдено явное решение поставленной задачи и получена ее оценка в гельдеровских классах.

Постановка задачи. Рассматривается следующая задача: требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ в области $D_{n+1}(x \in R^n, t > 0)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$t^p \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \Delta u_1 + f_1(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^- = \{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n < 0, t > 0\}, \tag{1}$$

$$t^p \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \Delta u_2 + f_2(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^+ = \{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n < 0, t > 0\}, \tag{2}$$

начальным условиям:

$$u_1 \mid_{x_n=-0} = u_2 \mid_{x_n=+0}, \tag{4}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \mid_{x_n=-0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \mid_{x_n=+0}, \tag{5}$$

где $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}),\ k_i > 0, i = 1,2; 0 \le p < 1$.

Основной результат. Решение задачи (1)-(5) построено в явном виде и доказана.

Теорема. Решение задачи (1)-(5) удовлетворяет оценке

$$\langle u(x,t) \rangle_{c_{x,t}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha q}{2}}(D_{n+1})} \le C \left(\langle f(x,t) \rangle_{C_{x,t}^{\alpha, \frac{\alpha q}{2}}(D_{n+1})} + \langle \varphi(x) \rangle_{C_x^{2+\alpha}(R^n)} \right)$$

где $q = 1 - p$

Ключевые слова: Задача сопряжения, уравнения теплопроводности, вырождающиеся уравнения, разрывные коэффициенты, гельдеровские классы.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О разрешимости обобщенной задачи Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка в бесконечной области

Бакытбек КОШАНОВ[1,2,a], Александр СОЛДАТОВ[3,b]

[1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби,*
[2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
[3] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*
E-mail: [a]koshanov@list.ru, [b]soldatov48@gmail.com

В области D на плоскости, ограниченной простым гладким контуром Γ, рассмотрим эллиптическое уравнение $2l-$го порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\le r\le k\le 2l-1} a_{rk}(z)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = f(z), \quad z = x+iy \in D, \tag{1}$$

с постоянными старшими коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$.

Исходя из набора $1 = k_1 < \ldots < k_l \le 2l$ натуральных чисел, обобщенная задача Неймана для этого уравнения определяется краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_{\Gamma} = f_j, \quad j = 1,\ldots,l, \tag{2}$$

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль.

Постановка конкретной задачи (1), (2) при $k_{j+1} - k_j \equiv 1$ для полигармонического уравнения восходит к А.В. Бицадзе [1], где при $k_1 \ge 2$ она названа обобщенной задачей Неймана. Это название в дальнейшем сохраняем и для произвольного набора показателей k_j, вводя для задачи обозначение $\mathcal{N}$. Символ $\mathcal{N}_0$ сохраняем для задачи, когда все младшие коэффициенты a_{rk} в (1) равны нулю.

В конечной односвязной области D задача $\mathcal{N}$ подробно исследовалась в работах [2,3]. В работе [3] эта задача изучалась задача в классе

$C^{2l,\mu}_a(\overline{D}) = \{u \in C^{2l}(D) \cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}), \quad L_a u \in C^{\mu}(\overline{D})\}$.

Обозначим через $\nu_k,\ 1 \le k \le m$, все различные корни в верхней полуплоскости характеристического многочлена

$$\chi(z) = a_{2l}\prod_{k=1}^{m}(z-\nu_k)^{l_k}\prod_{k=1}^{m}(z-\overline{\nu}_k)^{l_k}$$

так что сумма кратностей $l_1 + \ldots + l_m$ этих корней равна l.

Введем дробно линейные по z функции

$$\omega(e,\nu) = \frac{-e_2 + e_1\nu}{e_1 + e_2\nu},\ 1 \le j \le l, \tag{3}$$

где зависимость от единичного касательного вектора $e = e_1 + ie_2$ к контуру Γ по отношению к нормальному вектору $e = e_1 + ie_2 = i(n_1 + in_2)$.

Исходя из l-вектор-функции $g(\zeta) = (g_1(\zeta),\ldots,g_l(\zeta))$, аналитической в окрестности точек $\zeta_1,\ldots,\zeta_m$, введем блочную $l\times l-$ матрицу

$$W_g(\zeta_1,\ldots,\zeta_m) = (W_g(\zeta_1),\ldots,W_g(\zeta_m)), \tag{4}$$

где матрица $W_g(\zeta_k) \in \mathbb{C}^{l\times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\zeta_k), g'(\zeta_k), \ldots, \frac{1}{(l_k-1)!}g^{(l_k-1)}(\zeta_k).$$

Пусть область D бесконечна и ограничена контуром $\Gamma \in C^{2l,\nu}$, связные компоненты которого обозначим $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n$. Следуя [4], введем пространство Гельдера $C^{\mu}_{\lambda}(\overline{D},\infty),\ \lambda \in \mathbb{R}$, функций со степенным поведением $O(|z|^\lambda)$ на бесконечности. Более точно, при $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций φ, для которых $\psi(z) = |z|^\mu \varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ. Относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{z\in D} |\varphi(z)| + \sup_{z_1\neq z_2} \frac{|\psi(z_1) - \psi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}$$

это пространство банахово, причем оно является банаховой алгеброй по умножению. В общем случае произвольного λ банахово пространство
$C^\mu_\lambda(\overline{D}, \infty)$ определим как класс функций φ, для которых $(1 + |z|)^{-\lambda}\varphi(z) \in C^\mu_0(\overline{D}, \infty)$, снабженное перенесенной нормой. Соответствующие банаховы пространство $C^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}, \infty)$ дифференцируемых функций определим индуктивно условиями

$$\varphi \in C^n(D) \cap C^{n-1,\mu}_\lambda(\overline{D}, \infty), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \in C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}(\overline{D}, \infty). \tag{5}$$

Оно является банаховым относительно соответствующей нормы.

Поскольку в дальнейшем бесконечная область D фиксирована, пространства $C^{n,\mu}_\lambda(\overline{D}, \infty)$ всюду в дальнейшем обозначаем кратко $C^{n,\mu}_\lambda$. В более общей ситуации конечного множества особых точек они были детально изучены в [4].

Задачу $\mathcal{N}$ рассмотрим в классе $C^{2l,\mu}_\lambda$, $-1 < \lambda < 0$, функций, исчезающих на бесконечности. Для нее справедлив следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть бесконечная область D ограничена контуром Γ класса $C^{2l,\nu}$, $\mu < \nu < 1$, состоящим из компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$, младшие коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют требованию*

$$a_{rk} \in C^\mu_{k-2l-0}(\overline{D}, \infty) = \cup_{\varepsilon>0} C^\mu_{k-2l-\varepsilon}, \tag{6}$$

и выполнено условие

$$\det W_g[\omega(e, \nu_1), \dots, \omega(e, \nu_m)] \neq 0, \quad e \in \mathbb{T}, \tag{7}$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность. Тогда задача $\mathcal{N}$ фредгольмова в классе $C^{2l,\mu}_\lambda$, $-1 < \lambda < 0$, и ее индекс дается формулой

$$æ = 2(n + 1)[æ_0 + 2 \sum\nolimits_{i<j} l_i l_j] - l(2l - 1). \tag{8}$$

Лемма. *Задачи $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ в классе $C^{2l,\mu}_\lambda$, $-1 < \lambda < 0$, фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 08857604 МОН РК.

Ключевые слова: эллиптические уравнения высокого порядка, обобщенная задача Неймана, фредгольмовая разрешимость задачи, условие дополнительности, формула для индекса задачи.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J30, 35J40, 35J37.

Литература

[1] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций, *Дифференциальные уравнения*, **24**:5 (1988), 825–831.

[2] Малахова Н.А., Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка, *Дифференциальные уравнения*, **44**:8 (2008), 1077–1083.

[3] Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1666–1681.

[4] Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **63** (2016), 1–179.

— ⋇⋇⋇ —

Задача Стеклова для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом

Мадина МАЖГИХОВА

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} – дробная производная Римана–Лиувилля [1], $1 < \alpha \leq 2$, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Для уравнения (1) исследована нелокальная краевая задача:

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее для всех* $0 < t < 1$ *условиям:*

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=1} = c_1 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_2 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1},$$
$$D_{0t}^{\alpha-1}u(t)\big|_{t=0} = c_3 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=0} + c_4 D_{0t}^{\alpha-2}u(t)\big|_{t=1}.$$

Найдена функция Грина задачи. Получено условие однозначной разрешимости. Доказаны теорема существования и единственности решения задачи и теорема о конечности числа вещественных собственных значений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, задача Стеклова, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 34L99.

Литература

[1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва (2003).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Краевая задача для системы уравнений с частными производными в смысле Джрбашяна – Нерсесяна

Мурат МАМЧУЕВ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: mamchuev@rambler.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$D_{0x}^{\{\alpha_0,\ldots,\alpha_k\}}u(x,y) + AD_{0y}^{\{\beta_0,\ldots,\beta_m\}}u(x,y) = Bu(x,y) + f(x,y), \tag{1}$$

здесь $D_{0x}^{\{\alpha_0,\ldots,\alpha_k\}}$ и $D_{0y}^{\{\beta_0,\ldots,\beta_m\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [1] порядков $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{k}\alpha_i - 1$ и $\beta = \sum\limits_{i=0}^{m}\beta_i - 1$, соответственно, $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_j \in (0,1]$; $f(x,y) = ||f_1(x,y), ..., f_n(x,y)||$ – заданный, а $u(x,y) = ||u_1(x,y), ..., u_n(x,y)||$ – искомый n-мерные векторы, A и B – заданные постоянные действительные квадратные матрицы порядка n.

Для системы уравнений (1) исследована краевая задача в прямоугольной области в случае, когда матричный коэффициент в главной части системы имеет собственные значения, лежащие в некотором углу комплексной плоскости. Доказаны теоремы существования и единственности решения исследуемой задачи. Решение построено в явном виде в терминах функции Райта матричного аргумента.

Ключевые слова: Система уравнений с частными поизводными, производные дробного порядка, оператор Джрбашяна – Нерсесяна, краевая задача, фундаментальное решение, функция Райта матричного аргумента.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C05, 35C15, 35E05.

Литература

[1] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **1**:2 (1968), 3–28.

— ⁂ —

Существование, компактность и оценки сингулярных и собственных чисел резольвенты сингулярного дифференциального оператора гиперболического типа

Мусакан МУРАТБЕКОВ[a], Сабит ИГИСИНОВ[b]

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Казахстан
E-mail: [a]*musahan_m@mail.ru*, [b]*igisinovsabit@mail.ru*

В работе для одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа нами доказаны, что существует ограниченный обратный оператор и найдено условие обеспечивающее компактность резольвенты, а также получены двусторонние оценки сингулярных чисел (s-чисел). Здесь заметим, что оценка сингулярных чисел (s-чисел) показывает скорость приближения резольвенты оператора L линейными конечномерными операторами. Приведен пример, как найденные оценки s-чисел позволяют найти оценки собственных чисел оператора L. Отметим, что вышеуказанные результаты получены для дифференциального оператора гиперболического типа в случае неограниченной области с быстро колеблющимися и сильно растущими коэффициентами на бесконечности.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855802 МОН РК.

Ключевые слова: оператор гиперболического типа, сингулярность, неограниченная область, резольвента, компактность, сингулярные числа, собственные числа.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L81.

— ⁂ —

Об одном гибридном алгоритме решении обратных граничных задач относительно промежуточных масс на стержне

Даулет НУРАХМЕТОВ[1,a], Альмир АНИЯРОВ[1,2,b], Серик ДЖУМАБАЕВ[3,c], Ринат КУСАИНОВ[1,4,d]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Международный университет Астана, Нур-Султан, Казахстан*
[3] *Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан, Нур-Султан, Казахстан*
[4] *Университет имени Шакарима города Семей, Семей, Казахстан*
E-mail: [a]*nurakhmetov@math.kz*, [b]*aniyarov@math.kz*, [c]*ser_jum@inbox.ru*, [d]*rinat.k.kus@mail.ru*

В данной работе рассматривается свободные поперечные колебания стержня длины l с тремя промежуточными массами m_1, m_2 и m_3 с шарнирно опертыми закреплениями, которая сводится к следующей спектральной задаче:

$$EJy^{IV}(x) = \omega^2 \rho A y(x), \qquad x \neq a - \frac{l}{2},\ x \neq b - \frac{l}{2},\ x \neq c - \frac{l}{2}, \tag{1}$$

$$\left[EJy'''(x)\right]_{x=P_i} = -m_i\omega^2 y\left(P_i\right), \qquad i=1,2,3. \tag{2}$$

$$[y(x)]_{x=P_i}=0, \quad \left[Ey'(x)\right]_{x=P_i}=0, \quad \left[EJy''(x)\right]_{x=P_i}=0, \tag{3}$$

$$y(x)|_{x=-\frac{l}{2}}=0, \quad EJy''(x)\big|_{x=-\frac{l}{2}}=0, \tag{4}$$

$$y(x)|_{x=\frac{l}{2}}=0, \quad EJy''(x)\big|_{x=\frac{l}{2}}=0, \tag{5}$$

где E модуль Юнга, J момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси, ρ плотность материала, A площадь поперечного сечения, $P_1=a-\frac{l}{2},\ P_2=b-\frac{l}{2},\ P_3=c-\frac{l}{2}$ и $[f(x)]_{x=c}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[f(c-\varepsilon)-f(c+\varepsilon)\right]$
означает скачок функции в точке $x=c$. Обозначим через $p^4=\frac{\omega^2\rho A}{EJ}$, где ω частотный параметр, Гц.

Основная цель данной работы выявить условия на геометрические расположения сосредоточечных масс для неоднозначного решения обратной задачи по восстановлению сосредоточечных масс с заранее известными первых трех собственных частот.

Последние годы активно развиваются методы анализа прямых и обратных задач для дифференциальных операторов сосредоточенными массами и упругими связями [1-4]. Эти методы имеют очень важные значения, так как они дают возможность развивать технологии обеспечивая безопасность людей. В отличие от работ [5-8] в данной работе предлагается гибридный алгоритм позволяющий вычислить все три веса для сосредоточенных масс с геометрической симметрией расположения первой и третьей массы относительно середины стержня. Заметим, что численный метод решения обратной задачи дает возможность определить величину лишь второй массы. Первые три собственные частоты стержня вычислены численно с помощью компьютерного пакета Maple. Найдено аналитическое соотношение между массами.

Результаты данного исследования будут способствовать развитию методов решения для обратных задач с многоточечными внутренними элементами.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08052239 МОН РК.

Ключевые слова: собственные частоты, характеристический определитель, обратная задача, сосредоточенные элементы.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 47A75, 65F18.

Литература

[1] Gürgöze M., Batan H.M. On the effect of an attached spring-mass system on the frequency spectrum of a cantilevered beam, *Journal of Sound and Vibration*, **195**:1 (1996), 163–168.

[2] Yong L., Shunfeng G. An analytical model for dynamic response of beam-column frames to impulsive ground excitations, *Int. J. Solids and Struc*, **44** (2007), 779–798.

[3] Banerjee J.R. Free vibration of beams carrying spring-mass systems - A dynamic stiffness approach, *Computers and Structures*, **104-105** (2012), 21–26.

[4] Wang Z., Hong, M., Xu J., Cui H. Analytical and experimental study of free vibration of beams carrying multiple masses and springs, *J. Marine Sci. Appl*, **13** (2014), 32–40.

[5] Morassi A., Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements, *Inverse Problems in Engineering*, **10** (2002), 183–201.

[6] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Диагностирование двух масс, сосредоточенных на балке, *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, **1** (2010), 42–44.

[7] Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б. Идентификация сосредоточенной массы и жесткости пружины на стержне, *Электронный журнал "Техническая акустика"*, **9** (2015), 1–9.

[8] Nurakhmetov D.B. Jumabayev S.A., Aniyarov A.A. Inverse boundary problems for intermediate springs on a rod with geometrical symmetry, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**:33 (2017), 1–10.

— ⁂ —

Максимальная регулярность решения дифференциального уравнения второго порядка

Кордан ОСПАНОВ[a], Рая АХМЕТКАЛИЕВА[b]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: [a]kordan.ospanov@gmail.com, [b]raya_84@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$-s(x)(\rho(x)y')' + r\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R = (-\infty, +\infty)$ и $f \in L_p = L_p(R)$, $1 < p < +\infty$. Предположим, что s, ρ и r непрерывно дифференцируемы, а q - непрерывная функция. Пусть $ly = -s(\rho y')' + ry' + qy$, $D(l) = C_0^{(2)}(R)$. Через L обозначим замыкание l в L_p. Элемент $y \in D(L)$ такой, что $Ly = f$ назовем решением уравнения (1).

В докладе обсуждаются условия на коэффициенты s, ρ, r и q, при которых существует единственное решение y уравнения (1) и для него справедлива следующая оценка:

$$\left\|-s(x)(\rho(x)y')'\right\|_p + \left\|\, ry' \,\right\|_p + \|\,(1+|q|)y\,\|_p \le C\,\|\,f\,\|_p\,, \tag{2}$$

$\|\cdot\|_p$ - норма L_p.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08856281 МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, сильное решение, однозначная разрешимость, коэрцитивная оценка.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C11, 47A05.

— ⁂ —

Об одной оценке решения псевдопараболического уравнения третьего порядка

Мырзагали ОСПАНОВ, Жулдызай УСПАНОВА

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: myrzan66@mail.ru

На $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < \omega, 0 < t < T\}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$u_{xtt} = a_0 u_{xt} + a_1 u_x + a_2 u_{tt} + a_3 u_t + a_4 u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi\,(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u_x(x,0) = u_x(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$u_{xt}(x,0) = u_{xt}(x,T), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{4}$$

Будем считать, что $a_i(x,t)\left(i = \overline{0,4}\right), f(x,t)$ — непрерывные на Ω функции, $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = \varphi(T), \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T), \ddot{\varphi}(0) = \ddot{\varphi}(T)$.

Пусть $(\Omega, \mathbb{R})$ — множество непрерывных на Ω вектор-функций. Решением задачи (1)–(4) назовем функцию $u(x,t) \in (\Omega, \mathbb{R})$, имеющей непрерывные на Ω частные производные $u_x, u_t, u_{xt}, u_{tt}, u_{xtt}$ и удовлетворяющей уравнению (1) и условиям (2)–(4).

Доказывается

Теорема *Если* $a_1(x,t) \ge \sigma > 0$, *то задача (1)–(4) имеет единственное решение* $u(x,t)$ *и справедливы следующие оценки:*

$$\max\left\{\|u(x,\cdot)\|, \|u_x(x,\cdot)\|, \|u_t(x,\cdot)\|, \|u_{tt}(x,\cdot)\|, \|u_{xt}(x,\cdot)\|\right\} \le C,$$

где C - положительная постоянная, зависящая только от исходных данных, а

$$\|u(x,\cdot)\| = \max_{t\in[0,T]} |u(x,t)|.$$

Funding: Работа поддержана грантом AP08856281 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, нелокальное краевое условие, оценка решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70.

Литература

[1] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, Москва (1995).

[2] Джумабаев Д.С. Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **30**:3 (1990), 388–404.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа

Наргиза ОЧИЛОВА

Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx} -_C D^{\alpha}_{oy}u, \text{ при } \ x>0, \ \ y>0, \\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}, \text{ при } \ x>0, \ \ y<0 \\ u_{xx}-(-x)^n u_{yy}, \text{ при } \ x<0, \ \ y>0 \end{cases} \tag{1}$$

в области D ограниченной при $x>0, \ \ y>0$ отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0, \ \ x=1, \ \ x=0, \ \ y=1$ и при $x>0, \ \ y<0$ ($x<0, \ \ y>0$) ограниченной отрезком прямой $AC_2=\{(x,y): \ \ x=0, \ -1\leqslant y\leqslant 0\}$, ($AC_1=\{(x,y): \ \ -1\leqslant x\leqslant 0, \ \ y=0\}$) и характеристикой

$$BC_2: \quad x+\frac{1}{q}(-y)^q=1, \ (A_0C_1: \quad y+\frac{1}{p}(-x)^p=1)$$

уравнения (1), где $0<\alpha<1$, $m,n=const>0$, $2p=m+2$, $2q=n+2$, ${}_CD^{\alpha}_{oy}-$ оператором Капуто [1].

Введем обозначения:
$D_0=D\cap\{x>0,y>0\}$, $D_1=D\cap\{x<0,y>0\}$, $D_2=D\cap\{x>0,y<0\}$,
$I_1=\{(x,y): x=0, \ 0<y<1\}$,
$I_2=\{(x,y): 0<x<1, \, y=0\}$, $D^*=D_0\cup D_{11}\cup D_{21}\cup I_1\cup I_2$, $\Delta_1=D_0\cup D_{11}\cup I_1$, $D_{11}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p>0\right\}$, $D_{12}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p<0\right\}$, $\Delta_2=D_0\cup D_{21}\cup I_2$, $D_{21}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q>0\right\}$, $D_{22}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q<0\right\}$, $2\alpha_1=\frac{n}{n+2}, 2\beta_1=\frac{m}{m+2}$, $C_{21}\left(\frac{1}{2},-\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$, $C_{11}\left(-\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\frac{1}{2}\right)$ причем

$$0<\beta_1<\alpha_1<\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Задача A. Требуется определить функцию $u(x,y)$ из класса функций
$W=\left\{u(x,y): \ \ u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(D_{11}\cup D_{22}\cup D_{12}\cup D_{21}), \ u_{xx}\in C(D_0), \ \ {}_cD^{\alpha}_{0y}u\in C(D_0)\right\}$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D_0 и $D_{1j},\ D_{2j}, (j=1,2)$
2) $y^{1-\alpha}u_y(x,y)\in C(D_0\cup I_2)$, $u_y(x,y)\in C(D_2\cup I_2)$, и на линии I_2 выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=u_y(x,-0),\ \ (x,0)\in I_2;$$

3) $u_x(x,y)\in C(D_0\cup I_2)\cap C(D_1\cup I_1)$ и на линии I_1 выполняется условие склеивания:

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y)=\lim_{x\to-0} u_x(x,y),\ \ (0,y)\in I_1;$$

4) удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_0(y),\, 0\leqslant y\leqslant 1,\ u(x,y)|_{AC_2}=\varphi_1(y),\ \ -1\leqslant y\leqslant 0,$$

$$u(x,y)|_{A_0C_{11}}=\varphi_2(y),\, \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$$

$$u(x,y)|_{BC_{21}}=\psi_1(x),\ \ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ u(x,y)|_{AC_1}=\psi_2(x),\, -1\leq x\leq 0$$

где $\varphi_0(y),\ \varphi_j(x),\ \psi_j(y), (j=1,2)$ - заданные функции, причем
$\varphi_0(0)=\ \psi_1(1),\, \varphi_1(0)=\psi_2(0),$

$$\varphi_0(y)\in C\,[0,1]\cap C^1(0,1),\, \varphi_1(y)\in C\,[-1,0]\cap C^2(-1,0), \tag{3}$$

$$\varphi_2(y)\in C^3\left[\frac{1}{2},1\right],\, \psi_1(x)\in C^3\left[\frac{1}{2},1\right],\ \ \psi_2(x)\in C\,[-1,0]\cap C^2(-1,0). \tag{4}$$

Заметим, что задача типа задачи A для уравнения (1) с характеристикой линией изменения типа изучена в работе [1].

Теорема. *Если выполнены условия (2)-(4), то в области D существует единственное решение задачи A.*

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, оператор Капуто, единственность решения, существование решения, интегральное уравнение.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35R11.

Литература

[1] Исломов Б.И., Очилова Н.К. Об одной задаче для дробной производной вырождающегося уравнения смешанного типа, *Вестник КРАУНЦ. Физ-мат.Науки*, **1**:17 (2017), 22–32.

— ⁂ —

Краевая задача для уравнения гиперболо-эллиптического типа третьего порядка с сингулярным коэффициентом

Нозима ОЧИЛОВА

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: islomovbozor@yandex.ru

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(signy|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_0}{y}u_y\right)=0 \tag{1}$$

где

$$m>0, -\frac{m}{2}<\beta_0<1. \tag{2}$$

Пусть область, ограниченная простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(-1;0)$, $B(1,0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ и при $y<0$ характерис-тиками

$$AC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=-1,\ \ BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left[0,\ -((m+2)/2\ )^{2/(m+2)}\right]$.

Предположим, что каждая прямая $y=c,\quad 0<y<h$, пересекается с Γ в двух точках, а прямая $y=h$ имеет единственную общую точку $N(0,h)$(точку касания) с кривой Γ.

Введем обозначения: $D_1=D\cap\{\ y>0\}$, $\ D_2=D\cap\{\ y<0\}$,

$$I=\{(x,y):\ \ -1<x<1,\ \ y=0\}\,,\ \ D=D_1\cup D_2\cup I,$$

$$W=\left\{u:\ \ u\in C\left(\bar{D}\right)\cap C^1\left(D\cup AC\right),\ \ u_{xxx},\ \ u_{xyy},\ \ u_{xy}\in C\left(D_1\cup D_2\right)\right\}.$$

Задача B_1. Найти функцию $u(x,y)\in W$ удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевым условиям

$$u|_\Gamma=\varphi_1(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{\Gamma},\ \ u(x,y)|_{x=0}=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h,$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\quad -1\le x\le 0,$$

где $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$заданные функции, $n-$внутренняя нормаль, причем $\varphi_1(-1,0)=\psi_1(-1)$, $\varphi_1(0,h)=\varphi_2(h)$,

$$\varphi_1(x,y)=y^{\gamma+1}\tilde{\varphi}_1(x,y),\quad \tilde{\varphi}_1(x,y)\in C(\bar{\Gamma}),\ \ \gamma>0,\tag{3}$$

$$\varphi_2(y)\in C\left[0,h\right]\cap C^1(0,h),\tag{4}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[-1,0\right]\cap C^3(-1,0),\quad \psi_2(x)\in C\left[-1,0\right]\cap C^2(-1,0).\tag{5}$$

Заметим, что задача B_1 для уравнения (1) при $\beta_0=0$ изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова[1], М.С. Салахитдинова[2].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия (2)-(5), то в области D существует единственное решение задачи B_1.*

Единственность решение задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существования решения - методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: вырождающегося уравнение третьего порядка, уравнение с сингулярным коэффициентом, регулярное решение, принцип экстремума, локальное условие.

2010 Mathematics Subject Classification: 335M10, 35M12, 35K15.

Литература

[1] Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа, *Сибирский математический журнал*, Новосибирск, **11**:1 (1961), 7–19.

[2] Салахитдинов М.С. *Уравнение смешанно-составного типа*, Фан, Ташкент (1974).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одном алгоритме численного решения нелокальной задачи теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями

Ирина ПАНКРАТОВА[a], Махмуд САДЫБЕКОВ[b]

Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан
E-mail: [a]inpankratova@gmail.com, [b]sadybekov@math.kz

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и краевыми условиями вида

$$\begin{cases} U_1(u) = a_{11}u_x(0,t) + b_{11}u_x(1,t) + a_{10}u(0,t) + b_{10}u(1,t) = 0, \\ U_2(u) = a_{20}u(0,t) + b_{20}u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где a_{ij}, b_{ij} – вещественные числа, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ – заданные функции.

Задача (1)-(3) относится к классу так называемых нелокальных краевых задач [1]. Для численного решения задачи (1)-(3) с неусиленно регулярными краевыми условиями [2] построено семейство двухслойных разностных схем с весами. Получены оценки порядков аппроксимации разностных схем. Известно [3, с. 137], что сходимость решения линейной разностной схемы к точному решению дифференциальной задачи следует из ее аппроксимации и устойчивости по начальным данным и по правой части. Однако в общем случае проблема устойчивости разностных схем с неусиленно регулярными краевыми условиями не решена до сих пор. Для частных случаев разностных схем разработаны свои методы доказательства устойчивости. Как правило, устойчивость схем устанавливается в пространствах со специально построенными сеточными энергетическими нормами, либо в виде операторных неравенств, которые трудно проверить, либо накладываются довольно жесткие ограничения на параметры самой разностной схемы. Кроме того, разрешимость полученной в результате аппроксимации системы линейных алгебраических уравнений представляет собой еще одну проблему, т.к. матрица системы либо плохо обусловлена, либо в такой матрице отсутствует диагональное преобладание.

Мы применяем подход, который позволяет получить решение нелокальной разностной задачи, не рассматривая вопросы устойчивости схемы и разрешимости соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Для этого адаптируем для разностных схем предложенный в [4] алгоритм, который позволяет свести решение нелокальной разностной задачи к последовательному решению двух локальных разностных задач с граничными условиями типа Штурма по пространственной переменной. Изучены вопросы корректности и устойчивости алгоритма.

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP08855352 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальные краевые условия, численные методы, разностные операторы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 65M06, 65M12.

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *ДАН СССР*, **185**:4 (1969), 739–740.

[2] Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature, *Siberian Mathematical Journal*, **53**:1 (2012), 146–151.

[3] Самарский А.А. *Теория разностных схем*, Наука, М. (1977).

[4] Sadybekov M.A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions, *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, Springer Proceedings in Mathematics, Statistics, **216** (2017), 330–348.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной

Арсен ПСХУ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: pskhu@list.ru

В области $\Omega = (r, a) \times (-\infty, b)$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right) u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ – дробная производная порядка α по переменной y, с началом в точке $y = -\infty$ [1]; $\alpha \in (0,1)$.

В докладе обсуждаются вопросы разрешимости следующей задачи: в области Ω найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(r,y) = \varphi(y), \qquad (y < b).$$

Ключевые слова: уравнение в частных производных дробного порядка, задача без начальных условий.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35F15.

Литература

[1] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2003).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями

Музаффар РАХМАТУЛЛАЕВ[1,a], Мухайе РАСУЛОВА[2,b]

[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан*
E-mail: [a]mrahmatullaev@rambler.ru, [b]m_rasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k (см. [1]).

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, 2, ..., q\}$, $q \geq 2$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение. Конфигурацию $\sigma(x)$ называется G_k^*-*слабо периодической*, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i$, $x \in H_j$, $\forall x \in G_k$.

Гамильтониан модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями имеет вид [2, 3]

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle,\\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где $J_1, J_2 \in R$,

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad u = v, \\ 0, & \text{если} \quad u \neq v. \end{cases}$$

В этой работе рассмотрим случай $q = 3$.

Лемма. [2, 3] *Для каждой конфигурации φ_b верно следующее:*

$$U(\varphi_b) \in \left\{ U_{i,n} : i = 0, ..., k+1, n = 0, ..., [\frac{k+1-i}{2}] \right\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{J_1}{2} i + \frac{J_2}{2} \{ i(i-1) + (k-n-i)(k-n-i+1) + n(n-1) \}$$

и $[\frac{k+1-i}{2}]$– *целая часть* $\frac{k+1-i}{2}$.

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$, $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x)$ – четно$\}$, где $w_j(x)$ – число a_j в слове x.

Рассмотрим фактор группу

$G_k / H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$.

Теорема. *Пусть $k \geq 2$ и $|A| \in \{1, 2, ..., k, k+1\}$. Тогда верны следующие утверждения:*
I. При $|A| = k$ на множестве

$$\begin{cases} \{(J_1, J_2) \in R^2 : J_2 \geq 0, J_1 - 2J_2 \geq 0\}, & \textit{если} \quad k = 2, \\ \{(J_1, J_2) \in R^2 : J_1 \geq 0, J_2 = 0\}, & \textit{если} \quad k \geq 3 \end{cases}$$

существует шесть H_A-слабо периодические основные состояния, неявляющихся трансляционно-инвариантными или периодическими и они имеют следующий вид:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} l, & \textit{если} \quad x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ m, & \textit{если} \quad x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ n, & \textit{если} \quad x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ l, & \textit{если} \quad x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1, \end{cases}$$

где $l, m, n \in \Phi$ и $l \neq m, l \neq n, m \neq n$.

II. Кроме φ^* всякие H_A-слабо периодические основные состояния является периодическими или трансляционно-инвариантными.

Литература

[1] Rozikov U.A. *Gibbs measures on Cayley trees*, World scientific, Singapore (2013).

[2] Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. Существование слабо периодических основных состояний для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, *Доклады АН РУз*, 3 (2013), 10–13.

[3] Расулова М.А., Рахматуллаев М.М. Периодические и слабо периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли, *Математические труды*, **18**:2 (2015), 112–132.

— ⁂ —

Пример Адамара и смешанная задача Коши для многомерного уравнения Геллерстедта

Александр РОГОВОЙ[1,a], Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[2,b]

[1] *Университет Мирас, Шымкент, Казахстан*

[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*rog2005@list.ru*, [b]*kalmenov.t@mail.ru*

В теории дифференциальных уравнений в частных производных большое значение имеет пример, построенный Ж.Адамаром [1], который показывает неустойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа относительно малых изменений начальных данных. В работах Тихонова, Арсенина [2], Лаврентьева [3] и многих последующих работах эта задача с помощью решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа сведена к интегральным уравнениям первого рода, даны различные регуляризации рассматриваемой задачи и установлена ее условная корректность. В работе [4] найден критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа методом спектрального разложения оператора Лапласа с отклоняющимся аргументом. В настоящей работе рассмотрена смешанная задача Коши для двумерного и многомерного вырождающегося уравнения Геллерстедста [5]. Нами построены аналоги примера Адамара и установлена некорректность решения задачи Коши для уравнения Геллерстедта в двумерном и многомерном случаях. Найдено условие сильной разрешимости смешанной задачи Коши для многомерного уравнения Геллерстедта в цилиндрической области. Доказательство основано на спектральных свойствах оператора Лапласа и свойствах специальных функций.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $D = \Omega \times (0, T)$.

Смешанная задача Коши. Найти в D решение уравнения

$$Lu \equiv -t^m \Delta_x u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \quad m \geq 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее боковому граничному условию

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Доказана следущая основная теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(D)$, $\Delta_x f \in L_2(D)$, т.е.*

$$f(x,t) = \sum_{|k|=1}^{\infty} f_k(t) e_k(x), \quad \sum_{|k|=1}^{\infty} \left\| e^{\frac{4\lambda_k}{m+2} T^{\frac{m+2}{2}}} \lambda_k f_k(\eta) \right\|^2_{L_2(0,T)} < \infty. \tag{4}$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in W_2^2(D)$ смешанной задачи Коши (1)-(3), удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|^2_{W^2_{2,\Delta}}(t) \leq d_2 t^2 \sum_{|k|=1}^{\infty} \left\| e^{\frac{4\lambda_k}{m+2} T^{\frac{m+2}{2}}} \lambda_k f_k \right\|^2_{L_2(0,t)} + \sum_{|k|=1}^{\infty} \|f_k\|^2_{L_2(0,t)} < \infty, \tag{5}$$

где λ_k собственные значения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, то есть следующей задачи:

$$\Delta_x e_k(x) = \lambda_k e_k(x), \quad e_k|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08856042 КН МОН РК.

Ключевые слова: смешанная задача Коши, уравнение Геллерстедта, разрешимость, регулярное решение, Бесселя.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M13, 35D35, 35A01, 33C10.

Литература

[1] Hadamard J. *Le problem de Cauchy et les equations aux derivees partialles lineaires hyperboliques*, Hermann and Lie, Paris (1932).

[2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1979).

[3] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа, *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **20**:6 (1956), 819–842.

[4] Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа, *Доклады РАН*, **414**:2 (2007), 168–171.

[5] Gellerstedt S. *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte, Ph.D. Thesis*, Almqvist & Wiksells, Uppsala (1935).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Задачи сопряжения для уравнения теплопроводности с граничными условиями типа Штурма

Махмуд САДЫБЕКОВ[1,2,a], Умбеткул КОЙЛЫШОВ[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*sadybekov@math.kz*, [b]*koylyshov@mail.ru*

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследованы [1-5]. В случае без разрыва спектральная теория этих задач построена практически полностью. Здесь можно отметить работы [6-16].

В данной работе обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом с краевыми условиями типа Штурма.

Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом

$$Lu \equiv \begin{Bmatrix} u_t - k_1^2 u_{xx}, & 0 < x < x_0 \\ u_t - k_2^2 u_{xx}, & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = f(x,t), \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

краевыми условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и с условиями сопряжения

$$u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$k_1 u_x(x_0 - 0, t) = k_2 u_x(x_0 + 0, t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где функция $f(x,t)$ непрерывна, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5).

Точка x_0 - строго внутренняя точка интервала $0 < x_0 < l$. Коэффициенты $k_i, \alpha_i, \beta_i,\ (i = 1,2)$ являются действительными числами. Кроме того $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$. Краевые условия (3) (разделенные краевые условия) называют условиями типа Штурма.

Применяя метод разделение переменных (при $f(x,t) = 0$) можно свести задачу (1)-(5) следующей спектральной задаче

$$LY(x) = \begin{Bmatrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda Y(x), \tag{6}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 Y'(0) + \beta_1 Y(0) = 0, \\ \alpha_2 Y'(l) + \beta_2 Y(l) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0),\ \ k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{8}$$

Основной результат. Показано, что задача (6)-(8) несамосопряженная. Найдены собственные значения и собственные функции задачи (6)-(8). Доказана, что система собственных функций $\{Y_n(x)\}$ образует базис Рисса.

Используем следующие обозначения для отдельных частей области Ω:

$$\Omega_0 = \{(x,t) : 0 < x < x_0,\ 0 < t < T\},\ \ \Omega_l = \{(x,t) : x_0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

Далее доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любых функций* $\varphi(x) \in C[0,l] \cap C^2[0,x_0] \cap C^2[x_0,l]$ *и* $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_0}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_l})$*, удовлетворяющих краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), существует единственное классическое решение* $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_0}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_l})$ *задачи (1)-(5).*

Теорема 2. *Для любых функций* $\varphi(x) \in W_2^1(0,l) \cap W_2^2(0,x_0) \cap W_2^2(x_0,l)$*, удовлетворяющей краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), и любой* $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ *задачи (1)-(5). Это решение является сильным решением задачи (1)-(5) и удовлетворяет оценке*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_0)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_l)} \leq C\{\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(0,x_0)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(x_0,l)}\}.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855352 (2020-2022) МОН РК.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, разрывные коэффициенты, собственные значения, собственные функции, метод разделения переменных.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35K05, 35R37.

Литература

[1] Самарский А.А. Параболические уравнения с разрывными коэффициентами, *ДАН СССР*, **121**:2 (1958), 225–228.

[2] Ким Е.И., Баймуханов Б.Б. О распределении температуры в кусочно-однородной полубесконечной пластинке, *ДАН СССР*, **140**:2 (1961), 333–336.

[3] Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, *ДАН СССР*, **139**:5 (1961), 1048–1051.

[4] Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области // Журн.вычисл.математики и мат.физики. Т.9, №3 (1969), с. 558-572.

[5] Камынин Л.И. О методе потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, *ДАН СССР*, **145**:6 (1962), 1213–1216.

[6] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, *Известия вузов. Математика*, 2 (1964), 82–93.

[7] Михайлов В.П. О базисах Рисса в, *Доклады АН СССР*, **144**:5 (1962), 981–984.

[8] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. часть III, Спектральные операторы*, Нью Йорк (1974).

[9] Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями, *Дифференциальные уравнения*, **15**:7 (1979), 1284—1295.

[10] Ионкин Н.И. Решение одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием, *Дифференциальные уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304.

[11] Ионкин Н.И., Морозова В.А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями, *Дифференциальные уравнения*, **36**:7 (2000), 884—888.

[12] Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам, *Сибирский математический журнал*, **53**:1 (2012), 180–186.

[13] Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла, *Известия вузов. Математика*, 2 (2012), 70—75.

[14] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, in: *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **216** (2017), 330-–348.

[15] Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials, in: *AIP Conference Proceedings*, **1676** (2015), 020005.

[16] Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions, in: *AIP Conference Proceedings*, **1690** (2015), 040007.

— ⁂ —

Базисность Рисса собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

Абдисалам САРСЕНБИ[a], Абдижахан САРСЕНБИ[b]

ЮКУ им. М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан
E-mail: [a]*abdisalam.sarsenbi@auezov.edu.kz* , [b]*abdizhakhan.sarsenbi@auezov.edu.kz*

Введем в рассмотрение несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка

$$L_{\alpha q} : D\left(L_{\alpha q}\right) \subset L_2\left(-1,1\right) \to L_2\left(-1,1\right)$$

по формуле $L_{\alpha q} y = -y''\left(x\right) + \alpha y''\left(-x\right) + q\left(x\right) y\left(x\right)$ с комплекснозначным коэффициентом $q\left(x\right) = q_1\left(x\right) + iq_2\left(x\right)$ и с областью определения

$$D\left(L_{\alpha q}\right) = \left\{y\left(x\right) \in C^2\left[-1,1\right] :\right.$$

$$\left. U_i\left(y\right) = a_{i1} y'\left(-1\right) + a_{i2} y'\left(1\right) + a_{i3} y\left(-1\right) + a_{i4} y\left(1\right) = 0,\ i = 1,2\right\},$$

где a_{ij} заданные комплексные числа. Линейные формы $U_1\left(u\right),\ U_2\left(u\right)$ будем считать линейно независимыми.

Пусть область определения дифференциального оператора $L_{\alpha q}$ порождается одним из следующих четырех видов краевых условий:

$$U_1\left(y\right) = y\left(-1\right) = 0,\ U_2\left(y\right) = y\left(1\right) = 0; (D)$$

$$U_1\left(y\right) = y'\left(-1\right) = 0,\ U_2\left(y\right) = y'\left(1\right) = 0 (N);$$

$$U_1\left(y\right) = y\left(-1\right) - y\left(1\right) = 0,\ U_2\left(y\right) = y'\left(-1\right) - y'\left(1\right) = 0; (P)$$

$$U_1\left(y\right) = y\left(-1\right) + y\left(1\right) = 0,\ U_2\left(y\right) = y'\left(-1\right) + y'\left(1\right) = 0. (AP)$$

Собственные функции $X_k\left(x\right)$ удовлетворяют однородному уравнению, поэтому их можно считать нормированными в классе $L_2\left(-1,1\right)$. В работах [1], [2] установлена базисность собственных функций для задач (N) и (P). т.е. установлены условия базисности в терминах краевых условий. Из полученных результатов нельзя сделать выводы о безусловной базисности или базисности Рисса собственных функций изучаемых задач. Также нам известно, что попытки получить результаты о базисности собственных функций в терминах краевых условий наиболее общего вида могут привести к ошибочным результатам. Для доказательства базисности Рисса собственных функций в случае конкретных краевых условий потребовались дополнительные исследования, результатами которых является следующая

Теорема. *Пусть выполнены следующие два условия: 1) все собственные значения оператора $L_{\alpha q}$ являются простыми; 2) комплекснозначный коэффициент $q\left(x\right)$ принадлежит классу $L_1\left(-1,1\right)$, а в случае задач (P) и (AP) дополнительно требуем $\alpha \neq 0$; причем для всех собственных значений λ_k оператора выполнены неравенства $\left|Im\lambda_k\right| \leq const$. Тогда система собственных функций оператора $L_{\alpha q}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2\left(-1,1\right)$.*

Заметим, что условие $\left|Im\lambda_k\right| \leq const.$ выполнено, если комплекснозначный коэффициент $q\left(x\right)$ принадлежит классу $C\left[-1,1\right]$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855792 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение с инволюцией, собственные функции, базис.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. On Eigenfunctions of the Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations with Involution, *Symmetry*, **1**:2 (2021). https:// doi.org/ 10.3390/ sym13101972

[2] Sarsenbi, A.A., Sarsenbi, A.M. The Expansion Theorems for Sturm-Liouville Operators with an Involution Perturbation., *Preprints*, **1**:2 (2021), https:// doi.org/ 10.20944/ preprints 202109.0247.v1.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О проблеме приводимости линейных условно-периодических систем

Жайшылык САРТАБАНОВ

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru

Рассматривается линейная многопериодическая система

$$DX = P(t,x)X \tag{1}$$

с оператором дифференцирования D по направлению диагонали пространства независимых переменных $t=(t_1,...,t_m)\in R\times ...\times R = R^n$ и $\tau = t_{m+1}\in(-\infty,+\infty) = R$ и периодов $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$ по t и $\theta=\omega_{m+1}$ по τ. Периоды $\omega_1,...,\omega_m,\omega_{m+1}$ рационально несоизмеримые.

Матрица $P(t,x)$ принадлежит классу $C_{t,\tau}^{(\overset{m}{\gamma},0)}(R^m\times R)$ функций гладкости порядка $(\overset{m}{\gamma},0) = (m,m-1,...,1,0)$ по $(t,\tau)=(t_1,...,t_m,t_{m+1})$ из $R^m\times R$. Следовательно, имеем условие

$$P(t+\omega,\tau+\theta) = P(t,\tau)\in C_{t,\tau}^{(\overset{m}{\gamma},0)}(R^m\times R). \tag{2}$$

Исследуется проблема приводимости матричного уравнения (1)-(2) к матричному уравнению

$$DX_0 = P_0X_0, \quad P_0 = const$$

с постоянной матрицей P_0, на основе линейного преобразования

$$X = T(t,\tau)X_0, \tag{3}$$

с условно-периодической матрицей $T(t,\tau)$, которую можно получить из матрицы $T'(t,\tau)$, обладающей свойством

$$detT'(t,\tau)\neq 0, \quad T'(t+\omega,\tau+\theta) = T'(t,\tau)\in C_{t,\tau}^{(e,1)}(R^m\times R) \tag{4}$$

путем замены некоторых координат t_j, $j=\overline{1,m+1}$ на t_k, $k=\overline{1,m+1}$, где $e=(1,...,1)$ – m-вектор.

Если такое приведение реализуемо, то матричное уравнение (1)-(2) называется приводимы. Для решения этой проблемы в работе разработан метод редукции уравнения (1)-(2) к матричному уравнению

$$D^*Z = Q(t)Z \tag{5}$$

с оператором дифференцирования D^* по направлению главной диагонали пространства переменных $t\in R^m$ и матрицей

$$Q(t+\omega) = Q(t)\in C_{\overset{m-1}{t},\tau}^{(\overset{m-1}{\gamma},0)}(R^m\times R) \tag{6}$$

при помощи преобразования, аналогичного преобразованию (3)-(4), где $\overset{m+1}{t} = (t_1,...,t_m,t_{m+1})$. На основе этого метода доказана теорема редукции.

Теорема (редукции). *Матричное уравнение (1)-(2) приводимо к матричному уравнению (5)-(6), преобразованием вида (3)-(4).*

Применением теоремы редукции m раз уравнение (1)-(2) приводится к уравнению

$$\frac{d}{dt_1}X_1 = P(t_1)X_1,$$

$$P_1(t_1+\omega) = P_1(t_1) \in C^{0)}_{t_1}(R),$$

приводимость которого решается теорией Флоке-Ляпунова, периодическим преобразованием. Тем самым, доказана основная теорема приводимости.

Теорема (основная). *Матричное уравнение (1)-(2) приводимо.*

Следствие. Условно-периодическая система

$$\frac{d}{d\tau}Y = P(t,\tau)Y, \quad \frac{dt}{d\tau} = e \tag{7}$$

с матрицей $P(t,\tau)$, обладающей свойством (2), приводимо невырожденным условно-периодическим линейным преобразованием.

Доказательство данного следствия основной теоремы следует из эквивалентности проблем приводимости матричного уравнения (1)-(2) и системы (7). Таким образом, проблема приводимости линейных условно-периодических систем решена в общей постановке.

Ключевые слова: многопериодическая система, условно-периодическая матрица, приводимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35F05, 35B10.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О разрешимости интегро-дифференциального уравнения вязкоупругости

Журабек САФАРОВ[1,2,a], Мафтунахон САФАРОВА[2,b]

[1] *Институт Математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Ташкентский университет информационных технологий имени ал- Хоразмий, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]*j.safarov65@mail.ru*, [b]*maftunasafarova94@mail.ru*

Рассматривается одномерное дифференциальное уравнение вязкоупругости в ограниченной по переменной x области $D := \{(x,t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{1}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u\mid_{t<0} \equiv 0,\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$T(x,t)\mid_{x=0} = \delta(t),\ T(x,t)\mid_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где $u(x,t)$ - функция смещений, $\delta(t)$ - дельта - функция Дирака; T - функция напряжений:

$$T(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau. \tag{4}$$

Уравнение (1) возникает в теории вязкоупругих сред с постоянными плотностью и коэффициентами Ламе в одномерном случае. При этом соотношение (4) согласно модели Больцмана [2] для линейной неупругой среды описывает связь между напряжением и смещением точек среды.

Введем в рассмотрение новую функцию $v(x,t)$, определив ее равенством

$$v(x,t) := \left[u(x,t) + \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau\right]\exp\left(-k(0)t/2\right).$$

Имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Функция $u(x,t)$ выражается через $v(x,t)$ формулой*

$$u(x,t) = \exp\left(k(0)t/2\right) v(x,t) + \int_0^t r(t-\tau) \exp\left(k(0)\tau/2\right) v(x,\tau) d\tau,$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau) r(\tau) d\tau.$$

Относительно новых функций $v(x,t)$ и $r(t)$ уравнения (1) - (3) с учетом (4), принимают вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r_0 v - \int_0^t h(t-\tau) v(x,\tau) d\tau, \ (x,t) \in D, \tag{5}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\ |_{x=0} = \delta(t), \ \frac{\partial v}{\partial x}\ |_{x=l} = 0, \tag{7}$$

где

$$r_0 := \frac{r^2(0)}{4} - r'(0), \ h(t) := r''(t) \exp\left(r(0)t/2\right).$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $k(t) \in C^2[0,\infty)$. Тогда решение уравнения (5), удовлетворяющие условиям (6), (7) существует, единственно и принадлежит классу $C^2(D_2)$,*
где $D_2 := \{(x,t) : 0 < x < l, \ x < t < 2l - x\}$.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, дельта-функция Дирака, уравнение вякоупругости, модель Больцмана.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L10, 35L20, 35D99.

Литература

[1] Volterra V. *Theory of functionals and integral and integro-differential equations*, Nauka, Moscow (1982).

[2] Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh. Inverse Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Viscoelasticity Equation in a Bounded Domain, *Mathematical Notes*, **97**:6 (2015), 867–877.

[3] Safarov J. Sh. One-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in limited area, *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, **17**:3 (2015), 44–55.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

О выборе начального приближения нелинейной нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения

Светлана ТЕМЕШЕВА[1,2,a], Перизат АБДИМАНАПОВА[2,3,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3]*Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*temeshevasvetlana@gmail.com*, [b]*peryzat74@mail.ru*

В работе на $\bar{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается нелинейная нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = f\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$g(x, u'_x(x,0), u'_x(x,T)) = 0, \tag{3}$$

где $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $g : [0, \omega] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [0, T] \to R^n$ непрерывны.

Замена частной производной по переменной x сводит задачу (1)-(2) к задаче, которую можно рассматривать как семейство нелинейных краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма. Здесь в качестве параметра семейства выступает x, принимающий значения на сегменте $[0, T]$.

Одной из важных составляющих процесса решения нелинейных задач является удачный выбор начального приближения. В работах [2-3] предложены способы выбора начального приближения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на построении и решении системы нелинейных алгебраических уравнений определенной структуры и последовательных изменениях параметров метода параметризации Д.С. Джумабаева [4]. Алгоритмы метода параметризации позволяют свести проблему выбора начального приближения задачи (1)-(3) свести к решению указанной нелинейной системы уравнений и решению задач Коши на частичных сегментах отрезка $[0, T]$ при каждом фиксированном x.

В работе получены условия существования решения системы уравнений для определения начального приближения.

Литература

[1] Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Об одном алгоритме нахождения решения нелинейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений, *Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. матем., механика, информатика*, **66**:3 (2010), 196-200.

[2] Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Об одном подходе к выбору начального приближения для нелинейной двухточечной краевой задачи, *Математический журнал, Алматы*, **12**:2 (2004), 47-51.

[3] Темешева С.М. Выбор начального приближения решения нелинейной двухточечной краевой задачи, *Математический журнал, Алматы*, **28**:2 (2008), 100 - 103.

[4] Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **29**:1 (1989), 50 - 66.

— ⁂ —

Стохастическая задача Гельмгольца и сходимость в среднем

Марат ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2,a], Гулмира ВАСИЛИНА[1,3,b], Алуа САРЫПБЕК[1,4,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *АУЭС им. Г. Даукеева, Алматы, Казахстан*
[4] *Колледж Әділет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]marat207@mail.ru, [b]v_gulmira@mail.ru, [c]alua.sarypbek@mail.ru

Задача Гельмгольца исследована достаточно полно в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [см, например, 1]. В настоящей работе задача Гельмгольца исследуется при наличии случайных возмущений.

По заданным линейным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся уравнения лагранжевой структуры в пространстве моментных функций первого порядка. В этом пространстве получены необходимые и достаточные условия прямого и непрямого представления лагранжиана. Полученные результаты иллюстрируются на примере.

Анализ разрешимости стохастической задачи Гельмгольца в работе проводится, во-первых, в смысле эквивалентности уравнений в среднем и, во-вторых, рассматривается линейная постановка задачи. Линейность постановки объясняется эффективностью метода моментных функций для линейных уравнений, поскольку для нелинейных уравнений его эффективность заметно снижается [2]. Суть метода моментных функций заключается в том, что он сводит исследование стохастического уравнения к исследованию системы ОДУ относительно рассматриваемых моментов.

Пусть задана система линейных по сносу стохастических уравнений Ито второго порядка вида

$$\ddot{x}_i = a_{ik}(t)\dot{x}_k + b_{ik}(t)x_k + \sigma_{ij}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}). \tag{1}$$

Требуется привести систему уравнений (1) к эквивалентным уравнениям лагранжевой структуры. Пусть заданы уравнения

$$d\dot{y} = Y_1(y,\dot{y},t)dt + Y_2(y,\dot{y},t)d\xi, \tag{a}$$

$$d\dot{z} = Z_1(z,\dot{z},t)dt + Z_2(z,\dot{z},t)d\xi. \tag{b}$$

Предполагаем, что функции, входящие в уравнения (a) и (b), обладают необходимой гладкостью и удовлетворяют теореме существования и единственности решения задачи Коши в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито [3].

Здесь $\xi = (\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega))^T$ представляет систему случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [2], можно представить в виде суммы винеровского и пуассоновского процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t,dy)$, где ξ_0 – векторный винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)$ – число скачков процесса P^0 в интервале $[0,t]$, попадающих на множество dy; $c(y)$ – векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^r процесса $\xi(t)$ при любом t.

Определение. [2] Будем говорить, что уравнения (a) и (b) эквивалентны в среднем, если из $My(t_0) = Mz(t_0)$, $M\dot{y}(t_0) = M\dot{z}(t_0)$ следует $My(t,t_0,y_0,\dot{y}_0) = Mz(t,t_0,z_0,\dot{z}_0)$, $M\dot{y}(t,t_0,y_0,\dot{y}_0) = M\dot{z}(t,t_0,z_0,\dot{z}_0)$ при всех $t \geq t_0$.

Рассмотрим задачу построения уравнения лагранжевой структуры в пространстве моментных функций первого порядка $(m,\dot{m})$ по заданному линейному уравнению (1).

Для решения поставленной задачи применим к уравнению (1) операцию $M(\cdot)$ математического ожидания [2] и, введя обозначение $m_\nu(t) = Mx_\nu(t)$, приходим к уравнению

$$\ddot{m}_i = a_{ik}(t)\dot{m}_k + b_{ik}(t)m_k, \quad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,n}). \tag{2}$$

Сформулируем в пространстве $(m,\dot{m})$ непрямую задачу Гельмгольца: по заданному уравнению (2) определить условия на функции h_i^ν и функцию Лагранжа $L = L(m,\dot{m},t)$, при которых имеют место соотношения

$$h_i^\nu(\ddot{m}_i - a_{ik}(t)\dot{m}_k - b_{ik}(t)m_k) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{m}_i}) - \frac{\partial L}{\partial m_i}. \tag{3}$$

Раскроем выражение $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{m}_i}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial m_k}\dot{m}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial \dot{m}_k}\ddot{m}_k$ и подставим его в соотношение (3), которое превращается в тождество при выполнении условий

$$h_i^\nu = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial \dot{m}_k}, h_i^\nu(a_{ik}(t)\dot{m}_k + b_{ik}(t)m_k) = \frac{\partial L}{\partial m_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial m_k}\dot{m}_k. \tag{4}$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. Для того чтобы линейное стохастическое уравнение (1) допускало непрямое аналитическое представление в пространстве моментных функций первого порядка $(m,\dot{m})$ необходимо и достаточно выполнение условий (4).

Замечание. При $h_i^\nu \equiv \delta_i^\nu$, где $\delta_i^\nu = \begin{cases} 1, \nu = i \\ 0, \nu \neq i \end{cases}$ из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. Для построения уравнения лагранжевой структуры в пространстве моментных функций первого порядка $(m,\dot{m})$ по заданному линейному уравнению (1) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial \dot{m}_\nu} = \delta_i^\nu, a_{ik}(t)\dot{m}_k + b_{ik}(t)m_k = \frac{\partial L}{\partial m_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}_i \partial m_k}\dot{m}_k \qquad (5).$$

В частности, при $x \in R^1$ условия (5) принимают вид

$$h = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}^2}; \quad h(a(t)\dot{m} + b(t)m) = \frac{\partial L}{\partial m} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}\partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{m}\partial m}\dot{m}.$$

Предположим, что искомый лагранжиан, следуя R.M. Santilli [1], в пространстве $(m, \dot{m})$ имеет вид

$$L = K(m, \dot{m}, t) + D_\mu(m, t)\dot{m}_\mu + C(m, t), \tag{6}$$

тогда в терминах функций K, D_μ и C условия (4) будут эквивалентны следующей системе дифференциальных уравнений с частными производными

$$h_i^\nu = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{m}_i \partial \dot{m}_\nu}, \frac{D_i}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial m_i} + h_i^\nu (a_{\nu k}(t)\dot{m}_k + b_{\nu k}(t)m_k) =$$

$$= \frac{\partial K}{\partial m_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{m}_i \partial t} - \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{m}_i \partial m_k}\dot{m}_k \tag{7}$$

Следовательно, имеет место следующее следствие.

Следствие 2. Для того, чтобы линейное уравнение (1) допускало в пространстве $(m, \dot{m})$ непрямое аналитическое представление (3) с лагранжианом вида (6) необходимо и достаточно выполнение условий (7).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09258966 КН МОН РК.

Ключевые слова: задача Гельмгольца, стохастические дифференциальные уравнения, сходимость в среднем.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10.

Литература

[1] Santilli R.M. *Foundations of Theoretical Mechanics. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1978).

[2] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, Наука, Москва (1990).

[3] Watanabe S., Ikeda N. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Vol. 24, Elsevier, North-Holland Mathematical Library (1981).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Свойство преобразования Фурье функции из пространства Лоренца $L_{\bar{2},\bar{r}}$ со смешанной метрикой

Назерке ТЛЕУХАНОВА[a], Гулия МУСАБАЕВА[b],
Макпал МАНАРБЕК[c]

Евразийский Национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г.Нур-султан, Казахстан
E-mail: [a]tleukhanova@rambler.ru, [b]mussabayevagk@enu.kz
[c]makpal9136@mail.ru

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{r} = (r_1, r_2)$ и пусть удовлетворяют следующим условиям: $0 < \bar{p} \le \infty$, $0 < \bar{r} \le \infty$. Пространство Лоренца $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой определяется как множество всех измеримых функций определенных на $[0,1]^2$, для которых конечны величины:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}} =$$

$$= \|\|f\|_{L_{p_1,r_1}}\|_{L_{p_2,r_2}} = \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_0^1 \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1}(t_1, \cdot) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)_{t_2}^{*_2} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Тогда определено ее двумерное преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-2\pi i (x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dx_1 dx_2$$

В 1997 году Бочкаревым была доказана теорема [1].

Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированная на [0,1] система комплекснозначных функций,

$$\|\phi_n\| \leq M, \ n = 1, 2, ...$$

и пусть функция $f \in L_{2,r}$, $2 < r \leq \infty$ тогда справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{n \in N} \frac{1}{|n|^{\frac{1}{2}} log(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}} \sum_{m=1}^{n} a_m^* \leq C\|f\|_{L_{2,r'}} \tag{1}$$

где a_n - коэффициенты Фурье по системе $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В 2015 году был получен аналог теоремы Бочкарева для преобразования Фурье функции из пространства $L_{2r}(\mathbb{R})$ [2].

Теорема *Пусть* $\Re_N = \{A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$, *где* A_i*-отрезки из* $\mathbb{R}\}$, *тогда для любой функций* $f \in L_{2,r}(\mathbb{R})$, $\ 2 < r < \infty$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{N \geq 8} \sup_{A \subset \Re_N} \frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}} \log_2(1+N)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}} \left| \int\limits_A \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq 23\|f\|_{L_{2,r}}. \tag{3}$$

Целью данной работы является получение двумерного аналога теоремы типа Бочкарева для преобразования Фурье.

Лемма *Пусть* $\frac{4}{3} < q_1, q_2 < 2$, $\ f \in L_{\bar{q},\bar{2}}(\mathbb{R}^2)$ *тогда для любого измеримого множества* A_1 *и* A_2 *конечной меры из* $\Re_N$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{A_1 \subset \Re_N} \sup_{A_2 \subset \Re_N} \frac{1}{|A_1|^{\frac{1}{q_1}} |A_2|^{\frac{1}{q_2}}} \int\limits_{A_1} \int\limits_{A_2} \left| \hat{f}(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2 \leq$$

$$\leq C \left(\frac{q_1}{2(q_1 - 1)} \right)^{\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{q_2}{2(q_2 - 1)} \right)^{\left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{2}\right)} \|f\|_{L_{\bar{q},\bar{2}}} \tag{4}$$

Теорема *Пусть* $\Phi_{m_1,m_2}(x_1, x_2) = \varphi_{m_1}(x_1) \cdot \psi_{m_2}(x_2)$, $m_1, m_1 \in \mathbb{N}$ *ортонормированная ограниченная в совокупности система функций.*

Тогда для любого $f \in L_{\bar{2},\bar{r}}[0,1]$, $2 < r_1, r_2 < \infty$ *выполнено неравенство*:

$$\sup_{\substack{|A_1| \geq 8 \\ A_1 \subset \mathbb{N}}} \sup_{\substack{|A_2| \geq 8 \\ A_2 \subset \mathbb{N}}} \frac{1}{|A_1|^{\frac{1}{2}} |A_2|^{\frac{1}{2}} (\log_2(|A_1|+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}} (\log_2(|A_2|+1))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}}} \times$$

$$\int\limits_{A_1} \int\limits_{A_2} \left| \hat{f}(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2 \leq \|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК (AP 09260223).

Ключевые слова: преобразование Фурье, пространства Лоренца со смешанной метрикой.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Бочкарев С.В. Теорема Хаусдорфа-Юнга-Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства, *Труды МИРАН*, **219** (1997), 103–114.

[2] Mussabayeva G.K., Tleukhanova N.T. Bochkarev inequality for the Fourier transform of functions in the Lorentz spaces L2,r(R), *Eurasian Math. J.*, **6**:1 (2015), 76–84.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

О разрешимости некоторых краевых задач для нелокальных аналогов бигармонического уравнения

Батирхан ТУРМЕТОВ[a], Индира САЛИХАНОВА[b]

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz, [b]indi.salikhanova@mail.ru

В данной работе исследуются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для нелокальных аналогов бигармонического уравнения. Рассматриваются два вида нелокального бигармонического оператора. Пусть S - действительная ортогональная матрица, т.е. $S \cdot S^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l \in N$ что $S^l = E$. Пусть a_j некоторый набор действительных чисел. Первый вид нелокального бигармонического оператора вводится следующим образом

$$L_l u(x) \equiv \sum_{j=1}^{l} a_j \Delta^2 u\left(S^{j-1}x\right).$$

Далее, для любого $x \in R^n$ и $1 \le j \le n$ рассматриваются отображения вида

$S_j x = (x_1, ..., x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, ..., , x_n)$. Если $i-$ индекс суммирования и $(i_n \dots i_1)_2 \equiv i$ запись в двоичной системе счисления, где $i_k = 0, 1$ при $k = 1, \dots, n$, то мы можем рассматривать отображения вида $S_n^{i_n} \cdot S_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot \dots \cdot S_1^{i_1} x$. Общее количество всевозможных произведений таких отображений равно 2^n. Используя эти отображения мы вводим второй вид нелокального бигармонического оератора:

$$L_n u \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \Delta^2 u(S_n^{i_n} \cdot S_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot \dots \cdot S_1^{i_1} x).$$

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, J^α интеграл порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Для $m-1 < \alpha \le m, m = 1, 2, ...,$ мы будем рассматривать следующий дифференциальный оператор дробного порядка

$$D_p^\alpha[u](x) = \frac{\partial^{m-p}}{\partial r^{m-p}} J^{m-\alpha} \frac{\partial^p}{\partial r^p} u(x), p = 0, 1, ..., m.$$

Данный оператор называется производной порядка α в смысле Росс-Миллера. При значении $p = 0$ мы получаем оператор Римана-Лиувилля $D_0^\alpha[u](x) = {}_{RL}D^\alpha[u](x)$ и соответственно при $p = m$ получаем оператор Капуто $D_m^\alpha[u](x) = {}_C D^\alpha[u](x)$. Пусть $a_j, j = 1, 2, ..., l$ - действительные числа и L один из операторов L_l или L_n. Рассмотрим в области Ω следующую задачу.

Задача $\mathbf{N}_\alpha$. Пусть $0 < \alpha \le 2, j = 1, 2$. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^4(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $r^{\alpha+k} D_j^{\alpha+k}[u](x) \in C(\overline{\Omega}), k = 0, 1,$ удовлетворяющее условиям

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$D_j^\alpha[u](x) = \varphi_1(x), x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$D_j^{\alpha+1}[u](x) = \varphi_2(x), x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Отметим, что в работах [1,2] рассмотрены нелокальные аналоги оператора Лапласа и для соответствующих нелокальных уравнений Пуассона исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач.

В настоящей работе найдены точные условия разрешимости задачи N_α для всех значений $\alpha \in [0, 2]$ и $j = 1, 2$. В частности в случае $L = L_l$ и граничных операторов Дирихле и Нейман, т.е. когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ доказано следующее утверждение

Теорема. *Пусть* $\lambda_k = e^{i\frac{2\pi k}{l}}$, $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k \ne 0, k = 1, ..., l, 0 < \lambda < 1$, $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ *и* $\varphi_1(x) \in C^{\lambda+4}(\partial\Omega)$, $\varphi_1(x) \in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$. *Тогда 1) если* $\alpha = 0$, *то решение задачи* N_α *существует и* *единственно; 2) если $\alpha = 1$, то для разрешимости задачи N_α необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f(x)dx = \mu_1 \int\limits_{\partial\Omega}\left(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right)dS_x.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и принадлежит классу $C^{\lambda+4}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP09259074.

Ключевые слова: нелокальное уравнение, бигармоническое уравнение, дробная производная, оператор Росс-Миллера, существование, единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A30, 31B30, 35J40.

Литература

[1] Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation, *Turkish Journal of Mathematics*, **43** (2019), 1604–1625.

[2] Турметов Б.Х., Карачик В.В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **31**:4 (2021), 651–667.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Теоремы о сходимости нового метода глобальной оптимизации

Жайлан ТУТКУШЕВА

Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: zhailan_k@mail.ru

В настоящей работе исследуется вопрос о сходимости нового метода глобальной оптимизации непрерывных функций $f(x)$ в замкнутом гиперкубе $Q \in [a;b]$. Данный метод основан на вспомогательной функции, которая построена преобразованием целевой функции $f(x)$:

$$g(\alpha) = \int_Q [|f(x)-\alpha| - (f(x)-\alpha)]dx \qquad (1)$$

Вспомогательная функция (1) зависит от одной переменной α и содержит кратный интеграл. Требуется найти значение и координаты точки глобального минимума $(\hat{x};\hat{y})$. Их обозначим:

$$\hat{y} = globminf(x) \qquad (2)$$

$$\hat{x} = argglobmin_{x\in Q}f(x) = arg\hat{y} \qquad (3)$$

Алгоритм поиска точки глобального минимума состоит из двух задач. Первая задачи заключается в нахождении значения точки глобального минимума (2), а вторая задача - в нахождении координат глобального минимума (3). Этот алгоритм поиска глобального минимума описан в работах [1] и [2].

В настоящей работе исследован сходимость метода. Были сформулированы теоремы о сходимости метода. Для начала подбирается промежуток $[c_0, d_0]$, где находится значение глобального минимума $\hat{\alpha}$.

Теорема 1. *Если для вспомогательной функции (1) имеет место равенство $g(c_0) = 0$ и неравенство $g(d_0) > 0$, то значение глобального минимума функции $\hat{\alpha} = f(\hat{x})$ лежит в промежутке $\hat{\alpha} \in (c_0, d_0)$.*

Из теоремы 1 известно, что если $g(c_0) = 0$ и $g(d_0) > 0$, то глобальный минимум $\hat{\alpha}$ находится в отрезке (c_0, d_0). Находим середину $\alpha_0 = \frac{c_0+d_0}{2}$ отрезка (c_0, d_0) и получаем две равные части (c_0, α_0) и (α_0, d_0). Значение глобального минимума находится в одной из них. Вычисляем значение вспомогательной функции (1) при $\alpha = \alpha_0$. По значению вспомогательной функции, определяется расположение глобального минимума:

A) Если $g(\alpha_0) > 0$, то $\hat{\alpha} \in [c_0, \alpha_0]$. Тогда $c_0 = c_1$ и $\alpha_0 = d_0$. Дальше работаем с отрезком $[c_1, d_1]$, либо

B) Если $g(\alpha_0) = 0$, то $\hat{\alpha} \in [\alpha_0, d_0]$. Тогда $\alpha_0 = c_0$ и $d_0 = d_1$. Дальше работаем с отрезком $[c_1, d_1]$.

Аналогично определяются следующие середины подотрезков:

$$\alpha_1 = \frac{c_1 + d_1}{2}, \alpha_2 = \frac{c_2 + d_2}{2}, ..., \alpha_n = \frac{c_n + d_n}{2} \tag{4}$$

Продолжая процесс половинного деления выбранных подотрезков, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего значение глобального минимума $\hat{\alpha}$. Так как за каждую итерацию отрезок, где находится глобальный минимум, уменьшается в два раза, то через n итерации интервал будет равен $|d_n - c_n| = \frac{1}{2^n}$ при этом $d_n \leq \hat{\alpha} \leq c_n$. Выполняя такую итерацию мы достигнем нужной нам точности:

$$\varepsilon \geq d_n - c_n$$

В качестве глобального минимума $\hat{\alpha}$ возьмем правый конец отрезка d_n, то есть $\hat{\alpha} = d_n \approx \hat{y}$, где $g(\hat{\alpha}) > 0$. Таким образом, найдется значение глобального минимума (2) с достаточной точностью ε.

Теорема 2. *Если выполняется теорема 1, то итерационная последовательность (4) глобальной минимизации с применением вспомогательной функции (3) сходится к искомому значению глобального минимума с заданной точностью.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда итерационная последовательность* $\{\alpha_n\}$, *полученная методом деления отрезка пополам (5) сходится к глобальному минимуму целевой функции* $f(x)$ *с линейной скоростью* $\beta = 0.5$.

Описанный выше алгоритм совершенно новый. Превосходство нового метода в том, что метод сходится сразу к глобальному минимуму. В этом алгоритме определяется середина и выбирается одна из половинок отрезка. Это дает большую экономию.

Литература

[1] Ramazanov M. D., Kaidassov Zh., Tutkusheva Zh.S. Studying the effectiveness of a new algorithm with a defining function for finding the global minimum of a smooth function, *Известия НАН РК. Серия физико-математическая, Алматы*, **4**:332 (2020), 95–102.

[2] Kaidassov Zh., Tutkusheva Zh.S. Algorithm for Calculating the Global Minimum of a Smooth Function of Several Variables, *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, **8**:4 Edmonton (2021), 591–596.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Однозначная разрешимость многоточечной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений с конформабельной производной

Кайрат УСМАНОВ[a], Кулзина НАЗАРОВА[b], Батирхан ТУРМЕТОВ[c]

Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Kazakstan

E-mail: [a]kairat.usmanov@ayu.edu.kz, [b]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz, [c]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Недавно в работе [1] было введено один из вариантов дробной производной, так называемая "конформабельная производная". В работах [2,3] были введены определения и основные свойства конформабельной производной.

Определение 1. Пусть функция $f:[0,\infty)\to R$. Тогда, для всех $t>0$ конформабельная производная от функции f определяется в виде

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon},$$

где $\alpha\in(0,1)$. Если f дифференцируема в порядке α в $(0,a)$, $a>0$, и существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}f^{(\alpha)}(t)$ тогда

$$f^{(\alpha)}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0+}f^{(\alpha)}(t).$$

Определение 2. Конформабельный интеграл от функции f порядка $\alpha\in(0,1]$ определяется равенством

$$I_\alpha^a(f)(t)=\int_a^t\tau^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau.$$

В данной работе на отрезке $[0,T]$ исследуется многоточечная краевая задача

$$T_\alpha(x)(t)+AT_\alpha(x)\,(\xi)|_{\xi=T-t}=\int_0^T K(t,s)x(s)\,ds+f(t),\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i)=d,\ \ d\in R^n,\tag{2}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

где $0<\alpha<1$, матрица $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, n- мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$, A – некоторая симметричная, постоянная матрица. В уравнений (1) рассмотрена преобразование $\psi(t)=T-t$, такой что, $\psi:[0,T]\to[0,T]$, для которого выполняется следующее условие $\psi^2(t)=\psi(\psi(t))=t$. Преобразование такого вида называют инволютивным. Свойства таких инволютивных преобразований изучены в работах Г.С.Литвинчука [1], Н.К.Карапетянца, С.Г.Самко [4] и др [5-7]. Используя свойства инволютивного преобразования, при предположении, что матрица $\left[I-A^2\right]$ обратима, краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$T_\alpha(x)(t)=\int_0^T\tilde{K}(t,s)x(s)ds+\tilde{f}(t),\quad t\in[0,T],\tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i)=d, d\in R^n,\tag{4}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

К краевой задаче (3), (4) применима метод параметризации профессора Д.Джумабаева [8]. Метод параметризации также был применен к исследованию различных краевых задач [9-10]. На оснований метода параметризации и свойства инволютивного преобразования можно установить:
Теорема. *Пусть матрица* $\left[I-A^2\right]$ *обратима. Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи(1), (2) необходимо и достаточно существования* $l_0 \in N$*, при котором матрица* $Q_\alpha(l_0)$ *была обратима.*

Здесь $l_0 \geq \tilde{l}$ *выбирается из условия* $\beta T \frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\tilde{l}} < 1$.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант №AP09259137).

Ключевые слова: конформабельная производная, конформабельный интеграл, краевая задача, инволютивное преобразование, метод параметризации.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05, 45J99, 34K28.

Литература

[1] Khalil R., M. A. Horani, A. Yousef and M. Sababheh A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, **264** (2014), 65–70.

[2] Unal E. and Gokdogan A. Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method, *Optik* **128** (2017), 264–273.

[3] Hashemi M. S. Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives, *Chaos Solit. Fract.* **107** (2018), 161–169.

[4] Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*, Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы (1977).

[5] Карапетянц Н.К., Самко С.Г. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения* // Изд-во РГУ. Ростов-н/Д. (1988). 188 с.

[6] Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution,*Differ Equat.* **1**:53 (2017), 33 - 46.

[7] Karachik V. V., Sarsenbi A. M., Turmetov B. Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation, *Turkish journal of mathematics*, **3**:43 (2019), 1604–1625.

[8] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput Maths Math Phys.* **29** (1989), 34–46.

[9] A. T. Assanova, E. A. Bakirova, Z. M. Kadirbayeva Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **60**:2 (2020), 203–221.

[10] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integro-differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:6 (2013), 736–758.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

О решении задачи Коши для нагруженного уравнения мКдФ с источником в классе быстроубывающих функций

Умид ХОИТМЕТОВ[a], Шехзод СОБИРОВ[b]

Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: [a]x_umid@mail.ru, [b]shexzod1994@mail.ru

В данной работе исследуется нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с источником, а именно рассматривается следующая система уравнений

$$
\begin{gathered}
u_t + \beta(t)u(x_0,t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \gamma(t)u(x_1,t)u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{2N}(\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2) \\
L(t)\Phi_k = \xi_k\Phi_k, \qquad k=1,2,\dots,2N, \ \ x\in\mathbb{R}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции, и $\Phi_k = (\Phi_{k1}(x,t), \, \Phi_{k2}(x,t))^T$ – собственная вектор-функция оператора

$$
L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}
$$

соответствующая собственному значению ξ_k.

Для определенности будем считать, что сумма, участвующая в правой части 1, входят сначала члены с $\operatorname{Im}\xi_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, N$. Также предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k_1}\Phi_{k_2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, 2N \tag{2}$$

с заданными ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \quad \text{при} \quad \xi_k = -\xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Система уравнений 1 рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

при этом начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty; \tag{4}$$

2) оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_{2N}(0)$.

Пусть функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((1 + |x|)\,|u(x, t)| + \sum_{k=1}^{3} \left|\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}\right|\right) dx < \infty, \ \ k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Основной целью работы является получение представлений для решения $u(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots, 2N$ задачи (1)-(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Если функции $u(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ являются решением задачи (1)-(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом:*

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(8i\xi^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi\gamma(t)u(x_1, t)\right) r^+, \quad \operatorname{Im}\xi = 0,$$
$$\frac{dC_n}{dt} = \left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0, t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1, t) + 2A_n(t)\right) C_n(t).$$

Замечание. Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (1)-(5).

Ключевые слова: нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, интегральное уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко, решения Йоста, данные рассеяния.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, *Phys. Rev. Lett*, 19 (1967), 1095-1097.

[2] Lax P.D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Comm. Pure and Appl. Math*, **2**:21 (1968), 467-490.

[3] Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc.*, 32 (1972), 1681

[4] Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 44 (2004), С. 694-716.

[5] Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 38 (2021), С. 19-35.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

Алгоритм решения задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе быстроубывающих функций

Умид ХОИТМЕТОВ[a], Темур ХАСАНОВ[b]

Ургенчский государственный университет, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: [a]x_umid@mail.ru, [b]temur.xasanov.2018@mail.ru

В данной работе изучается нагруженное уравнения КдФ с источником вида:

$$\begin{gathered} u_t+\beta(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)+\gamma(t)u(x_1,t)u_x \\ +4\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\varphi_m(x,t)\right|^2\right)=0, \\ -\varphi_m''+u(x,t)\varphi_m=\lambda_m(t)\varphi_m,\;\; m=\overline{1,\,N} \end{gathered} \tag{1}$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0,\,x_1\in\mathbb{R}$. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x),\;\; x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают свойствами:

1)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|\right)\left|u_0(x)\right|dx<\infty. \tag{3}$$

2) Оператор $L(0):=-\frac{d^2}{dx^2}+u_0(x),\;\; x\in\mathbb{R}$ имеет равно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, ..., $\lambda_N(0)$.

Предполагается, что
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_m(x,t)\right|^2dx=A_m(t),\;\; m=\overline{1,\,N} \tag{4}$$

где $A_m(t)>0,\;\; m=\overline{1,\,N}$ заданные положительные непрерывные функции.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам в точке $x\to\pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|\right)\left(\left|u(x,t)\right|+\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx<\infty,\quad j=1,2,3. \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t)$, $\varphi_m(x,t),\;x\in\mathbb{R},\;t>0,\;m=\overline{1,\,N}$ задачи 1-5, с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если функции $u(x,t),\;\varphi_m(x,t),\;\;m=\overline{1,N},\;\;x\in\mathbb{R},\;\;t>0$ являются решением задачи (1)-(5), то данные рассеяния $\left\{r^+(k,t),\,\lambda_n(t),\,B_n(t),\;n=\overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям*

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt}=\left(8ik^3\beta(t)u(x_0,t)-2ik\gamma(t)u(x_1,t)\right)r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t)+2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t)-2A_n(t)\right)B_n(t),\;\; n=1,2,3,...,N$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Пусть задана функция $u_0(x)\left(1+|x|\right)\in L^1(\mathbb{R})$. Тогда решение задачи (1)-(5) находится помощью следующего алгоритма.

1. Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{r^+(k),\, \chi_n,\, B_n,\, n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.

2. Используя теорему 1, находим данные рассеяния для $t>0$

$$\left\{r^+(k,t),\, \chi_n(t),\, B_n(t),\, n=\overline{1,N}\right\}.$$

3. Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi_m(x,t)$ уравнения $L(t)\varphi_m(x,t) := -\varphi''_m(x,t)+u(x,t)\varphi_m(x,t)=\lambda_m\varphi_m(x,t),\ m=1,2,...,N.$

Ключевые слова: нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза, обратная задача рассеяния, интегральное уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Левитан Б.М *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, М.: (1984).

[2] Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions, *Proceeding of the Institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan*, **47**:2 (2021), 250–261.

[3] Хойтметов У.А. Интегрирование общего уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе быстро убывающих комплекснозначных функций, *Доклады АН. наук РУЗ.*, №5, (2007), 16–20.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

Об одной нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, когда нагруженная часть содержит интегральный оператор дробного порядка

Журъат ХОЛБЕКОВ

Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова
e-mail: xolbekovja@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0=\left\{\begin{array}{ll} u_{xx}-u_y-\lambda D_{0x}^{-\alpha}u(x,0), & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-\ u_{yy}-\mu_j signy H_j\left[u(x,y)\right], & (x,y)\in\Omega_j, (j=\overline{1,3}), \end{array}\right. \tag{1}$$

где $\lambda,\ \ \mu_j\ (j=\overline{1,3})$ – заданные действительные числа, причем

$$0<\alpha<1,\ \lambda>0,\ \ \mu_j\geq 0,\ \ (j=\overline{1,3}), \tag{2}$$

$$H_j\left[u(x,y)\right]=\left\{\begin{array}{lll} u(x,0) \quad \text{при} & j=1, & \\ u(0,y) \quad \text{при} & j=2, & \xi=x+y,\\ u(1,y) \quad \text{при} & j=3, & \eta=y-x+1, \end{array}\right.$$

$D_{0x}^{-\alpha}[...]$– интегральный оператор дробного порядка [1];
Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых

$y=0,\ \ x=1,\ y=1,\ x=0$ соответственно; Ω_1– характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x+y=0$, $BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N\,(0,5\,;\ -0,5)$;
Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$, $DK: y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K\,(-0,5\,;\ 0,5)$;

Ω_3 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и характеристиками CM : $x+y=2$, BM : $x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M\,(1,5\,;\ 0,5)$;

$$\Omega=\sum_{j=0}^{3}\Omega_j\cup AB\cup BC\cup DA,\quad J_1=\{(x,y):0<x<1,\ \ y=0\}\,,$$

$$J_2=\{(x,y):0<y<1,\ \ x=0\}\,,\quad J_3=\{(x,y):0<y<1,\ \ x=1\}\,,$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_0,\quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup AD\cup\Omega_0\cup BC\cup\Omega_3.$$

Задача. Найти решение уравнения (1) в классе функций

$$W=\{u:\ \ u(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_0\right)\cap C^2\left(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\right),$$

$$u_y\in C\left(\Omega_2^*\right)\cap C\left(\Omega_0\cup AB\right)\cap C\left(\Omega_1\cup AB\right),$$

$$u_x\in C\left(\Omega_1^*\right)\cap C\,\left(\Omega_0\cup AD\cup BC\right)\cap C\left(\Omega_2\cup AD\right)\cap C\left(\Omega_3\cup BC\right)\}\,,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$a(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+b(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\right)=$$

$$=m(x)u(x,0)+n(x)u_y(x,0)+c(x),\qquad (x,0)\in J_1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AK}=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{MC}=\varphi_2(y),\qquad \frac{1}{2}\le y\le 1, \tag{5}$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,+0)=\alpha_1u_y(x,-0),\qquad (x,0)\in J_1, \tag{6}$$

$$u_x(+0,y)=\alpha_2u_x(-0,y),\qquad (0,y)\in J_2, \tag{7}$$

$$u_x(1+0,y)=\alpha_3u_x(1-0,y),\quad (1,y)\in J_3, \tag{8}$$

где $a(x),\ \ b(x),\ \ m(x),\ \ n(x),\ \ c(x),\ \ \varphi_1(x),\ \ \varphi_2(y)$ – заданные функции,
а $\alpha_j\ \ (j=\overline{1,3})$– известные постоянные, причем

$$\varphi_1(0)=0,\alpha_1>0,\quad \alpha_2,\ \ \alpha_3\in(-\infty\,;\ +\infty)\backslash\{0\}\,, \tag{9}$$

$$a^2(x)+b^2(x)\neq 0,\qquad m^2(x)+n^2(x)\neq 0,\quad \forall x\in\overline{J}_1, \tag{10}$$

$$a(x),\ \ b(x),\ \ m(x),\ \ n(x)\in C^1(\overline{J}_1)\cap C^2(J_1),$$

$$c(x)\in C^2(J_1),\tilde{a}(x)=a(x)-b(x)+2n(x)\neq 0,\quad \forall x\in\overline{J}_1, \tag{11}$$

$$\varphi_1(y)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \varphi_2(y)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right). \tag{12}$$

Заметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в случае, когда
$a(x)=1,\ b(x)=m(x)=n(x)=0,\ \ \lambda\equiv 0,\ \ \mu_j\equiv 0,\ \ (j=\overline{1,3})$ изучен в работах[2-3].

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (9)-(12) и*

$$\frac{a(x)+b(x)}{\tilde{a}(x)}\le 0,\quad \left(\frac{a(x)+b(x)}{\tilde{a}(x)}\right)'\le 0,$$

$$\frac{2m(x)}{\tilde{a}(x)} \leq 0, \quad \frac{\mu_1 a(x)}{\tilde{a}(x)} \leq 0, \quad \frac{\mu_1 b(x)}{\tilde{a}(x)} \geq 0,$$

то в области Ω существует единственное регулярное решение поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, нагруженные уравнения, оператор дробного порядка, интегральное уравнение Вольтерра.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35L10, 35M10, 35M12, 45B05.

Литература

[1] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, Москва (1985).

[2] Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.*Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **25**, №3 (2021). с. 407–422.

[3] Исломов Б., Холбеков Ж.А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-I, II *Узбекский математический журнал*, №4. 47-56(I) (2015), №1. 49-56(II) (2016).

— ⁕⁕⁕ —

Двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования

Беслан ЭФЕНДИЕВ

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x) \int\limits_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)u(x)] d\alpha = f(x), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \qquad \alpha < 0,$$

$$D_{0x}^\alpha u(x) = u(x), \qquad \alpha = 0,$$

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), \qquad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка α [1], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0,l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l] \cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0,l[$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0,l[$, удовлетворяющее условиям*

$$u(0) = u_0, \qquad u(l) = u_l, \tag{2}$$

где u_0, u_l – заданные константы.

Теорема. *Пусть $\mu(\alpha) \in L[0,\beta]$, $p(x) \in Lip[0,l]$, $q(x) \in AC[0,l]$, $f(x) \in L[0,l] \cap C]0,l[$. Тогда при выполнении условия $W(l,0) \neq 0$ существует единственное регулярное решение задачи (1), (2). Решение имеет вид*

$$u(x) = -u_0 G_t(x,0) + u(l) G_t(x,l) + \int\limits_0^l G(x,t) f(t) dt.$$

Здесь

$$G(x,t) = H(x-t)W(x,t) - \frac{1}{W(l,0)}W(x,0)W(l,t)$$

– функция Грина задачи (1), (2), $H(z)$ – функция Хевисайда,

$$W(x,t) = x - t + \int_t^x (x-s)R(s,t)ds$$

– фундаментальное решение уравнения (1),

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t), \qquad K_1(x,t) = q(x)\int_0^{\beta} \mu(\alpha) D_{tx}^{\alpha}[(x-t)p(x)]d\alpha,$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K_n(x,s)K_1(s,t)ds.$$

Ключевые слова: оператор непрерывно распределенного дифференцирования, дробный интеграл Римана–Лиувилля, дробная производная Римана–Лиувилля, краевая задача, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.

Литература

[1] Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, **34**:1 (1998), 101–109.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the Sobolev embedding constant for hypoelliptic operators

Yermurat ADILBEKOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan
E-mail: adilbekov.yermurat@gmail.com

In this talk, we investigate the best constant in the following hypoelliptic Sobolev inequality on a graded Lie group $\mathbb{G}$ ([1]):

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{G})} \leq C\|\mathcal{R}^{\frac{a}{\nu}} f\|_{L^p(\mathbb{G})}, \ \ 1 < p < q < \infty, \ a = Q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \tag{1}$$

where $\mathcal{R}$ is a Rockland operator and Q is the homogeneous dimension of $\mathbb{G}$. By a Rockland operator we understand any left-invariant homogeneous hypoelliptic differential operator on $\mathbb{G}$.

In [2] and [3] the best constant in the Sobolev inequality with inhomogeneous norm, and in the subcritical and critical Gagliardo-Nirenberg inequalities were expressed in the variational form as well as in terms of the ground state solutions of the nonlinear Schrödinger equation.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058474).

Keywords: Sobolev inequality, Rockland operator, best constant.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80.

References

[1] Fischer V. and Ruzhansky M. *Quantization on nilpotent Lie groups*, volume 314 of Progress in Mathematics, Birkhäuser/Springer (2016).

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Yessirkegenov N. Best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on graded groups and ground states for higher order nonlinear subelliptic equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **59**: (2020), Art. No. 175.

[3] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Critical Gagliardo-Nirenberg, Trudinger, Brezis-Gallouet-Wainger inequalities on graded groups and ground states, *Commun. Contemp. Math.*, (2021), Art. No. 2150061. DOI:10.1142/S0219199721500619.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Condition of oscillatory and non-oscillatory second order half-linear differential equations

Maktagul ALDAY[a], Danagul KARATAYEVA[b], Aizhan YKLASOVA[c]

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: [a]saiajan@yandex.ru, [b]danagul83@inbox.ru, [c]aizhan83zhenisovna@mail.ru

We consider a second order half-linear differential equation.

Let $\mu, \gamma \in R, \alpha > 0$,

$$t^{\mu}(|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \alpha t^{\gamma}|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, t > 0, \tag{1}$$

$$\int_0^{\infty}(t^{\mu}|y'(t)|^p - \alpha t^{\gamma}|y(t)|^p)dt \geq 0, y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(0,\infty). \tag{2}$$

(2) the inequality is a necessary and sufficient condition for equation (1) to be non-conjugate on the interval $(0, \infty)$.

Let $\mu < p - 1$, then $\forall c > 0$,

$$\int_0^c t^{(1-p')\mu} dt < \infty,$$

$$\int_0^\infty t^{(1-p')\mu} dt = \infty,$$

according to the Theorem A from [1]
$\overset{\circ}{W}{}^1_p (0,\infty) = \overset{\circ}{W}{}^1_{p,l} (0,\infty) = \{f \in W^1_p(0,\infty) : f(0) = 0\}$.
Then from (2) inequality

$$\int_0^\infty t^\mu |y'(t)|^p dt \geq \alpha \int_0^\infty t^\gamma |y(t)|^p) dt, y(0) = 0. \tag{3}$$

Let $y'(t) = f(t), y(0) = 0 \Longrightarrow y(t) = \int_0^1 f(s)ds$. Then substituting it into inequality (3) we get

$$\int_0^\infty t^\gamma \left| \int_0^1 f(s)ds \right|^p dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt. \tag{4}$$

Now we consider Hardy's inequality

$$\int_0^\infty t^\gamma \left| \int_0^t f(s)ds \right|^p dt \leq C \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt$$

let $\gamma = \mu - p$.
Then

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds \right|^p t^\mu dt \leq C \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt, \tag{5}$$

by Hardy's theorem [2], the smallest constant $C = \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$. At $\mu < 1-p$, $\gamma = \mu - p$ inequality (4) is satisfied if and only if $\frac{1}{\alpha} \geq \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$, that is, if $\alpha \leq \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$. If, $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$, then the condition (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) is not hold.

Therefore $\alpha \leq \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$, and for $\gamma = \mu - p, \mu < 1 - p$ the inequality (2), hence equation (1) is conjugate on the interval $(0,\infty)$, and then equation (1) will be non-oscillatory.

If at $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p}\right)^p$, $\gamma = \mu - p$, $\mu < 1 - p$, then equation (1) will be oscillatory.

For any $\alpha > 0$ by Hardy's inequality, the inequality

$$\int_a^\infty \left| \frac{1}{t} \int_a^t f(s)ds \right|^p t^\mu dt \leq \left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p \int_a^\infty t^\mu |f(t)|^p dt, \tag{6}$$

runs with the smallest constant $\left(\frac{p}{p-\mu-1}\right)^p$.

When condition (6) is satisfied, for any $a > 0$ equation (1) is conjugate on the interval (a,∞), which means that equation (1) is oscillatory. It follows from that if condition (6) is hold, then the equation (1) is oscillatory.

Funding: The authors were supported by the grant AD08856100 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: differential equation, oscillatory, non-oscillatory, half-linear, conjugate.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Q79, 35K05, 35K20.

References

[1] Elbert A. A half-linear second order differential equation. *Coloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Hungary* (1979), 158-180.

[2] Dosly O. Oscillation criteria for half-linear second order differential equations. *Hiroshima J.Math.-Japan* (1998), 507-521.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Inverse problem for determining a source function in the higher order equation with the Gerasimov-Caputo fractional derivative

Ravshan ASHUROV[1,a], Yusuf FAYZIEV[2,b], Ilyoskhuja SULAYMONOV[2,c]

[1] *Institute of Mathematics of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*ashurovr@gmail.com*, [b]*fayziev.yusuf@mail.ru*, [c]*ilyosxojasulaymonov@gmail.com*

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $||\cdot||$ and $A : H \to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H. Suppose that A has a complete in H system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of nonnegative eigenvalues λ_k. It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \to +\infty$. We denote by A^σ the power of operator A, defined as $A^\sigma h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma h_k v_k$, h_k are the Fourier coefficients of $h \in H$. Operator A^σ has the domain of definition $D(A^\sigma) = \{h \in H : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\sigma} |h_k|^2 < \infty\}$ and for elements of $D(A^\sigma)$ we introduce the norm $||h||_\sigma^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\sigma} |h_k|^2 = ||A^\sigma h||^2$.

Let $\rho \in (m-1, m)$ be a fixed number ($m \in N$) and let $C^j((a,b); H)$ stand for a set of $j \geq 0$ times continuously differentiable functions $u(t)$ of $t \in (a,b)$ with values in H.

Consider the following problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0; \\ u^{(j)}(0) = \varphi_j, \quad j = 0, 1, ..., m-1, \end{cases} \tag{1}$$

where the function $f(t) \in C^0((0,\infty); H)$ and $\varphi_j \in H$, D_t^ρ is the Gerasimov-Caputo fractional derivative of order ρ. This problem is also called *the forward problem.*

Definition. A function $u(t) \in C^{m-1}([0,\infty); H)$ with the properties $D_t^\rho u(t)$, $Au(t) \in C((0,\infty); H)$, and satisfying conditions (1) is called ***the solution*** of the problem (1).

Theorem 1. *Let functions $\varphi_j \in H$, $(j = 0, 1, ..., m-1)$ and $f(t) \in C([0,\infty)]; D(A^\varepsilon))$ for some $\varepsilon \in (0,1)$. Then the problem (1) has a unique solution and this solution has the following form*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m-1} \varphi_{jk} t^j E_{\rho,j+1}(-\lambda_k t^\rho) + \int_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k \eta^\rho) f_k(t-\eta) d\eta \right] v_k.$$

where are f_k, φ_{jk} – the Fourier coefficients of the functions f and φ_j respectively.

We also consider *the inverse problem* of determining the source function f with the additional condition:

$$u(\tau) = \Psi, \quad \tau > 0, \quad \tau - fixed\, point. \tag{2}$$

The solution of the inverse problem is defined in the same way as the solution of the forward problem.

In the case of the inverse problem, it is assumed that f does not depend on t.

Theorem 2. *Let $\varphi, \Psi \in D(A)$. Then the inverse problem (1), (2) has a unique solution $\{u(t), f\}$ and this solution has the following form*

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\varphi_{jk}t^{j}E_{\rho,j+1}(-\lambda_k t^{\rho})+f_k\, t^{\rho}E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k t^{\rho})\right]v_k,$$

and

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}f_k v_k,$$

where

$$f_k=\frac{\Psi_k}{\tau^{\rho}E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k\tau^{\rho})}-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi_{jk}E_{\rho,j+1}(-\lambda_k\tau^{\rho})}{\tau^{\rho-j}E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k\tau^{\rho})}.$$

Keywords: fractional equation, the Gerasimov-Caputo derivatives, inverse problem, determination of the source function.

2010 Mathematics Subject Classification: 5R11, 34K29.

References

[1] Pskhu A.V. *Fractional partial differential equations*, NAUKA, Moskva (2005) [in Russian].

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Time-dependent source identification problem for fractional Schrödinger type equations

Ravshan ASHUROV[1,a], Marjona SHAKAROVA[2,a]

[1] *Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, University street, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan*
[2] *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Student Town str.100174, Uzbekistan*
E-mail: [a]*e-ashurovr@gmail.com*, [b]*e-shakarova2104@gmail.com*

The fractional integration of order $\sigma < 0$ of the function $h(t)$ defined on $[0,\infty)$ has the form

$$J_t^{\sigma}h(t)=\frac{1}{\Gamma(-\sigma)}\int_0^t\frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\sigma+1}}d\xi,\quad t>0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function. Using this definition one can define the Caputo fractional derivative of order ρ,

$$D_t^{\rho}h(t)=J_t^{\rho-1}\frac{d}{dt}h(t).$$

Let H be a separable Hilberd space. Let $A: H\to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H.

Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of operator A, acting in H according to the rule

$$A^{\tau}h=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\tau}h_k v_k.$$

Obviously, the domain of definition of this operator has the form

$$D(A^{\tau})=\{h\in H:\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\tau}|h_k|^2<\infty\}.$$

Problem. Let $\rho \in (0,1)$ be a fixed number. Consider the following Cauchy problem

$$iD_t^\rho u(t) + Au(t) = p(t)q + f(t), \quad 0 < t \le T; \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{2}$$

where a part of the source function $p(t)$ is a scalar function, $f(t) \in C(H)$ and $\varphi, q \in H$ are known elements of H. If $p(t)$ is also a known function, then under certain conditions on the given functions a solution to problem (1)-(2) exists and it is unique (see, for example, [1]). The purpose of this paper is to determine $u(t)$ and $p(t)$ solutions. To solve this time-dependent source identification problem one needs an extra condition. Following the papers of A. Ashyralyev et al. [2] we consider the additional condition in a rather general form:

$$B[u(t)] = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $B : H \to R$ is a given bounded linear functional, and $\psi(t)$ is the given scalar function.We call the Cauchy problem (1)-(2) together with additional condition (3) the inverse problem.

Theorem 1. *Let $Bq \neq 0$, $\varphi \in H$ and $D_t^\rho \psi(t) \in C[0,T]$. Further, let $\epsilon \in (0,1)$ be any fixed number and $q \in D(A^{1+\epsilon})$ and $f(t) \in C([0,T]; D(A^\epsilon))$. Then the inverse problem has a unique solution $\{u(t), p(t)\}$.*

Theorem 2. *Let assumptions of Theorem 1 be satisfied and let $\varphi \in D(A)$. Then the solution to the inverst problem obeys the stability estimate*

$$||D_t^\rho u||_{C(H)} + ||Au||_{C(H)} + ||p||_{C[0,T]} \le C_{\rho,q,B,\epsilon}\big[||\varphi||_1 + ||\psi||_{C[0,T]} + \max_{0\le t\le T} ||f(t)||_\epsilon\big],$$

where $C_{\rho,q,B,\epsilon}$ is a constant, depending only on ρ, q, B and ϵ.

Keywords: Schrödinger type equation, the Caputo derivatives, time-dependent source identification problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K35, 35C10.

References

[1] Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T.. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:3 (2021).

[2] Ashyralyev.A., Urun.M. Time-dependent source identification problem for the Schrödinger equation with nonlocal boundary conditions, *In: AIP Conf. Proc*, **2183** (2019), Art. 070016.

— ⁂⁂⁂ —

Nonlocal problem for hyperbolic equation with piecewise-constant argument generalized type

Anar ASSANOVA

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: assanova@math.kz

On the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider nonlocal problem for system of hyperbolic equations with piecewise-constant argument generalized type in the following form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + f(t,x) +$$

$$+A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x), \tag{1}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} +$$

$$+S_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T}+S_0(x)u(T,x)=\varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0)=\psi(t), \qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

where $u(t,x) = colon(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω;

$\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [\theta_j, \theta_{j+1})$, $j = \overline{0, N-1}$; $\theta_j \le \zeta_j < \theta_{j+1}$ for all $j = 0, 1, ..., N-1$;

$0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{N-1} < \theta_N = T$;

the $n \times n$ matrices $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ and n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$; the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

We study a solvability to nonlocal problem (1)–(3). Differential equations with piecewise-constant argument generalized type arised in various processes of neutral networks, dynamical systems and biology [1]–[4]. Some problems for hyperbolic hyperbolic equation with piecewise-constant argument generalized type are studied in [5].

We propose a new approach for solving nonlocal problem for the system of hyperbolic equations with piecewise-constant argument generalized type (1)–(3) based on Dzhumabaev parametrization method [6]–[8]. In [9] a periodic problem for system of hyperbolic equations with delay argument are investigated by this method. For the case

$$P_1(x) = P_0(x) = S_1(x) = S_0(x) = 0, \qquad x \in [0, \omega]$$

problem (1)–(3) are studied in [10].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855726).

Keywords: Nonlocal problem, hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type, functional parameter, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L52, 35R05, 35R10, 34A36.

References

[1] Akhmet M.U. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Analysis*, **66** (2007), 367–383.

[2] Akhmet M.U. On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **336** (2007), 646–663.

[3] Akhmet M.U. *Principles of discontinuous dynamical systems*, Springer, New-York (2010).

[4] Akhmet M.U., Yilmaz E. *Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations*, Springer, New-York (2014).

[5] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1993).

[6] Dzhumabaev D. S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integrodifferential equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**: 7 (2018), 1439–1462.

[7] Dzhumabaev D. S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comp. Appl. Math.*, **327**:1 (2018), 79–108.

[8] Dzhumabaev D. S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary value problems, *Ukranian Math. J.*, **71**:7 (2019), 1006–1031.

[9] Assanova A.T., Iskakova N.B., Orumbayeva N.T. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay, *Math. Methods Appl. Sci.*, **43**:2 (2020), 881–902.

[10] Assanova A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:15 (2022), 3584—3593.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A problem with parameter for systems of essentially loaded differential equations

Elmira BAKIROVA[1,a], Zhazira KADIRBAYEVA[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*bakirova1974@mail.ru*, [b]*zhkadirbayeva@gmail.com*

In the present paper we consider the problem for the essentially loaded differential equations with parameter

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A_0(t)\mu + \sum_{j=1}^{m} M_j(t)\dot{x}(\theta_j) + \sum_{i=0}^{m+1} K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) + B_0\mu = d, \quad d \in R^{n+m}, \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \tag{2}$$

where the $(n \times n)$ -matrices $A(t)$, $M_j(t)$ $(j = \overline{1,m})$, $K_i(t)$ $(i = \overline{0,m+1})$, $(n \times m)$ -matrix $A_0(t)$, and n-vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $((n+m)\times n)$ -matrices B, C, the $((n+m)\times m)$-matrix $B_0(t)$ are constants and $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

A solution to problem (1), (2) is a pair $(\mu^*, x^*(t))$, where the $\mu^* \in R^m$, the vector function $x^*(t)$ is continuous on $[0,T]$ and continuously differentiable on $(0,T)$ and satisfies (1) with $\mu = \mu^*$ and condition (2).

Boundary value problems for loaded differential equations are frequently encountered in applied mathematics, being the mathematical models of various processes of biology, ecology, mechanics, medicine, engineering and economics [1]. The solvability of boundary value problems for the loaded differential equations with parameter and methods for finding their solutions are considered in [2, 3], where $M_j = 0$, $j = \overline{1,m}$.

In the present paper, questions of existence and uniqueness of solution to linear boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with parameter is investigated. The Dzhumabaev parameterization method [4] is used for solving this problem. Conditions of unique solvability of problem (1), (2) are received in the terms of initial data and the algorithms of finding its solution are proposed.

Keywords: problem with parameter, essentially loaded differential equation, parametrization method, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34H05, 34K06, 34K28, 45J05.

References

[1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).

[2] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter, *News of the NAS RK*, **3**:325 (2019), 77–84.

[3] Kadirbayeva Zh.M., Dzhumabaev A.D. Numerical implementation of solving a control problem for loaded differential equations with multi-point condition, *Bulletin of the Karaganda university*, **4**:100 (2020), 81–91.

[4] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput. Maths. Math. Phys*, **29**:1 (1989), 34–46.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On products of noncommutative symmetric quasi Banach spaces and applications

Turdebek BEKJAN[1,a], Myrzagali OSPANOV[2,b]

[1]*Astana It University , Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *Faculty of Mechanics and Mathematics, L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]*t.nurlybekuly@astanait.edu.kz,* [b]*myrzan66@mail.ru*

Let $E_1,\ E_2$ be symmetric quasi Banach function spaces on $(0,\alpha)$ $(0<\alpha\le\infty)$. We study some properties of several constructions (the products $E_1(\mathcal{M})\odot E_2(\mathcal{M})$, the Calderón spaces $E_1(\mathcal{M})^\theta E_2(\mathcal{M})^{1-\theta}$, the complex interpolation spaces $(E_1(\mathcal{M}),E_2(\mathcal{M}))_\theta$, the real interpolation method $(E_1(\mathcal{M}),E_2(\mathcal{M}))_{\theta,p})$ in the context of noncommutative symmetric quasi Banach spaces.

We recall interpolation of noncommutative symmetric spaces. Let $E_1,\ E_2$ be fully symmetric Banach function spaces on $(0,\alpha)$ and $0<\theta<1$. If E is complex interpolation of E_1 and E_2, i.e. $E=(E_1,E_2)_\theta$. Then
$$E(\mathcal{M})=(E_1(\mathcal{M}),E_2(\mathcal{M}))_\theta. \tag{1}$$
For more details on interpolation of noncommutative symmetric spaces we refer to [1].

For symmetric quasi Banach function spaces, we have the following result.

Theorem. *Let E_j be a symmetric quasi Banach function space on $(0,\alpha)$ which is s_j-convex for some $0<s_j<\infty$, $j=1,\ 2$. Suppose E_j has order continuous norm, $j=1,\ 2$ and $0<\theta<1$. If $E=E_1^{1-\theta}E_2^\theta$, then*
$$E(\mathcal{M})=(E_1(\mathcal{M}),E_2(\mathcal{M}))_\theta=E_1^{1-\theta}(\mathcal{M})E_2^\theta(\mathcal{M})=E_1^{(\frac{1}{1-\theta})}(\mathcal{M})\odot E_2^{(\frac{1}{\theta})}(\mathcal{M}).$$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258335 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Symmetric quasi Banach function space, Pointwise product of symmetric quasi Banach function spaces, Noncommutative symmetric quasi Banach space.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L51.

References

[1] Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B. Fully symmetric operator spaces, *Integ. Equ. Oper. Theory* **15** (1992), 942–972.

— ⁕⁕⁕ —

Averaging trajectory attractors of the system of stokes equations in a two-dimensional porous medium

Kuanysh BEKMAGANBETOV, Altyn TOLEUBAY[a]

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[a]*altyn.15.94@mail.ru*

The theory of trajectory attractors for dissipative partial differential equations was developed in [1]. This approach is essentially useful in studying the long-term behavior of solutions of evolutionary equations for which the uniqueness result for the corresponding Cauchy problems has not yet been proven (for example, the 3D Navier-Stokes system) or does not hold (for example, the reaction-diffusion system of equations). Attractors describe the behavior of solutions of dissipative nonlinear evolution equations as time tends to infinity. They show the most important limiting objects of dynamic systems, that is, the sets of trajectories that characterize the entire dynamics of the model, controlled by evolutionary equations. Let G_0 be –a domain $Y=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2$, such that $\overline{G}_0$ is a compact diffeomorphic to a circle.

Let $\delta>0$ be and M – some set, we introduce the following $\delta M=\{x:\delta^{-1}x\in M\}$. For $j\in\mathbb{Z}^2$ we define

$$P_\varepsilon^j=\varepsilon j,\quad Y_\varepsilon^j=P_\varepsilon^j+\varepsilon Y,\quad G_\varepsilon^j=P_\varepsilon^j+\varepsilon G_0.$$

We define the domain $\widetilde{\Omega}_\varepsilon=\{x\in\Omega:\rho(x,\partial\Omega)>\sqrt{2}\,\varepsilon\}$ and the set of admissible indexes as

$$\Upsilon_\varepsilon=\left\{j\in\mathbb{Z}^n:G_\varepsilon^j\cap\overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon\neq\emptyset\right\}.$$

Notice that $|\Upsilon_\varepsilon|\cong d\varepsilon^{-2}$, where $d>0$ –is a constant. Consider the following domain , $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\overline{G}_\varepsilon$, where $G_\varepsilon=\bigcup\limits_{j\in\Upsilon_\varepsilon}G_\varepsilon^j$.

We will study the asymptotic behavior of trajectory attractors of the following initial-boundary value problem for an autonomous two-dimensional system of Stokes equations

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\nu\Delta u_\varepsilon+(u_\varepsilon,\nabla)u_\varepsilon=g_0\big(x,\dfrac{x}{\varepsilon}\big), & x\in\Omega_\varepsilon,\\ (\nabla,u_\varepsilon)=0, & x\in\Omega_\varepsilon,\\ \nu\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}+B\big(\dfrac{x}{\varepsilon}\big)u_\varepsilon=0, & x\in\partial G_\varepsilon, t\in(0,+\infty),\\ u_\varepsilon=0, & x\in\partial\Omega\\ u_\varepsilon(0)=U(x), & x\in\Omega_\varepsilon.\end{cases}$$

Here, is the outward

$u_\varepsilon=u_\varepsilon(x,t)=(u_\varepsilon^1,u_\varepsilon^2)$, $g=g\,(x,y)=(g^1,g^2)\in[L_2(\Omega\times\mathbb{R}^2)]^2$,
n – normal vector to the boundary and $\nu>0$.

Further,

$$B(s)=\begin{pmatrix}b^1(s) & 0\\ 0 & b^2(s)\end{pmatrix},$$

functions such $b^k(s)\in C(\mathbb{R}^2)$ that are $b^k(s)$ – 1-periodic in each variable functions on $\mathbb{R}^2$ and satisfy the condition

$$\int\limits_{\partial G_0}b^k(s)\,d\sigma=0,$$

where is the σ – element of the curve length ∂G_0, $k=1,2$.

For a vector function $g\,(x,y)$ we will assume that it is 1-periodic with respect to the variables y_1 and y_2, and $g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ have an average $\overline{g}(x)$ mean in space $[L_2(\Omega)]^2$ at $\varepsilon\to 0+$.

We have proved that, for , $\varepsilon\to 0+$ the trajectory attractors $\mathfrak{A}_\varepsilon$ of the original initial boundary value problem in the topology

$\Theta_+^{loc}=L_2^{loc}(\mathbb{R}_+,[L_2(\Omega)]^2)$ converge to the trajectory attractor $\overline{\mathfrak{A}}$ of the following initial-boundary value problem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_0}{\partial t}-\nu\sum\limits_{i,l=1}^{2}\widehat{a}_{il}\dfrac{\partial^2u_0}{\partial x_i\partial x_l}+(u_0,\nabla)u_0+Vu_0=\tilde{g}(x), & x\in\Omega,\\ (\nabla,u_0)=0, & x\in\Omega,\\ u_0=0, & x\in\partial\Omega\\ u_0(0)=U(x), & x\in\Omega,\end{cases}$$

where

$$\widehat{a}_{il}=\int\limits_{Y\setminus G_0}\left(\frac{\partial N_l(\zeta)}{\partial\zeta_i}+\delta_{il}\right)d\zeta,\qquad \tilde{g}(x)=\int\limits_{Y\setminus G_0}g(x,\zeta)\,d\zeta,$$

$$m_k=-\int\limits_{\partial G_0}b^k(\zeta)M^k(\zeta)\,d\sigma,\qquad V=\begin{pmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix},$$

here $M^k(\zeta)$ and $N_l(\zeta)$ – are 1-periodic functions with respect ζ, to satisfying the problems

$$\Delta M^k = 0 \text{ in } Y \setminus G_0, \qquad \frac{\partial M^k}{\partial n} = -b^k(\zeta) \text{ on } \partial G_0,$$

$$\Delta N_l = 0 \text{ in } Y \setminus G_0, \qquad \frac{\partial N_l}{\partial n} = -n_l \text{ on } \partial G_0.$$

Keywords: attractors, nonlinear equations, Navier-Stokes equations, two-dimensional porous medium.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B40, 35B41, 35Q80.

References

[1] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics, Providence (RI), *Am. Math. Soc.*, **363** (2002).

— ⁂ —

Boundary conjugation problem for piecewise analytic functions in Besov spaces

Nazarbay BLIEV[a], Nurlan YERKINBAYEV[b]

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]bliev.nazarbay@mail.ru, [b]nurlan.erkinbaev@mail.ru

The main aim of this work is to show solvability of the continuous boundary conjugation problem for analytic functions in the Besov space, which is embedded into the class of continuous functions.

As far as we know, (continuous) boundary value problems of conjugation of analytic functions are considered in Besov spaces for the first time in this work. Until now, such and similar boundary value problems have been studied in spaces of functions continuous in the sense of Hölder [1-2]. Our work proposes a method for solving the indicated boundary value problems in the class of continuous functions (Hölder property is not required) in terms of Besov spaces, which emphasises the novelty of the work.

Let $\Gamma \in C^1_\nu, 0 < \nu \leq 1$ be a simple closed contour, dividing the complex plane into two regions: internal, denoted by D^+, and external by D^-.

Let functions $G(t)$ and $g(t)$ belong to $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma) \hookrightarrow C(\Gamma), 1 < p < 2$, and $G(t) \neq 0, t \in \Gamma$.

We find a piecewise-analytic function $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, which belongs to $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(D^\pm) \hookrightarrow C(\overline{D^\pm})$ [3]: $\Phi^+(z)$ is analytic in a domain D^+, $\Phi^-(z)$ is analytic in a domain D^-, including a point $z = \infty$ satisfying on Γ the following conditions

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \text{ is a homogeneous problem,} \tag{1}$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \text{ is a corresponding inhomogeneous problem.} \tag{2}$$

Theorem. *If $\varkappa \geq 0$, then (1) has $\varkappa + 1$ linearly independent solutions*

$$\Phi^+_k(z) = z^k e^{\Pi^+(z)}, \quad \Phi^-_k(z) = z^{k-\varkappa} e^{\Pi^-(z)}, \quad (k = 0, 1, , \varkappa), \tag{3}$$

where

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\log\left[\tau^{-\varkappa} G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau. \tag{4}$$

The general solution contains $\varkappa + 1$ arbitrary constants and is determined by

$$\Phi^+(z) = P_\varkappa(z) e^{\Pi^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\varkappa} P_\varkappa(z) e^{\Pi^-(z)}, \tag{5}$$

where $P_\varkappa(z)$ is a polynomial of a degree $\varkappa$ with arbitrary coefficients. If $\varkappa < 0$, then (1) is unsolvable.

Keywords: Multidimensional singular integrals, singular integral equations, Besov spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 30E25,30E20, 45E05.

References

[1] Muskhelishvili N.I. *Singular Integral Equations*, Fizmatgiz, Moscow (1962). [in Russian]
[2] Gakhov F.D. *Boundary Value Problems*, Fizmatgiz, Moscow (1977). [in Russian]
[3] Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiĭ S.M. *Integral representations of function and embedding theorems,* John Willey, New York, 1 (1978); 2 (1979).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Delta-shaped perturbations of the Laplace-Beltrami operator on a two-dimensional sphere

Karlygash DOSMAGULOVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: karlygash.dosmagulova@gmail.com,

Let Λ_0 is an invertible restriction of the operator B. The operator Λ, is defined by the formula $\Lambda u = Bu$ on the domain

$$D(\Lambda) = \left\{ u \in D(B) : u = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s\left(\Lambda_0^{-1} f\right), \forall f \in H \right\}$$

Theorem 1. *Operator Λ is an invertible operator, and*

$$\Lambda^{-1} f = \Lambda_0^{-1} f \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s\left(\Lambda_0^{-1} f\right), \forall f \in H.$$

Moreover, for the resolvents $(\Lambda - \lambda I)^{-1}$ and $(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1}$ the second generalized Hilbert identity is valid:

$$(\Lambda - \lambda I)^{-1} f = (\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1} \varphi_s U_s((\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f)$$

Note that the inequality $D(\Lambda) \neq D(\Lambda_0)$ can hold.

The Laplace-Beltrami operator is considered on the two-dimensional unit sphere:

$\Lambda_{S^2}\Phi = -\left[\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - ctg\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2\theta}\right]$, which plays the role of the operator Λ_0. The eigenvalues of the operator Λ_0 have the form $\lambda_l = l(l+1)$, where $l \geq 0$ are integers. Each eigenvalue λ_l has a multiplicity $2l+1$. They correspond to their eigenfunctions

$$\hat{Y}_l^m \begin{cases} P_l^m(cos\theta)cosm\varphi, m = 0, ..., l \\ P_l^{|m|}(cos\theta)sin|m|\varphi, m = -1, -2..., -l. \end{cases}$$

Green's function of the operator Λ_0 has the form

$$\varepsilon(\varphi, \theta; \alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \sum_{m=l}^{-l} Y_l^m(\varphi, \theta) Y_l^m(\alpha, \beta).$$

The indicated Green's function satisfies the representation

$$\varepsilon(\varphi, \theta; \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - sin\alpha sin\varphi - cos\alpha cos\varphi cos(\theta - \beta)}}.$$

Let choose as $\Phi_0(\phi, \theta) = \varepsilon(\phi, \theta, \phi_0, \theta_0)$,

$\Phi_1(\phi, \theta) = \frac{\partial}{\partial\beta}\varepsilon(\phi, \theta, \phi_0, \theta_0)$,

$\Phi_2(\phi,\theta) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varepsilon(\phi,\theta,\phi_0,\theta_0)$, where (ϕ,θ)
is a fixed point. Further, according to the above scheme, a biorthogonal system of functionals U_0, U_1, U_2 is constructed. Then, according to Theorem 1, the invertible operator Λ is written out. The operator Λ can be interpreted as a delta-shaped perturbation of the Laplace-Beltrami operator on a two-dimensional sphere.

Keywords: Riemannian manifolds, perturbations, invertible operator.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C15, 53C17, 58J37.

References

[1] Abraham R., Marsden J., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications, second edition*, Springer-Verlag, New York (1988).

[2] Adams R.A., Fournier J.F. *Sobolev Spaces*, Pure Appl. Math., Academic Press (2003).

[3] Davies E.B., *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Laplace operator in a ball

Aishabibi DUKENBAYEVA[1,2,3,4,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Department of Mathematics: Analysis, Ghent University, Belgium*
[4] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*dukenbayeva@math.kz*

Let $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ be an arbitrary point of the unit ball $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Let $\alpha_k \in \{-1, 1\}$. Then $(\alpha_k)^2 = 1$. Denote $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n)$, and $\partial\Omega_+\,(\partial\Omega_-)$ is a part of the sphere $\partial\Omega$, for which $x_1 > 0\,(x_1 < 0)$. We also denote a part of the sphere $\partial\Omega$, for which $x_1 = 0$, by $\partial\Omega_0$.

In this talk we consider the following nonlocal boundary value problem for the Laplace operator in the ball, which is a multidimensional generalisation of the Samarskii-Ionkin problem.

The problem $S_{1\beta}$. *Find a function $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega} \backslash \partial\Omega_0)$ satisfying Poisson's equation*

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

and the following boundary conditions

$$u(x) + (-1)^k u\left(x^*\right) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \beta \frac{\partial u\left(x^*\right)}{\partial n} = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{3}$$

where $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}[\partial\Omega_+], \mu(x) \in C^{\varepsilon}[\partial\Omega_+]$, $0 < \varepsilon < 1$, and β is a fixed real number. Here, $\frac{\partial}{\partial n}$ is a derivative with respect to the direction of the outer normal to $\partial\Omega$.

In the case when $\beta = -(-1)^k$, we obtain periodic and antiperiodic boundary problems, which were studied earlier by M.Sadybekov and B.Turmetov (see [1]-[2]).

In this talk we discuss the well-posedness and spectral properties of the problem.

The talk is based on joint works with Prof. Makhmud Sadybekov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058474).

Keywords: Laplace operator, Poisson's equation, nonlocal boundary value problem, Samarskii-Ionkin problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25.

References

[1] Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk, *Differential Equations*, **50**:2 (2014), 268–273.

[2] Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball, *Eurasian Mathematical Journal*, **3**:1 (2012), 143–146.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Inverse scattering problem for nonstationary Manakov system on the half-line with a nonhomogeneous boundary condition

Mansur ISMAILOV[1,2,a]

[1] *Gebze Technical University, Gebze-Kocaeli, Turkey*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]mismailov@gtu.edu.tr

Consider the first order hyperbolic system in the form

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}=[\sigma,Q(x,t)]\psi,\ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R},\tag{1}$$

where $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ is an unknown vector-function, $\sigma=diag\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ is diagonal matrix with $\xi_1>0>\xi_2=\xi_3$ and $[\sigma,Q(x,t)]$ is a matrix potential with measurable complex valued and square-integrable entries. This system is a linear analogue of three-wave interaction problem in nonstationary medium.

The case $\xi_1>0>\xi_3>\xi_4$ when system (1) suggests one incident and two scattered waves with different velocities and the case $\xi_1=\xi_2>0>\xi_3$ when the system (1) suggests one scattered and two incident waves with same velocities are studied in [1] and [2], respectively. A method of solution of inverse scattering problem (ISP) for the first order hyperbolic system with a time-dependent potentials studied in [3] by utilizing a Gelfand-Levitan-Marchenko type linear integral equation. The alternative method of solution ISP for the first order hyperbolic system is realized in [4] by utilizing a nonlocal Riemann-Hilbert problem. If the potential $Q(x,t)=Q(t)$ is time independent, then by taking $\psi(x,t)=v(x)exp(-i\lambda t)$ with the separation of variables, we can convert (1) into the first order system of ordinary differential equations by $v(x)$ that is called the Manakov system that is useful to integration the two component nonlinear Schrödinger equation ([5]).

The scattering problem for the system (1) on the semi-axis is the problem of finding the solution of the system (1) with the boundary condition at $x=0$

$$\psi_2(0,t)=\psi_1(0,t),\psi_3(0,t)=a_2(t)\tag{2}$$

where $a_2\in L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ and asymptotic at $x\to+\infty$

$$\psi_1(x,t)=a_1(t+x)+o(1),\ x\to+\infty.\tag{3}$$

We shall consider generalized solutions of system (1), which are ordinary functions measurable in x and t. Here, with respect to variable t, these functions belong to the space $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ and their L_2-norms are uniformly bounded with respect to x. We refer to such solutions as admissible.

Theorem 1. *For an arbitrary $a_i(t)\in L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ i=1,2$ there exists a unique admissible solution of the scattering problem (1)-(3) and the second and third components of the solution satisfy the asymptotics*

$$\psi_k(x,t)=b_{k-1}(t-x)+o(1),\ x\to+\infty,\ k=2,3,\tag{4}$$

where $b_1(t)$, $b_2(t)\in L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Physical interpretation: Let us consider the shifted boundary data $a_2(t+\frac{1}{\mu}x)$ as the nontrivial solution of $\mu\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial x}=0$ with some $\mu>0$. Then this equation together with the system (1) can be physical interpretation of wave propagation in nonstationary medium in the case of two incident and two scattered waves when one of incident waves unaffected by the potential field. The functions $a_i(t)$, $i = 1, 2$ denotes the profile of incident (incoming) waves and the asymptotics $b_1(t)$, $b_2(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ defines the profiles of the scattered (outgoing) waves.

In the view of Theorem 1, for every incident functions $a_i(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$, when the system (1) satisfies conditions (2) and (3), there exists a unique solution $\psi_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$. For this solution there exists scattered waves $b_i(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$ according to (4). By comparing the incident and scattered waves, the scattering operator S is defined by

$$S : \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

We will call the operator S the scattering operator for the system (1) on the semi-axis. Clearly, S is an 2×2 matrix operator in the space $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. The operator S are invertible and they have forms as $S = I + F$ and $S^{-1} = I + G$, where F, G are Hilbert-Schmidt integral operators.

By using the transformation operators which play important role in solving the ISP, the Volterra factorization properties of scattering operator are obtained.

Theorem 2. *Let S be the scattering operator on the semi-axis for the system (1). Then it admits two sided factorizations.*

The problem of finding the matrix potential $[\sigma, Q(x, t)]$ from the known scattering operator is called the inverse scattering problem (ISP) for the system (1).
The factorizations allows us to determine the value of the function $[\sigma, Q(x, t)]$ at $x = 0$ by S . For finding the function $[\sigma, Q(x, t)]$ at any values $x_0 \geq 0$ it is natural to consider the scattering problem for the system (1) with the shifted coefficient $[\sigma, Q(x + x_0, t)]$. Denote by $S(x_0)$ the scattering problem on the semi-axis with this coefficient. Then $S(0) = S$. Following the paper [6] we can prove that $S(x_0)$ is unequely determined by S.

Theorem 3. *Let S be the scattering operator for the system (1) on the semi-axis. Then the coefficients in the equation (1) is uniquely determined by S.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09260126).

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35L50, 35P25.

References

[1] Nizhnik L.P., Iskenderov N.Sh. Inverse nonstationary scattering problem for hyperbolic system of three equations of the first order on a semi-axis, *Ukr. Math. J.*, **42**:7 (1990), 825–832.

[2] Ismailov M.I. Inverse nonstationary scattering for the linear system of the 3-wave interaction problem in the case of two incident waves with the same velocity, *Wave Motion*, **47** (2010), 205–216.

[3] Nizhnik L.P. *Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations*, Nauk Dumka, Kiev, (1991) (in Russian).

[4] Sung L.Y., Fokas A.S. Inverse problem for $N \times N$ hyperbolic systems on the plane and the N-wave interactions, *Commun. Pure Appl. Math.*, **44**:5 (1991), 535–571.

[5] Manakov S.V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves, *Sov. Phys. JETP*, **38** (1974), 248–253.

[6] Ismailov M.I. Inverse scattering problem for the nonstationary Dirac equation on the half-plane, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **24**: 3 (2016), 221–231.

— ⁂ —

A problem for impulsive systems of essentially loaded differential equations

Zhazira KADIRBAYEVA[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*zhkadirbayeva@gmail.com*

We consider the following linear two-point boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with impulse effect:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m} M_i(t) \lim_{t\to\theta_i+0} \dot{x}(t) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Here $(n \times n)$ -matrices $A_0(t)$, $M_i(t)$ $(i = \overline{1,m})$, and n-vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t = \theta_i$, $(i = \overline{1,m})$, B_j and C_j, $(j = \overline{0,m})$ are constant $(n \times n)$-matrices, and φ_i, $(i = \overline{1,m})$ are constant n vector functions, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

A solution to problem (1)–(3) is a piecewise continuously differentiable vector function $x(t)$ on $[0,T]$ which satisfies the system of essentially loaded differential equations (1) on $[0,T]$ except the points $t = \theta_i$, $(i = \overline{1,m})$, the boundary condition (2), and conditions of impulse effects at the fixed time points (3).

Numerous important problems of mathematical physics and mathematical biology lead to boundary-value problems for loaded equations. Loaded differential equations are used to solve problems of long-term prediction, control of the groundwater level and soil moisture [1]. Problems for essentially loaded differential equations and methods of finding their solutions considered in [2]. Boundary value problems with impulse effects for essentially loaded differential equations arise when modeling various processes of natural science.

In the present paper, a linear two-point boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with impulse effect is investigated. The essentiality means that the right side of the differential equation depends on the value of the desired solution and its derivatives at given points, where the order of the derivatives is not less than the order of the differential part of the equation. The Dzhumabaev parameterization method [3] is used for solving this problem. The problem under consideration is reduced to solving a system of linear algebraic equations. The coefficients and right-hand side of the system are calculated by solving the Cauchy problems for ordinary differential equations. A numerical algorithm is offered for solving the considering problem.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP13067682 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: essentially loaded differential equation, impulse effect, parametrization method, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06.

References

[1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).

[2] Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving boundary value problem for essentially loaded differential equations, *Lobachevskii J. of Math.*, **42**:3 (2021), 551–559.

[3] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequality with two singularities at the origin and the boundary

Madina KALAMAN

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 211101011@stu.sdu.edu.kz

First, let us recall the classical Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality [1]:

Theorem 1. Let $n \in \mathbb{N}$ and let p, q, r, a, b, d, $\delta \in \mathbb{R}$ such that $p, q \geq 1$, $r > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, and

$$\frac{1}{p} + \frac{a}{n}, \frac{1}{q} + \frac{b}{n}, \frac{1}{r} + \frac{c}{n} > 0, \tag{1}$$

where $c = \delta d + (1 - \delta)b$. Then there exists a positive constant C such that

$$\||x|^c f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^a |\nabla f|\|^{\delta}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \||x|^b f\|^{1-\delta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

holds for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, if and only if the following conditions hold:

$$\frac{1}{r} + \frac{c}{n} = \delta \left(\frac{1}{p} + \frac{a-1}{n} \right) + (1 - \delta) \left(\frac{1}{q} + \frac{b}{n} \right), \tag{3}$$

$$a - d \geq 0 \quad \text{if} \quad \delta > 0, \tag{4}$$

$$a - d \leq 1 \quad \text{if} \quad \delta > 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{r} + \frac{c}{n} = \frac{1}{p} + \frac{a-1}{n}, \tag{5}$$

Inspired by the recent work [2], in this talk we discuss Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequality with two singularities at the origin and the boundary on homogeneous Lie groups.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Keywords: Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality, homogeneous Lie groups, optimal constant.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80.

References

[1] Caffarelli L. A., Kohn R., Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights, *Composito Math.*, **53**: (1984), 259–275.

[2] Ruzhansky M., Suragan D., Yessirkegenov N. Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, and remainders, stability, and superweights for L_p-weighted Hardy inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, **5**: (2018), 32–62.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Boundary control of rod temperature field with a selected point

Baltabek KANGUZHIN[1,2,a], Kanzharbek IMANBERDIYEV[1,2,b]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan E-mail:*
[a]*kanbalta@mail.ru*, [b]*kanzharbek75ikb@gmail.com*

In this work, we study the issue of boundary control of rod temperature field with a selected point x_0.

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \alpha u(x_0,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

where $Q = \{(x,t):\ 0 < x < b,\ 0 < t < T < +\infty\}$.

It is assumed that at the initial moment $t = 0$ the temperature along the rod of length b is given by law $u(x,0) = u_0(x)$, $0 < x < b$, where $u_0(x)$ is a twice continuously differentiable function. At the moment of time $t = T$ the temperature of the rod is equal to $u(x,T) = \gamma(x)$, $0 < x < b$, where $\gamma(x)$ is also a twice continuously differentiable function. The main purpose of the work is to clarify the conditions for the existence of the boundary control $u(0,t) = \mu(t)$, $u(b,t) = \eta(t)$, which ensures the transition of the temperature field from the state $\{u(x,0) = u_0(x)\}$ to the state $\{u(x,T) = \gamma(x)\}$. Similar problems were considered in [1, 2].

According to the optimization method, we choose the following functional

$$\mathcal{J}[\mu,\eta] = \|u(\cdot,T;\mu,\eta) - \gamma(\cdot)\|^2_{W_2^1(0,b)} + \beta_1 \int_0^T |\mu(t)|^2 dt + \beta_2 \int_0^T |\eta(t)|^2 dt,$$

where β_1, β_2 are positive numbers, γ is a given function from class $W_2^1(0,b)$.

The boundary control problem is as follows: it is required to find boundary controls $(\mu(t), \eta(t))$ and the corresponding solution $u(x,t)$, that satisfies equation (1) with initial boundary controls

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(b,t) = \eta(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < b, \tag{3}$$

and minimizes functional $\mathcal{J}[\mu,\eta]$.

Funding: First author is supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855402).
Second author is supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855372).

Keywords: initial-boundary value problem, heat equation, boundary control, Green's function, Fredholm integral equation of the second kind, spectral properties, eigenfunction, eigenvalues.

2010 Mathematics Subject Classification: 35A23, 35K05, 35P05.

References

[1] Fursikov A.V. Stabilizability of quasi linear parabolic equation by feedback boundary control, *Sbornik Mathematics, London Mathematical Society, United Kingdom*, **192**:4 (2001), 593–639.

[2] Ghaderi N., Keyanpour M. and Mojallali H. Observer-based finite-time output feedback control of heat equation with Neumann boundary condition, *Journal of the Franklin Institute*, **357**:14 (2020), 9154–9173.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Layer potentials for degenerate diffusion equations

Mukhtar KARAZYM[a], Durvudkhan SURAGAN[b]

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: [a]mukhtar.karazym@nu.edu.kz, [b]durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

We consider the degenerate parabolic equation

$$\Diamond_a u(x,t) := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a(t)\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

in a domain $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, where Ω is bounded in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with smooth boundary $\partial\Omega$, f is some function. $n = 1$ case was considered by [1]. Here the coefficient $a \in L_1[0,T]$ is nonnegative and is positive almost everywhere.

The single layer potential for the degenerate parabolic equation (1) is defined by

$$(S\varphi)(x,t) := \int_0^t \int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-\xi, a_1(t)-a_1(\tau))\varphi(\xi,\tau)a(\tau)dS_\xi d\tau, \tag{2}$$

where ε_n solves $\Diamond_a u = \delta$ when $a(t) = 1$ for all t.

Theorem 1. ([2]) Let φ be a continuous function on $\partial\Omega \times [0,T]$. Then, for any $x_0 \in \partial\Omega$ and $t \in (0,T]$, the single layer potential S satisfies the jump relation

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in K}} \big\langle \nabla_x (S\varphi)(x,t), \nu(x_0)\big\rangle = \frac{1}{2}\varphi(x_0,t) \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x_0-\xi, a_1(t)-a_1(\tau))}{\partial\nu(x_0)} \varphi(\xi,\tau)a(\tau)dS_\xi d\tau, \end{aligned}$$

where the limit is taken along the outward normal $\nu(x_0)$ and ∇_x is the usual gradient.

Funding: The author was supported by the grant no. AP09057887 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: degenerate diffusion equation, layer potentials, jump relation.

2010 Mathematics Subject Classification: 47G40, 35K65.

References

[1] Malyshev I. On the parabolic potentials in degenerate-type heat equation, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **4**:2 (1991), 147–160.

[2] Karazym M., Suragan D. Trace formulae of potentials for degenerate parabolic equations, *Differential and Integral Equations*, **33**:7/8 (2020), 337–360.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Existence and uniqueness of a time-dependent inverse source problem for a sub-diffusion equation

Erkinjon KARIMOV[1,a], Bakhodirjon TOSHTEMIROV[2,b]

[1] *Fergana State University, Fergana and V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

[2] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan and Ghent University, Ghent, Belgium*

E-mail: [a] *erkinjon@gmail.com,* [b]*toshtemirovbh@gmail.com*

Let $\mathbb{H}$ be a separable Hilbert space and $\Omega = \{(t, x) : t \in (0, T),\ x \in \mathbb{H}\}$.

We are interested in investigating the time-dependent inverse source problem aimed to determine the unknown couple $\{u(t, x), a(t)\}$ obeying the following system

$$\begin{cases} D_{t+}^{(\alpha,\beta)\mu} u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) = a(t)f(t, x), & (t, x) \in \Omega, \\ \lim\limits_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t, x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{H} \end{cases} \tag{1}$$

where $D_{t+}^{(\alpha,\beta)\mu}$ stands for the bi-ordinal Hilfer fractional derivative of orders $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and type $0 \leq \mu \leq 1$ (see [1]) and $f(x, t)$, $\varphi(x)$ are the given functions, $\mathcal{L}$ is a self-adjoint positive operator on a Hilbert space $\mathbb{H}$. Here, we assume that $\lambda_\xi \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$ which is a positive discret spectrum and $\{e_\xi :\ \xi \in \mathcal{I}\}$ is a system of orthonormal eigenfunctions of the operator $\mathcal{L}$ on $\mathbb{H}$ and also $\mathcal{I} = \mathbb{N}^k$ or $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^k$ is a countable set, for some $k = 1, 2, ...$

The unknown time-dependent source term $a(t)$ will be recovered by means of the following overdetermination condition

$$\int_0^t K(t, z)u(z, x_0)dz = g(t, x_0), \quad (t, x_0) \in \Omega, \tag{2}$$

where $g(t, x_0)$ is the given function. In order to find an explicit solution, we choose the kernel as $K(t, z) = (t - z)^{-\delta}$, $\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta)$ and to formulate the existence theorem, we need to assume for any real positive number s an operator $\mathcal{L}^s$, acting in $\mathbb{H}$ in the following way

$$\mathcal{L}^s f(x) = \sum_{\xi\in\mathcal{I}} \lambda_\xi^s f_\xi e_\xi(x), \quad f_k = (f(x), e_\xi(x))_{\mathcal{H}},$$

It is clear that, the operator $\mathcal{L}^s$ with the domain of definition

$$D(\mathcal{L}^s) = \mathbb{H}^s = \left\{ f \in \mathbb{H} :\ \sum_{\xi\in\mathcal{I}} \lambda_\xi^{2s} |f_\xi|^2 < \infty \right\}.$$

Let us designate the space $C\phi([0, T], \mathbb{H})$ by the following norm

$$\|u\|_{C\phi([0,T],\mathbb{H})} = \max_{t\in[0,T]} \phi(t)\|u\|^2_{\mathbb{H}}$$

where $\phi(t) = t^{2(1-\gamma)}$, $\gamma = \beta + \mu(1 - \beta)$ for $t \in [0, T]$ and $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ is the norm of Hilbert space $\mathbb{H}$.

Definition. [2] Let X be a Hilbert space. The space $C^\delta_\phi([0, T], X)$, $(\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta))$ is the space of all continuous functions $u : [0, T] \to X$ with also continuous $D_{t+}^{(\alpha,\beta)\mu} u : [0, T] \to X$, such that

$$\|u\|_{C^\delta_\phi([0,T],X)} = \|u\|_{C_\phi([0,T],X)} + \|D_{t+}^{(\alpha,\beta)\mu} u\|_{C_\phi([0,T],X)} < \infty.$$

Theorem. *Let $\delta > \frac{1}{2}$, $\varphi(x) \in \mathbb{H}^1$, $g(t, x_0) \in C^1(0, T; \mathbb{H}^1)$ and $f(t, x) \in C(0, T; \mathbb{H})$, then the inverse source Problem (1)-(2) has the unique solution $u(t, x) \in C^\delta_\phi([0, T]; \mathbb{H}) \cap C_\phi([0, T]; \mathbb{H}^1)$ and $a(t) \in C_\phi[0, T]$.*

Funding: The authors were partially supported by the FWO Odysseus 1 grant G.0H94.18N: Analysis and Partial Differential Equations and by the Methusalem programme of the Ghent University Special Research Fund (BOF) (Grant number 01M01021).

Keywords: sub-diffusion equation, positive operator with discrete spectrum, inverse source problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K15.

References

[1] Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators, *Uzbek Mathematical Journal*, **65**:2 (2021), 61–77.

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N.,Torebek B.T. Inverse source problems for positive operators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **27**:6 (2019), 891–911.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Embeddings between spaces with multiweighted derivatives

Zhanar KEULIMZHAYEVA

S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: zh.keulimzhayeva@mail.ru

Let $I = (0, 1)$, n - be a natural number, $\rho_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ be positive functions integrable on $I_\delta = [\delta, 1]$, $\forall \delta \in I$, such that

$$\rho_i^{-1} \equiv \frac{1}{\rho_i} \in L_1(I_\delta),\ \ i = 1, ..., n-1, \quad \rho_n^{-1} \in L_{p'}(I_\delta),\ 1 < p' < \infty.$$

For a function $f : I \to \mathbb{R}$ we assume that

$$D^0_{\bar\rho} f(x) \equiv f(x), D^k_{\bar\rho} f(x) = \rho_k(x) \frac{d}{dx} D^{k-1}_{\bar\rho} f(x), \quad x \in I, \quad k = 1, ..., n.$$

Suppose that the functions $D^k_{\bar\rho} f(x)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ are absolutely continuous on the interval $[\delta, 1]$, $\forall \delta \in I$; then $D^n_{\bar\rho} f(x)$ exists for almost every $x \in I$. We call this operation $D^k_{\bar\rho} f$ the $\bar\rho$- multiweighted derivative of f of order k, $k = 1, ..., n$.

Let $W^n_{p,\bar\rho}(I)$ be the set of all functions that have $\bar\rho$- multiweighted derivatives up to order n, $n \geq 1$, inclusive on the interval I. On the set $W^n_{p,\bar\rho}(I)$, consider the functional

$$\|f\|_{W^n_{p,\bar\rho}(I)} = \left\|D^n_{\bar\rho} f\right\|_{p,I} + \sum_{i=0}^{n-1} \left|D^i_{\bar\rho} f(1)\right|,$$

where $\|\cdot\|_{p,I}$ is the standard norm of the space $L_p(I)$. This functional is well defined and provides a norm on $W^n_{p,\bar\rho}(I)$.

For $0 \leq s \leq x < 1$ and $i, j = 0, 1, ..., n-1$, we define the following function $K_{j,i+1}$:

$$K_{j,i+1}(x, s) = (-1)^{j-i} \int_s^x \rho_j^{-1}(t_j) \int_s^{t_j} \rho_{j-1}^{-1}(t_{j-1}) ... \int_s^{t_{i+2}} \rho_{i+1}^{-1}(t_{i+1}) dt_{i+1} dt_{i+2} ... dt_j.$$

Along with the space $W^n_{p,\bar\rho}(I)$ we will consider the space $W^k_{q,\bar\rho}(\tau_k, I)$ with the norm

$$\|f\|_{W^k_{q,\bar\rho}(\tau_k, I)} = \left\|D^k_{\bar\rho,\tau_k} f\right\|_{q,I} + \sum_{i=1}^{k-1} |D^i_{\bar\rho} f(1)|,$$

where $1 \leq k < n-1$ and $D^k_{\bar\rho,\tau_k} f(x) \equiv \tau_k(x) \frac{d}{dx} D^{k-1}_{\bar\rho} f(x),\ x \in I$.

We will investigate the embeddings

$$W^n_{p,\bar\rho}(I) \hookrightarrow W^k_{q,\bar\rho}(\tau_k, I), \tag{1}$$

that is, the fulfillment of the inequality

$$\|f\|_{W^k_{q,\bar\rho}(\tau_k,I)} \le C\,\|f\|_{W^n_{p,\bar\rho}(I)}\,, \quad \forall f\in W^n_{p,\bar\rho}(I). \tag{2}$$

The best constant C, for which (2) holds, is called the operator norm of the embedding $E : W^n_{p,\bar\rho}(I)\mapsto W^k_{q,\bar\rho}(\tau_k,I)$, and is denoted by $\|E\|$ i.e., we set $C=\|E\|$.

With a strong restriction on the function $\rho_i,\ i=1,2,...,n$, this type of embedding was previously investigated in [1], and the case $\rho_i=t^{\alpha_i}$, $\alpha_i\in R,\ i=1,2,...,n$ has been investigated in [2].

We assume that

$$B_1=\max_{k\le j\le n-1}\left\|\tau_k(\cdot)\rho_k^{-1}(\cdot)K_{j,k+1}(1,\cdot)\right\|_q,$$

$$B_2(z)=\left(\int_z^1\rho_n^{-p'}(x)\left(\int_0^z K^q_{n-1,k+1}(x,s)\tau_k^q(s)\rho_k^{-q}(s)ds\right)^{\frac{p'}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_2=\sup_{0<z<1}B_2(z),\ B=\max\{B_1,B_2,1\}.$$

Theorem 1. *Let be $1<p\le q<\infty$. Then the embedding (1)*

(i) is continuous if and only if $B<\infty$, and $\|E\|\approx B$, where $\|E\|$- is the norm of the embedding operator (1);

(ii) is compact if and only if $B<\infty$ and

$$\lim_{z\to 0}B_2(z)=0.$$

Keywords: function space, weight function, multiweighted derivatives.

References

[1] Baydeldinov L.A. The theory of multiweighted spaces and its application to boundary value problems for singular differential equations, Doctoral dissertation. Almaty (1999), 273 pp.

[2] Kalybay A.A. A new development of Nikol'skii-Lizorkin and Hardy type inequalities with applications, PhD Thesis, Lulea University of Technology (2006), 145 pp.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

An inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with final overdetermination condition

KH. KHOMPYSH[a], A. SHAKIR[b]
M. SHAZYNDAEVA, N.K. NUGYMANOVA

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]konat_k@mail.ru, [b]ajdossakir@gmail.com

In this work, we study the following inverse problem for the system of linear Kelvin-Voigt (Navier-Stokes-Voigt) equations

$$\mathbf{u}_t\,(x,t)-\chi\Delta\mathbf{u}_t\,(x,t)-\nu\Delta\mathbf{u}\,(x,t)+\nabla p\,(x,t)=\mathbf{f}(x)g\,(t)\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0,\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{2}$$

that supplemented with the initial condition

$$\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0\,(x)\,,\ \ x\in\Omega, \tag{3}$$

the boundary condition

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0,\ \ t\in(0,T), \tag{4}$$

and with the final overdetermination conditions

$$\mathbf{u}(x,T) = \mathbf{a}(x), \quad \nabla p(x,T) = \nabla b(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Here, Ω is a bounded domain in R^d $(d = 2,3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, and $\mathbf{u}_0(x)$, $\mathbf{a}(x)$, $\nabla b(x)$, and $g(t)$ are given functions, while the velocity vector field $\mathbf{u}(x,t)$, the pressure $p(x,t)$, and the coefficient of right hand side $\mathbf{f}(x)$ are unknown. The known positive constants ν and χ are the viscosity kinematic and relaxation coefficients, respectively, of the fluid.

Under some conditions on data, we establish the existence and uniqueness of strong solutions of the inverse problem (1)-(5).

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09057950 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Inverse problem, Navier-Stokes-Voigt equation, final overdetermination condition.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Boundary version of the Morera theorem for the Siegel matrix domain of the second order

Zokirbek MATYAKUBOV

Khorezm Mamun Academy, Khiva, Uzbekistan
E-mail: zokirbek.1986@mail.ru

Let $B^{(2)}_{m,n}$ be a matrix ball of the second type and $X^{(2)}_{m,n}$ be its skeleton (Shilov's boundary) (see [1])

$$B^{(2)}_{m,n} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : I - \langle Z, Z \rangle > 0, \quad Z'_v = Z_\nu, \ \nu = 1,2,...,n \right\},$$

$$X^{(2)}_{m,n} = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : \ I - \langle Z, Z \rangle = 0, \quad Z'_v = Z_\nu, \ \nu = 1,2,...,n \right\}.$$

Consider the following unbounded domain (Siegel domain of the second type)

$$D^{(2)}_{m,n} = \left\{ U \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : ImU_1 - \langle U, U \rangle' > 0, \ \ U'_\nu = U_\nu, \ \nu = 1,2,...,n \right\},$$

where $ImU_1 = \frac{1}{2i}(U_1 - U_1^*)$, $\langle U, U \rangle' = U_2 U_2^* + \ldots + U_n U_n^*$, and U_j^* is adjoint and transposed of matrix U_j.

The skeleton of this domain is denoted by $\Gamma^{(2)}_{m,n}$:

$$\Gamma^{(2)}_{m,n} = \left\{ U \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : ImU_1 - \langle U, U \rangle' = 0, \ \ U'_\nu = U_\nu, \ \nu = 1,2,...,n \right\}.$$

Lemma (see [1]). *Transform $U = \Phi(Z)$, where*

$$\begin{array}{ll} U_1 = i(I - Z_1)^{-1}(I + Z_1), & \\ U_k = (I - Z_1)^{-1} Z_k, & k = 2,...,n, \end{array} \tag{1}$$

is a biholomorphic mapping of the domain $B^{(2)}_{m,n}$ to $D^{(2)}_{m,n}$, for this $X^{(2)}_{m,n}$ goes to $\Gamma^{(2)}_{m,n}$.

Consider the following embedding of the circle $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : \ |t| < 1\}$ in the domain $D^{(2)}_{m,n}$:

$$\left\{ U_t \in \mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2} n} : \ \ U_t = \Phi \ (t \Phi^{-1}(\lambda^0)), \ t \in \Delta \right\}, \tag{2}$$

where $\lambda^0 \in \Gamma^{(2)}_{m,n}$ is fixed point. If ψ is an arbitrary automorphism of the domain $D^{(2)}_{m,n}$, then the set (2) under the action of this automorphism will pass into some analytical disk with a boundary on $\Gamma^{(2)}_{m,n}$.

Denote $T = \{t \in \mathbb{C} : \quad |t| = 1\}$.

Theorem. *Let f be a continuous bounded function on $\Gamma^{(2)}_{m,n}$. If the condition is met for the function f*

$$\int_T f(\psi(U_t))dt = 0,$$

for all automorphisms of ψ and fixed $\lambda^0 \in \Gamma^{(2)}_{m,n}$, then the function f holomorphically continues in $D^{(2)}_{m,n}$ to a function of class $H^\infty(D^{(2)}_{m,n})$ (where $H^\infty(D^{(2)}_{m,n})-$ Hardy class) continuous up to $\Gamma^{(2)}_{m,n}$.

Keywords: Matrix ball of the second type, domain of Siegel, transform Kayley, theorem of Morera.

References

[1] Khudayberganov G., Matyakubov Z.K. Integral formulas in Siegel domains, *Uzb. math. journal*, 3 (2013), 116–123.

[2] Koranyi A. The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, *Ann. Math.*, **82**:2 (1965), 332–350.

[3] Khudayberganov G., Matyakubov Z.K. Boundary version of Morera theorem for matrix ball of the second type, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **7**:4 (2014), 466–471.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Inverse problem for a subdiffusion equation with the Caputo derivative on the torus

Okhila MUHIDDINOVA

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: oqila1992@mail.ru

The fractional derivative in the sense of Caputo of order $0 < \rho < 1$ of the function $f(t)$ defined on $[0, \infty)$ has the form (see, for example, [1, p. 14)

$$D_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau} f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\rho}, \quad t > 0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function. If in this definition we interchange differentiation and fractional integration, then we get the definition of the Riemann-Liouville derivative:

$$\partial_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\rho}, \quad t > 0.$$

Note that if $\rho = 1$, then fractional derivatives coincides with the ordinary classical derivative of the first order: $\partial_t f(t) = D_t f(t) = \frac{d}{dt} f(t)$.

Let $\mathbb{T}^N$ be N -dimensional torus: $\mathbb{T}^N = (-\pi, \pi]^N$, $N \geq 1$ and $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ be a homogeneous elliptic symmetric positive differential operator with constant coefficients. By A we denote the operator $A(D)$ defined on 2π-periodic functions in $C^m(\mathbb{R}^N)$. The closure $\hat{A}$ of such an operator in $L_2(\mathbb{T}^N)$ is self-adjoint. The operator $\hat{A}$ has a complete in $L_2(\mathbb{T}^N)$-orthonormal system of eigenfunctions $\{(2\pi)^{-N/2} e^{inx}\}$ corresponding to the eigenvalues $A(n)$, $n \in (\mathbb{Z}^N)$. Therefore, by virtue of the von Neumann theorem, for each $\tau \geq 0$ the operator $\hat{A}^\tau$ acts by the rule $\hat{A}^\tau g(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}^N} A^\tau(n) g_n e^{inx}$,

where the g_n are the Fourier coefficients of the function $g \in L_2(\mathbb{T}^N)$ in the trigonometric system $\{(2\pi)^{-N/2} e^{inx}\}$. The domain of this operator is determined from the condition $\hat{A}^\tau g(x) \in L_2(\mathbb{T}^N)$ and has the form

$$D(\hat{A}^\tau) = \{g \in L_2(\mathbb{T}^N) : \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} A^{2\tau}(n) |g_n|^2 < \infty\}. \tag{1}$$

To define the domain of the operator $\hat{A}^\tau$ in terms of Sobolev spaces, recall the definition of these spaces, a function $g \in L_2(\mathbb{T}^N)$ is said to belong to the Sobolev space $L_2^a(\mathbb{T}^N)$ with a real number $a > 0$, if the norm

$$||g||^2_{L_2^a(\mathbb{T}^N)} = \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^a |g_n|^2. \tag{2}$$

is finite. In the case of noninteger a this space is also referred to as the Liouville space.

It can readily be verified that there exist constants c_1 and c_2 such that one has the estimates

$$c_1(1 + |n|^2)^{\tau m} \le 1 + A^{2\tau}(n) \le c_2(1 + |n|^2)^{\tau m}.$$

Consequently, comparing the expressions (1) and (2), we see that $D(\hat{A}^\tau) = L_2^{\tau m}(\mathbb{T}^N)$.

Problem. Find the functions $\{u(x,t), f(x)\}$ from the class: A function $f(x) \in C(T^N)$ and a function $u(x,t) \in C(T^N \times [0,T])$ with the properties $D_t^\rho u(x,t), A(x,D)u(x,t) \in C(T^N \times (0,T])$ that satisfies the following differential equation $(0 < \rho \le 1)$

$$D_t^\rho u(x,t) + A(D)u(x,t) = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^N, \quad t > 0; \tag{3}$$

and the initial

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{T}^N; \tag{4}$$

and additional conditions

$$u(x,T) = \Psi(x), \quad x \in \mathbb{T}^N. \tag{5}$$

Instead of the boundary conditions we will require that the desired functions $u(x,t)$ and $f(x)$ are 2π-periodic in each variable x_j. We will also assume that the given functions $\varphi(x)$ and $\Psi(x)$ are 2π-periodic in each variable x_j as well.

Now let us state the following theorem on the existence of a solution of the inverse problem on the torus.

Theorem. *Let $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{T}^N)$ and $\Psi \in L_2^{\tau+m}(\mathbb{T}^N)$, where $\tau > \frac{N}{2}$. Then there exists a unique periodic solution $\{u(x,t), f(x)\}$ of the inverse problem (3) - (5) which can be represented in the form of the series*

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \left[\varphi_n E_{\rho,\,1}(-A(n)t^\rho) + f_n t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-A(n)t^\rho)\right] e^{inx},$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} f_n e^{inx},$$

which converge absolutely and uniformly in $x \in \mathbb{T}^N$ for all $t \in (0,T]$, where

$$f_n = \frac{\Psi_n}{T^\rho E_{\rho,\rho+1}(-A(n)T^\rho)} - \frac{\varphi_n E_{\rho,\,1}(-A(n)T^\rho)}{T^\rho E_{\rho,\rho+1}(-A(n)T^\rho)},$$

and φ_n and Ψ_n are the Fourier coefficients of the functions $\varphi(x)$ and $\Psi(x)$ respectively.

Similar problems, in the case when the operator $A(D)$ is an arbitrary elliptic operator with discrete spectrum and conditions for $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ are assumed to be defined in the operator's domain, were previously studied in the fundamental works of [2]. So, in the paper [3], authors studied the inverse problem of determining the right-hand side of the subdiffusion equation with Riemann–Liouville fractional derivatives whose elliptic part is an elliptic operator of an arbitrary order defined in bounded domain with sufficiently smooth boundary.

References

[1] Pskhu A.V. *Fractional Partial Differential Equations*, Nauka, Moscow (2005).

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.T. Inverse source problems for positive oper- ators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **27**:6 (2019), 891–911.

[3] Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T. Inverse Problem of Determining the Heat Source Density for the Subdiffusion Equation, *Differential Equations*, **56**:12 (2020), 1550–1563.

— ⁂ —

Weighted Hardy inequality on topological measure spaces

Kairat MYNBAEV

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: kairat_mynbayev@yahoo.com

We give necessary and sufficient conditions on non-negative weights u, v in the inequality

$$\left(\int_{\Omega} u(x)|Tf(x)|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p v(x) d\nu(x)\right)^{1/p}, \tag{1}$$

where: a) the integral operator T is a Hardy type operator associated with a family of open subsets $\Omega(t)$ of an open set Ω in a Hausdorff topological space X, b) μ, ν are σ-additive Borel measures, c) the weights u, v are positive and finite almost everywhere on Ω and d) $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$. Unlike previous multidimensional results, we do not require a metric or a polar decomposition in X.

A one-dimensional Hardy inequality

$$\left[\int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x f\right)^q dx\right]^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f^p v\right)^{1/p}$$

has been studied in detail, see the history in [1]. The multidimensional case has been considered in [2-7], among others. For the more difficult case $p > q$ the latest results are contained in [6,7]. The authors of the last two papers required the existence of the polar decomposition.

We obtain necessary and sufficient conditions for both cases $p \leq q$ and $p > q$ without requiring the polar decomposition. We consider integration over expanding subsets $\Omega(t)$ of an arbitrary open set Ω in a Hausdorff topological space X. Neither $\Omega(t)$ nor their complements $\Omega \backslash \Omega(t)$ need to be connected and there are no requirements on the shape of $\Omega(t)$ (like convexity) when X is a linear space. The results from [5-7] are special cases of ours. Product weights and domains that do not satisfy the monotonicity condition (see (2) below) are not included. [5-7] list a number of applications of their results (to homogeneous groups, hyperbolic spaces, Cartan-Hadamard manifolds, and connected Lie groups). All of them rely on the existence of the polar decomposition and can be obtained from our results.

Let Ω be an open subset of a Hausdorff topological space X with σ-additive measures μ, ν. The measures are defined on a σ-algebra $\mathfrak{M}$ that contains the Borel-measurable sets.

Assumption. $\{\Omega(t) : t \geq 0\}$ is a one-parametric family of open subsets of Ω indexed by $t \geq 0$ which 1) satisfy monotonicity

$$\text{for } t_1 < t_2,\ \Omega(t_1) \text{ is a proper subset of } \Omega(t_2) \tag{2}$$

2) start at the empty set and eventually cover almost all Ω:

$$\Omega(0) = \cap_{t>0}\Omega(t) = \varnothing,\ \mu\left(\Omega \backslash \cup_{t>0} \Omega(t)\right) = 0.$$

3) Denote $\omega(t) = \overline{\Omega(t)} \cap \overline{(\Omega \backslash \Omega(t))}$ the boundary of $\Omega(t)$ in the relative topology. We require the boundaries to be disjoint and cover almost all Ω:

$$\omega(t_1) \cap \omega(t_2) = \varnothing,\ t_1 \neq t_2,\ \mu(\Omega \backslash \cup_{t>0} \omega(t)) = 0.$$

4) Further, we assume that the boundaries are thin in the sense that

$$\nu(\omega(t)) = 0 \text{ for all } t > 0.$$

This implies that for μ-almost each $y \in \Omega$ there exists a unique $\tau(y) > 0$ such that $y \in \omega(\tau(y))$, which allows us to define

$$Tf(y) = \int_{\Omega(\tau(y))} f d\nu,\ y \in \Omega, \tag{3}$$

for any non-negative $\mathfrak{M}$-measurable f. (A more general definition of a Hardy type operator is given in [2]. That definition is more difficult to use.) On the set $\Omega_0 \subset \Omega$ of those y for which $\tau(y)$ is not defined we can put $\tau(\Omega_0) = \emptyset$. Passing to a different parametrization, if necessary, we can assume that $\mu\left(\Omega \setminus \cup_{t \le N} \omega(t)\right) > 0$ for any $N < \infty$. This assumption and the fact that $\omega(t) \neq \varnothing,\ t > 0$, lead to $\tau(\Omega) = (0, \infty)$.

Let C denote the least constant in (1) with T defined in (3). Put

$$\Psi(t) = \left(\int_{\Omega \setminus \Omega(t)} u d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega(t)} v^{-p'/p} d\nu\right)^{1/p'}.$$

Theorem 1. *If $1 < p \le q < \infty$, then $A \le C \le 4A$ where $A = \sup_{t>0} \Psi(t)$.*

Let $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ and put $1/r = 1/q - 1/p$,

$$\Phi(y) = \left(\int_{\Omega \setminus \Omega(\tau(y))} u d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega(\tau(y))} v^{-p'/p} d\nu\right)^{1/p'}.$$

Theorem 2. *If $1 < p < \infty$ and $0 < q < p$, then $c_1 B \le C \le c_2 B$, where $B = \left(\int_\Omega \Phi^r u d\mu\right)^{1/r}$ and the constants c_1, c_2 do not depend on the weights.*

Keywords: weighted Hardy inequality, topological space, measure space.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 46E35.

References

[1] Kufner A., Persson L.-E., Samko N. *Weighted inequalities of Hardy type. Second edition*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ (2017).

[2] Edmunds D.E., Kokilashvili V., Meskhi A. *Bounded and compact integral operators. Mathematics and its Applications, 543*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).

[3] Drábek P., Heinig H.P., Kufner A. Higher-dimensional Hardy inequality, in: *General Inequalities. 7 (Oberwolfach 1995), Internat. Ser. Numer. Math. 123*, Birkhauser, Basel (1997), 3–16.

[4] Stepanov V.D., Shambilova G.E. On Two-Dimensional Bilinear Inequalities with Rectangular Hardy Operators in Weighted Lebesgue Spaces. (Russian), *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **312** (2021), 251–258.

[5] Ruzhansky M., Verma D. Hardy inequalities on metric measure spaces, *Proc. R. Soc. A*, **475** (2019), 20180310.

[6] Ruzhansky M., Verma D. Hardy inequalities on metric measure spaces, II: The case $p > q$, *Proc. R. Soc. A.*, **477** (2021), 20210136.

[7] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Hardy, Hardy-Sobolev and Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on general Lie groups, *arXiv:1810.08845v2* (2019), 21 Feb.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

On one approach to general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation

Sandugash MYNBAYEVA[1,2,a], Sayakhat KARAKENOVA[1,3,b]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2] K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
[3] Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]mynbaevast80@gmail.com, [b]sayakhat.karakenova05@gmail.com

We consider the Fredholm integro-differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + f_0(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

where the $n \times n$ matrices $A(t)$ and $K(t,\tau)$ are continuous on $[0,T]$ and $[0,T]\times[0,T]$, respectively; the vector functions $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ and $f_0 : [0,T] \to R^n$ are continuous; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

The concept of a general solution is important in the study and solution of various problems for differential and integro-differential equations. The use of a general solution makes it possible to reduce the solvability of the boundary value problem to the solvability of a system of algebraic equations in arbitrary constants. However, there are some linear Fredholm integro-differential equations that do not have solutions [1, 2], so the classical general solution does not exist for all integro-differential equations. In [3], D.S. Dzhumabaev introduced a novel approach to the concept of the general solution to linear Fredholm integro-differential equations. It was shown that the new general solution exists for any linear integro-differential equation. The application of this solution made it possible to establish solvability criteria for linear inhomogeneous Fredholm integro-differential equations and boundary value problems for such equations.

The new general solution was also introduced for linear loaded ordinary differential equations [4], nonlinear ordinary differential equations [5], and Fredholm integro-differential equations with nonlinear differential term [6].

In the communication, the concept of the new general solution is extend to equation (1).

By Dzhumabaev parametrization method equation (1) is reduced to the special Cauchy problem for the system of integro-differential equation:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)f(\tau, u_j(\tau) + \lambda_j)d\tau + f_0(t), t \in [t_{r-1}, t_r), \tag{2}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}. \tag{3}$$

Sufficient conditions for the existence of the unique solution to the special Cauchy problem (2), (3) are established. The solution to the special Cauchy problem is used to construct a new general solution to the Fredholm integro-differential equation. We investigate some properties of the new general solution and apply it to boundary value problems.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258829 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: nonlinear Fredholm integro-differential equations, special Cauchy problem, general solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15, 34G20, 45J05, 47G20.

References

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).

[2] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **294** (2016), 342–357.

[3] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79–108.

[4] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **41**:4 (2018), 1439–1462.

[5] Dzhumabaev D.S. New general solutions to ordinary differential equations and methods for solving boundary value problems, *Ukrainian Math. J.*, **71**:7 (2019), 884–905.

[6] Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation, *Eurasian Math. J.*, **10**: 4 (2019), 24–33.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Oscillatory and spectral properties of a class of fourth-order differential operators and a weighted differential inequality

Ryskul OINAROV, KALYBAY A.A., SULTANAEV Ya.T.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: o_ryskul@mail.ru

Let $I = (0,\infty)$ and $1 < p,q < \infty$. Let r, υ and u be nonnegative functions such that r is continuously differentiable, u and υ are locally summable on the interval I. In addition, let $r^{-1} \equiv \frac{1}{r} \in L_1^{loc}(I)$, $\upsilon^{-p'} \in L_1^{loc}(I)$ and $p' = \frac{p}{p-1}$.

Let $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$ and $C_0^\infty(I)$ is the set of compactly supported functions infinitely time continuously differentiable on I.

Assume that $D_r^1 f(t) = r(t)\frac{df(t)}{dt}$.

We will investigate the oscillatory properties of the differential equation

$$D_r^2\big(\upsilon(t)D_r^2 y(t)\big) - u(t)y(t) = 0, t > 0, \tag{1}$$

and the spectral properties of the differential operator L generated by the differential expression

$$Ly(t) = \frac{1}{u(t)} D_r^2\big(\upsilon(t)D^2 y(t)\big). \tag{2}$$

using the results on the inequality

$$\left(\int_0^\infty \big|u(t)f(t)\big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty \big|\upsilon(t)D_r^2 f(t)\big|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, f \in C_0^\infty(I), \tag{3}$$

Relations (3), (1) and (2) for $r \equiv 1$ have the forms

$$\left(\int_0^\infty \big|u(t)f(t)\big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty \big|\upsilon(t)f''(t)\big|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$(\upsilon(t)y''(t))'' - u(t)y(t) = 0,$$

$$Ly(t) = \frac{1}{u(t)}(\upsilon(t)y''(t))'',$$

respectively.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08856100 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] Kalybay A.A., Oinarov R. and Sultanaev Ya.T. Weighted Second-Order Differential Inequality on Set of Compactly Supported Functions and Its Applications, *Mathematics*, **9** (2021), 2830. https:// doi.org/ 10.3390/ math9212830.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the best constant in hypoelliptic Gagliardo-Nirenberg inequality

Meruert SEITKAN

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: 211101013@stu.sdu.edu.kz

In this talk, we investigate the best constant in the following hypoelliptic Gagliardo-Nirenberg inequality ([1, Theorem 3.2]): Let $\mathbb{G}$ be a graded Lie group of homogeneous dimension Q and let $\mathcal{R}$ be a positive Rockland operator of homogeneous degree ν. Let $a > 0$, $1 < p < \frac{Q}{a}$ and $p \leq q \leq \frac{pQ}{Q-ap}$. Then there exists a positive constant C such that

$$\int_{\mathbb{G}} |u(x)|^q dx \leq C \left(\int_{\mathbb{G}} |\mathcal{R}^{\frac{a}{\nu}} u(x)|^p dx \right)^{\frac{Q(q-p)}{ap^2}} \left(\int_{\mathbb{G}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{apq-Q(q-p)}{ap^2}} \tag{1}$$

holds for all $u \in L^p_a(\mathbb{G})$.

We understand by a Rockland operator any left-invariant homogeneous hypoelliptic differential operator on $\mathbb{G}$.

In [1] and [2] the best constant in the Gagliardo-Nirenberg inequality and its critical version ($a = Q/p$) and the Sobolev inequality with inhomogeneous norm were expressed in the variational form as well as in terms of the ground state solutions of the nonlinear Schrödinger equation.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Keywords: Gagliardo-Nirenberg inequality, Rockland operator, best constant.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80.

References

[1] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Yessirkegenov N. Best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on graded groups and ground states for higher order nonlinear subelliptic equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **59** (2020), Art. No. 175.

[2] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Critical Gagliardo-Nirenberg, Trudinger, Brezis-Gallouet-Wainger inequalities on graded groups and ground states, *Commun. Contemp. Math.* (2021), Art. No. 2150061. DOI: 10.1142/S0219199721500619

— ⁎ ⁎ ⁎ —

On critical cases of Sobolev's inequalities on noncompact connected Lie groups

Yerkin SHAIMERDENOV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: yerkin.shaimerdenov@sdu.edu.kz

Let $\mathbb{G}$ be graded Lie group of homogeneous dimension Q and $\mathcal{R}$ be a positive Rockland operator of homogeneous degree ν. Following [1] recall the following critical Gagliardo-Nirenberg inequality on $\mathbb{G}$: Let $1 < p < \infty$. Then there exists a positive constant C_1 depending only on p and Q such that

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{G})} \leq C_1 q^{1-1/p} \|\mathcal{R}^{\frac{Q}{\nu p}} f\|^{1-p/q}_{L^p(\mathbb{G})} \|f\|^{p/q}_{L^p(\mathbb{G})} \tag{1}$$

holds for any q with $p \leq q < \infty$ and for any function f from the Sobolev space $L^p_{Q/p}(\mathbb{G})$ on graded group $\mathbb{G}$.

Let us also recall from [1] the hypoelliptic Trudinger inequality: Let $1 < p < \infty$. Then there exist positive constants α and C_2 such that

$$\int_{\mathbb{G}} (\exp(\alpha |f(x)|^{p'}) - \sum_{0 \leq k < p-1,\ k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} (\alpha |f(x)|^{p'})^k) dx \leq C_2 \|f\|^p_{L^p(\mathbb{G})} \tag{2}$$

holds for any function $f \in L^p_{Q/p}(\mathbb{G})$ with $\|\mathcal{R}^{\frac{Q}{\nu p}} f\|_{L^p(\mathbb{G})} \le 1$, where $1/p + 1/p' = 1$.

In [1] it was shown that the inequalities (1) and (2) are equivalent and given the relation between their best constants.

In this talk we discuss similar investigation on more general noncompact connected Lie group.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (Suleyman Demirel University, Kazakhstan).

Keywords: Trudinger inequality, Gagliardo-Nirenberg inequality, best constant, noncompact connected Lie group.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 43A80, 46E35.

References

[1] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Critical Gagliardo-Nirenberg, Trudinger, Brezis-Gallouet-Wainger inequalities on graded groups and ground states, *Commun. Contemp. Math.* (2021), Art. No. 2150061. DOI: 10.1142/S0219199721500619

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Centre of tensor product of Banach algebras

Bharat TALWAR[1,a], Ranjana JAIN[2,b]

[1] *Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *University of Delhi, Delhi, India*
E-mail: [a]*bharat.talwar@nu.edu.kz,* [b]*rjain@maths.du.ac.in*

For a locally compact group G and weight w on G, we study the centre of Banach space projective tensor product $L^1_w(G) \otimes^\gamma A$ of Banach algebras $L^1_w(G)$ and A. If $\mathcal{Z}(B)$ denotes the centre of a Banach algebra B, then we prove that under certain conditions the following holds.

$$\mathcal{Z}(L^1_w(G) \otimes^\gamma A) \cong \mathcal{Z}(L^1_w(G)) \otimes^\gamma \mathcal{Z}(A). \tag{1}$$

The main result of this paper is following.

Theorem 1. *Let G be an* [**IN**]*-group with a weight w which is either constant on conjugacy classes or satisfies $w \ge 1$, and A be a Banach algebra with bounded $\mathcal{Z}(A)$-approximate identity. Then (1) holds.*

Funding: Bharat Talwar was supported by Senior Research Fellowship of Counsil of Scientific and Industrial Research.

Keywords: vector-valued Beurling algebras, Banach space projective tensor product, center, weight.

2010 Mathematics Subject Classification: 46M05, 22D15, 43A20.

This talk is based on a published work by Dr. Bharat Talwar and Dr. Ranjana Jain.

References

[1] Talwar B., Jain R. Centre of Banach algebra valued Beurling algebras, to appear in *Bull. Aust. Math. Soc.*

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Φ-estimate of the Hilbert operator for bounded and summable functions

Kanat TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: tulenov@math.kz

In this talk we deal with Φ-estimate of the Hilbert operator for bounded and summable functions. Similar problems were studied in [1] by martingale methods. We present its new and considerably shorter, and simpler proof. This is the second part of the recently accepted (to Studia Math.) joint paper with australian mathematicians where authors obtain a weak type (1,1) estimate for a higher dimensional version of the Hilbert operator answering a recent problem by A. Osękowski [1].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP09258335 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Φ-estimate, Hilbert operator, summable function, bounded function.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B10, 47B38, 26B15, 46A16, 47B01.

References

[1] Osękowski A. Inequalities for Hilbert operator and its extensions: The probabilistic approach, *Ann. Probab.*, **45**:1 (2017), 535–563.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

On bounded solutions of ordinary differential equations with singularities

Roza UTESHOVA[1,a], Yelena KOKOTOVA[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]*ruteshova1@gmail.com*, [b]*kokotovae@mail.ru*

We consider the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

where $A(t)$ and $f(t)$ are continuous on $(0,T]$. We assume that Eq. (1) has a singularity at $t = 0$ in the sense that the function $\alpha(t) = \|A(t\|$ satisfies the condition $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{\delta}^{T} \alpha(t)dt = \infty$.

Let $C_{1/\alpha}((0,T], \mathbb{R}^n)$ denote the space of continuous functions $f : (0,T] \to \mathbb{R}^n$ that are bounded with the weight function $1/\alpha(t)$, and let the norm of this space be defined as $\|f\|_{1/\alpha} = \sup\limits_{t\in(0,T)} \left\|\frac{f(t)}{\alpha(t)}\right\|$.

The problem of finding a bounded on $(0,T]$ solution of Eq. (1) with $f(t) \in C_{1/\alpha}((0,T], \mathbb{R}^n)$ will be referred to as *Problem* 1_α.

In [1], Problem 1_α was studied by the parameterization method [2] with a nonuniform partitioning of the domain that takes into account the values of the equation coefficients at the partition points. The necessary and sufficient conditions for the well-posedness of Problem 1_α were derived in terms of a two-sided infinite block band matrix constructed through the equation coefficients.

The problem of finding an approximate solution to Problem 1_α was studied in [3]. We will refer to this problem to as *Problem* 2_α. Given $\varepsilon > 0$, it is required to determine a number $T_0 \in (0,T)$, real $n \times n$ matrices B, C and an n-vector d such that the solution $\overline{x}(t)$ to the two-point boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (T_1, T_2), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$Bx(T_1) + Cx(T) = d, \tag{3}$$

satisfies the inequality $\max_{t\in[T_0,T]} \|\overline{x}(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$, where $x^*(t)$ is a solution to Problem 1_α.

Problem 2_α is considered under the following assumptions:

(i) The matrix $A_0 = \lim_{\delta\to 0+0} \frac{A(t)}{\alpha(t)}$ is constant and its eigenvalues have nonzero real parts;

(ii) The vector function $f_0 = \lim_{\delta\to 0+0} \frac{f(t)}{\alpha(t)}$ is constant.

We take a new approach to the concept of general solution to Eq. (1) proposed by Dzhumabaev (see [4]). This approach allows us to develop an algorithm for solving Problem 2_α and establish a mutual relationship between the well-posedness of the original problem and that of approximating problems. A numerical example illustrating the performance of the algorithm is provided.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08855726 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: linear ordinary differential equation, singularity, approximation, bounded solution, general solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34A45, 34K28.

References

[1] Kokotova Ye.V. Bounded solutions of linear systems of ordinary differential equations with unbounded coefficients, *Mathematical Journal*, **5**:1 (2005), 67–74 (in Russian).

[2] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[3] Kokotova Ye.V. Approximation of a bounded solution of systems of linear ordinary differential equations with unbounded coefficients, *Mathematical Journal*, **5**:3 (2005), 40–43 (in Russian).

[4] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79–108.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Best constants in hypoelliptic Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities and ground states

Nurgissa YESSIRKEGENOV[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*nurgissa.yessirkegenov@gmail.com*

In this talk we investigate the best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on general graded Lie groups, which includes the cases of $\mathbb{R}^n$, Heisenberg, and general stratified Lie groups. The best constants are expressed in the variational form as well as in terms of the ground state solutions of the corresponding nonlinear subelliptic equations. If time permits, we will also discuss versions of the above inequalities in the settings of general noncompact Lie groups.

The talk is based on the papers [1]-[2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058474).

Keywords: Gagliardo-Nirenberg inequality, Sobolev inequality, Rockland operator, graded Lie group.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J35, 35G20, 22E30, 43A80.

References

[1] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Critical Gagliardo-Nirenberg, Trudinger, Brezis-Gallouet-Wainger inequalities on graded groups and ground states, *Commun. Contemp. Math.* (2021), Art. No. 2150061. DOI: 10.1142/S0219199721500619

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Yessirkegenov N. Best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on graded groups and ground states for higher order nonlinear subelliptic equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **59** (2020), Art. No. 175.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

On iterated discrete Hardy type inequalities for a class of matrix operators

Nazerke ZHANGABERGENOVA

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: zhanabergenova.ns@gmail.com,

Let $0 < q, p, r < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Let $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $w = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ be weight sequences, i.e., positive sequences of real numbers. We denote by $l_{p,v}$ the space of sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ of real numbers such that

$$\|vf\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

For any $f \in l_{p,v}$ we consider the following discrete Hardy-type inequality

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} \left| w_k \sum_{i=1}^{k} a_{k,i} f_i \right|^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

where C is a positive constant independent of f and $(a_{k,i})$, $k \geq i \geq 1$, is a matrix, whose entries $a_{k,i} \geq 0$ are non-decreasing in k and non-increasing in i, satisfying the discrete Oinarov condition stating that there exists a constant $d \geq 1$ such that

$$\frac{1}{d}(a_{k,j} + a_{j,i}) \leq a_{k,i} \leq d(a_{k,j} + a_{j,i}), \quad k \geq j \geq i \geq 1. \tag{3}$$

We also need the following quantities: $J_{r,p}^{+}(\alpha, \beta) = \sup\limits_{f \geq 0} \dfrac{\left(\sum\limits_{k=\alpha}^{\beta} \left| w_k \sum\limits_{i=\alpha}^{k} a_{k,i} f_i \right|^r\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum\limits_{i=\alpha}^{\beta} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$.

The aim of this paper is to characterize inequalities (1) and its dual version for the case $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$. The case when $a_{k,i} = 1$ for all $k \geq i \geq 1$ was studied in the works [1-2] for the following relations between p, q and r: (1) $1 < p \leq q < \infty$, $0 < r < \infty$ and the dual version $0 < r < q < p < \infty$, $p > 1$. Characterizations of the integral versions of inequalities (1) and (2) are found in paper [3].

Theorem 1. *Let $1 < p \leq q < \infty$ and $0 < r < \infty$. Let the entries of the matrix $(a_{k,i})$ satisfy condition (3). Then inequality (1) holds if and only if $A^{+} = \max\{A_1^{+}, A_2^{+}, A_3^{+}\} < \infty$, where*

$$A_1^{+} = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} J_{r,p}^{+}(1, j),$$

$$A_2^{+} = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^{n} a_{k,j}^r w_k^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{j} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_3^{+} = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=j}^{n} w_k^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j,i}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Moreover, $C \approx A^+$*, where* C *is the best constant in (1).*

Theorem 2. *Let* $0 < p \le 1$, $p \le q < \infty$ *and* $0 < r < \infty$. *Let the entries of the matrix* $(a_{k,i})$ *be non-decreasing in* k *and non-increasing in* i. *Then inequality (1) holds if and only if* $D^+ = \max\{D_1^+, D_2^+\} < \infty$*, where*

$$D_1^+ = \sup_{j\ge 1}\left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} J^+_{r,p}(1,j),$$

$$D_2^+ = \sup_{j\ge 1}\left(\sum_{n=j}^{\infty} u_n^q\left(\sum_{k=j}^{n} a_{k,j}^r w_k^r\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1}.$$

Moreover, $C \approx D^+$*, where* C *is the best constant in (1).*

Remark. The statements of the main results are also given for dual version of the inequalities (1).

These results are joint work with A. Kalybay and A. Temirkhanova.

Funding: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan in the area "Scientific research in the field of natural sciences" [grant number AP09259084].

Keywords: Inequality, Hardy-type operator, weights, weighted sequence space, characterizations.

References

[1] Oinarov R., Omarbayeva B.K., Temirkhanova A.M. Discrete iterated Hardy-type inequalities with three weights, *Vestnik KazNU, math. mech. comp. sci. ser.,* **105**:1 (2020), 19–29.

[2] Omarbayeva B.K., Persson L.-E., Temirkhanova A.M. Weighted iterated discrete Hardy-type inequalities, *Math. Ineq. Appl.,* **23**:3 (2020), 943–959.

[3] Kalybay A. Weighted estimates for a class of quasilinear integral operators, *Siberian Math. J.*, **60**:2 (2019), 291–303.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Председатели: профессор, д.ф.-.м.н., академик МАНЕ Алексеева Людмила Алексеевна, профессор, д.ф.-.м.н., академик НАН РК Харин Станислав Николаевич, и.о. профессора, доцент Бекетаева Асель Орозалиевна.

Секретарь: Адил Жанар Торебековна.

О точных решениях системы уравнений Максвелла

АБЕНОВ М.М.

КазНУ им.Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: abenov60@gmail.com

Как известно [1], основные уравнения электродинамики в теоретической физике даются в виде системы уравнений Максвелла следующего вида:

$$
\begin{gathered}
div(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho, \\
rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}, \\
div(\mu\vec{H}) = 0, \\
rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t} + \frac{4\pi\vec{J}}{c},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где: c - скорость света, $\varepsilon > 0, \mu > 0$ – известные, безразмерные постоянные, $\vec{E}(t,x,y,z), \vec{H}, \vec{J}$ – неизвестные векторы напряженностей электрического (магнитного) полей и плотности тока насыщения, $\rho(t,x,y,z)$ – неизвестная функция плотности электрических зарядов. Система уравнений (1) считается ключевой в теоретической физике. На сегодняшний день известно лишь считанное число точных решений этой системы. К примеру, движение плоской электромагнитной волны описано в различных учебниках по теоретической физике.

В данной работе мы покажем, что методы четырехмерного анализа, изложенные в работе [2], дают возможность описания целого континуума точных решений этой системы в некоторой области $G \subset R^4$.

Определение. Четырех - потенциалом электромагнитного поля называется вектор – функция $P_{4d} = (\theta(t,x,y,z), u, v, w) = (\theta, \vec{\varphi})$, удовлетворяющая следующему уравнению неразрывности электромагнитного поля:

$$
\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}
$$

Теорема 1. *Уравнение неразрывности (2) имеет континуум точных решений вида:*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\mu\theta(t,x,y,z) &= \beta_1 u_1(\alpha_1 ct, \alpha_2 x, \alpha_3 y, \alpha_4 z), \\
u(t,x,y,z) &= \beta_2 u_2(\alpha_1 ct, \alpha_2 x, \alpha_3 y, \alpha_4 z), \\
v(t,x,y,z) &= \beta_3 u_3(\alpha_1 ct, \alpha_2 x, \alpha_3 y, \alpha_4 z), \\
w(t,x,y,z) &= \beta_4 u_4(\alpha_1 ct, \alpha_2 x, \alpha_3 y, \alpha_4 z),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где:$\alpha_k, \beta_k, k = 1,4$ – произвольные скаляры, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k\beta_k = 0$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – произвольная четырехмерная регулярная функция, заданная в области $G \subset R^4$. [2]

Исследования показали, что каждому четырех – потенциалу, определяемому формулами (3), можно сопоставить ровно одно, точное решение исходной системы Максвелла (1).

Теорема 2. *Каждому четырех - потенциалу электромагнитного поля $P_{4d} = (\theta, \vec{\varphi})$ соответствует точное решение системы Максвелла следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\vec{E} = \nabla\theta + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}, \\
\vec{H} = -\frac{1}{\mu} rot\vec{\varphi}, \\
\rho = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\Delta\theta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right),
\end{gathered} \tag{4}
$$

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi\mu}\left(\Delta\vec{\varphi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2}\right).$$

Формулы (3)-(4) дают континуум точных решений системы уравнений Максвелла. Можно показать, что в них содержатся все ныне известные решения этой системы.

Литература

[1] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1981).

[2] Абенов М.М. *Четырехмерная математика:методы и приложения*, КазНУ, Алматы (2019).

— ⁂ —

Задача Дирихле на звездном графе для волнового уравнения

АЛЕКСЕЕВА Л.А.[1,2,a], АРЕПОВА Г.Д.[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделировани, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им.Аль–Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*alexeeva@math.kz,* [b]*arepovag@mail.ru*

Пусть $G(V,E)$ - это ориентированный звездный граф с вершинами $V(a_0,a_1,a_2,...a_n)$ и ребрами $E(e_1,e_2,...e_m)$. Общая вершина a_0. Рассмотрим волновые уравнения на этом звездном графе $G(V,E)$:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}t - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = G_i(x,t), 0 < x < l_i, t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i(x,0) = \upsilon_i^0(x),\ 0 \le x \le l_i, \tag{2}$$

граничными условиями:

$$u_i(0,t) = \omega_i^1(t), \quad u_i(l_i,t) = \omega_i^2(t),\ t \ge 0, \tag{3}$$

и условиям непрерывности

$$u_i(0,t) = u_j(0,t), \quad \forall i,j. \tag{3}$$

Теорема 1. *Обобщенное решение краевой задачи на каждом элементе графа имеет вид суммы полных и неполных сверток:*

$$\hat{u} = p_1(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x,t) - p_0(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x-l,t) +$$

$$+ w_1(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x\hat{U}(x,t) - w_0(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x\hat{U}(x-l,t) +$$

$$-c^{-2}\left\{v_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \hat{U}(x) + u_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \partial_t\hat{U}\right\}$$

где $H(t)$ - функция Хевисайда, $\hat{U}\,(x,t) = -\frac{c}{2}H\,(ct-|x|)$ - функция Римана - фундаментальное решение волнового уравнения [2] , $p_j = \frac{\partial u}{\partial x}$ *на соответствующем конце элемента* (j=0,1)

Используя свойства преобразования Фурье по времени сверток и свойства производной трансформанты Фурье функции Римана в нуле, построена трансформанта Фурье обобщенного решения и линейные алгебраические уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Теорема 2. *Трансформанты Фурье по времени граничных значений решения КЗ и его производной удовлетворяют системе уравнений*:

$$\left\{\begin{array}{cc} 1, & 0 \\ -\cos kl, & -k^{-1}\sin kl \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \widehat{w}_1\,(\omega) \\ \widehat{p}_1\,(\omega) \end{array}\right\} +$$

$$+\left\{\begin{array}{cc}\cos kL, & k^{-1}\sin kl\\ 1, & 0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\widehat{w}_0\ (\omega)\\ \widehat{p}_0\ (\omega)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}F_1(\omega)\\ F_2(\omega)\end{array}\right\},$$

$$F_1(\omega)=-0,5c^{-2}k^{-1}\ (v_0(x)-i\omega u_0(x))\,H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\,|x|)\Big|_{x=0},$$

$$F_2(\omega)=-0,5c^{-2}k^{-1}\ (v_0(x)-i\omega u_0(x))\,H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\,|x|)\Big|_{x=l},$$

Построено решение этой системы уравнений для задачи Дирихле, что определяет трансформанту Фурье решения на каждом j-том элементе графа ($l=l_j$). Обратное преобразование Фурье по времени дает аналитическое представления решения в исходном пространстве, аналитическое представление которого будет представлено в докладе.

Представленную модель можно распространить на многозвенный звездный граф, если в рассмотренной модели рассматривать конец каждого из отрезков как узел нового звездного графа.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP09261033).

Литература

[1] Алексеева Л.А. *Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения*, Математический журнал. 2006. Т.6, №1. С.16-32.

[2] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, Москва, Наука (1978).

— ⁂ —

Задача Неймана на звездном графе для волнового уравнения

АРЕПОВА Г.Д.[1,2,a], НУРМУКАНБЕТ Ш.[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Университет им. Сулеймана Демиреля, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*arepovag@mail.ru*, [b]*shattyk.95@list.ru*

Пусть $G(V,E)$ - это ориентированный звездный граф с вершинами $V(a_0,a_1,a_2,...a_n)$ и ребрами $E(e_1,e_2,...e_m)$. Общая вершина a_0. Рассмотрим волновые уравнения на этом звездном графе $G(V,E)$:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}t-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=G_i(x,t),0<x<l_i,t>0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_i(x,0)=u_i^0(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}u_i(x,0)=v_i^0(x),\ 0\le x\le l_i, \tag{2}$$

граничными условиями:

$$u_i(0,t)=p_i^1(t),\quad u_i(l_i,t)=p_i^2(t),\ t\ge 0, \tag{3}$$

и условиям непрерывности

$$u_i(0,t)=u_j(0,t),\quad \forall i,j. \tag{4}$$

Для построения решения краевой задачи перейдем в пространство обобщенных функций [2]. Введем регулярные обобщенные функции, доопределенные нулем вне области решения [1]:

$$\hat{u}_i(x,t)=u_i(x,t)H(x)H(l_i-x)H(t). \tag{5}$$

Применим волновой оператор к функции $\hat{u}_i(x,t)$, тогда правая часть будет выражена через начальные и краевые условия. Используя свойства преобразования Фурье сверток и производных, получим трансформанту Фурье обобщенного решения и линейные алгебраические уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Теорема 1. *Обобщенное решение краевой задачи на каждом элементе графа имеет вид суммы полных и неполных сверток:*

$$\hat{u} = p_1(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x,t) - p_0(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x-l,t)+$$

$$+w_1(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x\hat{U}(x,t) - w_0(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x\hat{U}(x-l,t)+$$

$$-c^{-2}\left\{v_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \hat{U}(x) + u_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \partial_t\hat{U}\right\}$$

где $H(t)$ *- функция Хевисайда,* $\hat{U}\,(x,t) = -\frac{c}{2}H\,(ct-|x|)$ *- функция Римана - фундаментальное решение волнового уравнения* [2] , $\omega_j = u(x,t)$ *на соответствующем конце элемента* (j=0,1).

Теорема 2. *Трансформанты Фурье по времени граничных значений решения КЗ и его производной удовлетворяют системе уравнений*:

$$\left\{\begin{array}{cc} 1, & \cos kl \\ -\cos kl, & 1 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \widehat{w}_1\,(\omega) \\ \widehat{\omega}_2\,(\omega) \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} 2F_1 - k^{-1}\sin(kl)\widehat{p}_2\,(\omega) \\ 2F_1 + k^{-1}\sin(kl)\widehat{p}_1\,(\omega) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_1(\omega) \\ f_2(\omega) \end{array}\right\},$$

$$F_1(\omega) = -0,5c^{-2}k^{-1}\,\left(v_0(x) - i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \sin(k\,|x|)\Big|_{x=0},$$

$$F_2(\omega) = -0,5c^{-2}k^{-1}\,\left(v_0(x) - i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \sin(k\,|x|)\Big|_{x=l},$$

$$\widehat{w}_j\,(\omega) = \frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)}, \Delta(\omega) = 1 + \cos^2(kl),$$

$$\Delta_1 = f_1(\omega) - f_2(\omega)\cos(kl), \Delta_2 = f_2(\omega) + f_1(\omega)\cos(kl).$$

Построено решение этой системы уравнений для задачи Неймана, что определяет трансформанту Фурье решения на каждом j-том элементе графа ($l = l_j$). Обратное преобразование Фурье по времени дает аналитическое представления решения в исходном пространстве.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP09261033).

Литература

[1] Алексеева Л.А. *Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения*, Математический журнал. 2006. Т.6, №1. С.16-32.

[2] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, Москва, Наука (1978).

— ⁂ —

Об устойчивости конечно-разностного аналога задачи интегральной геометрии с весовой функцией

Баканов Г.Б.[a], Мелдебекова С.К.[b]

Международный казахско-турецкий университет имени Х. А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]galitdin.bakanov@ayu.edu.kz, [b]saule.meldebekova@ayu.edu.kz

Задачи интегральной геометрии - интенсивно развивающееся направление современной математики. Она является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа [1]. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электроразведки, акустики и компьютерной томографии [2]-[3].

В данной работе рассматривается конечно-разностный аналог задачи интегральной геометрии с весовой функцией для семейства кривых, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности.

Впервые М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым было показано, что ряд обратных задач для гиперболических уравнений сводятся к задачам интегральной геометрии [4]. Весьма общий результат по единственности и оценкам устойчивости для специального семейства кривых был получен Р.Г. Мухометовым. Эти оценки устойчивости основаны на сведении задачи интегральной геометрии к эквивалентной ей краевой задаче для уравнения в частных производных смешанного типа [5].

В данной работе используя методику, предложенной в работах [6]-[7] получена оценка устойчивости конечно-разностного аналога задачи интегральной геометрии. Эти оценки используются при обосновании сходимости численных методов решения задач геотомографии, медицинской томографии, дефектоскопии и имеет большое практическое значение при решении многомерных обратных задач акустики, сейсморазведки.

Ключевые слова: некорректная задача, интегральная геометрия, семейство кривых, оценка устойчивости, уравнение смешанного типа, конечно-разностная задача, квадратичная форма.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05.

Литература

[1] Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., v. 64. (1986).

[2] Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*, VH Winston & Sons. (1977).

[3] Наттерер Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва (1990).

[4] Лаврентьев М.М., Романов В. Г. О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений, *Докл. АН СССР.*, **171**:6 (1966), 1279–1281.

[5] Мухометов Р. Г. О задаче интегральной геометрии, *Математические проблемы геофизики*, **6** (1976), 212–252.

[6] Кабанихин С. И. , Баканов Г. Б. Об устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии, *Докл. АН СССР.*, **292**:1 (1987), 25–29.

[7] Kabanikhin S. I., Bakanov G. B. On the stability estimation of finite-difference and differential-difference analogues of a two-dimensional integral geometry problem, in: *Computerized Tomography*, VSP, Utrecht (1995), 246–258.

— ⁂ —

Об одной начально краевой задаче для обобщенного интегро дифференциального модифицированного уравнения влагопереноса с оператором Бесселя

БЕШТОКОВ М.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Постановка начально-краевой задачи. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+\int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m \Pi(x,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t), \eta(x) \le c_1,\ |r(x,t), r_x, k_x, p(x,t,\tau)| \le c_2,\ 0 \le m \le 2, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$ – дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $c_i, i = 0,1,2-$ положительные числа, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(x)u_x\big)$.

Заметим, что при $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (2), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(x,t) = 0$ [1], если функции $r(0,t), k(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

Справедлива следующая

Теорема. ([2], [3]). *Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t), \rho(x,t,\tau) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (5), тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка*

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big),$$

где $M-$ положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1)-(4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}-$ дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, $\Big(u,v\Big) = \int_0^l uvdx$, $\Big(u,u\Big) = \|u\|_0^2$, где $u,v-$ заданные на $[0,l]$ функции.

Из априорной оценки следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, уравнение влагопереноса, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G16, 45K05, 35R09, 47G20.

Литература

[1] Самарский А.А. *Теория разностных схем.* Наука, Москва (1983).

[2] Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка *Дифференц. уравнения,* **46**:5 (2010), 658–664.

[3] Бештоков М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто // *Известия вузов. Математика,* **10** (2018), 3–16.

— ⁂ —

Об одной нелокальной краевой задачи для нагруженного обобщенного уравнения конвекции-диффузии с оператором Бесселя

БЕШТОКОВА З.В.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: zarabaeva@yandex.ru

Постановка нелокальной краевой задачи. В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для нагруженного обобщенного уравнения конвекции-диффузии с оператором Бесселя

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)u_x(x,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta(t)\int_0^l x^m u(x,t)dx - \mu(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t) \le c_1,\ |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t), \beta(t)| \le c_2, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau,$ – дробная производная в смысле Капуто порядка α, где $0 < \alpha < 1,\ c_i, i = 0,1,2$ - положительные числа, $0 \le m \le 2$.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (2), равносильному в свою очередь тождеству $k(0,t)u_x(0,t) = 0$ [1, с.173], если функции $r(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

Предполагается, что задача (1) – (4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости.

Справедлива следующая

Теорема. ([2]-[4]). *Пусть выполнены условия (5), тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка*

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\Big),$$

где $M - const > 0$, зависящая только от входных данных задачи (1)-(4),
$D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ *– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.*

Из априорной оценки следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

Ключевые слова: оператор Бесселя, нелокальная задача, условие интегрального вида, априорная оценка, уравнение конвекции-диффузии, уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20.

Литература

[1] Самарский А.А. *Теория разностных схем.* Наука, Москва (1983).

[2] Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка *Дифференц. уравнения*, **46**:5 (2010), 658–664.

[3] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*, **57**:12 (2017), 2021–2041.

[4] Бештоков М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто // *Известия вузов. Математика*, **10** (2018), 3–16.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О решении краевой задачи теплопроводности в вырождающейся области

ГУЛЬМАНОВ Н.К.,   РАМАЗАНОВ М.И.,   ИСКАКОВ С.А.

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com

В работе рассматривается следующая краевая задача теплопроводности в нецилиндрической области $G = \{(r,t) : 0 < r < t,\, t > 0\}$, представляющей собой перевернутый конус:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{1}{r^{2\nu-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2\nu-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\left.\left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{r=t} = g\left(t\right), \tag{2}$$

$$\left. r^{2\nu-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = q\left(t\right), \tag{3}$$

где $0 < \nu < 1$. К этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований. Одномерные по пространственной переменной краевые задачи в вырождающихся областях исследованы, например, в работах [1, 2].

Исследованы вопросы разрешимости сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому редуцирована исходная задача. Для решения полученного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра применяется метод равносильной регуляризации Карлемана–Векуа.

Доказана следующая теорема о разрешимости краевой задачи в весовых пространствах существенно ограниченных функций.

Теорема. *Если выполнены условия* $t^{\nu-\frac{1}{2}} g\left(t\right) \in L_\infty\left(0,\infty\right)$, $t^{1-\nu} q\left(t\right) \in L_\infty\left(0,\infty\right)$ *то граничная задача (1)–(3) имеет решение* $u\left(r,t\right) = \tilde{u}\left(r,t\right) + C,\ \ \tilde{u}\left(r,t\right) \in L_\infty\left(G\right),\ \ C = const.$

Funding: Работа выполнена по гранту Министерства образования и науки Республики Казахстан: AP09259780, 2021-2023.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробная производная, нагрузка, интегральное уравнение, функция типа Райта.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 45D05.

Литература

[1] Kavokin A.A., Kulakhmetova A.T., Shpadi Y.R. *Application of Thermal Potentials to the Solution of the Problem of Heat Conduction in a Region Degenerates at the Initial Moment*, Filomat (2018), C. 825-836.

[2] Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *On a Homogeneous Parabolic Problem in an Infinite Corner Domain*, Filomat (2018), C. 965-974.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Моделирование перехода ньютоновской жидкости в вязкопластичное состояние в трубе

ЖАПБАСБАЕВ У.К.[1,a], ПАХОМОВ М.А.[2,b], БОСИНОВ Д.Ж.[1,c]

[1]*Сатпаев университет, Алматы, Казахстан*
[2]*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]uzak.zh@mail.ru, [b]pakhomov@ngs.ru, [c]dansho.91@mail.ru

Разработана математическая модель движения и теплообмена турбулентной неизотермической Бингамской жидкости [1] через стенку трубы с холодным окружающей средой и выполнено ее численное моделирование. Турбулентность жидкости описывается в рамках изотропной двухпараметрической $k-\tilde{\varepsilon}$ модели [2].

Результаты расчетов неизотермического движения в трубе показывают изменение состояния Бингамской жидкости (парафинистой нефти). Ньютоновские свойства жидкости в начальных сечениях трубы постепенно переходят в вязкопластичное (неньютоновское) состояние за счет теплопередачи между нагретой жидкостью в трубе через ее стенку с холодной окружающей средой. По мере движения по трубы величина продольной скорости в приосевой зоне увеличиваются (до 1.6 раза в сравнении со входным уровнем скорости), а в пристенной зоне наоборот снижается и возрастает высота участка с нулевым значением скорости жидкости. Высота участка с нулевой скоростью движения жидкости в трубе по мере продвижения нефти по трубе постепенно увеличивается и достигает $y/D \approx 0.1$ при $x/D = 15$. Область ядра течения с максимальной скоростью жидкости при этом постепенно уменьшается до $y/D \approx 0.8$ при $x/D = 15$. Наблюдается существенный рост уровня турбулентной кинетической энергии в приосевой зоне трубы (более чем в 1.5 раза) и ее заметное снижение в ее пристенной области. Определена граница области проявления ньютоновских свойств жидкости. Получено, что высота участка с температурой жидкости $T \geq 293\ K$ уменьшается по длине трубы и составляет $y/D = 0.6$ при $x/D = 15$. Показано значительное увеличение средней динамической вязкости и предельного напряжения в пристенной части трубы.

В целом, разработанная модель движения турбулентной неньютоновской жидкости с учетом средней вязкости удовлетворительно согласуется с данными других работ для степенной (n = 0.5-0.75) и Бингамской жидкостей. Для лучшего согласования с данными DNS расчетов по распределению характеристик турбулентного неньютоновского течения необходимо включение дополнительных стоковых и источниковых слагаемых в уравнения переноса осредненных и турбулентных характеристик течения.

Можно отметить, что осредненные характеристики степенной и Бингама изотермических жидкостей в пределах вязкого подслоя практически не отличаются от закономерностей для ньютоновской жидкости. В логарифмическом слое профиль скорости для жидкости Бингама имеет вид качественно подобный таковому для ньютоновской, тогда для степенной жидкости характерным является существенное отклонение от логарифмического профиля. Также характерным является превышение величины продольной скорости для обеих типов неньютоновской жидкостей логарифмического профиля.

Распределения турбулетных характеристик течения, рассчитанных по разработанной модели, также удовлетворительно согласуются с DNS расчетом [3] в вязком подслое и в логарифмической области (отличие не превышает 15%). При этом также, как и для DNS в логарифмическом слое при y_+=10-55 показана дополнительная генерация турбулентности в жидкости Бингама по сравнению с ньютоновской жидкостью (превышение до 10%).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855521 КН МОН РК.

Ключевые слова: неизотермическое турбулентное течение, ньютоновская жидкость, переход вязкопластичное состояние, $k-\tilde{\varepsilon}$ модель.

Литература

[1] Vinay G., and others. *Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows*, J. Non-Newtonian Fluid Mech, 128 (2005) 144-162.

[2] Hwang C.B., Lin C.A. *Improved low-Reynolds-number $k-\tilde{\varepsilon}$ model based on direct simulation data*, AIAA J, 36 (1998) 38 - 43.

[3] Rudman M., Blackburn H.M. *Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method*, Appl. Math. Modelling, 30 (2006) 1229-1248.

— ⁂ —

Математическое моделирование и построение вычислительных алгоритмов задачи фильтрации со структуризацией в слоистой среде

КАЮМОВ Ш.[1,a], МАРДАНОВ А.П.[1,b], ХАИТОВ Т.О. [1,c], КАЮМОВ А.Б.[2,d]

[1] *Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан*

[2] *Университет Инха, Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*kayumovmatemic@gmail.com*, [b]*apardayevich@mail.ru*, [c]*tojiboy.xaitov.77@gmail.ru*, [d]*akayumovb@gmail.ru*

Изучена математическая модель фильтрации структурированных флюидов в двухслойной пласте и разработан численные алгоритмы решения.

Исследователи изучающие процессы линейной и нелинейной фильтрации флюидов в подземных пористых средах исходя из геологические и геометрические характеристики пласта, часто их моделирует как двухслойные, трехслойные и многослойные структуры. Исходя из внутреннего строение и структуры среды, эти слои могут быть гидродинамически связанными или несвязанными. Если пласты связанные, то между ними на границах происходить обменные процессы. В несвязанных пластах гидродинамические процессы происходит изолированно вне зависимости от состояние соседних пластов. Фильтрация линейных флюидов достаточно много изучены в научных литературах [1-3], а для нелинейной фильтрации имеется работы [4-5]. Многослойные пласты в основном моделируется как изолированные однопластовые системы, двухпластовые связанные отдельные пласты, а также трехпластовые системы. При этом трехслойных системах могут рассматриваться как комбинации пластов, где средний хорошо пронимаемый, а верхний и нижней плохо проницаемые. В работах [6-8] изучены процесс фильтрации неструктурированных и структурированных флюидов в двух слойных и трехслойных средах. Рассмотрим двухслойной пласт, один нижней хорошо проницаемый, где горизонтальной составлявшей преобладает над вертикальными и движение структурированного флюида в нем происходить по горизонтали, а в другом верхном пласте насыщенной структурированными флюидами вертикальные характеристики на несколько порядок лучше, чем горизонтальные что предполагает движения флюида в нем происходить по вертикали.

Математическая модель этой задачи сформулируется так: необходимо найти непрерывные функции $u(x,t)$ и $v(\bar{x},z,t)$ а также неизвестные границы возмущения $\Gamma_i(x,t)$, $R_i(\bar{x},z,t)$, $(i=\overline{1,2})$ из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X_1\left(|\nabla u|\,,\,\beta_1\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\Phi_1\left(|\nabla v|\,,\,\bar{\beta}\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=H_1}=M_1\frac{\partial u}{\partial t},\quad x\in\left(x_0;\,\Gamma_1\left(t\right)\right),\quad t>0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X_2\left(|\nabla u|\,,\,\beta_2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\Phi_1\left(|\nabla v|\,,\,\bar{\beta}\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=H_1}=M_2\frac{\partial u}{\partial t},\quad x\in\left(\Gamma_2(t);\,\Gamma_1\left(t\right)\right),\quad t>0. \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X_3\left(|\nabla u|\,,\,\beta_3\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\Phi_1\left(|\nabla v|\,,\bar{\beta}\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=H_1}=M_3\frac{\partial u}{\partial t},\ x\in\left(\Gamma_2(t);L\,\right),\ t>0. \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_1\left(|\nabla v|\,,\,\bar{\beta}_1\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\bar{M}_1\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(H_1;\,R_1\left(t\right)\right),\ t>0. \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_2\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\bar{M}_2\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(R_1\left(t\right);\,R_2\left(t\right)\right),\ t>0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_3\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_3\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\bar{M}_3\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(R_2\left(t\right);\,H_2\right),\ t>0. \tag{6}$$

с начальными $u\left(x,\,0\right)=v\left(\bar{x},\,z,\,0\right)=u_0\left(x,\,z\right)$;

$$R_1(z,0)=R_2(z,0)=H_1;\ \ \Gamma_1\left(0\right)=\Gamma_2\left(0\right)=\ \Gamma_3\left(0\right)=x_0; \tag{7}$$

с граничными

$$X_1\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta_1\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma_1-0}=X_2\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta_2\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma_1+0}, \tag{8}$$

$$X_2\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta_2\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma_2-0}=X_3\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta_3\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma_2+0}, \tag{9}$$

$$\Phi_1\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_1\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_1-0}=\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_2\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_1+0}, \tag{10}$$

$$\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_2\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_2-0}=\Phi_3\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_3\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_2+0}, \tag{11}$$

$$u_i(x,t)|_{x=\Gamma_i-0}=u_i(x,t)|_{x=\Gamma_i+0},\quad v_i(\bar{x},z,t)|_{x=R_i-0}=\ v_i(\bar{x},z,t)|_{x=R_i+0},(i=\overline{1,2}) \tag{12}$$

а также с условиями на границах областей:

$$\alpha_1X_1\left(\left|\nabla u\right|,\,\bar{\beta}\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ z=H_1}}=\psi_1\left(t\right),\quad t>0, \tag{13}$$

$$\alpha_2X_3\left(\left|\nabla u\right|,\,\bar{\beta}\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=L\\ z=H}}=0,\quad t>0. \tag{14}$$

$$\alpha_3\Phi_3\left(\left|\nabla v\right|,\,\bar{\beta}_3\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{\substack{x\in(x_0,L)\\ z=H_2}}=0,\quad t>0. \tag{15}$$

Здесь функции Φ_i, X_i $(i=\overline{1,\,2})$ выражают нелинейности движение структурированных флюидов в соответствующих пластах [8] а коэффициенты характеризующие пласта и флюида аналогично [9]. Задача (1)-(15) нелинейно и для его решения проводится линеаризации с использованием метода итерации [9]. Для решения этой задачи разработан вычислительные алгоритмы с использованием метода прямых и разностного метода потоковой прогонки. При этом вычислительные алгоритмы легко реализуемый и они апробированы на тестовых данных что позволяет говорить эту работу можно использовать для определения параметров разработки слоистых месторождений, которые соответствует к данной модели.

Ключевые слова: слоистые среды, структурированные флюиды, неизвестные границы, численные алгоритмы.

2010 Mathematics Subject Classification: 93A30, 00A71 , 97M10

Литература

[1] Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К. *Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.* М. Недра (1972), 454 с.

[2] Аббасов М. Т., Кулиев А. М. *Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа.* Баку, ЭЛМ (1976), 278 с.

[3] Бегматов А. К расчету неустановившейся фильтрации в многослойных пластах. *В сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений.* №4, Ташкент, ФАН (1974), с. 182-188.

[4] Мухидинов Н. М. *Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа.* Фан, Ташкент (1978), 116 с.

[5] Закиров С. Н. Определения показателей разработки многопластовых месторождений при наличии газодинамической связи между пластами. *В сб.: Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений,* ВНИНЭГАЗПРОМ (1970), №8.

[6] Каюмов Ш., Исканаджиев И. Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах. *Тезисы докладов Всероссийский конференции Проблемы механики сплошных сред и физика взрыва.* Новосибирск (2007), с. 98-99.

[7] Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. *Сборник трудов международной научной конференции Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике.* Воронеж. (2020), с. 934-942.

[8] Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Об одной математической модели задачи теории фильтрации структурированных флюидов в двухслойной пласте. *Тезисы докладов республиканской научной конференции Сарымсаковские чтения* Ташкент (2021), с. 82-84.

[9] Каюмов Ш. *Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами.* Ташкент, ТГТУ (2017), 274 с.

[10] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М. Наука (1989), 484 с.

— ⁂ —

О разрешимости интегрального уравнения дробно-нагруженной задачи теплопроводности

КОСМАКОВА М.Т., АХМАНОВА Д.М., АМАНГЕЛЬДИЕВ М.Д.

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганды, Казахстан
E-mail: svetlanamir578@gmail.com

В области $Q = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ {}_cD^{\beta}_{0,x} u\,(x,t) \right\} |_{x=\gamma(t)} = f\,(x,t)\,, \tag{1}$$

$$u\,(x,0) = 0, \quad u\,(0,t) = 0, \tag{2}$$

где λ – комплексный параметр, ${}_cD^{\beta}_{0,\,x}\,u(x,\,t)$ – производная Капуто порядка β, $0 < \beta < 1$, $\gamma(t)$ – непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Введя обозначение

$$\mu\,(t) = \left\{ {}_cD^{\beta}_{0,x} u\,(x,t) \right\} |_{x=\gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma\,(1-\beta)} \int_0^{\gamma(t)} \frac{u_\xi\,(\xi,t)}{(\gamma\,(t) - \xi)^{\beta}} d\xi, \tag{3}$$

обращая дифференциальную часть задачи (1)–(2) по формуле

$$u\,(x,t) = -\lambda \int_0^t \int_0^{+\infty} G\,(x,\xi,t-\tau)\,\mu\,(\tau)\,d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} G\,(x,\xi,t-\tau)\,f\,(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

где $G\,(x,\xi,t)$ – функция Грина, и применив процедуру по формуле (3), получим интегральное уравнение

$$\mu\,(t) + \lambda \int_0^t K_\beta\,(t,\tau)\,\mu\,(\tau)\,d\tau = f_2\,(t)\,, \tag{4}$$

где

$$K_\beta\,(t,\tau) = \frac{(\gamma\,(t))^{1-\beta}}{\Gamma\,(2-\beta)\,\sqrt{t-\tau}}\, e^{2-\beta;1/2}_{1;1/2} \left(-\frac{\gamma\,(t)}{\sqrt{t-\tau}} \right), \tag{5}$$

$$f_2\,(t) = \left\{ {}_cD^{\beta}_{0,x} \left(\int_0^t \int_0^{\infty} G\,(x,\xi,t-\tau)\,f\,(\xi,\tau)\,d\tau \right) \right\} \Bigg|_{x=\gamma(t)}.$$

Здесь

$$e^{\mu;\delta}_{a;b}\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+\mu)\,\Gamma(\delta-bk)}, \qquad \mu \in C, \quad \delta \in C, \quad a > b, \quad a > 0, \forall z \in C,$$

– функция типа Райта.

Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$ и $\omega > 0$. Тогда в ядре (5) аргумент функции типа Райта:
a) $|z| \to +\infty$ при $0 < \omega < 1/2$;
b) $z \to 0$ при $\omega > 1/2$;
c) $z \sim const$ при $\omega = 1/2$.

Поскольку $\lim_{|z|\to+\infty} e^{\mu;\delta}_{a;b}(z) = 0$, то при $0 < \omega < 1/2$

$$K_{\beta}(t,\tau) \sim \frac{t^{\omega\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}$$

при $t \to 0$. Тогда $K_{\beta}(t,\tau)$ является бесконечно малой величиной при $t \to 0$, если $\omega\beta - 1 > 0$. Поскольку $0 < \omega < 1/2$ и $0 < \beta < 1$, то условие $\omega\beta - 1 > 0$ не выполняется.

В случае $\omega > 1/2$

$$\lim_{t\to 0} e^{2-\beta;1/2}_{1;1/2}\left(-\frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)\sqrt{\pi}}.$$

Тогда $K_{\beta}(t,\tau)$ обладает слабой особенностью, если $\omega(1-\beta) > 1/2$. Поэтому можно применить метод последовательных приближений для нахождения единственного решения интегрального уравнения.

Справедлива

Теорема *Интегральное уравнение (4) с ядром (5) при $\omega \geq \frac{1}{2}$ и $0 < \beta < 1$ и $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части.*

Замечание. Из теоремы следует, что краевая задача (1) – (2) корректна в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения. Теорема уточняет результат, полученный в [2].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09259780 МОН РК, 2021-2023.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробная производная, нагрузка, интегральное уравнение, функция типа Райта.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 45D05.

Литература

[1] Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, Москва (2005).

[2] Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh.. On a Problem of Heat Equation with Fractional Load, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**:9 (2020), 1873–1885.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об одной обратной задаче для нелинейного вырождающегося параболического уравнения

А.И. Кожанов[1,2,a], У.У. Абылкаиров[3,b], Г.Р. Ашурова[3,c]

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[3]*Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]kozhanov@math.nsc.ru, [b]u.abylkairov@gmail.com, [c]ashurova.guzel@gmail.com

Особенностью работы в данном докладе является то,что неизвестный коэффициент в нем является функцией лишь от временной переменной. Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемой задачи(решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в уравнение).
Наличие вырождения в параболических уравнениях означает, что корректные краевые задачи для них могут существенно отличаться от классических начально-краевых задач для невырождающихся уравнений и именно такая ситуация изучается в данной работе.

Постановка задачи: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$,связанные в цилиндре Q уравнением

$$Lu + q(t)u = f(x,t) \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условия

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

а также условий

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int_\Omega N(x)u(x,t)dx = \mu(t), t \in (0,T). \tag{4}$$

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, нелинейные обратные задачи, регулярные решения, существование.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K65.

Литература

[1] Камынин В.Л., Франчини Э. Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка. Математические заметки, Т. 64 вып. 5 (1998), 680-691.

[2] Камынин В.Л., Саролди М. Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка. Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 38, №10 (1998), 1683-1691.

[3] Prilepko, A.I., Oilovsky, D.G., Vasin, I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker: New York, USA (1999).

[4] Anikonov, Yu.E. Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equation. VSP: Utrecht, The Netherlands (2001).

[5] Belov, Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. VSP: Vtrecht, The Netherlands (2002).

[6] Ivanchov, M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. WNTI Publishers: Lviv, Ukraine (2003).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Исследование разрешимости задач восстановления внешнего воздействия в гиперболическом уравнении первого порядка

КОЖАНОВ А.И.[1,a], АЙТЖАНОВ С.Е.[2,b], ЖАЛГАСОВА К.А.[3,c]

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия*
[2] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *Южно-Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]*kozhanov@math.nsc.ru*, [b]*aitzhanovserik81@gmail.com*
[c]*k.zhalgasova@gmail.com*

Исследуется разрешимость в пространствах Соболева задач восстановления коэффициентов правой части, или внешнего воздействия, в гиперболических дифференциальных уравнениях первого порядка. Подобные задачи относятся к классу линейных обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Для изучаемых задач в работе доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (то есть, решений имеющих все обобщенные по Соболеву производные, входящие в уравнение).

Пусть $Q = \{(x,t) :\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ есть прямоугольник, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $h(x,t)$ и $u_0(x)$ – заданные функции, определенные при $(x,t) \in \bar{Q}$, α и β – заданные действительные числа, такие что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Обратная задача I: *найти функции* $u(x,t)$ *и* $q(t)$, *связанные в прямоугольнике* Q *уравнением*

$$u_t - a(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u(1,t) = 0, \;\; t \in (0,T). \tag{4}$$

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) и (3), а также условия*

$$\alpha u_x(0,t) + \beta u_x(1,t) = 0. \tag{5}$$

Обратная задача III: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в области Q уравнением (1) при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2) и (3), а также условия*

$$\int_0^1 N(x)u(x,t)dx = 0. \tag{6}$$

Ключевые слова: гиперболические дифференциальные уравнения первого порядка, обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие, регулярное решение, существование, единственность.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L04, 35R30.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Три SEUIHRD-модели распространения эпидемии

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: serovajskys@mail.ru

Пандемия COVID-19 стимулировала бурное развитие математической эпидемиологии. В настоящей время известно порядка ста математических моделей развития эпидемии В основе моделей лежит разделение всей популяции на группы, каждая из которых объединяет людей, находящихся в определенном состоянии по отношению к эпидемии. Они различаются набором этих групп, вариантами межгрупповых переходов и формой учета межгрупповых связей. В настоящей работе предлагаются три модели, в которых набор групп и межгрупповые переходы одни и те же, но способы описания межгрупповых связей различны.

Популяция разбивается на следующие семь групп: восприимчивые, т.е. здоровые, ранее не болевшие [susceptible]; контактные [exposed], т.е. здоровые, бывшие в контакте с больными; невыявленные [undetected], т.е. зараженные, с бессимптомным течением болезни и легко больные с невыявленной болезнью; изолированные [isolated], т.е. проходящие лечение на дому; госпитализированные [hospitalized]; выздоровевшие [recovered], переболевшие, у которых нет никаких признаков болезни; умершие [died].

В моделях учитываются следующие межгрупповые переходы. Восприимчивые могут оказаться в контакте с больными, перейдя в группу контактных, причем источниками заражения служат лишь невыявленные и изолированные больные. Контактные могут либо не заболеть и вернуться в группу восприимчивых, либо заболеть. В каждой из трех категорий больных наступает либо выздоровление, т.е. переход в группу выздоровевших, либо более тяжелое течение болезни. Тем самым невыявленный больной со временем может перейти в категорию изолированных в результате выявления болезни, изолированный может быть госпитализирован, а госпитализированный умереть.

При построении первой модели используется предположение о том, что время нахождения людей в группах контактных и больных ограничено, т.е. по истечении некоторого времени любой человек, бывший в контакте с больным либо заболеет, либо наверняка не заболеет. У любого человека с болезнью в невыявленной форме либо появятся симптомы болезни, и он будет изолирован, либо болезнь так и не проявится, и он приобретет иммунитет. Каждый изолированный больной либо выздоравливает, либо его болезнь перейдет в более тяжелую форму, и он будет госпитализирован. Любой госпитализированный либо выздоровеет, либо умрет. Эту гипотезу легче всего реализовать на основе дискретной модели. Она представляет собой систему разностных уравнений, где количество людей в каждой группе в последующий момент времени получается как сумма соответствующего количества в предшествующий момент времени и вновь попавших в эту группу в данный момент времени за вычетом тех, кто в данный момент времени покинул эту группу.

Ограниченность времени пребывания в группах можно учесть и с помощью непрерывной модели. В ее основе лежит оценка скорости изменения количества людей в каждой из групп, определяемой описанными межгрупповыми переходами. Убывание этого количества в силу истечении времени нахождения в группе прямо пропорциональна самому значению этого количества и обратно пропорциональна времени нахождения в группе. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений.

В основе третьей модели лежит предположение о том, что любой межгрупповой переход является случайным событием, происходящее с той или иной вероятностью. Состояние системы в стохастической модели развития эпидемии характеризуется вероятностью того, что численность людей в каждой группе в некоторый момент времени принимает то или иное значение. Математическая модель здесь представляет собой систему дифференциально-разностных уравнений, где реализуется непрерывность по времени и дискретность по количеству людей.

На основе указанных моделей проводятся оценки развития эпидемии с использованием статистической информации о распространении COVID-19 в Казахстане.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260317 МОН РК.

Ключевые слова: математическое моделирование, эпидемиология, COVID-19, дискретная модель, непрерывная модель, стохастическая модель.

2010 Mathematics Subject Classification: 92B99, 39A99, 34A99, 60G99.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Нелокальная краевая задача для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа

УСМОНОВ Б.З.

Чирчикский государственный педагогический институт, Ташкент, Узбекистан
E-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Рассмотрим уравнение
$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)Lu=0 \tag{1}$$
$$Lu=\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}, & \text{если, } y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}, & \text{если, } y<0,\end{cases}$$
$a,\ b$ и $c-$заданные вещественные числа, причем $a^2+b^2\neq 0$.

Пусть D_1 - конечная однозначная область в плоскости (x, y), ограниченная кривой σпри$y>0$c концами в точках $A(-1,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB оси x. Предположим, что кривая униформа относительно оси y, точка $N(0,h)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси xточкой, части AN и BN дуги σ униформы отрезка ON оси y, здесь $O-$начало координат.

Через D_2 обозначим область, ограниченную при$y<0$ отрезком AB и двумя характеристиками $AC: \quad x+y=-1, \quad BC: \quad x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точки $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C(0,-1)$.$D=D_1\cup D_2\cup AB$

В области D исследуется следующая задача.

Задача C_b. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

$$1)u(x,y)\in C(\bar{D}_1)\cap C(\bar{D}_2)\cap C^1(D_1\cup D_2\cup AB\cup\overline{AC}\cup\overline{BC});$$

2) $u(x,y)\in C^{3,3}_{x,y}(D_j), \quad u_{xxy},u_{xyy}\in C(D_j)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях D_j $(j=1,2)$;

3) на интервале AB выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to+0}u(x,y)+\beta(x), \quad (x,0)\in\overline{AB}\,, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=\gamma(x)\lim_{y\to+0}u_y(x,y)+\delta(x), \quad (x,0)\in AB\;; \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma}=\varphi(x,y), \;\; (x,y)\in\bar{\sigma}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{ON}=g(y), \;\; 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$p(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{x-1}{2},-\frac{1+x}{2}\right]+q(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right]=\psi_1(x), \qquad -1<x<1, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x), \;\; -1\le x\le 0, \tag{7}$$

где $\varphi(x,y), \quad g(y), \quad \psi_j(x)$ $(j=1,2)$ – заданные функции, причем $\varphi(0,h)=g(h)$,

$$\alpha(x), \;\; \beta(x)\in C^1(\overline{AB})\cap C^3(AB), \qquad \gamma(x), \;\; \delta(x)\in C(\overline{AB})\cap C^2(AB), \tag{8}$$

$$p^2(x)+q^2(x)\ne 0, \;\; [p(x)-q(x)]\,\gamma(x)\ne 0, \qquad \forall x\in\overline{AB}, \tag{9}$$

$$\varphi(x,y)=y\varphi_1(x,y), \;\; \varphi_1(x,y)\in C(\bar{\sigma}), \quad g(y)\in C^2\,[0,1]\,, \tag{10}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\,[-1,1]\cap C^3(-1,1), \;\; \psi_2(x)\in C\,[-1,0]\cap C^2(-1,0). \tag{11}$$

Теорема. Если выполнены условия (8)-(11), то в области D существует единственное регулярное решение задачи C_b.

Решение задачи C_b в областиD_1ищется в виде [1],[2] $u(x,y)=\upsilon(x,y)+\omega(bx+ay)$, здесь $\upsilon(x,y)$ регулярное решение уравнение $\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}=0$, а $\omega(x)$- дважды непрерывно дифференцированная функция. А в области D_2 сведётся к обратной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестной правой части.

Литература

[1] Салахитдинов М.С. *Уравнения смешанно-составного типа*, Фан, Ташкент (1974), 156 с.

[2] Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа*, Фан, Ташкент (1979), 240 с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Квазистационарная модель динамики нагрева размыкающихся контактов при переменном токе

ШПАДИ Ю.Р.[a], КУЛАХМЕТОВА А.Т.[b], КАВОКИН А.А.[c]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]yu-shpadi@yandex.ru, [b]kulakhmetova@mail.ru, [c]kavokin_alex@yahoo.com

Рассмотрим однофазную задачу Стефана для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{f(t)\rho_e(\theta)}{r^4}=0, \tag{1}$$

заданного в сферической системе координат (сфера Хольма) в области $\Omega=\{(r,t):0<b<r<\alpha(t)<\infty,\ \alpha(0)=b,\ 0<t<t_a\}$, при следующих краевых условиях:

$$-\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\bigg|_{r=b}=P(t), \tag{2}$$

$$\theta(\alpha(t),t)=\theta_m, \tag{3}$$

$$-\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\bigg|_{r=\alpha(t)}=L\gamma(\theta_m)\frac{d\alpha(t)}{dt}. \tag{4}$$

В теории и практике электроконтактных механизмов уравнение (1) описывает квазистационарное распределение температурного поля $\theta(r,t)$ в жидкой области Ω электрода, нагреваемого электрической дугой на границе $r=b$ и переменным электрическим током внутри. Удельная теплопроводность $\lambda(\theta)$, электрическое сопротивление $\rho_e(\theta)$ и плотность материала электрода $\gamma(\theta)$ зависят от температуры. Температура плавления θ_m и удельная теплота плавления L электрода постоянны.

Тепловой поток из электрической дуги в электрод характеризуется заданной плотностью мощности $P(t)$. Функция

$$f(t)=I^2\sin^2(2\pi\omega t+\varphi) \tag{5}$$

описывает джоулев источник тепла, где I – амплитуда электрического тока, ω и φ – его частота и начальная фаза.

В предположении, что функции $P(t)$, $\lambda(\theta)$, $\rho_e(\theta)$ непрерывны, $P(t)>=0$, $\lambda(\theta)\geq\lambda_{min}>0$, $\rho_e(t)\geq 0$, краевая задача (1)–(4) приводится к системе двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha(t)}{dt}=\dfrac{1}{L\gamma(\theta_m)}\left[\dfrac{b^2P(t)}{\alpha^2(t)}+\dfrac{f(t)}{\alpha^2(t)}\displaystyle\int_b^{\alpha(t)}\dfrac{\rho_e(\theta(\xi,t))}{\xi^2}d\xi\right]\\ \theta(r,t)=\theta_m+\displaystyle\int_r^{\alpha(t)}\dfrac{b^2P(t)d\xi}{\lambda(\theta(r,t))}+\int_r^{\alpha(t)}\dfrac{f(t)}{\lambda(\theta(\xi,t))}\int_b^{\xi}\dfrac{\rho_e(\theta(\eta.t))}{\eta^2}d\eta\end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *При условиях, наложенных выше на функции $\lambda(\theta)$, $\rho_e(\theta)$, $P(t)$ и дополнительном условии ограниченности этих функций, система уравнений (6) разрешима и имеет единственное решение.*

Численное решение системы (6) находится методом последовательных итераций. На каждой итерации сначала решается первое уравнение системы (6) относительно $\alpha(t)$ при значении $\theta(r,t)$, взятом с предыдущей итерации. Затем для каждого $t\in(0,t_a)$ находится решение $\theta(r,t)$ второго уравнения, рассматриваемого как нелинейное уравнение Вольтерра 2-го рода при переменном нижнем пределе r и применяя соответствующую схему построения его решения. Итеративный процесс начинается с задания значения $\theta(r,t)=\theta_m$.

Если параметр $\rho_e(\theta)$ фиксирован, то первое уравнение в (6) не зависит от второго и является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно $\alpha(t)$.

Подчеркнем, что термодинамический процесс протекает в квазистационарном режиме, когда велико соответствующее ему число Фурье Fo, которое в физическом смысле определяется отношением скорости проводимости к скорости накопления тепловой энергии. Данный факт часто имеет место для быстротечных процессов размыкания контактов.

Кроме того, использование квазистационарной модели (1)–(4) позволяет относительно просто оценить зону расплава в электроде, а также его температуру с учетом переменных теплофизических параметров и переменного электрического тока.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Optimal packing of hexagonal torus using the Mathematica program

ASHIMOV Y.[1,2,a], MITYUSHEV V.[3,b],
DOSMAGULOVA K.[1,2,c] ZHUNUSSOVA Zh.[1,2,d]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Tadeusz Kosciuszko Polytechnic University of Krakow, Krakow, Poland*
E-mail: [a]*yeskendyr@gmail.com*, [b]*vmityushev@gmail.com*,
[c]*karlygash.dosmagulova@gmail.com*, [d]*zhunussova777@gmail.com*

In various tasks, the problem of packing shapes and bodies arises. The mathematical formulation of the packaging problem has been very relevant since the 17th century. The founder of the problem is I. Kepler. The arrangement of articles in space, which are shaped like a ball or a circle, then inevitably there are gaps between them. The tasks were set to minimize these gaps. One of the first versions of Kepler, it is customary to call a face-centered cubic lattice.

Theorem 1. *Let P be a packing graph that is locally maximally dense on a flat torus, then the strut framework associated to the packing graph G_P is (infinitesimally) rigid or G_P contains a subgraph G_Q (corresponding to sub-packing Q) whose associated strut frame work is (infinitesimally) rigid and P contains circles that are free to move.*

The problem of packing circles, ellipses and other figures on a plane or inside any given areas has been studied by many authors and various methods have been developed to solve them. When solving the problem of optimal packing of non-overlapping disks on a plane using Mathematica. This will allow us to consider only connected graphs in our exhaustive search of all possible packing graphs and locally maximally dense packings without free circles in what follows. Finally, we observe that we can lower bound the number of edges (and their arrangement) incident to a vertex in the packing graph associated to a locally maximally dense packing with no free circles.

There exist locally maximally dense packings of equal circles which contain circles that are free to move (i.e. they are not held fixed by their neighbors), but the common diameter of all the circles cannot increase. For example, this occurs in the globally maximally dense arrangement of 7 circles packed into a hard-boundary square where one circle is is free to move. (This result is attributed to Schaer in 1965 by Goldberg) If we remove any circle that are free to move, called free circles (also known as floaters or rattlers), from such an arrangement, then we obtain a locally maximally dense packing for fewer circles in the flat torus. Our search will proceed sequentially from 1 to 6 ircles and will find all of the locally maximally dense packings of these number of circles, and we will be able to tell, for any locally maximally dense arrangement, if there is room for another equal circle that could be a free circle in a locally maximally dense arrangement of a larger number of circles packed onto a flat torus.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08856381 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: composite material, optimal packing, hexagonal torus.

2010 Mathematics Subject Classification: 05B40, 46N10.

References

[1] S. Gluzman, V. Mityushev, W. Nawalaniec Computational Analysis of Structured Me- dia, Academic Press, Elsevier, Amsterdam (2018).

[2] Ziegler, G. M. Three Mathematics Competitions. In An Invitation to Mathematics From Competitions to Research 195-205, Springer Heidelberg Dordrecht London, New York (2010).

[3] Conway J. H., Sloane N. J. Sphere Packings, Lattices and Groups, Second edition, Springer-Verlag, New York, (1993).

[4] Arthur T. White Graphs of groups on surfaces, North-Holland Mathematics Studies, vol. 188, North- Holland Publishing Co., Amsterdam, (2001).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

On the boundary control problem for the heat conduction equation in the space

F.N. DEKHKONOV

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru

Consider in the bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ the heat conduction equation

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(x)u(x,t) \;=\; 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = a(x)\,\mu(t), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \tag{3}$$

and initial condition

$$u(x,0) = 0. \tag{4}$$

Here Γ is some subset of $\partial\Omega$ (heater or air conditioner) with piecewise smooth boundary $\partial\Gamma$ and with $mes\Gamma > 0$ (we denote by $mes\Gamma$ the surface measure of Γ, distinct from Lebesgue measure $|\Gamma|$).

We may extend both functions $h(x)$ and $a(x)$ to the whole boundary $\partial\Omega$ by setting $h(x) = 0$ for $x \in \Gamma$, and $a(x) = 0$ for $x \notin \Gamma$. In this case we may write the conditions (2) and (3) in the following form

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h(x)u(x,t) = a(x)\,\mu(t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \tag{5}$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is measurable on the half line $t \geq 0$ and satisfies the following constraint

$$|\mu(t)| \leq M, \quad t \geq 0.$$

Let the function $\rho : \overline{\Omega} \to R$ satisfies conditions

$$\int\limits_{\Omega} \rho(x)\,dx \;=\; 1, \quad \rho(x) \geq 0.$$

For any $\theta > 0$ consider the condition

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)\rho(x)\,dx \;=\; \theta. \tag{6}$$

Note that the weight function $\rho(x)$ is not assumed to be strictly positive. In particular, the value (6) may be the average value over some subdomain of the main region Ω.

Denote by the symbol $T(\theta)$ the minimal time required to reach the given value θ by the average value of the temperature. This means that the equation (6) is fulfilled for $t = T(\theta)$ and is not valid for $t < T(\theta)$.

We present the critical value θ^* such that for any $\theta < \theta^*$ there exists the required admissible control $\mu(t)$ and corresponding value of $T(\theta) < +\infty$, and for $\theta \geq \theta^*$ the equality (6) is impossible.

More recent results concerned with this problem were established in [1], [2], [3]. Detailed information on the problems of optimal control for distributed parameter systems is given in the monograph [4].

Recall that we consider the behavior of the function

$$U(t) \;=\; \int\limits_{\Omega} u(x,t)\rho(x)\,dx. \tag{7}$$

Set

$$\theta^* \;=\; M\int\limits_{\Gamma}[(-\Delta)^{-1}\rho(x)]a(x)\,d\sigma(x), \tag{8}$$

and

$$b \;=\; \frac{M}{\lambda_1}\cdot(\rho, v_1)\int\limits_{\Gamma} v_1(y)a(y)d\sigma(y).$$

Theorem 1. *Let $\theta^* > 0$ be defined by equation (8). Then*
1) *for every θ from the interval $0 < \theta < \theta^*$ there exist $T(\theta)$ such that*

$$U(t) \;<\; \theta, \quad 0 < t < T(\theta),$$

and

$$U(T(\theta)) \;=\; \theta.$$

2) *for $\theta \to \theta^*$ the following estimate is valid:*

$$T(\theta) \;=\; \ln\frac{1}{\varepsilon(\theta)} + \frac{1}{\lambda_1}\ln b + O(\varepsilon^{\lambda_2-\lambda_1}),$$

where

$$\varepsilon = |\theta^* - \theta|^{1/\lambda_1}.$$

3) *for every $\theta \geq \theta^*$ the $T(\theta)$ does not exists.*

Keywords: Heat conduction equation, admissible control, initial-boundary value problem, integral equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K15.

References

[1] Albeverio S., Alimov Sh.A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, **57**:1 (2008), 58–68.

[2] Alimov Sh.A., Dekhkonov F.N. On the time-optimal control of the heat exchange process, *Uzbek Mathematical Journal*, **2** (2019), 4–17.

[3] Altmüller A., Grüne L. Distributed and boundary model predictive control for the heat equation, *Technical report, University of Bayreuth, Department of Mathematics*,(2012).

[4] Fursikov A.V. Optimal Control of Distributed Systems, *Theory and Applications*, Translations of Math. Monographs, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (2000).

[5] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, (1966).

— ⁕⁕⁕ —

Finite-time and fixed-time synchronization analysis of shunting inhibitory memristive neural networks with time-varying delays

KASHKYNBAYEV A.[1,a], ISSAKHANOV A.[2,b], OTKEL M.[1,c], KURTHS J.[3,4,d]

[1] *Nazarbayev University, Nur-Sultan 010000, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam 14473, Germany*
[4] *Humboldt-University, Berlin 10099, Germany*
E-mail: [a]*ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz*, [b]*alfarabi.issakhanov@gmail.com*, [c]*madina.otkel@nu.edu.kz*, [d]*kurths@pik-potsdam.de*

In this talk, we will present the finite-time and fixed-time synchronization of retarded shunting inhibitory cellular neural networks. By constructing suitable Lyapunov functions and feedback control schemes we derive several sufficient conditions to guarantee finite-time and fixed-time synchronization of such networks. Finally, to illustrate the effectiveness of our theoretical results we consider examples with numerical simulations.

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan Grant OR11466188 ("Dynamical Analysis and Synchronization of Complex Neural Networks with Its Applications") and Nazarbayev University under Collaborative Research Program Grant No 11022021CRP1509.

Keywords: Shunting inhibitory cellular neural networks; memristive memory, time-varying delay, feedback control, finite-time synchronization, fixed-time synchronization.

2010 Mathematics Subject Classification: 92B20, 92B25.

References

[1] Chua, L. Memristor-The missing circuit element, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, **18**:5 (1971), 507–519.

[2] Pikovsky, A., Kurths, J., Rosenblum, M. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, *Cambridge: Nonlinear Science Series* (2001).

[3] Lu, J., Ho, W. C. & Cao, J. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks. Automatica, **46**:7 (2010), 1215-1221.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A heat polynomials method for inverse Stefan type problems

S. A. KASSABEK[1,a], D. SURAGAN[2,b]

[1] *Astana IT university, Department of Computational and Data Science, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *Nazarbayev University, Department of Mathematics, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]*samat.kassabek@astanait.edu.kz*, [b]*durvudkhan.suragan@nu.edu.kz*

The paper presents a new approximate method of solving one-dimensional inverse Stefan type problems. We extend the heat polynomials method (HPM) proposed by the authors [1] for one-dimensional one-phase inverse Stefan problem to the two-phase case. We apply the HPM for solving the one-dimensional inverse Cauchy-Stefan problem, where the initial and boundary data is reconstructed on a fixed boundary. The solution of the problem is presented in the form of linear combination of heat polynomials. We have studied the effects of accuracy and measurement error for different degree of heat polynomials. Due to ill-conditioning of the matrix generated by HPM, optimization techniques is used to obtain regularized solution. Therefore, the sensitivity of the method to the data disturbance has been checked. Theoretical properties of the proposed method, as well as numerical experiments, demonstrate that to reach accurate results it is quite sufficient to consider only a few of polynomials.

Funding: The authors were supported by the Nazarbayev University Program 091019CRP2120 "Centre for Interdisciplinary Studies in Mathematics (CISM)" and the first author was supported by the grant AP09258948 "A free boundary problems in mathematical models of electrical contact phenomena".

Keywords: Inverse Stefan type problems, approximate solution, heat polynomials method, heat flux, moving boundary.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 80A23, 80M30, 35C11.

References

[1] S. A. Kassabek, S. N. Kharin, D. Suragan A heat polynomial method for inverse cylindrical one-phase Stefan problems, Inverse Problems in Science and Engineering, DOI: 10.1080/17415977.2021.2000977, (2021).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Stability of a program manifold of control systems with tachometric feedback taking into account external load

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Consider the problem of construction of the control systems with tachometric feedback, taking into account external load by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\left(t\right)\equiv\omega(t,x)=0$, in the following form [1]:

$$\begin{array}{l} \dot{x}=f\left(t,x\right)-b_1\xi, \quad t\in I=\left[0,\ \infty\right), \\ \dot{\xi}=\varphi\left(\sigma\right)\psi(\nu), \quad \sigma=p^T\omega-q\xi-N\dot{\xi}, \end{array} \tag{1}$$

where $x\in R^n$ is a state vector of the object, $f\in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t)=0$, and $b_1\in R^n,\ p\in R^s$ are constant vectors,q,N are constant coefficients of rigid and tachometric feedbacks, σ is the total control pulse-signal, and ξ is function differentiable with respect to σ, satisfies the following conditions

$$\begin{array}{c} \varphi(0)=0\wedge\varphi(\sigma)\sigma>0 \quad \forall\sigma\neq0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0}<\chi>0, \end{array} \quad , \tag{2}$$

and the function $\psi(\nu)$ takes into account the actions of the external load. For the manifold $\Omega(t)$ to be integral and for the system (1) - (2) on the manifold $\omega=0$ it is necessary a condition $\xi=0$. This condition is satisfied for $q\neq0$.

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\begin{array}{l} \dot{\omega}=-A\omega-b\xi, \quad t\in I=\left[0,\ \infty\right), \\ \dot{\xi}=\varphi\left(\sigma\right)\psi(\nu), \quad \sigma=p^T\omega-q\xi-N\dot{\xi}, \end{array} \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and $F(t,x,\omega)=-A\omega,\ A\in R^{s\times s},\ H=\dfrac{\partial\omega}{\partial x},\ b=Hb_1$.

The reviews of the works devoted to the construction of autonomous and non-autonomous automatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of various inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[10]).

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the control systems with tachometric feedback taking into account external load in relation to the given vector-function ω.

Using the construction of a Lyapunov function of the form

$$V=\sum_{i=1}^{s+1}\sum_{k=1}^{s+1}\frac{l_il_k}{\rho_1+\rho_k}\eta_1\eta_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}L_k\eta_K^2+\sum_{i=1}^{s-m}C_i\eta_{m+i}\eta_{m+i+1}+\frac{1}{2}l_{s+2}\sigma^2,$$

sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold of indirect control systems are obtained.

Theorem 1. *Suppose that there exist matrices* $L > 0$, $C > 0$, *non-linear function* $\varphi(\sigma)$ *satisfies the conditions (2) and* $-\dot{V}|_{(3)} = W$.

Then in order that, the program manyfold $\Omega\,(t)$ *was absolute stability with respect to the vector function* ω *it is sufficient performing of the following conditions*

$$L_k + l_{s+2}\beta_k + 2l_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad \forall\ k = \overline{1, ..., m},$$

$$C_j + l_{s+2}\beta_{m+j} + 2l_{m+j} \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad \forall\ m = \overline{1, ..., s-m+1},$$

where $l_1, ..., l_m$ *are real and* $l_{m+1}, ..., l_{m+s+1}$ *are complex pairwise conjugate numbers.*

Funding: This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 09258966 for 2021-2023 years.

Keywords: stability, program manifold, non-autonomous control systems, Lyapunov function, non-stationary nonlinearity.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29.

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold, *Nelineinye kolebania.* **28**: 3 (2016), 367–375.

[7] Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems, *News NAS RK. Series physico-mathematical.* **322**: 6 (2018), 37-43.

[8] Zhumatov S.S.On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients,*Ukrainian Mathematical Journal.* **71**: 8 (2020), 1202-1213.

[9] Zhumatov S.S.On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities,*Kazakh Mathematical Journal.***19**: 4 (2020), 35-46.

[10]*Zhumatov S.S.* Stability of the program manifold of different automatic indirect control systems, *News Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University. Mathematics, physics, computer science series.*-2021. **16**: 1 (2021), 69-82.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Предметный указатель