

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 15 № 2 (56) 2015

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*MATHEMATICAL JOURNAL*

Том 15 № 2 (56) 2015

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, № 2 (56), 2015

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

*Главный редактор:*

М.А. Садыбеков

*Заместитель главного редактора:*

А.Т. Асанова

*Редакционная коллегия:*

Л.А. Алексеева, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов, Г.И. Бижанова, Н.К. Блиев,  
В.Г. Воинов, Н.С. Даирбеков, М.Т. Дженалиев, Д.С. Джумабаев,  
А.С. Джумадильдаев, Т.Ш. Кальменов, К.Т. Мынбаев, А.Ж. Найманова,  
М.О. Отелбаев, М.Г. Перетягкин, И.А. Тайманов (Россия), М.И. Тлеубергенов,  
С.Н. Харин.

Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева

*Адрес редакции:*

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2015г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

**Том 15**

**№ 2 (56)**

**2015**

---

---

<i>Абдалла А., Бекетаева А.О., Шахан Н.Ш.</i> Построение wepo-схемы для решения задачи сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси .....	5
<i>Aldibekov T.M.</i> On exponentially separated differential systems .....	22
<i>Бекмаганбетов К.А., Оразгалиев Е.Т.</i> Неравенства Бернштейна - Никольского и оценки наилучших приближений в анизотропных пространствах Лоренца .....	32
<i>Берденова Г.Ж., Султанаев Я.Т.</i> Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций .....	43
<i>Кальменов Т.Ш., Арпова Г.Д.</i> Квазиспектральное разложение теплового потенциала .....	62
<i>Khairin S.N., Sagyndykuly Z.</i> Automodel solution of spherical and cylindrical Stefan problems .....	69
<i>Мунбаев К.Т., Даркенбаева Г.С.</i> The asymptotic distribution of the OLS estimator of the regression with slowly varying regressor .....	80
<i>Садыбеков М.А., Оралсын Г.</i> Обратная коэффициентная задача теплопроводности с нелокальным условием типа Самарского-Ионкина .....	99
<i>Фалалеев Л.П.</i> Сходимость средних Чезаро и Рисса тригонометрических полиномов .....	113

---

---



## CONTENTS

---

---

Volume 15	No. 2 (56)	2015
<i>Abdalla A., Beketaeva A.O., Shakhan N.Sh.</i> Construction of weno-scheme for the task of supersonic flow of multicomponent gaseous mixture .....	5	
<i>Aldibekov T.M.</i> On exponentially separated differential systems .....	22	
<i>Bekmaganbetov K.A., Orazgaliev E.T.</i> Bernstein - Nikol'skii inequalities and estimates of best approximation in anisotropic Lorentz spaces .....	32	
<i>Berdenova G.Zh., Sultanaev Ya.T.</i> The asymptotic behavior of solutions of the differential equations in the vector-functions space .....	43	
<i>Kal'menov T.Sh., Arepova G.D.</i> Quasispectral decomposition of the heat potential .....	62	
<i>Kharin S.N., Sagyndykuly Z.</i> Automodel solution of spherical and cylindrical Stefan problems .....	69	
<i>Mynbaev K.T., Darkenbayeva G.S.</i> The asymptotic distribution of the OLS estimator of the regression with slowly varying regressor .....	80	
<i>Sadybekov M.A., Oralsyn G.</i> An inverse coefficient problem of heat conductivity with a nonlocal Samarskii-Ionkin type condition .....	99	
<i>Falaleev L.P.</i> Convergence of Cesaro and Riesz means of trigonometric polynomials .....	113	

---

---

УДК 519.63

А. АБДАЛЛА, А.О. БЕКЕТАЕВА, Н.Ш. ШАХАН

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби*  
050040, Алматы, проспект аль-Фараби, 71, e-mail: azimaras@mail.ru

## ПОСТРОЕНИЕ WENO-СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Математическое моделирование сверхзвукового потока газа сводится к решению системы уравнений Навье-Стокса, где реальные течения характеризуются появлением газодинамических разрывов. Это приводит к использованию численных методов высокого порядка точности. Как известно, ENO схемы (Хартен и др., 1987 г.) и WENO схемы (Янг, 1991 г.) имеют достаточно высокий порядок аппроксимации. В работе производится построение WENO-схемы четвертого порядка аппроксимации для решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения совершенного многокомпонентного газа. С помощью предложенного алгоритма численно моделируется взаимодействие плоского сверхзвукового потока воздуха с поперечно вдуваемой струей гелия и водорода через щель с нижней стенки канала. Произведено сравнение с опытными данными. Изучено взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем на верхней стенке канала.

Ключевые слова: *сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса, ударная волна.*

---

© А. Абдалла, А.О. Бекетаева, Н.Ш. Шахан, 2015.

Keywords: *Supersonic flow, ideal gas, boundary layer, Navier-Stokes equations, shock wave*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

## ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие поперечно вдуваемой звуковой струи с сверхзвуковым потоком представляет фундаментальный интерес, поскольку здесь возникает очень сложная картина течения, включающая образование зон возвратных течений около стенки как перед струей так и за ней, образование сложной ударно-волновой системы, образование бочкообразной структуры во вдуваемой струе [1–5]. Поэтому при численном решении исходных уравнений необходимо использовании схем высокого порядка точности, которые, как известно, включают дополнительный искусственный термин вязкости, изменяющий разностные операторы в районе разрыва и влияющий на точность решения.

На данный момент одним из решений этой проблемы являются квазимонотонные схемы, схемы уменьшения полной вариации (TVD — Total Variation Diminishing). Существенным недостатком этих схем является то, что в окрестности локальных экстремумов порядок точности решения понижается до первого порядка. Это обстоятельство приводит к тому, что скачки уплотнения, возникающие в течении, могут быть сильно размазаны.

В настоящее время для решения такого рода сложных задач широко применяются квазимонотонные консервативные схемы повышенного порядка аппроксимации без введения искусственных диссипативных членов, такие как ENO (Essentially Nonoscillatory Schemes), и WENO, изложены в ряде работ [6–9]. В работе [9] авторы развили ENO-схему третьего порядка точности по пространственным координатам на основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Идея построения WENO схемы основана на ENO схеме, однако при интерполировании кусочно-постоянной полиномиальной функции, где применяются полиномы Ньютона третьего порядка, вместо выбора одного интерполяционного полинома используется выпуклая комбинация с весовыми коэффициентами всех представленных полиномов, что позволяет повысить порядок аппроксимации схемы до четвертого.

Цель данной работы — построение алгоритма решения исходных уравнений Навье-Стокса, основанного на WENO-схеме и численное моделирование взаимодействия набегающего сверхзвукового потока воздуха с попе-

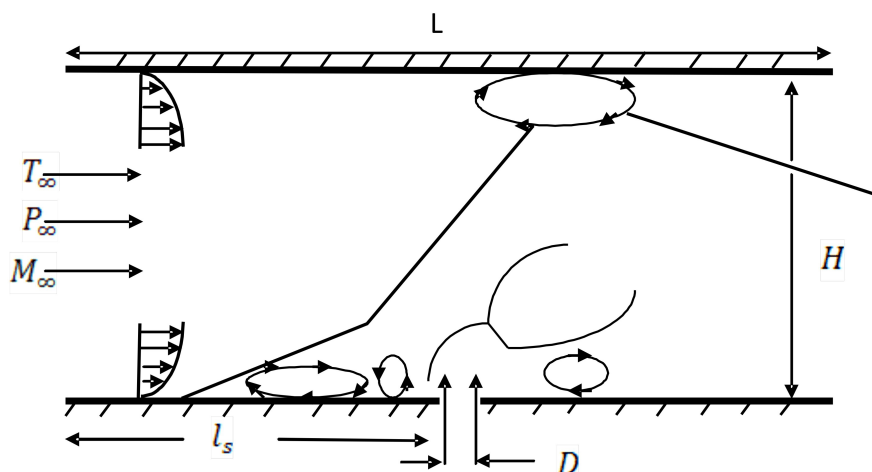


Рисунок 1 – Схема течения

речной звуковой струей, вдуваемой с нижней стенки канала.

#### Постановка задачи

Рассматривается сверхзвуковое течение воздуха с поперечным вдувом струи с нижней стенки прямоугольного канала (рисунок 1). Система двумерных, осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси относительно декартовых координат в консервативной форме, представляется в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$\vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u w, (E_t + P) u, \rho u Y_k)^T,$$

$$\vec{F} = (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + P, (E_t + P) w, \rho w Y_k)^T,$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{xk})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{zk})^T,$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left( \sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1,$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = C_{pk}/W_k, \quad \tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left( 2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right),$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left( 2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left( \frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{xk}, \quad q_z = \left( \frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{zk},$$

$$J_{xk} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{zk} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система уравнений (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока  $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ ; давление  $P$  и полная энергия  $E_t$  отнесены к значению  $\rho_\infty u_\infty^2$ ; удельная энтальпия  $h_k$  — к  $R^0 T_\infty / W_\infty$ ; молярные удельные теплоемкости  $C_{pk}$  — к  $R^0$ ; характерным параметром длины является диаметр сопла. Величина  $Y_k$  — массовая концентрация  $k$ -ой компоненты; индекс массовой концентрации  $k = 1$  соответствует  $O_2$ ,  $k = 2$  —  $H_2$ ,  $k = 3$  —  $N_2$ ;  $N_p = 3$  — число компонент смеси газов;  $W_k$  — молекулярный вес  $k$ -ой компоненты;  $Re, Pr, Sc$  — числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта, соответственно;  $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$  — тензоры вязких напряжений;  $q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk}$  — тепловые

и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика);  $\mu = \mu_l + \mu_t$  — эффективная вязкость (определяется через сумму ламинарной и турбулентной вязкости). Для определения  $\mu_t$  используется модель Болдуина-Ломакса.

## 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На входе

$$Y_k = Y_{k\infty}, W_k = W_{k\infty}, P = P_\infty, T = T_\infty,$$

$$u = M_\infty \sqrt{\gamma_\infty R_0 T_\infty / W_\infty}, w = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H;$$

во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой, при этом продольная скорость аппроксимируется степенным законом;

На щели

$$Y_k = Y_{k0}, W_k = W_{k0}, P = nP_\infty, T = T_0,$$

$$u = 0, w = M_0 \sqrt{\gamma_0 R_0 T_0 / W_0}, \quad z = 0, \quad L_b \leq x \leq L_b + h;$$

( $n = P_0/P_\infty$  — степень нерасчетности,  $P_0, P_\infty$  - давление в струе и в потоке,  $M_0, M_\infty$  — число Маха струи и потока, соответственно, индексы  $0, \infty$  относятся к параметрам струи и потока), на нижней и верхней стенках задается условие прилипания и теплоизоляции; на выходной границе задаются условия неотражения [10].

## 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

На нижней и верхней стенках в пограничном слое, а также на уровне щели вводится сгущение сетки для более точного численного решения. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta}, \quad (2)$$

где  $\tilde{U} = \vec{U}/J$ ,  $\tilde{E} = \xi_x \vec{E}/J$ ,  $\tilde{F} = \eta_z \vec{F}/J$ ,  $\tilde{E}_{v2} = \xi_x \vec{E}_{v2}/J$ ,  $\tilde{E}_{vm} = \xi_x \vec{E}_{vm}/J$ ,  $\tilde{F}_{v2} = \eta_z \vec{F}_{v2}/J$ ,  $\tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm}/J$ .  $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$  — якобиан преобразования.

Параметры преобразования координат подробно описаны в [11].

В данной работе конвективные члены аппроксимируются с использованием WENO-схемы, идея построения которого основана на ENO-схеме, подробно изложенной в работе [9]. В предлагаемой WENO-схеме при интерполировании кусочно-постоянной полиномиальной функции применяются полиномы Ньютона третьего порядка и, вместо выбора одного интерполяционного полинома, используется выпуклая комбинация с весовыми коэффициентами всех представленных полиномов. За счет этого достигается существенно-неосциллирующее свойство схемы, повышающее порядок аппроксимации схемы. В соответствии с [9] одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени системы (2) формально представляется

$$\begin{aligned} & \Delta \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left[ \left( \hat{A}^+ + \hat{A}^- \right) \frac{\partial \vec{E}^m}{\partial \xi} + \left( \hat{B}^+ + \hat{B}^- \right) \frac{\partial \vec{F}^m}{\partial \eta} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial (\tilde{E}_{v2}^{n+1} + \tilde{E}_{vm}^n)}{\partial \xi} - \frac{\partial (\tilde{F}_{v2}^{n+1} + \tilde{F}_{vm}^n)}{\partial \eta} \right] \right] = O(1/2 \Delta t^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\hat{A}_\xi^\pm, \hat{B}_\xi^\pm$  — нормализованные матрицы Якоби, имеющие следующий вид:

$$\hat{A}_\xi^\pm = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}, \quad \hat{B}_\xi^\pm = T \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1},$$

вектора  $\vec{E}^m, \vec{F}^m$  — модифицированные потоки на узловых точках  $i, j$ , состоящих из исходных конвективных векторов  $\tilde{E}, \tilde{F}$  и добавочных членов высокого порядка точности  $(\vec{E}_\xi, \vec{D}_\xi, \vec{E}_\eta, \vec{D}_\eta)$ ,  $\vec{E}_{ij}^m = \tilde{E}_{ij} + (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ij}$ ,  $\vec{F}_{ij}^m = \tilde{F}_{ij} + (\vec{E}_\eta + \vec{D}_\eta)_{ij}$ . В отличие от добавочных членов высокого порядка точности работы [9], вектора  $\vec{E}_{\xi ij}$  и  $\vec{D}_{\xi ij}$  для положительных и отрицательных собственных значений  $\lambda_{ij}$  запишутся в следующей форме:

$$\vec{E}_{\xi ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{2ij} \bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{1ij} (\bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j} + \bar{E}_{\xi i - \frac{1}{2}j})}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{0ij} \bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}}, & \text{если } \lambda_{ij} > 0, \\ \frac{\bar{\alpha}_{2ij} \bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lij}} + \frac{\bar{\alpha}_{1ij} (\bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j} + \bar{E}_{\xi i - \frac{1}{2}j})}{2 \sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lij}} + \frac{\bar{\alpha}_{0ij} \bar{E}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lij}}, & \text{если } \lambda_{ij} < 0, \end{cases}$$

$$\vec{D}_{\xi ij} = \begin{cases} \frac{\alpha_{2ij} \Delta_+ \bar{D}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{1ij} (\Delta_- \bar{D}_{\xi i + \frac{1}{2}j} + \Delta_+ \widehat{D}_{\xi i - \frac{1}{2}j})}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{0ij} \Delta_- \widehat{D}_{\xi i - \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}}, & \text{если } \lambda_{ij} > 0, \\ \frac{\alpha_{2ij} \Delta_+ \widehat{D}_{\xi i + \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{1ij} (\Delta_- \widehat{D}_{\xi i + \frac{1}{2}j} + \Delta_+ \bar{D}_{\xi i - \frac{1}{2}j})}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}} + \frac{\alpha_{0ij} \Delta_- \bar{D}_{\xi i - \frac{1}{2}j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lij}}, & \text{если } \lambda_{ij} < 0, \end{cases}$$

здесь  $\bar{E}_{\xi i \pm \frac{1}{2}j} = (R \text{sign}(\Lambda_\xi) R^{-1})_{i \pm \frac{1}{2}j} \left[ \frac{I - (\Delta t / \Delta \xi) (R |\Lambda_\xi| R^{-1})_{i \pm \frac{1}{2}j}}{2} \right] \Delta_\pm \tilde{E}_{ij}$ ,

$$\bar{D}_{\xi i \pm \frac{1}{2}j} = (R \text{sign}(\Lambda_\xi) R^{-1})_{i \pm \frac{1}{2}j} \left[ \frac{[(\Delta t / \Delta \xi) (R |\Lambda_\xi| R^{-1})_{i \pm \frac{1}{2}j}]^2 - I}{2} \right] \Delta_\pm \tilde{E}_{ij},$$

$$\hat{D}_{\xi i \pm \frac{1}{2}j} = \bar{E}_{\xi i \pm \frac{1}{2}j} + \bar{D}_{\xi i \pm \frac{1}{2}j}.$$

Значения для весовых коэффициентов  $\alpha_{Lij}, \bar{\alpha}_{Lij} > 0$  ( $L = 0, 1, 2$ ) определяются в виде

$$\alpha_{Lij} = \frac{C_{Lij}}{(\varepsilon + IS_{i+Lj})^3}, \quad \bar{\alpha}_{Lij} = \frac{\bar{C}_{Lij}}{(\varepsilon + IS_{i+Lj})^3},$$

где  $C_{0ij} = \frac{1}{12}$ ,  $C_{1ij} = \frac{1}{2}$ ,  $C_{2ij} = \frac{1}{4}$ ,  $\bar{C}_{0ij} = \frac{1}{4}$ ,  $\bar{C}_{1ij} = \frac{1}{2}$ ,  $\bar{C}_{2ij} = \frac{1}{12}$  [12], а  $IS_{ij}$  является индикатором гладкости решения, и находится суммированием всех средне-квадратичных значений представленных производных искомого вектора  $\tilde{U}$



$$IS_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \Delta \tilde{U}_{i-2j} \right)^2 + \left( \Delta \tilde{U}_{i-1j} \right)^2 \right] + \left[ \Delta^2 \tilde{U}_{i-2j} \right]^2, \quad (4)$$

где  $\Delta \tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{i+1j} - \tilde{U}_{ij}$  и  $\Delta^2 \tilde{U}_{ij} = \Delta \tilde{U}_{i+1j} - \Delta \tilde{U}_{ij}$ .

Чтобы избежать неопределенности в знаменателе весовых коэффициентов  $\alpha_{Lij}$  и  $\bar{\alpha}_{Lij}$ , в (4) добавлен малый коэффициент  $10^{-7} < \varepsilon < 10^{-5}$ . Вектора  $\vec{E}_{\eta ij}$  и  $\vec{D}_{\eta ij}$  запишутся аналогично.

Далее, в системе уравнений (3) члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух векторов: векторов вторых производных и векторов диссипативных членов, а векторы потоков со смешанными производными аппроксимируются явным образом со вторым порядком точности [9]. Линеаризация конвективных слагаемых осуществляется с использованием свойств однородности.

После применения факторизации к системе (3) имеем два одномерных оператора для неявного решения относительно вектора термодинамических параметров матричной прогонкой:

1 шаг.

$$\begin{aligned} \left[ I + \Delta t \left[ \left( \widehat{A}_{i-\frac{1}{2}j}^+ \Delta_- A_{\xi ij}^n + \widehat{A}_{i+\frac{1}{2}j}^- \Delta_+ A_{\xi ij}^n \right) + \Delta \left( \frac{\mu_t \xi_x^2}{ReJ} \right)_{ij} \Delta \left( \frac{1}{U_1^n} \right)_{ij} \right] \right] U_{ij}^* = \\ = RHS_{\xi ij}^n + RHS_{\eta ij}^n, \end{aligned}$$

2 шаг.

$$\begin{aligned} \left[ I + \Delta t \left[ \left( \widehat{B}_{ij-\frac{1}{2}}^+ \Delta_- B_{\eta ij}^n + \widehat{B}_{ij+\frac{1}{2}}^- \Delta_+ B_{\eta ij}^n \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta \left( \frac{\mu_t \eta_z^2}{ReJ} \right)_{ij} \Delta \left( \frac{1}{U_1^n} \right)_{ij} \right] \right] \tilde{U}_{ij}^{n+1} = U_{ij}^*, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} RHS_{\xi ij}^n = \widehat{A}_{i+\frac{1}{2}j}^- \left[ \left( \vec{E}_{\xi i+1j} + \vec{D}_{\xi i+1j} \right) - \left( \vec{E}_{\xi ij} + \vec{D}_{\xi ij} \right) \right]^n + \\ + \widehat{A}_{i-\frac{1}{2}j}^+ \left[ \left( \vec{E}_{\xi ij} + \vec{D}_{\xi ij} \right) - \left( \vec{E}_{\xi i-1j} + \vec{D}_{\xi i-1j} \right) \right]^n, \end{aligned}$$

здесь  $\vec{E}_{\xi ij}$  и  $\vec{D}_{\xi ij}$  представлены выше. Второе слагаемое  $RHS_{\xi ij}^n$  записывается аналогичным образом.

Вектор массовых концентраций смеси определяется с использованием скалярной прогонки. Для аппроксимации первых производных в системе (5) использованы разности против потока с первым порядком точности, а для вторых производных – центральные разности со вторым порядком точности. Температура определяется в соответствии с работой [11].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Расчет производился на разнесенной сетке по пространственным координатам с параметрами  $2 \leq M_\infty \leq 6$ ,  $2 \leq n \leq 15$ ,  $Re = 10^6 - 10^7$ ,  $Pr = 0.7$ .

Для апробации численного метода был выполнен следующий эксперимент: через щель на стенке шириной 0.1см. перпендикулярно основному потоку воздуха (кислород и азот) с параметрами  $M_\infty = 3.75$ ,  $P_\infty = 11090Pa$ ,  $T_\infty = 629.43K$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $Re = 62.73 \times 10^6$  вдувалась звуковая струя водорода с  $T_0 = 800K$  и параметром нерасчетности  $n = 10.29$ . Высота и ширина канала  $H = 15.2$  см и  $L = 45$  см соответственно. Щель располагалась на расстоянии  $L_b = 33$  см от начала обтекаемой пластины. Удельные теплоемкости при постоянном давлении  $k$ -ой компоненты  $C_{pk}$  вычисляются при помощи полиномиальной интерполяции четвертого порядка по температуре [12]

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^5 a_{ki} T^{i-1},$$

где  $\{a_{ki}\}$  – эмпирические константы, определенные для температуры в пределах  $300 < T < 5000K$  [10].

В таблице 1 представлена чувствительность сходимости решений к характеристикам сетки путем оценки суммарных  $L_1^\rho = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|$  и среднеквадратичных  $L_2^\rho = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|^2}$  отклонений норм невязок плотности. Здесь  $\varepsilon_M^n = \max_{(i,j) \in M} |\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^n|$ ,  $\varepsilon_{\hat{M}}^n = \max_{(i,j) \in \hat{M}} |\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^n|$ ;  $N$  – число итераций. Оценки были построены для WENO и ENO схем путем последовательного измельчения сеток и при этом в качестве начальной принималась сетка  $M$  с  $I \times J$  узлами, затем осуществлялась вариация  $M$  и

Таблица 1 – Зависимость суммарного и среднеквадратичного отклонений (разностей плотности) от числа узлов для WENO и ENO схемы

Число узлов		WENO	ENO	WENO	ENO
$M=I \times J$	$\hat{M}=M \times L$	$L_1^p$	$L_1^p$	$L_2^p$	$L_2^p$
$I = 301,$	$M = I, L = 221$	$6,09 \cdot 10^{-2}$	$8,02 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
$J = 261$	$M = I, L = 281$	$3,37 \cdot 10^{-2}$	$3,49 \cdot 10^{-2}$	$6,27 \cdot 10^{-4}$	$7,22 \cdot 10^{-4}$
$I = 321,$	$M = 301, L = J$	$2,74 \cdot 10^{-2}$	$3,87 \cdot 10^{-2}$	$5,29 \cdot 10^{-4}$	$8,03 \cdot 10^{-4}$
$J = 281$	$M = 341, L = J$	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$3,43 \cdot 10^{-2}$	$6,11 \cdot 10^{-4}$	$7,86 \cdot 10^{-4}$

$L$  узлов сетки  $\hat{M}$ . Как следует из таблицы, разность отклонения величин норм невязок плотности уменьшается с измельчением сетки. В соответствии с этим сетка  $\hat{M}$  с узлами  $301 \times 281$  имеет минимальные значения, при этом показатель  $L^p$  для WENO схемы меньше, чем аналогичный показатель для ENO.

Динамика сходимости численного решения иллюстрируется на рисунке 2, данные результаты были получены для сетки с узлами  $301 \times 281$  для WENO и ENO схем соответственно (кривая 1 и кривая 2). В обоих случаях скорость сходимости решения оказывается довольно высокой. Однако для WENO схемы кривая сходимости лежит ниже кривой для ENO схем и не обладает сильными флуктуациями, присущими кривой 2.

Для проведения сравнения с опытными данными выполнялся расчет задачи плоского сверхзвукового течения воздуха ( $M_\infty = 2.9$ ,  $P_\infty = 0.0663 \text{ MPa}$ ,  $T_\infty = 108 \text{ K}$ ) с перпендикулярным вдувом звуковой струи гелия ( $T_0 = 217 \text{ K}$ ,  $P_0 = 1.24 \text{ MPa}$ ), через щель на нижней стенке шириной  $0.0559$  см. Высота и ширина канала  $H = 7.62$  см и  $L = 25$  см соответственно. В данном эксперименте необходимо знание  $C_{pk}$  (Дж/(Мол.К)) компонент  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $He$  при температуре ниже  $300 \text{ K}$ . Здесь используются экспериментальные данные работы [13], в которой приведены зависимости  $C_{pk}$  от низких значений температуры.

Для оценки точности разностной схемы и ее эффективности были про-

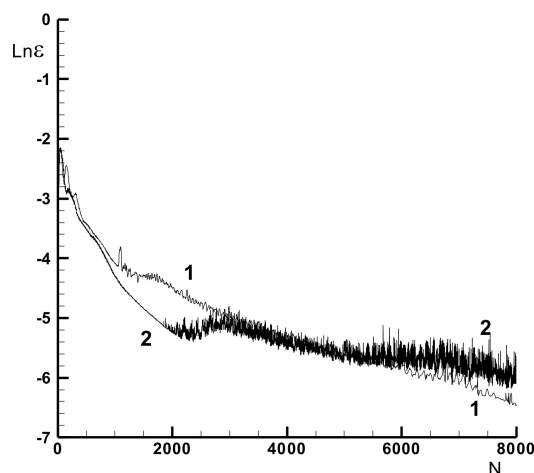


Рисунок 2 – Динамика сходимости численного решения. Кривая 1 – WENO схема, кривая 2 – ENO схема,  $M_\infty = 3.75$ ,  $P_\infty = 11090 \text{ Pa}$ ,  $T_\infty = 629.43 \text{ K}$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $Re = 62.73 \times 10^6$ ,  $T_0 = 800 \text{ K}$ ,  $n = 10.29$

ведены расчеты распределения давления на стенке перед щелью и за ней на последовательности сеток с числом узлов от  $301 \times 221$  до  $421 \times 281$ . На рисунке 3 показаны распределения давления на стенке, рассчитанные с различными узлами, где кривые: 1) — — —  $421 \times 281$ ; 2) —  $401 \times 281$ ; 3) — · —  $381 \times 281$ ; 4) · · ·  $301 \times 281$ ; 5) — · —  $301 \times 221$ ; ● ● ● - эксперимент из работы [1]. Увеличение числа узлов расчетной сетки приводит к тому, что эксперименты и кривые расчетов, начиная с числа узлов  $381 \times 281$  и выше, практически совпадают, причем из рисунка видно хорошее согласие численных и экспериментальных данных. Таким образом, можно говорить о достаточной точности схемы для сеток с числом узлов  $381 \times 281$  и выше, что позволяет проводить расчет данной задачи с этими узлами сетки.

Далее был выполнен численный эксперимент по изучению взаимодействия поперечной струи с сверхзвуковым набегающим потоком в зависимости от параметра нерасчетности. Через щель на стенке шириной  $0.2 \text{ см}$ , вдувается звуковая струя водорода с  $T_0 = 800 \text{ K}$ ,  $n = 15$ . Параметры набегающего потока следующие:  $M_\infty = 3.75$ ,  $T_\infty = 629.43 \text{ K}$ ,  $Re = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$  высота и ширина канала  $H = 4 \text{ см}$  и  $L = 11 \text{ см}$  соответственно. Щель располагается на нижней стенке на расстоянии  $L_b = 5 \text{ см}$  от начала

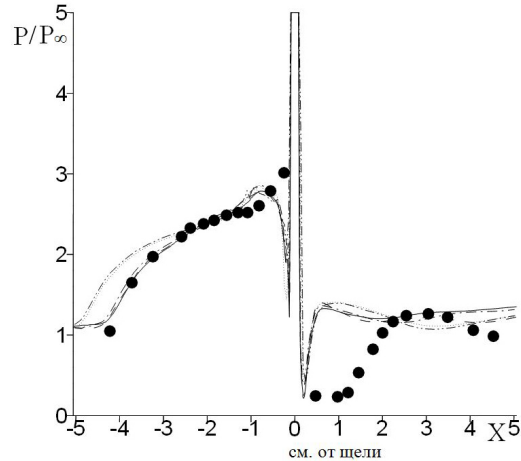


Рисунок 3 – Распределение давления на стенке 1) – – – 421x281; 2) – 401x281; 3) – · – · – 381x281; 4) · · · · 301x281; 5) – · · · – 301x221; ●●● – эксперимент из работы [1].  
 $M_\infty = 2.9$ ,  $P_\infty = 0.0663 \text{ MPa}$ ,  $T_\infty = 108 \text{ K}$ ,  $T_0 = 217 \text{ K}$ ,  $P_0 = 1.24 \text{ MPa}$

расчетной области. Толщина пограничного слоя во входном сечении составляет  $\delta = 0.38$  см. Как известно, структура потока в области взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем существенно зависит от интенсивности скачка и угла его падения [4]. В свою очередь интенсивность и угол падения скачка зависит от параметров струи и потока. Чем больше интенсивность скачка уплотнения, тем поток у стенки испытывает большее торможение, приводящее к его отрыву. Возникающая отрывная зона, как правило, является причиной отклонения внешнего потока, которое может вызывать образование характерной системы скачков уплотнения [4]. Из распределения изобар, представленного на рисунке 4, видно образование системы скачков уплотнения при взаимодействии ударной волны с верхним пограничным слоем. Из-за торможения набегающего потока перед вдуваемой струей возникает головной скачок уплотнения 1, который достигает верхней границы канала. Этот скачок уплотнения создает положительный градиент давления, достаточный для отрыва пограничного слоя на верхней стенке канала (см. рисунок 5 - распределение поля вектора скорости). Косой скачок уплотнения 2,

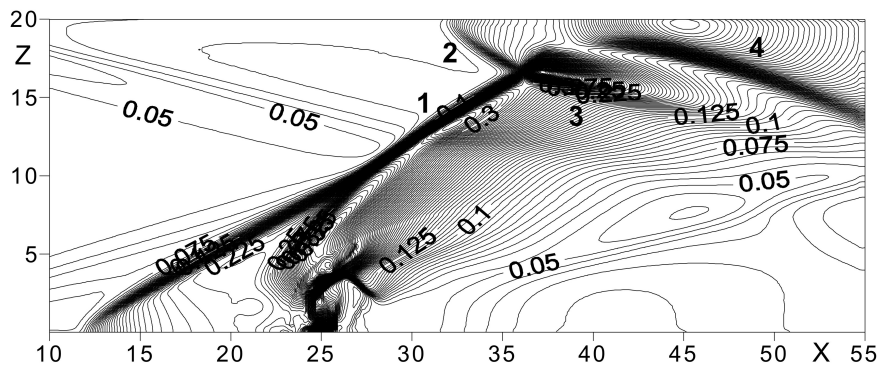


Рисунок 4 – Распределение изобар  $n = 15$ ,  $T_0 = 800K$ ,  $M_\infty = 3.75$ ,  
 $T_\infty = 629.43K$ ,  $Re = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$

отделяющий зону отрыва пограничного слоя от сверхзвукового набегающего потока, образуется выше по течению от головной ударной волны. Распространение ударной волны 2 во внешний поток сопровождается возникновением отраженного скачка уплотнения 3. Далее ниже по течению в результате присоединения оторвавшегося потока к обтекаемой стенке, где течение опять становится безотрывным, формируется скачок уплотнения 4, возникающий в области смешения оторвавшегося пограничного слоя с внешним потоком. Из рисунка видно, что головной скачок 1, косой 2 и отраженный 3 скачки уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют сложную  $\lambda$  образную систему скачков уплотнения, которая аналогична  $\lambda$  структуре, сформированной перед струей на нижней стенке канала [14]. Из рисунка 6 распределения местного числа Маха наблюдается наличие дозвуковой зоны на верхней стенке канала и ее глубина составила 0.178 см.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный алгоритм для расчета уравнений Навье-Стокса на основе WENO-схемы позволяет моделировать течение сверхзвукового многокомпонентного газа. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. С помощью проведенных численных экспериментов получена отрывная область вследствие взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем на верхней стенке канала.

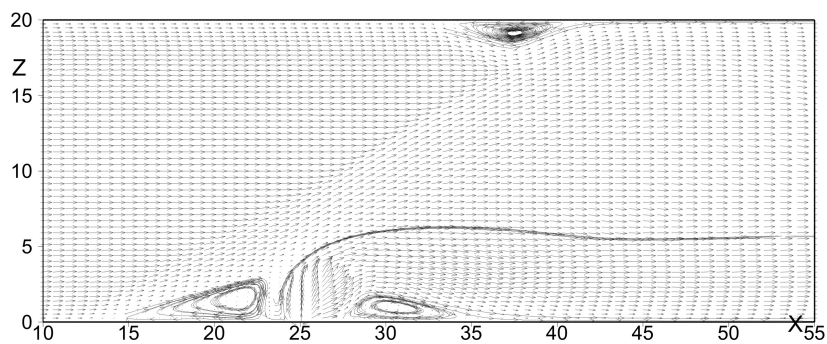


Рисунок 5 – Поле вектора скорости  $n = 15$ ,  $T_0 = 800K$ ,  $M_\infty = 3.75$ ,  
 $T_\infty = 629.43K$ ,  $Re = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$

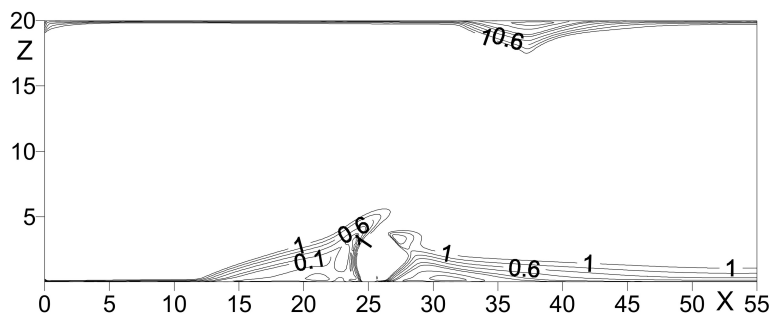
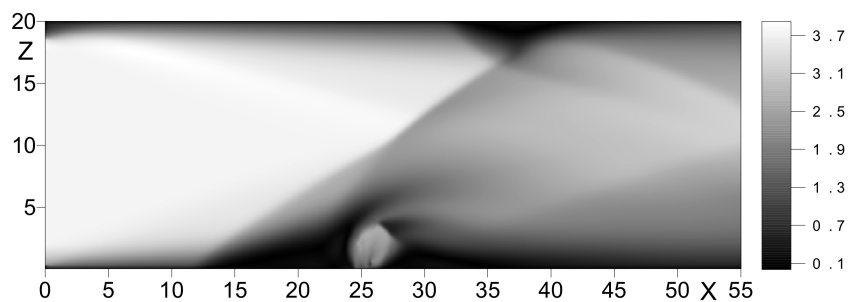


Рисунок 6 – Распределение местного числа Маха  $n = 15$ ,  $T_0 = 800K$ ,  $M_\infty = 3.75$ ,  
 $T_\infty = 629.43K$ ,  $Re = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Шунь Дж.Ш., Юнь С. Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // *Аэрокосмическая техника*. — 1990. — Т.70, № 10. — С. 102–113.
- 2 Grasso F., Magi V. Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // *AIAA Journal*. — 1995. — Vol. 33, № 1. — P. 56–62.
- 3 Chenault F.C., Beran P.S.  $k - \varepsilon$  and Reynolds Stress Turbulence Model Comparisons for Two-Dimensional Injection Flows // *AIAA Journal*. — 1998. — Vol. 36, № 8. — P. 1401–1412.
- 4 Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т. *Аэродинамика отрывных течений*. — Москва: Высшая школа, 1988. — С. 351.
- 5 Hadjadj A. Shock wave boundary layer interaction // *Shock Waves*. Springer.P.— 2009. — P. 449–452.
- 6 Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R. Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes // *Applied Num. Math.* — 1986. — № 2. — P. 347–377.
- 7 Ершов С.В. Квазимонотонная ENO-схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // *Математическое моделирование*. — 1994. — Т.6, № 11. — С. 63–75.
- 8 Yang J.Y. Third Order Non-Oscillatory Schemes for the Euler Equations // *AIAA Journal*. — 1991. — Vol.29, № 10. — P. 1611–1618.
- 9 Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // *Вычислительные технологии*. — 2007. — Т. 12, № 4. — С. 17–25.
- 10 Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // *Journ. of Comput. Phys.* — 1992. № 101. — P. 104–129.
- 11 Bruel P., Naimanova A.Zh. Computation of the normal injection of a hydrogen jet into a supersonic air flow // *Thermophysics and Aeromechanics*. — 2010. — Vol. 17, № 4. — P. 531–541.



12 Liu X., Osher S., and Chan T. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 115, — P. 200–212.

13 Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A. CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // SANDIA Report SAND89-8009. — 1989.

14 Кикоина И. К. Таблицы Физических величин. — Москва: Атомиздат, 1976. — 1008 с.

15 Beketaeva A.O., Naimanova A.Zh. Numerical simulation of a supersonic flow with transverse injection of jets // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2004. — Vol.45, № 3. — P.367–374.

*Статья поступила в редакцию 08.06.2015*

Абдалла А., Бекетаева Э.О., Шахан Н.Ш. КӨПКOMPONENTTI ГАЗ ҚОСПАСЫНЫҢ ЖОҒАРҒЫ ДЫБЫСТЫ ЖЫЛДАМДЫҚПЕНЕН АҒУЫ ЕСЕБІН ШЕШУГЕ АРНАЛҒАН WENO-СҰЛБАСЫН ҚҰРУ

Жоғарғы дыбысты газ ағынының математикалық модельденуі, Навье-Стокс теңдеулер жүйесін шешуге әкеліп соқтыртады. Мұндағы ағыс газодинамикалық секірілімдердің пайда болуыменен сипатталады. Бұл өз кезегінде жоғарғы дәлдікке ие сандық әдістердің қолданылуын талап етеді. ENO(Хартен және басқалары, 1987ж.) және WENO(Янг, 1991ж.) сұлбалары жоғарғы дәрежелік аппроксимацияға ие. Жұмыста, төртінші дәрежелік аппроксимацияға ие WENO-сұлбасының құрылуы, идеалды көпкомпонентті газ үшін жазылған және Фавр бойынша орташаланған Навье-Стокс теңдеулеріне арналады. Ұсынылған алгоритм негізінде жазықтық жоғарғы дыбыстық газ ағысының, төменгі қабатта орналасқан саңылауынан көлденеңнен үрілетін гелий және сутегі ағыстарыменен әрекеттесуі сандық модельденеді. Тәжірибелік ақпараттарменен салыстырылым жасалынады. Құлайтын соққы толқынының құбырдың үстіңгі қабырғасында орналасқан шекаралық қабатыменен әрекеттесуі зерттеледі.

Abdalla A., Beketaeva A.O., Shakhan N.Sh. CONSTRUCTION OF WENO-SCHEME FOR THE TASK OF SUPERSONIC FLOW OF MULTICOMPONENT GASEOUS MIXTURE

Mathematical modeling of supersonic air stream is reducing to the solution of Navier-Stokes equations system, where the real flow is characterizing with the appearance of gaseous dynamical jumps. This leads to the usage of numerical methods of high order of accuracy. ENO-scheme (Harten and others, 1987) and WENO-schemes (Yang, 1991) have sufficiently high order of approximation. In work WENO-scheme with the fourth order of approximation is constructing for the solution of Favre-averaged Navier-Stokes equations for the flow of ideal multicomponent gas. With the proposed algorithm, interaction of plane supersonic stream of air with the transverse jets of helium and hydrogen injecting from the hole placed on the bottom wall is numerically modeling. Comparison with the experimental data is done. Interaction of falling shock wave with the boundary layer on top wall of channel is investigated.

УДК 517.925/926; 517.938

T.M. ALDIBEKOV

al-Farabi Kazakh National university  
050038 Almaty, 71 al-Farabi ave., e-mail: tamash59@mail.ru

## ON EXPONENTIALLY SEPARATED DIFFERENTIAL SYSTEMS

Exponentially separated linear homogeneous system of ordinary differential equations with continuous limited coefficients in critical cases of Lyapunov exponents is considered. The generalized exponentially separated linear system of differential equations with regard to a monotonically increasing function is defined. It is established that if a linear homogeneous system of differential equations is generalized exponentially separated, Lyapunov's generalized exponents are stable in a class of small perturbations.

The work of Perron [1], see also [2, p. 193, theorem 9] was a source of definition of an exponential separation. Then these systems were studied in B.F.Bylov's [3], R.E. Vinograd's [4], V.M. Millionshchikov's [5], [6], Lillo's [7] works. The definition of an exponential separation has connection with the definition of an exponential dichotomy D.V. Anosov [8]. Some information on the theory of Lyapunov's generalized exponents is contained in

---

© T.M. Aldibekov, 2015.

Keywords: *separation, exponential, linear system, Lyapunov exponents, stability, differential*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34D05, 34D08, 34D20, 34E05

T.M.Aldibekov's works [9-12]. In the paper [11] the definition of an exponential separation is spread to linear systems with unlimited coefficients. In the present work using Lyapunov's generalized exponents, the subclass of linear systems with continuous limited coefficients is investigated, where the definition of an exponential separated loses its meaning.

The class of linear homogeneous systems of differential equations is considered

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1)$$

where  $t \in I \equiv [t_0, +\infty)$ , ( $t_0 > 1$ ),  $x \in R^n$ ,  $A(t)$  is a continuous matrix of the dimension  $n \times n$ , satisfying to the inequality

$$\|A(t)\| \leq K\psi(t), \quad (K > 0), \quad (2)$$

$\psi(t)$  is a continuous, positive, distinct from a constant fixed function, such that the function

$$q(t) = \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau, \quad q(t) \uparrow +\infty \text{ as } t \uparrow +\infty$$

and satisfies to the conditions

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{q(t)} = 0, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{q(t)}{t} = 0, \quad \ln t < q(t) < t, \quad \text{at } t \geq t_0 > t.$$

Note that Lyapunov's exponents of the linear system (1) accept zero values, i.e. a so-called critical case takes place.

The generalized exponent of a nonzero solution  $x(t)$  of the linear system (1) is determined by the formula

$$\lambda[x, q] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \ln \|x(t)\|.$$

The generalized exponents of the fundamental system of solutions, in which the sum of the generalized exponents of solutions is the smallest compared with other fundamental systems of solutions, are called Lyapunov's generalized exponents of the linear system (1).

As a rule, Lyapunov's generalized exponents of the linear system (1) are designated as follows:

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \dots \leq \lambda_1(A).$$

DEFINITION 1. *The linear system (1) satisfying to the condition (2) is called generalized exponentially separated, if it has solutions  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , such that for all  $t \geq s \geq t_0$  the inequalities are fulfilled*

$$\frac{\|x_{i-1}(t)\|}{\|x_{i-1}(s)\|} \div \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geq B e^{\alpha[q(t)-q(s)]}, \quad i = \overline{2, n}$$

with some constants  $\alpha > 0$ ,  $B \geq 1$  and  $q(t) = \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau$ .

DEFINITION 2. *If the linearly perturbed system*

$$\dot{x} = (A(t) + P(t))x, \quad (3)$$

where a continuous matrix of perturbation  $P(t)$ ,  $t \geq t_0$ , satisfies the conditions

$$\|P(t)\| \leq K\psi(t) \text{ at } t \geq t_0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|P(t)\|}{\psi(t)} = 0,$$

has Lyapunov's generalized exponents, which coincide with generalized Lyapunov's exponents of the linear system (1), we can say that the linear system (1) satisfying to the condition (2) has Lyapunov's stable generalized exponents.

ТЕОРЕМА 1 *A linear homogeneous diagonal system*

$$\frac{dx}{dt} = A_d(t)x, \quad (4)$$

where

$$A_d(t) = \text{diag}\{a_1(t), \dots, a_n(t)\}, \quad \|A_d(t)\| \leq K\psi(t), \quad t \in I,$$

$a_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , are continuous functions satisfying to inequalities

$$a_{i-1}(t) - a_i(t) \geq \alpha\psi(t), \quad \alpha > 0, \quad t \in I, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

has Lyapunov's stable generalized exponents.

*Доказательство.* Note the perturbed system

$$\frac{dx}{dt} = (A_d(t) + P(t))x \quad (5)$$

in the coordinate form is written

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t)x_i + \sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (6)$$

It is known that from

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|P(t)\|}{\psi(t)} = 0$$

it follows that for any  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , the equality takes place

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0. \quad (7)$$

Following the work [3, pp. 65-78] it is easily established that the linearly perturbed system (6) satisfying the condition (7) has  $n$  linearly independent solutions  $x_k = \{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; satisfying to equalities

$$a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_{\mu k}}{x_{kk}} = 0, \quad \mu \neq k, \quad b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\psi(t)} \frac{x'_{kk}}{x_{kk}} - \frac{a_k(t)}{\psi(t)} \right) = 0.$$

From b) it follows that for any  $\varepsilon > 0$  there exists such  $T \in I$ , that for any  $t > T$ ,  $k = 1, \dots, n$ , inequalities take place

$$a_k(t) - \varepsilon\psi(t) < \frac{x'_{kk}}{x_{kk}} < a_k(t) + \varepsilon\psi(t).$$

Integrating we obtain

$$\int_{t_0}^t a_k(\tau) d\tau - \varepsilon \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau < \ln \frac{|x_{kk}(t)|}{|x_{kk}(t_0)|} < \int_{t_0}^t a_k(\tau) d\tau + \varepsilon \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau.$$

Therefore, inequalities take place

$$\frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t a_k(\tau) d\tau - \varepsilon < \frac{1}{q(t)} \ln \frac{|x_{kk}(t)|}{|x_{kk}(t_0)|} < \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t a_k(\tau) d\tau + \varepsilon.$$

From *a*) it follows that the  $k$ -th coordinate of the solution  $x_k$  is the leader, which implies that the equalities take place

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \ln |x_k(t)| = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t a_k(\tau) d\tau = \lambda_k(A_d).$$

Here  $\lambda_1(A_d), \dots, \lambda_n(A_d)$  are Lyapunov's generalized exponents of the system (4), besides they are different. Therefore, the fundamental system of solutions  $x_1, x_2, \dots, x_n$  organizes a normal base of the linearly perturbed system (5). Therefore, by the definition the values

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \ln |x_k(t)| = \lambda_k(A_d + P), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

are Lyapunov's generalized exponents of the system (5) and the equalities take place

$$\lambda_i(A_d + P) = \lambda_i(A_d), \quad i = 1, \dots, n;$$

Therefore, the linear system (4) has Lyapunov's stable generalized exponents. Theorem 1 is proved.  $\square$

**ТЕОРЕМА 2** *The generalized exponentially separated linear system (1) satisfying to the condition (2) has Lyapunov's stable generalized exponents.*

*Доказательство.* By the definition the linear system (1) has solutions  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , for which at all  $t \geq s \geq t_0$  inequalities are fulfilled

$$\frac{\|x_{i-1}(t)\|}{\|x_{i-1}(s)\|} \div \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geq B e^{\alpha[q(t)-q(s)]}, \quad i = \overline{2, n} \quad (8)$$

with some constants  $\alpha > 0$ ,  $B \geq 1$ .

Hence, it follows that the solutions  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  have various generalized indices, therefore from the property of the generalized indices it follows that they organize a fundamental system of solutions of the linear system (1).

Let

$$x_i(t) = \|x_i(t)\| \varphi_i(t), \quad \text{where } \varphi_i(t) = \frac{x_i(t)}{\|x_i(t)\|}, \quad i = \overline{1, n},$$

and we present a fundamental matrix of solutions in a form

$$X = \Phi D, \quad (9)$$

where

$$\Phi(t) = [\varphi_1, \dots, \varphi_n], \quad |\det \Phi| > 0, \quad D = \text{diag}(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_n\|).$$

The equalities take place

$$\frac{1}{2\|x_i(t)\|^2} \frac{d\|x_i(t)\|^2}{dt} = \frac{(A(t)x_i(t), x_i(t))}{\|x_i(t)\|^2} = (A(t)\varphi_i(t), \varphi_i(t)) = a_i(t),$$

where  $a_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , continuous functions at  $t \geq t_0$ .

Hence integrating, for any  $t \geq s \geq t_0$  we shall have

$$\|x_i(t)\| = \|x_i(s)\| \exp\left(\int_s^t a_i(\tau) d\tau\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

From (8), (10) it follows that

$$\exp\left(\int_s^t (a_{i-1}(\tau) - a_i(\tau)) d\tau\right) \geq B \exp[\alpha(q(t) - q(s))], \quad i = 2, \dots, n.$$

This implies that the inequalities are fulfilled

$$a_{i-1}(t) - a_i(t) \geq \alpha\psi(t), \quad \alpha > 0, \quad t \in I, \quad i \in \{2, \dots, n\}. \quad (11)$$

Let us carry out transformation in the system (1) taking as a matrix of transformation the matrix  $\Phi(t)$

$$x = \Phi y. \quad (12)$$

Then we receive the linear system

$$\dot{y} = D^* y, \quad (13)$$

where

$$D^* = \Phi^{-1} A \Phi - \Phi^{-1} \dot{\Phi}.$$



Note that in the transformation (12), matrixes  $\Phi(t)$ ,  $\Phi^{-1}(t)$  are continuous limited, and the matrix  $\dot{\Phi}(t)$  is continuous and  $\|\dot{\Phi}(t)\| \leq K\psi(t)$ . Therefore, (12) is the generalized Lyapunov's transformation.

To the fundamental matrix  $X$  linear to the system (1) there corresponds the fundamental matrix  $Y$  of the linear system (13) and from the equality

$$X = \Phi Y$$

it follows that

$$Y = \Phi^{-1} X. \quad (14)$$

Substituting (9) in (14) we have

$$Y = \Phi^{-1} \Phi D = D = \text{diag}(\|x_1(t)\|, \dots, \|x_n(t)\|)$$

or

$$Y = \text{diag} \left( \|x_1(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t a_1 ds}, \dots, \|x_n(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t a_n ds} \right)$$

The equation has this a fundamental system of the solutions

$$\dot{y} = Dy,$$

where

$$D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Therefore, owing to uniqueness the equality takes place

$$D^* = D.$$

Thus, the generalized exponentially separated linear system (1) satisfying to the condition (2) by application of Lyapunov's generalized transformation is reduced to a diagonal system satisfying to the condition (11). As Lyapunov's generalized transformation keeps stability, from theorem 1 it follows that Lyapunov's generalized exponents of the linear system (1) are stable.

Theorem 2 is proved.  $\square$

EXAMPLE 1 *Let us consider the linear system*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{4\sqrt{t}}x + \frac{\sin t}{t+1}y \\ \dot{y} = \frac{\cos t}{t+2014}x - \frac{1}{2\sqrt{t}}y \end{cases}, \quad (t > 1).$$

Note that the linear system from diagonal coefficients of this system has Lyapunov's generalized exponents

$$\lambda_1(q) = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2(q) = -1,$$

where  $q(t) = \sqrt{t}$  and the diagonal system is generalized exponentially separated, and the approval of theorem 2 is fulfilled. Therefore, this system has the same Lyapunov's generalized exponents. This implies that the system is stable according to Lyapunov.

## REFERENCES

- 1 Perron O. Uber lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhangige Variable reel ist. // J. Reine und angew. Math. — 1931. — B. 142. — P. 254–270.
- 2 Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. — M.–L.: Gostekhizdat, — 1949. — P. 152–153.
- 3 Bylov B.F. On Linear Equation System Reduction to a Diagonal Aspect // Mathematical Collection. — 1965. — V. 67, №3. — P. 338–344.
- 4 Vinograd R.E. The general case of resistance the characteristic values and the existence of the leading coordinate // DAN USSR. — 1958. — V. 119., №4. — P. 633–635.
- 5 Millionshchikov V.M. Systems with Integral Separation are Dense Everywhere in the Set of Linear Systems of Differential Equations // Differential Equations. — 1969. — V.5., №7. — P. 1167–1170.
- 6 Millionshchikov V.M. On exponents of Exponential Separation // Mathematical Collection. — 1984. — V.124, №4. — P. 451–485.

7 Lillo J.C. Perturbations of nonlinear systems // Acta Math. — 1960. — V. 103., №1–2. — P. 123–128.

8 Anosov D.V. Geodesic Flows on the Closed Riemannian Varieties of Negative Curvature // Tr. Math. Inst. after Steklov V.A. — M.: Nauka, — 1967. — P.1–235.

9 Aldibekov T.M. The Analog of Lyapunov's Theorem on Stability at the First Approximation // Differential Equations. — 2006. — V.42., №6. — P. 859–860.

10 Aldibekov T.M. On Stability at the First Approximation // Journal "Modern Problems of Science and Education". — 2008. — P. 133.

11 Aldibekov T.M. Lyapunov's Generalized Exponents. — Almaty. 2011.

12 Aldibekov T.M., Aldazharova M.M. On the stability by the first approximation of Lyapunov characteristic exponents in critical cases // Differential Equations. — 2014. — Vol. 50., №10. — P. 1384–1388.

*Received 11.03.2015*

Әлдибеков Т.М. ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ БӨЛІКТЕНГЕН ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖҮЙЕЛЕРІ ТУРАЛЫ

Коэффициенттері үзіліссіз шенелген сызықты біртекті жәй дифференциалдық теңдеулердің экспоненциалды бөліктенген жүйелері Ляпунов көрсеткіштерінің сыни жағдайларында қарастырылады. Жалпылама экспоненциалды бөліктенген сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйелері кейбір монотонды өспелі функцияларға қатысты анықталады. Егер сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулердің жүйесі жалпылама экспоненциалды бөліктенген болса, онда жалпылама Ляпунов көрсеткіштері қандайда бір аз әсер беретін класта орнықты болатыны тағайындалған.

---

Алдибеков Т.М. ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАЗДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается экспоненциально разделенная линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными коэффициентами в критических случаях показателей Ляпунова. Определяется обобщенно экспоненциально разделенная линейная система дифференциальных уравнений относительно некоторой монотонно возрастающей функции. Установлено, что если линейная однородная система дифференциальных уравнений обобщенно экспоненциально разделенная, то обобщенные показатели Ляпунова являются устойчивыми в некотором классе малых возмущений.

УДК 519.63

К.А. БЕКМАГАНБЕТОВ, Е.Т. ОРАЗГАЛИЕВ

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал*  
010010, Астана, ул. Кажымукана, 11, e-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

## НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА–НИКОЛЬСКОГО И ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

В статье доказаны неравенства Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболического креста и получены оценки наилучших приближений в метрике анизотропных пространств Лоренца.

Ключевые слова: *анизотропные пространства Лоренца, неравенство Бернштейна–Никольского, наилучшее приближение.*

### 1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  – измеримая функция, заданная на  $[0, 1]^n$ . Через  $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$  обозначим функцию, полученную применением к первой невозрастающей перестановки последовательно по переменным  $x_1, \dots, x_n$  при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  удовлетворяют условиям, если  $0 < p_j < \infty$ , то  $0 < q_j \leq \infty$ , если же  $p_j = \infty$ , то и  $q_j = \infty$  для  $j = 1, \dots, n$ , и  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  – некоторая фиксированная

---

© К.А. Бекмаганбетов, Е.Т. Оразгалиев, 2015.

Keywords: *anisotropic Lorentz space, Bernstein-Nikolsky inequality, the best approximation*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

перестановка множества  $\{1, \dots, n\}$ . Анизотропным пространством Лоренца  $L_{pq^*} = L_{pq^*}([0, 1]^n)$  (см. Е.Д. Нурсултанов [1], в случае  $\star = \{1, \dots, n\}$  – А.П. Блозинский [2]) называется множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{pq^*}} = \left( \int_0^1 \dots \left( \int_0^1 \left| t_1^{1/p_1} \dots t_n^{1/p_n} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right|^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right. \\ \left. \dots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{1/q_{j_n}} < \infty.$$

Здесь выражение  $\left( \int_0^1 (G(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}$  при  $q = \infty$  понимается как  $\sup_{s>0} G(s)$ .

ЛЕММА 1 ([3]). Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < r = (r_1, \dots, r_n) < \infty$ ,  $1 + 1/r = 1/p + 1/s$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $d = (d_1, \dots, d_n) \leq \infty$ ,  $1/\theta = (1/d - 1/q)_+$  и  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ . Тогда справедливо неравенство

$$\|f * g\|_{L_{rd^*}} \leq C \|f\|_{L_{pq^*}} \|g\|_{L_{s\theta^*}},$$

здесь  $(f * g)(x)$  – свертка функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Пусть  $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$  – кратный тригонометрический ряд, обозначим

$$\Delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle},$$

где  $\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : [2^{s_i-1}] \leq |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ .

Пусть  $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$ ,  $0 < q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$  и  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ . Анизотропным пространством Бесова  $B_p^{\alpha q^*} = B_p^{\alpha q^*}([0, 1]^n)$  [4] называется множество рядов  $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q^*}} = \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f)\|_{L_p} \right\} \right\|_{l_{q^*}},$$

где  $\|\cdot\|_{L_p}$  – норма пространства Лебега со смешанной метрикой  $L_p = L_p([0, 1]^n)$  и  $\|\cdot\|_{l_{q^*}}$  – норма дискретного пространства Лебега  $l_{q^*}$ .

Сформулируем в виде леммы частный случай теоремы 4 из [4].

ЛЕММА 2. Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < r = (r_1, \dots, r_n) < \infty$ ,  $0 < q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$  и  $\sigma = 1/p - 1/r$  и  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ . Тогда справедливы вложения

$$B_p^{\sigma q^\star} \hookrightarrow L_{rq^\star} \hookrightarrow B_p^{-\sigma q^\star}.$$

Пусть  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , где  $\gamma_j > 0$  для всех  $j = 1, \dots, n$  и  $\bar{k} = \max(1, |k|)$ . Множество

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_n) : k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n, \prod_{j=1}^n \bar{k}_j^{\gamma_j} \leq N \right\},$$

называется гиперболическим крестом порядка  $N$ , соответствующим  $\gamma$ , а множество

$$Q(N, \gamma) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_+^n : (s, \gamma) \leq N} \rho(s)$$

— ступенчатым крестом.

ЛЕММА 3. Пусть  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , где  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_j > 0$ ,  $q_j > 0$  для всех  $j = 1, \dots, n$ ,  $\nu \geq 0$  и  $M \in \mathbb{N}$ ,

$$A_{M, \gamma}(\beta, \nu, q) =$$

$$= \left( \sum_{k_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{k_1=0}^{\lfloor \frac{M - \gamma_2 k_2 - \dots - \gamma_n k_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n \beta_j k_j} (M - \gamma_1 k_1 - \dots - \gamma_n k_n)^\nu \right)^{q_1} \right)^{q_2/q_1} \dots \right)^{1/q_n}.$$

Пусть  $\zeta = \max\{\beta_j/\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$ ,  $B = \{i : \beta_i/\gamma_i = \zeta, i = 1, \dots, n\}$  и  $i_0 = \min\{i : i \in B\}$ , тогда

$$A_{M, \gamma}(\beta, \nu, q) \sim \begin{cases} 2^{\zeta M} M^{\sum_{i \in B} 1/q_i - 1/q_{i_0}} & \text{при } \zeta > 0 \\ M^{\nu + \sum_{i \in B} 1/q_i} & \text{при } \zeta = 0 \\ M^\nu & \text{при } \zeta < 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Доказательство следует из следующих асимптотических соотношений

$$\sum_{k=0}^M 2^{\beta k} (M - k)^\nu \sim \begin{cases} 2^{\beta M} & \text{при } \beta > 0 \\ M^{\nu+1} & \text{при } \beta = 0 \\ M^\nu & \text{при } \beta < 0 \end{cases}.$$

□

ЛЕММА 4. Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $0 < q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$  и  $U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)} = \sum_{k \in Q(M,\gamma)} \bar{k}^\alpha e^{2\pi i(k,x)}$ . Тогда справедливо

$$\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{L_{r,q^\star}} \sim A_{M,\gamma}(\alpha + \frac{1}{r'}, 0, q^\star).$$

Доказательство. Исходя из оценок одномерных ядер Бернулли, получим

$$\|\Delta_s(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)})\|_{L_p} \sim 2^{\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \frac{1}{r'_j}) s_j}. \quad (2)$$

Согласно лемме 2 и (2) имеем

$$\begin{aligned} & \|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{L_{r,q^\star}} \leq C_1 \|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{B_p^{\sigma q^\star}} = \\ & = C_1 \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n \sigma_j s_j} \|\Delta_s(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)})\|_{L_p} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} \\ & \sim \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r'_j} + \alpha_j + \frac{1}{p'_j}) s_j} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} = \\ & = \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \frac{1}{r'_j}) s_j} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} = \\ & = A_M(\alpha + \frac{1}{r'}, 0, q^\star). \quad (3) \end{aligned}$$

Аналогично, согласно лемме 2 и (2) имеем

$$\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{L_{r,q^\star}} \geq C_1 \|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{B_p^{-\sigma q^\star}} =$$



$$\begin{aligned}
&= C_1 \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n -\sigma_j s_j} \left\| \Delta_s(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}) \right\|_{L_p} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} \\
&\sim \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} + \alpha_j + \frac{1}{p_j}) s_j} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} = \\
&= \left( \sum_{s_n=0}^{\lfloor \frac{M}{\gamma_n} \rfloor} \dots \left( \sum_{s_1=0}^{\lfloor \frac{M-\gamma_2 s_2 - \dots - \gamma_n s_n}{\gamma_1} \rfloor} \left( 2^{\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \frac{1}{r_j}) s_j} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \dots \right)^{1/q_{j_n}} = \\
&= A_M(\alpha + \frac{1}{r^*}, 0, q^*). \tag{4}
\end{aligned}$$

Объединяя (11) и (4), получаем

$$\left\| U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{r q^*}} \sim A_M(\alpha + \frac{1}{r^*}, 0, q^*).$$

□

## 2. НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА–НИКОЛЬСКОГО

Пусть  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ ,  $T_{\Gamma(N,\gamma)}(x) = \sum_{k \in \Gamma(N,\gamma)} c_k e^{2\pi i(k,x)}$  – тригонометрический полином со спектром из гиперболического креста и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , обозначим

$$T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \Gamma(N,\gamma)} \bar{k}^\alpha c_k e^{2\pi i(k,x)},$$

где  $\bar{k}^\alpha = \prod_{i=1}^n \bar{k}_i^{\alpha_i}$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  и  $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$ ,  $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$ ,  $i_0 = \min\{i : i \in B\}$ . Тогда справедливы неравенства:

при  $\zeta > 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} \leq C N^\zeta (\ln(N+1))^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} \left\| T_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_{p q^*}}, \tag{5}$$

при  $\zeta = 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} \leq C (\ln(N+1))^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}, \quad (6)$$

при  $\zeta < 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} \leq C \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}. \quad (7)$$

*Доказательство.* Пусть  $2^{M-1} < N \leq 2^M$ , тогда  $Q(M, \gamma)$  — наименьший ступенчатый крест, покрывающий гиперболический крест  $\Gamma(N, \gamma)$ .

Полином  $T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)}(x)$  представим в виде свертки полинома  $T_{\Gamma(N,\gamma)}(x)$  с ядром  $U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k \in Q(M,\gamma)} \bar{k}^\alpha e^{2\pi i(k,x)}$ .

Согласно неравенству Гельдера и леммы 4, получаем

$$\begin{aligned} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{L_\infty} &= \sup_{x \in [0,1]^n} \left| \int_0^1 T_{\Gamma(N,\gamma)}(y) U_{M,\gamma}^{(\alpha)}(x-y) dy \right| \leq \\ &\leq \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}} \|U_{M,\gamma}^{(\alpha)}\|_{L_{p'q'^*}} \sim A_{M,\gamma} \left( \alpha + \frac{1}{p}, 0, q'^* \right) \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}. \end{aligned}$$

Далее доказательство следует из леммы 3. □

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Теорема 1 обобщает и дополняет соответствующий результат работы [5].

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < r = (r_1, \dots, r_n) < \infty$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n), d = (d_1, \dots, d_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  и  $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$ ,  $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$ ,  $i_0 = \min\{i : i \in B\}$ ,  $1/\theta_j = (1/d_j - 1/q_j)_+$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где  $a_+ = \max(a, 0)$ . Тогда справедливы неравенства:

при  $\zeta > 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} \leq CN^\zeta (\ln(N+1))^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}, \quad (8)$$

при  $\zeta = 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} \leq C (\ln(N+1))^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}, \quad (9)$$

при  $\zeta < 0$

$$\left\| T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} \leq C \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}. \quad (10)$$

*Доказательство.* По аналогии с предыдущим доказательством и согласно леммам 1 и 4 получаем

$$\begin{aligned} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}^{(\alpha)}\|_{L_{rd^*}} &= \left\| \int_{[0,1]^n} T_{\Gamma(N,\gamma)}(y) U_{M,\gamma}^{(\alpha)}(x-y) dy \right\|_{L_{rd^*}} \leq \\ &\leq C \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}} \|U_{M,\gamma}^{(\alpha)}\|_{L_{s\theta^*}} \sim A_{M,\gamma}(\alpha + \frac{1}{s}, 0, \theta^*) \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}} = \\ &= A_{M,\gamma}(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, 0, \theta^*) \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^*}}. \end{aligned}$$

Далее доказательство следует из леммы 3.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** а) Точность по порядку неравенств из Теорем 1 и 2 не сложно проверить на полиномах вида  $U_{M,\gamma}^{(\tau)}(x)$  путем подбора мультииндекса  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ ;

б) Отметим, что неравенства (7) и (10) можно получить как следствия теорем вложения  $W_{pq^*}^\alpha \hookrightarrow L_\infty$  при  $\alpha > 1/p$  и  $W_{pq^*}^\alpha \hookrightarrow L_{rd^*}$  при  $\alpha > 1/p - 1/r$  из работы [4];

в) Неравенства (5) – (10), в отличие от неравенств Теорем 1.2.1 и 1.2.3 из [6], позволяют увидеть, какие параметры пространств за что отвечают. Так в неравенстве (8), в отличие от неравенства Теоремы 1.2.3, возникает логарифмическая компонента, связанная со слабыми параметрами пространств, а именно с теми из них, которые соответствуют  $\max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_i : i = 1, \dots, n\}$ . Из неравенств (5), (8) также видно, что оценки зависят от параметра  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  тем, что из  $\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i}$  или  $\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i}$  вычитается соответствующая компонента  $1/q'_{j_{i_0}}$  или  $1/\theta_{j_{i_0}}$ , которая впервые встречается при интегрировании в норме пространства  $L_{pq^*}$ .

### 3. ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$  и  $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi i(k,x)}$  – кратный тригонометрический ряд. Тогда ряд

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha c_k e^{2\pi i(k,x)}$$

назовем производной порядка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  исходного ряда.

Пусть  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$  и  $f(x) \in L_{pq^\star}$ . Для  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ , величина

$$E_{N,\gamma}(f)_{L_{pq^\star}} = \inf_{T_{\Gamma(N,\gamma)}} \|f - T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{pq^\star}}$$

называется наилучшим приближением функции  $f(x)$  по тригонометрическим полиномам со спектром из гиперболического креста  $\Gamma(N, \gamma)$  в метрике анизотропного пространства Лоренца  $L_{pq^\star}$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ ,  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ ,  $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$ ,  $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$ ,  $i_0 = \min\{i : i \in B\}$ , функция  $f(x)$  из  $L_{pq^\star}$  и

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^\star}} < \infty.$$

Тогда функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную  $f^{(\alpha)}(x)$  и справедлива оценка

$$E_{2^N, \gamma}(f^{(\alpha)})_{L_\infty} \leq C \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^\star}}.$$

*Доказательство.* Пусть  $T_{\Gamma(l, \gamma)}(x)$  – полином наилучшего приближения функции  $f(x)$  в метрике анизотропного пространства Лоренца  $L_{pq^\star}$ . В силу неравенства (5) имеем

$$\begin{aligned} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)}^{(\alpha)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} &\leq C_1 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)} \right\|_{L_{pq^\star}} \leq \\ &\leq C_2 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^\star}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно условию теоремы получаем, что ряд

$$T_{\Gamma(1, \gamma)}^{(\alpha)}(x) + \sum_{l=0}^{\infty} \left( T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)}^{(\alpha)}(x) - T_{\Gamma(2^l, \gamma)}^{(\alpha)}(x) \right)$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции  $F = F(x, \alpha)$ . Заметим, что коэффициенты Фурье этой функции равны  $\bar{k}^\alpha c_k$ , то есть существует  $f^{(\alpha)}(x)$  и она совпадает с непрерывной функцией  $F(x, \alpha)$ .

Из (11) получаем

$$\begin{aligned} E_{2^N, \gamma}(F)_{L_\infty} &\leq \left\| F - T_{\Gamma(2^N, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} \leq \sum_{l=N}^{\infty} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)}^{(\alpha)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_\infty} \leq \\ &\leq C_3 \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}}. \end{aligned}$$

□

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ ,  $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < r = (r_1, \dots, r_n) < \infty$ ,  $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $d = (d_1, \dots, d_n) \leq \infty$ ,  $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ ,  $\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\}$ ,  $B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1, \dots, n\}$ ,  $i_0 = \min\{i : i \in B\}$ ,  $1/\theta_j = (1/d_j - 1/q_j)_+$ ,  $j = 1, \dots, n$ , функция  $f(x)$  из  $L_{pq^*}$  и

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}} < \infty.$$

Тогда функция  $f(x)$  имеет производную  $f^{(\alpha)}(x)$ , принадлежащую  $L_{rd^*}$  и справедлива оценка

$$E_{2^N, \gamma}(f^{(\alpha)})_{L_{rd^*}} \leq C \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}}.$$

*Доказательство.* Пусть  $T_{\Gamma(l, \gamma)}(x)$  – полином наилучшего приближения функции  $f(x)$  в метрике анизотропного пространства Лоренца  $L_{pq^*}$ . В силу неравенства (8) имеем

$$\begin{aligned} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)}^{(\alpha)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} &\leq C_1 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)} \right\|_{L_{pq^*}} \leq \\ &\leq C_2 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}}. \end{aligned}$$

Согласно условию теоремы получаем, что ряд

$$T_{\Gamma(1,\gamma)}^{(\alpha)}(x) + \sum_{l=0}^{\infty} \left( T_{\Gamma(2^{l+1},\gamma)}^{(\alpha)}(x) - T_{\Gamma(2^l,\gamma)}^{(\alpha)}(x) \right)$$

сходится к некоторой функции  $F = F(x, \alpha)$  из  $L_{rd^*}$ . Заметим, что коэффициенты Фурье этой функции равны  $\bar{k}^\alpha c_k$ , то есть существует  $f^{(\alpha)}(x)$ , которая совпадает с функцией  $F(x, \alpha)$ .

Далее получаем

$$\begin{aligned} E_{2^N, \gamma}(F)_{L_{rd^*}} &\leq \left\| F - T_{\Gamma(2^N, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} \leq C_3 \sum_{l=N}^{\infty} \left\| T_{\Gamma(2^{l+1}, \gamma)}^{(\alpha)} - T_{\Gamma(2^l, \gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{rd^*}} \leq \\ &\leq C_4 \sum_{l=N}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}}. \end{aligned}$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 3. а) Теоремы 3 и 4 не могут быть улучшены в том смысле, что для последовательности  $\varepsilon_l \downarrow 0$  такой, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} \varepsilon_{2^l} = \infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{\infty} 2^{\zeta l} l^{\sum_{i \in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} \varepsilon_{2^l} = \infty,$$

найдется функция  $f(x)$  из  $L_{pq^*}$ , для которой

$$E_{2^l, \gamma}(f)_{L_{pq^*}} \sim \varepsilon_{2^l}$$

и  $f^{(\alpha)}(x)$  не принадлежит  $L_\infty$  или  $L_{rd^*}$  соответственно;

б) Теоремы 3 и 4 обобщают Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 из [6].

Работа выполнена в рамках проекта ГФ4–0816, финансируемого Комитетом науки МОН РК.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из  $L_p$ -пространств // Известия РАН. Серия математическая. — 2000. — Т. 64. — С. 95–122.

2 Blozinsky A.P. Multivariate rearrangements and banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — P. 149–167.

3 Nursultanov E., Tikhonov S. Convolution inequalities in Lorentz spaces // J. of Fourier Analysis and Appl. — 2011. — V.17:3. — P. 486–505.

4 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. — 2004. — Т. 394. — С. 16–19.

5 Нурсултанов Е.Д. Неравенство разных метрик С.М.Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функций из пространства Лоренца // Труды МИ РАН. — 2006. — Т.255. — С. 1–18.

6 Темляков В.Н. Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. — 1986. — Т.178. — С. 1–112.

*Статья поступила в редакцию 08.06.2015*

Бекмаганбетов К.А., Оразғалиев Е.Т. АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ БЕРНШТЕЙН-НИКОЛЬСКИЙ ТЕҢСІЗДІКТЕРІ МЕН ЕҢ КҮШТІ ЖУЫҚТАУЛАРДЫҢ БАҒАЛАУЛАРЫ

Мақалада гиперболалық крестегі спектрлі тригонометриялық полиномдар үшін Бернштейн-Никольский теңсіздіктері дәлелденген және анизотропты Лоренц кеңістіктерінің метрикасындағы ең жақсы жуықтаулардың бағалаулары алынған.

Bekmaganbetov K.A., Orazgaliev E.T. BERNSTEIN - NIKOL'SKII INEQUALITIES AND ESTIMATES OF BEST APPROXIMATION IN ANISOTROPIC LORENTZ SPACES

In the paper we prove Bernstein-Nikolsky inequalities for the trigonometric polynomials with the spectrum of the hyperbolic cross and obtain estimates for the best approximations in the metric of anisotropic Lorentz spaces.

УДК 517.51

Г.Ж. БЕРДЕНОВА, Я.Т. СУЛТАНАЕВ

*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева*

010008, Астана, ул. Мунайтпасова 5, e-mail: gulnar\_7109@mail.ru

*Башкирский государственный педагогический университет имени М.Акумулы*  
450074, Россия, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а, e-mail: sultanaevyt@gmail.com

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В статье исследуется асимптотическое поведение решений системы двух сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка при больших значениях спектрального параметра. На основании полученных формул вычислены индексы дефекта соответствующего дифференциального оператора.

Ключевые слова: *асимптотическое поведение, система дифференциальных уравнений,  $L$ -диагональная система.*

Задача исследования асимптотического поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в зависимости от поведения коэффициентов является одной из центральных в теории ОДУ. Решению этой задачи посвящено значительное число работ см. [1] и библиографию к ней. Однако, в основном, в этих работах исследовались скалярные дифференциальные уравнения. Мы исследуем асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций.

---

© Г.Ж. Берденлова, Я.Т. Султанаев, 2015.

Keywords: *Asymptotic behavior, system of differential equations,  $L$ -diagonal system*

2010 Mathematics Subject Classification: 47E05, 34E05, 34L05, 34L20



Рассматривается система уравнений

$$ly := y^{(4)} + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (1)$$

$\lambda$ —комплексный параметр,  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\Gamma = \{\lambda : \lambda = \sigma + i\tau, \tau = \sigma^\gamma, 0 < \gamma < 1\}$ .

$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$  — вектор,  $0 \leq x < \infty$ ,  $Q(x)$  — вещественная симметрическая матрица с дважды непрерывно дифференцируемыми элементами  $q_{i,j}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$ , собственные значения которой  $\mu_i(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Введем следующие обозначения  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{q_{22}(x) - q_{11}(x)}{2q_{12}(x)}$ ,  $\varphi'(x)$  — скорость вращения собственных векторов матрицы  $Q(x)$ .

Нас будут интересовать асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1) при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , равномерно по  $x$ :  $0 \leq x < +\infty$  в случае медленного вращения собственных векторов матрицы  $Q(x)$ . Асимптотические формулы, равномерные по  $x$ , важны как с точки зрения асимптотической теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения спектральной теории дифференциальных операторов. Дело в том, что их знание позволяет исследовать спектральные свойства соответствующих дифференциальных операторов (см. например [2]). Отметим, что ранее одним из авторов в работе [3] рассматривался вопрос об асимптотическом поведении решений системы второго порядка  $-y'' + Q(x)y = \lambda y$ ,  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ . В этой же работе вычислена асимптотика спектра соответствующего дифференциального оператора, что удается сделать благодаря равномерности асимптотических формул. В работе [4] для уравнения (1) найдены асимптотические формулы при  $x \rightarrow \infty$ , что достаточно для вычисления индексов дефекта минимального оператора, порожденного в  $L^2(0, \infty)$  дифференциальным выражением  $ly$ . Для исследования же асимптотики спектра оператора, чему будет посвящена отдельная работа, нужны асимптотические формулы по  $\lambda$ , равномерные по  $x$ , что и является основным результатом нашей работы.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть выполнены условия: для достаточно большого  $x_0$  и при  $x \geq x_0$

1.  $|\varphi'(x)| \leq c$ ,
2.  $0 < A \leq \left| \frac{\mu_i(x)}{\mu_j(x)} \right| \leq B$ , где  $c, A, B$  - положительные константы,

$$3. \int_{x_0}^{\infty} |(\lambda - \mu_i(x))|^{-1/4} dx < \infty, \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\varphi''(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \right| dx = o(1), \lambda \in \Gamma, \lambda \rightarrow \infty, i = 1, 2,$$

$$4. |\mu'_i(x)| \leq o(|\mu_i(x)|^\alpha), \text{ при } x \rightarrow +\infty, i = 1, 2, 0 < \alpha < 5/4, \\ \mu'_i(x) \text{ и } \mu''_i(x) \text{ сохраняют знак при } x \geq x_0.$$

Тогда система (1) имеет восемь линейно независимых решений  $y_j(x, \lambda)$ , таких, что при  $\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Gamma$  равномерно по  $x, 0 \leq x < +\infty$

$$y_{1,2} = \varphi_1(x, \lambda) \exp \left\{ \pm \int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt \right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{3,4} = \varphi_1(x, \lambda) \exp \left\{ \pm i \int_0^x (\lambda - \mu_1(t))^{1/4} dt \right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{5,6} = \varphi_2(x, \lambda) \exp \left\{ \pm \int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt \right\} (1 + o(1)),$$

$$y_{7,8} = \varphi_2(x, \lambda) \exp \left\{ \pm i \int_0^x (\lambda - \mu_2(t))^{1/4} dt \right\} (1 + o(1)),$$

где

$$\varphi_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_1(x))^3}} \begin{pmatrix} \cos & \varphi(x) \\ -\sin & \varphi(x) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_2(x))^3}} \begin{pmatrix} \sin & \varphi(x) \\ \cos & \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* С помощью замены переменных

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix},$$

от системы (1) перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$z' = Az,$$

$z = (z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda), z_4(x, \lambda))$  — новая неизвестная вектор-функция,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -Q + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $I$  — двумерная единичная матрица.

Введем в рассмотрение ортогональную матрицу

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & \sin \varphi(x) \\ -\sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix},$$

такую, что  $U_1^{-1}QU_1 = \Lambda = \text{diag} \{\mu_1, \mu_2\}$ ,

$$\mu_1 = \frac{q_{11} + q_{22} + \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{q_{11} + q_{22} - \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2}.$$

Далее произведем замену

$$z = \text{diag} \{U_1, U_1, U_1, U_1\} w = Uw,$$

$$z' = U'w + Uw',$$

$$U'w + Uw' = AUw,$$

$$w' = (U^{-1}AU)w - U^{-1}U'w. \quad (2)$$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\Lambda + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}U' = \text{diag} \{p, p, p, p\}, \quad p = \varphi'(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку выполняется условие 1) теоремы, то ведущими элементами в системе (2) будут элементы матрицы  $U^{-1}AU$ . Приведем ее к диагональному виду.

Существует матрица, приводящая  $U^{-1}AU$  к диагональному виду. Обозначим ее через  $C(x, \lambda)$ .

$$C^{-1}(U^{-1}AU)C = M = \text{diag} \{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_5, \tilde{\mu}_6, \tilde{\mu}_7, \tilde{\mu}_8\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= (\lambda - \mu_1)^{1/4}, & \tilde{\mu}_2 &= (\lambda - \mu_2)^{1/4}, \\ \tilde{\mu}_3 &= -(\lambda - \mu_1)^{1/4}, & \tilde{\mu}_4 &= -(\lambda - \mu_2)^{1/4}, \\ \tilde{\mu}_5 &= i(\lambda - \mu_1)^{1/4}, & \tilde{\mu}_6 &= i(\lambda - \mu_2)^{1/4}, \\ \tilde{\mu}_7 &= -i(\lambda - \mu_1)^{1/4}, & \tilde{\mu}_8 &= -i(\lambda - \mu_2)^{1/4}. \end{aligned}$$

Элементы матрицы  $C$  определяются из системы уравнений:  $c_{1i}\bar{\mu}_i = c_{2i}$ ,  $c_{2i}\bar{\mu}_i = c_{3i}$ ,  $c_{3i}\bar{\mu}_i = c_{4i}$ ,  $c_{4i}\bar{\mu}_i = (-\Lambda + \lambda I)c_{1i}$ , где  $c_{ij}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  — двумерные матрицы, элементы  $C$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_1(x) & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_2(x) \end{pmatrix}, & \bar{\mu}_2 &= \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_3(x) & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_4(x) \end{pmatrix}, \\ \bar{\mu}_3 &= \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_5(x) & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_6(x) \end{pmatrix}, & \bar{\mu}_4 &= \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_7(x) & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_8(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из этой системы матрица  $C$  находится неоднозначно, с точностью до умножения справа на блочно-диагональную матрицу  $\delta(x) = \text{diag} \{\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x), \delta_4(x)\}$ . Тогда элементы  $C$  имеют вид:

$c_{1i} = \delta_1(x)$ ,  $c_{2i} = \delta_1(x)\bar{\mu}_i(x)$ ,  $c_{3i} = \delta_1(x)\bar{\mu}_i^2(x)$ ,  $c_{4i} = \delta_1(x)\bar{\mu}_i^3(x)$ . Матрицу  $C^{-1}$  находим из условия  $C^{-1}C = E$ . Обозначим через  $T = C^{-1}C'$  и найдем ее элементы. Выберем матрицу  $\delta(x)$  так, чтобы выполнялось условие  $(C^{-1}C')_{ii} = 0$ ,  $i = \overline{1, 8}$ . Тогда блоки матрицы  $\delta(x)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= (\bar{\mu}_1(x))^{-3/2}, & \delta_2(x) &= (-\bar{\mu}_2(x))^{-3/2}, \\ \delta_3(x) &= (-i\bar{\mu}_3(x))^{-3/2}, & \delta_4(x) &= (i\bar{\mu}_4(x))^{-3/2}, \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(x)^{-3/2} & -\bar{\mu}_2(x)^{-3/2} & -i\bar{\mu}_3(x)^{-3/2} & i\bar{\mu}_4(x)^{-3/2} \\ \bar{\mu}_1(x)^{-1/2} & -(-\bar{\mu}_2(x))^{-1/2} & i(-i\bar{\mu}_3(x))^{-1/2} & -i(i\bar{\mu}_4(x))^{-1/2} \\ \bar{\mu}_1(x)^{1/2} & (-\bar{\mu}_2(x))^{1/2} & -i(-i\bar{\mu}_3(x))^{-1/2} & -(i\bar{\mu}_4(x))^{1/2} \\ \bar{\mu}_1(x)^{3/2} & -(-\bar{\mu}_2(x))^{3/2} & -i(-i\bar{\mu}_3(x))^{-3/2} & i(i\bar{\mu}_4(x))^{3/2} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(x)^{3/2} & \bar{\mu}_1(x)^{1/2} & \mu_1(x)^{-1/2} & \bar{\mu}_1(x)^{-3/2} \\ (-\bar{\mu}_2(x))^{3/2} & -(-\bar{\mu}_2(x))^{1/2} & (-\bar{\mu}_2(x))^{-1/2} & -(-\bar{\mu}_2(x))^{-3/2} \\ (-i\bar{\mu}_3(x))^{3/2} & -i(-i\bar{\mu}_3(x))^{1/2} & -(-\bar{\mu}_3(x))^{-1/2} & i(-i\bar{\mu}_3(x))^{-3/2} \\ (i\bar{\mu}_4(x))^{3/2} & -i(i\bar{\mu}_4(x))^{1/2} & -(i\bar{\mu}_4(x))^{-1/2} & -i(i\bar{\mu}_4(x))^{-3/2} \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\mu'_1}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu'_2}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2(1-i)}{\lambda-\mu_2} \\ \frac{-\mu'_1}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu'_1(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu'_2}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu'_2(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2(1+i)}{\lambda-\mu_2} \\ \frac{-\mu'_1(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu'_1}{\lambda-\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{-\mu'_2(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu'_2}{\lambda-\mu_2} \\ \frac{-\mu'_1(1+i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1(1-i)}{\lambda-\mu_1} & 0 & \frac{-\mu'_1}{\lambda-\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu'_2(1+i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2(1-i)}{\lambda-\mu_2} & 0 & \frac{-\mu'_2}{\lambda-\mu_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$w = C(I + G)u,$$

где матрица  $G$  с элементами  $g_{ij}$  удовлетворяет соотношению:

$$GM - MG = -T - C^{-1}PC,$$

$$g_{ii} = 0, \quad g_{ij} = \frac{(-C^{-1}C' - C^{-1}PC)_{ij}}{\tilde{\mu}_j - \tilde{\mu}_i}, \quad i \neq j,$$

$$w' = C'(I + G)u + CG'u + C(I + G)u',$$

$$C'(I + G)u + CG'u + C(I + G)u' = U^{-1}AUC(I + G)u - PC(I + G)u.$$

Умножим это равенство слева на  $C^{-1}$ , тогда

$$T(I+G)u + G'u + (I+G)u' = M(I+G)u - C^{-1}PC(I+G)u,$$

$$Tu + TGu + G'u + (I+G)u' = (M+MG)u - C^{-1}PC(I+G)u,$$

$$Tu + TGu + G'u + (I+G)u' = (M+GM)u + Tu - C^{-1}PCu + C^{-1}PCu - C^{-1}PCGu.$$

Умножив это выражение слева на  $(I+G)^{-1}$ , получим систему уравнений

$$u' = (M + \theta(x, \lambda))u. \quad (3)$$

Полагая в (3) при фиксированном  $i$ , ( $i = \overline{1, 8}$ )

$$u = s \times \exp\left\{ \int_0^x \tilde{\mu}_i(t, \lambda) dt \right\},$$

где  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$  — неизвестная вектор-функция, приходим к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx} s_i(x, \lambda) = \nu_i(x, \lambda) s_i(x, \lambda) + \sum_{m=1}^8 \theta_{im}(x, \lambda) s_m(x, \lambda), \quad i = \overline{1, 8}, \quad (4)$$

где

$$\nu_i(x, \lambda) = \tilde{\mu}_j(x, \lambda) - \tilde{\mu}_i(x, \lambda),$$

$$\theta = \|\theta_{im}(x, \lambda)\|_{i,m=1}^8,$$

— та же, что и в (3).

Покажем, что

$$\int_0^x \|\theta(x, \lambda)\| dx = o(1), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Под нормой матриц здесь и в дальнейшем будем понимать сумму абсолютных величин ее элементов.

Оценим элементы  $g_{ij}$  матрицы  $G$ . Все  $g_{ij}(x, \lambda)$  ограничены сверху линейными комбинациями вида

$$\frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}}, \quad \frac{\varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right]}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}}, \quad K_i = \text{const.}$$

Если  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , то  $\lambda = \sigma + i\tau$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\tau = \sigma^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ .  
Значит,

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu_i(x)) &= (\sigma + i\tau - \mu_i(x)) = (\sigma - \mu_i(x)) \left( 1 + i \frac{\tau}{\sigma - \mu_i(x)} \right) = \\ &= (\sigma - \mu_i(x)) \left( 1 + i \frac{\sigma^\gamma}{\sigma - \mu_i(x)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $\mu_i(x) < 0$ , то

$$\frac{\sigma^\gamma}{\sigma - \mu_i(x)} \leq \sigma^{\gamma-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } x, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Следовательно, из (6) получаем, что  $\lambda - \mu_i(x) \sim \sigma - \mu_i(x)$ ,  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ ,  $0 \leq x < +\infty$ .

Далее,

$$\frac{|\mu'_i(x)|}{|(\lambda - \mu_i(x))|^{5/4}} \rightarrow 0, \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по } x, \quad x \in [0, x_0], \quad \text{так как}$$

$$\frac{|\mu'_i(x)|}{|(\lambda - \mu_i(x))|^{5/4}} \leq \frac{1}{\sigma^{5/4}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow +\infty. \quad \text{Если же, } x \in [x_0, +\infty),$$

$$\frac{|\mu'_i(x)|}{|(\lambda - \mu_i(x))|^{5/4}} \leq K \frac{1}{(\sigma - \mu_i(x))^{5/4-\alpha}} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty \text{ равномерно по } x.$$

Что касается слагаемого

$$\frac{\varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right]}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}}, \quad K_i = \text{const},$$

то числитель равномерно ограничен согласно условиям 1) и 2). Знаменатель же бесконечно растет при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ , т. к.

$$|\lambda - \mu_i(x)|^{1/4} \sim |\sigma - \mu_i(x)|^{1/4} > \sigma^{1/4} \rightarrow \infty.$$

Таким образом,  $\|G(x, \lambda)\|$  при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ ,  $0 \leq x < +\infty$  может быть сделана, скажем, меньше  $1/2$ . Следовательно, при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  матрица  $(I + G)$  имеет ограниченную обратную матрицу  $(I + G)^{-1}$ .

Итак,  $\|I + G\| \leq \text{const}$ ,  $\|(I + G)^{-1}\| \leq \text{const}$ ,  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , равномерно по  $x$ . Поэтому для справедливости равенства (5) достаточно показать, что эти оценки имеют место для матриц  $TG$ ,  $G'$ ,  $C^{-1}PCG$ .

Перейдем к оценке элементов матрицы  $TG$ . Они ограничены сверху линейными комбинациями функций вида

$$\left| \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right|,$$

$$\left| \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))} \frac{\varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right]}{(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \right|, \quad i, j = 1, 2. \quad (7)$$

Докажем, что

$$\int_0^{\infty} \|TG\| dx = o(1), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$



$$\int_0^{\infty} \left| \frac{(\mu'_i(x))^2}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx = \int_0^{x_0} \left| \frac{(\mu'_i(x))^2}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx + \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{(\mu'_i(x))^2}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx. \quad (8)$$

То, что первое слагаемое в правой части (8) есть  $o(1)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ , следует из непрерывности подынтегральной функции и наличия  $\lambda$  в знаменателе. Что касается второго слагаемого, то

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{(\mu'_i(x))^2}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} \right| dx &\leq K \int_{x_0}^{\infty} \frac{\mu_i'^2(x)}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} dx \leq K_1 \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu'_i(x)|}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{9}{4}}} dx = \\ &= \left| \text{т.к. } \mu'_i(x) \text{ сохраняет знак для } x > x_0 \right| = \\ &= K_2 (\sigma - \mu_i(x))^{\alpha - 5/4} \Big|_{x_0}^{\infty} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow +\infty, \text{ так как } \alpha < 5/4. \end{aligned}$$

Что касается интеграла от второй функции в (7), то мы снова разбиваем интеграл на  $\int_0^{x_0}$  и  $\int_{x_0}^{\infty}$ .

$\int_0^{x_0} \rightarrow 0$  при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , т.к. подынтегральная функция непрерывна и содержит  $\lambda$  в знаменателе. Согласно условиям 1) и 2)

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{3}{8}} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{\frac{1}{8}} \right] \right| dx \leq \\ &\leq K \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu'_i(x)|}{(\sigma - \mu_i(x))^{\frac{5}{4}}} dx = K_1 (\sigma - \mu_i(x))^{-1/4} \Big|_{x_0}^{\infty} = o(1) \text{ при } \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что  $\int_0^{\infty} \|G'(x, \lambda)\| dx = o(1)$ . Для этого воспользуемся оценками, полученными ранее для элементов матрицы  $G$ .

В случае, когда

$$g_{ij}(x, \lambda) = \frac{K_{ij}\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}},$$

$$(g_{ij})' = \left( \frac{K_{ij}\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right)' = K_{ij} \frac{\mu''_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} + K_{ij} \frac{5\mu'_i(x)\mu'_i(x)}{4(\lambda - \mu_i(x))^{9/4}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} |g'_{ij}| dx \leq K_{ij} \int_0^{\infty} \left| \frac{\mu''_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} + \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{9/4}} \right| dx. \quad (9)$$

Разобьем этот интеграл на  $\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty}$ , тогда

$$\int_0^{x_0} \left| \frac{\mu''_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} + \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{9/4}} \right| dx = o(1), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

так как подынтегральные функции непрерывны и  $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$ .  
Далее в силу условия 4)

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'^2(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{9/4}} \right| dx &\leq K \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu'_i(x)|}{(\sigma - \mu_i(x))^{9/4-\alpha}} dx = \\ &= K \frac{(\sigma - \mu_i(x))^{\alpha-5/4}}{\alpha - 5/4} \Big|_{x_0}^{\infty} = o(1), \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \text{т.к. } \alpha < 5/4, \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu''_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{9/4}} \right| dx \leq K \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu'_i(x)|}{|(\sigma - \mu_i(x))|^{5/4}} dx \leq \frac{1}{\sigma^{5/4}} \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Для элементов

$$\begin{aligned}
(g_{ij})' &= \left( \frac{K_{ij}\varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right]}{\sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \right)' = \\
&= K_{ij} \frac{\varphi''(x)}{\sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] + \\
&\quad + \frac{K_{ij} \varphi'(x) ((-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)))}{8 \sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} \times \\
&\quad \times \left[ 3 \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-5/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-7/8} \right] - \\
&\quad - K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] (-\mu'_i(x))}{\sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} K_{ij} \frac{\varphi''(x)}{\sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] dx = \\
&= \int_0^{x_0} K_{ij} \frac{\varphi''(x)}{\sum_{i=1}^2 K_i(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] dx +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{x_0}^{\infty} K_{ij} \frac{\varphi''(x)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] dx. \quad (11)$$

То что, первое слагаемое в правой части (11) есть  $o(1)$  при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , следует из непрерывности подынтегральной функции и наличия  $\lambda$  в знаменателе.

Для второго слагаемого в (11) справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{\infty} K_{ij} \left| \frac{\varphi''(x)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right| dx \leq \\ & \leq \frac{K_{ij}}{K_i} \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\varphi''(x) (B^{3/8} + B^{1/8})}{(\sigma - \mu_i(x))^{1/4}} \right| dx \leq \text{const} \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\varphi''(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \right| dx = o(1), \end{aligned}$$

при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  согласно условию 3).

Далее, в (10) оценим второе слагаемое, т.е.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} K_{ij} \left| \frac{\varphi'(x) \left( (-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)) \right)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} \right| \times \\ & \times \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-5/8} + \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-7/8} \right] dx = \\ & = \int_0^{x_0} K_{ij} \left| \frac{\varphi'(x) \left( (-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)) \right)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} \right| \times \\ & \times \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-5/8} + \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-7/8} \right] dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_0}^{\infty} K_{ij} \left| \frac{\varphi'(x) \left( (-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)) \right)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} \right| \times \\
& \times \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-5/8} + \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-7/8} \right] dx. \quad (12)
\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (12) есть  $o(1)$  при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , это следует из непрерывности подынтегральной функции и  $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$ .

Для второго слагаемого в (12) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{\infty} K_{ij} \left| \frac{\varphi'(x) \left( (-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)) \right)}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} \right| \times \\
& \times \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-5/8} + \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{-7/8} \right] dx \leq \\
& \leq K_{ij} \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\varphi'(x)| \left| \left( (-\mu'_i(x))(\lambda - \mu_j(x)) - \mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x)) \right) \right| \frac{3(B^{-5/8} + B^{-7/8})}{8}}{\sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{1/4} (\lambda - \mu_j(x))^2} dx \leq \\
& \leq A_1 \int_{x_0}^{\infty} \frac{|\mu'_i(x)(\lambda - \mu_j(x))| + |\mu'_j(x)(\lambda - \mu_i(x))|}{|(\lambda - \mu_i(x))^{1/4} | \lambda - \mu_j(x)|^2} dx \leq \\
& \leq A_2 \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_j(x))^{5/4}} \right| dx = o(1), \quad A, A_2 = \text{const}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Рассмотрим третий интеграл в (10)

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \mu'_i(x)}{4 \sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} = \\
& = \int_0^{x_0} K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \mu'_i(x)}{4 \sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} dx + \\
& + \int_{x_0}^\infty K_{ij} \frac{\varphi'(x) K_i \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \mu'_i(x)}{4 \sum_{i=1}^2 K_i (\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} dx. \quad (13)
\end{aligned}$$

То, что первое слагаемое в правой части (13) есть  $o(1)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ , следует из непрерывности подынтегральной функции и  $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$ .

Для второго слагаемого в (13) справедливы оценки

$$\int_{x_0}^\infty \frac{K_{ij} |\varphi'(x) \mu'_i(x) (B^{3/8} + B^{1/8})|}{K_j \sum_{i=1}^2 |(\sigma - \mu_i(x))|^{5/4}} dx \leq A_3 \int_{x_0}^\infty \left| \frac{\mu'_i(x)}{(\sigma - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx = o(1),$$

$A_3 = \text{const}$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ .

Таким образом,  $\int_0^\infty \|G'(x, \lambda)\| dx = o(1)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ .

Докажем, что  $\int_0^\infty \|C^{-1}PCG\| dx = o(1)$ . Поскольку элементы матрицы

$C^{-1}PC$  сверху ограничены линейной комбинацией вида

$$\left| \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} - \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right|,$$

то, используя полученные выражения для элементов матрицы  $G$ , выпишем элементы матрицы  $C^{-1}PCG$

$$\left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \text{ и}$$

$$\left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right)^2 \frac{K_{ij}}{\sum_{i=1}^2 (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}}.$$

Разобьем интеграл от первого выражения на сумму:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx = \\ & = \int_0^{x_0} \left| \left( \varphi'(x) \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right) K_{ij} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx + \\ & + \int_{x_0}^\infty \left| \left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx. \end{aligned} \tag{14}$$

То, что первое слагаемое в (14), есть  $o(1)$  при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , следует из непрерывности подынтегральной функции и  $\lambda - \mu_i(x) \neq 0$ .

Для второго слагаемого в (14) числитель ограничен согласно условиям 1), 2). Знаменатель же бесконечно растет при  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , равномерно по  $x$ , так как  $|\lambda - \mu_i(x)| \sim |\sigma - \mu_i(x)|$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^\infty \left| \left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right) K_{ij} \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx \leq \\ & \leq K_{ij} K \left( B^{3/8} + B^{1/8} \right) \int_0^\infty \left| \frac{\mu'_i(x)}{(\lambda - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx \leq \end{aligned}$$

$$\leq K_{ij} \bar{K} \int_0^{\infty} \left| \frac{\mu'_i(x)}{(\sigma - \mu_i(x))^{5/4}} \right| dx = o(1), \quad \text{при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Для второго элемента матрицы  $C^{-1}PCG$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \left| \left( \varphi'(x) \left[ \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{3/8} + \left( \frac{\lambda - \mu_i(x)}{\lambda - \mu_j(x)} \right)^{1/8} \right] \right)^2 \frac{K_{ij}}{\sum_{i=1}^2 (\lambda - \mu_i(x))^{1/4}} \right| dx \leq \\ \leq K^2 (B^{3/8} + B^{1/8}) K_{ij} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{(\sigma - \mu_i(x))^{1/4}} = o(1), \end{aligned}$$

при  $\sigma \rightarrow +\infty$  согласно условиям 1), 3).

Для дальнейшего доказательства нам понадобится лемма, доказанная А.Г. Костюченко и В.П. Белоградцем (см. [2], стр. 165–168)

**ЛЕММА 1.** Пусть выполняются условия

1) функции  $\nu_k(x, \lambda)$  локально суммируемы при любом значении  $\lambda \in \Gamma$ ;  
 2) при некотором  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\nu(x, \lambda) \equiv 0$ , а при  $i \neq j$  функции  $Re \{\nu_k(x, \lambda)\}$  не меняют знак при  $x > x_0$ , для достаточно больших  $x_0$  и  $\lambda \in \Gamma$ ;

3) функции  $\theta_{km}(x, \lambda)$  суммируемы на  $[0, \infty)$  и  $\int_a^b \|\theta(x, \lambda)\| dx = o(1)$ ,  
 $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ ;

Тогда система (4) имеет решение, удовлетворяющее при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ ,

$s_k(x, \lambda) = 1 + o(1)$ ,  $s_m(x, \lambda) = o(1)$ ,  $m \neq k$  равномерно относительно  $x$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

Покажем, что  $Re(\tilde{\mu}_i(x) - \tilde{\mu}_j(x))$  не меняет знак при достаточно больших  $x_0$ ,  $i, j = \bar{1}, \bar{8}$ ,  $i \neq j$ .

Покажем, например, для случая  $i = 1$ ,  $j = 2$ .

$$Re(\tilde{\mu}_1(x) - \tilde{\mu}_2(x)) = Re\left( (\lambda - \mu_1(x))^{1/4} + (\lambda - \mu_1(x))^{1/4} \right) =$$



$$= \operatorname{Re} \left( 2(\sigma + i\tau - \mu_i)^{1/4} \right) = 2\operatorname{Re} \left( (\lambda - \mu_1(x))^{1/4} + (\lambda - \mu_1(x))^{1/4} \right).$$

Поскольку  $\lambda = \sigma + i\tau$ ,  $\tau = \sigma^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ , то при  $x \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re} \left\{ (\sigma + i\tau - \mu_1(x))^{1/4} \right\} = \\ & = 2\operatorname{Re} \left\{ \left( -\mu_1(x) \left( \frac{\sigma + i\tau}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{1/4} \right\} = 2\operatorname{Re} \left\{ \left( -\mu_1(x) \left( \frac{\sigma \left( 1 + \frac{i\sigma^\gamma}{\sigma} \right)}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{1/4} \right\} = \\ & = 2\operatorname{Re} \left\{ \left( -\mu_1(x) \left( \frac{\sigma(1 + o(1))}{\mu_1(x)} + 1 \right) \right)^{1/4} \right\} = 2\operatorname{Re} \left\{ (-\mu_1(x)(1 + o(1))^{1/4} \right\}. \end{aligned}$$

Когда  $|\mu_1(x)| \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , то возможны два случая:

- 1)  $\mu_1(x) \rightarrow -\infty$ , тогда  $-\mu_1(x) > 0$ , следовательно,  $(-\mu_1(x))^{1/4}$  — вещественное число и  $\operatorname{Re} \left\{ (\mu_1(x))^{1/4} \right\}$  не меняет знак при больших  $x$ .
- 2)  $\mu_1(x) \rightarrow +\infty$ , тогда  $-\mu_1(x) < 0$ , следовательно,  $(-\mu_1(x))^{1/4} = |-\mu_1(x)|^{1/4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right)$ . Тогда  $2\operatorname{Re} \left\{ |\mu_1(x)|^{1/4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) \right\} = \sqrt{2} |\mu(x)|^{1/4}$  — также не меняет знак при больших  $x$ .

Далее, поскольку мы показали, что  $\int_0^\infty \|\theta(x, \lambda)\| dx = o(1)$ , то система (4) является L — диагональной и к ней применима лемма 1 [2].

Теперь с помощью формул  $z = Uw$ ,  $w = C(E + G)u$  мы можем от вектора  $u$  вернуться к искомому вектору  $z$ . Тогда с учетом формул для элементов матриц  $U$  и  $C$  и того, что  $(G)_{ij}(x, \lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Gamma$ , равномерно по  $x$ , получим нужные асимптотические формулы.

Авторы признательны академику НАН РК М.Отелбаеву за обсуждение полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М: Наука, 1983. — 352 с.
- 2 Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). — М.: Наука, 1979. — 402 с.
- 3 Султанаев Я.Т. Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций // Диф. уравнения. — 1974. — Т.10, № 9. — С.1673–1683.
- 4 Султанаев Я.Т., Мякинова О.В. Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций // Матем. заметки. — 2009. — Т.86, № 6. — С. 950–953.

*Статья поступила в редакцию 02.02.15*

Берденова Г.Ж., Султанаев Я.Т. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ШЕШІМДЕРІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӨЗГЕРІСІ

Мақалада спектрлік параметрдің үлкен мәні үшін төртінші ретті екі сингулярлы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің асимптотикалық өзгерістері зерттелген. Алынған формулалар негізінде сәйкес дифференциалдық оператордың ақаулық индекстері есептелген.

Berdenova G.Zh., Sultanaev Ya.T. THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE VECTOR-FUNCTIONS SPACE

In the paper the asymptotic behavior of the solutions of the two fourth order singular differential equations for large values of the spectral parameter is investigated. By the obtained formulas the deficiency indices of the corresponding differential operator are calculated.

УДК 517.977

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ, Г.Д. АРЕПОВА

*Институт математики и математического моделирования*  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: arepovag@mail.ru

## КВАЗИСПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕПЛООВОГО ПОТЕНЦИАЛА

В данной работе умножением унитарного оператора  $(Pf) = f(x, T-t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  тепловой потенциал  $\diamond^{-1}$  превращается в самосопряженный оператор  $P\diamond^{-1}$ . Из спектрального разложения вполне непрерывного самосопряженного оператора  $P\diamond^{-1}$  получено квазиспектральное разложение оператора теплового потенциала.

Ключевые слова: *тепловой потенциал, сопряженный оператор, вольтерровый оператор, спектральное разложение.*

### 1 ВВЕДЕНИЕ

В работах И.М. Гохберга и М.К. Крейна доказано, что любой линейный вполне непрерывный оператор  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  имеет треугольное представление  $A = U(A^*A)^{1/2}$ , где  $A^*$  — сопряженный оператор к  $A$ , а  $U$  — унитарный оператор. Случай, когда оператор  $A$  является вполне непрерывным вольтерровым оператором, порожденным решением смешанной задачи Коши параболических и гиперболических уравнений, представляет большой интерес. В данной работе дается новый аналог треугольного представления многомерного теплового потенциала и его квазиспектральное разложение.

---

© Т.Ш. Кальменов, Г.Д. Арепова, 2015.

Keywords: *heat potential, conjugate operator, Volterra operator, quasispectral decomposition*

2010 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10

2 ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – конечная область с гладкой границей  $\partial\Omega \in C^1$ , а  $D = \Omega \times (0, T)$ . Определим в области  $D$  тепловой потенциал

$$u = \diamond^{-1} f = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_n(x, t) = \frac{\theta(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2(\pi t)^{n/2}} \quad (2)$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\diamond \varepsilon_n(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varepsilon_n(x, t) = \delta(x, t), \quad (3)$$

$$\varepsilon_n(x, t)|_{t=0} = 0, \quad x \neq 0, \quad (4)$$

$\theta(t)$  – функция Хевисайда.

При  $f \in L_2(\Omega)$  легко проверить, что

$$\diamond u = \diamond \diamond^{-1} f = \diamond \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi = f(x, t), \quad u|_{t=0}. \quad (5)$$

В работе Кальменова Т.Ш., Токмагамбетова Н. [9] указано, что тепловой потенциал  $u = \diamond^{-1} f$  при любом  $f \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяет следующим боковым граничным условиям

$$\begin{aligned} & -\frac{u(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_{\xi}}(x - \xi, t - \tau) u(\xi, \tau) - \right. \\ & \left. - \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) \frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi, \tau) \right) d\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (6)$$

Обратно, при любом  $f \in L_2(D)$  решение задачи (5) определяет тепловой потенциал по формуле (1). Здесь  $\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}$  – единичная нормальная производная к  $\partial\Omega$ .

Отметим, что оператор  $\diamond^{-1}$  вполне непрерывен на  $L_2$  при любом  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $u = \diamond^{-1} f \in W_2^{1,2}(D)$ . Оператор  $\diamond^{-1}$  – вольтерровый оператор, т.е. не имеет нетривиальных собственных векторов.

Определим оператор  $P$ :

$$(Pf)(x, t) = f(x, T - t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Очевидно, что  $P$  является ограниченным самосопряженным оператором

$$P = P^*, \quad P^2 = I. \quad (8)$$

Имеет место

**ЛЕММА 1.** *Оператор  $P\Diamond^{-1}$  является вполне непрерывным самосопряженным оператором.*

*Доказательство.* Перепишем оператор  $P\Diamond^{-1}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} P\Diamond^{-1}f &= P\left(\int_0^T \theta(t - \tau)d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t - \tau)f(\xi, \tau)d\xi\right) = \\ &= \int_0^T \theta(T - t - \tau)d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, T - t - \tau)f(\xi, \tau)d\xi, \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом этого, непосредственным вычислением для любых  $f, g \in L_2(D)$  можно показать, что

$$\begin{aligned} (P\Diamond^{-1}f, g)_{L_2(D)} &= \int_0^T dt \int_{\Omega} ((P\Diamond^{-1}f)(x, t)g(x, t))dx = \\ &= \int_0^T dt \int_{\Omega} dx \int_0^T \theta(T - t - \tau) \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, T - t - \tau)f(\xi, \tau)d\xi, \\ &\quad g(x, t)dx = \int_0^T \int_{\Omega} f(\xi, t)dx, \\ &\quad \int_0^T \theta(T - t - \tau) \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, T - t - \tau)g(x, t)dx d\xi = \\ &= \int_0^T d\tau \int_{\Omega} f(\xi, \tau)P\left(\int_0^T \theta(\tau - t)dt \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t)g(x, t)dx\right)d\xi = \\ &= (f, P\Diamond^{-1}g)_{L_2(D)}, \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны,

$$(P\Diamond^{-1}f, g)_{L_2(D)} = (f, (P\Diamond^{-1})^*g)_{L_2(D)}. \quad (11)$$

В силу произвольности  $f, g \in L_2(D)$  получим

$$(P\Diamond^{-1})^* = P\Diamond^{-1}.$$

Лемма 1 доказана. □

Согласно теореме о регулярных расширениях линейных операторов (см. М.Отелбаев[3] и М.И.Вишик[1]) самосопряженные дифференциальные операторы порождаются только граничным условием.

Имеет место

ЛЕММА 2. При  $f \in L_2(D)$  функция  $u = P\Diamond^{-1}f$  удовлетворяет уравнению

$$\Diamond Pu = f, \quad (12)$$

начальному условию

$$u|_{t=T} = 0 \quad (13)$$

и боковому граничному условию

$$\begin{aligned} & -\frac{(Pu)(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x - \xi, \tau - t)Pu(\xi, \tau)d\xi\right) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_{\Omega} (\varepsilon_n(x - \xi, \tau - t)P\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau)d\tau) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

*Доказательство.* Очевидно, если  $u \in W_2^{1,2}(D)$  удовлетворяет уравнению (12), начальному условию (13) и боковому граничному условию (14), то  $u = P\Diamond^{-1}f$ .

С учетом  $\Diamond Pu = f$  легко проверить, что

$$u = (P\Diamond^{-1})f = (\Diamond^{-1}P)\Diamond Pu = P\Diamond^{-1}\Diamond Pu = P\Diamond^{-1}(\Diamond\vartheta), \vartheta = Pu. \quad (15)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\Diamond^{-1}\Diamond\vartheta = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \Delta_\xi\right)\vartheta(\xi, \tau)d\xi. \quad (16)$$

Как в работе [2], убедимся в том, что

$$-\frac{\vartheta(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x - \xi, t - \tau) \vartheta(\xi, \tau) - \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) \right) d\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

Тождество  $(Pf)(x, t) \equiv 0$  равносильно тому, что  $f(x, t) = 0$ , тогда равенство (17) эквивалентно равенству

$$-P \left[ \frac{\vartheta(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x - \xi, t - \tau) \vartheta(\xi, \tau) - \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) \vartheta(\xi, \tau) \right) d\xi \right] = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

С учетом  $\vartheta = Pu$ , равенство (17) перепишем в виде

$$-\frac{(Pu)(x, t)}{2} + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n_\xi}(x - \xi, t - \tau) (Pu)(\xi, \tau) - \varepsilon_n(x - \xi, \tau - t) \frac{\partial Pu}{\partial n_\xi}(\xi, \tau) \right) d\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

Лемма 2 доказана.  $\square$

Поскольку оператор  $P\Diamond^{-1}$  вполне непрерывен и самосопряжен на всем  $L_2(\Omega)$ , то он имеет полную ортонормированную систему собственных векторов  $e_k(x, t)$ , соответствующих вещественным собственным значениям  $\lambda_k$

$$\lambda_k (P\Diamond^{-1}) e_k = e_k. \quad (20)$$

Имеем

$$\begin{aligned} P\Diamond^{-1} f &= \sum_k (P\Diamond^{-1} f, e_k)_0 e_k = \sum_k (f, (P\Diamond^{-1}) e_k)_0 e_k = \sum_k (f, \frac{e_k}{\lambda_k}) e_k = \\ &= \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (f, e_k) e_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Применив оператор  $P$  к обеим частям (21), получим

$$\diamond^{-1}f = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (f, e_k) P e_k. \quad (22)$$

Разложение  $\diamond^{-1}f$  по ортонормированной системе  $P e_k$  назовем квазиспектральным разложением теплового потенциала  $\diamond^{-1}$ .

Тем самым доказана

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  — полная ортонормированная система собственных векторов самосопряженного оператора  $P \diamond^{-1}$ . Тогда при любой  $f \in L_2(D)$  для  $\diamond^{-1}f$  имеет место квазиспектральное разложение в следующем виде:

$$\diamond^{-1}f = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (f, e_k) P e_k. \quad (23)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Матем. сб. — 1954. — 35(77):3. — С. 1307–1311.

2 Kalmenov T.Sh. and Tokmagambetov N.E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 54, № 6. — P. 1024–1029.

3 Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. — 1983. — № 6. — С. 1307–1311.

*Статья поступила в редакцию 19.05.15*



Кальменов Т.Ш., Арепова Г.Д. ЖЫЛУ ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ КВА-  
ЗИСПЕКТРАЛЬДІ ЖІКТЕЛУІ

Бұл жұмыста унитар оператордың  $(Pf)(x, t) = f(x, T - t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , көбейтуімен, жылу потенциалы  $\diamond^{-1}$  өз-өзіне түйіндес операторға  $P\diamond^{-1}$  айналады, толық үзіліссіз өз-өзіне түйіндес  $P\diamond^{-1}$  операторының спектральды жіктелуінен жылу потенциалы операторының квазиспектральды жіктелуі алынды.

Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. QUASISPECTRAL DECOMPOSITION  
OF THE HEAT POTENTIAL

In this paper, by multiplying of the unitary operator  $(Pf)(x, t) = f(x, T - t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $\diamond^{-1}$  heat potential turns into a self-adjoint operator  $P\diamond^{-1}$ , from the spectral decomposition of a completely continuous self-adjoint operator  $P\diamond^{-1}$  obtained quasi spectral decomposition of the heat potential operator.

УДК 517.958

S.N. KHARIN, Z. SAGYNDYKULY

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling*  
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: staskharin@yahoo.com  
*Al-Farabi Kazakh National University*  
050038, Almaty, 71 al-Farabi ave., e-mail: magistr1@outlook.com

## AUTOMODEL SOLUTION OF SPHERICAL AND CYLINDRICAL STEFAN PROBLEMS

Automodel solutions of the Stefan problem are very important for the modeling of phenomena accompanying by phase transformations. They are well known for the one-dimensional simplest cases with one free boundary when the boundary conditions are constant. However a problem appears sometimes in applications when two free boundaries should be considered. In electrical contacts they appear as a result of the explosion of a liquid electrical bridge with further ignition of the electric arc. This explosion should be modeled by the delta-function at the center of a contact spot. Such spherical model is presented in this paper and corresponding automodel solution is presented in the first part of the paper. The cylindrical model describing the welding of melted zone with automodel solution is presented in the second part of the paper.

### 1 THE SPHERICAL STEFAN PROBLEM WITH TWO FREE BOUNDARIES

Stefan problem with two free moving boundaries describes heat transfer with two phase transformations, for example melting and evaporation. In the case of spherical symmetry it can be written in the form:

---

© S.N. Kharin, Z. Sagyndykuly, 2015.

Keywords: *integral error, Stefan problem, analytical solution, automodel, Hartree functions*  
2010 Mathematics Subject Classification: 80A22,97M10

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1^2 \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right), \quad \alpha(t) < r < \beta(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2^2 \left( \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right), \quad \beta(t) < r < \infty. \quad (2)$$

At the initial time  $t = 0$  the heat power  $P(r, t)$  of the arc appears at the centre of a contact spot which should be modeled by the delta function

$$P(r, t) = \delta(r, t) = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{r^2}{4a_1^2 t}\right)}{2a_1 \sqrt{\pi t}},$$

which creates the boiling and evaporation.

Two zones  $D_1(\alpha(t) < r < \beta(t))$  and  $D_2(\beta(t) < r < \infty)$  (Figure 1) are formed with interfaces  $\alpha(t)$  corresponding to the boiling temperature  $\theta_b$  and  $\beta(t)$  corresponding to melting temperature  $\theta_m$ . Thus the boundary conditions are

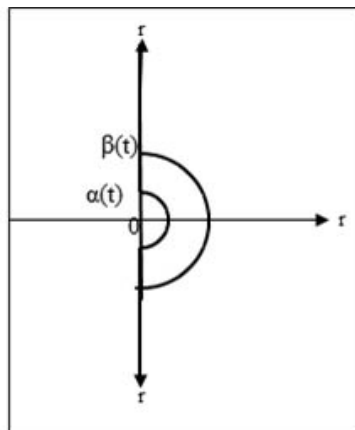


Figure 1 – The interfaces of boiling zone  $r = \alpha(t)$  and melting zone  $r = \beta(t)$

$$r = \alpha(t) : \quad -\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=\alpha(t)} + L_b \gamma_1 \frac{d\alpha}{dt} = P(\alpha(t), t) = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4a_1^2 t}\right)}{2a_1 \sqrt{\pi t}}, \quad (3)$$

$$\theta_1|_{r=\alpha(t)} = \theta_b, \quad (4)$$

where  $L_b$  is the latent heat of evaporation,

$$\theta_2(r, t) = \frac{1}{r} \sqrt{t} A_2 \operatorname{ierfc} \frac{r}{2a_2 \sqrt{t}}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & -\lambda - \frac{1}{\alpha_0 \sqrt{t}} \left( A_1 \operatorname{ierfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{ierfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right) + \\ & \frac{1}{2a_1 \alpha_0 \sqrt{t}} \left( -A_1 \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right) \frac{L_b \gamma_1 \alpha_0}{2\sqrt{t}} = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}\right)}{2a_1 \sqrt{\pi t}}, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $L_m$  is the latent heat of melting.

$$r = \infty : \quad \theta_2|_{r=\infty} = 0. \quad (7)$$

The initial conditions are:

$$t = 0 : \quad \theta_2(r, 0) = 0, \quad (8)$$

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0. \quad (9)$$

The solution of this problem can be found in automodel form:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}, \quad \beta(t) = \beta_0 \sqrt{t}, \quad (10)$$

$$\theta_1(r, t) = \frac{1}{r} \sqrt{t} \left( A_1 \operatorname{ierfc} \frac{r}{2a_1 \sqrt{t}} + B_1 \operatorname{ierfc} \frac{-r}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad (11)$$

$$\theta_2(r, t) = \frac{1}{r} \sqrt{t} A_2 \operatorname{ierfc} \frac{r}{2a_2 \sqrt{t}}. \quad (12)$$

It is easy to check that the functions (10), (11) satisfy the equations (1) and (2).

Now we should find constants  $\alpha_0, \beta_0, A_1, B_1, A_2$  to satisfy the conditions (3)–(10). Evidently the conditions (7), (8), (9) are satisfied already.

From the condition (3) we get :

$$\lambda_1 \left[ -\frac{1}{\alpha_0 \sqrt{t}} \left( A_1 \operatorname{ierfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{ierfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right) + \frac{1}{2a_1 \alpha_0 \sqrt{t}} \left( -A_1 \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right) \frac{L_b \gamma_1 \alpha_0}{2\sqrt{t}} \right] = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}\right)}{2a_1 \sqrt{\pi t}},$$

therefore,

$$\left( \frac{2a_1}{\alpha_0} \operatorname{ierfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} - \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} \right) A_1 + \left( \frac{2a_1}{\alpha_0} \operatorname{ierfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} - \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right) B_1 + \frac{L_b \gamma_1 \alpha_0 a_1}{\lambda_1} = \frac{P_0 \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}\right)}{\lambda_1 \sqrt{\pi}} \quad (13)$$

The boundary condition (4) gives

$$A_1 \operatorname{ierfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{ierfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} = \alpha_0 \theta_b. \quad (14)$$

Similarly from the condition (5) and (6) we get

$$A_1 \operatorname{ierfc} \frac{\beta_0}{2a_1} + B_1 \operatorname{ierfc} \frac{-\beta_0}{2a_1} = \beta_0 \theta_m, \quad (15)$$

$$A_2 \operatorname{ierfc} \frac{\beta_0}{2a_2} = \beta_0 \theta_m, \quad (16)$$

$$\frac{\lambda_1}{2a_1} \left( \left( \frac{2a_1}{\beta_0} \operatorname{ierfc} \frac{\beta_0}{2a_1} - \operatorname{erfc} \frac{\beta_0}{2a_1} \right) A_1 + \left( \frac{2a_1}{\beta_0} \operatorname{ierfc} \frac{-\beta_0}{2a_1} + \operatorname{erfc} \frac{-\beta_0}{2a_1} \right) B_1 \right) = \frac{\lambda_2}{2a_2} \left( \frac{2a_2}{\beta_0} \operatorname{ierfc} \frac{\beta_0}{2a_2} - \operatorname{erfc} \frac{\beta_0}{2a_2} \right) A_2 + \frac{L_m \gamma_2 \alpha_0}{2}. \quad (17)$$

The equations (12)–(17) enable us to find all required constants  $A_1, B_1, A_2, \alpha_0$  and  $\beta_0$ .

2 THE CYLINDRICAL STEFAN PROBLEM

Let us consider the process of solidification of a cylinder due to cooling along cylindrical axis  $r = 0$ . Two zones are formed, the solid zone  $D_1(0 < r < \alpha(t))$  with temperature  $\theta_1(r, t)$  and liquid zone  $D_2(\alpha(t) < r < \infty)$  with temperature  $\theta_2(r, t)$  (Figure 2).

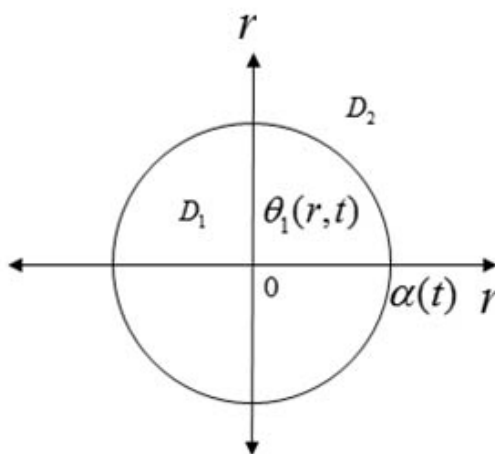


Figure 2 – The solid zone  $D_1(0 < r < \alpha(t))$  and the liquid zone  $D_2(\alpha(t) < r < \infty)$

It is required to solve the following Stefan problem:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1^2 \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right), \quad 0 < r < \alpha(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2^2 \left( \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right), \quad \alpha(t) < r < \infty. \quad (19)$$

The initial condition are

$$t = 0 : \quad \alpha(0) = 0, \quad \theta_2(0) = T_0. \quad (20)$$

The boundary condition at the center  $r = 0$  is based on the strength of the heat sink. It is expressed as

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( 2\pi r \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = Q_0. \quad (21)$$

The remaining boundary conditions are

$$\theta_1(\alpha(t), t) = T_f, \quad (22)$$

$$\theta_2(\alpha(t), t) = T_f, \quad (23)$$

$$A_1 = -\frac{Q_0}{4\pi\lambda_1}, \quad B_1 = T_f + \frac{Q_0}{4\pi\lambda_1} Ei\left(\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}\right), \quad A_1 = \frac{T_f - T_0}{Ei\left(\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}\right)}, \quad B_2 = T_0$$

$$\frac{Q_0}{4\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)}{\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}} = -\frac{\lambda_2(T_f - T_0)}{Ei\left(\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)}{\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}} + L\gamma_1 a_1^2, \quad (24)$$

where  $T_f$  is the freezing temperature.

The Stefan condition is

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=\alpha(t)} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=\alpha(t)} + L\gamma_1 \frac{d\alpha}{dt}. \quad (25)$$

The solution of the problem (18)–(25) we try to find in automodel form:

$$\theta_1(r, t) = \theta_1(\eta), \quad \theta_2(r, t) = \theta_2(\eta), \quad \alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}, \quad \eta = \frac{r^2}{4a_1^2 t}.$$

Then the equations (18), (19) transform to the following ordinary differential equations

$$\eta \frac{d^2 \theta_i}{d\theta^2} + \left( 1 + \frac{a_1^2}{a_i^2} \eta \right) \frac{d\theta_i}{d\eta} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

The solutions of these equations can be written in the form

$$\theta_1(\eta) = A_1 Ei(\eta) + B_1, \quad (27)$$

$$\theta_2(\eta) = A_2 Ei \left( \frac{a_1^2}{a_2^2} \eta \right) + B_2, \tag{28}$$

where

$$Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz, \tag{29}$$

is the exponential integral function.

Since  $\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}$  the conditions (20) – (25) can be written in the form in term of variable  $\eta$ :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( 4\pi r \lambda_1 \eta \frac{d\theta_1}{d\eta} \right) = Q_0, \tag{30}$$

$$\theta_1 \left( \frac{\alpha_0^2}{4a_1^2} \right) = T_f, \tag{31}$$

$$\theta_2 \left( \frac{a_1^2 \alpha_0^2}{4a_2^2} \right) = T_f, \tag{32}$$

$$\theta_2(\infty) = T_0, \tag{33}$$

$$\lambda_1 \left. \frac{d\theta_1}{d\eta} \right|_{\eta = \frac{\alpha_0^2}{2a_1^2}} = \lambda_2 \left. \frac{d\theta_2}{d\eta} \right|_{\eta = \frac{\alpha_0^2}{2a_1^2}} + L\gamma_1 a_1^2. \tag{34}$$

Satisfying solutions (28), (29) conditions (30)–(33) we get

$$A_1 = -\frac{Q_0}{4\pi\lambda_1}, \quad B_1 = T_f + \frac{Q_0}{4\pi\lambda_1} Ei \left( \frac{\alpha_0^2}{4a_1^2} \right), \quad A_2 = \frac{T_f - T_0}{Ei \left( \frac{\alpha_0^2}{4a_1^2} \right)}, \quad B_2 = T_0,$$

thus

$$\theta_1(r, t) = T_f + \frac{Q_0}{4\pi\lambda_1} \left[ Ei \left( \frac{\alpha_0^2}{4a_1^2} \right) - Ei \left( \frac{r^2}{4a_1^2 t} \right) \right], \tag{35}$$



$$\theta_2(r, t) = \frac{T_f - T_0}{Ei\left(\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)} Ei\left(\frac{r^2}{4a_2^2 t}\right). \quad (36)$$

Using Stefan's condition (34) we get the equation to find  $\alpha_0$ :

$$\frac{Q_0}{4\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)}{\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}} = -\frac{\lambda_2(T_f - T_0)}{Ei\left(\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}\right)}{\frac{\alpha_0^2}{4a_2^2}} + L\gamma_1 a_1^2. \quad (37)$$

It can be shown similarly like for spherical case that this equation has the unique solution.

Thus the solution of the problem is given by the expressions (35), (36) where  $\alpha$  should be found from the equation (37).

### 3 APPLICATIONS TO THE CONTACT WELDING

Welding of electrical contacts is a reason of failure in switchers, connectors, relays and other electrical equipment. The problem of optimal choice of contact parameters with low weldability is very important to enhance endurance and reliability of contact systems. Analysis of investigations in this field shows that the formation of a weld is a complicated function of current, voltage, contact force, parameters of contact material, arc duration etc. The variation of the weld strength may be of a wide range even at the same current. That is a reason why many experimental data are presented in a form of cumulative probability. As a rule experimental investigation of welding phenomena is focused on the resulting values of welded area and welding force because of very short duration of this phenomenon, which embarrasses measurements in dynamics. Nevertheless evolution of contact surface melting and its further welding is very important for understanding and explanation of welding characteristics. Mathematical modelling is very helpful in this situation. The radius of the welding area occurring in the first half-wave of alternating current (the time  $t_0 = 0.02$  sec) can be found using different methods. Fig. 3 depicts results of calculation of the diameter  $d = 2\alpha(t_0)$  of welding area as a function of current.

The curve 1 is calculated using Hilgarth's formula [2] which gives a redundant temperature. The curve 2 relates to the Holm's formula [3]

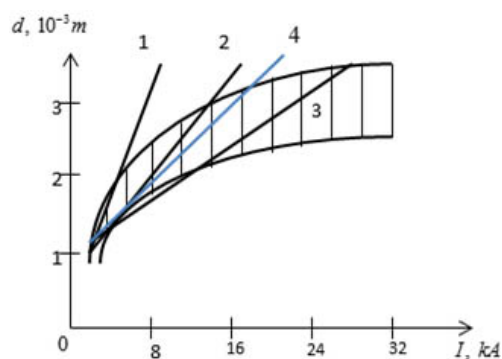


Figure 3 – Diameter of welding zone as a function of current

$$r_0 = \sqrt{\frac{F}{\pi H(T_W)}},$$

which is obtained neglecting phase transformation.

The curve 3 relates to the results obtained in [4] by numerical calculation. It is mostly inside the dashed area of experimental data [5]. The curve 4 corresponds to the presented above automodel solution. One can see that this solution may be successfully used for an approximate estimation of the welding area.

The weld force  $F_W$  can be estimated approximately as

$$F_W = \Gamma \pi r_0^2,$$

where  $\Gamma$  is the tensile strength of contact material. The dependence of weld force on current is shown in Figure 4.

One can see a satisfactory agreement of calculated values and experimental data.

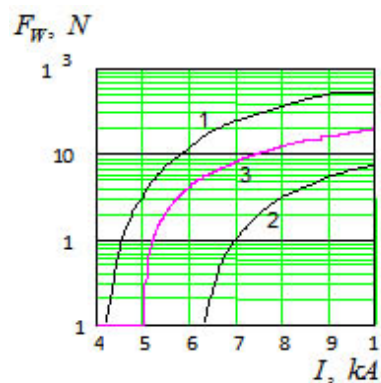


Figure 4 – Weld force as a function of current. The area between curves 1 and 2 corresponds to experimental data [5], the curve 3 is calculated

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Rubinstein L. Stefan problem, Zwaigzne edition. — Riga, 1967. — P.1–457.
- 2 Hilgarth H. Uber die Grenzstromstarken Ruhender Starkstromkontakte // Elektrotechnische Zeitschrift. — 1957. — No 78, P. 18–26.
- 3 Holm R. “Electric Contacts”. — Springer Verlag, Berlin. — 1967. — P.5–62.
- 4 Kharin S.N., Nouri H., Davies T. “ The Mathematical Models of Welding Dynamics in Closed and Switching Electrical Contacts” // Proc. 49th IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts. Washington, USA — 2003. — P. 107–123.
- 5 Walzcuk E. Welding tendency of closed contacts // Metall. — 1977. — No 4, P. 381–384.

*Received 18.05.15*

**Харин С.Н., Сағындықұлы З. СТЕФАН СФЕРАЛЫҚ ЖӘНЕ ЦИЛИНДРЛІК ЕСЕПТЕРІНІҢ АВТОМОДЕЛЬДІК ШЕШІМДЕРІ**

Автомодельдік Стефан есебінің шешімі фазалық өзгеру құбылыстарын модельдеу үшін өте маңызды болып табылады. Олар шекаралық шарттары тұрақты болған кезде және сондай-ақ бір-өлшемді еркін шекаралық қарапайым жағдайлар үшін анық зерттелген. Алайда, кейде қосымшаларда екі еркін шекараларын қарастырылуы тиіс жағдайда, мәселе туындайды. Электірлік контактілерде олар электр доғасының жарылыс барысында электр доғасының тұтануы нәтижесінде пайда болады. Жарылыстағы аймақ орталығын дельта функциямен модельдеу қажет. Бұл мақалада осындай сфералық модельдеу үлгісі ұсынылған және оның автомат модельдік шешімі мақаланың бірінші бөлігінде көрсетілген. Екінші бөлігінде цилиндрлік модель үлгісінің балқытылған (дәнекерлеу) аймағын сипаттайтын автомат модельдік шешімі табылған.

**Харин С.Н., Сағындықұлы З. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕФАНА**

Автомодельные решения задачи Стефана очень важны при моделировании явлений, сопровождаемых фазовыми преобразованиями. Они хорошо изучены для простейших одномерных случаев с одной свободной границей, когда граничные условия являются постоянными. Однако в приложениях иногда возникает задача, когда должны быть рассмотрены две свободные границы. В электрических контактах они появляются в результате взрыва жидкого электрического моста с дальнейшим воспламенением электрической дуги. Этот взрыв следует моделировать дельта-функцией в центре контактной зоны. В данной статье представлена такая сферическая модель, а соответствующее ей автомат модельное решение дается в первой части статьи. Во второй части статьи представлена цилиндрическая модель, описывающая спайку (сварку) расплавленной зоны, с использованием автомат модельного решения.

УДК 517.224

К.Т. МЫНБАЕВ, G.S. DARKENBAYEVA

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling*

050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: kairat\_mynbayev@yahoo.com

*al-Farabi Kazakh National University*

050040, Almaty, 71 al-Farabi ave., e-mail: g.spandiyar@gmail.com

*International IT University*

050000, Almaty, 34A Manas street, e-mail: g.spandiyar@gmail.com

**THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF THE OLS  
ESTIMATOR OF THE REGRESSION WITH SLOWLY  
VARYING REGRESSOR**

In this paper we consider the simple regression model with a slowly varying regressor in the presence of a unit root. The  $L_p$ -approximability of the special sequences is proved and the limiting distribution of the OLS estimator of the coefficients of the regression is obtained.

Keywords: *slowly varying regressors,  $L_p$ -approximability, asymptotic distribution, OLS estimator.*

INTRODUCTION

Let us consider the simple regression model possessing slowly varying regressor

$$y_t = \alpha + \beta \log t + v_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

---

© K.T. Mynbaev, G.S. Darkenbayeva, 2015.

Keywords: *slowly varying regressors,  $L_p$ -approximability, asymptotic distribution, OLS estimator*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

where  $v_t$  is stationary and supposed to satisfy some regularity conditions. If the scaling matrix  $F_n^{-1}$  is given by  $\text{diag}[n^{1/2} \log^{-1} n, n^{1/2}]$ , then the scaled sample covariance matrix  $(X'X)^{-1}$ , where  $X = [X'_1, \dots, X'_n]'$  with  $X_t = [1, \log t]$ , behaves like

$$F_n^{-1}(X'X)^{-1}F_n^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

indicating the asymptotic collinearity of the regressors and singularity of the limiting matrix. Phillips [3] demonstrated that the OLS estimator  $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$  is consistent and asymptotically normally distributed, but the convergence rate is affected by the presence of the logarithmic trend. Also, Phillips relied on uniform strong approximation of partial sums by Brownian motions, but the condition was rather restrictive and the proof is partially insufficient in dealing with slowly varying regressors. Mynbaev [1], [2] then applied the central limit theorem based on the  $L_p$ -approximation technique to make the proof rigorous under the less stringent conditions. This idea is used in this paper.

The aim of this paper is to find the limiting distribution of OLS estimator  $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$  of the regression model

$$y_t = \alpha + \beta L(t) + u_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

with an SV regressor in the presence of a unit root. For the regression model with stationary errors the asymptotic distribution of the OLS estimator  $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$  is obtained by Phillips [3]. So, the difference between this paper and Phillips [3] is that we consider regression model with an SV regressor in the presence of a unit root.

#### MAIN DEFINITIONS, ASSUMPTIONS AND USEFUL RESULTS

Let us give the main definitions, assumptions on the regressors and the error term.

**DEFINITION 1.** *A real valued, positive, measurable function  $L$  on  $[A, \infty)$ ,  $A > 0$ , is called slowly varying (SV) if it satisfies, for any  $r > 0$*

$$\frac{L(rx)}{L(x)} \rightarrow 1$$

as  $x \rightarrow \infty$ .

For such an SV function  $L$  we have Karamata's representation theorem. That is, the function  $L$  varies slowly if and only if it is written in the form

$$L(x) = c(x) \exp \left( \int_B^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right)$$

for  $x \geq B \geq A$  for some  $B > 0$ , where  $c(x) \rightarrow C \in (0, \infty)$  and  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow \infty$ .

DEFINITION 2. We say  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$  if the function  $L$  satisfies all the following conditions: (i) The function  $L$  is SV and has Karamata's representation

$$L(x) = c(x) \exp \left( \int_B^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right)$$

for  $x \geq B$  for some  $B > 0$ . Here  $c > 0$ ,  $\varepsilon$  is continuous and  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow \infty$ . This part of the assumption is shortened to  $L = K(\varepsilon)$ .

(ii) The function  $|\varepsilon|$  is SV.

(iii) There exists a function  $\psi_\varepsilon$  on  $[0, \infty)$  called a remainder that satisfies the following properties:

- The function  $\psi_\varepsilon$  is positive, nondecreasing on  $[0, \infty)$ ,  $\psi_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$ , and there exist positive numbers  $\theta$  and  $X$  such that  $x^{-\theta} \psi_\varepsilon(x)$  is nonincreasing on  $[X, \infty)$ ;

- There exists a positive constant  $c$  satisfying

$$\frac{1}{c\psi_\varepsilon(x)} \leq |\varepsilon(x)| \leq \frac{c}{\psi_\varepsilon(x)}$$

for  $x \geq c$ .

ASSUMPTION 1.  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon), L = K(\eta, \psi_\eta)$ .

ASSUMPTION 2. A linear process  $\{v_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  is defined by

$$v_t = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j e_{t-j}, \quad t \in \mathbf{Z},$$

where  $c_j$  is a sequence of numbers satisfying  $\sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j| < \infty$ , and  $\{e_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  is a m.d. such that  $e_j^2$  are uniformly integrable and  $E(e_j^2 | \mathfrak{F}_{t-1}) = \sigma_e^2$  for all  $t$ . Here  $\{\mathfrak{F}_t\}$  is an increasing sequence of  $\sigma$ -fields.

ASSUMPTION 3. The process  $\{u_t\}$  possesses a unit root under the null hypothesis  $\rho = 1$  in

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t,$$

where  $v_t$  is the same linear process as in Assumption 2.

Now we formulate useful results.

LEMMA 1. (Lemma 4.2.3 [1]) If  $L = K(\varepsilon)$ , then  $\int_1^n L(t) dt = nL(n)(1 + o(1))$  and  $\sum_{t=1}^n L(t) = nL(n)(1 + o(1))$ .

LEMMA 2. (Seneta, 1985, p.102 [4]) If  $L$  is SV with remainder  $\psi$ , then for any  $b > \theta$  [where  $\theta$  is the same from 2] there exist constants  $M_b > 0$  and  $B_b \leq B$  such that  $\left| \frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1 \right| \leq \frac{M_b}{\lambda^b \psi(x)}$  for all  $x \geq B_b$  and  $\frac{B_b}{x} \leq \lambda \leq 1$ .

LEMMA 3. (Mynbaev, Corollary 4.4.3 [1]) If  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$  and  $\theta < 1$ , then

$$\frac{1}{nL^k(n)} \sum_{t=1}^n L^k(t) = 1 - k\varepsilon(n)[1 + o(1)].$$

LEMMA 4. (Phillips, Equation (60) [3]) If  $L = K(\varepsilon)$  and  $\varepsilon$  is SV, then

$$G(rn, n) = \log r[1 + o(1)]$$

uniformly in  $r \in [a, b]$ , for any  $0 < a < b < \infty$ .

#### ANALYTICAL RESULTS

Let us consider the following simple regression model

$$y_t = \alpha + \beta L(t) + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

where  $L(t)$  and  $u_t$  are supposed to satisfy 1 and 3, respectively.



Denote

$$F(t, n) = \frac{1}{nL(n)} \sum_{j=t}^n L(j)$$

and call this function  $F$  – *function* of  $L$ .

Let us prove the lemma below.

LEMMA 5. *If  $L = K(\varepsilon)$  and  $\varepsilon$  - SV, then*

$$F(rn, n) = 1 - r + o(1)$$

*uniformly in  $r \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$  for any  $\delta \in (0, 1)$ .*

*Proof.* Let  $L = K(\varepsilon)$  and  $\delta \in (0, 1)$ . Then if  $n \gg 1$ ,  $\delta \ll 1$  and from  $r \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$  we obtain that

$$1 > \frac{[rn] - 1}{n} = \delta_1 \geq \frac{\delta}{2}.$$

According to Lemma 5

$$\begin{aligned} F(rn, n) &= \frac{1}{nL(n)} \sum_{j=[rn]}^n L(j) = \frac{1}{nL(n)} \left( \sum_{j=1}^n L(j) - \sum_{j=1}^{[rn]-1} L(j) \right) = \\ &= \frac{1}{nL(n)} [nL(n)(1 + o(1)) - ([rn] - 1)L([rn] - 1)(1 + o(1))] = \\ &= 1 + o(1) - \frac{[rn] - 1}{n} \cdot \frac{L\left(\frac{[rn]-1}{n} \cdot n\right)}{L(n)} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

here  $\frac{L\left(\frac{[rn]-1}{n} \cdot n\right)}{L(n)} = 1 + o(1)$  uniformly in  $j$  for  $\frac{[rn]-1}{n} \geq \frac{\delta}{2}$ , which implies that

$$F(rn, n) = 1 + o(1) - \frac{[rn] - 1}{n} (1 + o(1)) = 1 - \frac{[rn]}{n} + o(1) = 1 - r + o(1)$$

uniformly. Thus, lemma is proved.

The following two theorems show the  $L_p$ -approximations of special sequences.

THEOREM 1. For  $p \in [1, \infty)$  and integral  $k \geq 0$  define a vector  $w_n \in \mathbb{R}^n$  by

$$w_{nt} = n^{-\frac{1}{p}} F^k(t, n), t = 1, \dots, n.$$

If  $L = K(\varepsilon, \phi_\varepsilon)$  and  $0 < \theta < 1$ , then  $w_n$  is  $L_p$ -close to  $f_k(t) = (1-t)^k$ .

*Proof.* The definitions of  $w_n$  and interpolation operator  $\Delta_{np}$  give

$$\Delta_{np} w_n = \sum_{t=1}^n F^k(t, n) \mathbf{1}_{i_t}.$$

This is equivalent to  $n$  equations

$$(\Delta_{np} w_n)(u) = F^k(t, n)$$

for  $u \in i_t, t = 1, \dots, n$ .

The condition  $u \in i_t$  is equivalent to the condition that  $t$  is an integer satisfying

$$t \leq nu + 1 < t + 1,$$

which, in turn, is equivalent to  $t = [nu + 1]$ . Hence, the above  $n$  equations take a compact form

$$(\Delta_{np} w_n)(u) = F^k([nu + 1], n), \quad 0 \leq u < 1.$$

Let  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$  and apply Lemma 2. With the number  $B_b$  from that lemma for  $n > n_1 \equiv \frac{B_b}{\delta}$  the interval  $(\frac{B_b}{n}, \delta)$  is not empty, and by the triangle inequality

$$\begin{aligned} \|\Delta_{np} w_n - f_k\|_{p,(0,1)} &\leq \|\Delta_{np} w_n - f_k\|_{p,(\delta,1)} + \|f_k\|_{p,(0,\delta)} + \\ &+ \|\Delta_{np} w_n\|_{p,(0,\frac{B_b}{n})} + \|\Delta_{np} w_n\|_{p,(\frac{B_b}{n},\delta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Obviously,  $\|f_k\|_{p,(0,\delta)} \rightarrow 0$  as  $\delta \rightarrow 0$ . For the other three terms we consider three cases.

CASE 1.  $\delta \leq u < 1$ . According to Lemma 5 we have

$$F^k([nu + 1], n) = F^k\left(\frac{[nu + 1]}{n} \cdot n, n\right) = F^k(rn, n) =$$

$$= (1-r)^k + o(1) = \left(1 - \frac{[nu+1]}{n}\right)^k + o(1)$$

uniformly in  $r \in [\delta, 1 + \frac{1}{2B_b}]$  (we can assume that  $\frac{1}{\delta} > 1 + \frac{1}{2B_b}$ ). Here we define  $r = \frac{[nu+1]}{n}$ , from the inequality  $nu < [nu+1] \leq nu+1$  we have

$$\delta \leq u < r \leq u + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n_1} \leq 1 + \frac{1}{2B_b} \quad (2)$$

so that

$$r = u + o(1) \quad (3)$$

and

$$r \in \left[\delta, 1 + \frac{1}{2B_\delta}\right]. \quad (4)$$

(2), (3) and (4) lead to

$F^k([nu+1], n) - f_k(u) = o(1)$  uniformly in  $u \in (\delta, 1)$ . This proves that

$$\|\Delta_{np}w_n - f_k\|_{p,(\delta,1)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

CASE 2.  $\frac{B_b}{n} \leq u < \delta$ . Let  $n > n_2 = \max\{n_1, 2\}$ . Then (2) and the conditions

$$u \in \left[\frac{B_b}{n}, \delta\right), \quad n > n_2$$

imply

$$\frac{B_b}{n} \leq u < r = \frac{[nu+1]}{n} \leq u + \frac{1}{n} < \delta + \frac{1}{n_2} \leq 1.$$

Consider

$$\begin{aligned} |F(rn, n)| &= |F([nu+1], n)| = \left| \sum_{t=[nu+1]}^n \frac{L(t)}{nL(n)} \right| = \\ &= \left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} - \left( \sum_{t=1}^{B_b-1} \frac{L(t)}{nL(n)} + \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right) \right| = \end{aligned}$$

$$\leq \left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} \right| + \left| \sum_{t=1}^{B_b-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right| + \left| \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right|, \quad (6)$$

here we used Lemma 2 and the triangle inequality. For the first term of the expression (6) on the right we use Lemma 5 and have

$$\left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} \right| = \left| \frac{nL(n)[1 + o(1)]}{nL(n)} \right| = 1 + o(1) \leq C_1. \quad (7)$$

For the second term we use the continuity of  $L$  on  $[1, B_b - 1]$  that is  $L(t) < c$  on  $[1, B_b - 1]$  and obtain

$$\left| \sum_{t=1}^{B_b-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right| = \frac{c(B_b - 1)}{nL(n)} \leq C_2. \quad (8)$$

For the last term we can use the Lemma 2, thus we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} \frac{L(t)}{L(n)} - 1 \right| + \frac{1}{n} \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} 1 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} \frac{M_b}{\phi(n)} \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^{-b} + \frac{1}{n} ([nu + 1] - B_b) \leq \\ &\leq n^{b-1} \cdot \frac{M_b}{\phi(n)} \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} t^{-b} + \frac{1}{n} ([nu + 1] - B_b) \leq \\ &\leq n^{b-1} \cdot \frac{M_b}{\phi(n)} \sum_{t=B_b}^{[nu+1]-1} t^{-b} + C_3^1. \end{aligned} \quad (9)$$

Here we remember that  $0 < \theta < 1$  and  $b > \theta$  is arbitrarily close to  $\theta$ , so we can choose  $0 < b < 1$ . Geometrically it is obvious that

$$\int_a^{N+1} b^{-b} dt \leq \sum_{t=a}^N t^{-b} \leq \int_{a-1}^N t^{-b} dt$$

and therefore

$$\sum_{t=a}^N t^{-b} \leq CN^{1-b}, \quad (10)$$

as  $n \rightarrow \infty$ . Using

$$\frac{B_b}{n} \leq u < r = \frac{[nu + 1]}{n} \leq u + \frac{1}{n} < \delta + \frac{1}{n_2} \leq 1.$$

we can continue (9) as follows

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} \right| &\leq \frac{C_3^2}{\psi(n)} \cdot \frac{([nu + 1] - 1)^{1-b}}{n^{1-b}} + C_3^3 = \\ &= \frac{C_3^2}{\psi(n)} \cdot \left( \frac{[nu + 1]}{n} - \frac{1}{n} \right)^{1-b} + C_3^3 \leq \frac{C_3^2 u^{1-b}}{\psi(n)} + C_3^3 \leq C_3 \end{aligned} \quad (11)$$

Combining (7), (8), (11) we see that

$$|F(rn, n)|^k \leq C$$

which implies

$$\|\Delta_{np}\omega_n\|_{p, [\frac{B_b}{n}, \delta]} \leq C(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (12)$$

CASE 3.  $0 < u < \frac{B_b}{n}$ . In this case  $1 \leq [nu + 1] \leq nu + 1 < B_b + 1$  and  $L(t) \leq c$  for  $t \in [1, [nu + 1] - 1]$  by the assumed continuity of  $L$ . Hence,

$$\begin{aligned} |F^k(rn, n)| &= |F^k([nu + 1], n)| = \left| \sum_{t=[nu+1]}^n \frac{L(t)}{nL(n)} \right|^k = \\ &= \left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} - \sum_{t=1}^{[nu+1]-1} \frac{L(t)}{nL(n)} \right|^k \leq \\ &\leq \left| \sum_{t=1}^n \frac{L(t)}{nL(n)} - \frac{c}{nL(n)} ([nu + 1] - 1) \right|^k \end{aligned} \quad (13)$$

By Corollary 3 and condition  $0 < u < \frac{B_b}{n}$  we can continue (13)

$$\begin{aligned} |F(rn, n)|^k &\leq \left(1 + o(1) + \frac{c}{nL(n)}([nu + 1] - 1)\right)^k \leq \\ &\leq \left(\frac{c}{L(n)}u + o(1)\right)^k \leq \left(\frac{c}{L(n)} \cdot \frac{B_b}{n} + o(1)\right)^k \leq C_4 \end{aligned}$$

and

$$\|\Delta_{np}w_n\|_{p, (0, \frac{B_b}{n})} \leq C \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

From (5), (12), (14) we have the proof of the theorem.

**THEOREM 2.** For  $p \in [1, \infty)$  and integral  $k \geq 0$  define a vector  $w_n \in \mathbb{R}^n$  by

$$w_{nt} = n^{-\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{nL(n)\varepsilon(n)} \sum_{l=t}^n (L(l) - \bar{L}) \right)^k, t = 1, \dots, n.$$

If  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$  and  $0 < \theta < 1$ , then  $w_n$  is  $L_p$ -close to  $f_k(t) = (t \log \frac{1}{t})^k$ .

*Proof.* The definitions of  $w_n$  and interpolation operator  $\Delta_{np}$  give

$$\Delta_{np}w_n = \sum_{l=1}^n \left( \frac{1}{L(n)\varepsilon(n)} \sum_{l=t}^n (L(l) - \bar{L}) \right)^k \mathbf{1}_{i_t}.$$

This is equivalent to  $n$  equations

$$\begin{aligned} (\Delta_{np}w_n)(u) &= \left( \frac{1}{nL(n)\varepsilon(n)} \sum_{s=t}^n (L(s) - \bar{L}) \right)^k = \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n \frac{L(s) - L(n)}{L(n)\varepsilon(n)} + \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n \frac{L(n) - \bar{L}}{L(n)\varepsilon(n)} \right)^k. \end{aligned}$$

for  $u \in i_t, t = 1, \dots, n$ .

Let us denote

$$G(s, n) = \frac{L(s) - L(n)}{L(n)\varepsilon(n)}. \quad (15)$$

According to Lemma 3 and (15) we obtain

$$\begin{aligned} (\Delta_{np}w_n)(u) &= \left( \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) + \sum_{s=t}^n \frac{L(n) - (L(n) - L(n)\varepsilon(n)(1 + o(1)))}{nL(n)\varepsilon(n)} \right)^k = \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) + \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n (1 + o(1)) \right)^k = \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) + 1 + \frac{1-t}{n} + o(1) \right)^k \end{aligned}$$

for  $u \in i_t, t = 1, \dots, n$ .

The condition  $u \in i_t$  is equivalent to the condition that  $t$  is an integer satisfying

$$t \leq nu + 1 < t + 1,$$

which, in turn, is equivalent to  $t = [nu + 1]$ . Hence, the above  $n$  equations take a compact form

$$(\Delta_{np}w_n)(u) = \left( \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right)^k, \quad 0 \leq u < 1.$$

Let  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$  and apply Lemma 2. With the number  $B_b$  from that lemma for  $n > n_1 \equiv \frac{B_b}{\delta}$  the interval  $(\frac{B_b}{n}, \delta)$  is not empty, and by the triangle inequality

$$\begin{aligned} \|\Delta_{np}w_n - f_k\|_{p,(0,1)} &\leq \|\Delta_{np}w_n - f_k\|_{p,(\delta,1)} + \|f_k\|_{p,(0,\delta)} + \\ &+ \|\Delta_{np}w_n\|_{p,(0,\frac{B_b}{n})} + \|\Delta_{np}w_n\|_{p,(\frac{B_b}{n},\delta)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Obviously,  $\|f_k\|_{p,(0,\delta)} \rightarrow 0$  as  $\delta \rightarrow 0$ . For the other three terms we consider three cases.

CASE 1.  $\delta \leq u < 1$ . In this case

$$\delta \leq \frac{t-1}{n} \leq u < \frac{t}{n} = r < \frac{t}{n_1} < 1 + \frac{1}{2B_b}. \quad (17)$$

According to Lemma 4 we have

$$G(rn, n) = G\left(\frac{t}{n} \cdot n, n\right) = \log \frac{t}{n} [1 + o(1)] \quad (18)$$

uniformly in  $r \in \left[\delta, 1 + \frac{1}{2B_b}\right]$ .

Consider

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) &= \frac{1}{n} \log \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot n}{n^{n-t+1}} [1 + o(1)] = \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{n!}{(t-1)! n^{n-t+1}} [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

According to the Stirling formula we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) &= \frac{1}{n} \log \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_1}{12n}}}{\sqrt{2\pi(t-1)} \left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1} e^{\frac{\theta_2}{12(t-1)}} n^{n-t+1}} \cdot [1 + o(1)] = \\ &= \frac{1}{n} \log \left( \left(\frac{n}{t-1}\right)^{t-\frac{1}{2}} e^{-n+t-1} e^{\frac{1}{n} \left(\frac{\theta_1}{12} - \frac{\theta_2 n}{12(t-1)}\right)} \right) \cdot [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Then by using one of the main properties of logarithms we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) &= \\ &= \left[ \frac{1}{n} \left(t - \frac{1}{2}\right) \log \frac{1}{\frac{t-1}{n}} + \frac{-n+t-1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_1}{12} - \frac{\theta_2 n}{12(t-1)}\right) \right] [1 + o(1)] = \\ &= \left[ \left(\frac{t}{n} - \frac{1}{2n}\right) \log \frac{1}{\frac{t-1}{n}} + \frac{-n+t-1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_1}{12} - \frac{\theta_2 n}{12(t-1)}\right) \right] [1 + o(1)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Thus, by (17) and (19) we have

$$\frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \rightarrow u \log \frac{1}{u}, n \rightarrow \infty. \quad (20)$$



(17) and (20) lead to

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{s=t}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right)^k - \left( u \log \frac{1}{u} \right)^k = o(1)$$

uniformly in  $\frac{s}{n} = r \in \left[ \delta, 1 + \frac{1}{2B_b} \right]$ , where  $s = t, \dots, n$ . This proves that

$$\|\Delta_{np} w_n\|_{p, (\delta, 1)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (21)$$

CASE 2.  $\frac{B_b}{n} \leq u < \delta$ . Let  $n > n_2 = \max\{n_1, 2\}$ . Then by (17) and  $u \in \left[ \frac{B_b}{n}, \delta \right)$  we have

$$\frac{B_b}{n} \leq u < r = \frac{[nu + 1]}{n} \leq u + \frac{1}{n} < \delta + \frac{1}{n_2} \leq 1. \quad (22)$$

and we know that

$$\frac{[nu + 1]}{n} \leq s \leq 1.$$

Consider

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n \frac{L(s) - L(n)}{L(n)\varepsilon(n)} + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n\varepsilon(n)} \sum_{s=[nu+1]}^n \left| \frac{L\left(\frac{s}{n} \cdot n\right)}{L(n)} - 1 \right| + 1 + u + o(1). \end{aligned}$$

Then we can apply Lemma 2 and boundedness of  $1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) < c$  and obtain

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + c \right| \leq \left| \frac{1}{n\varepsilon(n)} \sum_{s=[nu+1]}^n \frac{M_b}{\left(\frac{s}{n}\right)^b \psi(n)} + c \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{1}{n\varepsilon(n)} \frac{M_b}{n^{-b}\psi(n)} \sum_{s=[nu+1]}^n s^{-b} + c \right|.$$

Then we use condition (iii) of Definition 2 because  $L = K(\varepsilon, \psi_\varepsilon)$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right| \leq \frac{c_1 M_b}{n^{1-b}} \sum_{s=[nu+1]}^n s^{-b} + c. \quad (23)$$

Here we remember that  $0 < \theta < 1$  and  $b > \theta$  is arbitrarily close to  $\theta$ , so we can choose  $0 < b < 1$ .

Using (10), (22) and denote by  $C_1^1 = c_1 M_b C$  we can continue (23) as follow

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + c \right| \leq C_1^1 + 1 + u + o(1) \leq C_1$$

and

$$\|\Delta_{np}\omega_n\|_{p, [\frac{B_b}{n}, \delta]} \leq C(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (24)$$

CASE 3.  $0 < u < \frac{B_b}{n}$ . In this case  $1 \leq [nu + 1] \leq nu + 1 < B_b + 1$  and  $L(t) \leq c$  for  $t \in [1, [nu + 1]]$  by the assumed continuity of  $L$ . Hence,

$$\begin{aligned} & \left| \left( \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right)^k \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + D \right|^k \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n G(s, n) - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{[nu+1]} G(s, n) + D \right|^k \end{aligned}$$

because  $1 + \frac{1 - [nu+1]}{n} + o(1) \leq D$  for  $0 < u < \frac{B_b}{n}$ . Then by (15) and Lemma 3

$$\left| \left( \frac{1}{n} \sum_{s=[nu+1]}^n G(s, n) + 1 + \frac{1 - [nu + 1]}{n} + o(1) \right)^k \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{n\varepsilon(n)} \sum_{s=1}^n \left( \frac{L(s)}{L(n)} - 1 \right) - \frac{1}{n\varepsilon(n)} \sum_{s=1}^{[nu+1]-1} \left( \frac{L(s)}{L(n)} - 1 \right) + D \right|^k \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{n\varepsilon(n)} \sum_{s=1}^{[nu+1]-1} \frac{L(s)}{L(n)} + \frac{1}{n\varepsilon(n)} + D \right| \leq D_1, \end{aligned}$$

where  $D_1 = D - (1 + o(1))$ , and

$$\|\Delta_{np}w_n\|_{p, (0, \frac{B_b}{n})} \leq C \left( \frac{1}{n} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

From (21), (24), (25) we have the proof of the theorem.

LEMMA 6. Denote by  $\sigma^2 = (\sigma_e \sum_{j \in Z} c_j)^2$ . Under Assumptions 1 and 3 the following statements are true:

- (i) If  $0 < \theta < 1$ , then  $\frac{1}{n\sqrt{n}L(n)} \sum_{t=1}^n L(t)u_t \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{3}\sigma^2)$ ;
- (ii) If  $0 < \theta < 1$ , then  $\frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}) u_t \xrightarrow{d} N(0, \frac{2}{27}\sigma^2)$ .

*Proof.* By Theorem 3.5.2 [1] it is enough to establish  $L_2$ -approximability of the sequence of weights in question.

Assumption 3

$$u_t = u_{t-1} + v_t$$

gives

$$u_t = \sum_{l=1}^t v_l$$

(setting  $u_{-1} = 0$  which asymptotically doesn't matter).

The sequence in (i) becomes

$$\frac{1}{n\sqrt{n}L(n)} \sum_{t=1}^n L(t)u_t = \sum_{l=1}^n \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)} \sum_{t=l}^n L(t)v_l = \sum_{l=1}^n w_{nl}v_l,$$

where  $w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)} \left( \sum_{t=1}^n L(t), \sum_{t=2}^n L(t), \dots, L(n) \right)$ .

Then setting  $p = 2, k = 1$  in Theorem 1 gives that  $w_n$  is  $L_2$ -close to  $f_1(t) = 1 - t$ . The statement follows from the fact that

$$\int_0^1 f_1^2(x) dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

The sequence in (ii) becomes

$$\frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t = \sum_{l=1}^n \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=l}^n (L(t) - \bar{L})v_l = \sum_{l=1}^n w_{nl}v_l,$$

where  $w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \left( \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L}), \sum_{t=2}^n (L(t) - \bar{L}), \dots, L(n) - \bar{L} \right)$ .

Setting  $p = 2, k = 1$  in Theorem 2 gives that  $w_n$  is  $L_2$ -close to  $f_2(t) = t \log \frac{1}{t}$ . The statement follows from the fact that

$$\int_0^1 f_2^2(x) dx = \int_0^1 \left(x \log \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{2}{27}.$$

Thus, the Lemma is proved.

The following theorem shows the limiting distribution of OLS estimator.

**THEOREM 3.** *If  $L$  satisfies Assumption 1,  $0 < \theta < 1$  and  $u_t$  satisfies Assumption 3, then*

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}(\hat{\alpha} - \alpha) \\ \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{2}{27} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

*Proof.* According to the Equation (4.59) [1]

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - \beta &= \frac{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t}{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2} = \frac{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t}{n \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2} = \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t}{n \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})^2} = \frac{\sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t}{nL^2(n)\varepsilon^2(n)(1 + o(1))} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t \frac{\sqrt{n}}{L(n)\varepsilon(n)(1+o(1))}.$$

This means that

$$(1+o(1)) \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}} (\hat{\beta} - \beta) = \frac{1}{n\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)} \sum_{t=1}^n (L(t) - \bar{L})u_t.$$

And by Equation (4.60) [1]

$$\sqrt{n}\varepsilon(n)(\hat{\alpha} - \alpha) = -\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)(\hat{\beta} - \beta) + o_p(1).$$

Hence we obtain the following

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon(n)(\hat{\alpha} - \alpha) = -\frac{\sqrt{n}L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) + \frac{o_p(1)}{n}.$$

Further to prove the theorem we use the Cramer-Wold theorem.

Denote by

$$f_n = \frac{\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\alpha} - \alpha)$$

and

$$g_n = \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta).$$

Then consider

$$\begin{aligned} a_1 f_n + a_2 g_n &= a_1 \varepsilon(n)(\hat{\alpha} - \alpha) \frac{1}{\sqrt{n}} + a_2 \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) = \\ &= -a_1 \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) + a_1 \frac{o_p(1)}{n} + a_2 \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) = \\ &= (-a_1 + a_2) \frac{L(n)\varepsilon(n)}{\sqrt{n}}(\hat{\beta} - \beta) + a_1 o_p(1) \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (26)$$

The last term of the right side of the above equality tends to zero as  $n$  tends to infinity.

Let

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v \\ v & v_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} v_{11} & v \\ v & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= (a_1 v_{11} + a_2 v \quad a_1 v + a_2 v_{22}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\ &= v_{11} a_1^2 + 2v a_1 a_2 + v_{22} a_2^2. \end{aligned}$$

From (26), Lemma 6 and *Cramer-Wold theorem* imply that

$$a_1 f_n + a_2 g_n \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2}{27}(a_2 - a_1)^2 \sigma_e^2\right)$$

as  $n \rightarrow \infty$ . We want to find  $a_1, a_2$ , for this we consider the following equation:

$$a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 = v_{11} a_1^2 + 2v a_1 a_2 + v_{22} a_2^2$$

and obtain that

$$v_{11} = v_{22} = 1, v = -1.$$

Thus, the Theorem is proved.  $\square$

#### REFERENCES

- 1 Mynbaev K.T. Short-Memory Linear Processes and Econometric Applications. — Wiley, 2011. — 452 p.
- 2 Mynbaev K.T. Central limit theorems for weighted sums of linear processes:  $L_p$ -approximability versus Brownian motion // *Econometric Theory*. — 2009. — V.25. — P.748–763.
- 3 Phillips P.C.B. Regression with slowly varying regressors and nonlinear trends // *Econometric Theory*. — 2007. — V.23. — P.557–614.

4 Seneta E. Regularly varying functions. — Springer, 1976. — 144 p.

*Received 25.06.15*

Мынбаев К.Т., Даркенбаева Г.С. БАЯУ ӨЗГЕРЕТІН РЕГРЕССОРЫ БАР РЕГРЕССИЯНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ ККӨ БАҒАЛАУЫНЫҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ҮЛЕСТІРІЛІМІ

Біз бұл мақалада баяу өзгеретін регрессоры және бірлік түбірі бар қарапайым регрессиялық үлгіні қарастырамыз. Арнайы тізбектердің  $L_p$ -жуықтаулары дәлелденді және регрессия коэффициенттерінің ККӨ бағалауының шектік үлестірілімі алынды.

Мынбаев К.Т., Даркенбаева Г.С. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МНК ОЦЕНКИ РЕГРЕССИИ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМСЯ РЕГРЕССОРОМ

В этой статье мы рассматриваем простую регрессионную модель с медленно меняющимся регрессором в присутствии единичного корня. Доказаны  $L_p$ -приближения специальных последовательностей и получено предельное распределение МНК оценки коэффициентов регрессии.

УДК 517.956

М.А. САДЫБЕКОВ, Г. ОРАЛСЫН

*Институт математики и математического моделирования*  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: makhmud-s@mail.ru, g.oralsyn@list.ru

### **Обратная коэффициентная задача теплопроводности с нелокальным условием типа Самарского-Ионкина**

В работе рассматривается задача, моделирующая процесс определения функции распределения температуры и изменяющейся со временем структуры однородного стержня по заданному закону изменения средней температуры. Так возникает обратная задача для уравнения теплопроводности, в которой вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестный коэффициент, зависящий только от временной переменной. В настоящей статье доказано, что эта обратная задача имеет единственное обобщенное решение.

*Keywords: обратная задача, уравнение теплопроводности, условие Самарского-Ионкина.*

#### 1 ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения одновременно с его решением носят название обратных задач математической физики. В работе рассматривается одно семейство задач, моделирующих процесс определения функции распределения температуры и изменяющейся со временем структуры однородного стержня

---

© М.А. Садыбеков, Г. Оралсын, 2015.

*Keywords: inverse problem, heat equation, Smarskii-Ionkin condition.*

2010 Mathematics Subject Classification: 33C10, 34B30, 35J, 35P10



по заданному закону изменения средней температуры. При их математической формулировке возникает обратная задача для уравнения теплопроводности, в которой вместе с решением уравнения требуется найти неизвестный коэффициент, зависящий только от временной переменной.

Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических уравнений изучались во многих работах (см., например [1-8]). В отличие от предыдущих работ, нами исследуется обратная задача для уравнения теплопроводности с краевыми условиями по пространственной переменной, при которых соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора имеет систему собственных функции, не образующую базис.

Наиболее близкой к тематике настоящей статьи является [9], в которой было обосновано существование классического решения обратной задачи, аналогичной исследуемой нами. Однако, в связи с тем, что краевые условия в [9] являются регулярными, но не усиленно регулярными, от входных данных задачи было затребовано повышение гладкости и удовлетворение дополнительным условиям. В настоящей работе эти условия полностью сняты и показано, что обратная задача имеет единственное обобщенное решение. При решении задачи существенно используется метод из [16].

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассмотрим задачу о нахождении неизвестного коэффициента  $p(t)$  уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}(x, t) - p(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

и его решения, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

нелокальному граничному условию

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \quad u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и условию переопределения

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad E(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $E(t) \in W_2^1(0, T)$ . Здесь параметр  $\alpha$  — любое положительное число, а  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $E(t)$  — заданные функции. При  $\alpha = 0$  краевые условия (3) хорошо известны и носят в литературе название *условий Самарского-Ионкина*.

Прямая задача (1)–(3) в случае, когда  $p(t) \equiv 0$  была исследована в [12].

Наиболее близкой к тематике настоящей статьи является [9], в которой было обосновано существование классического решения обратной задачи, аналогичной исследуемой нами. Однако, в связи с тем, что краевые условия в [9] являются регулярными, но не усиленно регулярными, от входных данных задачи было затребовано повышение гладкости и удовлетворение дополнительным условиям:

$$(A_1) \quad \varphi \in C^2[0, 1]; \quad \varphi'(0) - \alpha\varphi(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1);$$

$$\varphi_0 > 0, \quad \varphi_{2n-1} \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ при } \alpha < 0;$$

$$\varphi_1 < 0, \quad \varphi_{2n-1} \leq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \text{ при } \alpha > 0.$$

$$(A_2) \quad E(t) \in C^1[0, T]; \quad E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx; \quad E(t) > 0, \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$(A_3) \quad f(x, t) \in C^2[\bar{D}_T]; \quad f(x, t) \in C^2[0, 1], \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$f_x(1, t) - \alpha f(0, t) = 0, \quad f(0, t) = f(1, t);$$

$$f_0(\tau) > 0, \quad f_{2n-1}(\tau) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ при } \alpha < 0;$$

$$f_{2n-1}(\tau) \leq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \text{ при } \alpha > 0.$$

В настоящей работе эти условия полностью сняты и показано, что обратная задача имеет единственное обобщенное решение.

*Решением задачи* будем называть пару функций  $\{u(x, t), p(t)\}$ , обращающую уравнение (1) и условия (2)–(4) в тождество в соответствующем классе функций  $u(x, t)$  и  $p(t)$ .

Применение метода Фурье для решения задачи (1)–(3) приводит к спектральной задаче для оператора  $l$ , заданного дифференциальным выражением и краевыми условиями:

$$l(y) \equiv -y''(x) = \lambda y(x); \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y'(1) + \alpha y(1), \quad y(0) = 0. \quad (5)$$

Краевые условия в (5) являются регулярными, но не усиленно регулярными [10]. Система корневых функций оператора  $l$  является полной системой, но не образует базиса в  $L_2(0, 1)$  [11]. Однако, как показано в [12], на основе этих собственных функций может быть построен базис, позволяющий применить метод разделения переменных для решения начально-краевой задачи с краевым условием (3).

## 3. ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ (5)

В этом пункте приведем необходимые нам для дальнейшей работы результаты из [12]. Спектральная задача (5) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $\beta_k$  - корни уравнения  $\tan\beta = \frac{\alpha}{2\beta}$ ,  $\beta > 0$ . Они удовлетворяют неравенствам  $\pi k < \beta_k < \pi k + \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и для разности  $\delta_k = \beta_k - \pi k$  при достаточно больших  $k$  выполняются двусторонние оценки

$$\frac{\alpha}{2\pi k} \left(1 - \frac{1}{2\pi k}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2\pi k} \left(1 + \frac{1}{2\pi k}\right). \quad (6)$$

Собственные функции задачи имеют вид

$$y_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_k^{(2)}(x) = \sin(2\pi\beta_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Эта система является почти нормированной, но не образует даже обычного базиса в  $L_2(0, 1)$ . Построенная из нее вспомогательная система

$$y_0(x) = y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1}, \quad y_{2k}(x) = y_k^{(1)}(x), \\ y_{2k-1}(x) = (y_k^{(2)}(x) - y_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

образует базис Рисса в  $L_2(0, 1)$ , а биортогональной к ней системой является система

$$\nu_0(x) = 2\beta_0\nu_0^{(2)}, \quad \nu_{2k}(x) = \nu_k^{(2)}(x) + \nu_k^{(1)}(x), \\ \nu_{2k-1}(x) = 2\delta_k\nu_k^{(2)}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

построенная из собственных функций сопряженной к (5) задачи

$$\nu_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)} \cos(2\pi kx + \gamma_k), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \nu_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)} \cos(\beta_k(1 - 2x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Константы  $C_k^{(1)}$  и  $C_k^{(2)}$  выбираются из соотношения биортогональности

$$(y_k^j, \nu_k^j) = 1, \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, что полученная система образует базис Рисса в  $L_2(0, 1)$ , если функция  $u$  удовлетворяет краевым условиям (5), то ее ряд Фурье по системе  $\{y_k(x)\}$  сходится в смысле пространства  $W_2^2(0, 1)$ , в частности, равномерно.

Не трудно вычислить, что

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= -\lambda_0^{(2)} y_0(x), \quad y_{2k}''(x) = -\lambda_k^{(1)} y_{2k}(x), \\ y_{2k-1}''(x) &= -\lambda_k^{(2)} y_{2k-1}(x) - \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} y_{2k}(x). \end{aligned} \quad (7)$$

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(4)

На основании п.3 любое решение и входные данные задачи (1)–(3) представимы в виде биортогональных рядов:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) y_k(x), \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k y_k(x), \quad (8)$$

где  $u_k(t) = (u(x, t), \nu_k(x))$ ,  $f_k = (f(x), \nu_k(x))$  и  $\varphi_k = (\varphi(x), \nu_k(x))$ .

Подставляя (8) в уравнение (1), с учетом (7) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(t) y_k(x) + p(t) \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) y_k(x) = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k''(x) = u_0(t) y_0''(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k}(t) y_{2k}''(x) + u_{2k-1}(t) y_{2k-1}''(x)) = \\ & -\lambda_0^{(2)} u_0(t) y_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(1)} u_{2k}(t) y_{2k}(x) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t) \left[ \lambda_k^{(2)} y_{2k-1} + \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} y_{2k}(x) \right] = -\lambda_0^{(2)} u_0(t) y_0(x) \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_k^{(1)} u_{2k} + \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} u_{2k-1}(t) \right] y_{2k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} u_{2k-1}(x) y_{2k-1}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, используя начальные условия (2), для нахождения неизвестных функций  $u_k(t)$  и коэффициента  $p(t)$  получаем следующие задачи:

$$u_0'(t) + \left(\lambda_0^{(2)} + p(t)\right) u_0(t) = f_0(t), \quad u_0(0) = \varphi_0; \quad (9)$$

$$u_{2k-1}'(t) + \left(\lambda_k^{(2)} + p(t)\right) u_{2k-1}(t) = f_{2k-1}(t), \quad u_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1}; \quad (10)$$

$$u_{2k}'(t) + \left(\lambda_0^{(1)} + p(t)\right) u_{2k}(t) = f_{2k}(t) - \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} u_{2k-1}(t), \quad u_{2k}(0) = \varphi_{2k}. \quad (11)$$

Решение задач (9) и (10) существует, единственно и может быть выписано в явном виде:

$$u_0(t) = \varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} t - \int_0^t p(s) ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{-\lambda_0^{(2)}(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t p(s) ds} d\tau, \quad (12)$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} t - \int_0^t p(s) ds} + \int_0^t f_{2k-1}(\tau) e^{-\lambda_k^{(2)}(\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau. \quad (13)$$

Подставляем (13) в правую часть (11). Тогда задача (11) также имеет единственное решение, и оно записывается в виде:

$$\begin{aligned} u_{2k}(t) = & \int_0^t \left[ f_{2k}(\tau) - \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} u_{2k-1}(\tau) \right] e^{-\lambda_0^{(2)}(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t p(s) ds} d\tau + \\ & + \varphi_{2k} e^{-\lambda_0^{(2)} t - \int_0^t p(s) ds}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим отдельно

$$\begin{aligned} & \int_0^t u_{2k-1}(\tau) e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau = \\ & = \varphi_{2k-1} \int_0^t e^{-\lambda_k^{(2)} \tau - \int_0^\tau p(s) ds} e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau + \\ & + \int_0^t \left[ \int_0^\tau f_{2k-1}(\tau_1) e^{-\lambda_k^{(2)}(t-\tau_1) - \int_{\tau_1}^t p(s) ds} d\tau_1 \right] e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau = \\ & = \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(1)}(t) - \int_0^t p(s) ds} \int_0^t e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}] \tau} d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t f_{2k-1}(\tau_1) e^{-\int_{\tau_1}^t p(s) ds} e^{\lambda_k^{(2)}(\tau_1) - \lambda_k^{(1)}(t)} \left[ \int_{\tau_1}^t e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]\tau} d\tau \right] d\tau_1 = \\
& = \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(1)}(t) - \int_0^t p(s) ds} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - 1}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} + \\
& + \int_0^t f_{2k-1}(\tau_1) e^{-\int_{\tau_1}^t p(s) ds + \lambda_k^{(2)}\tau_1 - \lambda_k^{(1)}t} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]\tau_1}}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} d\tau_1.
\end{aligned}$$

Итого

$$\begin{aligned}
& \int_0^t u_{2k-1}(\tau) e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau = \\
& = \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(1)}(t) - \int_0^t p(s) ds} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - 1}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} + \\
& + \int_0^t f_{2k-1}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds + \lambda_k^{(2)}\tau - \lambda_k^{(1)}t} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]\tau}}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} d\tau.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное в (14), находим

$$\begin{aligned}
u_{2k}(t) & = \varphi_{2k} e^{-\lambda_k^{(1)}t - \int_0^t p(s) ds} + \int_0^t f_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_0^t p(s) ds} d\tau - \\
& \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} \varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(1)}t - \int_0^t p(s) ds} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - 1}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} - \\
& - \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} \int_0^t f_{2k-1}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds + \lambda_k^{(2)}\tau - \lambda_k^{(1)}t} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]\tau}}{\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}} d\tau.
\end{aligned}$$

Итого

$$\begin{aligned}
u_{2k}(t) & = [\varphi_{2k} + \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - 1}{2\delta_k} \varphi_{2k-1}] e^{-\lambda_k^{(1)}t - \int_0^t p(s) ds} + \quad (15) \\
& + \int_0^t f_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k^{(1)}(t-\tau) - \int_0^t p(s) ds} d\tau - \\
& - \int_0^t f_{2k-1}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds + \lambda_k^{(2)}\tau - \lambda_k^{(1)}t} \frac{e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]t} - e^{[\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}]\tau}}{2\delta_k} d\tau.
\end{aligned}$$

Таким образом, решение прямой задачи (1)–(3) существует, единственно и формально может быть выписано в виде биортогонального разложения

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)y_k(x),$$

коэффициенты которого выражаются формулами (12), (13) и (15).

### 5. СХОДИМОСТЬ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Для завершения исследования прямой задачи необходимо (аналогично методу Фурье) обосновать гладкость полученного формального решения и сходимость всех встречающихся рядов.

Пусть  $\|u\|_0$  - норма пространства  $L_2(\Omega)$ . Через  $W_2^{2,1}(\Omega)$  будем обозначать пространство функций  $u(x, t)$ , для которых почти всюду существуют обобщенные производные  $u_{xx}(x, t)$  и  $u_t(x, t)$ , принадлежащие в  $L_2(\Omega)$  с нормой

$$\|u(x, t)\|_{2,1}^2 = \|u(x, t)\|_0^2 + \|u_{xx}(x, t)\|_0^2 + \|u_t(x, t)\|_0^2.$$

Под *обобщенным решением* задачи (1)–(3) будем понимать функцию  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ , почти всюду обращающую задачу в тождество.

Имеет место

**ТЕОРЕМ 1.** Пусть  $f(x, t) \in L_2(\Omega)$  и  $p(t) \in L_2(0, T)$ . Если функция  $\varphi(x)$  принадлежит  $W_2^2(0, 1)$  и удовлетворяет краевым условиям (5), то существует единственное обобщенное решение  $u(t, x) \in W_2^{2,1}(\Omega)$  задачи (1)–(3).

*Доказательство.* Если функция  $\varphi(x)$  принадлежит  $W_2^2(0, 1)$  и удовлетворяет краевым условиям (5), то, согласно п.4, она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе  $\{y_k(x)\}$ . Из (7) имеем

$$\begin{aligned} \varphi''(x) = & -\lambda_0^{(2)} \varphi_0 y_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{(1)} \varphi_{2k} y_{2k}(x) - \\ & - \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k-1} y_{2k-1}(x)) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} \varphi_{2k-1} y_{2k}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Легко видеть, что  $\frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} = 4\pi k + 2\delta_k$ . Так как система  $\{y_k(x)\}$  — базис Рисса пространства  $L_2(0, 1)$ , то в силу двустороннего неравенства Парсеваля получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \varphi_k|^2 \leq C \|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (17)$$

Из (12), (13) и (15) с учетом (5) несложно получить равномерные по  $k$  оценки

$$\begin{aligned} |u_{2k-1}(t)| &\leq C(|\varphi_{2k-1}|), \\ |u_{2k}(t)| &\leq C(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|), \\ |u'_{2k-1}(t)| &\leq C(|\varphi_{2k-1}|) |\lambda_k^{(1)}|, \\ |u'_{2k}(t)| &\leq C(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) |\lambda_k^{(2)}|. \end{aligned}$$

Отсюда, из абсолютной сходимости рядов (13) и оценок (14) следует сходимость рядов (7) и принадлежность решения задачи (1)–(3) классу  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ .

Так как система  $\{y_k(x)\}$  образует базис Рисса пространства  $L_2(0, 1)$ , то любое решение задачи (1)–(3) из данного класса представимо рядами (7). Из однозначности построения решений (12), (13) задач (9)–(11) следует единственность решения задачи (1)–(3).  $\square$

## 6. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Основным результатом работы является

**ТЕОРЕМ 2.** Если  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\varphi \in W_2^2(0, 1)$ , и функция  $\varphi$  удовлетворяет краевым условиям (5), то существует единственное обобщенное решение  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ ,  $p(t) \in L_2(0, 1)$  обратной задачи (1)–(4).

*Доказательство.* Решение прямой задачи (1)–(3) в виде биортогонального разложения

$$u(x, t) = u_0(t)y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k}(t)y_{2k}(x) + u_{2k-1}(t)y_{2k-1}(x)) \quad (8'')$$



удовлетворяем условию переопределения (4):

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Получаем при всех  $0 \leq t \leq T$ :

$$E(t) = u_0(t) \int_0^1 y_0(x) dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k}(t) \int_0^1 y_{2k}(x) dx + u_{2k-1}(t) \int_0^1 y_{2k-1}(x) dx).$$

Отдельно вычислим интегралы от базисных функций:

$$\int_0^1 y_{2k}(x) dx = \int_0^1 \sin 2\pi k x dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^1 y_0(x) dx = (2\beta_0)^{-1} \int_0^1 y_0^{(2)}(x) dx = \\ = (2\beta_0)^{-1} \int_0^1 \sin 2\beta_0 x dx = \frac{1 - \cos 2\beta_0}{(2\beta_0)^2}.$$

Так как  $\tan \beta_k = \frac{\alpha}{2\beta_k}$ , то

$$1 - \cos 2\beta_k = 2 \frac{\tan^2 \beta_k}{1 + \tan^2 \beta_k} = \frac{2\alpha^2}{(2\beta_k)^2 + \alpha^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Поэтому

$$\int_0^1 y_0(x) dx = \frac{2\alpha^2}{(2\beta_0)^2 [(2\beta_0)^2 + \alpha^2]}.$$

Аналогично вычисляем

$$\int_0^1 y_{2k-1}(x) dx = (2\delta_k)^{-1} \int_0^1 (y_k^{(2)}(x) - y_k^{(1)}(x)) dx = \\ = (2\delta_k)^{-1} \int_0^1 (\sin(2\beta_k x) - \sin(2\pi k x)) dx =$$

$$= (2\delta_k)^{-1} \frac{1 - \cos 2\beta_k}{(2\beta_k)^2} = \frac{2\alpha^2}{\delta(2\beta_k)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]}.$$

Для удобства введем обозначение  $q(t) = e^{\int_0^t p(s) ds}$ .

Легко видеть, что

$$p(t) = \frac{q'(t)}{q(t)}. \quad (19)$$

Итого имеем

$$\begin{aligned} E(t) &= \left( \varphi_0 e^{-\lambda_0^{(2)} t - \int_0^t p(s) ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{-\lambda_0^{(2)}(t-\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau \right) \times \\ &\times \frac{2\alpha^2}{(2\beta_0)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} + \frac{2\alpha^2}{\delta(2\beta_k)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} e^{-\lambda_k^{(2)} t - \int_0^t p(s) ds} + \\ &+ \int_0^t f_{2k-1}(\tau) e^{-\lambda_k^{(2)}(t-\tau) - \int_\tau^t p(s) ds} d\tau) = \\ &= \frac{\alpha^2}{q(t)} \left[ \frac{2e^{-\lambda_0^{(2)} t}}{(2\beta_0)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^{(2)} t}}{\delta_k(2\beta_k)^2((2\beta_k)^2 + \alpha^2)} \varphi_{2k-1} \right] + \\ &+ \alpha^2 \int_0^t \frac{q(\tau)}{q(t)} \left[ \frac{2f_0 e^{-\lambda_0^{(2)}(t-\tau)}}{(2\beta_0)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^{(2)}(t-\tau)}}{\delta_k(2\beta_k)^2((2\beta_k)^2 + \alpha^2)} f_{2k-1}(\tau) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Если ввести новые обозначения

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\alpha^2}{E(t)} \left[ \frac{2e^{-\lambda_0^{(2)} t}}{(2\beta_0)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^{(2)} t}}{\delta_k(2\beta_k)^2((2\beta_k)^2 + \alpha^2)} \varphi_{2k-1} \right], \\ K(t, \tau) &= \frac{\alpha^2}{E(t)} \left[ \frac{2f_0 e^{-\lambda_0^{(2)}(t-\tau)}}{(2\beta_0)^2[(2\beta_k)^2 + \alpha^2]} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^{(2)}(t-\tau)}}{\delta_k(2\beta_k)^2((2\beta_k)^2 + \alpha^2)} f_{2k-1}(\tau) \right], \end{aligned}$$

то получаем для  $q(t)$  интегральное уравнение

$$q(t) - \int_0^t K(t, \tau) q(\tau) d\tau = F(t). \quad (20)$$

Это уравнение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода. Хорошо известно, что уравнение (20) имеет единственное решение  $q(t)$  в  $L_2(0, T)$ .

Так как  $E(t) \neq 0$  и  $E(t) \in W_2^1(0, T)$ , из (20) имеем  $q \in W_2^1(0, T)$ . Подставляя  $q(t)$  в (18) находим неизвестный коэффициент диффузии  $p \in L_2(0, T)$ . Теорема доказана.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Аниконов Ю.Е., Белов Ю.Я. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения // ДАН СССР. — 1989. — Т. 306, вып. 6. — С. 1289–1293.

2 Аниконов Ю.Е., Бубнов Б.А. Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, вып. 4. — С. 777–779.

3 Бубнов Б.А. Существование и единственность решения обратных задач для параболических и эллиптических уравнений // Сб. научн. тр. Новосибирск, Изд-во Ин-та математики. — 1986. — С. 25–29.

4 Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. Сб. — 1992. — Т. 183, вып. 4. — С. 49–68.

5 Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 44, вып. 4. — С. 694–716.

6 Монахов В.Н. Обратные задачи для релаксационных моделей гидродинамики // Вест. Новосиб. гос. Ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — 2003. — Т. 3, вып. 3. — С. 72–80.

7 Калиев И.А., Первушина М.М. Обратные задачи для уравнения теплопроводности // Тр. Всероссийск. научн. конф. "Совр. пробл. физики и математики.". Стерлитамак, СГПИ. Сб. научн. тр. — 2004. — Т. 1, — С. 50–55.

8 Калиев И.А., Сабитова М.М. Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журнал индустр. матем. — 2009. — Т. 12, вып. 1. — С. 89–97.

9 Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal Math. Anal. Appl. — 2012. — V. 396, No. 1. — P. 546–554.

10 Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 323 с.

11 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by  $-D^2$  II. Analysis of cases // Journal Math. Anal. Appl. — 1990. — V. 146, No. 1. — P. 148–191.

12 Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, вып. 1. — С. 123–123.

13 Сидоренко О.Г. Существенно нелокальная задача для уравнения смешанного типа в полуполосе // Изв. вузов. Матем. — 2007. — No. 3. — С. 60–64.

14 Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Матем. — 2009. — No. 12. — С. 49–58.

15 Сабитова Ю.К., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. — 2010. — No. 4. — С. 55–62.

16 Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла // Изв. вузов. Матем. — 2012. — No. 2. — С. 70–75.

17 Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral redetermination conditions // Applied Math. and Computation. — 2011. — V. 218, No. 1. — P. 4138–4146.

*Received 20.06.15*

Садыбеков М.А., Оралсын Г. САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТҮРДЕГІ ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ШАРТТЫ ЖЫЛУ ОТКІЗГІШТІК КЕРІ КОЭФФИЦИЕНТІ ЕСЕП

Жұмыста орташа температура заңдылығы берілген жағдайда температураның таралу функциясын анықтау жәнеде стержинның бір тектілігі уақытпен өзгеруін пішіндеу есебі қарастырылады. Шешіммен қоса белгісіз тек уақытқа тәуелді коэффициенті іздеу мәселесі арқылы кері есеп туындайды. Аталмыш мақалада осы кері есептің жалғыз жалпылама шешімі бар екені дәлелденеді.

Sadybekov M.A., Oralsyn G. AN INVERSE COEFFICIENT PROBLEM OF HEAT CONDUCTIVITY WITH A NONLOCAL SAMARSKII-IONKIN TYPE CONDITION

The problem of modeling the process of determining the distribution function of temperature and time varying structure of homogeneous bar of a given law changes in the average temperature. So there is an inverse problem for the heat equation in which together with finding the solution of the equation required to find unknown coefficient depending only on the time variable. In this paper, it is proved that this inverse problem has a unique generalized solution.

УДК 517.51

Л.П. ФАЛАЛЕЕВ

*Институт математики и математического моделирования*  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v\_gulmira@mail.ru

### СХОДИМОСТЬ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО И РИССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

На классе дифференцируемых функций исследованы аппроксимативные свойства операторов Чезаро и Рисса, построенных по интерполяционным полиномам.

Ключевые слова: *ряды Фурье, линейные методы суммирования, тригонометрическая система, суммы Чезаро, интерполяция.*

Пусть

$$\sigma_n^\beta(f, x) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} T_\nu(x)$$

–  $(c, \beta)$  – средние Чезаро, образованные из тригонометрических полиномов

$$T_\nu(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n+2} f(x_k) \frac{\sin \frac{2\nu+1}{2}(x-x_k)}{2 \sin \frac{x-x_k}{2}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

приближающих функцию  $f(x) \in C_{2\pi}$  наилучшим образом в системе точек (см. [1-4])

$$x_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+2.$$

---

© Л.П. Фалалеев, 2015.

Keywords: *Fourier series, linear methods of summation, trigonometric system, Cesaro sums, interpolation*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

Пусть  $f(x)$  принадлежит классу  $C^1$  дифференцируемых функций, таких, что  $|f'(x)| \leq 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

Приведем необходимые сведения, касающиеся методов суммирования числовых и функциональных рядов.

Числовую последовательность  $\{\lambda_\nu^{(n)}\}$  будем называть выпуклой вниз по индексу  $\nu$  если, как обычно,

$$\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = \Delta(\Delta \lambda_\nu^{(n)}) \geq 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad \lambda_n^{(n)} = \Delta \lambda_n^{(n)} = \Delta^2 \lambda_n^{(n)},$$

так, что

$$\sum_{\nu=0}^n \Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = (\Delta \lambda_0^{(n)} - \Delta \lambda_1^{(n)}) + \dots + (\Delta \lambda_{n-1}^{(n)} - \lambda_n^{(n)}) + \lambda_n^{(n)} = \Delta \lambda_0^{(n)} = 1 - \lambda_1^{(n)}. \quad (1)$$

Пусть  $\lambda_\nu^{(n)} = \frac{A_{n-\nu}^\alpha}{A_n^\alpha}$ , что соответствует методу Чезаро  $\sigma_n^\alpha(f, x)$  порядка  $\alpha$ ,  $A_n^\alpha$  — числа Чезаро, для  $\alpha \geq 1$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}, \quad A_n^\alpha = \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \{1 + O(\frac{1}{n})\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$\Gamma$  — гамма-функция,

$$A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}, \quad \Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-2}}{A_n^\alpha} \geq 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots, \alpha \geq 1.$$

Для них

$$1 - \lambda_1^{(n)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{c}{n^2}, \quad c > 0, \quad c = \text{const}. \quad (2)$$

При  $\alpha \geq 2$  легко видеть

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\alpha-2} \frac{1}{\nu+1} < \frac{A_{n-2}^{\alpha-2}}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu+1} = c \frac{\ln n}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Пусть  $1 < \alpha < 2$ , тогда

$$\frac{c}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^{2-\alpha}} \frac{1}{k+1} = \frac{c}{n^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{1-\alpha} \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \right\} = c \frac{\ln n}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4)$$

В [5,6] было показано, что если сумматорная функция, определяющая множители суммирования  $\lambda_\nu^{(n)}$ , выпукла вниз, то для нее соотношения (1)-(4) выполняются. Для типических средних Рисса  $R_n^\alpha$  такой функцией является  $\varphi(x) = (1-x)^\alpha$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\alpha \geq 1$  и для соответствующих множителей

$$\lambda_\nu^{(n)} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^\alpha, \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots, \alpha \geq 1,$$

выполнено соотношение

$$\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^\alpha = \frac{A_{n-\nu}^\alpha}{A_n^\alpha} + \frac{c}{n} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_n^\beta(x) = \sup_{f \in C^1} |\sigma_n^\beta(f, x) - f(x)|.$$

При  $\beta = 1$  поведение  $\Delta_n^1(x)$  было исследовано в работах [3,4].

**ТЕОРЕМА 1.** *Для  $\beta \geq 1$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$\Delta_n^\beta(x) = \frac{2\beta \ln(n+1)}{\pi} \frac{1}{n+1} + O_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

*Доказательство.* Легко проверить, что

$$\Delta_n^\beta\left(x + \frac{\pi}{n+1}\right) = \Delta_n^\beta(x),$$

поэтому в дальнейшем будем считать

$$0 \leq x < \frac{\pi}{n+1}.$$

Применяя к  $\sigma_n^\beta(f, x)$  преобразование Абеля, получим

$$\sigma_n^\beta(f, x) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=1}^{2n+2} f(x_k) \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x-x_k}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}}.$$



Если  $f(x) \equiv 1$ , то применив дважды обратное преобразование Абеля, получим

$$\frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=1}^{2n+2} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x-x_k}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}} \equiv 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & |\sigma_n^\beta(f, x) - f(x)| \leq \\ & \leq \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{x-\pi < x_k \leq x+\pi} |f(x_k) - f(x)| \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x-x_k}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}} \leq \\ & \leq \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{x-\pi < x_k \leq x+\pi} |x_k - x| \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x-x_k}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}}. \end{aligned}$$

Для  $2\pi$ -периодической функции  $f(t) = |t - x|$ , определенной на  $|t - x| \leq \pi$ , последнее неравенство обращается в точное равенство. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_n^\beta(x) &= \frac{1}{2(n+1)} \left[ \sum_{k=1}^n (x_k - x) \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x-x_k}{2}}{\sin^2 \frac{x-x_k}{2}} + \right. \\ &+ x \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} + (\pi - x) \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{\pi-x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \\ &\left. + \sum_{k=1}^n (x_k + x) \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x_k+x}{2}}{\sin^2 \frac{x_k+x}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\frac{2}{\pi}v \leq \sin v \leq v, \quad v \in (0, \frac{\pi}{2}],$$

то легко показать, что второе слагаемое в (6) имеет порядок малости  $O_x(n^{-1})$ .

В самом деле,

$$\frac{x}{2(n+1)} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = O_x\left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} (\nu+1)^2 = O_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

(При этом числа  $\nu^\gamma$  мы заменили на  $A_\nu^\gamma$  и воспользовались соотношением  $\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^\beta A_\nu^\beta = A_n^{\beta+\gamma+1}$ .) Для третьего слагаемого в (6) из (2),(5) вытекает следующая оценка:

$$\frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{A_n^\beta} (\pi - x) \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{\pi-x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = O_x\left(\frac{1}{n}\right) \frac{A_n^{\beta-1}}{A_n^\beta} = O_x\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Функция

$$\varphi(t) = \left(t \pm \frac{x}{2}\right) \frac{\sin^2(\nu+1) \left(t \pm \frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(t \pm \frac{x}{2}\right)} \in C^{(2)}\left[\frac{\pi}{2n+2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

кроме того, легко проверить, что

$$\varphi''(\xi) = O_x((\nu+1)^2), \quad \xi \in \left[\frac{\pi}{2n+2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Напомним формулу трапеций для приближенного вычисления определенных интегралов: если функция  $y = y(x)$  непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на конечном промежутке  $[a, b]$  и  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $y_i = y(x_i)$ , то

$$\int_a^b y(x) dx = h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) + R_n,$$

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Применяя формулу трапеций, получим

$$\begin{aligned} J(\nu, \pm x) &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^n (x_k \pm x) \frac{\sin^2(\nu+1) \frac{x_k \pm x}{2}}{\sin^2 \frac{x_k \pm x}{2}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t \pm \frac{x}{2}\right) \frac{\sin^2(\nu+1) \left(t \pm \frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(t \pm \frac{x}{2}\right)} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{4} \frac{1}{n+1} \left( \left(\frac{\pi}{2n+2} \pm \frac{x}{2}\right) \frac{\sin^2(\nu+1) \left(\frac{\pi}{2n+2} \pm \frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2} \pm \frac{x}{2}\right)} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{(\frac{\pi}{2} \pm \frac{x}{2}) \sin^2(\nu+1)(\frac{\pi}{2} \pm \frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2}} \Big] + O_x\left(\frac{(\nu+1)^2}{(n+1)^2}\right).$$

Из соотношения

$$\frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} O_x\left(\frac{(\nu+1)^2}{(n+1)^2}\right) = O_x\left(\frac{1}{n}\right),$$

пренебрегая внеинтегральными членами, получим

$$\frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} J(\nu, \pm x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-2} \int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} (t \pm \frac{x}{2}) \frac{\sin^2(\nu+1)(t \pm \frac{x}{2})}{\sin^2(t \pm \frac{x}{2})} dt + O_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

Учитывая проведенные оценки, из (6) находим

$$\begin{aligned} \Delta_n^\beta(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \left[ \int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} (t - \frac{x}{2}) \frac{\sin^2(\nu+1)(t - \frac{x}{2})}{\sin^2(t - \frac{x}{2})} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + \frac{x}{2}) \frac{\sin^2(\nu+1)(t + \frac{x}{2})}{\sin^2(t + \frac{x}{2})} dt \right] + O_x\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

В равенстве (7) к интегралам применим дважды формулу интегрирования по частям. После элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} (t - \frac{x}{2}) \frac{\sin^2(\nu+1)(t - \frac{x}{2})}{\sin^2(t - \frac{x}{2})} dt + \int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + \frac{x}{2}) \frac{\sin^2(\nu+1)(t + \frac{x}{2})}{\sin^2(t + \frac{x}{2})} dt = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{(-1)^\mu}{\mu+1} (1 - 2 \sin^2 \frac{\mu x}{2}) + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{1}{\mu} \sin^2 \mu \left( \frac{\pi}{2n+2} + \frac{x}{2} \right) + \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{1}{\mu} \sin^2 \mu \left( \frac{\pi}{2n+2} - \frac{x}{2} \right) + O_x(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{1}{\mu} \sin^2 \mu \left( \frac{\pi}{2n+2} \pm \frac{x}{2} \right) = O \left( \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \mu \left( \frac{\pi}{2n+2} \pm \frac{x}{2} \right)^2 \right) = O_x \left( \frac{(\nu+1)^2}{n^2} \right),$$

$$\sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{(-1)^\mu}{\mu+1} \sin^2 \frac{\mu x}{2} = O_x \left( \frac{(\nu+1)^2}{n^2} \right),$$

то, учитывая обратное преобразование Абеля, из (8) получим

$$\Delta_n^\beta(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-2}}{A_n^\beta} \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{1}{\mu} + O_x \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{2\beta \ln(n+1)}{\pi(n+1)} + O_x \left( \frac{1}{n} \right),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Исходя из асимптотических соотношений (1)–(4) и равенств (2)–(5) для чисел Чезаро, использованных при доказательстве теоремы 1, можно утверждать, что теорема 1 и равенство (6) справедливы для средних Рисса, построенных по тем же интерполяционным полиномам.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Введем в рассмотрение тригонометрический полином

$$f_n^N(x) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) u_n(x_k - x),$$

где

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \rho_\nu(n) \cos \nu t \geq 0, \quad t \in [0, \pi], \quad x_k = \frac{2k\pi}{N},$$

$k = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  – произвольное натуральное число.

Для величины

$$E_n^N(x) = \sup_{f \in C^1} |f(x) - f_n^N(x)|$$

аналог теоремы Л.И. Баусова [8] для интерполяционных полиномов  $f_n^N$  установила Р. Рух [9].

В применении к множителям Чезаро

$$\rho_\nu(n) = \frac{A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta}, \quad \beta = 1, 2, \dots$$

ею получена следующая асимптотическая оценка:

$$E_n^N(x) = \frac{2}{\pi} \beta \frac{\ln n}{n} + O_x\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Вычисления, приведенные нами при доказательстве теоремы 1, позволяют заключить, что равенство (9) имеет место для произвольных, не обязательно целых  $\beta \geq 1$ . При  $N = 2n + 1$ ,  $\beta = 1$  равенство (9) получено С.М. Никольским [7].

Напомним, что ряд  $\sum c_n$  суммируем методом  $C(\beta, \gamma)$ , если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{\beta, \gamma} = S$ ,  $\sigma_n^{\beta, \gamma} = \frac{1}{A_n^{\beta+\gamma}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^\gamma S_\nu$ ,  $\beta, \gamma, \beta + \gamma > -1$ ,  $S_\nu$  – частичные суммы ряда  $\sum c_n$ . Для тригонометрической системы  $C(1, 0)$  – средние Фейера,  $C(\beta, 0)$  – средние Чезаро.

Так как

$$\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} D_k(t) = \frac{1}{2(\nu+1)} \frac{\sin^2(\nu+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \geq 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{A_n^{\beta+\gamma}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^\gamma D_\nu(t) dt \equiv 1,$$

то

$$\sigma_n^{\beta, \gamma}(f, x) = \frac{1}{\pi A_n^{\beta+\gamma}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^\gamma D_\nu(t) dt.$$

Положив  $f \equiv 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \Delta_n^{\beta, \gamma} &= \sup_{f \in C^1} \max_x |f(x) - \sigma_n^{\beta, \gamma}(f, x)| = \\ &= \frac{4}{\pi A_n^{\beta+\gamma}} \left\{ \sum_{\nu=0}^n [A_{n-\nu}^{\beta-1} A_\nu^\gamma - A_{n-\nu-1}^{\beta-1} A_{\nu+1}^\gamma] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2(\nu+1)t}{\sin^2 t} dt. \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Полагая при суммировании  $A_{-1}^{\beta-1} \equiv 0$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2(\nu+1)t}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1+(-1)^k}{k+1} + \frac{(-1)^{\nu+1}-1}{2\nu+2} + 1 + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right] \quad (11)$$

с учетом (10),(11), равенство для  $\Delta_n^{\beta,\gamma}$  примет вид

$$\Delta_n^{\beta,\gamma} = \frac{2}{\pi} \frac{A_n^{\beta-1}}{A_n^{\beta+\gamma}} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_\nu^\gamma}{\nu+1} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

что при  $\gamma = 0$ ,  $\beta \geq 1$  дает оценку  $\Delta_n^\beta(x)$  для чезаровских средних порядка  $\beta$ , а при  $-1 < \gamma < 0$  дает новый результат

$$E_n^N(c(\beta, \gamma), x) = O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Выпуклость множителей суммирования для методов Рисса  $R_\lambda^\alpha(f, x)$  позволила изучить аппроксимативные свойства операторов в  $L_p$  [10].

Пусть  $f \in L_p[-\pi, \pi] \equiv L_p$ ,  $0 \leq \delta \leq \pi$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  и  $\omega_2(f, \delta)_p = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\|_{L_p}$  - ее модуль гладкости.

Обозначим через  $T_n$  тригонометрический полином наилучшего приближения  $f \in L_p$ , через  $E_n(f)_p$  - соответствующее наилучшее приближение.

Вопросам приближения непрерывных функций операторами Чезаро  $\sigma_n^\alpha(f, x)$  посвящены работы М. Заманского, А.В. Ефимова ( $\alpha = 1$ ), Гочжужуя ( $\alpha > 0$ ), в случае  $f \in L_p$  - работы К.Г. Лебеда и А.А. Авдеенко ( $\alpha = 1$ ), М. Лекишвили ( $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ).

Для  $f \in L_p$  будем изучать аппроксимативные свойства операторов Рисса

$$R_\lambda^\alpha(f, x) = \sum_{\nu \leq \lambda} \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$\alpha \geq 1$ ,  $\lambda > 0$  - вещественные числа,  $a_\nu$ ,  $b_\nu$  - коэффициенты Фурье функции  $f$ .

При отмеченных ограничениях на параметры  $\alpha$  и  $\lambda$  и произвольном  $a > 0$  установлена оценка

$$R_\lambda^\alpha(f, x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_a^\infty \frac{f(x + \frac{t}{\lambda}) - 2f(x) + f(x - \frac{t}{\lambda})}{t^2} dt + \varphi(\alpha, \lambda, x), \quad (12)$$

где

$$\|\varphi(\alpha, \lambda, x)\|_p = O\left(E_n(f)_p + \lambda^{-2}\|T_n''\|_p\right), \quad n = [\lambda].$$

О поведении остаточного члена в (12) можно судить по известным неравенствам С.Б. Стечкина

$$\|T_n''\|_p \leq cn^2\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right)_p,$$

$$E_n(f)_p \leq c\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \quad c > 0, \quad c = \text{const.}$$

Поставим в соответствие каждой  $f(x) \in L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  тригонометрический полином

$$u_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^{(n)}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

где  $a_\nu, b_\nu$  – коэффициенты Фурье  $f$ ,  $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\lambda_k^{(n)} = 0$ ,  $k > n$  – элементы нижней треугольной матрицы вещественных чисел. Общность свойств операторов Фейера, Чезаро, Рисса подтолкнула к появлению следующей теоремы [11]

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $\{\lambda_\nu^{(n)}\}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , выпукла вниз по индексу  $\nu$ ,  $\lambda_\nu^{(n)} \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$\begin{aligned} & u_n(f, \Lambda, x) - f(x) = \\ & = \frac{n}{\pi}(1 - \lambda_1^{(n)}) \int_a^\infty \frac{f(x + \frac{t}{n}) - 2f(x) + f(x - \frac{t}{n})}{t^2} dt + \Omega_n(\Lambda, x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\|\Omega_n(\Lambda, x)\|_{L_p} \leq c\omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \left\{ n^2 \sum_{\nu=0}^n \Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} \frac{1}{\nu+1} + n(1 - \lambda_1^{(n)}) \right\}.$$

Формула (13) просто иллюстрируется при  $\alpha = 1$  для методов Рисса и Чезаро (метод Фейера). В этом случае  $1 - \lambda_1^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ ,  $\nu = n$ ,  $\Delta^2 \lambda_\nu^{(n)} = 0$ ,  $\nu \neq n$ . В качестве следствия получим теорему Г.К.

Лебеда и А.А. Авдеенко для  $1 \leq p \leq \infty$ , для  $p = \infty$  – теорему А.В. Ефимова.

Заметим, что если  $f$  – достаточно гладкая (дифференцируемая) функция, то "главным членом" поточечного уклонения будет интеграл, на классе  $\text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , интеграл и  $\Omega_n(\cdot)$  могут иметь одинаковый порядок убывания, за счет выбора выпуклого метода суммирования  $\Omega_n(\cdot)$  может иметь меньший порядок малости.

Ю.Л. Носенко [12] получал результаты в том же направлении, что и автор. Пусть  $\dot{\Delta}_\delta^k f(x)$  и  $\omega_k(f, \delta)$  симметричная разность и модуль гладкости функции  $f$  порядка  $k$  с шагом  $\delta$  в точке  $x$ , например,

$$\dot{\Delta}_\delta^2 f(x) = f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{\delta}{2}\right).$$

Рассматриваются вопросы приближения  $f(x)$  средними Рисса и Чезаро в указанных точках. В частности приведен результат:  $\forall \lambda > 0 \exists c_i = c_i(\lambda, p)$ ,  $i = 1, 2$ , что

$$f(x) - \sigma_n^\alpha(f, x) = -\frac{a}{2\pi} \int_\lambda^\infty \dot{\Delta}_{\frac{t}{n+1}}^2 f(x) t^{-2} dt + \tau_n(f, x),$$

$$c_1 \omega_2\left(f; \frac{1}{n+1}\right) \leq \|\tau_n(f; x)\|_p \leq c_2 \omega_2\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_p.$$

Такого же типа результат приведен для средних Рисса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Оловянишников В.М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек // ДАН СССР. – 1950. – Т. 70, № 5. – С. 761-764.

2 Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. – Минск: Высшая школа, 1968.

3

4 Яценко Н.Я. О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами типа Фейера // Известия ВУЗов. Математика. – 1974. – № 7. – С. 91-94.



5 Яценко Н.Я. Оценка отклонений непрерывных  $2\pi$ -периодических функций от соответствующих им тригонометрических полиномов типа С.Н. Бернштейна // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск, 1977. – С. 43-46.

6 Фалалеев Л.П. О приближении функций из класса Зигмунда сопряженными суммами Чезаро // Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова. – 1987. – С. 222-224.

7 Фалалеев Л.П. О точных константах для матричных методов суммирования // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36, № 4. С. 927-933.

8 Никольский С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Известия АН СССР. Серия матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501-508.

9 Баусов Л.И. О приближении функций класса  $z_\alpha$  положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи матем. наук. – 1961. – XVI (99). – С. 143-149.

10 Pych P. Trigonometric approximation of  $2\pi$ -periodic Lipschitz functions // Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci math., astron. et phys. – 1968. – 16, №10. – P. 779-785.

11 Фалалеев Л.П. Аппроксимативные свойства операторов Рисса // XV Всесоюзная школа по теории операторов: тез. докл. – Ульяновск, 1990. – Часть II. – С. 100.

12 Фалалеев Л.П. О матричных методах суммирования в  $L_p$  // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54, вып. 5. – С. 111-118.

13 Носенко Ю.Л. Приближение функций некоторыми средними их рядов Фурье // Междунар. конференц. "Функц. пространства, теория приближений, нелинейный анализ посв. 90-летию С.М. Никольского: тез. докл. – Москва, 1995. – С. 204-205.

*Статья поступила в редакцию 21.04.2015*

Фалалеев Л.П. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ПОЛИНОМДАРДЫҢ ЧЕ-  
ЗАРО ЖӘНЕ РИСС ОРТАШАЛАРЫНЫҢ ЖИНАҚТАЛУЫ

Дифференциалданатын функциялар класында интерполяциялық полиномдар арқылы құрылған Чезаро және Рисс операторларының аппроксимативті қасиеттері зерттелген.

Falaleev L.P. CONVERGENCE OF CESARO AND RIESZ MEANS OF  
TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

On the class of differentiable functions approximation properties of Cesaro and Riesz operators constructed by interpolation polynomials are studied.

## Правила "Математического журнала" для авторов статей

### *Общие положения*

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте [www.math.kz](http://www.math.kz) Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

### *Требования к оформлению статей*

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе  $\LaTeX$ -2 $\epsilon$  и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru). Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсаыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, №2 (56), 2015

Собственник "Математического журнала":  
Институт математики и математического моделирования  
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать  
и выставлен на сайте <http://www.math.kz>  
Института математики и математического моделирования МОН РК  
29.06.2015 г.

Тираж 300 экз. Объем 128 стр.  
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:  
Институт математики и математического моделирования МОН РК  
г. Алматы, ул. Пушкина, 125  
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32  
e-mail: [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru)  
web-site: <http://www.math.kz>