ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

Том 16 № 3 (61) 2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

Том 16 № 3 (61) 2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, № 3 (61), 2016

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 16 **№ 3 (61)** **2016**

CONTENTS

Volume 16 **No. 3 (61)** **2016**

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 5–19.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

КАЛЬМЕНОВ ТЫНЫСБЕК ШАРИПОВИЧ
(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет выдающемуся казахстанскому математику, академику Национальной академии наук Республики Казахстан Тынысбеку Шариповичу Кальменову.

Тынысбек Шарипович родился 5 мая 1946 года в Южно-Казахстанской области Казахской ССР.

По окончании средней школы поступил в Новосибирский государственный университет и закончил его в 1969 г. В 1969-1972 годы обучался в аспирантуре там же. Он является представителем школы выдающегося ученого – члена-корреспондента АН СССР А.В. Бицадзе.

Научные исследования, выполненные Т.Ш. Кальменовым в аспирантские годы, посвящены исследованию корректности начальных и начально-краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений вида

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f; \quad k(0) = 0; \; k(y) > 0, \; y \neq 0.$$

Для этого общего уравнения Т.Ш. Кальменовым найдены достаточные условия корректности первой и второй задач Дарбу, включающие в себя все ранее известные условия корректности. А для различных модельных случаев этого уравнения впервые установлены критерий единственности решения, достаточные условия корректности и класс гладкости решения задачи Дарбу; критерий непрерывности решения задачи Гурса, при этом впервые указано на неравноправность характеристик для корректности задачи; сформулирована новая характеристическая задача Коши (неполная задача Гурса) и доказана ее корректность в классе аналитических функций.

С 1972 по 1985 годы Т.Ш. Кальменов работает в Институте математики АН КазССР, где он прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией. В эти годы область его научных интересов относится к теории дифференциальных операторов, где им получены значительные результаты.

В случае граничных задач для уравнений гиперболического и смешанного типов при исследовании задач в слабом смысле возникают существенные затруднения при выяснении отношения между обобщенными и классическими решениями и, как следствие, отсутствие доказательства единственности решения, вследствие чего получается неполное исследование задач. В связи с этим важное значение приобретает вопрос: при каких условиях слабые решения являются классическими. В более точной постановке, когда обобщенное решение u граничной задачи для уравнения $Lu = f$ может быть приближено последовательностью $u_n \in W_2^2(\Omega)$ классических решений в том смысле, что $u_n \to u$ и $Lu_n \to f$ в некоторой метрике, как правило, по норме $L_2(\Omega)$. Обобщенные решения, обладающие последним свойством, называют сильными.

В этом направлении для вырождающегося уравнения смешанного типа

$$Lu = k(y)u_{xx} + u_{yy} + a(y)u_x + b(y)u_y + c(y)u = f(x, y)$$

Т.Ш. Кальменовым доказана корректность полупериодической задачи Дирихле; а для вырождающегося уравнения

$$Lu = signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

показано существование сильных решений задач Дарбу и Трикоми.

Для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu = -signy\ u_{xx} - u_{yy} = f(x, y)$$

им установлен критерий сильной разрешимости задачи Трикоми в пространствах L_p в терминах углов подхода эллиптической части границы области к линии изменения типа. При этом, в отличие от известных ранее работ, впервые показана неединственность слабых решений и даны критерии сильной разрешимости указанных задач.

Развивая операторный подход, Т.Ш. Кальменов построил общую теорию регулярных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов. Классическая постановка краевой задачи такова: дано уравнение и краевое условие. Необходимо исследовать разрешимость этой задачи и свойства решения, если оно существует (в смысле принадлежности некоторому пространству). Существует другой, более общий подход к решению таких задач, который был заложен в работах J. von Neumann и М.И. Вишика: задано уравнение и пространство, которому должны принадлежать правые части уравнений и краевых условий и решение. Нужно описать все краевые условия, для которых задача корректно разрешима в данном пространстве.

Т.Ш. Кальменовым описаны все корректные краевые задачи: для волнового уравнения – в характеристическом треугольнике; для многомерного волнового уравнения – в характеристическом конусе; а также для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и для уравнения Трикоми; для многомерного уравнения смешанного типа. При этом впервые построен многомерный корректный аналог задачи Дарбу и дано ее решение в явном виде.

Большой цикл работ Т.Ш. Кальменова посвящен спектральной теории уравнений гиперболического и смешанного типов. В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений гиперболического и смешанного типов являются малоизученными. Отметим, что общеизвестные методы (в частности, абстрактная спектральная теория линейных операторов), являющихся мощным инструментом при изучении эллиптических операторов, оказываются малоприспособленными в применении к краевым задачам для уравнений гиперболического и смешанного типов в области, часть которой совпадает с характеристическим конусом. По этой причине многие актуальные проблемы уравнений гиперболического и смешанного типов требуют специальных исследований и привлечения новых подходов, методов. Такими задачами, в частности, являются вопросы спектра и сильной разрешимости локальных и нелокальных неэллиптических задач. Систематическое изучение спектральных вопросов уравнений смешанного типа начато с работ Т.Ш. Кальменова, Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева.

Т.Ш. Кальменовым сформулирован и доказан новый принцип экстремума для уравнений смешанного типа, носящий сейчас в литературе название "принцип максимума Кальменова". На основании этого нового принципа экстремума им решена проблема существования собственного значения задачи Трикоми, что заложило основу нового перспективного научного направления – спектральной теории уравнений смешанного типа. Существование собственных значений задачи Трикоми доказано как для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, так и для общего уравнения Геллерстедта.

Эти результаты явились основой для докторской диссертации "О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов защищенной в 1983 году в МГУ им. М.В. Ломоносова.

С 1985 по 1991 годы Т.Ш. Кальменов работает деканом математического факультета Казахского государственного университета, с 1991 по 1997 годы – ректором Казахского химико-технологического университета, Южно-Казахстанского технического университета. В период с 1998 по 2003 годы он является заведующим кафедрой Южно-Казахстанского государственного университета.

В эти годы Т.Ш. Кальменов обращается к задачам в более общей постановке. После появления знаменитой работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Такие задачи являются существенно несамосопряженными и для их исследования не применимы классические, хорошо разработанные методы исследований. Т.Ш. Кальменовым впервые для общего эллиптического оператора

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u$$

в произвольной области с гладкой границей доказана полнота корневых векторов основных видов задач Бицадзе-Самарского в общей постановке.

В 2004 году Т.Ш. Кальменов возвращается в Алматы, он назначается-Генеральным директором Центра физико-математических исследований

Министерства образования РК, преобразованного в Институт математики и математического моделирования в 2012 году после присоединения к нему Института математики МОН РК.

В эти годы Т.Ш. Кальменовым получены новые значительные результаты по классическим задачам для уравнений в частных производных.

В теории уравнений математической физики и, например, в теории упругости, важное место занимает явное представление решений задач для неоднородного бигармонического уравнения. Т.Ш. Кальменовым впервые построена в явном виде (в терминах элементарных функций) полигармоническая функция Грина задачи Дирихле

$$\triangle_x^m u(x) = f(x), f(x) \in L_2(\Omega_\delta),$$

$$\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, ..., m-1,$$

в шаре $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^n$ в случае произвольной размерности пространства.

Спектральная теория несамосопряженных дифференциальных операторов является до сих пор не завершенной даже для случая простейших обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений же в частных производных, а тем более уравнений смешанного типа, в несамосопряженной спектральной теории получены лишь некоторые отдельные результаты. До настоящего времени не найден пример регулярной краевой задачи для дифференциальных уравнений, спектр которой (кроме пустого множества) является конечным множеством. Т.Ш. Кальменову впервые удалось установить, что спектр дифференциальных операторов общего вида

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha(x) D^\alpha u = \lambda u(x),$$

порожденных регулярными граничными условиями, – либо пустое, либо бесконечное множество.

Классический объемный потенциал Ньютона

$$u(x) = \varepsilon_n * f \equiv \int_\Omega \varepsilon_n(x-y) f(y) dy = L^{-1} f$$

определяет величину масс или заряда, распределенных в области Ω с плотностью $\frac{f}{(n-2)\sigma_n}$. Он также часто применяется в теории функций и теоремах вложения. Поскольку фундаментальное решение $\varepsilon_n(x-y)$ симметрично, вещественнозначно и имеет слабую особенность, то интегральный оператор L^{-1} является вполне непрерывным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$ и функция $u(x) = \varepsilon_n * f(x)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $-\triangle u = f$.

В работах Т.Ш. Кальменова впервые найдено краевое условие объемного потенциала Ньютона:

$$\frac{1}{2}u(x) = -\int_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y, \ \text{ для всех } x \in \partial\Omega.$$

Как оказалось, эти краевые условия описывают давно известный в теоретической физике эффект "прозрачных краевых условий", пропускающих уходящие волны и отражающих приходящие волны. Наличие таких краевых условий объемного потенциала позволяет свести задачу с условиями излучения типа Зоммерфельда в бесконечной области к задаче в ограниченной области и эффективно применять численные методы.

Классический пример Адамара демонстрирует некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа. Выдающимися советскими математиками – академиками А.Н. Тихоновым и М.М. Лаврентьевым, их учениками и последователями найдены условия корректности задачи Коши для уравнения Лапласа и других некорректных задач. А также построены методы регуляризации некорректных задач. В работах Т.Ш. Кальменова методом разложения по собственным функциям смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом установлено необходимое и достаточное условие корректности в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$ смешанной задачи Коши для уравнения Пуассона:

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), (x,t) \in \Omega,$$

$$u|_{t=-1} = \varphi_1(x), u_t|_{t=-1} = \varphi_2(x),$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0.$$

Более того, показано, что решение задачи Коши является единственным и без задания краевых условий.

Характерной чертой математического творчества Т.Ш. Кальменова является обилие оригинальных методов и нестандартных подходов к решению математических проблем. Т.Ш.Кальменов относится к числу немногих ученых, сумевших оставить отпечаток своей индивидуальности почти во всех разделах математики, которыми он занимался. Он является достойнымпреемником своего учителя – Андрея Васильевича Бицадзе – член-корреспондента АН СССР и яркий продолжатель традиций советской математической школы.

Под руководством академика Т.Ш. Кальменова защищено более 50 кандидатских и 9 докторских диссертаций. Он имеет более 120 опубликованных научных работ.

Многолетняя научная, педагогическая и общественно-организационная деятельность Т.Ш. Кальменова отмечена рядом высоких наград и званий. В 1978 году он удостоен премии Ленинского комсомола Казахстана, в 1996 году стал Заслуженным деятелем науки и техники Республики Казахстан. В 1989 году он избран член-корреспондентом АН КазССР, и в 2003 году становится академиком НАН РК.

Т.Ш. Кальменов награжден орденами и медалями Республики Казахстан, а в 2013 году за цикл работ "К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений" ему присвоена Государственная премия Республики Казахстанв области науки и техники.

Академик Т.Ш. Кальменов, как профессиональный ученый и руководитель Института математики и математического моделирования, является требовательным к себе и ко всем ученым, что помогает держать планку математической науки в Казахстане на высоком мировом уровне. На сегодняшний день он является наиболее ярким математиком Казахстана и безусловным ее лидером.

С неослабевающей энергией Т.Ш. Кальменов занимается научной работой, щедро раздаривает научные идеи своим ученикам и соратникам, реализует все новые творческие замыслы. Он полон новых и оригинальных математических идей.

Прекрасно, что Т.Ш. Кальменов является плодотворным и в семейной жизни. Он является счастливым отцом десяти детей, а сейчас воспитывает более двадцати внуков!

От всей души желаем Тынысбеку Шариповичу крепкого здоровья, семейного счастья, новых творческих успехов, глубоких научных результатов!

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Список основных научных трудов Т.Ш. Кальменова

1. Кальменов Т.Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 1. – С. 178-181.

2. Kal'menov T.Sh. A criterion for the uniqueness of a solution of Darboux's problem for a degenerate hyperbolic equation // Differential equations. – 1971. – V. 7, № 1. – P. 147-150.

3. Кальменов Т.Ш. Критерий непрерывности задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 1. – С. 41-54.

4. Kal'menov T.Sh. A criterion for the continuity of a solution of Goursat's problem for a degenerate equation // Differential equations. – 1972. – V. 8, № 1. – P. 29-39.

5. Кальменов Т.Ш. О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 1. – С. 84-96.

6. Kal'menov T.Sh. A characteristic Cauchy problem for a class of degenerate hyperbolic equations // Differential equations. – 1973. – V. 9, № 1. – P. 63-72.

7. Кальменов Т.Ш. О характеристической задаче Коши для одного класса вырождающихся уравнений // Сообщения АН ГрССР. – 1973. – Т. 70, № 3. – С. 533-536.

8. Кальменов Т.Ш. О задаче Дарбу для одного вырождающегося уравнения // Дифференц. уравнения. – 1974, Т. 10, № 1. – С. 59-68.

9. Kal'menov T.Sh. Darboux's problem for a degenerate equation // Differential equations. – 1974. – V. 10, № 1. – P. 41-47.

10. Кальменов Т.Ш. О единственности регулярного решения задачи Дарбу для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.. – 1974, № 1. – С. 79-82.

11. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О гладкости решения одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977, Т. 13, № 7. – С. 1244-1255.

12. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M.O. Smoothness of solutions of a class of degenerate elliptic equations // Differential equations. – 1977. – V. 13, № 7. – P. 861-870.

13. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 8. – С. 1418-1425.

14. Kal'menov T.Sh. The spectrum of Tricomi's problem for a Lavrent'ev-Bitsadze problem // Differential equations. – 1977. – V. 13, № 8. – P. 984-989.

15. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Геллерстедта // Труды Инст. мат. и мех. АН КазССР "Теор. и прикл. задачи по мат. и мех.". – Алма-Ата, 1977. – С. 167-169.

16. Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 546-547.

17. Kal'menov T.Sh. Semiperiodic Dirichlet problem for a class equations of mixed type // Differential equations. – 1978. – V. 14, № 3 – P. 385-386.

18. Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 354-356.

19. Kal'menov T.Sh. The spectrum of Tricom's problem for a mixed fourth - order equation // Differential equations. – 1979. – V. 15, № 2. – P. 248-250.

20. Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 261, № 2. – С. 541-543.

21. Kal'menov T.Sh., Bazarbekov A.B. A criterion for strong solvability of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation // Soviet Math. Dokl.. – 1981. – V. 261, № 2. – P. 484-487.

22. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 873-885.

23. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M.O. Regular boundary value problems for Lavrent'ev - Bitsadze equation // Differential equations. – 1981. – V. 17, № 5. – P. 578-588.

24. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 6. – С. 1105-1121.

25. Kal'menov T.Sh. Regular boundary value problems for the wave equation // Differential equations. – 1981. – V. 17, № 6. – P. 714-726.

26. Кальменов Т.Ш. О регулярных расширениях одного минимального оператора Лаврентьева-Бицадзе // В кн. "Краевые задачи для уравнений неклассического типа" . – Новосибирск, 1981.

27. Кальменов Т.Ш. О регулярных расширениях полуминимального оператора Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 37-58.

28. Kal'menov T.Sh. Regular extensions of semiminimal Lavrent'ev - Bitsadze operator // Differential equations. – 1982. – V. 18, № 1. – P. 31-48.

29. Кальменов Т.Ш. О многомерных регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.. – 1982. – № 3. – С. 18-25.

30. Кальменов Т.Ш. О спектре самосопряженной задачи для волнового уравнения // Вестник АН КазССР. – 1982. – № 2. – С. 63-66.

31. Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в пространствах L_p // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 7. – Р. 268-280.

32. Kal'menov T.Sh., Bazarbekov A.B. A criterion for the strong solvability of Tricomi's problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in Lp - spaces // Differential equations. – 1982. – V. 18, № 7. – P. 216-225.

33. Кальменов Т.Ш. О сильных решениях задач Дарбу и Трикоми // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 3. – С. 535-538.

34. Kal'menov T.Sh. On strong solutions of the Darboux and Tricomi problems // Soviet Math. Dokl.. – 1983. – V. 273, № 3. – P. 672-674.

35. Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 66-75.

36. Kal'menov T.Sh. Self - adjoint boundary - value problems for Tricomi's equation // Differential equations. – 1983. – V. 19, № 1. – P. 56-63.

37. Кальменов Т.Ш. Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 75-78.

38. Kal'menov T.Sh. Spectrum of a boundary - value problem with translation for the wave equation // Differential equations. – 1983. – V. 19, № 1. – P. 64-66.

39. Кальменов Т.Ш., Аубакиров Б.У. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 4. – С. 700-702.

40. Кальменов Т.Ш. О регулярных самосопряженных задачах для многомерного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 10. – С. 1745-1753.

41. Kal'menov T.Sh. Regular self-adjoint boundary-value problems for a multidimensional of mixed type // Differential equations. – 1986. – V. 22, № 10. – P. 1194-1201.

42. Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. О спектре эллиптической задачи Бицадзе-Самарского // Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.. – 1986. – № 1. – С. 72-75.

43. Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. – 1987, Т. 296, № 3. – С. 528-531.

44. Kal'menov T.Sh., Eroshenkov E.P. On the completeness of root vectors of the Bitsadze-Samarskii elliptic problem // Soviet Math. Dokl.. – 1987. – T. 296, № 3. – С. 528-531.

45. Кальменов Т.Ш., Бияров Б.Н. О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения // Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат.. – 1988. – № 5. – С. 13-16.

46. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 60-65.

47. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A. Dirichlet problem and nonlocal boundary-value problems for the wave equation // Differential equations. – 1990. – V. 26, № 1. – P. 55-59.

48. Кальменов Т.Ш., Буркитов А.Б. О равномерной оценке асимптотического решения задачи Коши для сингулярно возмущенного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 33-41.

49. Kal'menov T.Sh., Burkitov A.B. A uniform bound of an asymptotic solution of a Cauchy problem for a singularly perturbed wave equation // Differential equations. – 1992. – V. 28, № 1. – P. 31-39.

50. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Ержанов Н.Е. Критерий сильной разрешимости Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Общий случай // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 870-875.

51. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Erzhanov N.E. A criterion for strong solvability of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation. General case. // Differential equations. – 1993. – V. 29, № 5. – P. 745-750.

52. Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. О свойствах корневых подпространств задачи Трикоми // Вестник КазНУ, Сер. мат., мех., инф.. – 2001. – № 5. – С. 30-32.

53. Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1425-1428.

54. Kal'menov T.Sh., Bimenov M.A. A Test for the Completeness of the Root Vectors in the Tricomi Problem // Differential equations. – 2003. – V. 39, № 10. – P. 1503-1505.

55. Кальменов Т.Ш., Джаманкараева М.А. Спектральные свойства корневых векторов задачи Трикоми // Математический журнал. – 2004. – № 1 (11). – С. 45-49.

56. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Спектральные свойства корневых подпространств задачи Трикоми // Математический журнал, 2004. – № 4 (14). – С. 44-48.

57. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. О представлении функции Грина задачи

Дирихле для полигармонического уравнения // Доклады НАН РК. – 2006. – № 5. – С. 9-12.

58. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation Green function of the Dirichlet problems for the bi-harmonic equation // Abstracts International Congress of Mathematicians. – Madrid, 2006. – P. 416.

59. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. – 2007. – Т. 414, № 2. – С. 168-171.

60. Kal'menov T.,Sh., Iskakova U. A. A Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation // Doklady Mathematics. – 2007. – V. 75, № 3. – P. 370-373.

61. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сиб. матем. журнал. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 423-428.

62. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Greens function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Syberian Mathematical Journal. – 2008. – V. 49, № 3. – P. 423-428.

63. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. – 2008. – V. 53, № 2. – P. 177-183.

64. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421, № 3. – С. 305-307.

65. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, № 1. – P. 528-530.

66. Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады РАН. – 2008. – Т. 423, № 4. – С. 730-732.

67. Kal'menov T.Sh., Iskakova U. A. A Method for Solving the Cauchy Problem for the Laplace Equation // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, № 3. – P. 874-876.

68. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Сураган Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 4. – С. 68-72.

69. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина // Доклады РАН. – 2008. – Т. 423, № 6. – С. 730-732.

70. Kal'menov T.Sh., Suragan D. Determination of the Structure of the Spectrum of Regular Boundary Value Problems for Differential Equations by V.A. Il'in's Method of Anti - A Priori Estimates // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, № 3. – P. 913-915.

71. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428 , № 4. – С. 16-19.

72. Kal'menov T.Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics. – 2009. – V. 80, № 2. – P. 646-649.

73. Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.А. Об одном рекуррентном методе решения сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения второго порядка // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 128-138.

74. Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. On a Recurrence Method for Solving a Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Second Order Equation // Siberian Advances in Mathematics. – 2011. – V. 21, № 4. – P. 274-281.

75. Кальменов Т.Ш., Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Об интегральном представлении корректных сужений и регулярных расширений дифференциальных операторов // Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, № 5. – С. 589-592.

76. Kal'menov T.Sh., Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. On Integral Representations of Correct Restrictions and Regular Extensions of Differential Operators // Doklady Mathematics. – 2010. – V. 81, № 1. – P. 94-96.

77. Kal'menov T.Sh., Suragan D. A Boundary Condition and Spectral Problems for the Newton Potential // Operator Theory: Advances and Applications. – 2010. – V. 216. – P. 187-210.

78. Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.S. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2010. – V. 18, № 5. – P. 471-492.

79. Alimov Sh., Begehr H., Besov O.V., Edmunds D.E., Evans W.D., Filippov V.M., Ghazaryan H.G., Gilbert R., Goldman M.L., Goldshtein V.M., Gorbunov A.L., Guliyev V.S., Gusakov V.A., Kalmenov T.Sh., Kalyabin G.A., Kokilashvili V.M., Korzyuk V.I., Kudryavtsev L. D., Kufner A., Lamberti P.D., Lanza de Cristoforis M., Maz'ya V.G., Nikol'skii S.M., Otelbaev M., Pankov A., Pohozhaev S.I., Reshetnyak A.G., Schmeisser H.J., Shkalikov A.A., Stepanov V.D., Tikhomirov V.M., Triebel H., Tuyakbaev M.Sh., Vasilevski N.V., Vodopyanov S.K. A tribute to the 70th birthday of Professor Victor Burenkov // Complex variables and elliptic equations. – 2011. – Т. 56, Вып. 10-11. – С. 853-856.

80. Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Биортогональные разложения по корневым функциям дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 1. – С. 144-148.

81. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Biorthogonal expansions in root functions of differential operators // Differential equations. – 2011. – Т. 47, Вып. 1. – С. 144-148.

82. Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential // Modern aspects of the theory of partial differential equations.

Серия книг: Operator Theory Advances and Applications. – 2011. – Т. 216. – С. 187-210.

83. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О Новом методе построения функции грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 435-438.

84. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // Differential equations. – 2012. – Т. 48, Вып. 3. – С. 441-445.

85. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 595-599.

86. Kal'menov T.Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential equations. – 2012. – Т. 48, Вып. 4. – С. 604-608.

87. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 6. – С. 1063-1068.

88. Кальменов Т.Ш., Токмагамбетов Н. Е. Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области // Сиб. матем. журн. – 2013. – V. 54, № 6. – С. 1287-1293

89. Kal'menov T.Sh., Tokmagambetov N.E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // Siberian mathematical journal. – 2013. – Т. 54, Вып. 6. – С. 1023-1028.

90. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On spectral zeta functions for a nonlocal boundary value problem of the Laplacian // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014). Серия книг: AIP Conference Proceedings. – 2014. – Т. 1611. – С. 19-24.

91. Kal'menov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // Electronic journal of differential equations. – 2014. – № 48. Идентификационный номер: WOS: 000333262000002 ISSN: 1072-6691.

92. Kal'menov T.Sh., Otelbaev M. Criterion of boundary integral operator // Advancements in mathematical sciences (AMS 2015). Серия книг: AIP Conference Proceedings. – 2015. – Т. 1676, № 020002. – DOI: 10.1063/14930428.

93. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О проницаемых краевых условиях потенциала для оператора Лапласа-Бельтрами // Сиб. матем. журн. – 2015. – V. 56, № 6. – P. 1326-1331.

94. Kal'menov T.Sh., Suragan D. On permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator // Siberian mathematical journal. – 2015. – Т. 56, Вып. 6. – С. 1060-1064.

95. Muratbekov M. B., Kal'menov T.Sh., Muratbekov M.M. On discreteness of the spectrum of a class of mixed-type singular differential operators // Complex variables and elliptic equations. – 2015. – Т. 60, Вып. 12. – С. 1752-1763.

96. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. Критерий граничности интегральных операторов // Доклады РАН. – 2016. Т.466, № 4. – С. 395-398.

97. Kal'menov T. Sh., Otelbaev M. Boundary Criterion for Integral Operators // Doklady mathematics. – 2016. – Т. 93, Вып. 1. – С. 58-61.

98. Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. Quasi-spectral decomposition of the heat potential // Electronic journal of differential equations. – 2016. – № 76. – Идентификационный номер: WOS:000376977300003 ISSN: 1072-6691.

99. Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. On a heat and mass transfer model for the locally inhomogeneous initial data // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, Вып. 2. – С. 124-129.-

100. Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. On a heat and mass transfer model for the locally inhomogeneous initial data // Bulletin of the south ural state university series-mathematical modelling programming computer software. – 2016. – V. 9, № 2. – P. 124-129.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 20–34.

УДК 517.956

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СЕМЕЙСТВА МНОГОТОЧЕЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

А.Т.Асанова[1], А.Е.Иманчиев[2]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]assanova@math.kz; anarasanova@list.ru

[2]Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
030000, Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34, e-mail: [2]imanchiev_ae@mail.ru

Аннотация: Рассматривается семейство многоточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Предложены алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи. Установлены достаточные условия существования единственного решения семейства многоточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в терминах исходных данных.

Ключевые слова: Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, семейство многоточечных задач, однозначная разрешимость, метод решения.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается семейство многоточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t,x)u + \int_0^t K(t,s,x)u(s,x)ds + f(t,x), \quad t \in [0,T], \ x \in [0,\omega], \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{m} M_i(x)u(t_i,x) = b(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad (2)$$

Keywords: *Volterra integro-differential equation, family of multi-point problems, unique solvability.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B08, 34B10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0822/ГФ4.

где $u(t) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$, $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $K(t,s,x)$ непрерывны на $[0,T]$, $[0,T] \times [0,T] \times [0,\omega]$ соответственно, n- вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна на $[0,T] \times [0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$, n- вектор-функция $b(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$.

Решением семейства многоточечных задач (1), (2) называется функция $u(t,x)$, непрерывная на Ω, имеющая непрерывную производную по t и удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (1) при всех $(t,x) \in \Omega$ и многоточечному краевому условию (2).

Теория интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма относится к активно развивающейся области качественной теории интегральных и дифференциальных уравнений. Вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от правой части, а также приближенные методы построения решения краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма рассмотрены многими авторами, обзор и библиографию можно посмотреть в [1-21].

Одна из фундаментальных особенностей интегро-дифференциальных уравнений по сравнению с дифференциальными уравнениями проявляется в проблеме разрешимости задачи Коши. Если в случае дифференциальных уравнений, вообще говоря, в любой точке области гладкости коэффициентов задача Коши однозначно разрешима, то для интегро-дифференциальных уравнений это далеко не так [1]–[5], [10]. Точки, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, следуя Я.В.Быкову [10], называются особенными. Особенные точки отражают специфику интегро-дифференциальных уравнений. В работах [22]–[26] двухточечная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма была исследована методом параметризации [27]. В работе [22] критерии корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма были установлены в терминах аппроксимирующих краевых задач для системы нагруженных дифференциальных уравнений, а в работах [23]–[26] – в терминах некоторой матрицы, составляемой по фундаментальной матрице дифференциальной части системы, матрицам граничных условий и резольвенте вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, а также в терминах данных задачи без использования фундаментальной матрицы и резольвенты соответственно. Построены алгоритмы нахождения ее решения. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма путем введения специального ядра. В этом случае ядро интегрального слагаемого не обладает свойством непрерывности относительно своих аргументов и появляется особый класс интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Применение методов решения интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма к этому классу интегро-дифференциальных уравнений не всегда учитывает особенности и свойства решений интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [17]. Данный факт оказывает существенное влияние при исследовании краевых задач с параметром для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [20].

Таким образом, краевые задачи с параметром для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра представляют самостоятельный интерес и требуют отдельного рассмотрения ввиду многочисленных приложений в задачах биологии, химии, экологии и др. [21].

В настоящей работе исследуется семейство многоточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, где роль параметра играет переменная x, непрерывно меняющаяся на отрезке $[0, \omega]$. Вопросы разрешимости семейства многоточечных краевых задач (1), (2) при $K(t, s, x) = 0$ рассмотрены в работе [28]. Построены алгоритмы нахождения приближенных решений и установлены условия однозначной, корректной разрешимости семейства многоточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Семейства многоточечных краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра часто встречаются при решении нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [29]-[31]. На основе метода параметризации построены алгоритмы нахождения приближенного решения задачи (1), (2). Получены достаточные условия однозначной разрешимости семейства многоточечных краевых задач в терминах коэффициентов системы (1) и граничных матриц (2). Результаты данной работы при фиксированных значениях переменной x анонсированы в [32].

2. Схема метода в случае введения одного параметра

Обозначим через $\lambda(x)$ значение функции $u(t,x)$ на линии $t = 0$, т.е. $\lambda(x) = u(0,x)$. В задаче (1), (2) осуществим следующую замену функции $u(t,x)$: $u(t,x) = v(t,x) + \lambda(x)$ и переходим к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + \int_0^t K(t,s,x)v(s,x)ds + f(t,x)+$$

$$+A(t,x)\lambda(x) + \int_0^t K(t,s,x)ds\lambda(x), \quad t \in [0,T], \ x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$v(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{m} M_i(x)\lambda(x) + \sum_{i=1}^{m} M_i(x)v(t_i,x) = b(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{5}$$

Решением задачи (3)–(5) является пара $(v(t,x),\lambda(x))$, где функция $v(t,x)$ непрерывна на Ω, имеет непрерывную производную по t на Ω, функция $\lambda(x)$ непрерывна по x на $[0,\omega]$, удовлетворяет семейству интегро-дифференциальных уравнений с функциональными параметрами (3), начальным условиям (4) и многоточечному краевому условию (5).

Задачи (1), (2) и (3)–(5) эквивалентны. Если функция $u(t,x)$ – решение семейства многоточечных краевых задач (1), (2), то пара $(v(t,x),\lambda(x))$, где $\lambda(x) = u(0,x)$, будет решением задачи (3)–(5). И наоборот, если пара $(\widetilde{v}(t,x),\widetilde{\lambda}(x))$ – решение задачи (3)–(5), то функция $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{v}(t,x) + \widetilde{\lambda}(x)$ будет решением исходного семейства краевых задач (1), (2).

При фиксированном значении параметра $\lambda(x)$ задача (3), (4) является семейством задач Коши для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с начальным условием на линии $t = 0$. Соотношение (5) позволяет определить неизвестный параметр $\lambda(x)$.

Решение задачи Коши – функция $v(t,x)$ удовлетворяет семейству интегральных уравнений Вольтерра

$$v(t,x) = \int_0^t A(\tau,x)v(\tau,x)d\tau + \int_0^t \Big[\int_0^\tau K(\tau,s,x)v(s,x)ds\Big]d\tau + \int_0^t f(\tau,x)d\tau+$$

$$+\int_0^t A(\tau,x)d\tau\lambda(x)+\int_0^t \Big[\int_0^\tau K(\tau,s,x)ds\Big]d\tau\lambda(x), \quad t \in [0,T], \ x \in [0,\omega]. \tag{6}$$

Так как

$$\int_0^t \Big[\int_0^\tau K(\tau,s,x)v(s,x)ds\Big]d\tau = \int_0^t \int_s^t K(\tau,s,x)d\tau v(s,x)ds,$$

то, поменяв местами переменные s и τ, перепишем представление (6) следующим образом:

$$v(t,x) = \int_0^t \Big[A(\tau,x) + \int_\tau^t K(s,\tau,x)ds\Big]v(\tau,x)d\tau + \int_0^t f(\tau,x)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Big[A(\tau,x) + \int_\tau^t K(s,\tau,x)ds\Big]d\tau\lambda(x), \quad t\in[0,T],\ x\in[0,\omega]. \qquad (7)$$

Введем обозначение: $L(t,\tau,x) = A(\tau,x) + \int_\tau^t K(s,\tau,x)ds$. Тогда соотношение (7) примет вид

$$v(t,x) = \int_0^t L(t,\tau,x)d\tau\lambda(x) + \int_0^t L(t,\tau,x)v(\tau,x)d\tau + \int_0^t f(\tau,x)d\tau, \qquad (8)$$

где $t\in[0,T],\ x\in[0,\omega]$.

Вместо $v(\tau,x)$, подставив правую часть выражения из (8) при $t=\tau$ и повторив этот процесс ν ($\nu\in\mathbb{N}$) раз, получим

$$v(t,x) = D_\nu(t,x)\lambda(x) + G_\nu(t,x,v) + F_\nu(t,x), \quad t\in[0,T],\ x\in[0,\omega], \qquad (9)$$

где $D_\nu(t,x) = \int_0^t L(t,\tau,x)d\tau + \int_0^t L(t,\tau_1,x)\int_0^{\tau_1} L(\tau_1,\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + ... +$

$$+ \int_0^t L(t,\tau_1,x)\int_0^{\tau_1} L(\tau_1,\tau_2,x)...\int_0^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_{\nu-1},\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_2 d\tau_1,$$

$$G_\nu(t,x,v) = \int_0^t L(t,\tau_1,x)...\int_0^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_{\nu-1},\tau_\nu,x)v(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$F_\nu(t,x) = \int_0^t f(\tau,x)d\tau + \int_0^t L(t,\tau_1,x)\int_0^{\tau_1} f(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + ... +$$

$$+ \int_0^t L(t,\tau_1,x)...\int_0^{\tau_{\nu-2}} L(\tau_{\nu-2},\tau_{\nu-1},x)\int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1.$$

Определим из (9) значения функции $v(t,x)$ на линиях $t = t_i$, $i = \overline{1,m}$, и, подставив в соотношение (5), получим систему линейных функциональных уравнений относительно $\lambda(x)$:

$$\Big[M_0(x) + \sum_{i=1}^{m} M_i(x)[I + D_\nu(t_i,x)]\Big]\lambda(x) = -\sum_{i=1}^{m} M_i(x)G_\nu(t_i,x,v)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m} M_i(x)F_\nu(t_i,x) + b(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{10}$$

Соотношения (8) и (10) составляют замкнутую систему уравнений относительно $v(t,x)$ и $\lambda(x)$.

Если известна функция $v(t,x)$, то из (10) можно определить параметр $\lambda(x)$ при обратимости матрицы $Q_\nu(x) = M_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} M_i(x)[I + D_\nu(t_i,x)]$ для всех $x \in [0,\omega]$. Составляя сумму $v(t,x) + \lambda(x)$, находим $u(t,x)$ – решение исходной задачи (1), (2). Обратно, если известен параметр $\lambda(x)$, то из семейства интегральных уравнений Вольтерра второго рода (8) находим функцию $v(t,x)$ и, снова составляя сумму $v(t,x)+\lambda(x)$, определяем $u(t,x)$ – решение задачи (1), (2).

Так как неизвестными являются как функция $v(t,x)$, так и параметр $\lambda(x)$, для нахождения решения системы уравнений (8), (10) применяется итерационный процесс на основе следующего алгоритма.

0-шаг. Пусть при некотором ν, $\nu \in \mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$. Из системы (10) при $v(t,x) = 0$ находим начальное приближение $\lambda^{(0)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ находим $v^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in [0,T] \times [0,\omega]$.

1-шаг. Из системы (10) при $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$ находим $\lambda^{(1)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$ находим $v^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in [0,T] \times [0,\omega]$ и т.д.

k-шаг. Из системы (10) при $v(t,x) = v^{(k-1)}(t,x)$ находим $\lambda^{(k)}(x)$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ находим $v^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in [0,T] \times [0,\omega]$, $k = 1,2,\ldots$.

Положим

$$\alpha_0(x) = \max_{t\in[0,T]} ||A(t,x)||, \quad \beta(x) = \max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} ||K(t,s,x)||,$$

$$\alpha(x) = \alpha_0(x) + T\beta(x).$$

Реализуемость и сходимость предложенного алгоритма, а также существование единственного решения задачи (3)–(5) обеспечивают условия следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(n \times n)$*-матрица* $Q_\nu(x)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются условия:*

1) $||[Q_\nu(x)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(x)$, *где* $\gamma_\nu(x)$ *– положительная, непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция;*

2) $q_\nu(x) = \gamma_\nu(x) \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} ||M_i(x)|| \cdot \max\limits_{i=\overline{1,m}} \Big[e^{\alpha(x)t_i} - 1 - \sum\limits_{i=1}^{\nu} \frac{[\alpha(x)t_i]^i}{i!} \Big] \le \chi < 1$, *где* χ *– const.*

Тогда семейство задач (3)–(5) имеет единственное решение.

Из эквивалентности задач (1), (2) и (3)–(5) вытекает

Теорема 2. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(n \times n)$*-матрица* $Q_\nu(x)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются условия 1)-2) Теоремы 1.*

Тогда семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство Теорем 1 и 2 проводится по схеме предложенного ниже алгоритма.

3. Схема метода в случае введения многих параметров

Рассмотрим задачу (1), (2). Разобьем область $[0,T] \times [0,\omega]$ на подобласти линиями $t = t_i$, $i = \overline{0,m}$:

$[0,T] \times [0,\omega] = \bigcup\limits_{r=1}^{m} \Omega_r$, $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0,\omega]$, $\Omega_m = [t_{m-1}, t_m] \times [0,\omega]$.

Пусть $u_r(t,x)$ – сужение функции $u(t,x)$ на Ω_r, $r = \overline{1,m}$. Тогда задача (1), (2) перейдет к следующему эквивалентному семейству многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = A(t,x)u_r + \sum_{i=1}^{r-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s,x)u_i(s,x)ds +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} K(t,s,x)u_r(s,x)ds + f(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,m}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} M_i(x)u_{i+1}(t_i,x) + M_m(x)u_m(t_m,x) = b(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{12}$$

$$\lim_{t\to t_p-0} u_p(t,x) = u_{p+1}(t_p,x), \qquad p=\overline{1,m-1}, \quad x\in[0,\omega]. \tag{13}$$

Здесь условия (13) являются условиями непрерывности (склеивания) решения на внутренних линиях $t=t_p$, $p=\overline{1,m-1}$.

Решением задачи (11)–(13) является система функций $u([t],x) = (u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x))'$ с компонентами $u_r:\Omega_r\to R^n$, непрерывными и ограниченными на Ω_r функциями, имеющими непрерывные производные по t на Ω_r и конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t\to t_r-0} u_r(t,x)$, $r=\overline{1,m-1}$, и удовлетворяющими системе (11), краевому условию (12) и условию непрерывности (13).

Введем обозначения: $\lambda_r(x) = u(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,m}$. В задаче (11)–(13) осуществим следующую замену функции $u_r(t,x)$: $u_r(t,x) = v_r(t,x)+\lambda_r(x)$ и перейдем к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(t,x)v_r + A(t,x)\lambda_r(x) + \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s,x)[v_i(s,x)+\lambda_i(x)]ds+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} K(t,s,x)[v_r(s,x)+\lambda_r(x)]ds + f(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,m}, \tag{14}$$

$$v_r(t_{r-1},x)=0, \qquad r=\overline{1,m}, \quad x\in[0,\omega], \tag{15}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} M_i(x)\lambda_{i+1}(x)+M_m(x)\lambda_m(x)+M_m(x)v_m(t_m,x) = b(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{16}$$

$$\lim_{t\to t_p-0} v_p(t,x)+\lambda_p(x) = \lambda_{p+1}(x), \qquad p=\overline{1,m-1}, \quad x\in[0,\omega]. \tag{17}$$

Решением задачи (14)–(17) является пара $(v([t],x),\lambda(x))$, где $v([t],x) = (v_1(t,x),v_2(t,x),...,v_m(t,x))'$, $\lambda(x) = (\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_m(x))'$ с компонентами $v_r(t,x)$, непрерывными и ограниченными на Ω_r, имеющими непрерывные производные по t на Ω_r и конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t\to t_r-0} v_r(t,x)$, $r=\overline{1,m-1}$, функции $\lambda_r(x)$ непрерывны по x на $[0,\omega]$. Пара удовлетворяет семейству интегро-дифференциальных уравнений с функциональными параметрами (14), начальным условиям (15), многоточечному краевому условию (16) и условию непрерывности (17).

Задачи (1), (2) и (14)–(17) эквивалентны. Если функция $u(t,x)$ – решение семейства многоточечных краевых задач (1), (2), то пара $(v([t],x),\lambda(x))$, где $v([t],x) = (v_1(t,x),v_2(t,x),...,v_m(t,x))'$, $\lambda(x) = (\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_m(x))'$, $\lambda_r(x) = u(t_{r-1},x)$, $v_r(t,x) = u(t,x) - \lambda_r(x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m}$, будет решением задачи (14)–(17). И наоборот, если пара $(\widetilde{v}([t],x),\widetilde{\lambda}(x))$ – решение задачи (14)–(17), то функция $\widetilde{u}(t,x)$, определяемая равенствами

$$\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{v}_r(t,x) + \widetilde{\lambda}_r(x), \quad (t,x)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,m},$$

будет решением исходного семейства краевых задач (1), (2).

При фиксированных значениях параметров $\lambda_r(x)$ задача (14), (15) является семейством задач Коши для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с начальными условиями на линиях $t=t_{r-1}$, $r=\overline{1,m}$. Соотношения (16), (17) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m}$.

Решения задач Коши, функции $v_r(t,x)$, удовлетворяют семейству интегральных уравнений Вольтерра

$$v_r(t,x) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau,x)v_r(\tau,x)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau,x)d\tau\lambda_r(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{r-1}}^{t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s,x)v_i(s,x)dsd\tau + \sum_{i=1}^{r-1}\int_{t_{r-1}}^{t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s,x)dsd\tau\lambda_i(x)+$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t}\int_{t_{r-1}}^{\tau} K(\tau,s,x)v_r(s,x)dsd\tau + \int_{t_{r-1}}^{t}\int_{t_{r-1}}^{\tau} K(\tau,s,x)dsd\tau\lambda_r(x)+$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau,x)d\tau, \qquad (t,x)\in\Omega_r, \qquad r=\overline{1,m}, \tag{18}$$

Введем обозначения

$$D_r(t,x) = \int_{t_{r-1}}^{t}\Big\{A(\tau,x) + \int_{t_{r-1}}^{\tau} K(\tau,s,x)\Big\}dsd\tau,$$

$\tilde{D}_{i,r}(t,x) = \int_{t_{r-1}}^{t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s,x)dsd\tau,$

$G_r(t,x,v_r) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau,x)v_r(\tau,x)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} \int_{t_{r-1}}^{\tau} K(\tau,s,x)v_r(s,x)dsd\tau,$

$\tilde{G}_{i,r}(t,x,v_i) = \int_{t_{r-1}}^{t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s,x)v_i(s,x)dsd\tau,\ F_r(t,x) = \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau,x)d\tau.$

Перепишем (19) в более компактной форме:

$$v_r(t,x) = D_r(t,x)\lambda_r(x) + \sum_{i=1}^{r-1} \tilde{D}_{i,r}(t,x)\lambda_i(x) + G_r(t,x,v_r) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} \tilde{G}_{i,r}(t,x,v_i) + F_r(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,m}. \tag{20}$$

Определим из (20) левосторонние пределы функции $v_r(t,x)$ при $t \to t_r - 0$, $r = \overline{1, m-1}$, значение $v_m(t,x)$ при $t = t_m$ и, подставив в соотношения (16), (17), получим систему линейных функциональных уравнений относительно $\lambda(x)$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} M_i(x)\lambda_{i+1}(x) + M_m(x)[I + D_m(t_m,x)]\lambda_m(x) +$$

$$+ M_m(x) \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{D}_{i,m}(t_m,x)\lambda_i(x) = -M_m(x)G_m(t_m,x,v_m) -$$

$$- M_m(x) \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{G}_{i,m}(t_m,x,v_i) - M_m(x)F_m(t_m,x) + b(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{21}$$

$$[I + D_p(t_p,x)]\lambda_p(x) - \lambda_{p+1}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{D}_{i,p}(t_p,x)\lambda_i(x) = -G_p(t_p,x,v_p) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{G}_{i,p}(t_p,x,v_i) - F_p(t_p,x), \qquad p = \overline{1, m-1}, \quad x \in [0,\omega]. \tag{22}$$

Обозначим через $Q(m,x)$ матрицу, составленную из коэффициентов параметра $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m}$, соответствующую левым частям (21) и (22). Уравнения (21), (22) перепишем в векторно-матричной форме

$$Q(m,x)\lambda(x) = -G(m,x,v) - F(m,x), \tag{23}$$

где

$$G(m,x,v) = \Big(M_m(x)\Big[G_m(t_m,x,v_m) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{G}_{i,m}(t_m,x,v_i)\Big], G_1(t_1,x,v_1),$$

$$G_2(t_2,x,v_2) + \tilde{G}_{1,2}(t_2,x,v_1), ..., G_{m-1}(t_{m-1},x,v_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-2}\tilde{G}_{i,m-1}(t_{m-1},x,v_i)\Big),$$

$$F(m,x) = \Big(M_m(x)F_m(t_m,x) - b(x), F_1(t_1,x), ..., F_{m-1}(t_{m-1},x)\Big).$$

Соотношения (19) и (23) составляют замкнутую систему уравнений относительно $v_r(t,x)$ и $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m}$.

Если известны функции $v_r(t,x)$, то из (23) можно определить параметр $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x))$ при обратимости матрицы $Q(m,x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. Определяя функцию $u(t,x)$ равенствами

$$u(t,x) = v_r(t,x) + \lambda_r(x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \ r=\overline{1,m},$$

находим решение исходной задачи (1), (2). Обратно, если известны параметры $\lambda_r(x)$, то из семейства интегральных уравнений Вольтерра второго рода (19) находим функции $v_r(t,x)$ и, снова составляя функцию $u(t,x)$ равенствами

$$u(t,x) = v_r(t,x) + \lambda_r(x), \ (t,x) \in \Omega_r, \ r=\overline{1,m},$$

определяем решение задачи (1), (2).

Так как неизвестными являются как функции $v_r(t,x)$, так и параметры $\lambda_r(x)$, для нахождения решения системы уравнений (19), (23) применяется итерационный процесс на основе следующего алгоритма.

0-шаг. Пусть матрица $Q(m,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$. Из системы (23) при $v_r(t,x)=0$, $\quad r=\overline{1,m}$, находим начальное приближение $\lambda^{(0)}(x) =$

$(\lambda_1^{(0)}(x), \lambda_2^{(0)}(x), ..., \lambda_m^{(0)}(x))$ для всех $x \in [0,\omega]$. Из семейства интегральных уравнений (19) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ находим $v_r^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,m}$.

1-шаг. Из системы (23) при $v_r(t,x) = v_r^{(0)}(t,x)$ находим $\lambda^{(1)}(x) = (\lambda_1^{(1)}(x), \lambda_2^{(1)}(x), ..., \lambda_m^{(1)}(x))$ для всех $x \in [0,\omega]$. Из семейства интегральных уравнений (19) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$ находим $v_r^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,m}$, и т.д.

k-шаг. Из системы (23) при $v_r(t,x) = v_r^{(k-1)}(t,x)$ находим $\lambda^{(k)}(x) = (\lambda_1^{(k)}(x), \lambda_2^{(k)}(x), ..., \lambda_m^{(k)}(x))$. Из семейства интегральных уравнений (19) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(k)}(x)$ находим $v_r^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,m}$, $k = 1, 2, ...$

Положим $h = \max\limits_{r=\overline{1,m}} (t_r - t_{r-1})$, $\widetilde{\beta} = 1 + h^2\beta(x)e^{\alpha(x)h}$.

Осуществимость и сходимость построенного алгоритма, а также существование единственного решения задачи (14)–(17) обеспечивают условия следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть $(nm \times nm)$-матрица $Q(m,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются условия:*

1) $||[Q(m,x)]^{-1}|| \leq \gamma(m,x)$, где $\gamma(m,x)$ – положительная, непрерывная на $[0,\omega]$ функция;

2) $q(m,x) = \gamma(m,x) \cdot \max\Big(||M_m(x)||, 1\Big) \cdot \Big\{[e^{\alpha(x)h} - 1 - \alpha(x)h] +$

$$+(e^{\alpha(x)h} - 1)\big[\widetilde{\beta}^{m-1} - 1 + h^2(m-1)\beta(x)\big] + [\widetilde{\beta} - 1]\sum_{i=1}^{m-1}[\widetilde{\beta}^{i-1} - 1]\Big\} \leq \chi < 1,$$

где χ – const.

Тогда семейство задач (14)–(17) имеет единственное решение.

Из эквивалентности задач (1), (2) и (14)–(17) вытекает

Теорема 4. *Пусть $(nm \times nm)$-матрица $Q(m,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются условия 1)-2) Теоремы 3.*

Тогда семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство Теорем 3, 4 проводится на основе вышеприведенного алгоритма аналогично доказательству теоремы 1 из [28].

Литература

1 Bratu M. Sur les equations mixtes lineaires. – Computes Rendus, Paris, 1909. – 148 p.

2 Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро–дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. – 1934. – Вып. 190. – С. 1-25.

3 Васильев В.В. К вопросу об интегрировании систем линейных интегро-дифференциальных уравнений // Уч. зап. Иркутск. гос. пед. ин. – 1946. – Вып. 9.

4 Быков Я.В. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1952. – Т. 86, № 2. – С. 85-99.

5 Быков Я.В. К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Труды физ.-мат. фак. Кирг.ун-та. Фрунзе. – 1953. – Вып. 2. – С. 67-83.

6 Александрийский Б.И. К теории некоторых линейных интегро-дифференциальных систем // ДАН СССР. – 1953. – Т. 91, № 2. – С. 184-194.

7 Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1955. – Т. 100, № 5. – С. 78-85.

8 Виграненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро–дифференциальных уравнений // Зап. Ленинград. горн. ин-та. – 1956. – Т. 33, вып. 3. – С. 177-187.

9 Ландо Ю.К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед. ин-та. – 1956. – Вып. 6. – С. 257-269.

10 Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро- дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 327 с.

11 Ландо Ю.К. Функция Грина краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Учен зап. Минского пед. ин-та. – 1958. – Вып. 9. – С. 65-70.

12 Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: АН Кирг. ССР, 1962. – 184 с.

13 Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: АН Кирг. ССР, 1972. – 356 с.

14 Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: АН Кирг. ССР, 1974. – 352 с.

15 Burton T.A. Integral and differential equations. – Academic Press, New York, 1983. – 284 p.

16 Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. Springer, Basel - Heidelberg - New York - Dordrecht - London, 1993. – 366 p.

17 Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M. Theory of Integro-Differential Equations. - Gordon and Breach Science Publishers, Lausanne, 1995. – 362 p.

18 Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Санат, 1997. – 195 с.

19 Дауылбаев М.К. Сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Казак университетi, 1999. – 170 с.

20 Искандаров С. Метод весовых и срезывающихся функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

21 Wazwaz A.-M. Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications. – Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2011. – 639 p.

22 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 550-564.

23 Джумабаев Д.С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 7. – С. 1209-1221.

24 Джумабаев Д.С. Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 75-98.

25 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 9. – С. 1125-1140.

26 Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Украинский математический журнал. – 2014. – Т. 65, № 8. – С. 1074-1091.

27 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

28 Асанова А.Т. О разрешимости семейства многоточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений и их приложения к нелокальным краевым задачам // Матем. журнал. – 2013. – Т. 13, № 3. – С. 38-42.

29 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

30 Kiguradze I., Kiguradze T. On solvability of boundary value problems for higher-order nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. – 2008. – V. 69. – P. 1914-1933.

31 Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization scheme for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – V. 218. – P. 4695-4702.

32 Imanchiev A.E. On the solvability of multi-point boundary value problem for the Volterra system of integro-differential equations // Тез. докл. межд. научн. конф. "Алгебра, анализ, дифф. уравн. прил. посв. 60-лет. акад. А.С. Джумадильдаева. – Алматы, 2016. – С. 183-185.

Статья поступила в редакцию 24.05.2016

Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. ВОЛЬТЕРРА ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІГІ ТУРАЛЫ

Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептер әулеті қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған. Вольтерра интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған.

Assanova A.T., Imanchiev A.E. ON A UNIQUE SOLVABILITY OF THE FAMILY OF MULTI-POINT PROBLEMS FOR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The family of multi-point boundary value problems for the system of Volterra integro-differential equations is considered. The algorithm of finding approximate solution of the problem is offered. Sufficient conditions of the existence of a unique solution of the family of multi-point boundary value problems for the system of Volterra integro-differential equations are established in the terms of the initial data.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 35–47.

УДК 517.95

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Д.Б. Базарханов

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: dauren.mirza@gmail.com

Аннотация: В работе строится линейный метод приближенного восстановления (значений) периодических псевдо-дифференциальных операторов (ПДС) с символами из специальных классов, использующий линейную спектральную информацию (коэффициенты Фурье) об операторе и функции. Даются оценки погрешности на подходящих функциональных классах типа Никольского-Бесова и типа Лизоркина-Трибеля для некоторых соотношений между параметрами классов символов и функциональных классов.

Ключевые слова: Функциональное пространство, псевдо–дифференциальный оператор, смешанная гладкость, восстановление.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; для $k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{z}_k = \{1, 2, ..., k\}$; $\mathbb{T}^k \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — m–мерный тор. Для $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$ положим $xy = x_1y_1 + ... + x_ky_k$, $\|x\| = \sqrt{xx}$, $|x| = |x_1| + ... + |x_k|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| : \kappa \in \mathrm{z}_k\}$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_k(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_k^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$. Далее, пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$ — пространство 1–периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \lambda)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и любых

Keywords: *Function space, pseudo-differential operator, mixed smoothness, recovery.*
2010 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 5130/ГФ4.

$\lambda \in \mathbb{Z}^k$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^k$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^k \backslash \mathbb{Z}^k$.

Рассмотрим гладкий периодический символ $\psi : \mathbb{T}^k \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{C}$ (т.е. $\psi(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^k)$ для каждого $\xi \in \mathbb{Z}^k$) и соответствующий ему формальный псевдо–дифференциальный оператор (ПДО)

$$\psi(x, D) : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k) \ni f(x) \mapsto \psi(x, D) f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) \psi(x, \xi) e^{2\pi i \xi x}.$$

Введем следующие классы символов ("типа произведения" при $n \geq 2$). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, и вектор $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|m| = k$ ($m = k$, если $n = 1$, $m = \mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$, если $n = k$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + \cdots + m_\nu$; $\mathrm{K}_\nu \equiv \{\kappa_{\nu-1} + 1, \ldots, \kappa_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}_0^k$ положим

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial {x_1}^{\lambda_1} \cdots \partial {x_k}^{\lambda_k}}, \quad \Delta^\lambda = \Delta_1^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \Delta_k^{\lambda_k},$$

здесь $\Delta_\kappa^{\lambda_\kappa}$ — конечная разность порядка λ_κ (с шагом 1) по κ–й переменной, $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Определение 1. *Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$. Тогда периодический символ $\psi(x, \xi)$ принадлежит классу $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K} m} \equiv \Psi^{\tau\,\mathfrak{K} m}(\mathbb{T}^k)$, если для любых $\lambda \in \mathbb{N}_0^k$ с $\lambda_\kappa \leq K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, и $\mu \in \mathbb{N}_0^k$ найдется постоянная $c_{\lambda\mu} > 0$ такая, что*

$$|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x, \xi)| \leq c_{\lambda\mu} \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^k, \ \ \xi \in \mathbb{Z}^k.$$

Замечание 1. *При $n = 1$ класс символов $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K} m}$ есть периодический аналог известного класса S^τ Л. Хермандера, который играет важную роль в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами; см., например, [1]. При $n = k \geq 2$ эти классы содержат периодические символы ПДО смешанного типа. В несколько более общем случае $1 \leq n \leq k$ такие ПДО естественным образом возникают в связи функциональными пространствами "типа произведения"; см., например, [2], [3], [4], [5], [6, ch. II, §5.20-5.23, ch.III, §5.27].*

В настоящей работе строится линейный метод приближенного восстановления периодического ПДО, использующий спектральную информацию об операторе и функции (конечные наборы коэффициентов Фурье), который дает хорошую погрешность приближения для каждого ПДО с символом из класса $\Psi^{\tau\, v\, \mathfrak{K}\, m}_{\varepsilon\, \vartheta}(\mathbb{T}^k)$ (см. Определение 3 ниже) на элементах подходящих функциональных пространств типа Никольского-Бесова $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и типа Лизоркина-Трибеля $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$.

2. Функциональные пространства

Пусть, как обычно, $L_p = L_p(\mathbb{T}^k)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^k$, со стандартной нормой $\|f \,|\, L_p\|$. Ясно, что для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и $g \in L_1\, (\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k))$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^k, \quad \widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^k} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^k.$$

Далее, $\ell_q = \ell_q(\mathbb{N}^n_0)$ $(1 \leq q \leq \infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha) = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n_0}$ с конечной нормой

$$\|(a_\alpha) \,|\, \ell_q\| = \Bigg(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n_0} |a_\alpha|^q \Bigg)^{1/q} (1 \leq q < \infty), \|(a_\alpha) \,|\, \ell_\infty\| = \sup(|a_\alpha| \, : \alpha \in \mathbb{N}^n_0),$$

$\ell_q(L_p)$ (соответственно, $L_p(\ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x))_{\alpha \in \mathbb{N}^n_0}$, $x \in \mathbb{T}^k$, с конечной нормой

$$\|(g_\alpha) \,|\, \ell_q(L_p)\| = \|(\|g_\alpha \,|\, L_p\|) \,|\, \ell_q\|$$

(соответственно,

$$\|(g_\alpha) \,|\, L_p(\ell_q\| = \|\|(g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_q\| \,|\, L_p\|).$$

Теперь определим ("m–кратное") разбиение единицы на $\mathbb{R}^k$. Выберем функции $\eta^\nu_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_\nu})\, (\nu \in \mathrm{z}_n)$ такие, что $0 \leq \widehat{\eta^\nu_0}(\xi^\nu) \leq 1, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\widehat{\eta^\nu_0}(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \leq 1$; $\widehat{\eta^\nu_0}(\xi^\nu) = 0,$ если $|\xi^\nu|_\infty \geq 3/2$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$. Положим $\widehat{\eta^\nu}(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta^\nu_0}(2^{-1}\xi^\nu) - \widehat{\eta^\nu_0}(\xi^\nu)$; $\widehat{\eta^\nu_j}(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta^\nu}(2^{-j+1}\xi^\nu), j \in \mathbb{N}$; тогда

$$\{\widehat{\eta^\nu_j}(\xi^\nu),\, j \in \mathbb{N}_0\}$$

— гладкое разбиение единицы (по "коридорам") на $\mathbb{R}^{m_\nu}$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$, а

$$\{\widehat{\eta}_\alpha(\xi) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} \widehat{\eta^\nu_{\alpha_\nu}}(\xi^\nu),\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$$

— ("m–кратное") гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^k$.

Наконец, введем операторы $\Delta^\eta_\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k) \to \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ следующим образом:

$$\Delta^\eta_\alpha(f, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\eta}_\alpha(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\, \xi x}.$$

Определение 2. *Пусть* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $1 \le p, q \le \infty$.

I. *Пространство типа Никольского-Бесова* $B^{s\,m}_{p\,q} \equiv B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\| f \,|\, B^{s\,m}_{p\,q} \| \ =\ \|(2^{\alpha s} \Delta^\eta_\alpha(f, x)) \,|\, \ell_q(L_p)\|.$$

II. *Пространство типа Лизоркина-Трибеля* $L^{s\,m}_{p\,q} \equiv L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\| f \,|\, L^{s\,m}_{p\,q} \| \ =\ \|(2^{\alpha s} \Delta^\eta_\alpha(f, x)) \,|\, L_p(\ell_q)\|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q} \equiv \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *и* $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q} \equiv \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля соответственно.*

Из класса $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K}\,m}$ с помощью дополнительных условий гладкости выделим класс $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$.

Определение 3. *Пусть* $1 \le \vartheta \le \infty$; $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in [0, 1]^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда периодический символ* $\psi(x, \xi)$ *из* $\Psi^{\tau\,\mathfrak{K}\,m}$ *принадлежит классу* $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{T}^k)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^k$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^k$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \ne \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что*

$$\|\Delta^\lambda_\xi \partial^\mu_x \psi(x, \xi) \,|\, B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\, m_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \le c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu \in \mathrm{z}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu \varepsilon_\nu} \times$$

$$\times \prod_{\nu \in \dot{z}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{\tau_\nu - |\mu^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^k, \ \ \xi \in \mathbb{Z}^k.$$

(Норма пространства $B^{v_z \, m_z}_{\infty \, \vartheta}(\prod_{\nu \in z} \mathbb{T}^{m_\nu})$ вычисляется по "переменной" $x^z \equiv (x^\nu : \nu \in z)$).

3. Конструкция линейного метода восстановления ПДО

Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$,

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}.$$

Проведем элементарные формальные преобразования действия ПДО $\psi(x, D)$ на f (ниже $\widehat{\psi}(\zeta, \xi)$ — коэффициент Фурье функции $\psi(x, \xi)$, $\zeta \in \mathbb{Z}^k$):

$$\psi(x, D) f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \psi(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} =$$

$$= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta, \xi) e^{2\pi i \zeta x} \Big) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (\xi + \zeta) x} =$$

$$= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}(\xi) \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta - \xi, \xi) e^{2\pi i \zeta x} = \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta - \xi, \xi) \widehat{f}(\xi) \Big) e^{2\pi i \zeta x}.$$

Пусть Λ – конечное множество из $\mathbb{Z}^k$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda) = \{ \, t(x) = \sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{\,t\,}(\xi) e^{2\pi i \, \xi x} \ \mid \ \widehat{\,t\,}(\xi) \in \mathbb{C}, \, \xi \in \Lambda \}$$

– пространство тригонометрических полиномов с комплексными коэффициентами и спектром Λ. Теперь заменим f на полином $t \in \mathrm{T}(\Lambda)$ и получим

$$\psi(x, D) t(x) = \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \Big(\sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{\psi}(\zeta - \xi, \xi) \widehat{t}(\xi) \Big) e^{2\pi i \zeta x} =$$

$$= \sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{t}(\xi) \Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta - \xi, \xi) e^{2\pi i \zeta x} \Big) = \sum_{\xi \in \Lambda} \widehat{t}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{Z}^k} \widehat{\psi}(\zeta, \xi) e^{2\pi i \zeta x} \Big).$$

Для $u > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}^n_+$ положим

$$\mathcal{I}^{lin}_{u, \gamma}(f) = (\widehat{f}(\xi) \mid \xi \in \Lambda^\gamma_u),$$

$$\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi)=(\widehat{\psi}(\zeta,\xi)\mid(\xi,\zeta)\in\Lambda^{\gamma}_{u}\times\Lambda^{\gamma}_{u})$$

(здесь $\Lambda^{\gamma}_{u}=\{\xi\in\mathbb{Z}^{k}\mid\widehat{\eta}_{\alpha}(\xi)>0$ для некоторого $\alpha\in\mathbb{N}^{n}_{0}$ с $\alpha\gamma<u\}$),

$$S^{\eta,\gamma}_{u}(f,x)=\sum_{\alpha\gamma\le u}\Delta^{\eta}_{\alpha}(f,x).$$

Определим теперь метод приближенного восстановления значений ПДО $\psi(x,D)f(x)$, использующий информацию $\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi)$ об операторе $\psi(x,D)$ и информацию $\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f)$ о распределении f, по формуле

$$\Upsilon^{lin}(\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi);x)=\sum_{\xi\in\Lambda^{\gamma}_{u}}\widehat{S^{\eta,\gamma}_{u}}(f,\xi)e^{2\pi i\xi x}\sum_{\zeta\in\Lambda^{\gamma}_{u}}\widehat{S^{\eta,\gamma}_{u}}(\psi(\cdot,\xi),\zeta)e^{2\pi i\zeta x}.$$

4. Основной результат

Прежде всего определим вектор $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathbb{R}^{n}$. Положим

$$\sigma_{\nu}=\frac{\upsilon_{\nu}-1}{m_{\nu}}-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})_{+},\nu\in\mathrm{z}_{n};\ \sigma\equiv\min\{\sigma_{\nu}:\nu\in\mathrm{z}_{n}\},\ \omega=|\{\nu\in\mathrm{z}_{n}:\sigma_{\nu}=\sigma\}|.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\sigma=\sigma_1=...=\sigma_{\omega}<\sigma_{\nu}$, $\nu\in\mathrm{z}_{n}\backslash\mathrm{z}_{\omega}$. Выберем числа $\sigma^{'}_{\nu},\nu\in\mathrm{z}_{n}$, из условий $\sigma=\sigma^{'}_{1}=...=\sigma^{'}_{\omega},\sigma<\sigma^{'}_{\nu}<\sigma_{\nu}$ при $\nu\in\mathrm{z}_{n}\backslash\mathrm{z}_{\omega}$. Наконец, полагаем $\gamma_{\nu}=\sigma^{'}_{\nu}m_{\nu}/\sigma,\nu\in\mathrm{z}_{n}$.

Будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $F:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ и $H:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+}$ пишем $F(u)\ll H(u)$ при $u\to\infty$, если найдется такая константа $C=C(F,H)>0$, что верно неравенство $F(u)\le CH(u)$ для $u\ge u_0>0$; $F(u)\asymp H(u)$, если одновременно $F(u)\ll H(u)$ и $H(u)\ll F(u)$. Ниже $p_{*}=\min\{p,2\}$.

Легко видеть (следует применить лемму 5.1 из [7]; доказательство леммы приведено в [8] (там это лемма A)), что верна оценка

$$N\equiv\#\Lambda^{\gamma}_{u}\asymp 2^{u}u^{\omega-1};$$

поэтому всего при построении метода восстановления Υ^{lin} используется $M\equiv\#\Lambda+(\#\Lambda)^{2}\asymp 2^{2u}u^{2(\omega-1)}$ "единиц информации" ($\#\Gamma$ — число элементов конечного множества Γ).

Теорема 1. *Пусть* $s, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \tau \in \mathbb{R}^n$; $1 \le p, q, r, \vartheta \le \infty$ *такие, что* $s - \tau = \upsilon - 1, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = m + \mathbf{1}(1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Пусть* $1 \le r \le p \le \infty$, $r < \infty$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда для любого периодического символа* $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q})_+};$$

если, кроме того, $1 < p < \infty$, *то для любого* $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})_+};$$

более того, найдутся символы $\psi^\star, \psi^* \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\} \asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q})_+};$$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\} \asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^*} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})_+};$$

для любого $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K} m}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_1\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{1\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1 - \frac{1}{q}};$$

Здесь и ниже обозначения $\ll_\psi$ и $\asymp_\psi$ подчеркивают, что константы в определении $\ll$ и $\asymp$ зависят от ψ.

более того, найдется символ $\psi^\star \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такой, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_1\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{1\,q}\} \asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}};$$

II. *Пусть* $1 \le p < r < \infty$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда для любого символа* $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma};$$

более того, найдутся символы $\psi^\star, \psi^* \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\} \asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^\star} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_r\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\} \asymp_{\psi^*}$$

$$\asymp_{\psi^*} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma}$$

III. *Пусть* $1 \le p, q \le r = \infty$. *Тогда для любого символа* $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\psi(x,D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, L_\infty\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_{\psi}$$

$$\ll_{\psi} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}},$$

и (если, кроме того, $p<\infty$)

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot\,)\,|\,L_\infty\| \;\; | \;\; f\in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}\ll_\psi$$

$$\ll_\psi\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^{\sigma}(\log^{\omega-1}N)^{1-\frac{1}{p}};$$

более того, найдутся символы $\psi^\star,\psi^*\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ такие, что

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot\,)\,|\,L_\infty\| \;\; | \;\; f\in \mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}\}\asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^\star}\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^{\sigma}(\log^{\omega-1}N)^{1-\frac{1}{q}},$$

$$\sup\{\|\psi(x,D)f-\Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^*),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f),\cdot\,)\,|\,L_\infty\| \;\; | \;\; f\in \mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}\}\asymp_{\psi^*}$$

$$\asymp_{\psi^*}\left(\frac{\log^{\omega-1}N}{N}\right)^{\sigma}(\log^{\omega-1}N)^{1-\frac{1}{p}}.$$

5. Схема доказательства теоремы 1

Ключевыми ингредиентами доказательства теоремы 1 являются приводимые ниже теоремы 2 и 3, а также установленные ранее автором оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}$ и $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}$ в метрике L_r [8] (см. ниже теорему 4).

Шаг 1. На этом шаге устанавливается , что ПДО $\psi(x,D)$ с символом из класса $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ действует непрерывно из пространства $A^{s\,m}_{p\,q}$ в пространство $A^{s-\tau\,m}_{p\,q}$; здесь $A=\{B,L\}$ в более общем контексте, нежели требуется для доказательства Теоремы 1. Именно, верна

Теорема 2. *Пусть $s\in\mathbb{R}^n_+,\tau\in\mathbb{R}^n$ такие, что $\tau<s$; $\upsilon\in\mathbb{R}^n$; $1\le p,q,\vartheta\le\infty$; $\varepsilon\in[0,1]^n$; $\mathfrak{K}\in\mathbb{N}^n$ такой, что $\mathfrak{K}>m$. Пусть далее символ $\psi\in\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$. Тогда ПДО $\psi(x,D)$ является непрерывным из $B^{s\,m}_{p\,q}$ в $B^{s-\tau\,m}_{p\,q}$ и при $p<\infty$ из $L^{s\,m}_{p\,q}$ в $L^{s-\tau\,m}_{p\,q}$, если для каждого $\nu\in\mathrm{z}_n$ выполнено одно из следующих условий:*

i) $s_\nu-\tau_\nu<\upsilon_\nu$;

ii) $s_\nu-\tau_\nu=\upsilon_\nu,\;\;\varepsilon_\nu<1,\;\vartheta\le q\le\infty$;

iii) $s_\nu-\tau_\nu=\upsilon_\nu,\;\;\varepsilon_\nu=\vartheta=q=1$.

В основе доказательства Теоремы 2 лежат результаты работы [9] о специальных характеризациях пространств $A^{s\,m}_{p\,q}$. Отметим также, что в непериодическом случае с $\mathfrak{K} = (\infty, \ldots, \infty)$, $\tau = 0$ эта теорема получена в [4].

Шаг 2. На этом (центральном в доказательстве Теоремы 1) шаге устанавливается связь между погрешностью метода Υ^{lin} восстановления ПДО с символом из $\Psi^{t\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ на классе $\mathrm{A}^{s\,m}_{p\,q}$ и соответствующим поперечником Фурье.

Напомним, что поперечником Фурье порядка N множества $\mathrm{F} \subset L_q$ называется величина

$$\varphi_N(\mathrm{F}, L_q) = \inf_{\{g_j\}_{j=1}^N} \sup_{f \in \mathrm{F}} \|f - \sum_{j=1}^{N} \langle f, g_j \rangle g_j\|_q,$$

где $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – скалярное произведение функций и нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{g_j\}_{j=1}^N \subset L_\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $s, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \tau \in \mathbb{R}^n$; $1 \le p, q, r, \vartheta \le \infty$ *такие, что* $s - \tau = \upsilon - 1, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = m + \mathbf{1}(1 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Тогда для любого символа* $\psi \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*

$$\sup\{\|\psi(x, D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,L_r\| \ \mid \ f \in \mathrm{A}^{s\,m}_{p\,q}\} \ll_\psi$$

$$\ll_\psi \varphi_N(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp \varphi_{\sqrt{M}}(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{p\,q}, L_r).$$

Кроме того, найдется символ $\psi^\star \in \Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такой, что*

$$\sup\left\{\|\psi^\star(x, D)f - \Upsilon^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\psi^\star(\cdot, \cdot)), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,L_r\| \ \ |f \in \widetilde{\mathrm{A}}^{s\,m}_{p\,q}\right\} \asymp_{\psi^\star}$$

$$\asymp_{\psi^\star} \varphi_N(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp \varphi_{\sqrt{M}}(\mathrm{A}^{s-\tau\,m}_{p\,q}, L_r).$$

Здесь A – *это* B *или* L .

В свою очередь при доказательстве Теоремы 3 важную роль играет следующий результат. Положим

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_{u}(\mathrm{F}, L_r\,) = \sup\big(\,\|\,f \ - S^{\eta,\gamma}_{u}(f, \,\cdot\,)\,|\,L_r\,\| \ \ | \ \ f \in \mathrm{F}\,\big).$$

Теорема 4. I. *Пусть* $1 \le r \le p \le \infty$, $(p,r) \ne (\infty,\infty)$, $1 \le q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}^n_+$. *Тогда*

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{q})_+};$$

если, кроме того, $1 < p < \infty$, *то*

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})_+};$$

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{1\,q}, L_1) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{q})}.$$

II. *Пусть* $1 \le p < r < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\varsigma > 0$. *Тогда*

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+};$$

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}, L_r) \asymp 2^{-\varsigma u}.$$

III. *Пусть* $1 \le p, q \le r = \infty$, $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\varsigma > 0$. *Тогда*

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}, L_\infty) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{q})}.$$

если, кроме того, $p < \infty$, *то*

$$\mathfrak{S}^{\gamma}_u(\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}, L_\infty) \asymp 2^{-\varsigma u} u^{(\omega-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 из [7] (см. также Замечание 4.1 там же).

Шаг 3. Теперь (ввиду Теоремы 3) для получения требуемых оценок погрешности восстановления ПДО с символом из класса $\Psi^{\tau\,\upsilon\,\mathfrak{K}m}_{\varepsilon\,\vartheta}$ остается применить оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}$ и $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}$ в метрике L_r из работы [8] (точнее, величин $\varphi^{\mathrm{C}}_N(\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}, L_r)$ и $\varphi^{\mathrm{C}}_N(\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}, L_r)$, тесно связанных с соответствующими поперечниками Фурье; определение и подробности см. [8, §5]).

Литература

1 Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.

2 Chang S.-Y.A., Fefferman R. Some recent developments in Fourier analysis and H^p–theory on product domains // Bull. Amer Math. Soc. – 1985. – V. 12. – P. 1-43.

3 Fefferman R. Harmonic analysis on product spaces // Ann. Math. – 1987. – V.126. – P. 109-130.

4 Yamazaki M. Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type // Math. Nachr. – 1987. – V. 188. – P. 297-315.

5 Carbery A., Seeger A. H^p and L^p variants of multiparameter Calderon-Zygmund theory // Trans. Amer Math. Soc. – 1992. – V. 334. – P. 719-747.

6 Stein E.M. Harmonic analysis: Real–Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. – 716 p.

7 Базарханов Д.Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8-30.

8 Базарханов Д.Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II. – Analysis mathem. – 2012. – V. 38, № 4. – С. 249-289.

9 Базарханов Д.Б. Представления и характеризации некоторых функциональных пространств // Матем. ж. – 2012. – Т. 12, № 3. – С. 41-49.

Статья поступила в редакцию 30.08.2016

Базарханов Д.Б. ПСЕВДО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫ СПЕКТРАЛДЫҚ АҚПАРАТ БОЙЫНША ЖУЫҚТАП ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ

Жұмыста оператор мен функция туралы сызықты спектралдық ақпаратты (Фурье коэффициенттерін) пайдаланатын арнайы кластардан алынған символдары бар периодты псевдо-дифференциалдық операторларды (ПДО) жуықтап қалпына келтірудің сызықты әдісі тұрғызылады. Никольский-Бесов және Лизоркин-Трибель тектес қолайлы функционалдық кластардағы символдар кластарының параметрлері мен функционалдық кластар арасындағы кейбір қатынастар үшін қателіктер бағалаулары берілген.

Bazarkhanov D.B. APPROXIMATE RECOVERY OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS ON THEIR SPECTRAL INFORMATION

In the paper is constructed linear method for approximate recovery (values) of preiodic pseudo-differential operator with symbols from special classes, using a linear spectral information (Fourier coefficients) of the operators and functions. Error bounds on appropriate function classes of Nikol'skii-Besov type and Lizorkin-Triebel type are given for certain relations between parameters of symbol classes and function spaces.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 48–60.

УДК 517.925.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

К.Б. Бапаев

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

Аннотация: Методом функций Ляпунова для нелинейных разностно-динамических систем (РДС) с параметром получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений по членам первого порядка в отношении малого параметра. Определено значение малого параметра, при котором и менее которого эти периодические решения существуют. Решается вопрос об устойчивости этих периодических решений.

Ключевые слова: Разностно-динамические системы, устойчивость, периодическое решение.

В тех случаях, когда условия устойчивости не выполняются, в нелинейных разностно-динамических системах могут возникать периодические процессы. Эти процессы могут зависеть только от внутренних свойств РДС и возникают в ней при отсутствии внешних возмущений. Такие периодические процессы носят название свободных [1]. Они, в некотором смысле, напоминают автоколебания в непрерывных системах.

Периодические процессы могут возникать в нелинейных РДС под воздействием внешних периодических возмущений. Такие периодические процессы названы вынужденными [1], [2]. Вынужденные периодические процессы чрезвычайно разнообразны. Они зависят от частоты, внешнего воздействия и от существования или отсутствия собственного периодического процесса [3] и т.д.

Keywords: *Difference-dynamical systems, stability, periodic solution.*
2010 Mathematics Subject Classification: 37H10,60H10.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 1170/ГФ4.

Если в нелинейной РДС существует собственный периодический процесс, то в зависимости от отношения его с внешним периодическим воздействием в РДС, может либо сохраниться собственный процесс, либо возникнуть новый, полностью определяемый внешним воздействием, либо возникнуть процесс биений между собственным и внешним воздействиями.

Характер периодического процесса зависит, естественно, не только от свойств линейных частей РДС, но и от вида нелинейной части.

Задача исследования периодических процессов состоит в выяснении условий существования того или иного вида периодических процессов; того или иного вида в определении их параметров: частоты, амплитуды или максимального отклонения и, при необходимости, формы [2], [4]-[18]. Такие исследования особенно важны в тех случаях, когда периодический процесс РДС является рабочим режимом [2], [5], [17]-[18].

Проблема построения периодических решений РДС рассматривалась в ряде работ [4-14], [19-21]. При этом установлены дискретные аналоги известных методов решения аналогичных проблем для непрерывных динамических систем. Например, поставленные задачи решены методом точечных преобразований Пуанкаре в [5], методом Пуанкаре-Ляпунова в [11], [13], [14], [19-21], методом Крылова-Боголюбова в [22] и паралельно установлены дискретные аналоги перечисленных методов.

В предлагаемой работе задача исследования периодических процессов рассматривается для нелинейных РДС с параметром на плоскости.

При этом методом исследования является аналог V-функций Г.В. Каменкова [23], разработанный для решения аналогичной задачи непрерывных динамических систем.

Рассмотрим РДС на плоскости, обращающуюся в линейную при равенстве параметра нулю:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha + \varepsilon X_1(x_n,y_n) + \varepsilon^2 X_2(x_n,y_n) + ..., \\ y_{n+1} = x_n\sin\alpha + y_n\cos\alpha + \varepsilon Y_1(x_n,y_n) + \varepsilon^2 Y_2(x_n,y_n) + ..., \end{cases} \tag{1}$$

где ε – параметр, $X_k(x_n,y_n)$, $Y_k(x_n,y_n)$, $(k = 1,2,3,...)$ – многочлены от x_n, y_n любой степени m_k, обращающиеся в нуль при $x_n = y_n = 0$.

Будем предполагать, что правые части имеют только одну особую точку $x_n = y_n = 0$ и являются абсолютно сходящимися рядами в исследуемой области изменения переменных x_n, y_n и параметра ε.

В отличие от дискретного аналога метода Пуанкаре-Ляпунова [10] и дискретного аналога Крылова-Боголюбова [18] мы будем отыскивать условия существования периодических решений, не привлекая к рассмотрению так называемые порождающие решения.

Исследование задачи будем вести в полярных координатах. Полагая

$$x_n = r_n \cos\varphi_n, \;\; y_n = r_n \sin\varphi_n,$$

будем иметь

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + \varepsilon R_1(r_n, \varphi_n) + \varepsilon^2 R_2(r_n, \varphi_n) + ..., \\ \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha + \varepsilon f_1(r_n, \varphi_n) + \varepsilon^2 f_2(r_n, \varphi_n) + ..., \end{cases} \tag{2}$$

где

$$R_k(r_n, \varphi_n) = [X_k(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\cos(\varphi_n + \alpha) +$$
$$+ Y_k(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\sin(\varphi_n + \alpha)],$$
$$f_k(r_n, \varphi_n) = \frac{1}{r_n}[X_k(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)(\cos(\varphi_n + \alpha) + \cos 3(\varphi_n + \alpha)) +$$
$$+ Y_k(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)(\sin(\varphi_n + \alpha) - \sin 3(\varphi_n + \alpha))], \tag{3}$$

т.е. R_k и f_k определяются многочленами в отношении r_n с коэффициентами, являющимися формами от $\sin\varphi_n$ и $\cos\varphi_n$:

$$R_k(r_n, \varphi_n) = r_n R_k^{(1)}(\varphi_n) + r_n^2 R_k^{(2)}(\varphi_n) + ... + r_n^{m_k} R_k^{(m_k)}(\varphi_n),$$
$$f_k(r_n, \varphi_n) = f_k^{(0)}(\varphi_n) + r_n f_k^{(1)}(\varphi_n) + ... r_n^{m_k - 1} f_k^{(m_k - 1)}(\varphi_n). \tag{4}$$

Определим необходимые и достаточные условия существования периодических решений РДС (2), когда этот вопрос полностью решается членами первого порядка в отношении ε независимо от членов более высокого порядка. С этой целью рассмотрим функцию Ляпунова, определяемую уравнением

$$r_n = V_n + \varepsilon(V_n \xi_1^{(1)}(\varphi_n) + V_n^2 \xi_1^{(2)}(\varphi_n) + ... + V_n^{m_1} \xi_1^{((m_1)}(\varphi_n)), \tag{5}$$

где $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$ $(j = \overline{1, m_1})$ – подлежащие определению непрерывные периодические функции с периодом $T \in N$ (здесь N – множество натуральных чисел).

Функцию V_n определим из уравнения (5) через r_n и φ_n. При достаточно малом значении ε она будет определенно положительной в отношении r_n для любых его положительных значений при любых вещественных значениях φ_n. Наибольшее значение ε мы определим после отыскания функции $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$.

Отметим, что два замкнутых цикла $V_n = C_1$ и $V_n = C_2$, определяемые равенствами (5), не имеют общих точек и каждому из них принадлежат конечные точки графика решения РДС (поскольку циклы определяются из уравнения (5)). И если $C_2 > C_1$, то цикл $V_n = C_1$ будет целиком находиться внутри цикла $V_n = C_2$, каковы бы ни были C_1 и C_2. Для этого достаточно предположить, что ε мало. Первая разность функции V_n по n вдоль решения РДС (2) будет иметь вид:

$$W\Delta V_n = \varepsilon[(R_1^{(1)}(\varphi_n) - \alpha\Delta\xi_1^{(1)}(\varphi_n))V_n+$$
$$+(R_1^{(2)}(\varphi_n) - \alpha\Delta\xi_1^{(2)}(\varphi_n))V_n^2 + ... + (R_1^{(m_1)}(\varphi_n) - \alpha\Delta\xi_1^{(m_1)}(\varphi_n))V_n^{m_1}]+$$
$$+\varepsilon^2 F(V_n, \varphi_n, \varepsilon). \tag{6}$$

Такое представление V_n возможно для значений ε, удовлетворяющих условию

$$W = 1 + \varepsilon[\xi_1^{(1)}(\varphi_{n+1}) + (V_{n+1} + V_n)\xi_1^{(2)}(\varphi_{n+1}) + ...+$$
$$+(V_{n+1}^{m_1-1} + V_{n+1}^{m_1-2}V_n + ... + V_n^{m_1-1})\xi_1^{(m_1)}(\varphi_{n+1})] > 0.$$

F представляется степенным рядом в отношении V_n с коэффициентами, зависящими от $\sin\varphi_n$, $\cos\varphi_n$ и ε. В зависимости от выбора функций $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$ мы будем получать различные значения $\omega_1^{(j)}(\varphi_n) = R_1^{(j)}(\varphi_n) - \alpha\Delta\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$. Подберем эти функции так, чтобы все $\omega_1^{(j)}(\varphi_n)$ были постоянными величинами. Обозначим эти постоянные через $g_1^{(j)}$, тогда функции $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$ определяются из уравнений

$$\xi_1^{(j)}(\varphi_{n+1}) = \frac{1}{\alpha}R_1^{(j)}(\varphi_n) - g_1^{(j)} + \xi_1^{(j)}(\varphi_n),$$

отсюда

$$\xi_1^{(j)}(\varphi_n) = \sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{\alpha}R_1^{(j)}(\varphi_k) - g_1^{(j)}] + \xi_1^{(j)}(\varphi_0); \quad (j = \overline{1, m_1}).$$

Числа $g_1^{(j)}$ выберем так, чтобы функции $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$ стали периодическими с некоторым периодом $T \in N$. Для этого необходимо и достаточно обращения в нуль суммы

$$\sum_{\tau=0}^{T-1}[\frac{1}{\alpha}R_1^{(j)}(\varphi_\tau) - g_1^{(j)}] = 0, \quad j = \overline{1, m_1},$$

и обращения в нуль всех $\xi_1^{(j)}(\varphi_0)$. Тогда $g_1^{(j)} = \frac{1}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1}\frac{1}{\alpha}R_1^{(j)}(\varphi_\tau)$, где $\varphi_0 = 0$; $\varphi_T = 2\pi$.

Таким образом, первая разность V_n по n при найденных значениях $\xi_1^{(j)}(\varphi_n)$ примет вид

$$W\Delta V_n = \varepsilon\sum_{j=1}^{m_i} g_1^{(j)}V_n^j + \varepsilon^2 F(V_n, \varphi_n, \varepsilon). \tag{7}$$

Рассмотрим все случаи, которые может представить это равенство.

Предположим, что алгебраическое уравнение

$$L_1(V_n) = V_n\sum_{j=1}^{m_1} g_1^{(j)}V_n^{j-1} = 0$$

имеет $m < m_1$ различных положительных корней, т.е.

$$L_1(V_n) = V_n^{k_0}(V^{(1)} - V_n)^{k_1}\ldots(V^{(m_1)} - V_n)^{k_m}A(V_n) = 0, \tag{8}$$

где $A(V_n)$ – многочлен, степень которого равна $m_1 - \sum_{\nu=0}^{m} k_\nu$; для всех значений $V_n > 0$ он будет сохранять постоянный знак.

Докажем, что каждому положительному корню $V^{(j)}$ нечетной кратности соответствует, по крайней мере, одно периодическое решение РДС (2). Пусть

$$0 < V^{(1)} < V^{(2)} < \ldots < V^{(m)}.$$

Выберем два положительных числа μ_1 и μ_2 из неравенств: $\mu_1 < V^{(j+1)} - V^{(j)}$, $\mu_2 < V^{(j)} - V^{(j-1)}$.

Рассмотрим два замкнутых цикла, определяемых уравнением (5), если в него подставить $V = V^{(j)} + \mu_1$ и $V_n = V^{(j)} - \mu_2$. Очевидно, цикл $V_n =$

$V^{(j)} - \mu_2$ будет находиться внутри цикла $V_n = V^{(j)} + \mu_1$. Покажем, что решения РДС (2) пересекают циклы $V_n = V^{(j)} + \mu_1$ и $V_n = V^{(j)} - \mu_2$ в различных направлениях.

Для цикла $V_n = V^{(j)} + \mu_1$ при условии, если k_j нечетное, будем иметь

$$W\Delta V_n = \varepsilon[-\mu_1^{k_j} V_n^{k_0}(V^{(1)} - V^{(j)} - \mu_1)^{k_0} \dots (V^{(j-1)} - \mu_1 - V^{(j)})^{k_j} \times$$
$$\times (V^{(j+1)} - V^{(j)} - \varepsilon)^{k_{j+1}} \dots (V^{(m)} - V^{(j)} - \mu_1)^{k_m} A(V^{(j)} + \mu_1)] +$$
$$+\varepsilon^2 F(V^j + \varepsilon_1, \varphi_n, \varepsilon). \tag{9}$$

Для цикла $V = V^{(j)} - \mu_2$ получим

$$W\Delta V_n = \varepsilon[\mu_2^{k_j} V^{k_0}(V^{(1)} - V^{(j)} - \mu_2)^{k_1} \dots (V^{(j-1)} - V^{(j)} + \mu_2)^{k_{j-1}} \times$$
$$\times (V^{(j+1)} - V^{(j)} + \mu_2)^{k_{j+1}} \dots (V^{(m)} - V^{(j)} - \mu_2)^{k_m} A(V^{(j)} - \mu_2) +$$
$$+\varepsilon^2 F(V^j - \mu_2, \varphi_n, \varepsilon). \tag{10}$$

Очевидно, что при достаточно малом ε знак разности ΔV_n как в (9), так и в (10) определяется первым членом, стоящим в квадратных скобках, независимо от членов $\varepsilon^2 F(V^{(j)} + \mu_1, \varphi_n, \varepsilon)$ и $\varepsilon^2 F(V^{(j)} - \mu, \varphi_n, \varepsilon)$. Отсюда для цикла $V_n = V^{(j)} + \mu_1$ имеем $\Delta V_n < 0$, а для цикла $V_n = V^{(j)} - \mu_2$ будем иметь $\Delta V_n > 0$.

Следовательно, решения РДС переходят оба цикла. Если окажется, что для цикла $V_n = V^{(j)} + \mu_1$ значение разности $\Delta V_n > 0$, то, заменяя n на $-n$, мы знак разности ΔV_n изменим на обратный. На основании ловушки Бендиксона [21] мы можем утверждать, что внутри кольца, образованного циклами $V_n = V^{(j)} + \mu_1$, $V_n = V^{(j)} - \mu_2$, заключается, по крайней мере, один предельный цикл, которому соответствует периодическое решение (2).

Таким образом, мы установили, что достаточное условие существования периодических решений РДС (2) по членам первого порядка малого параметра независимо от старших членов заключается в том, что уравнение $L(V_n) = 0$ имеет, по крайней мере, один положительный корень нечетной кратности.

Докажем теперь необходимость условия.

Предположим, что положительный корень уравнения $L_1(V_n) = 0$ имеет четную кратность. Наше предположение будет доказано, если мы установим, что выбором членов, порядок которых в отношении ε выше первого, периодическое решение нарушится или сохранится по нашему желанию.

Рассмотрим с этой целью первое приближение РДС (1) по ε :

$$x_{n+1} = x_n \cos\,\alpha - y_n \sin\,\alpha + \varepsilon X_1(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = x_n \sin\,\alpha + y_n \cos\,\alpha + \varepsilon Y_1(x_n, y_n), \tag{11}$$

допускающие периодическое решение. Предположим, что уравнение $L_1(V_n) = 0$, соответствующее этой РДС, имеет положительный корень четной кратности, равной $V^{(1)}$. Тогда многочлен $L(V_n)$ можно представить в виде

$$L(V_n) = (V_n - V^{(1)})^{2k} A(V_n).$$

Многочлен $A(V_n)$ будет иметь степень $m_1 - 2k$. Для него можно указать интервал

$$V^{(1)} - \mu_2 < V_n < V^{(1)} + \mu_1,$$

где сохраняется знак.

Рассмотрим теперь РДС

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos\,\alpha - y_n \sin\,\alpha + \varepsilon X_1(x_n, y_n) + \varepsilon^2 \beta x_n (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} = x_n \sin\,\alpha + y_n \cos\,\alpha + \varepsilon Y_1(x_n, y_n) + \varepsilon^2 \beta y_n (x_n^2 + y_n^2), \end{cases} \tag{12}$$

где β – постоянное число.

В полярных координатах РДС будет иметь вид

$$r_{n+1} = r_n + \varepsilon(r_n R_1^{(1)}(\varphi_n) + \ldots + r_n^{m_1} R_1^{(m_1)}(\varphi_n)) + 2\varepsilon^2 \beta r_n^3 + \varepsilon^2 P(r_n, \varphi_n, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha + \varepsilon(F_1^{(0)}(\varphi_n) + r_n F_1^{(1)}(\varphi_n) + \ldots + \\ + r_n^{(m_1-1)} F^{(m_1-1)}(\varphi_n)) + \varepsilon^2 Q(r_n, \varphi_n, \varepsilon). \end{aligned} \tag{13}$$

Если функцию Ляпунова определить из уравнения (5), то будем иметь

$$W \Delta V_n = \varepsilon (V_n - V^{(1)})^{2k} A(V_n) + \varepsilon^2 [\beta V_n^3 + K(V_n, \varphi_n)].$$

Если $A(V^{(1)}) > 0$, то число $\beta > 0$ выберем согласно неравенствам

$$\beta(V^{(1)} + \mu_1)^3 + K(V^{(1)} + \mu_1, \varphi_n) > 0,$$

$$\beta(V^{(1)} - \mu_2)^3 + K(V^{(1)} - \mu_2, \varphi_n) > 0 \tag{14}$$

для всех вещественных φ_n.

При таком выборе числа β выражение ΔV_n будет сохранять положительные значения в окрестности $V_n = V^{(1)}$, что указывает на отсутствие цикла для (12) несмотря на то, что члены первого порядка цикл допускают.

В случае $A(V^{(1)}) < 0$ число β необходимо взять отрицательным с соблюдением неравенств, обратных (14).

Для того, чтобы цикл РДС (12) сохранялся, необходимо знак достаточно большего числа β взять обратным знаку $A(V^{(1)})$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Если РДС (1) такова, что соответствующее ей уравнение*

$$L_1 = \frac{1}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1}[X_1(r_\tau \cos\varphi_\tau, r_\tau \sin\varphi_\tau)\cos(\varphi_\tau + \alpha) +$$

$$+ Y_1(r_\tau \cos\varphi_\tau, r_\tau \sin\varphi_\tau)\sin(\varphi_\tau + \alpha)] = 0$$

в отношении V_n имеет k положительных корней нечетной кратности, то каждому из этих корней будет соответствовать, по крайней мере, один предельный цикл РДС (1) и каждому из этих предельных циклов соответствует периодическое решение этой РДС.

Если же уравнение $L_1(V_n) = 0$ имеет только положительные корни четной кратности, то вопрос о существовании притягивающих циклов, соответствующих этим корням, членами первого порядка в отношении ε не решается.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости колебаний, описываемых указанными периодическими решениями.

Предположим вначале, что уравнение $L(V_n) = 0$ имеет положительный корень $V_n = V^{(j)}$ нечетной кратности k_j. Пусть этому корню соответствует единственное периодическое решение. Представим уравнения (9) и (10) в виде

$$W\Delta V_n = -\mu_1^{2k-1}\varepsilon A(V^{(j)} + \mu_1) + \varepsilon^2 F(V^{(j)} + \mu_1, \varphi_n, \varepsilon),$$

$$W\Delta V_n = \mu_2^{2k-1}\varepsilon A(V^{(j)} - \mu_2) + \varepsilon^2 F(V^{(j)} - \mu_2, \varphi_n, \varepsilon). \qquad (15)$$

Отсюда можно утверждать, что при $A(V^{(j)}) > 0$ периодическое решение устойчиво, а при $A(V^{(j)}) < 0$ неустойчиво. Тем самым мы доказали

Теорема 2. *Если РДС (1) такова, что соответствующее этой РДС уравнение $L(V_n) = 0$ имеет положительный корень $V = V^{(j)}$ нечетной кратности, равной $2k-1$, и если*

$$\frac{d^{2k-1}L(V_n)}{dV_n^{2k-1}}|_{V_n=V^{(j)}} < 0, \qquad (16)$$

то периодические колебания, отвечающие корню $V_n = V^{(j)}$, устойчивы; если же

$$\frac{d^{2k-1}L(V_n)}{dV_n^{2k-1}}|_{V_n=V^{(j)}} > 0, \qquad (17)$$

то неустойчивы.

При $k = 1$ эта теорема является дискретным аналогом теоремы Андронова и Витта [6], доказанной для системы дифференциальных уравнений.

Мы полагали в РДС параметр ε достаочно малой величиной. Представляет существенный интерес задача: *определить то значение ε, при котором и менее которого периодические решения РДС (1) продолжают существовать, если эта РДС имеет их при достаточно малых значениях ε.*

Пусть кратность корня уравнения $L[V_n] = 0$ нечетная. Предположим, что в формулах (15) выражение $A(V^{(j)})$ больше нуля, тогда будем иметь

$$A(V^{(j)} + \mu_1) > 0 \ \text{ и } \ A(V^{(j)} - \mu_2) > 0.$$

Для существования периодического решения необходимо, чтобы

$$-\mu_1^{2k-1}A(V^{(j)} + \mu_1) + \varepsilon F(V^{(j)} + \mu_1, \varphi_n, \varepsilon) < 0, \qquad (18)$$

$$\mu_2^{2k-1}A(V^{(j)} - \mu_2) + \varepsilon F(V^{(j)} - \mu_2, \varphi_n, \varepsilon) > 0. \qquad (19)$$

Эти неравенства имеют место при ε достаточно малом, но они могут существовать и для конечных значений ε и даже для очень больших его значений. Чтобы определить искомое значение ε, мы можем поступить следующим образом. Заменим в (18) выражение $F(V^{(j)}+\mu_1,\varphi_n,\varepsilon)$ наибольшим значением, которое оно может принимать при любых значениях $0\le\varphi_n\le 2\pi$. Обозначим этот максимум через $\overline{F}(V^{(j)}+\mu_1,\varepsilon)$ и рассмотрим уравнение

$$-\mu_1^{2k-1}A(V_1^{(j)}+\mu_1)+\varepsilon\overline{F}(V^{(j)}+\mu_1,\varepsilon)=0.$$

Из этого уравнения определим значение $\varepsilon=\varepsilon(\mu_1)$. Обозначим наибольшее значение ε, определяемое этим равенством, через ε_1 в предположении, что $\mu_1<V_1^{(j+1)}-V^j$. Далее находим наименьшее значение $F(V_j-\mu_2,\varphi_n,\varepsilon)$ для любых значений $0\le\varphi_n\le 2\pi$.

Пусть это наименьшее значение есть $\overline{\overline{F}}(V_j-\mu_2,\varepsilon)$. Из равенства

$$\mu_2^{2k-1}F(V_j-\mu_2)+\varepsilon\overline{\overline{F}}(V_j-\mu_2,\varepsilon)=0$$

определяем $\varepsilon=\varepsilon(\mu_2)$ и находим наибольшее значение ε при $\mu_2<V_j-V_{j-1}$. Пусть этот максимум ε равен ε_2.

Если окажется, что максимумов ε_1 и ε_2 будет несколько, то мы должны взять наименьший из них.

Выбираем теперь число ε_0, меньшее ε_1 и ε_2 на сколь угодно малую величину. Очевидно, что при $\varepsilon=\varepsilon_0$ неравенства (18) и (19) соблюдаются.

Число ε_0 будет искомым числом, если для всех $0\le\varphi_n\le 2\pi$ выполняются неравенства

$$1+\varepsilon[\xi_1^{(1)}(\varphi_n)+V_n\xi_1^{(2)}(\varphi_n)+\ldots+V_n^{(m_1-1)}\xi_1^{(m_1-1)}(\varphi_n)]>0,$$

$$\begin{gathered}1+\varepsilon[\xi_1^{(1)}(\varphi_{n+1})+(V_{n+1}+V_n)\xi_1^{(2)}(\varphi_{n+1})+\ldots+\\ +(V_{n+1}^{m_1-1}+V_{n+1}^{(m_1-2)}V_n+\ldots+V_n^{(m_1-1)})\xi_1^{(m_1)}(\varphi_{n+1})]>0\end{gathered}\tag{20}$$

при $V=V_j+\overline{\mu}_1$ и $V=V_j-\overline{\mu}_2$, где $\overline{\mu}_1$ и $\overline{\mu}_2$ – те значения μ_1 и μ_2, которые определяют максимальные значения $\varepsilon(\mu_1)$ и $\varepsilon(\mu_2)$. Если же одно из этих неравенств обращается в нуль хотя бы при одном значении $0<\varphi_n\le 2\pi$, то за искомое значение ε необходимо взять число $\varepsilon<\varepsilon_0$ такое, чтобы неравенства (20) имели место.

Литература

1 Цыпкин Я.З. Периодические решения нелинейных конечно-разностных уравнений и их устойчивость // Труды межд. симп. по нелин. колебаниям. АН УССР. – Киев, 1963. – Т. 2.

2 Цыпкин Я.З. Периодические режимы в нелинейных импульсных автоматических системах // Труды Ташкентского политех. инст. – 1961. – Вып. 20.

3 Hoppensteadt F.C., Hymant J.M. Periodic solutions of a logistic difference equations // J. Appl. Math, 1977. – V. 32, № 1. – P. 73-81.

4 Аксиев А.З. О периодических решениях функционально-разностных уравнений // Матер. I респ. межд. конф. молодых ученых Киргизии. Сер. физ.-мат. наук. – Фрунзе, 1981.

5 Алексеев А.С., Макарова Т.Б. Метод точечных преобразований для определения периодических движений коненчно-разностных систем // Изв. вузов. Радиотехника. – 1966. – № 6.

6 Андронов А., Витт А. Устойчивость по Ляпунову // ЖЭТФ. – 1993. – Т. 3, вып. 3.

7 Бапаев К.Б. К вопросу о периодических решениях систем линейных неоднородных разностных уравнений // Труды семинара по теории устойчивости движения. – Алматы, 1974. – Вып. 5.

8 Быков Я.В. о периодических решениях одного класса уравнений в конечных разностях // в кн.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе, Илим, 1982. – Вып. 15.

9 Быков Я.В., Аксиев А.З. О периодических решениях одного класса в конечных разностях // в кн.: Исследования по интегро-дифф. уравнениям. – Фрунзе, Илим, 1980. – Вып. 13.

10 Быков Я.В., Каримов С. О периодических решениях нелинейных систем разностных уравнений // Матер. XIII науч. конф. проф.-предоп. состава ФМФ КирГУ. – Фрунзе, 1965.

11 Вышков Ю.П. Применение метода малого параметра для решения нелинейных уравнений в конечных разностях // Теор. электро-тех. межвед. научно-технический сб. – 1978. – № 25.

12 Каменков Г.В. Избранные труды в двух томах. – М.:Наука, 1971.

13 Данилов В.Я. Исследование квазипериодических решений нелинейных систем разностных уравнений. Препринт. Киев. АН УССР. – 1981. – № 8.

14 Красик Г.Я. о сохранении периодического решения при переходе от дифференциальных уравнений к конечным разностным // Науч. докл. выс. школы физ.-мат. наук. – 1958. – № 4.

15 Красик Г.Я. Об условиях существования периодического решения конечно-разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 4.

16 Goffman C.V. Asymptotic behavior of solutions of ordinary difference equations // Tpans. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 110, № 1.

17 GERMAK JIRE. o systemch linearnich ravnic s periodickymi koefficienty // Casap. Petrov. Math. – 1954. – V. 79, № 2.

18 Halanay A. Solutions periodiques et presqueperiodnes des systemes dequations aux diffrences finies // Arch. Ration. Wrech And Analysis. – 1963. – V. 12, № 2.

19 Roubella T.E. Etude paur recnrrence du second orderes bifurcations liges a la traversee dun cas critique carres pondante module // Zag. dragan nielin. – 1973. – № 14.

20 Красик Г.Я. Метод малого параметра для итерационных систем // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 5.

21 Рябов Ю.А., Сака Е.В. Применение метода малого параметра Ляпунова-Пуанкаре для построения и оценки области существования почти периодических решений квазилинейных разностных уравнений // Изв. АН МССР. Сер. физ.-тех. наук. – 1973. – № 1.

22 Сака Е.В. Построение периодических решений разностных уравнений методом малого параметра // Изв. АН МССР. Сер. физ.-тех. и физ.-мат. наук. – 1971. – № 2.

23 Urabe Minoru. Periodic solutions to a certain difference equation and their applications to pseudo periodic differential equations. – Colloq. int. CNRS. – 1976. – № 229.

Статья поступила в редакцию 27.05.2016

Бапаев Қ.Б. ЛЯПУНОВТЫҢ ФУНКЦИЯЛАРЫ АРҚЫЛЫ БЕЙСЫЗЫҚ АЙЫРЫМДЫ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ПЕРИОДТЫҚ ШЕШІМДЕРІН ЗЕРТТЕУ

Ляпуновтың функциялары арқылы параметрлі бейсызық айырымды-динамикалық жүйелердің кіші параметрге қатысты бірінші ретті мүшелер бойынша периодтық шешімдері бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Кіші параметрдің мәні анықталды. Сол периодтық шешімдердің орнықтылыгының есебі шешілді.

Bapaev K.B. THE STUDY OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE NONLINEAR DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS BY USING LYAPUNOV FUNCTIONS

The necessary and sufficient conditions of periodic solution's existence by the term of the first order with relation to a small parameter are obtained for nonlinear difference-dynamical systems with a parameter by Lyapunov function's method. The value of the small parameter at which and less than that these periodic solutions exist is obtained. The problem of the stability of periodic solutions is solved.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 61–73.

УДК 517.96.43

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.К. Блиев[1], А. Тунгатаров[2], К.Е. Шерниязов[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
6050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]bliyev.nazarbay@mail.ru
[1,2,3]Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби
050040, e-mail: [2]tun-mat@list.ru, [3]ksh10@mail.ru

Аннотация: В данной работе сингулярное интегральное уравнение со сдвигом впервые изучено в дробных пространствах Бесова. В ранних работах эти уравнения изучались в гельдеровских пространствах. Полученные результаты расширяют класс имеющих непрерывные решения сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана.

Ключевые слова: Сингулярные интегральные уравнения со сдвигом Карлемана, пространства Бесова.

1. Введение

Пусть $\Gamma \in C_\nu^m$ ($m \geq 0$ – целое, $0 < \nu \leq 1$) есть простая замкнутая кривая (контур) в комплексной плоскости C. Пусть $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ есть гомеоморфизм контура Γ на себя такой, что производная $\alpha\,'(t)$ принадлежит пространству $H_\mu(\Gamma)$ $(0 < \mu \leq 1)$ и $\alpha\,'(t) \neq 0$ для любого $t \in \Gamma$. Отображение, осуществляемое функцией $\alpha(t)$, либо сохраняет ориентацию на Γ, либо изменяет ее на противоположную. В соответствие с этим функцию $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ называют прямым или обратным сдвигом. Рассмотрим следующие операторы: $(W_\alpha\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$ – оператор сдвига; $(S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}$ – сингулярный интегральный оператор; $(C\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$ – оператор комплексного сопряжения (антилинейный).

Исследованы свойства этих операторов и их некоторых комбинаций в пространствах Бесова $B_{p,\theta}^r(\Gamma)$. Приводим определения этих пространств

Keywords: *Singular integral equations with Carleman shift, Besov space.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35J46.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 4082/ГФ4.

(см. [1]). Пусть $t(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \le s \le l$, – уравнение контура $\Gamma \in \mathcal{C}_{\nu}^{m}$ длины l и функции $x(s)$, $y(s)$ с периодом l продолжены на всю числовую ось. Пусть $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < r < m-1+\nu$ и k – целое такое, что $k > r$. Пространство Бесова $B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)$ состоит из всех функций $\varphi(t) = \varphi(t(s)) \equiv \psi(s) \in L_p(\Gamma)$, l – периодических по переменной s таких, что

$$\|\varphi\|_{B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)}^{(k)} \equiv \|\psi\|_{B_{p,\theta}^{r}([0,l])}^{(k)} = \|\psi\|_{L_p([0,l])}+$$

$$+\left(\int\limits_{-h_0}^{h_0} |u|^{-1-r\theta}\left\|\triangle_u^k\psi\right\|_{L_p([0,l])}^{\theta} du\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

где $h_0 > 0$ и $\triangle_u^k\psi(s) = \triangle_u(\triangle_u^{k-1}\psi)(s) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_k^l\psi(s+lu)$ – разность порядка k с шагом u. Отметим, что нормы $\|\varphi\|_{B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)}^{(k)}$ при различных натуральных k ($k>r$) эквивалентны между собой (см. [1]).

Оцениваются нормы операторов сингулярного интегрирования, сдвига и комплексного сопряжения в пространствах Бесова. Установлена их ограниченность. Доказываются вполне непрерывность некоторых специальных комбинации операторов сингулярного интегрирования, сдвига и комплексного сопряжения в пространствах Бесова.

2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ЯДРОМ КОШИ, СДВИГА, КОМПЛЕКСНОГО СОПРЯЖЕНИЯ И ИХ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

Ограниченность и свойства сингулярного оператора S в пространствах Бесова $B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)$ при a) $1 < p < 2$, $r = \frac{1}{p}$, $\theta = 1$; в) $1 < p < 2$, $r > \frac{1}{p}$, $\theta \ge 1$ и c) $p \ge 2$, $r > 1 - \frac{1}{p}$, $\theta \ge 1$ доказаны в [2 , с. 61]. В следующей теореме мы сняли эти ограничения на сочетание параметров p, r и θ.

Теорема 1. Пусть $p > 1$, $r > 0$, $\theta \ge 1$ и пусть простая замкнутая кривая контур $\Gamma \in C_{\nu}^{m}$, где $m \ge 1-$ целое, $0 < \nu \le 1$ такие, что $m - 1 + \nu > r$. Тогда оператор сингулярного интегрирования S_Γ ограничен в пространстве $B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)$.

Доказательство. Для удобства записи введем следующие обозначения:

$\tau = t(s_1),\ \tau_h = t(s_1 + h),\ t = t(s),\ t_h = t(s + h),\ \tau' = t'(s_1),\ \tau'_h = t'(s_1 + h).$
Имеем

$$S_\Gamma \varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^l \varphi(\tau) \frac{\varphi(\tau')}{\tau - t} ds_1,$$

$$S_\Gamma \varphi(t_h) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t_h} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^l \varphi(\tau_h) \frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} ds_1.$$

Тогда

$$\triangle_h (s) \left(S_\Gamma \varphi (t) \right) = S_\Gamma \varphi (t_h) - S_\Gamma \varphi (t) =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^l \triangle_h (s_1) \left(\varphi (\tau) \right) \frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} ds_1 + \frac{1}{\pi i} \int_0^l \varphi(\tau) \left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} - \frac{\tau'}{\tau - t} \right) ds_1. \quad (1)$$

Далее оценим второе слагаемое:

$$(M\varphi)(s) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^l \varphi(\tau) \left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} - \frac{\tau'}{\tau - t} \right) ds_1. \quad (2)$$

Делая замену переменной $s_1 = s_2 + s$ в последнем интеграле, а также учитывая $l-$периодичность функции $t\,(s) = x\,(s) + iy\,(s)$, получим

$$(M\varphi)(s) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-s}^{l-s} \varphi(t(s_2{+}s)) \left(\frac{t'(s_2 + s + h)}{t(s_2 + s + h) - t(s + h)} - \frac{t'(s_2 + s)}{t(s_2 + s) - t(s)} \right) ds_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \varphi(t(s_2 + s)) \left(\frac{t'(s_2 + s + h)}{t(s_2 + s + h) - t(s + h)} - \frac{t'(s_2 + s)}{t(s_2 + s) - t(s)} \right) ds_2.$$

Для ядра этого интеграла справедливы оценки

$$\left| \frac{t'(s_2 + s + h)}{t(s_2 + s + h) - t(s + h)} - \frac{t'(s_2 + s)}{t(s_2 + s) - t(s)} \right| \le c_1\,(\Gamma)\, \frac{1}{|s_2|^{1-\nu}}\ , \quad (3)$$

$$\left|\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right|\leq c_2\,(\Gamma)\,\frac{|h|^{\nu}}{|s_2|}, \tag{4}$$

где $c_1\,(\Gamma)$ и $c_2(\Gamma)$ – некоторые положительные константы, независящие от переменных $s,\ s_2\neq 0\ \ h$ из промежутка $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$. Действительно,

$$\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}=$$

$$=\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^1(t'(s_2+s+h)-t'(s_2+s+h))d\sigma}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{\int\limits_0^1(t'(s_2+s)-t'(\sigma s_2+s))d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}.$$

Отсюда в силу $t'\in C_\nu$ следует (3). Преобразуя далее последнее равенство, получим

$$\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}=$$

$$=\left(\frac{s_2\int\limits_0^1(t'(\sigma s_2+s)-t'(\sigma s_2+s+h))d\sigma}{(t(s_2+s+h)-t(s+h))(t(s_2+s)-t(s))}\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^1(t'(s_2+s+h)-t'(\sigma s_2+s+h))d\sigma\right)+$$

$$+\frac{\int\limits_0^1(t'(s_2+s+h)-t'(s_2+s))d\sigma-\int\limits_0^1(t'(\sigma s_2+s+h)-t'(\sigma s_2+s))d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}.$$

Отсюда, если учесть $t'\in C_\nu$, следует (4).

Теперь, используя соотношения (3) и (4), оценим интеграл (2):

$$|(M\varphi)(s)|=\left|\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\varphi(t(s_2+s))\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right)ds_2\right|\leq$$

$$\leq \frac{c_1(\Gamma)}{\pi} \int\limits_{-|h|}^{|h|} |\varphi(t(s_2+s))| \frac{1}{|s_2|^{1-\nu}} ds_2 + |h|^{\nu} \frac{c_2(\Gamma)}{\pi} \int\limits_{s_2:|h|<|s_2|\leq l/2} |\varphi(t(s_2+s))| \frac{1}{|s_2|} ds_2.$$

Отсюда, используя обобщенное неравенство Минковского для нормы функции $|(M\varphi)(s)|$, получим

$$\|M\varphi\|_{L_p(\Gamma)} \equiv \|M\varphi(t(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq c_3(\Gamma) \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} |h|^{\nu} +$$

$$+ c_4(\Gamma) \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} |h|^{\nu} |\ln|h|| \leq c_5(\Gamma) \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} |h|^{\nu} |\ln|h||. \qquad (5)$$

Кроме того, в силу ограниченности сингулярного интегрального оператора в L_p $(p>1)$ для первого слагаемого в (1) имеем

$$\left(\int\limits_0^l \left| \int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau)) \frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} ds_1 \right|^p ds \right)^{1/p} \leq c_6(p,\Gamma) \|\triangle_h(\cdot)(\varphi(\tau))\|_{L_p[0,l]}.$$

Итак, с учетом (2), (3) и (6) получим

$$\|\triangle_h(\cdot)(S_\Gamma\varphi(t))\|_{L_p[0,l]} \leq \frac{c_6(p,\Gamma)}{\pi} \|\triangle_h(\cdot)(\varphi(\tau))\|_{L_p[0,l]} +$$

$$+ c_5(\Gamma) \|\varphi(t(\cdot))\|_{L_p[0,l]} \cdot |h|^{\nu} |\ln|h||.$$

Тогда для полунормы Бесова, учитывая $r<\nu$, имеем

$$\|S_\Gamma\varphi(t)\|_{b^r_{p,\theta}[0,l]} \equiv \left(\int_{-h_0}^{h_0} |h|^{-1-r\theta} \|\triangle_h(\cdot)(S_\Gamma\varphi(t))\|^{\theta}_{L_p([0,l])} dh \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq c_7(p,\theta,\Gamma) \|\varphi(t)\|_{b^r_{p,\theta}[0,l]} + c_8(p,\theta,\Gamma) \|\varphi(t(\cdot))\|_{L_p[0,l]}.$$

Отсюда в силу упомянутой выше ограниченности оператора $S_\Gamma\varphi(t)$ в $L_p(\Gamma)$ $(p>1)$ легко следует $\|S_\Gamma\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}[0,l]} \leq c_9(p,\theta,\Gamma) \|\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}[0,l]}$, где $c_9(p,\theta,\Gamma) = \max\{c_7(p,\theta,\Gamma);; c_8(p,\theta,\Gamma) + \|S_\Gamma\|_{\mathrm{p}\to\mathrm{p}}\}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $0<\nu\leq 1$, $\Gamma \in C^1_\nu$ – *простой замкнутый контур и* $\alpha(t):\Gamma\to\Gamma$ – *прямой или обратный сдвиг контура* Γ *такой, что производная* $\alpha'(t)$ *принадлежит пространству Гельдера* $H_\mu(\Gamma)$ *при некотором* $0<\mu\leq$

1 *и* $\alpha'(t) \neq 0$ *при любом* $t \in \Gamma$. *Тогда при любых* $p > 1,\ \theta \geq 1,\ 0 < r < \min\{\mu,\ \nu\}$ *оператор сдвига* $(W_\alpha \varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$ ограничен в $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$.

Так как $\alpha(t): \Gamma \to \Gamma$ есть гомеоморфизм контура Γ на себя, то функция $t_1(s) \equiv \alpha(t(s)) : [0, l] \to \Gamma$ также представляет собой параметрическое задание (уравнение) кривой Γ. Следовательно, существует строго монотонная функция $\theta(s) : R \to R$, переводящая любой отрезок длины l в другой отрезок длины l и такая, что $t_1(s) \equiv \alpha(t(s)) = t(\theta(s))$ ($\theta(s)-$ возрастающая или убывающая соответственно тому, что $\alpha(t)$ есть прямой или обратный сдвиг).

По теореме о дифференциальных свойствах неявной функции заключаем, что $\theta(s)$ дифференцируема. Поскольку $|t'(s)| = 1$, отсюда следует $\theta(s) \in C^1_{\nu_1}$, где ν_1=$\min\{\mu,\ \nu\}$ и $|\theta'(s)| = |\alpha'(t(s))| \neq 0$.

Пусть дана функция $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$. Это равносильно тому, что функция $\psi(s) \equiv \varphi(t(s))$ принадлежит пространству Бесова $B^r_{p,\theta}([0, l])$, состоящего из l-периодических функций вещественной переменной.

Рассмотрим функцию $(W_\alpha \varphi)(t(s)) = \varphi(\alpha(t(s))) = \varphi(t(\theta(s))) = \psi(\theta(s))$.

В силу доказанных выше свойств функции $\theta(s)$ и теоремы о замене переменных в пространствах Бесова (см.[1]) заключаем, что функция $\psi(\theta(s))$ также принадлежит пространству $B^r_{p,\theta}([0, l])$, причем для норм имеет место соотношение $\|\psi(\theta(\cdot))\|_{B^r_{p,\theta}([0,l])} \leq k \cdot \|\psi(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}([0,l])}$, где k – положительная константа, независящая от $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$. Это означает ограниченность оператора сдвига W_α в пространстве $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий Теоремы 2 сингулярный интегральный оператор со сдвигом* $(S_{\Gamma,\alpha}\varphi)(t)$ *ограничен в пространстве* $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \nu \leq 1,\ \ \Gamma \in C^1_\nu$ *– простой замкнутый контур. Тогда при любых* $p > 1,\ \theta \geq 1,\ 0 < r < \nu$ *для всякого* $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ *имеет место*

$$\|C\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)} = \|\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}$$

(т.е. оператор комплексного сопряжения $C\varphi(t) \equiv \overline{\varphi(t)}$ *ограничен в* $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$*).*

Справедливость этого утверждения очевидна.

3. ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СО СДВИГОМ И БЕЗ НЕГО, СДВИГА И КОМПЛЕКСНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $0 < r < \min\{\mu, \nu\}$. *Тогда оператор* $\mathcal{A}_1 = \gamma W_\alpha S W_\alpha{}^{-1} - S$ *вполне непрерывен в пространстве* $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$.

Доказательство. Имеем

$$A_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)K_1(\tau,t)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(t(s_1))K_1(t(s_1),t(s))t'(s_1)ds_1,$$

где

$$K_1(\tau,t) \equiv K_1(s_1,s) = \frac{\alpha' t(s_1)}{\alpha(t(s_1)) - \alpha(t(s))} - \frac{1}{t(s_1)-t(s)}, \tag{6}$$

$$A_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)K_1(\tau,t)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau)K_1(\tau,t)\tau' ds_1,$$

$$A_1\varphi(t_h) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)K_1(\tau,t_h)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau_h)K_1(\tau_h,t_h)\tau'_h ds_1,$$

$$A_1\varphi(t_{2h}) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \varphi(\tau)K_1(\tau,t_{2h})d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau_h)K_1(\tau_h,t_{2h})\tau'_h ds_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau_{2h})K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau'_{2h} ds_1.$$

Отсюда

$$A_1\varphi(t_h) - A_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h,t_h)\tau'_h ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_h,t_h)\tau_h' - K_1(\tau,t)\tau')ds_1,$$

$$A_1\varphi(t_{2h}) - A_1\varphi(t_h) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h,t_{2h})\tau_h' ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h,t_h)\tau_h')ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h,t_h)\tau_h')ds_1.$$

Из этих равенств следует

$$\triangle_h^2(s)(\mathcal{A}_1\varphi(t)) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_h,t_{2h}) - K_1(\tau_h,t_h))\tau_h' ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h,t_h))\tau_h' ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}' - 2K_1(\tau_h,t_h))\tau_h' + K_1(\tau,t)\tau_h' ds_1 \equiv$$

$$\equiv I_1\varphi(s) + I_2\varphi(s) + I_3\varphi(s). \tag{7}$$

Оценим ядро первого слагаемого $I_1(\varphi)$ в этой сумме. Учитывая определение (6), имеем

$$(K_1(\tau_{2h},t_{2h}) - K_1(\tau_h,t_h))\tau_h' = \left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha'(\tau_h) - \alpha'(\tau_{2h})} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - \tau_{2h}}\right) -$$

$$-\left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha'(\tau_h) - \alpha'(\tau_h)} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - \tau_h}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha'(\tau_h) - \alpha'(\tau_{2h})} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha'(\tau_h) - \alpha'(\tau_h)} \right) -$$

$$- \left(\frac{(\tau_h)}{(\tau_h) - (\tau_{2h})} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{(\tau_h)}{(\tau_h) - (\tau_h)} \right).$$

Преобразуя выражение в последних скобках, получим

$$\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - \tau_h} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-1}^{0} (t'(s_1 + h) - t'(s_1 + h + \sigma(s_1 - s - h))d\sigma}{\tau_h - t_{2h}} -$$

$$- \frac{\int\limits_{-1}^{0} (t'(s_1 + h) - t'(s_1 + h + \sigma(s_1 - s - h))d\sigma}{\tau_h - t_h}. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$\left| \frac{\tau_h'}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - \tau_h} \right| \leq$$

$$\leq M_1(\Gamma) \left(\frac{1}{|s_1 - s|^{1-\nu}} + \frac{1}{|s_1 - s - h|^{1-\nu}} \right). \tag{9}$$

Преобразуя (8), имеем

$$\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} - \frac{1}{s_1 - s} + \frac{1}{s_1 - s - h} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - \tau_{2h}} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-1}^{0} (t'(s_1 + h + \sigma(s_1 - s - h)) - t'(s_1 + h + \sigma(s_1 - s))d\sigma}{\tau_h - t_h} +$$

$$+ \left(\frac{t_h - t_{2h}}{(\tau_h - t_h)(\tau_h - t_{2h})} \right) \int\limits_{-1}^{0} (t'(s_1 + h) - t'(s_1 + h + \sigma(s_1 - s - h))d\sigma.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} - \frac{1}{s_1 - s} + \frac{1}{s_1 - s - h} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - t_{2h}}\right| \leq$$

$$\leq M_2(\Gamma)\left(\frac{|h|^\nu}{|s_1 - s|} + \frac{|h|}{|s_1 - s||s_1 - s - h|^{1-\nu}}\right). \tag{10}$$

Аналогично (10) и (12) получим

$$\left|\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h) - \alpha(t_{2h})} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h) - \alpha(t_h)}\right| \leq$$

$$\leq M_3(\Gamma)\left(\frac{1}{|s_1 - s|^{1-\nu_1}} + \frac{1}{|s_1 - s - h|^{1-\nu_1}}\right), \tag{11}$$

$$\left|\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h) - \alpha(t_{2h})} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h) - \alpha(t_h)}\right| \leq$$

$$\leq M_4(\Gamma)\left(\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1 - s|} + \frac{|h|}{|s_1 - s||s_1 - s - h|^{1-\nu_1}}\right), \ \nu_1 = \min\{\mu, \nu\}. \tag{12}$$

Для ядер во втором и третьем интегральных выражениях в (7) легко можно доказать соотношения:

$$|K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h, t_h)\tau_h'| \leq M_5(\Gamma)\frac{1}{|s_1 - s|^{1-\nu_1}},$$

$$|K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h, t_h)\tau_h'| \leq M_6(\Gamma)\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1 - s|}, \tag{13}$$

$$|K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - 2K_1(\tau_h, t_h)\tau_h' + K_1(\tau, t)\tau'| \leq M_5(\Gamma)\frac{1}{|s_1 - s|^{1-\nu_1}},$$

$$|K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - 2K_1(\tau_h, t_h)\tau_h' + K_1(\tau, t)\tau'| \leq M_6(\Gamma)\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1 - s|}. \tag{14}$$

Для первого слагаемого в (7) с учетом (10)–(12) и l-периодичности $t(s_1)$ имеем

$$|I_1\varphi(s)| = \left|\frac{1}{\pi i}\int_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_h, t_{2h}) - K_1(\tau_h, t_h))\tau_h' ds_1\right| \leq$$

$$\leq \frac{M_7(\Gamma)}{\pi}\int_{s_2:|s_2|\leq 2|h|} |\triangle_h(s_2+s)(\varphi(\tau))|\left(\frac{1}{|s_2|^{1-\nu_1}} + \frac{1}{|s_2-h|^{1-\nu_1}}\right)ds_2+$$

$$\leq \frac{M_7(\Gamma)}{\pi}\int_{\substack{s_2\in[-\frac{l}{2},\ \frac{l}{2}]:\\ |s_2|>2|h|}} |\triangle_h(s_2+s)(\varphi(\tau))|\left(\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_2|} + \frac{|h|}{|s_2-h|^{1-\nu_1}}\right)ds_2.$$

Отсюда для нормы $\|I_1\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]}$ получим

$$\|I_1\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_8(\Gamma)\cdot|h|^{\nu_1}\cdot|\ln|h|\ |\cdot\|\triangle_h(\cdot)(\varphi(t))\|_{L_p[0,l]}. \qquad (15)$$

Учитывая оценки (13), (14) и повторяя аналогичные выкладки для норм второго и третьего слагаемых в (7), получим соответственно

$$\|I_2\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_9(\Gamma)\cdot|h|^{\nu_1}\cdot|\ln|h|\ |\cdot\|\triangle_h(\cdot)(\varphi(t))\|_{L_p[0,l]}$$

и

$$\|I_3\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_{10}(\Gamma)\cdot|h|^{\nu_1}\cdot|\ln|h|\ |\cdot\|\varphi(t)\|_{L_p[0,l]}.$$

Итак, из (7), (15) при $r < r_1 < \min\{\mu,\nu\}$ следует

$$\|\mathcal{A}_1\varphi(t)\|_{b^{r_1}_{p,\theta}[0,l]} \leq M_{11}()\cdot\|\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}[0,l]}.$$

Кроме того, оператор $\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$, как разность сингулярных операторов, ограничен в $L_p[0,l]$ $(p>1)$.

Таким образом, оператор $\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$ является ограниченным из пространства $B^r_{p,\theta}[0,l]$ в пространство $B^{r_1}_{p,\theta}[0,l]$ с $r < r_1 < \min\{\mu,\nu\}$. Отсюда в силу компактного вложения $B^{r_1}_{p,\theta}[0,l] \hookrightarrow B^r_{p,\theta}[0,l]$ следует, что оператор $\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$ вполне непрерывен в $B^r_{p,\theta}[0,l]$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \nu \leq 1$, $\Gamma \in \frac{1}{\nu}$ *– простой замкнутый контур. Тогда при любых* $p > 1$, $\theta \geq 1$, $0 < r < \nu$ *оператор* $\mathcal{A}_2 = S_\Gamma + S_\Gamma$ *вполне непрерывен в пространстве* $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{A}_2\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\left(\frac{\tau'}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau'}}{\overline{\tau} - \overline{t}}\right)ds_1.$$

Положим

$$K_2(\tau,\ t) \equiv K_2(s_1,\ s) = \frac{\tau'}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau'}}{\overline{\tau} - \overline{t}}\ . \tag{16}$$

Аналогично (7) для разности второго порядка имеем

$$\triangle_h^2(s)(\mathcal{A}_2\varphi(t)) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_2(\tau_h,\ t_{2h}) - K_2(\tau_h,\ t_h))ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \triangle_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_2(\tau_{2h},\ t_{2h}) - K_2(\tau_h,\ t_h))\,ds_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)(K_2(\tau_{2h},\ t_{2h}) - 2K_2(\tau_h,\ t_h) + K_2(\tau,\ t))\,ds_1 \equiv$$

$$\equiv J_1\varphi(s) + J_2\varphi(s) + J_3\varphi(s)\,. \tag{17}$$

Рассмотрим ядро первого слагаемого $J_1\varphi(s)$:

$$K_2(\tau_h, t_{2h}) - K_2(\tau_h, t_h) = \left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{\overline{\tau'_h}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_{2h}}}\right) - \left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} - \frac{\overline{\tau'_h}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_h}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\overline{\tau'_h}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_{2h}}}\right) -$$

$$-\left(\frac{\tau'_h}{\tau_h - t_h} - -\frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\overline{\tau'_h}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_h}}\right).$$

Отсюда, используя неравенства (9), (10) и повторяя доказательство (15), получим

$$\|J_1\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_8(\Gamma)\cdot|h|^\nu\cdot|\ln|h|\,|\cdot\|\triangle_h(\cdot)(\varphi(t))\|_{L_p[0,l]}.$$

Для ядер слагаемых $J_2\varphi\,(s)$ $J_3\varphi\,(s)$ справедливы оценки вида (13)–(14) с показателем ν вместо ν_1. Отсюда следуют оценки

$$\|J_2\varphi\,(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_9\,(\Gamma)\cdot|h|^{\nu}\cdot|\ln|h|\,|\cdot\|\triangle_h\,(\cdot)\,(\varphi\,(t))\|_{L_p[0,l]},$$

$$\|J_3\varphi\,(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_{10}\,(\Gamma)\cdot|h|^{\nu}\cdot|\ln|h|\,|\cdot\|\varphi\,(t)\|_{L_p[0,l]}.$$

В итоге, повторяя те же выкладки, что и в конце доказательства Теоремы 4, получим доказательство Теоремы 5.

Литература

1 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

2 Блиев Н.К. Обобщенные аналитические функций в дробных пространствах. – Алма-Ата: Наука, 1985. – 160 с.

Статья поступила в редакцию 09.06.2016

Bliev N.K., Tungatarov A., Sherniazov K.E. CARLEMAN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SHIFT IN FRACTIONAL SPACES

In this work a singular integral equation with shift in Besov fractional spaces is first investigated. In previous works these equations in Holder spaces were considered. The results obtained extend the class of continuous solutions of singular integral equations with Carleman shift.

Блиев Н.Қ., Түнғатаров Ә., Шерниазов К.Е. БӨЛШЕК КЕҢІСТІКТЕРДЕГІ КАРЛЕМАН АУЫТҚУЫ БАР ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Жұмыста алғаш рет бөлшек Бесов кеңістіктерінде ауытқуы бар сингулярлы интегралды теңдеулер зерттелген. Бұрынғы жұмыстарда бұл теңдеулер Гельдер кеңістігінде қарастырылған. Алынған нәтижелер ауытқуы бар сингулярлы интегралдық теңдеулер кеңістігінің шешімдерінің қолдану аясын кеңейтеді.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 74–81.

УДК 517.926, 519.216

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Г.К. Василина[1], М.И. Тлеубергенов[2]

[1]Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби
050040, Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, e-mail: [1]v_gulmira@mail.ru

[2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [2]marat207@mail.ru

Аннотация: Методом функций Ляпунова получены достаточные условия экспоненциальной p-устойчивости и экспоненциальной устойчивости с вероятностью 1 интегрального многообразия стохастических дифференциальных систем при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Ключевые слова: Стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие, экспоненциальная p-устойчивость.

Наиболее общим методом исследования устойчивости движения является метод функций Ляпунова [1]. Благодаря фундаментальным исследованиям Н.Г. Четаева [2], И.Г. Малкина [3] и др. в настоящее время известны различные модификации и обобщения классических теорем второго метода Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения [1].

Впервые задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения методом функций Ляпунова исследовалась в [4], [5]. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений при (ОДУ) случайных возмущениях из класса винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями) методом функций Ляпунова в [6] доказаны теоремы о стохастической устойчивости невозмущенного движения. В этом же классе в [6]–[9] доказаны теоремы о стохастической устойчивости инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$.

Keywords: *Stochastic differential equations, integral manyfold, exponential p-stability.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34D10.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 1170/ГФ4.

Достаточные условия устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия [10] в классе ОДУ обобщаются в [11] на класс стохастических дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов. Задача о стохастической устойчивости при случайных возмущениях из класса процессов с независимыми приращениями для невозмущенного движения рассматривалась в [12], а для аналитически заданного интегрального многообразия – в [13].

Данная работа посвящена исследованию экспоненциальной р-устойчивости и экспоненциальной устойчивости с вероятностью 1 аналитически заданного интегрального многообразия при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в классе стохастических дифференциальных уравнений, которая является обобщением задачи об экспоненциальной р-устойчивости и экспоненциальной устойчивости с вероятностью 1 невозмущенного движения стохастического уравнения Ито [6], [14].

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx = X(x(t),t)dt + \sigma(x(t),t)dw(t) + \int\limits_{R^n} f(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \qquad (1)$$

где $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ неслучайны, X, f – векторные функции со значениями в R^n, $t \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^n$, $\sigma(x,t)$ – матричная функция размера $n \times m$, $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ – пуассоновская мера на R^n, $E\nu(t,A) = t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, $\Pi(A)$ – мера на σ-алгебре борелевских множеств R^n.

Предположим, что

1) существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|X(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 + \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u)\|^2\,\Pi(du) \leq L(1+\|x\|^2);$$

2) функции $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ непрерывны по совокупности аргументов;

3) выполнено локальное условие Липшица по x, т.е. для любого $R > 0$

найдется постоянная $C_R > 0$ такая, что при $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$

$$\|X(x,t) - X(y,t)\|^2 + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\|^2 +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u) - f(y,t,u)\|^2 \Pi(du) \leq C_R \|x-y\|^2 .$$

Согласно [15, с. 276], эти условия обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Рассмотрим в пространстве R^n поверхность $\Lambda(t)$, заданную системой уравнений

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ – r-мерная вектор-функция, $r \leq n$.

Определение 1. *Интегральным многообразием уравнения* (1) *называется гладкая поверхность* $\Lambda(t)$ *такая, что из условия* $(x(t_0), t_0) \in \Lambda(t_0)$ *следует, что с вероятностью 1* $(x(t), t) \in \Lambda(t)$ *при всех* $t \geq t_0$.

Далее поверхность (2), являющуюся интегральным многообразием для уравнения (1) (см. теорему 1 из [13]), исследуем на экспоненциальную устойчивость.

Рассмотрим функции Ляпунова вида $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$ и $V(0; x, t) = 0$.

Обозначим $V_1(x,t) = V(\lambda(x,t), x, t)$. Очевидно, что $V_1(x,t) \in C^{21}_{xt}$. Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы

$$\int\limits_{R^n} \left\| [V_1(x + f(x,t,u), t) - V_1(x,t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)] \right\| \Pi(du) < \infty.$$

Введем следующий производящий оператор

$$\tilde{L}V(\lambda(x,t), x, t) = \tilde{L}V_1(x,t) =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr\Big[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ik}\sigma_{jk}^T\Big] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \Big[V_1(x + f(x,t,u),t) - V_1(x,t) - \Big(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\Big)^T f_i(x,t,u)\Big]\Pi(du).$$

Определение 2. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ (2), уравнения (1) называется p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ ($p > 0$) при $t \geq t_0 > 0$, если*

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\| \to 0} \sup_{t \geq t_0} E\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)\|^p = 0.$$

Определение 3. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ (2), уравнения (1) называется экспоненциально p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ ($p > 0$), если при некоторых положительных постоянных A и γ*

$$E\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)\|^p \leq A\|\lambda(x_0,t_0)\|^p \exp\{-\gamma(t - t_0)\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если для уравнения (1) и множества (2) существует функция Ляпунова $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам*

$$k_1\|\lambda(x,t)\|^p \leq V(\lambda;x,t) \leq k_2\|\lambda(x,t)\|^p, \tag{4}$$

$$\widetilde{L}V(\lambda;x,t) \leq -k_3\|\lambda(x,t)\|^p, \tag{5}$$

тогда интегральное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) является экспоненциально p-устойчивым относительно вектор-функции $\lambda = \lambda(x,t)$ ($p > 0$).

Доказательство. Применяем к процессу $V(\lambda;x,t)$ обобщенную формулу Ито [15, теорема 2, с. 276] и получаем

$$EV(\lambda(x,t);x,t) - V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} E\widetilde{L}V(\lambda(x(u),u);x(u),u)du.$$

Дифференцируя полученное равенство по t и учитывая (4), (5), имеем

$$\frac{d}{dt}EV(\lambda(x,t);x,t) \le -\frac{k_3}{k_2}EV(\lambda(x,t);x,t).$$

Отсюда вытекает оценка

$$EV(\lambda(x,t);x,t) \le V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0)\exp\{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)\}.$$

Из этой оценки и из (4) получаем следующее неравенство:

$$k_1E\|\lambda(x,t)\|^p \le k_2\|\lambda(x_0,t_0)\|^p\exp\{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)\},$$

из которого следует (3).

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1) *и множества* (2) *существует функция Ляпунова* $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt}$ *такая, что* $V(0;x,t)=0$, *и удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных* k_4, k_5, k_6 *неравенствам*

$$k_4\|\lambda(x,t)\| \le V(\lambda;x,t) \le k_5\|\lambda(x,t)\|, \tag{6}$$

$$\widetilde{L}V(\lambda;x,t) \le -k_6\|\lambda(x,t)\|. \tag{7}$$

Тогда существует постоянная $\gamma > 0$ *такая, что для любых* $x \in R^n$, $t_0 \ge 0$ *при* $t \ge t_0$ *с вероятностью 1 справедливо соотношение*

$$\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)\| \le K_{x_0,t_0}\exp\{-\gamma t\}.$$

Доказательство. Возьмем функцию

$$W(\lambda(x,t);x,t) = V(\lambda(x,t);x,t)\exp\{\frac{k_5}{k_4}t\}.$$

Покажем, что процесс $W(\lambda(x,t);x,t)$ является супермартингалом.

Учитывая условия (6) и (7), при $\lambda \ne 0$ получаем следующее неравенство:

$$\widetilde{L}W(\lambda(x,t);x,t) = \widetilde{L}\big(V(\lambda(x,t);x,t)\exp\{\frac{k_5}{k_4}t\}\big) =$$

$$= \widetilde{L}V(\lambda(x,t);x,t)\exp\{\frac{k_5}{k_4}t\} + \frac{k_5}{k_4}\exp\{\frac{k_5}{k_4}t\}V \le$$

$$\leq -k_5\|\lambda(x,t)\| \exp\{\frac{k_5}{k_4}t\} + \frac{k_5}{k_4}\exp\{\frac{k_5}{k_4}t\}k_4\|\lambda(x,t)\| \leq 0. \tag{8}$$

Применяя к процессу $W(\lambda(x,t);x,t)$ обобщенную формулу Ито [15, теорема 2, с. 276], имеем

$$EW(\lambda(x,t);x,t) - W(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} E\widetilde{L}W(\lambda(x(u),u);x(u),u)du.$$

Отсюда в силу (8) получаем

$$EW(\lambda(x,t);x,t) \leq W(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0),$$

т.е. случайный процесс $W(\lambda(x,t);x,t)$ является супермартингалом. Тогда по теореме Дуба [16] с вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} W(\lambda(x,t);x,t) = A_{x_0,t_0}.$$

Отсюда

$$V(\lambda(x,t);x,t) \leq A_{x_0,t_0}\exp\{-\gamma t\}.$$

Учитывая (6), получаем

$$\|\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)\| \leq K_{x_0,t_0}\exp\{-\gamma t\}.$$

Литература

1 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Наука, 1950. – 472 с.

2 Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 208 с.

3 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

4 Bertram J.E., Sarachik P.E. Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of the Int. Conf. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angelos. Calif. IRE transactions. CT-6. – 1959. – P. 260-270.

5 Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. – 1960. – Т. 27, вып. 5. – С. 809-823.

6 Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

7 Samoilenko A.M., Stanzhytskyi O.M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2011. – 312 p.

8 Станжицкий А.Н. Об устойчивости по вероятности инвариантных множеств систем со случайными возмущениями // Нелінійні коливання. – 1998. – 1, № 2. – С. 138-142.

9 Станжицький О.М. Дослідження інваріантних множин стохастичних систем Іто за допомогою функцій Ляпунова // Укр. матем. журнал. – 2001. – 53, № 2. – С. 282-285.

10 Галиуллин А.С. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1973. – 104 с.

11 Тлеубергенов М.И. Об устойчивости по вероятности программного движения // Известия МОН РК, НАН РК. – 2002. – № 3. – С. 47-53.

12 Гихман И.И., Дороговцев А.Я. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. – 1965. – Т. 17, № 6. – С. 3-21.

13 Василина Г.К., Тлеубергенов М.И. О решении задачи стохастической устойчивости интегрального многообразия вторым методом Ляпунова // Укр. матем. журнал. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 14-27.

14 Хасьминский Р.З. Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений с переключением режима // Проблемы передачи информации. – М.: Наука, 2012. – Т. 48, вып. 3. – С. 70-82.

15 Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 356 с.

16 Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. – 609 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2016

Василина Г.К., Тілеубергенов М.Ы. СТОХАСТИКАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ КӨПБЕЙНЕСІНІҢ ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Ляпуновтың функциялар әдісімен тәуелсіз айнымалы үрдістер класында кездейсоқ түрткілері болғанда стохастикалық дифференциалдық жүйелердің экспоненциалды p-орнықтылықтығының және 1 ықтималдықты экспоненциалды орнықтылықтығының жеткілікті шарттары алынды.

Vassilina G.K., Tleubergenov M.I. ON EXPONENTIAL STABILITY OF THE INTEGRAL MANIFOLD OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEMS

Sufficient conditions for exponential p-stability and exponential stability with probability 1 of the integral manifold of stochastic differential systems in the presence of random perturbations in the class of processes with independent increments are obtained using Lyapunov function method.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 82–100.

УДК 517.95

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Т.Ш. Кальменов[1], А.К. Макен[2], Д. Сураган[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]@math.kz, [2]maken@math.kz, [3]suragan@list.ru

Аннотация: В данной работе изучаются граничные свойства и некоторые вопросы спектральной геометрии для интегральных операторов типа объемного потенциала (операторы потенциала Бесселя) на открытых ограниченных областях в евклидовом пространстве. В частности, результаты могут быть верны для дифференциальных операторов типа Гельмгольца, которые связаны с нелокальной краевой задачей, также мы получаем спектральные (изопериметрические) неравенства для их собственных значений.

Ключевые слова: Уравнение Гельмгольца, потенциал Бесселя, p - норма Шаттена, неравенство Рэлей-Фабер-Крана.

1. Введение

Основные результаты этой работы состоят (при определенных ограничениях на индексы) в доказательстве того, что норма Шаттена потенциала Бесселя $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ над множеством заданной меры максимизируется на шарах. Более точно, мы можем изложить наши результаты следующим образом:

- Пусть $0<\alpha<d$ и Ω^* – шар в $\mathbb{R}^d$; мы задаем $p_0 := d/\alpha$. Тогда для любого целого числа p с $p_0 < p \leq \infty$ имеем
$$\|\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}\|_p \leq \|\mathcal{B}_{\alpha,\Omega^*}\|_p \tag{1}$$
для любой области Ω с $|\Omega| = |\Omega^*|$. Здесь $\|\cdot\|_p$ означает p-норму Шаттена и $|\cdot|$ – мера Лебега. Заметим, что для $p=\infty$ данный результат дает случай знаменитого неравенства Рэлей-Фабер-Крана для потенциалов Бесселя.

Keywords:
2010 Mathematics Subject Classification: 35P99, 47G40, 35S15.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 4075/ГФ4.

- Помимо этого, мы строим новую корректную краевую задачу для уравнения поли-Гельмгольца, которая связана с потенциалом Бесселя.

В $L^2(\Omega)$ мы рассматриваем операторы потенциалов Бесселя

$$(\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}f)(x) := \int_\Omega \varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|)f(y)dy, \quad f \in L^2(\Omega), \quad 0<\alpha<d, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|) = c_{\alpha,d}\frac{K_{\frac{d-\alpha}{2}}(|x-y|)}{|x-y|^{\frac{d-\alpha}{2}}} \tag{3}$$

и $c_{\alpha,d}$ – положительная константа

$$c_{\alpha,d} = \frac{2^{\frac{2-m-\alpha}{2}}}{\pi^{d/2}\Gamma(\alpha/2)}.$$

Здесь K_ν – функция МакДональда (преобразованная функция Бесселя второго рода):

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\upsilon\pi}\left(\mathcal{I}_{-\nu}(z) - \mathcal{I}_\nu(z)\right), \quad \nu \neq 0, \pm1, \pm2, ...,$$

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

и

$$\mathcal{I}_\nu = \Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

В частности, для четного целого числа $\alpha = 2m$ с $0<m<d/2$ функция $\varepsilon_{2m,d}(|x|)$ – фундаментальное решение уравнения поли-Гельмгольца порядка $2m$ в $\mathbb{R}^d$. Для Лапласиана в ограниченной односвязанной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с C^1-кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ (см., напр., [1]) потенциал Ньютона

$$u(x) = \int_\Omega \varepsilon(|x-y|)f(y)dy \tag{4}$$

эквивалентен уравнению

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

с нелокальным интегральным граничным условием

$$-\frac{1}{2}u(x)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}\varepsilon(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает внешнюю нормальную производную в точке $y \in \partial\Omega$.

В ограниченной односвязанной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с C^1-кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, как аналог к (5), мы рассматриваем уравнение поли-Гельмгольца

$$\mathcal{L}^m u(x) := (I-\Delta_x)^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Чтобы связать (полигармонический) объемный потенциал (2) ($\alpha = 2m$ и $0 < m < d/2$) с краевой задачей (7) в Ω, мы покажем, что для каждой функции $f \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{supp} f \subset \Omega$, (полигармонический) объемный потенциал (2) принадлежит классу $H^{2m}(\Omega)$ и для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$ удовлетворяет нелокальным краевым условиям:

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^i u(x)+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-i-1-j}\varepsilon_{2(m-i),d}(|x-y|)\mathcal{L}^{j+i}u(y)dS_y-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-i-1-j}\varepsilon_{2(m-i),d}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j+i}u(y)dS_y=0,\ x\in\partial\Omega. \tag{8}$$

Обратно, если функция $u \in H^{2m}(\Omega)$ удовлетворяет (7) и краевым условиям (8) для $i = 0, 1, \ldots, m-1$, тогда она определяет (полигармонический) объемный потенциал по формуле (2). Таким образом, наш анализ (полигармонического) объемного потенциала (2) дает соответствующий результат для краевой задачи (7)–(8). Заметим, что аналог задачи (7)–(8) для Кон-Лапласиана и его степеней на группе Гейзенберга был исследован в [3] и для полигармонического потенциала Ньютона – в [2].

В недавних публикациях [4] аналогичные результаты, как и указанные выше, были получены для потенциалов Рисса. Схожая задача экстремума для логарифмического потенциала была исследована в [5]. Однако, мы верим, что из за важности потенциала Бесселя результаты должны быть представлены отдельно и, в дополнение, как мы упомянули, мы также должны изучить связи с краевыми задачами. Также заметим, что результаты могут быть расширены до более общих типов операторов.

В разделе 2 мы обсудим спектральные свойства оператора потенциала Бесселя и сформулируем основные результаты этой статьи. Их доказательство будет приведено в разделах 3 и 4.

2 Основные результаты

2.1. Оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ и его свойства. Рассматриваем спектральную задачу потенциалов Бесселя

$$\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}u = \int_{\Omega} \varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|)u(y)dy = \lambda u, \; u \in L^2(\Omega), \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|) := c_{\alpha,d}\frac{K_{\frac{d-\alpha}{2}}(|x-y|)}{|x-y|^{\frac{d-\alpha}{2}}}$$

и $0 < \alpha < d$ (иногда мы можем опустить индексы α, d и Ω в описании оператора и ядра). В случае $\alpha = 2m$ с оператором потенциала Бесселя это – то же самое (см. Теорема 4), что рассматривать спектральную задачу оператора, относящуюся к краевым задачам (7)–(8), т.е.

$$\mathcal{L}^m u(x) = \lambda^{-1}u(x), \; x \in \Omega, \; m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

с нелокальными краевыми условиями (8).

Хорошо известный тест Шура показывает, что $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ ограничен в $L^2(\Omega)$. Более того, ниже покажем, что этот оператор также компактен в $L^2(\Omega)$ и принадлежит к некоторым классам Шаттена $\mathfrak{S}^p$. Так как ядро Бесселя симметрично, оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ самосопряжен.

Напомним, что норма в классе Шаттена $\mathfrak{S}^p$ (p-норма) компактного оператора T определяется как

$$\|T\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(T)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{11}$$

для $s_1 \geq s_2 \geq ... > 0$ сингулярных чисел T. Для $p = \infty$ имеем

$$\|T\|_\infty := \|T\|,$$

т.е. норму оператора T в $L^2(\Omega)$. Для компактных самосопряженных операторов сингулярные числа равны по модулю (отличному от нуля) собственным значениям и соответствующие собственные функции образуют полный ортогональный базис в L^2. Также, если оператор неотрицателен, выражение "по модулю" в предыдущем предложении может быть убрано.

Собственные значения $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ могут быть пронумерованы в убывающем порядке их модулей:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... ,$$

где λ_j повторяется в последовательностях согласно его мультипликативности. Мы обозначаем соответствующие собственные функции через $u_1, u_2, ...$ так, что для каждого собственного значения λ_j одна и только одна соответствующая (нормированная) собственная функция u_j зафиксирована,

$$\mathcal{B}_{\alpha,\Omega} u_j = \lambda_j u_j, \quad j = 1, 2, ...$$

Следующее утверждение показывает, что оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ компактный.

Предложение 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является измеримым множеством с конечной мерой Лебега, $0 < \alpha < d$. Тогда*

i) оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ неотрицательный. Это означает, в частности, что все собственные значения являются неотрицательными,

$$\lambda_j \equiv \lambda_j(\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}) = |\lambda_j(\mathcal{B}_{\alpha,\Omega})| = s_j;$$

ii) для собственных значений λ_j имеем

$$\lambda_j \leq C|\Omega|^\vartheta j^{-\vartheta},$$

где $\vartheta = \alpha/d$. (В частности, это подразумевает компактность оператора.)

Доказательство. Заметим, что

$$\varepsilon_{\alpha',d} * \varepsilon_{\alpha'',d}(|x-y|) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon_{\alpha',d}(|x-z|)\varepsilon_{\alpha'',d}(|z-y|)dz = (2\pi)^d \varepsilon_{\alpha'+\alpha'',d}(|x-y|) \quad (12)$$

для $0 < \alpha', \alpha'' < \alpha' + \alpha'' < d$. Далее, отношение $|\xi|^{-(\alpha'+\alpha'')} = |\xi|^{-\alpha'}|\xi|^{-\alpha''}$ известно из утверждения, сказанного выше, что $\varepsilon_{\alpha,d}$ является преобразованием Фурье $|\xi|^{-\alpha}$. Мы обозначим через χ_Ω характеристическую функцию множества Ω. Рассматриваем оператор

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\Omega}: \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto \chi_\Omega(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|)\chi_\Omega(x)(y)f(y)dy \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (13)$$

При прямом разложении суммы $L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\Omega) \oplus L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ оператор $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\Omega}$ показан как $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega} \oplus \mathbf{0}$, следовательно, (ненулевые) сингулярные значения операторов $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\Omega}$ и $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ совпадают. В соответствии с (12) оператор $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\Omega}$ может быть представлен как $(2\pi)^d T^* T$, где $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$Tf(x) = \int \varepsilon_{\alpha/2,d}(|x-y|)\chi_\Omega(y)f(y)dy. \quad (14)$$

Вышеуказанные отношения показывают, что в действительности оператор $\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\Omega} = T^*T$ и оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ являются неотрицательными; это является доказательством первого высказывания утверждения. Далее, собственное значение $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ равно квадрату сингулярных чисел T. Теперь мы можем применить оценку Цвикеля (см. [6]) относительно сингулярных чисел, оценивающих интегральные операторы с ядром в форме $h(x-y)g(y)$. В нашем случае $h = \varepsilon_{\alpha/2,d}$, $g = \chi_\Omega$ соответсвенно. Оценка Цвикеля (1) в [6] с $p = 2d/\alpha$ дает

$$s_j(T) \leq Cj^{-1/p}\|\chi_\Omega\|_{L^p} = Cj^{-\alpha/(2d)}|\Omega|^{\alpha/(2d)} \quad (15)$$

с определенным коэффициентом $C = C(\alpha, d)$. Окончательно получаем

$$s_j(\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}) \leq Cj^{-\theta}|\Omega|^\theta, \quad \theta = \alpha/d. \quad (16)$$

Доказательство завершено.

Из предложения 1 следует, что оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ принадлежит каждому классу Шаттена $\mathfrak{S}^p$ с $p > p_0 = \alpha/d$ и

$$\|\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\Omega)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty. \quad (17)$$

Для положительного интегрального оператора K со следом с непрерывным ядром $K(x,y)$ на Ω хорошо известно, что $Tr(K) = \int_\Omega K(x,x)dx$. Данный результат не может быть использован в нашей более обобщенной постановке, так как мы не можем разрешить непрерывность вышеуказанных ядер. Поэтому требуется провести дополнительный анализ.

Для оператора K с ядром $K(x,y)$ точный критерий принадлежности к $\mathfrak{S}^p$ относительно ядра существует только для $p = 2$, т.е. для операторов Гильберта-Шмидта (см. также условия для класса Шаттена в условиях непрерывности ядра в [7]). То есть, чтобы K принадлежал $\mathfrak{S}^2$, необходимо и достаточно, чтобы $\iint_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2 dxdy < \infty$, кроме того, $\|K\|_2^2$ в точности равен вышеуказанному интегралу и для класса оператора со следом K^*K тот же самый интеграл равен его следу. Мы рассматриваем несколько случаев из этих известных свойств.

Во первых, вспомним достаточное условие интегрального оператора для того, чтобы он принадлежал классу Шаттена $\mathfrak{S}^p$ при $p > 2$. Данное условие было идентифицировано одновременно несколькими математиками независимо друг от друга; для нас удобнее будет ссылаться на статью [8]. Класс $L^{p,q}$ определяется функциями $K(x,y)$, $x, y \in \Omega$, такими, что $\|K\|_{L^{p,q}} = \left((|K(x,y)|^p dx)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty$. Основной результат в [8] утверждает следующее.

Теорема 1. *Пусть $p > 2$, $p' = p/(p-1)$ и пусть ядро K принадлежит $L^2(\Omega\times\Omega)$. Предположим, что K и сопряженное ядро $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$ принадлежат $L^{p',p}$. Тогда интегральный оператор K с ядром $K(x,y)$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}^p$. Более того, $\|K\|_p \le (\|K\|_{L^{p',p}} \|K^*\|_{L^{p',p}})^{\frac{1}{2}}$.*

На самом деле мы нуждаемся в следствиях данной теоремы, рассмотреных в статье [9]. Во первых, показано, что условие $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ лишнее и может быть снято. Однако, то, что нам действительно необходимо, это следующий результат (см. теорему 2.4 в [9]).

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1 при некотором $p > 2$. Тогда по этой теореме при некотором целом числе $s > p$ для оператора K^s, принадлежащего классу операторов со следом, имеет* *место следующая формула:*

$$Tr(K^s) = \int\limits_{\Omega^s} \left(\prod_{k=1}^{s} K(x_k, x_{k+1}) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_s,\ x_{s+1} \equiv x_1. \tag{18}$$

Применим Теорему 2 для ядра $K(x,y) = \varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|)$, $x, y \in \Omega$. Поскольку мера Ω конечна, ядро $K(x,y)$ принадлежит $L^{p',p}(\Omega \times \Omega)$ для любых значений $p > \frac{d}{\alpha}$. Следовательно, для следа оператора K^s формула (18) подходит и, таким образом, для $s > p_0 = \frac{d}{\alpha}$ получаем

$$\sum \lambda_j(\mathcal{B}_{\alpha,\Omega})^s = Tr(\mathcal{B}^s_{\alpha,\Omega}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega^s} \left(\prod_{k=1}^{s} K(x_k, x_{k+1}) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_s,\ x_{s+1} \equiv x_1. \tag{19}$$

Для принадлежности классу Шаттена $\mathfrak{S}^p$ с $p < 2$, как правило, требуется определенная регулярность ядра. В работе [7] было показано, что если интегральное ядро K оператора $Kf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$ удовлетворяет условию

$$K \in H^\mu(\Omega \times \Omega)$$

для множества Ω и величины d, то

$$K \in \mathfrak{S}^p(L^2(\Omega)) \text{ for } p > \frac{2d}{d+2\mu}.$$

В случае потенциала Бесселя $K(x,y) = \varepsilon_{\alpha,d}(|x-y|)$ может быть легко проверено. Это обозначает, что $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega} \in \mathfrak{S}^p(L^2(\Omega))$ для $p > \frac{d}{\alpha}$.

Как уже упоминалось ранее, если интегральное ядро $K^{(s)}$ оператора K^s является непрерывным, формула $Tr(K^s) = \int_\Omega K^{(s)}(x,x)dx$ может не иметь места, но она может быть заменена другой формулой (18) (следовательно, и формулой (19)). Тем не менее, можно отметить другое выражение для следа, если $\widetilde{K^{(s)}}$ обозначает усреднение $K^{(s)}$. Относительно мартингальной максимальной функции получаем

$$Tr(K^s) = \int_\Omega \widetilde{K^{(s)}}(x,x)dx,$$

где мы ссылаемся на [7, раздел 4] для описания $\widetilde{K^{(s)}}$, его свойств и дальнейших ссылок.

2.2 Формулировка основных результатов. Сформулируем основные результаты данного пункта. Здесь $|\Omega|$ обозначает меру Лебега Ω.

Теорема 3. *Пусть Ω^* – шар в $\mathbb{R}^d$. Пусть $p_0 := \frac{d}{\alpha}$. Тогда для любого целого числа p при $p_0 < p \leq \infty$ получаем*

$$\|\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}\|_p \leq \|\mathcal{B}_{\alpha,\Omega^*}\|_p \tag{20}$$

для любой области Ω при $|\Omega| = |\Omega^*|$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\mathcal{L}^m := \mathcal{L}\mathcal{L}^{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots ,$$

где

$$\mathcal{L} = I - \Delta.$$

Рассматриваем уравнение

$$\mathcal{L}^m u(x) = f(x), \ x \in \Omega, \tag{21}$$

для данного $f \in L^2(\Omega)$ и

$$u(x) = \int_\Omega f(y)\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy \tag{22}$$

при $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, где $\varepsilon_{2m}(|x-y|)$ – это фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}^m$.

Простой расчет показывает, что обобщенный объемный потенциал (22) является решением для (21) в Ω. Кроме того, известно, что если $f \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{supp} f \subset \Omega$, то $u \in H^{2m}(\Omega)$ (см., напр., [10]). Одна из наших целей – это найти такое граничное условие для $\partial\Omega$, при котором данное уравнение (21) имеет единственное решение в $H^{2m}(\Omega)$, совпадающее с (22).

Теорема 4. *Для любого* $f \in L^2(\Omega)$, $suppf \subset \Omega$, *обобщенный объемный потенциал* (22) *является единственным решением уравнения* (21) *в* $H^{2m}(\Omega) \cap H^{2m-1}(\overline{\Omega})$ *с* m *граничными условиями*

$$-\frac{\mathcal{L}^i u(x)}{2} + \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{j+i} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) dS_y - \\ - \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{j+i} u(y) dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (23)$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

3 Доказательство Теоремы 3.

Так как интегральное ядро $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ является положительным, применяется данное утверждение, также называемое теоремой Ентча (см. [11]).

Лемма 1. *Собственное значение* λ_1 *оператора* $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ *с наибольшим модулем является положительным и простым; соответствующая собственная функция* u_1 *является положительной.*

Обратите внимание, что положительность λ_1 уже известна, так как оператор $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ неотрицателен; что сейчас является важным – это положительность u_1. Напомним, что мы уже установили в Предложения 1 положительность во всей области Ω. всех $\lambda_j(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$. Теперь мы докажем следующий аналог теоремы Рэлея-Фабера-Крана для оператора $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ (см. [12] для общего обсуждения).

Лемма 2. *Шар* Ω^* *является максимизатором первого собственного оператора* $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ *среди всех областей данного объема, т.е.*

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega^*)$$

для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *при* $|\Omega| = |\Omega^*|$.

Другими словами Лемма 2 утверждает, что операторная норма $\mathcal{B}_{\alpha,\Omega}$ максимизируется в шаре среди всех евклидовых областей данного объема.

Доказательство Леммы 2. Пусть Ω – ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^d$. Его симметричное преобразование Ω^* – это открытый шар с центром в 0 с мерой, равной мере Ω, т.е $|\Omega^*| = |\Omega|$. Допустим, что u – это неотрицательная измеримая функция в Ω, так что ее положительные уровни-множества (level-set) имеют конечную меру. С определением симметрично убывающего преобразования u мы можем использовать разложение функции взаимодействия между уровнями [13], выражающее неотрицательную функцию u как

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}}dt, \tag{24}$$

где χ – характеристическая функция соответствующей области. Функция

$$u^*(x) := \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}^*}dt \tag{25}$$

называется (радиально) симметрично убывающим преобразованием неотрицательного значения функции u.

Ссылаясь на неравенство Рисса [13], а также на факт, что выражение $\varepsilon_\alpha(|x-y|)$ является симметрично убывающей функцией, имеем

$$\int_\Omega \int_\Omega u_1(y)\varepsilon_\alpha(|y-x|)u_1(x)dydx \leq \int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_\alpha(|y-x|)u_1^*(x)dydx. \tag{26}$$

Кроме того, для каждой неотрицательной функции $u \in L^2(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^*\|_{L^2(\Omega^*)}. \tag{27}$$

Следовательно, из (26), (27) и вариационного принципа для $\lambda_1(\Omega^*)$ получаем

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega \int_\Omega u_1(y)\varepsilon_\alpha(|y-x|)u_1(x)dydx}{\int_\Omega |u_1(x)|^2dx} \leq$$

$$\leq \frac{\int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} u_1^*(y)\varepsilon_\alpha(|y-x|)u_1^*(x)dydx}{\int_{\Omega^*} |u_1^*(x)|^2dx} \leq$$

$$\le \sup_{v \in L^2(\Omega^*), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega^*} \int_{\Omega^*} v(y) \varepsilon_\alpha(|y-x|) v(x) dy dx}{\int_{\Omega^*} |v(x)|^2 dx} = \lambda_1(\Omega^*),$$

что и является доказательством.

Теперь мы можем завершить *доказательство* Теоремы 3. Для целых значений $p > p_0$ по Теореме 2 получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p(\Omega) = \int_\Omega ... \int_\Omega \varepsilon_\alpha(|y_1 - y_2|) ... \varepsilon_\alpha(|y_p - y_1|) dy_1 ... dy_p, \;\; p > p_0, \;\; p \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Из неравенства Браскампа-Либа-Люттингера [14] следует, что

$$\int_{\Omega^p} \varepsilon_\alpha(|y_1 - y_2|) ... \varepsilon_\alpha(|y_p - y_1|) dy_1 ... dy_p \le$$

$$\int_{\Omega^*} ... \le \int_{\Omega^*} \varepsilon_\alpha(|y_1 - y_2|) ... \varepsilon_\alpha(|y_p - y_1|) dy_1 ... dy_p, \quad (29)$$

что доказывает неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p(\Omega) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p(\Omega^*), \;\; p \in \mathbb{N}, \;\; p > p_0, \quad (30)$$

для $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с $|\Omega| = |\Omega^*|$. Здесь мы использовали утверждение, что ядро ε_α является симметрично убывающей функцией в точке $\Omega^* \times \Omega^*$, то есть

$$\varepsilon_\alpha^*(|x-y|) = \varepsilon_\alpha(|x-y|), \quad x, y \in \Omega^* \times \Omega^*.$$

Теорема доказана.

4 Доказательство Теоремы 4

Применяя вторую формулу Грина для каждого $x \in \Omega$, получаем

$$u(x) = \int_\Omega f(y) \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy = \int_\Omega \mathcal{L}^m u(y) \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy =$$

$$= \int_\Omega \mathcal{L}^{m-1} u(y) \mathcal{L} \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy - \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-1} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \varepsilon_{2m}(|x-y|) dS_y +$$

$$+\int_{\partial\Omega}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1}u(y)dS_y=\int_{\Omega}\mathcal{L}^{m-2}u(y)\mathcal{L}^{2}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy-$$

$$-\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-2}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y+\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-2}u(y)dS_y-$$

$$-\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y+\int_{\partial\Omega}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1}u(y)dS_y=\ldots$$

$$=u(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{j}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j}u(y)dS_y,\quad x\in\Omega,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial y_1}+\ldots+n_n\dfrac{\partial}{\partial y_n}$.

Это влечет тождество

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{j}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j}u(y)dS_y=0,\quad x\in\Omega. \tag{31}$$

Используя свойства двойного и простого слоев потенциалов при приближении x к границе $\partial\Omega$ с внутренней стороны, из (31) получаем

$$-\frac{u(x)}{2}+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\Omega}\mathcal{L}^{j}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j}u(y)dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega.$$

Таким образом, данное отношение является одним из краевых условий (22). Установим остальные граничные условия. Записываем

$$\mathcal{L}^{m-i}\mathcal{L}^{i}u = f, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad m = 1, 2, \dots\ , \tag{32}$$

и выполняем похожие рассуждения, как делали ранее. Имеем

$$\mathcal{L}^{i}u(x) = \int_{\Omega} f(y)\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy =$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{m-i}\mathcal{L}^{i}u(y)\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy =$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{m-i-1}\mathcal{L}^{i}u(y)\mathcal{L}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-i-1}\mathcal{L}^{i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-i-1}\mathcal{L}^{i}u(y)dS_y =$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{m-i-2}\mathcal{L}^{i}u(y)\mathcal{L}^{2}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-i-2}\mathcal{L}^{i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-i-2}\mathcal{L}^{i}u(y)dS_y -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-i-1}\mathcal{L}^{i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-i-1}\mathcal{L}^{i}u(y)dS_y =$$

$$= \dots = \int_{\Omega} \mathcal{L}^{i}u(y)\mathcal{L}^{m-i}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dy -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{j}\mathcal{L}^{i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-i-1-j}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y +$$

$$+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-i-1-j}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j}\mathcal{L}^{i}u(y)dS_y=$$

$$=\mathcal{L}^{i}u(x)-\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{j+i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j+i}u(y)dS_y,\quad x\in\Omega,$$

где $\mathcal{L}^{i}\varepsilon_m$ является фундаментальным решением уравнения (32), т.е.

$$\mathcal{L}^{m-i}\mathcal{L}^{i}\varepsilon_{2m}=\delta,\qquad i=0,1,\dots,m-1.$$

Из предыдущих соотношений получаем тождество

$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{j+i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j+i}u(y)dS_y=0$$

для любого $x\in\Omega$ и $i=0,1,\dots,m-1$. Применяя свойства двойного и простого слоев потенциалов при стремлении x к границе $\partial\Omega$ с внутренней стороны Ω, мы находим, что

$$-\frac{\mathcal{L}^{i}u(x)}{2}+\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\Omega}\mathcal{L}^{j+i}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)dS_y-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\mathcal{L}^{m-1-j}\varepsilon_{2m}(|x-y|)\frac{\partial}{\partial n_y}\mathcal{L}^{j+i}u(y)dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega,$$

являются всеми граничными условиями (22) для каждого значения $i=0,1,\dots,m-1$.

Обратным образом покажем, что если функция $w \in H^{2m}(\Omega) \cap H^{2m-1}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет тождеству $\mathcal{L}^m w = f$ и краевым условиям (23), то функция совпадает с решением (22). В противном случае функция равна

$$v = u - w \in H^{2m}(\Omega) \cap H^{2m-1}(\overline{\Omega}),$$

где u – это обобщенный объемный потенциал (22), который удовлетворяет однородному уравнению

$$\mathcal{L}^m v = 0 \tag{33}$$

и граничным условиям (23), т.е.

$$I_i(v)(x) := -\frac{\mathcal{L}^i v(x)}{2} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\Omega} \mathcal{L}^{j+i} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) dS_y -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{j+i} v(y) dS_y = 0, \quad i = 0, 1, ..., m-1,$$

для $x \in \partial\Omega$. Используя формулу Грина для функции $v \in H^{2m}(\Omega) \cap H^{2m-1}(\overline{\Omega})$ и принимая во внимание вышестоящий аргумент, имеем

$$0 = \int_{\Omega} \mathcal{L}^m v(x) \mathcal{L}^i \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy =$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{m-i} \mathcal{L}^i v(x) \mathcal{L}^i \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy =$$

$$= \int_{\Omega} \mathcal{L}^{m-1} v(x) \mathcal{L}\mathcal{L}^i \varepsilon_{2m}(|x-y|) dy -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-1} v(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^i \varepsilon_{2m}(|x-y|) dS_y +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^i \varepsilon_{2m}(|x-y|) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{m-1} v(x) dS_y = ... =$$

$$= \mathcal{L}^i v(x) - \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{j+i} v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) dS_y +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{m-1-j} \varepsilon_{2m}(|x-y|) \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{L}^{j+i} v(y) dS_y, \quad i = 0, 1, ..., m-1.$$

Интегрируя, в пределе при $x \to \partial\Omega$ получаем отношение

$$\mathcal{L}^i v(x) \mid_{x\in\partial\Omega} = I_i(v)(x) \mid_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad i = 0, 1, ..., m-1. \tag{34}$$

Допуская факт единственности решения краевой задачи

$$\mathcal{L}^m v = 0, \tag{35}$$

$$\mathcal{L}^i v \mid_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 0, 1, ..., m-1,$$

мы получаем что $v = u - w \equiv 0$ для всех $x \in \Omega$, т.е. w совпадает с u в Ω. Таким образом, (22) является единственным решением краевых задач (21), (23) в Ω.

Остается доказать, что краевая задача (35) имеет единственное решение в $H^{2m}(\Omega) \cap H^{2m-1}(\overline{\Omega})$. Обозначая $\tilde{v} := \mathcal{L}^{m-1} v$, это следует по индукции из единственности в $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ задачи

$$\mathcal{L}\tilde{v} = 0, \quad \tilde{v} \mid_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 4 доказана.

Литература

1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. On spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics. – 2009. – V. 80, № 2. – P. 646-649.

2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differ. Equ. – 2012. – V. 48, № 4. – P. 604-608.

3 Ruzhansky M., Suragan D. On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // Proc. Amer. Math. Soc. – 2016. – V. 144, № 2. – P. 709-721.

4 Rozenblum G., Ruzhansky M. and Suragan D. Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials // J. Funct. Anal. – 2016. – V. 271. – P. 224–239.

5 Ruzhansky M., Suragan D. Isoperimetric inequalities for the logarithmic potential operator // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – V. 434, № 2. – P. 1676-1689.

6 Cwikel M. Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators // Ann. of Math. – 1977. – V. 106, № 1. – P. 93-100.

7 Delgado J., Ruzhansky M. Schatten classes on compact manifolds: kernel conditions // J. Funct. Anal. – 2014. – V. 267, № 3. – P. 772-798.

8 Russo B. On the Hausdorff-Young theorem for integral operators // Pacific J. Math. – 1977. – V. 68, № 1. – P. 241-253.

9 M. Goffeng. Analytic formulas for the topological degree of non-smooth mappings: The odd-dimensional case // Adv. in Math. – 2012. – V. 231. – P. 357-377.

10 Aronszajn M., Smith K. T. Theory of Bessel potential I. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1961. – V. 11. – P. 385–475.

11 M. Reed and B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV: Analysis of Operators. – Academic Press, 1977. – 400 p.

12 Benguria R. D., Linde H., and Loewe B. Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian and the Schrödinger operator // Bull. Math. Sci. – 2012. – V. 2, № 1. – P. 1-56.

13 Lieb E. H. and Loss M. Analysis, volume 14 of Graduate Studies in Mathematics, 2nd ed. – American Math. Soc., Providence, RI, 2001. – 300 p.

14 Brascamp H. J., Lieb E. H., and Luttinger J. M. A general rearrangement inequality for multiple integrals // J. Funct. Anal. – 1974. – V. 17. – P. 227-237.

Статья поступила в редакцию 03.06.2016

Кәлменов Т.Ш., Макен А.К., Сұраған Д. ГЕЛЬМГОЛЬЦ ТЕҢДЕУІ ҮШІН КӨЛЕМ ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЖӘНЕ СПЕКТРАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Бұл жұмыста евклид кеңістігіндегі ашық шектелген облыстарда көлемдік потенциал тектес интегралдық операторлар (Бессел потенциалының операторлары) үшін шекаралық қасиеттер мен спектралдық геометриянының кейбір мәселелері зерттеледі. Атап айтқанда, нәтижелер бейлокал шеттік есеппен байланысты болатын гельмгольц тектес дифференциалдық операторлар үшін орынды болады, оған қоса біз олардың меншікті мәндері үшін спектарлдық (изопетриметрлік) теңсіздіктер алып отырмыз.

Kal'menov T.Sh., Maken A.K., Suragan D. SPECTRAL AND BOUNDARY PROPERTIES OF THE VOLUME POTENTIAL FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

In this paper we study boundary properties and some questions of spectral geometry for certain volume potential type operators (Bessel potential operators) in an open bounded Euclidean domains. In particular, the results can be valid for Helmholtz type differential operators, which are related to a nonlocal boundary value problem, so we obtain spectral (isoperimetric) inequalities for its eigenvalues as well.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 101–110.

УДК 517.956.4

КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ОБОБЩЕННОГО ТЕПЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

М.А. Садыбеков[1], Г. Оралсын[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]sadybekov@math.kz

Аннотация: В работе рассматривается обобщенный тепловой потенциал для вырождающегося уравнения диффузии, который удовлетворяет классическому начальному условию по переменной t. Область рассмотрения – прямоугольник. Интересный вопрос, имеющий несколько важных приложений (в общем): какое граничное условие может быть наложено на обобщенный тепловой потенциал на боковой границе прямоугольника так, чтобы вырождающееся уравнение диффузии, дополненное этим граничным условием, имело единственное решение в области, заданной той же формулой обобщенного теплового потенциала (с тем же ядром). Это равносильно нахождению следа обобщенного теплового потенциала боковой границы прямоугольника. В настоящей работе найдено граничное условие для данного потенциала. Найденное граничное условие для обобщенного теплового потенциала по пространственной переменной x становится нелокальным краевым условиям для вырождающегося уравнения диффузии.

Ключевые слова: Вырождающееся уравнение диффузии, обобщенный тепловой потенциал, начально-краевая задача, нелокальные краевые условия.

1. Введение

В интервале $\Omega = (0,1)$ рассматриваем одномерный потенциал в виде

$$u(t) = \int_0^1 -\frac{1}{2}|t-\tau| f(\tau) d\tau, \tag{1}$$

Keywords: *Degenerate diffusion equation, generalized heat potential, initial-boundary value problems, nonlocal boundary conditions.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35C15, 35E15, 35K05, 35K20.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Гранты № 0824/ГФ4, № 4075/ГФ4.

где f – интегрируемая функция в $(0,1)$. Здесь ядро одномерного потенциала является фундаментальным решением дифференциального уравнении второго порядка, т.е.

$$-\partial_t^2 \varepsilon(t-\tau) = \delta(t-\tau), \tag{2}$$

где $\varepsilon(t-\tau) = -\frac{1}{2}|t-\tau|$ и δ-дельта "функция"Дирака. Поэтому одномерный потенциал (1) удовлетворяет

$$-\partial_t^2 u(t) = f(t),\ t \in \Omega. \tag{3}$$

Интересный вопрос, имеющий несколько важных приложений (в общем): какое граничное условие может быть наложено на u на границе Ω так, чтобы уравнение (3), дополненное этим граничным условием, имело единственное решение в Ω, заданное той же формулой (1) (с тем же ядром ε). Это равносильно нахождению следа одномерного ньютоновского потенциала (1) границы Ω.

Непосредственным вычислением находим

$$u(t) = \int_0^1 -\frac{1}{2}|t-\tau| f(\tau)d\tau = \int_0^1 \frac{1}{2}|t-\tau|\partial_\tau^2 u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}(t-\tau)\partial_\tau^2 u(\tau)d\tau + \int_t^1 \frac{1}{2}(\tau-t)\partial_\tau^2 u(\tau)d\tau =$$

$$= u(t) - t\frac{u'(0)+u'(1)}{2} - \frac{-u'(1)+u(0)+u(1)}{2} \quad \forall t \in (0,1),$$

т.е.

$$t(u'(0)+u'(1)) + (-u'(1)+u(0)+u(1)) = 0 \quad \forall t \in (0,1).$$

Из этого равенства получаем следующие граничные условия:

$$u'(0)+u'(1) = 0, -u'(1)+u(0)+u(1) = 0. \tag{4}$$

Следовательно, если мы решаем уравнение (3) с граничными условиями (4), то находим единственное решение этой краевой задачи в форме (1). Итак, одномерный потенциал (1) эквивалентен краевой задаче (3)-(4). Вышеобозначенный простой метод находит эквивалентную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений для одномерных потенциалов. Однако, эта задача становится сложной в случае дифференциальных уравнении в частных производных. Основная цель этой статьи: найти краевое условие обобщенного теплового потенциала для вырождающегося уравнения диффузии (теплопроводности).

Систематическому нахождению граничных условий ньютонового потенциала, теплового потенциала и других интегральных потенциалов посвящены работы [1]-[9] (см. также [10]-[12]). Как правило, эти интегральные операторы представимы как свертка фундаментальных решений с заданными функциями. В то же время встречаются другие интегральные операторы, которые имеют более сложный вид, чем оператор типа свертки, и они необязательно имеют граничные условия, в то же время оставаясь решениями некоторых дифференциальных уравнений. Общий вид таких интегральных операторов является корректным сужением некоторых максимальных дифференциальных операторов. Описание класса таких операторов дано в недавней работе Кальменова и Отельбаева [13].

2. Основной результат и доказательство

В цилиндрической области $(x,t) \in \Omega = \{x \in (0,1), t \in (0,T)\}$ с боковой границей $S = \{x = 0, 1, t \in (0,T)\}$ рассмотрим вырождающееся уравнение теплопроводности

$$\diamondsuit_a u(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t). \tag{5}$$

Здесь коэффициент $a(t)$ является неотрицательным и удовлетворяет условию

$$a_1(t) := \int_0^t a(\tau)d\tau > 0 \tag{6}$$

для всех $t > 0$, т.е. $a(t)$ может занулится в интервале. Фундаментальное решение уравнении (8) имеет вид (см. [14])

$$\varepsilon_a(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi a_1(t)}} e^{-\frac{|x|^2}{4a_1(t)}}, \tag{7}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Рассматриваем обобщенный (объемный) тепловой потенциал

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)d\xi, \tag{8}$$

где $\varepsilon_a(x,t)$ – фундаментальное решение (7) задачи Коши для уравнения диффузии (8), т.е.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}-a(t)\frac{\partial^2\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau),\\
-\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}-a(\tau)\frac{\partial^2\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi^2}=\delta(x-\xi,t-\tau),
\end{gathered} \tag{9}$$

где $\delta(x-\xi,t-\tau)$ – дельта "функция" Дирака и $\lim\limits_{\tau\to t}\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)=\delta(x-\xi)$.

Известно, что (см. [16]), если функции $a(t)\in C^{\frac{\alpha}{2}}(0,T)$ и $f(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\Omega)$, то $u(x,t)\in C^{2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{x,t}(\Omega)$, где $0<\alpha<1$ и

$$\Diamond_a u(x,t)=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \tag{10}$$

$$u(x,0)=0. \tag{11}$$

Ниже находим боковые граничные условия, определяемые обобщенным тепловым потенциалом (8).

Теорема 1. *Для любых $a(t)\in C^{\frac{\alpha}{2}}(0,T)$ и $f(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}(\Omega)$ обобщенный тепловой потенциал (8) является единственным классическим решением в пространстве $C^{2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{x,t}$ задачи (10)–(11) с граничными условиями*

$$\begin{gathered}
I_u(x,t)|_{x=1}=0,\\
I_u(x,t)|_{x=0}=0,
\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$I_u(x,t):=-\frac{u(x,t)a(t)}{2}+\int_0^t\Big[\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}a(\tau)u(\xi,\tau)-$$

$$-\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)a(\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}\Big]\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau=0,\quad (x,t)\in S.$$

Доказательство. Так как (8) – несобственный интеграл, как интеграл с особенностью, то понимаем его как предел

$$u(x,t) = \lim_{\delta\to 0} u_\delta(x,t),$$

где

$$u_\delta(x,t) := \int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi.$$

Заметим следующее:

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$\frac{du(x,t)}{dx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{13}$$

Из свойств фундаментального решения и дельта "функций" Дирака имеем

$$0 = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 0u(\xi,\tau) d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \delta(x-\xi, t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \left(-\frac{\partial \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau} - a(\tau)\frac{\partial^2 \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2}\right) u(\xi,\tau) d\xi$$

и

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi,\delta) u(\xi, t-\delta) d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 \delta(x-\xi) u(\xi,t-\delta) d\xi = u(x,t), \quad x\in(0,1). \tag{14}$$

Предполагая, что $u(x,t) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}_{x,\ \ t}(\Omega)$, с учетом свойств фундаментального решения [14], формул (10)–(11), (13)–(14) и непосредственным вычислением для любого $(x,t)\in(0,1)\times(0,T)$ имеем

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)\Diamond_a u(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 d\xi \int_0^{t-\delta} \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau}d\tau -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)a(\tau)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \xi^2}d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 d\xi \int_0^{t-\delta} \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)du(\xi,\tau) -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)a(\tau)du_\xi(\xi,\tau) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 [\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)u(\xi,\tau)]|_{\tau=0}^{\tau=t-\delta}d\xi -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau}u(\xi,\tau)d\xi -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} a(\tau)[\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \xi}u(\xi,\tau)]|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} [\frac{\partial^2\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \xi^2}a(\tau)u(\xi,\tau)]d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} d\tau \int_0^1 \left(-\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau} - a(\tau)\frac{\partial^2\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \xi^2}\right)u(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, \delta)u(\xi, t-\delta) - \varepsilon_a(x-\xi, t)u(\xi,0)d\xi -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} a(\tau)[\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \xi}u(\xi,\tau)]|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi, \delta)u(\xi, t-\delta)d\xi -$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} a(\tau)[\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi, t-\tau)}{\partial \xi}u(\xi,\tau)]|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau =$$

$$= u(x,t) - \lim_{\delta\to 0}\int_0^{t-\delta} a(\tau)[\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi} - \frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}u(\xi,\tau)]|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau.$$

Получим, что

$$\int_0^t a(\tau)[\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}u(\xi,\tau) - \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}]|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau = 0,\ (x,t)\in\Omega. \tag{15}$$

Все интегралы в (15) сходятся в $(x,t)\in\Omega$, но при переходе к пределу $x\to 1-0$ и $x\to 0+0$ следующие интегралы соответственно имеют сингулярные особенности:

$$\int_0^t [\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}a(\tau)u(\xi,\tau)]|_{\xi=1}d\tau,\ \int_0^t [\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}a(\tau)u(\xi,\tau)]|_{\xi=0}d\tau.$$

Таким образом, перейдя к пределу при $x\to 1-0$ и $x\to 0+0$ (см. [15]), мы получим боковые граничные условия

$$\begin{aligned} &I_u(x,t)|_{x=1} = 0,\\ &I_u(x,t)|_{x=0} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$I_u(x,t) = -\frac{u(x,t)a(t)}{2} + \int_0^t \Big[\frac{\partial\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}a(\tau)u(\xi,\tau)-$$
$$-\varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)a(\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}\Big]\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}d\tau = 0,\quad (x,t)\in S.$$

Обратно, если решение уравнения $\Diamond_a u = f$, где $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,\quad t}$, удовлетворяет начальному условию (11) и боковому граничному условию (12), то оно задается формулой (8), т.е. порождает объемный тепловой потенциал (8). Действительно, если u_1 удовлетворяет уравнению (10), начальному условию (11) и боковому граничному условию (12), то $u_1\equiv u$, где u – объемный тепловой потенциал (8). Если это не так, то функция $\nu = u_1 - u$ удовлетворяет уравнению

$$\Diamond_a\nu(x,t) = 0, \tag{17}$$

начальному условию

$$\nu(x,0)=0 \tag{18}$$

и однородным условиям

$$I_{\nu}=(x,t)|_{x=0}=0, I_{\nu}=(x,t)|_{x=1}=0. \tag{19}$$

С другой стороны, используя (17) и (18), как и выше мы получаем следующее:

$$0=\int_0^t\int_0^1 \varepsilon_a(x-\xi,t-\tau)\Diamond_a\nu d\xi d\tau=\nu(x,t)+I_{\nu}(x,t) \quad \forall(x,t)\in\Omega. \tag{20}$$

Переходя к пределу $(x,t)\to S$, получим следующее:

$$\nu(0,t)=-I_{\nu}(x,t)|_{x=0}=0, \nu(1,t)=-I_{\nu}(x,t)|_{x=1}=0.$$

То есть мы установили, что задача (17)–(19) эквивалентна задаче

$$\Diamond_a\nu(x,t)=0, \tag{21}$$

$$\nu(x,0)=0, \tag{22}$$

$$\nu(1,t)=0, \nu(0,t)=0 \quad \forall t\in(0,T). \tag{23}$$

Решением однородной смешанной задачи (21)-(23) (см. [15]) является $\nu(x,t)\equiv 0 \quad \forall(x,t)\in(0,1)\times(0,T)$, т. е. получим $\nu=u_1-u\equiv 0$ и $u_1\equiv u$. Таким образам, боковое граничное условие (12) и начальное условие (11) для уравнения диффузии (10) порождают объемный тепловой потенциал однозначно. Теорема 1 доказана.

Литература

1 Kal'menov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Dok. Math. – 2009. – V. 80. – P. 646-649.

2 Kal'menov T. Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials // Operator Theory: Advances and Applications. – 2011. – V. 216. – P. 187-210.

3 Kal'menov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations. – 2012. – V. 48. – P. 604-608.

4 Kal'menov T. Sh., Tokmagambetov N. E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // Siberian Mathematical Journal. – 2013. – V. 54. – P. 1023-1028.

5 Kal'menov T. Sh., Suragan D. On spectral zeta functions for a non-local boundary value problem of the Laplacian // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1611. – P. 19-24.

6 Kal'menov T. Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // EJDE. – 2014. – V. 2014. – P. 1–7.

7 Kal'menov T. Sh., Suragan D. On permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – V. 55. – P. 1060-1064.

8 Ruzhansky M., Suragan D. On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2016. – V. 144. – P. 709-721.

9 Suragan D., Tokmagambetov N., On transparent boundary conditions for the high-order heat equation // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2013. – V. 10. – P. 141-149.

10 Оразов И., Садыбеков М. А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сибирский математический журнал. — 2012. – Т. 53, № 1. – С. 180-186.

11 Ditkowski A., Suhov A., Near-field infinity-simulating boundary conditions for the heat equation // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2008. – V. 105. – P. 141-149.

12 Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // Appl. Comput. Harmon. Anal. – 2008. – V. 25. – P. 68-97.

13 Kal'menov T.Sh., Otelbaev M. Boundary criterion for integral operators // Dok. Math. – 2016. – V. 93. – P. 58-61.

14 Malyshev I. On the inverse problem for a heat-like equation // J. of Appl. Math. and Simulation. — 1987. — V. 1, No. 2. — C. 81–97.

15 Malyshev I. On the parabolic potentials in degenerate-type heat equations // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. – 1991. – V. 2, No. 4. – C. 147-160.

16 Крылов Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гелдера. – Новосибирск, 1998. – 259 с.

Статья поступила в редакцию 06.05.2016

Садыбеков М.А., Оралсын Г. АЗЫНҒАН ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ЖАЛПЫЛАНҒАН ЖЫЛУ ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ ШЕТТІК ШАРТЫ

Жұмыста t айнымалысы бойынша классикалық бастапқы шартты қанағаттандыратын азынған диффузия теңдеуі үшін жалпыланған жылу потенциалы қарастырылады. Қарастырылу облысы – тіктөртбұрыш болып отыр. Бірнеше маңызды қосымшалары (жалпы түрде) қызықты сұрақ: жалпыланған жылу потенциалына тіктөртбұрыштың бүйір шекарасында қандай шекаралық шарт қойғанда азынған диффузия теңдеуі осы шекаралық шартпен толықтырыла отырып, сол жалпыланған жылу потенциалының (өзекпен) формуласымен берілген облыста жалғыз шешімі болады? Бұл тіктөртбұрыштың бүйір шекарасының жалпыланған жылу потенциалының ізін табумен пара-пар болады. Осы жұмыста берілген потенциал үшін шекаралық шарт табылған. Жалпыланған жылу потенциалы үшін x кеңістік айнымалысы бойынша табылған шекаралық шарт азынған диффузия теңдеуі үшін бейлокал шеттік шартқа айналады.

Sadybekov M.A., Oralsyn G. BOUNDARY CONDITION FOR A GENERALIZED HEAT POTENTIAL OF THE DEGENERATE DIFFUSION EQUATION

This work deals with a generalized heat potential for the degenerate diffusion equation, which satisfies the classical initial condition with respect to the variable t. Viewing area is rectangle. An interesting question having several important applications (in general) is what boundary condition can be put on the generalized heat potential on the boundary of the rectangle so that the degenerate diffusion equation complemented by this boundary condition would have a unique solution in the domain still given by the same formula of the generalized heat potential (with the same kernel). This amounts to finding the trace of the generalized heat potential to the boundary of the rectangle. That is in this work a boundary condition for this potential is found. Obtained boundary condition in the spatial variable x is a nonlocal boundary condition.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 111–124.

УДК 517.958

AN INVERSE PROBLEMS IN DIFFUSION THEORY WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

G.A. Besbaev[1], I. Orazov[2]

[1,2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: [1]besbaev@math.kz

[1,2]Auezov South Kazakhstan State University
160012, Shymkent, 5 Tauke khan avenue, e-mail: [2]orazov@math.kz

Annotation: In the present paper we consider issues of constructing mathematical models of extraction processes from solid polydisperse porous materials considering the porosity of structure of particles, taking into account the connection of the residence time of fractions with particle size in the extractant, based on inverse problems of recovery of coefficients of diffusion processes under various variants of boundary conditions by a spatial variable.

Keywords: Nonlocal boundary value problems, extraction processes, inverse problems, diffusion equation.

1. Introduction

Along with classical boundary value and initial-boundary value problems many scientists have recently become interested in problems of mathematical physics with non-local (non-classical) additional conditions. The theory of non-local boundary value problems is important in itself as a branch of the general theory of boundary value problems for equations in partial derivatives and as a branch of mathematics which has numerous applications in mechanics, physics, biology and other natural scientific disciplines. A problem is considered to be a non-local boundary value problem when instead of giving solution values or its derivatives on a fixed part of the boundary there is given a relation of these values with values of the same functions on

Keywords: *Nonlocal boundary value problems, extraction processes, inverse problems, diffusion equation.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35P10, 35R30.

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 0824/GF4).

the other interior or boundary manifolds. These problems include boundary value problems with conditions of periodicity type, with Bitsadze-Samarskiy conditions, with conditions of integral type and also the problems with multipoint boundary conditions of general type and etc. The relevance of studying these problems is caused by the existence of a number of physical applications in electrostatics, electrodynamics, the theory of elasticity, plasma physics, multilayer optics, etc. The construction and researching of numerical methods for solving problems with non-local additional terms and conditions are not less relevant. It should be noted that there are no universal researching methods both for differential problems with non-classical conditions and for difference schemes approximating them. There are principal difficulties for using traditional methods such as the potential method, the method of variable separation, the extremum principle and the method of energetic inequalities. This property of the non-local problems is related firstly to the great freedom of choice and the existing extreme variety of additional conditions. Therefore the scientists have chosen to focus on studying some individual classes of the non-local problems of mathematical physics and corresponding finite-difference schemes. Examples of the non-local boundary value problems for the evolutional equations turned out to be more demonstrative, particularly for a one-dimensional heat equation. The first natural generalization of classical formulations for the one-dimensional in space initial-boundary value problems is a class of problems with two-pointed boundary conditions. One of the first such problems, known as the Samarskiy-Ionkin problem, describing the process of particle diffusion was investigated in 70-th of the twentieth century. The problems of non-local type have been repeatedly studied earlier. The main principal property of these problems is their non-selfadjointness. It causes the main difficulties in their analytical and numerical solutions. Assuming strong singularity of boundary conditions of the problem, the well-posedness of its formulation can be proved by Fourier method of variables separation. The problems, boundary conditions of which do not have the property of strong regularity, are less studied. In our previous works we have suggested one way of the solution for such type of the problems. We have shown that a wide range of such problems can be equivalently reduced to a sequential solution of two problems with strong regular boundary conditions of Sturm type. We have considered the question of existence of the regular and strong solution of a differential problem, its uniqueness and stability of initial data in various metrics.

2. Methods for describing the structure of solid polydisperse materials

The structure of a porous body is related to its nature, origin and also, mostly with methods of its processing. Unlike metal ores, plant bodies have a characteristic cellular structure [1].

1. A porous body is formed by an aggregate (conglomerate) of smaller particles due to connections in places of contact of these particles. For example, such structure can be arranged in the pressing of pieces of a material from one and the same substance.

2. The porosity may be due to the removal of material from the structure of another substance. This porosity is characteristic in obtaining oil by pressing method.

3. The structure of a porous body can be created during the drying process. For example, granular materials, some metallic ores have such structure.

Construction of pairs largely defines the mechanism of extracting and the speed of its extracting. In practice, physical-chemical characteristics (porosity and specific surface) are of great importance for describing the structure of solid polydisperse materials. For a solid plant material the skeleton of the porous body significantly influences on diffusion transfer of the substance, particularly on the extraction process. The structure of porous media differs by manifold of geometric forms and sizes of elements of particles, therefore researchers accept this or another model of the porous body with some simplifications and assumptions. In this case modifications of kinetic coefficients are also taken into account with the help of correction coefficients.

The specific pore surface significantly determines interfacial chemical interaction between the phases which sometimes accompanies the extraction process. In analyzing the structure of solid polydisperse materials the researchers distinguish the following main types of porous bodies [2].

1. Isotropic porous bodies.

Plant raw materials can be considered to be isotropic if conditions $\delta \leq l$ hold, where l is a characteristic linear size of the porous body, meter; δ is a size of a primary particle, meter. For the isotropic bodies a coefficient of mass conductivity remains constant for all directions.

2. Anisotropic porous bodies with regular structure.

Mass transfer characteristics of such bodies are constant with respect to this direction and change while moving to another direction. For example, constructing series of plant materials have a system of capillaries. The diffusion conductivity to the direction of these capillaries is much higher than to other directions. Components of a vector of flow density can be represented in the following form:

$$J_i = -Dm_{ik}\frac{\partial C}{\partial x_k}, \quad i = 1,2,3; \; k = 1,2,3,$$

where Dm_{ik} forms a tensor of the second rank; C is concentration of the substance; J_i are the components of a vector of flow density.

2. Anisotropic porous bodies with irregular structure.

Microvolumes for liquids (extragents) are distributed by volumes and forms in these bodies. The concentration of the substance is distributed in each of these elements. Values of the concentration can be calculated by a diffusion equation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{1}$$

If an extracted substance (target component) is in the solid form in the polydisperse material, then this fact implies slowing down effect because there may be various variants of distribution of the solid substance by the volume of the particle. In the process of extracting, solid soluble contaminants slowly decrease and the porosity of the body increases. Also the researchers note that during the extraction process the primary isotropicity turns into the anisotropicity due to the uneven distribution of the porosity by the volume of the particle.

The basic element of the structure of plant tissue is a cell. From the available work reviews one can conclude that the basis of shells of plant cells is cellulose, i.e. a polymer with linear macromolecules. The basic structure elements of the cellulose are groups of macromolecules connected with each other. The sizes of pores forming the shell of a cell are represented in existing works: 1) narrow pores with a size of about 10 nm; 2) large pores with a size of about 100 nm.

3. Brief review of results of researches on the theory and practice of extraction from solid polydisperse plant materials

The present condition of researches on the extraction is completely determined by successes in the field of defining physical-chemical peculiarities of hydrodynamics and mass transfer, advancements in the field of mathematical modeling, numerical experiment on defining optimal technological and constructive parameters. It is necessary to note that the application of the classical thesis, that the mass transfer in porous particles is solely carried out by the result of molecular diffusion, has predetermined the direction of traditional methods of process intensification: accelerating of raw impregnation by an extractant, optimum grinding of raw materials, an increase in temperature, optimal selection of extractants and others [1].

Alongside with these processes hydrodynamic methods of the intensification process have spread: vortex extraction, extraction in vacuum boiling regime of the extractant, application of mechanical vibrations of the suspension, imposition on the suspension of ultrasound, pulsation of pressure, wringing of the fibrous porous material. These effects can not be explained by provisions of the diffusion theory of extraction since a convective constituent of the extraction explicitly exists. Thus some researchers propose the same diffusion models in modeling of extraction kinetics by changing coefficients of the molecular diffusion onto coefficients of an effective diffusion in the models. In some works they propose that the extraction mechanism of a target component from particles of fibrous porous materials in apparatuses with intensive hydrodynamic mode is different. The convective mass transfer takes place in large pores. Simultaneously the molecular-diffusion mass transfer takes place in small pores. The volume of micropores exceeds the volume of macropores, therefore, as a limiting stage of mass transfer we can consider the diffusion in the micropores. In literature such approach is called diffusion-convective, a new scientific direction, that is, the diffusion-convective extraction (DCE) of a target component from fibrous porous materials, has appeared. Fundamentals of the theory of DCE are developed, parameters of mathematical models with peculiarities and the intensity of the hydrodynamic effects on raw materials are researched, energetic approach to description of kinetics of DCE is developed [2].

For effective conducting of diffusion process we need apparatuses allowing providing optimal values of the following hydrodynamic mass transfer and physical-chemical parameters.

1. Surface of phase division. This value depends on a degree of raw material shredding and the value will be large if its particles are small. However the excessive thin shredding leads to the compaction of particles, as a result the extractant will not practically pass through these conglomerates. We should also take into account that in this case a large amount of weighed small particles will pass into the extractant and the removal of these particles requires an additional processing. In well-known works there are given recommendations on sizes of the particles: leaves, flowers, grasses should be shredded to 3-5 mm; stems, roots, bark should be shredded to 1-3 mm; fruits and seeds should be shredded to 0,3-0,5 mm.

2. The difference in concentration of the target component in the raw material and the extractant is a driving force of the extraction process (though, it will be more exact to consider the difference of chemical potentials as this force but we also accept such assertion by virtue of the existing approaches and concentration calculation). In practice to provide the maximum passing of concentrations, they use, in particular, a countercurrent process.

4. Methods of mathematical modeling and calculating the process of extraction from solid plant material

The concentration of a target component in all points of the researched domain of a solid body is a main characteristic value in the process of extracting. This value in the general form is a function of time and spatial coordinates: $C = f(x, y, z, t)$, where x, y, z, t are point coordinates of the solid body; t is time. The function C quite accurately describes the extraction process and is a solution of the differential equation of the molecular diffusion (in absence of mixing):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\Big(\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}\Big), \tag{2}$$

where ξ is a generalized coordinate; Γ is a constant form of the coordinate system; D is a coefficient of the diffusion, m^2/s.

We can obtain different forms of diffusion equations for values $\Gamma = 0, 1, 2,$

respectively. For example, in Cartesian coordinates

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right).$$

In a moving liquid (while mixing) it is necessary to take into account the convective diffusion. In an abbreviated formula an equation of the convective diffusion has the following form:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (v\mathrm{grad})C = D\nabla^2 C,$$

where v is a speed vector, components of this vector by directions x, y, z have values v_x, v_y, v_z; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is a Laplace operator;

$$v\mathrm{grad} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

The diffusion coefficient D_C characterizes its physical-chemical property of diffusing of another substance in an environment, subject to certain conditions. The following formulas have obtained the widest usage for the extraction calculation.

1. Formula of Einstein

$$D_C = \frac{RT}{N}\cdot\frac{1}{\eta\sigma}, \tag{3}$$

where R is a gas constant; T is temperature, K; N is an Avogadro's number; η is a fluid viscosity; $\sigma = 6\pi r$; r is radius of the diffusing molecules.

However, applying of equation (3) is limited by the diffusion of large spherical molecules in extractants with a low molecular mass. Therefore it is necessary to check the fulfillment of these conditions under calculating D_C by the equation.

By formula (3) it is also true that under temperature increasing, the diffusion coefficient is also increasing. This circumstance has been used in many processes and apparatuses for extraction. Formula (3) has become a basis for many more exact relations in spite of its limitation by strict conditions.

2. Formula of Vilk, Cheng and Scheibel:

$$D_C = \frac{KT}{\mu_2 V_1^{1/3}}$$

is used for non-aqueous extractants of small concentration, where $K = 8.2 \cdot 10^{-8}\left(1+\frac{3V_2}{V_1}\right)^{2/3}$; μ_2 is an extractant viscosity; V_1, V_2 are molar volumes of the extract and the extractant.

3. Formula of Hartley and Crank. Applying the formula for a chemical potential instead of a concentration gradient

$$j = -L_\mu \; grad\mu, \tag{4}$$

we obtain

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = a_\mu \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \tag{5}$$

where j is a density of the diffusion flux, $k^2/m^2 \cdot s$; μ is a chemical potential; L_μ is a mass transfer coefficient; $a_\mu = \frac{L_\mu}{\rho \frac{\partial C}{\partial \mu}}$; C is a concentration of a target component (per unit mass).

Despite the high precision, formulas (4) and (5) are not widely used because the main parameter (concentration) is defined during solving equations of molecular diffusion. A significant difference between the mass transfer coefficient D_M and the diffusion coefficient exists under conditions of substance transfer (a target component) in porous environments of plant origin. For the first approximation we consider that all pores of the solid polydisperse raw material have a cylindrical form and are parallel to each other. The differential equation retains its canonic form

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

for the whole porous body and the law of Fick has the following form:

$$j = -m_\rho D \; grad \; C, \tag{6}$$

where m_ρ is an extractant concentration expressed in moles.

Comparing formula (6) with the law of Fick for density of the diffusion flow, we get the relation

$$D_M = m_\rho D.$$

Thus, apart from increasing diffusion coefficient it is necessary to apply the processes and apparatuses in increasing m for increasing of the mass transfer coefficient. The differential equation (2) in one-dimensional case in Cartesian coordinates has been applied in inner domain of capillaries of the porous environment and the equation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \sin^2 \varphi$$

has been obtained, where $\sin\varphi = x/l$; l is a distance in the direction of the axis of the capillary.

If $l/x = \alpha$ is a lengthening coefficient of the capillary convolutions of pores, then a correcting multiplier has the form $1/\alpha^2$. A value of the lengthening coefficient is experimentally found by electrical resistance of the unit volume of layer of plant material:

$$\alpha = 1 + 0.274(1 - mp).$$

A differential equation of the form (2) can have a countless number of solutions, because, for example, if $C = C(x, y, z, t)$ is a solution of this equation, then a function $C(x, y, z, t)+$ *const* is also its solution. Therefore it is necessary to set initial and boundary conditions for the uniqueness of the solution.

An initial condition for concentration of the target component has the following form :

$$C(x, y, z, t)|_{t=0} = C_0,$$

where C_0 is a concentration of the target component in pores at the beginning of the extraction process. Usually the value of C_0 is equal at all points of the pores and does not depend on x, y, z.

Boundary condition of the first kind. A concentration value on the surface of the pores is set:

$$C(x, y, z, t)_s = C_1.$$

In some problems the boundary condition has another form:

$$-D_M\left(\frac{\partial C}{\partial \eta}\right)_s = k(C_s - C_1),$$

where η is a distance along the normal to the surface of porous particles; k is a mass transfer coefficient; C_s is a concentration value on the surface; an index S means "a surface".

The value of the mass transfer coefficient depends on the hydrodynamic regime of the extraction, i.e. on the regime of flow around of particles by the extractant.

Numerical and approximate-analytical methods are more effective in view of nonlinearity of differential equations for realization of mathematical models of diffusion mass transfer. The assumptions allowing simplifying the numerical analysis and the comparison of calculated and experimental data are additionally applied.

In literature there is a great number of works on mathematical modeling of the impregnating process of the pores of the solid material by a liquid. In one way or another, the simplification (assumption) that the pores have equal structural elements of various classes by sizes, is used in these works [3].

In this paper we consider a case when macropores of particles are initially filled by a clean solvent, and micropores are filled by an extracted component. The extracted component diffuses from a micropore into a macropore, and then from the macropore to an external volume of the extractant during the extraction process. Further we take the following notations [2]:

$\psi_a = C_a/C_0$, $\psi_i = C_i/C_0$ are concentrations of a liquid phase in macro-and micropores in dimensionless form, respectively;

$\theta = q/Q$ is a concentration of an adsorbed phase;

$\zeta = z/L_a$, $\overline{\omega} = y/L_i$ are spatial coordinates in macro-and micropores, respectively;

$\tau = t/\tau_{di}$; $\tau_{di} = L_i^2/D_i$ are coordinates of time;

$\sigma = 2 \cdot n \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot (L_i/r_a)$; $\gamma = \tau_{da}/\tau_{di}$; $\tau_{da} = L_a^2/D_a$; $\Gamma = Q_0/C_0$ are parameters.

Taking into account these dimensionless variables, model equations have the form: a mass balance for a macropore

$$\frac{\partial^2 \psi_a}{\partial \zeta^2} + \sigma \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}}\Big|_{\overline{\omega}=0} = \gamma \cdot \frac{\partial \psi_a}{\partial \tau} \tag{7}$$

with initial and boundary conditions:

$$\tau = 0 \;\; \psi_a = 0; \;\; \zeta = 0 \;\; \psi_a = 1; \;\; \zeta = 1 \;\; d\psi_a/d\zeta = 0; \tag{8}$$

a mass balance for a micropore

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \overline{\omega}^2} = (1 + \tilde{A})\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \tag{9}$$

with initial and boundary conditions:

$$\tau = 0 \ \ \psi_1 = 1; \ \overline{\omega} = 0 \ \ \psi_1 = 0; \ \overline{\omega} = 1 \ \ d\psi_1/d\overline{\omega} = 0. \tag{10}$$

Problem (7)–(10) is "direct", i.e., it is necessary to find concentrations of the liquid phase in the macro-and micropores under the known coefficients $\sigma, \gamma, \tilde{A}$ under the initial and boundary conditions (8), (10).

One can put "an inverse problem": how to arrange the extraction process (i.e., to set the technology of the extract extraction, or concentration distribution of time) to obtain the desired values of the coefficients $\sigma, \gamma, \tilde{A}$.

Let two of three coefficients be known as in the direct problem. More interesting case is that when $\gamma, \tilde{A}$, are known, it is necessary to find $\sigma = 2 \cdot n \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot (L_i/r_a)$, i.e., a relation of radiuses of micro-and macropores. Here we need to apply the method of solving the inverse problems.

The mathematical modeling based on the aforementioned inverse problems are well enough researched in the following cases: an unknown right-hand part; an unknown coefficient $q(x)$; an unknown coefficient $\rho(x)$; an unknown coefficient $q(x)$ and an unknown right-hand part; unknown coefficients $\rho(x)$ and $q(x)$; an unknown coefficient $p(x)$.

We should also note recent works where the well-posedness of inverse problems for a wide class of evolutional differential-functional equations is proved by a modified method of minimizing a functional. In particular, problem of controlling by a laser heat source is solved.

However, in all mentioned works the problem has been solved for the case of such boundary conditions under which the basis property of the system of root vectors of the corresponding spectral problem arising in the method of separation of variables holds [4], [5]. In the present paper we propose to consider the mentioned problems under the not strengthened regular boundary conditions by a spatial variable. And the consideration may be held independently of the basis property of the root vectors of the corresponding spectral problem [6]–[8].

5. Conclusion

The theoretical mathematical science has deep enough advanced in solving inverse problems for diffusion processes. And besides, as a rule, the problems are researched under simplest selfadjoint boundary conditions by a spatial variable. Unlike the mentioned works we propose to consider the problems with more general boundary conditions by a spatial variable. The selfadjointness of the boundary conditions is not assumed, only requirement of their regularity by Birkhoff [4] is sufficient. The inverse problems researched by us are directly obtained from mathematical models of technological processes.

Namely, such problems were considered in works of the authors [9]–[14]. The work [15] can be also successfully used for modeling. Issues of constructing of theoretical adequate models for a wide class of problems related to restoring unknown parameters, and /or to finding a suitable control for processes, which are described by a diffusion equation with non-local conditions by a spatial variable, are substantiated on the basis of theoretical results obtained in this works. Also, non-local boundary conditions of a new type of works [16]–[21] may be proposed for the mathematical modeling. This will be the subject of our further research.

6. Acknowledgments

The authors express their gratitude to Prof. T.Sh. Kalmenov and Prof. M.A. Sadybekov, this paper has been prepared under their guidance.

References

1 Yang X., Li X., Huang K., Wei Q., Huang Z., Chen J., Xie Q. Solvent extraction of gold(I) from alkaline cyanide solutions by the cetylpyridinium bromide/tributylphosphate system // Minerals Engineering. – 2009. – V. 22, № 12. – P. 1068-1072.

2 Kholpanov L.P., Ismailov B.R., Bolgov N.P. Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2012. – V. 46, № 1. – P. 102-108.

3 Orazov I., Sadybekov M.A. One-Dimensional Diffusion Problem With Not Strengthened Regular Boundary Conditions // AIP Conference Proceedings, 1690, eds. Pasheva V., Popivanov N., Venkov G., Amer Inst Physics. – 2015. – UNSP 040007. – ISBN: 978-0-7354-1337-5.

4 Naimark M.A. Linear differential operators. – M.: Nauka , 1969.

5 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – V. 146, № 1. – P. 148-191.

6 Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Siberian Mathematical Journal. – 2012. – V. 53, № 1. – P. 146-151.

7 Orazov I., Sadybekov M.A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Mathematics. – 2012. – V. 56,

№ 2. – P. 60-64.

8 Mokin A.Yu. On a family of initial-boundary value problems for the heat equation // Differential Equations. – 2009. – V. 45, № 1. – P. 126-141.

9 Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 396, № 2. – P. 546-554.

10 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition // Boundary Value Problems. – 2015. – V. 38. – DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5.

11 Ashyralyev A., Hanalyev A. Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators // The Scientific World Journal. – 2014. – № 519814.

12 Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Advances in Difference Equations. – 2013. – V. 173. – P. 797-810.

13 Kerimov N.B., Ismailov M.I. Direct and inverse problems for the heat equation with a dynamic-type boundary condition // IMA J. Appl. Math. – 2015. – V. 80. – P. 1519-1533.

14 Hussein M.S., Lesnic D., Ismailov M.I. An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2016. – V. 39. – P. 963-980.

15 Oralsyn G., Sadybekov M.A. An inverse coefficient problem of heat conductivity with a nonlocal Samarskii-Ionkin type condition // AIP Conference Proceedings. – 1676, eds. Ashyralyev A., Malkowsky E., Lukashov A., Basar F., Amer Inst Physics. – 2015. – UNSP 020016. – ISBN: 978-0-7354-1323-8.

16 Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A. Dirichlet problem and nonlocal boundary-value-problems for the wave-equation // Differential Equations. – 1990. – V. 26, № 1. – P. 55-59.

17 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings 1611 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2014. – P. 255-260.

18 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – V. 61, no. 1. – P. 104-123.

19 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – V. 157. – P. 1-14.

20 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk // Differential Equations. – 2013. – V. 50, № 2. – P. 268-273.

21 Sadybekov M.A., Torebek B.T. On a new class of nonlocal problems for the Laplace operator // AIP Conference Proceedings 1676 (American Institute of Physics), Melville, NY, 2015. – 020073.

Received 26.08.2016

Бесбаев Г., Оразов И. ДИФФУЗИЯ ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ ШЕТТ/ИК ШАРТТАРЫ БАР КЕРІ ЕСЕПТЕР

Бұл жұмыста біз қатты полидисперсті қуысты материалдардың мақсатты поликомпонентті бөлшектердің құрылысының қуыстылығын ескере отырып, әрі фракциялардың мекендеу уақытының экстрагенттегі бөлшектер өлшемімен байланысын есепке ала отырып, экстракция процестерінің математикалық моделдерін тұрғызу мәселелерін кеңістіктік айнымалы бойынша шекаралық шарттардың әралуан нұсқалары үшін диффузия коэффициенттерін қалпына келтірудің кері есептері негізінде қарастырамыз.

Бесбаев Г., Оразов И. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ТЕОРИИ ДИФФУЗИИ

В этой работе мы рассматриваем вопросы построения математических моделей процессов экстракции целевой компоненты из твердых полидисперсных пористых материалов с учетом пористости структуры частиц, принимая во внимание связь времени пребывания фракций с размером частиц в экстрагенте, на основе обратных задач восстановления коэффициентов диффузии при различных вариантах граничных условий по пространственной переменной.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 125–136.

УДК 517.927

STABILITY OF THE BASIS PROPERTY OF SYSTEM OF ROOT FUNCTIONS OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

N. Imanbaev[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling
050010, Almaty, 125 Pushkin str.

[2]South Kazakhstan State Pedagogical Institute
160000, Shymkent, 13 A. Baitursynov str., e-mail: imanbaev@math.kz

Annotation: In the present paper we study a question on stability and instability of the basis property of a system of eigenfunctions of Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of one of boundary conditions.

Keywords: Nonlocal boundary value problem, Sturm-Liouville operator, eigenfunctions, associated functions, eigenvalue, nonself-adjoint problem.

1. Introduction

Spectral theory of non-self-adjoint boundary value problems for ordinary differential equations on a finite interval goes back to the classical works of Birkhoff [1] and Tamarkin [2]. They introduced the concept of regular boundary conditions and investigated asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of such problems. In their works Malamud and Oridoroga [3], [4] proved completeness of eigenfunctions and associated functions for a wide class of boundary value problems which includes regular boundary conditions. In space $L^2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the following ordinary differential expression:

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

Keywords: *Nonlocal boundary value problem, Sturm-Liouville operator, eigenfunctions, associated functions, eigenvalue, nonself-adjoint problem.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34L05, 34L20

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 0825/GF4).

and the boundary value conditions of the form

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \quad j = 1, 2. \qquad (2)$$

When the boundary conditions (2) are strongly regular, the results by Dunford [5], [6], Mikhailov [7] and Kesel'man [8] provide the Riesz basis property in $L^2(0,1)$ of the eigenfunctions and associated functions (E and AF) system of the problem. In the case when the boundary conditions are regular but not strongly regular, the question on basis property of E and AF system is not yet completely resolved. We introduce the matrix of coefficients of the boundary conditions (2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

By $A(ij)$ we denote the matrix composed of the i-th and j-th columns of the matrix A, $A_{ij} = \det A(ij)$. Let the boundary conditions (2) be regular but not strongly regular. According to [9, p. 73], if the following conditions hold:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \qquad (3)$$

then the boundary conditions (2) are regular, but not strongly regular boundary conditions.

Makin [10] suggested dividing all regular, but not strongly regular, boundary conditions into four types:

I $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$;

II $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$;

III $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$;

IV $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} \neq 0$.

For example, periodical or antiperiodical boundary conditions form the type I, and can be determined in the following form:

$$A_{14} = A_{23}, \quad A_{34} = 0,$$

That is, $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$ and $a_{23} = -a_{24}$.

These conditions will be equivalent to matrix A, where the following two options are possible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

are periodical or

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

are antiperiodical, and the same boundary conditions with "the lowest coefficients" form the type II. The boundary value conditions defined as $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$ form the type III. These conditions are always equivalent to boundary conditions given by the matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This case will be the aim of our research in this paper. Moreover, Makin [10] allocated the one type of non-strongly regular boundary value conditions, when E and AF systems of the spectral problem

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1, \qquad (4)$$

with boundary conditions of the form (2) forms the Riesz basis for any potentials $q(x)$. When $q(x) \equiv 0$, the problem about basis property of E and AF system of the problem with general regular boundary conditions has been completely resolved in [11]. In [12], [13] questions on convergence of eigenfunctions expansion of the Dirac operator in vector - matrix form and the Hill operator, forming the Riesz basis in $L^2(0,1)$ with regular, but not strongly regular, boundary value conditions have been considered. For Dirac operators Mityagin [14] proved that periodic (or anti-periodic) boundary conditions give a rise to the Riesz system of 2D projections.

In [15], [16] by V.A. Il'yin's anti-a priori estimates it was shown that anti-a priori estimates without a positive exponent in the right-hand side of the inequality are necessary and sufficient conditions for an unconditional basis property in L_2 under an arbitrary choice of associated functions. And it is used in the proof of the well-posedness of boundary value problems [17].

2. Statement of the problem

When $q(x) \equiv 0$ the spectral problem (4)-(2) with boundary conditions of the type I is self-adjoint. The system of its eigenfunctions is an usual trigonometric system and forms an orthonormal basis in $L^2(0,1)$. For the case of non-self-adjoint initial operator the question about preservation of the basis properties with some (weak in a certain sense) perturbation was shown in the type of several examples in [18].

Riesz basis property of eigenfunctions and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems was considered in [19]. In [20], [21] questions on stability of basis properties of the periodic problem for (4) were investigated with integral perturbation of the type I boundary conditions (2), when $j = 2$; that is, $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. Moreover, in [22] similar issues at $q(x) \equiv 0$ have been studied. In the present paper we consider a spectral problem close to research of [22] when $q(x) \equiv 0$, with integral perturbation of the boundary conditions (2) when $j = 2$, which belong to type I:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) = 0, \tag{6}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) + u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L^1(0,1). \tag{7}$$

From [23] it follows that the E and AF system of problem (5)–(7) is complete and minimal in $L^2(0,1)$. Moreover, the E and AF system for any $p(x)$ forms the Riesz basis with brackets. Our aim is to show that the basis property in $L^2(0,1)$ of the E and AF system of problem (5)–(7) is unstable with respect to small changes of kernel $p(x)$ of integral perturbation. In [24] the method of constructing the characteristic determinant of the spectral problem with integral perturbation of the boundary conditions has been suggested.

The basis properties in $L^p(-1,1)$ of root functions of nonlocal problem for equations with involution have been studied in [25]. In [26] they considered the eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. Boundary value problems with transmission conditions were investigated extensively in the recent years (see, for example, [27], [28], [29], [30]). Another special case of problem (5)–(7) with an integral perturbation of condition (6) was investigated in [31].

3. Characteristic determinant of a spectral problem

In this section we use the method from [24] to construct a characteristic determinant of the problem with integral perturbation of the boundary condition. Applying integration by parts, for smooth enough complex-valued functions $u(x)$ and $v(x)$ we obtain the Lagrange formula:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 L_0(u)\overline{v(x)}\,dx - \int_0^1 u(x)\overline{L_0^*(v)}dx \\ &= [u'(0)+u'(1)]\overline{v(0)} + u'(1)[\overline{v(0)}+\overline{v(1)}] \\ &\quad -[u(0)+u(1)]\overline{v'(0)} - u(1)[\overline{v'(0)}+\overline{v'(1)}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Here $L_0^*(v)$ is an adjoint differential expression

$$L_0^* v = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x), \quad 0 < x < 1. \tag{9}$$

Consequently the operator L_0^* corresponding to the operator L_0 is given by the differential expression (9) and the boundary conditions

$$V_1(v) = v(0) + v(1) = 0, \quad V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0. \tag{10}$$

Also the operator L_1^* corresponding to the operator L_1 is given by the loaded differential expression

$$L_1^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) + p(x)v'(0), \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

and the antiperiodic boundary conditions (10). One of the aspects of this problem is the fact that the adjoint problem to (5)–(7) is a spectral problem for the loaded differential equation

$$\begin{aligned} &L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \overline{\lambda}v(x), \\ &V_1(v) = v(0) + v(1) = 0, \\ &V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

First, we construct a characteristic determinant of the spectral problem (5)–(7). Presenting the general solution of equation (5) by the formula

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

and with respect to the boundary conditions (6)–(7), we obtain the following linear system for the coefficients C_k:

$$C_1\Big[1+\cos\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx\Big]+C_2\Big[\sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\Big]=0,$$

$$C_1\Big[-\sin\sqrt{\lambda}\Big]+C_2\Big[1+\cos\sqrt{\lambda}\Big]=0.$$

Its determinant will be the characteristic determinant of the spectral problem (5)–(7):

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix}1+\cos\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx & \sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\\ -\sin\sqrt{\lambda} & 1+\cos\sqrt{\lambda}\end{vmatrix}. \quad (13)$$

When $p(x)=0$ we obtain the characteristic determinant of the unperturbed problem (5)-(7). It is denoted by $\Delta_0(\lambda)=2(1+\cos\sqrt{\lambda})$. The number $\lambda_k^0=((2k-1)\pi)^2$ is an eigenvalue of the unperturbed antiperiodic problem, and $u_{k0}^0=\sqrt{2}\cos((2k-1)\pi x)$, $u_{k1}^0=\sqrt{2}\sin((2k-1)\pi x)$ are eigenfunctions. We represent the function $p(x)$ in the Fourier series form by the trigonometric system

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos((2k-1)\pi x)+b_k\sin((2k-1)\pi x)]. \quad (14)$$

Using (14), we find more convenient representation for the determinant $\Delta_1(\lambda)$. To do this, first, we calculate integrals in (13). Simple calculations show that

$$\int\limits_0^1\overline{p(x)}\cos(\sqrt{\lambda}x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\bar{a}_k\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\bar{b}_k((2k-1)\pi)(\cos\sqrt{\lambda}+1)]}{\lambda-((2k-1)\pi)^2},$$

$$\int\limits_0^1\overline{p(x)}\sin(\sqrt{\lambda}x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\bar{a}_k\sqrt{\lambda}(1+\cos\sqrt{\lambda})+\bar{b}_k((2k-1)\pi)\sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda-((2k-1)\pi)^2}.$$

Using these results and standard transformations, the determinant (13) is reduced to the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda),$$

where

$$A(\lambda) = \Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\Big]. \tag{15}$$

Hence, the following theorem is proved.

Theorem 1. *The characteristic determinant of the spectral problem (5)-(7) with the perturbed boundary value conditions can be represented in the form (15), where $\Delta_0(\lambda)$ is a characteristic determinant of the unperturbed antiperiodic spectral problem, b_k are coefficients of the expansion (14) of the function $p(x)$ into trigonometric Fourier series.*

The function $A(\lambda)$ in (15) has a first-order pole at the points $\lambda = \lambda_k^0$, and the function $\Delta_0(\lambda)$ has a second order zero at these points. Therefore, the function $\Delta_1(\lambda)$, represented by the formula (15), is an entire analytic function of the variable λ. The characteristic determinant, which is the entire analytical function, related with the problem on eigenvalues of differential operator of the third order with nonlocal boundary conditions has been studied in [32].

4. Case of the basis property of root functions

The characteristic determinant (15) looks simpler when

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \big[a_k \cos((2k-1)\pi x) + b_k \sin((2k-1)\pi x)\big].$$

That is, there exists a number N such that $a_k = b_k = 0$ for all $k > N$. In this case, formula (15) takes the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\right]. \tag{16}$$

From this particular case of formula (15), we have the following corollary.

Corollary 1. *For any preassigned numbers (a complex* $\hat{\lambda}$ *and a positive integer* $\hat{m}$*) there always exists a function* $p(x)$ *such that* $\hat{\lambda}$ *will be an eigenvalue of problem (5)–(7) of multiplicity* $\hat{m}$*.*

From the analysis of formula (16) it is easy to see that $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ for all $k > N$. That is, all eigenvalues λ_k^0, $k > N$, of the unperturbed periodic problem are the eigenvalues of the perturbed spectral problem (5)–(7). It is also not difficult to show that the multiplicity of the eigenvalues λ_k^0, $k > N$ is also preserved. Moreover, from the condition of orthogonality of the trigonometric system it follows that in this case:

$$\int_0^1 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x) dx = 0, \quad j = \overline{0,1},\ k > N.$$

Thus, the eigenfunctions $u_{kj}^0(x)$ of the antiperiodic problem when $k > N$ satisfy the boundary value conditions (6)–(7) and, therefore, they are eigenfunctions of the perturbed problem (5)–(7). Hence, in this case the system of eigenfunctions of (5)–(7) and the system of eigenfunctions of the periodic problem (an orthonormal basis) differ from each other only in a finite number of the first members. Consequently, the system of eigenfunctions of (5)–(7) also forms the Riesz basis in $L^2(0,1)$. The set of functions $p(x)$, that can be represented as a finite series (14), is dense in $L^1(0,1)$. Thus, we have proved the following result.

Theorem 2. *Let* $A_{14} = A_{23}$*,* $A_{34} = 0$*; that is, the boundary conditions (6)–(7) belong to type I with integral perturbation. Then the set of functions* $p(x) \in L^1(0,1)$*, such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem (5)–(7) forms the Riesz basis in* $L^2(0,1)$*, is dense in* $L^1(0,1)$*.*

5. Instability of the basis property

Now we show that basis properties of eigenfunctions system of the perturbed problem (5)–(7) is unstable for an arbitrarily small integral perturbation of the boundary condition (6).

Theorem 3. *Suppose that* $A_{14} = A_{23}$*,* $A_{34} = 0$*; that is, the boundary conditions (6)–(7) belong to type I. Then the set of functions* $p(x) \in L^1(0,1)$*,* *such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem (5)–(7) does not form even a normal basis in $L^2(0,1)$, is dense in $L^1(0,1)$.*

Proof. Let in (14) the coefficients $b_k \neq 0$ for all sufficiently large k. Then from (15) we note that $\lambda = \lambda_k^0$ is a simple eigenvalue of problem (5)–(7). By direct calculation we get that $u_k^1 = b_k \cos((2k-1)\pi)x - a_k \sin((2k-1)\pi)x$ are eigenfunctions of (5)–(7), corresponding to $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2$. Moreover, the eigenfunction of the dual problem (12), corresponding to the eigenvalue λ_k^0, is $v_k^1(x) = c_k \cos((2k-1)\pi)x$.

Since the eigenfunctions of the dual problems form a biorthogonal system, then we have the equality of the scalar product $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Hence, it is easy to obtain $b_k \bar{c}_k = 2$. Therefore,

$$\|u_k^1\| \cdot \|v_k^1\| = \sqrt{1 + |\frac{a_k}{b_k}|^2}. \tag{17}$$

Denote by $\sigma_N(x)$ a partial sum of the Fourier series (14). It is obvious, that the set of functions, which can be represented as the infinite series

$$\tilde{p}(x) = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} [\tilde{a}_k \cos((2k-1)\pi x) + \tilde{b}_k \sin((2k-1)\pi x)],$$

where $\tilde{a}_k = 2^{-k}$, $\tilde{b}_k = 2^{-k}/k$, $k > N$, is dense in $L^1(0,1)$. However, from (17) it follows that for such kind of functions $\tilde{p}(x)$ for the corresponding eigenfunctions systems of the direct and conjugate problems there holds: $\lim_{k\to\infty} \|u_k^1\|\|v_k^1\| = \infty$.

That is, the condition of uniform minimal property (see [18] and references in it) of the system does not hold, and therefore, it does not form even a basis in $L^2(0,1)$. □

Since adjoint operators possess the Riesz basis property of the root functions, we obtain the corollary.

Corollary 2. *Suppose that $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$, that is boundary value conditions (6)–(7) belong to type I. Then the set P of functions $p(x) \in L^1(0,1)$, such that the system of eigenfunctions of (12) for the loaded differential equations forms the Riesz basis in $L^2(0,1)$, is everywhere dense in $L^1(0,1)$. The set $L^1(0,1)\backslash P$ is also everywhere dense in $L^1(0,1)$.*

The results of this paper, in contrast to [23], demonstrate instability of basis properties of the root functions of the problem with an integral perturbation of the boundary value conditions of type I, which are regular, but not strongly regular.

6. Acknowledgments

The authors express their gratitude to Prof. T.Sh. Kalmenov and Prof. M.A. Sadybekov, this paper has been prepared under their guidance.

References

1 Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – V. 9. – P. 373-395.

2 Tamarkin I.D. Sur qudques points de in theorie des equations di erentiales ordinares of surgeneralization de In serie de Fourier // Rend. Cire. Math. Palermo. – 1912. – V. 34, № 2. – P. 345-382.

3 Malamud M.M., Oridoroga L.L. Theorems of the completeness for the system of ordinary differential equations // Functional Analysis and Applications. – 2000. – V. 34, № 3. – P. 88-90.

4 Malamud M.M., Oridoroga L.L. On the completeness of root vectors of first order systems // Doklady Mathematics. – 2010. – V. 82, № 3. – P. 809-905.

5 Dunford N. A survoy of the theory of spectral operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 64. – P. 217-274.

6 Dunford N., Schwartz J. Linear Operators. Part III. Spectral Operators. – Wiley, New-York, 1971.

7 Mikhailov V.P. On Riesz basis in $L_2(0,1)$ // Doklady Mathematics. – 1962. – V. 144, № 5. – P. 981- 984. (in Russian).

8 Kesel'man G.M. About unconditional convergence of expansion by eigenfunctions of some differential operators // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. – 1964. – V. 2. – P. 82-93. (in Russian).

9 Naimark M.A. Linear Differential Operators. – Ungar, New York, 1967.

10 Makin A.S. On spectral expansions, responsible to non self-adjoint Sturm-Liouville operator // Doklady Mathematics. – 2006. – V. 406, № 1. – P. 21-24.

11 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. And Appl. – 1990. – V. 146, № 1. – P. 148-191.

12 Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of $1D$ Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana University. Math. Jornal. – 2012. – V. 61. – P. 359-398.

13 Djakov P., Mityagin B. Onvergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials // Math. Ann. – 2011. – V. 351. – P. 509-540.

14 Mityagin B. Spectral expansions ono-dimensional periodic Dirac operators // Dyn. Partial Differ. Equ. – 2004. – V. 1. – P. 125-191.

15 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. The use of anti-A priori estimates in the theory of bases in the space L_2 // Differential Equations. – 2008. – V. 44, № 5. – P. 685-691.

16 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. On the theory of antiprior estimates in the sense of VA Il'in // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 77, № 3. – P. 398-400.

17 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // AIP Conference Proceedings 1470. American Institute of Physics, Melville. – 2012. – P. 225–227.

18 Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3489-3550.

19 Veliev O.A., Shkalikov A.A. On the Riesz basis property of the Eigen and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems // Math. Notes. – 2009. – V. 85, № 6. – P. 647-660.

20 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 4, № 3. – P. 53-62.

21 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differential Equations. – 2012. – V. 48, № 6. – P. 896-900.

22 Makin A.S. About non-local perturbation of periodic problem on eigenvalues // Differential Equations. – 2006. – V. 42, № 4. – P. 560-562.

23 Shkalikov A.A. On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions // Vestnik MGU. Mathematics and Mechanics. – 1982. – V. 6. – P.12-21.

24 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // AIP Conference Proceedings, International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014). – 2014. – V. 1611. – P. 261-265.

25 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differential Equations. – 2015. – V. 51, № 8. – P. 984-990.

26 Mukhtarov O.Sh., Aydemir K. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville Problems with transmission conditions at one interior point // Acta Mathematica Scienta. – 2015. – V. 35B, № 3. – P. 639-649.

27 Aydemir K. Boundary value problems with eigenvalue depending boundary and transmission conditions // Boundary value problems. – 2014. – V. 1, № 131. – P. 1-11.

28 Aydemir K., Mukhtarov O.S. Spectrum and Green's function of a many-interval Sturm-Liouville problem // Z. Naturforsch. – 2015. – V. 70, № 5. – P. 301-308.

29 Kandemir M., Mukhtarov O.Sh. A method on solving irregular boundary value problems with transmission conditions // Kuwait Journal of Science and Engineering. – 2009. – V. 36, № 2A. – P. 79-98.

30 Mukhtarov O.Sh., Aydemir K. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point // Acta Mathematica Scientia. – 2015. – V. 35B, № 3. – P. 639-649.

31 Imanbaev N.S. Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm-Liouville operators with integral boundary condition // Electron. J. Diff. Equ. – 2016. – № 87. – P. 1-8.

32 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations. – 2013. – V. 110. – P. 1687- 1847.

Received 26.08.2016

Иманбаев Н.С. ИНТЕГРАЛДЫҚ ШЕТТІК ШАРТТАРЫ БАР ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ТҮБІРЛІК ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ БАЗИСТІК ҚАСИЕТІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Бұл жұмыста біз шеттік шарты интегралдық түрткіленетін Штурм-Лиувилль операторының меншікті функцияларының жүйесінің базистігі қасиетінің орнықтылығы мен орнықсыздығы мәселелерін қарастырамыз.

Иманбаев Н.С. УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этой работе мы рассматриваем вопросы устойчивости и неустойчивости свойства базисности системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением одного краевого условия.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 137–155.

УДК 517.51

THREE-WEIGHTED INTEGRAL INEQUALITIES ON THE CONE OF MONOTONE FUNCTIONS

A.A. Kalybay[1], R. Oinarov[2]
[1]KIMEP University
050010, Almaty, 4 Abai Ave., e-mail: [1]kalybay@kimep.kz
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University
010008, Astana, 5 Munaytpasov St., e-mail: [2]o_ryskul@mail.ru

Annotation: On the cone of monotone functions for a class of integral operators we establish the validity of estimates with three weights and three parameters.

Keywords: Integral operator, Hardy-type inequality, weights, monotone function.

1. Introduction

Let $1 < p, r < \infty$ and $0 < q < \infty$. Let $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ and $w(\cdot)$ be weights, i.e., positive functions locally integrable on $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$.

For all $f \geq 0$ we consider the following operators:

$$S^- f(x) = \left(\int_0^x \left(\int_t^x f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{1}{r}} \tag{1}$$

and

$$S^+ f(x) = \left(\int_x^\infty \left(\int_x^t f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2}$$

On the basis of these operators we form the following inequalities:

$$\left(\int_0^\infty u(x)(S^- f(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

Keywords: *Integral operator, Hardy-type inequality, weights, monotone function.*
2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 26D15, 47B38.
Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 5499/GF4).

and

$$\left(\int_0^\infty u(x)(S^+ f(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

If $L_{p,v}$ stands for the space of functions $f \geq 0$ with the finite norm

$$\|f\|_{L_{p,v}} = \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

inequalities (3) and (4) can be rewritten in the forms:

$$\|S^- f\|_{L_{q,u}} \leq C\|f\|_{L_{p,v}}$$

and

$$\|S^+ f\|_{L_{q,u}} \leq C\|f\|_{L_{p,v}}$$

that represent the usual way of writing of well-known Hardy-type inequalities for different integral operators. The most complete review of Hardy-type inequalities is given in [1] and [2].

Inequalities (3) and (4) have been already characterized in [3] and [4] for non-negative functions f. Here we consider the case when functions f are monotone. The interest to restrict the class of functions from non-negative to monotone has some justification and historical development. Let us present them.

The starting point of this problem is the introduction in [5] of Lorentz space $\Lambda^p(v)$, $0 < p < \infty$, that is the space of functions, for which

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} := \|f^*\|_{Lp,v} < \infty,$$

where f^* is the non-increasing rearrangement of $|f|$ defined by

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \ mes\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > y\} \leq t\}.$$

The main example that shows the importance of reduction of Hardy-type inequalities from non-negative to non-increasing functions is based on the Hardy-Littlewood maximal operator

$$(Mf)(x) := \sup_B \frac{1}{mesB} \int_B |f(y)| dy,$$

where supremum is taken with respect to all balls B centered at $x \in \mathbb{R}^n$. It is known that

$$(Mf)^*(t) \approx \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds.$$

Due to this two-sided estimate, one can see that the embedding between Lorentz spaces from Λ^p to Λ^q is characterized by the standard Hardy-type inequality but for monotone functions.

The next essential result in this direction is known as “the Sawyer duality principle” proved in [6]. This principle presents some inequality, the correctness of which for non-negative functions is equivalent to correctness of the standard Hardy-inequality for monotone functions. This result gives a great impulse to study and obtain analogues of “the Sawyer duality principle” for different generalizations of Hardy-type inequalities. In recent paper [7] there is a new method of reduction from monotone functions to non-negative functions. This method covers inequalities (3) and (4). Since this new reduction theorem is a key point in the proofs of our main results, we present its complete statement in the next Section. In addition, let us state there some other auxiliary results that are required for our proofs.

2. Notations and auxiliary statements

Hereinafter, the expression $A \ll B$ means $A \le CB$ with some constant C that depends only on the parameters r, p and q. The notation $A \approx B$ means $A \ll B \ll A$. Moreover, $1/p + 1/p' = 1$.

First we present two reduction theorems proved in [7]. For this aim we need the conditions:

(i) $T(\lambda f) = \lambda T f$ for all $\lambda \ge 0$ and $f \ge 0$;

(ii) $Tf(x) \le cTg(x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}_+$ if $f(x) \le g(x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}_+$ with a constant $c > 0$ that does not depend on f and g;

(iii) $T(f + \lambda \mathbf{1}) \le c(Tf + \lambda T\mathbf{1})$ for all $\lambda \ge 0$ and $f \ge 0$ with a constant $c > 0$ that does not depend on λ and f, where $\mathbf{1}$ is a function identically equal to 1 on $\mathbb{R}_+$.

Theorem 1. *Let $0 < q \le \infty$, $1 < p < \infty$ and T is a positive operator. Then from the condition*

$$\left(\int_0^\infty u(x)(Tf(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty v(x) f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

for non-increasing f it follows the inequality

$$\left(\int_0^\infty u\left(T\left(\int_x^\infty h\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}V^p h^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

for non-negative h, where $V(t) := \int_0^t v$. If $V(\infty) = \infty$ and T is a monotone operator satisfying the conditions (i) and (ii), then (6) *is sufficient for the validity of* (5) *on the cone of non-increasing functions. If $V(\infty) < \infty$, then for the validity of* (5) *on the cone of non-increasing functions condition* (6) *and*

$$\left(\int_0^\infty u(T\mathbf{1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

are sufficient if the operator T satisfies the conditions (i)–(iii).

Theorem 2. *Let $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ and T is a positive operator. Then from condition* (5) *for non-decreasing f it follows the inequality*

$$\left(\int_0^\infty u\left(T\left(\int_0^h h\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}V_*^p h^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

for non-negative h, where $V_*(t) := \int_t^\infty v$. If $V(\infty) = \infty$ and T is a monotone operator satisfying the conditions (i) and (ii), then (25) *is sufficient for the validity of* (5) *on the cone of non-decreasing functions. If $V(\infty) < \infty$, then for the validity of* (5) *on the cone of non-decreasing functions conditions* (25) *and* (7) *are sufficient if the operator T satisfies the conditions (i)–(iii).*

To prove our main results we also need the following well-known theorems for standard Hardy-type inequalities (see e.g. [2, page 3 and 4]).

Theorem 3. *The inequality*

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x f(t)dt\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty \nu(x)f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

holds for all functions $f \geq 0$ if and only if

$$H^- := \sup_{0<x<\infty}\left(\int_x^\infty \rho(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x \nu^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

for the case $1 < p \le q < \infty$, *and*

$$\widetilde{H}^- := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \rho(t)dt \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_0^x \nu^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \nu^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

for the case $0 < q < p < \infty$ *and* $1 < p < \infty$.

Moreover, $H^- \approx C$ *and* $\widetilde{H}^- \approx C$, *respectively, where* C *is the best constant in* (9).

Theorem 4. *The inequality*

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \left(\int_x^\infty f(t)dt \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty \nu(x) f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (10)$$

holds for all functions $f \ge 0$ *if and only if*

$$H^+ := \sup_{0<x<\infty} \left(\int_0^x \rho(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty \nu^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

for the case $1 < p \le q < \infty$, *and*

$$\widetilde{H}^+ := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \rho(t)dt \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_x^\infty \nu^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \nu^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

for the case $0 < q < p < \infty$ *and* $1 < p < \infty$.

Moreover, $H^+ \approx C$ *and* $\widetilde{H}^+ \approx C$, *respectively, where* C *is the best constant in* (10).

In addition, we need characterizations of the following inequalities proved in [8]:

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x \left(\int_t^x K(s,t)f(s)ds \right)^r w(t)dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty \nu(x) f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (11)$$

and

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty \left(\int_x^t K(t,s)f(s)ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty \nu(x)f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{12}$$

where the kernel $K(\cdot,\cdot)\ge 0$ satisfies the condition: there exists a constant $d>0$ such that

$$d^{-1}(K(s,z)+K(z,t))\le K(s,t)\le d(K(s,z)+K(z,t)) \tag{13}$$

for $-\infty < t \le z \le s < +\infty$. Condition (13) was introduced in [9] and independently in [10]. It is obvious that inequalities (11) and (12) are respectively equivalent to our main inequalities (3) and (4) when $K(\cdot,\cdot)\equiv 1$.

Let us list four theorems that characterize inequalities (11) and (12) for non-negative functions. To present their statements we assume that

$$A_0^-(\alpha,\beta) := \sup_{\alpha<x<\beta}\left(\int_\alpha^x K^r(x,s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_x^\beta \nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1^-(\alpha,\beta) := \sup_{\alpha<x<\beta}\left(\int_\alpha^x w(s)ds\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_x^\beta K^{p'}(s,x)\nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_0^+(\alpha,\beta) := \sup_{\alpha<x<\beta}\left(\int_x^\beta K^r(s,x)w(s)ds\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\alpha^x \nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1^+(\alpha,\beta) := \sup_{\alpha<x<\beta}\left(\int_x^\beta w(s)ds\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\alpha^x K^{p'}(x,s)\nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_0^-(\alpha,\beta) := \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x K^r(x,s)w(s)ds\right)^{\frac{p}{p-r}}\left(\int_x^\beta \nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}}\nu^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$B_1^-(\alpha,\beta) := \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x w(s)ds\right)^{\frac{r}{p-r}}\left(\int_x^\beta K^{p'}(s,x)\nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}} w(x)dx\right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$B_0^+(\alpha,\beta) := \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_x^\beta K^r(s,x)w(s)ds\right)^{\frac{p}{p-r}} \left(\int_\alpha^x \nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}} \nu^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$B_1^+(\alpha,\beta) := \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_x^\beta w(s)ds\right)^{\frac{r}{p-r}} \left(\int_\alpha^x K^{p'}(x,s)\nu^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}} w(x)dx\right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$U(\alpha,\beta) := \left(\int_\alpha^\beta u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^- := \max\{A_0^-, A_1^-\} \ \text{ and } \ A^+ := \max\{A_0^+, A_1^+\},$$

$$B^- := \max\{B_0^-, B_1^-\} \ \text{ and } \ B^+ := \max\{B_0^+, B_1^+\}.$$

Theorem 5. *Inequality* (11) *holds for all functions* $f \geq 0$ *if and only if*

$$E_A^- := \sup_{0<z<\infty} A^-(0,z)U(z,\infty) < \infty$$

for the case $1 < p \leq \min\{r,q\} < \infty$, *and*

$$E_B^- := \sup_{0<z<\infty} B^-(0,z)U(z,\infty) < \infty$$

for the case $1 < r < p \leq q < \infty$.

Moreover, $E_A^- \approx C$ *and* $E_B^- \approx C$*, respectively, where* C *is the best constant in* (11).

Theorem 6. *Inequality* (11) *holds for all functions* $f \geq 0$ *if*

$$F_A^- := \left(\int\limits_0^\infty u(x) \left(\int\limits_x^\infty u(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(A^-(0,x)\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

for the case $0 < q < p \leq r < \infty$ *and* $1 < p < \infty$, *and*

$$F_B^- := \left(\int\limits_0^\infty u(x) \left(\int\limits_x^\infty u(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(B^-(0,x)\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p,\ r < \infty$.

Moreover, $C \ll F_A^-$ and $C \ll F_B^-$*, respectively, where* C *is the best constant in* (11).

Theorem 7. *Inequality* (12) *holds for all functions* $f \geq 0$ *if and only if*

$$E_A^+ := \sup_{0<z<\infty} A^+(z,\infty)U(0,z) < \infty$$

for the case $1 < p \leq \min\{r, q\} < \infty$*, and*

$$E_B^+ := \sup_{0<z<\infty} B^+(z,\infty)U(0,z) < \infty$$

for the case $1 < r < p \leq q < \infty$.

Moreover, $E_A^+ \approx C$ *and* $E_B^+ \approx C$*, respectively, where* C *is the best constant in* (12).

Theorem 8. *Inequality* (12) *holds if*

$$F_A^+ := \left(\int\limits_0^\infty u(x)\left(\int\limits_0^x u(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(A^+(x,\infty)\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

for the case $0 < q < p \leq r < \infty$ and $1 < p < \infty$*, and*

$$F_B^+ := \left(\int\limits_0^\infty u(x)\left(\int\limits_0^x u(s)ds\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(B^+(x,\infty)\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p,\ r < \infty$.

Moreover, $C \ll F_A^+$ and $C \ll F_B^+$*, respectively, where* C *is the best constant in* (12).

3. Main results

Let us remind that

$$V(t) := \int_0^t v \quad \text{and} \quad V_*(t) := \int_t^\infty v.$$

Theorem 9. *Suppose that*

$$\rho(x) = u(x)\left(\int_0^x (x-t)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}, \tag{14}$$

$$\nu(x) = v^{1-p}(x)V^p(x) \tag{15}$$

and

$$K(s,t) = s - t. \tag{16}$$

Inequality (3) *holds for all non-increasing functions f if and only if*

$$H^+ < \infty \quad \text{and} \quad E_A^- < \infty$$

for the case $1 < p \le \min\{r,q\} < \infty$ and

$$H^+ < \infty \quad \text{and} \quad E_B^- < \infty$$

for the case $1 < r < p \le q < \infty$ when $V(\infty) = \infty$. The condition

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_0^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{17}$$

is added for each cases, respectively, when $V(\infty) < \infty$.

Theorem 10. *Suppose that ρ, ν and K are as in* (14), (15) *and* (16), *respectively. Inequality* (3) *holds for all non-increasing functions f if*

$$\widetilde{H}^+ < \infty \quad \text{and} \quad F_A^- < \infty$$

for the case $0 < q < p \le r < \infty$ and $1 < p < \infty$, and

$$\widetilde{H}^+ < \infty \quad \text{and} \quad F_B^- < \infty$$

for the case $0 < \max\{r,q\} < p < \infty$ and $1 < p,\ r < \infty$ when $V(\infty) = \infty$. Condition (17) *is added for each cases, respectively, when $V(\infty) < \infty$.*

Theorem 11. *Suppose that*

$$\rho(x) = u(x)\left(\int_x^\infty (t-x)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}, \tag{18}$$

$$\nu(x) = v^{1-p}(x)V_*^p(x) \tag{19}$$

and K is as in (16). *Inequality* (4) *holds for all non-decreasing functions f if and only if*

$$H^- < \infty \quad \text{and} \quad E_A^+ < \infty$$

for the case $1 < p \le \min\{r, q\} < \infty$, and

$$H^- < \infty \quad \text{and} \quad E_B^+ < \infty$$

for the case $1 < r < p \le q < \infty$ when $V_*(\infty) = \infty$. Condition (17) *is added for each cases, respectively, when $V_*(\infty) < \infty$.*

Theorem 12. *Suppose that ρ, ν and K are as in* (18), (19) *and* (16), *respectively. Inequality* (4) *holds for all non-decreasing functions f if*

$$\widetilde{H}^- < \infty \quad \text{and} \quad F_A^+ < \infty$$

for the case $0 < q < p \le r < \infty$ and $1 < p < \infty$, and

$$\widetilde{H}^- < \infty \quad \text{and} \quad F_B^+ < \infty$$

for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p$, $r < \infty$ when $V_*(\infty) = \infty$. Condition (17) *is added for each cases, respectively, when $V_*(\infty) < \infty$.*

Proof of Theorems 9 and 10. Since operator (1) satisfies the conditions (i)–(iii), by Theorem 1 we have that inequality (3) for non-increasing f is equivalent to the inequality

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x \left(\int_t^x \int_s^\infty h(\tau)d\tau ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)V^p(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{20}$$

for non-negative h when $V(\infty)=\infty$. We also need the validity of condition (17) when $V(\infty)<\infty$.

By interval splitting and changing order of integration we transform the left-hand side of inequality (20):

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^x\int_s^\infty h(\tau)d\tau ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^x\int_s^x h(\tau)d\tau ds+\int_t^x\int_x^\infty h(\tau)d\tau ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^x h(\tau)\int_t^\tau dsd\tau+\int_x^\infty h(\tau)d\tau\int_t^x ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\approx$$

$$\approx\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^x(\tau-t)h(\tau)d\tau\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty h(\tau)d\tau\right)^q\left(\int_0^x(x-t)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

From the last expression it follows that the validity of inequality (3) is equivalent to the validity of the following two inequalities:

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x\left(\int_t^x(\tau-t)h(\tau)d\tau\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)V^p(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

and

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_0^x(x-t)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_x^\infty h(\tau)d\tau\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)V^p(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{22}$$

Taking into account assumptions (15) and (16) it is obvious that inequality (21) is equivalent to inequality (11). Thus, by Theorem 5 inequality (21) holds if and only if $E_A^- < \infty$ for the case $1 < p \le \min\{r, q\} < \infty$, and $E_B^- < \infty$ for the case $1 < r < p \le q < \infty$. Similarly, on the basis of Theorem 6 inequality (21) is correct if $F_A^- < \infty$ for the case $0 < q < p \le r < \infty$ and $1 < p < \infty$, and if $F_B^- < \infty$ for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p,\ r < \infty$.

Inequality (22) is a standard Hardy-type inequality. Hence, by Theorem 4, in view of (14) and (15), inequality (22) is valid if and only if $H^+ < \infty$ for $1 < p \le q < \infty$ and $\widetilde{H}^+ < \infty$ for $0 < q < p < \infty$ and $1 < p < \infty$.

The proof of Theorems 9 and 10 is complete. □

Proof of Theorems 11 and 12. Since operator (2) satisfies the conditions (i)–(iii), we use Theorem 2. Then, in the same way as above, when $V_*(\infty) = \infty$ the validity of inequality (4) for non-decreasing f is equivalent to the validity of two inequalities

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty \left(\int_x^t (t-\tau)h(\tau)d\tau\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)V_*^p(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{23}$$

and

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty (t-x)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_0^x h(\tau)d\tau\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)V_*^p(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{24}$$

for non-negative h.

In view of assumptions (19) and (16), inequality (23) is equivalent to inequality (12). Thus, we can characterize inequality (23) by Theorems 7 and 8. Inequality (24) is a standard Hardy-type inequality presented in Theorem 3 with weights as in (18) and (19).

When $V_*(\infty) < \infty$ condition (17) is added for each cases. The proof of Theorems 11 and 12 is complete. □

4. Alternative theorems

In [7] there are two useful alternative reduction theorems.

Theorem 13. *Let* $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ *and* T *is a positive operator satisfying the conditions (i) and (ii). Then for the validity of inequality* (5) *for non-increasing* f *the condition*

$$\left(\int_0^\infty u\left(T\left(\frac{1}{V^2(x)}\int_0^x Vh\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}h^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{25}$$

for non-negative h *is sufficient and when* $V(\infty) = \infty$ *is necessary. When* $V(\infty) < \infty$ *for the validity of inequality* (5) *conditions* (25) *with* T *satisfying (i)–(iii) and* (7) *are necessary.*

Theorem 14. *Let* $0 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ *and* T *is a positive operator satisfying the conditions (i) and (ii). Then for the validity of inequality* (5) *for non-decreasing* f *the condition*

$$\left(\int_0^\infty u\left(T\left(\frac{1}{V_*^2(x)}\int_x^\infty V_*h\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v^{1-p}h^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{26}$$

for non-negative h *is sufficient and when* $V_*(\infty) = \infty$ *is necessary. When* $V_*(\infty) < \infty$ *for the validity of inequality* (5) *conditions* (26) *with* T *satisfying (i)–(iii) and* (7) *are necessary.*

On the basis of these two theorems we can state four alternative theorems for the validity of the main inequalities (3) and (4) on the cone of monotone functions.

Theorem 15. *Suppose that*

$$\rho(x) = u(x)\left(\int_x^\infty \left(\int_x^t \frac{1}{V^2(s)}ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}, \tag{27}$$

$$\nu(x) = \frac{v^{1-p}(x)}{V^p(x)} \tag{28}$$

and

$$K(s,t) = \int_t^s \frac{1}{V^2(\tau)}d\tau. \tag{29}$$

Inequality (4) *holds for all non-increasing functions f if and only if*

$$H^- < \infty \quad \text{and} \quad E_A^+ < \infty$$

for the case $1 < p \leq \min\{r, q\} < \infty$ *and*

$$H^- < \infty \quad \text{and} \quad E_B^+ < \infty$$

for the case $1 < r < p \leq q < \infty$ *when* $V(\infty) = \infty$. *Condition* (17) *is added for each cases, respectively, when* $V(\infty) < \infty$.

Theorem 16. *Suppose that* ρ, ν *and* K *are as in* (27), (28) *and* (29), *respectively. Inequality* (4) *holds for all non-increasing functions f if*

$$\widetilde{H}^- < \infty \quad \text{and} \quad F_A^+ < \infty$$

for the case $0 < q < p \leq r < \infty$ *and* $1 < p < \infty$, *and*

$$\widetilde{H}^- < \infty \quad \text{and} \quad F_B^+ < \infty$$

for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ *and* $1 < p,\ r < \infty$ *when* $V(\infty) = \infty$. *Condition* (17) *is added for each cases, respectively, when* $V(\infty) < \infty$.

Theorem 17. *Suppose that*

$$\rho(x) = u(x) \left(\int_0^x \left(\int_t^x \frac{1}{V_*^2(s)} ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}}, \tag{30}$$

$$\nu(x) = \frac{v^{1-p}(x)}{V_*^p(x)} \tag{31}$$

and

$$K(s, t) = \int_t^s \frac{1}{V_*^2(\tau)} d\tau. \tag{32}$$

Inequality (3) *holds for all non-decreasing functions f if and only if*

$$H^+ < \infty \quad \text{and} \quad E_A^- < \infty$$

for the case $1 < p \leq \min\{r, q\} < \infty$, *and*

$$H^+ < \infty \quad \text{and} \quad E_B^- < \infty$$

for the case $1 < r < p \leq q < \infty$ *when* $V_*(\infty) = \infty$. *Condition* (17) *is added for each cases, respectively, when* $V_*(\infty) < \infty$.

Theorem 18. *Suppose that ρ, ν and K are as in* (30), (31) *and* (32), *respectively. Inequality* (3) *holds for all non-decreasing functions f if*

$$\widetilde{H}^{+} < \infty \quad \text{and} \quad F_A^{-} < \infty$$

for the case $0 < q < p \le r < \infty$ and $1 < p < \infty$, and

$$\widetilde{H}^{+} < \infty \quad \text{and} \quad F_B^{-} < \infty$$

for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p$, $r < \infty$ when $V_*(\infty) = \infty$. Condition (17) *is added for each cases, respectively, when $V_*(\infty) < \infty$.*

Proof of Theorems 15 and 16. Since operator (2) satisfies the conditions (i)–(iii), by Theorem 13 we have that inequality (4) for non-increasing f is equivalent to the inequality

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty\left(\int_x^t \frac{1}{V^2(s)}\int_0^s V(\tau)h(\tau)d\tau ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{33}$$

for non-negative h when $V(\infty) = \infty$.

Arguing similarly as above we get that the correctness of inequality (33) is equivalent to the correctness of the following two inequalities:

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty\left(\int_x^t\left(\int_\tau^t \frac{1}{V_2(s)}ds\right)V(\tau)h(\tau)d\tau\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty v^{1-p}(x)h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{34}$$

and

$$\left(\int_0^\infty u(x)\left(\int_x^\infty\left(\int_x^t \frac{1}{V^2(s)}ds\right)^r w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_0^x V(\tau)h(\tau)d\tau\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty v^{1-p}(x) h^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (35)$$

Assume that $f(\tau) = V(\tau)h(\tau)$. Then, in view of (28) and (29), inequality (34) is equivalent to inequality (12). Thus, by Theorem 7 inequality (34) holds if and only if $E_A^+ < \infty$ for the case $1 < p \leq \min\{r, q\} < \infty$, and $E_B^+ < \infty$ for the case $1 < r < p \leq q < \infty$. Similarly, on the basis of Theorem 8 inequality (34) is correct if $F_A^+ < \infty$ for the case $0 < q < p \leq r < \infty$ and $1 < p < \infty$, and if $F_B^+ < \infty$ for the case $0 < \max\{r, q\} < p < \infty$ and $1 < p,\ r < \infty$.

Inequality (35) is a standard Hardy-type inequality. Hence, by Theorem 3, in view of (27) and (28), inequality (35) is valid if and only if $H^- < \infty$ for $1 < p \leq q < \infty$ and $\widetilde{H}^- < \infty$ for $0 < q < p < \infty$ and $1 < p < \infty$.

When $V(\infty) < \infty$ condition (17) is added for each cases. The proof of Theorems 15 and 16 is complete. $\square$

Proof of Theorems 17 and 18. The proof of Theorems 17 and 18 is similar to the proof of Theorems 15 and 16. $\square$

5. Additions

1. Let us notice that when $r = 1$ inequalities (3) and (4) are standard Hardy-type inequalities, which have been already studied for monotone functions by "the Sawyer duality principle"(see e.g. [2, Chapter 6]). In [7] the authors also give complete characterizations for standard Hardy-type inequalities on the cone of monotone functions. However, in contrast to the previous results, the characterizations in [7] are found by using their own reduction Theorems 1 and 2 (see [7, Corollary 3.1]).

2. In [11] and [12] the authors investigate the problem of boundedness of the multi-dimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a Morrey-type space. The main step in the proof of this problem is based on the correctness of inequalities of the following type:

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (36)$$

and

$$\left(\int_0^\infty u(x) \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t f(s) ds \right)^r w(t) dt \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(x) f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (37)$$

Due to usefulness of inequalities of the type (36) and (37) for the theory of Morrey spaces, they have been investigated in a series of papers [13], [14], [15] and [16]. As a continuation of problems from [13], [14], [15] and [16], in works [17] and [18] there are characterizations of inequalities (36) and (37) for monotone functions.

It is easy to see a close connection between inequalities (36) and (3): if we divide the inside integral of the left-hand side of (36) into sum of two integrals

$$\int_t^\infty f(s)ds = \int_t^x f(s)ds + \int_x^\infty f(s)ds,$$

we get that inequality (36) holds if and only if inequality (3) and the following standard Hardy-type inequality

$$\left(\int\limits_0^\infty u(x)\left(\int\limits_0^x w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int\limits_x^\infty f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int\limits_0^\infty v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

simultaneously hold. By the similar splitting, we can see the connection between (37) and (4).

Since conditions for the validity of standard Hardy-type inequalities for monotone functions are known, using the above splitting we can also give characterizations of inequalities (36) and (37) on the cone of monotone functions. Let us present at least one statement for inequality (36).

Theorem 19. *Suppose that ρ, ν and K are as in* (14), (15) *and* (16), *respectively. Let*

$$H_0^+ := \sup_{0<x<\infty}\left(\int_0^x v(s)ds\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x (x-s)^q u(s)\left(\int_0^s w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$H_1^+ := \sup_{0<x<\infty}\left(\int_x^\infty (s-x)^{p'}v(s)V^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^x u(s)\left(\int_0^s w(t)dt\right)^{\frac{q}{r}} ds\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Then inequality (36) *holds for all non-increasing functions f if and only if*

$$\max\{H^+, E_A^-, H_0^+, H_1^+\} < \infty$$

for the case $1 < p \leq \min\{r, q\} < \infty$ *and*

$$\max\{H^+, E_B^-, H_0^+, H_1^+\} < \infty$$

for the case $1 < r < p \leq q < \infty$ *when* $V(\infty) = \infty$.

References

1 Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy inequality. About its history and some related results. – Pilsen: Vydavatelský servis, 2007.

2 Kufner A., Persson L.-E. Weighted Inequalities of Hardy Type. – New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2003.

3 Oinarov R., Kalybay A. Three-parameter weighted Hardy type inequalities // Banach J. Math. Anal. – 2008. – V. 2, № 2. – P. 85-93.

4 Oinarov R., Kalybay A. Weighted inequalities for a class of semiadditive operators // Ann. Funct. Anal. – 2015. – V. 6, № 4. – P. 155-171.

5 Lorentz G.G. On the theory of spaces Λ // Pacific J. Math. – 1951. – V. 1, № 3. – P. 411-429.

6 Sawyer E. Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. – 1990. – V. 96, № 2. – P. 145-158.

7 Gogatishvili A., Stepanov V. Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions // Russian Math. Surveys. – 2013. – V. 4, iss. 4. – P. 597-664.

8 Oinarov R., Kalybay A. Weighted estimates of a class of integral operators with three parameters // J. Funct. Spaces. Appl. – 2016. – http://dx.doi.org/10.1155/1045459.

9 Oinarov R. Weighted inequalities for one class of integral operators // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1991. – V. 319, № 5. – P. 1076-1078.

10 Bloom S., Kerman R. Weighted norm inequalities for operators of Hardy type // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 113, № 1. – P. 135-141.

11 Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // Math. Inequal. Appl. – 2013. – V. 16, № 1. – P. 1-19.

12 Kalybay A. On boundedness of the conjugate multidimensional Hardy operator from a Lebesgue space to a local Morrey-type space // Int. J. Math. Anal. – 2014. – V. 8, № 11. – P. 539-553.

13 Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.E. Some new iterated Hardy-type inequalities // J. Funct. Spaces Appl. – 2012. – Article ID 734194.

14 Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.E. Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ // J. Inequal. Appl. – 2013. – V. 515.

15 Prokhorov D., Stepanov V. Weighted estimates for a class of sublinear operators // Doklady Math. – 2013. – V. 88, № 3. – P. 721-723.

16 Prokhorov D., Stepanov V. On weighted Hardy inequalities in mixed norms // Proc. Steklov Inst. Math. – 2013. – V. 283. – P. 149-164.

17 Gogatishvili A., Mustafayev R. Weighted iterated Hardy-type inequalities // arXiv preprint. – 2015. – arXiv: 1503.04079.

18 Shambilova G.E. The weighted inequalities for a certain class of quasilinear integral operators on the cone of monotone functions // Siberian Math. J. – 2014. – V. 55, № 4. – P. 745-767.

Received 22.07.2016

Қалыбай А.А., Ойнаров Р. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАР КОНУСЫНДАҒЫ ҮШ САЛМАҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Монотонды функциялар конусында интегралдық оператор кластар үшін үш салмақты және үш параметрлі теңсіздіктердің орындалуын тағайындаймыз.

Калыбай А.А., Ойнаров Р. ТРЕХ-ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

На конусе монотонных функций для класса интегральных операторов мы устанавливаем выполнение оценок с тремя весами и тремя параметрами.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 156–165.

УДК 519.22

CONVERGENCE OF SOME QUADRATIC FORMS USED IN REGRESSION ANALYSIS

K.T. Mynbaev[1,2], G.S. Darkenbayeva[2,3,4]

[1]Kazakh-British Technical University
050000, Tole bi str., 59, : [1]kairat_mynbayev@yahoo.come-mail

[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: [2]g.spandiyar@gmail.com

[3]Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, 71 al-Farabi ave.

[4]International IT University
050000, Almaty, 34A Manas street

Annotation: We consider convergence in distribution of two quadratic forms arising in unit root tests for a regression with a slowly varying regressor. The error term is a unit root process with linear processes as disturbances. The linear processes are non-causal short-memory with independent identically distributed innovations. Our results generalize some statements from [1] and [2].

Keywords: Quadratic forms, convergence in distribution of quadratic forms, unit root, slowly varying regressor.

1. Introduction

Testing for unit roots is an important area of time series analysis. Initially, the errors in the model $u_t = u_{t-1} + v_t$ were assumed independent identically disrtibuted (i.i.d.) (see [3], [4]). In the subsequent research, the assumption of independence was relaxed. [1], for example, considered a linear process

$$v_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_{t-i},$$

Keywords: *Quadratic forms, convergence in distribution of quadratic forms, unit root, slowly varying regressor.*

2010 Mathematics Subject Classification: 62J05, 62J12

where the innovations e_i are i.i.d. and the constants c_i satisfy the condition $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i\,|c_i| < \infty$. Such a process is called causal (it includes only the current and past innovations). Later on, central limit theorems have been extended to include non-causal linear processes

$$v_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i e_{t-i},$$

where $\mathbb{Z}$ is the set of all integers. We apply results for non-causal prosesses from [5] and [6] to characterize the asymptotic distribution of two quadratic forms that arise in statistical applications. Our results generalize to the non-causal linear processes some statements from [1] and [2].

2. Main definitions and assumptions

Definition 1. *A family $\{X_\tau : \tau \in T\}$ of random variables is called uniformly integrable if*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\tau\in T} E\,|X_\tau|\,1_{|X_\tau|\geq m} = 0.$$

Definition 2. *Consider $\{e_t, F_t : t \in \mathbb{Z}\}$, where e_t are random variables and F_t are nested sub-σ-fields of Ω, $F_{t-1} \subseteq F_t$ for all t. Such a family is called a martingale difference (m.d.) array if*
1. e_t are F_t-measurable,
2. e_t are integrable and
3. $E\,(e_t|F_{t-1}) = 0$ for all t.

Definition 3. *For a given $F \in L_p((0,1)^2)$ we can define a discretization operator $\delta_{np} : L_p((0,1)^2) \to \mathbb{R}$ by*

$$(\delta_{np}F)_{st} = n^{2/q} \int_{q_{st}} F(x)dx, 1 \leq s,t \leq n,$$

where q is the conjugate of p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, and $q_{st} = \left[\frac{s-1}{n}, \frac{s}{n}\right) \times \left[\frac{t-1}{n}, \frac{t}{n}\right)$.

Definition 4. *Let $1 \leq p \leq \infty$ and the sequence of vectors $\{f_n\}$ be such that $f_n \in \mathbb{R}^n$ for all $n \in \mathbb{N}$, here $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers. $\{f_n\}$ is called L_p-approximable if there exists a function $F \in L_p$ such that*

$$\|f_n - \delta_{np}F\|_p \to 0, n \to \infty.$$

If such is the case, the sequence $\{f_n\}$ is said to be L_p-close to F. To make this definition work in the case $p = \infty$, it is nessesary to assume additionally that F is continuous on $[0, 1]$.

Assumption 1. *Let $\{e_t, F_t : t \in \mathbb{Z}\}$ be a double-infinite m.d. array. Fixing a summable sequence of numbers $\{c_j : j \in \boldsymbol{Z}\}$, denote*

$$v_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_{t-j}, t \in \mathbb{Z}.$$

The array $\{v_t : t \in \mathbb{Z}\}$ is called a linear process.

Denote $\alpha_c = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|$ and $\beta_c = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j$.

Assumption 2. *$\{e_t^2\}$ are uniformly integrable and $E\left(e_t^2|F_{t-1}\right) = \sigma^2$ for all t.*

Assumption 3. *The sequence $\{c_j : j \in \mathbb{Z}\}$ is summable, $\alpha_c < \infty$.*

Assumption 4. *The process $\{u_t\}$ possesses a unit root under the null hypothesis $\rho = 1$ in*

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t,$$

where v_t is the same linear process as in Assumption 1.

3. Analytical results

Consider the linear processes v_n satisfying Assumptions 1, 2 and u_n satisfying Assumption 4. Denote

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}v_t = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}\left(\sum_{l=1}^{t-1} v_l\right) v_t \tag{1}$$

and

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{t} v_l\right)^2. \tag{2}$$

With

$$e_t' = (\underbrace{1, ..., 1}_{t}, \quad \underbrace{0, ..., 0}_{n-t}), \quad d_t' = (\underbrace{0, ..., 0}_{t-1}, 1, \underbrace{0, ..., 0}_{n-t}), \quad v' = (v_1, ..., v_n)$$

we can write

$$\sum_{l=1}^{s} v_l = e_s' v, \quad v_s = d_s' v \quad \text{for} \quad s = 1, ..., n. \tag{3}$$

So for (1) by (3) we obtain

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}' v d_t' v = v' \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} e_{t-1} d_t' v = v' a_n v,$$

where a_n is an upper triangular matrix of size $n \times n$:

$$a_n = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

One can show that a_n is L_2-close to

$$F(s,t) = \begin{cases} 1, s < t \\ 0, s \geq t \end{cases},$$

but the degree of approximation and the integral operator with F as a kernel are not good enough to apply Theorem 3.9.1 from [6] for convergence in distribution of R_n. This is because a_n is not a symmetric matrix. We note that $R_n = (v' a_n v)' = v' a_n' v$, so we can write

$$R_n = \frac{1}{2} v' \left(a_n + a_n'\right) v = \frac{1}{2} v' \left(a_n + a_n' + \frac{I}{n}\right) v - \frac{1}{2n} v' v,$$

here I is the identity matrix of size $n \times n$. Denoting $k_n = a_n + a_n' + \frac{I}{n}$ we have

$$R_n = \frac{1}{2} v' k_n v - \frac{1}{2n} v' v. \tag{4}$$

Let $K(s,t) \equiv 1$ on $(0,1)^2$. Then

$$k_{n_{ij}} - (\delta_{n2} K)_{ij} = \frac{1}{n} - n \int\limits_{q_{ij}} dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \quad \text{for all } 1 \le i, j \le n,$$

here δ_{n2} is a discretization operator. Thus, $\|k_n - \delta_{n2} K\|_2 = 0$. The integral operator $\mathcal{K}$ associated with K

$$(\mathcal{K} f)(x) = \int\limits_0^1 f(t)\, dt$$

has only one non-zero eigenvalue $\lambda = 1$; the corresponding eigenspace consists of constants and is one-dimensional, all other eigenvalues are zero. By Theorem 3.9.1 from [6] we can assert that
1. If $\beta_c \ne 0$, then

$$v' k_n v \xrightarrow[n \to \infty]{d} (\sigma \beta_c)^2 u^2, \tag{5}$$

where u is standard normal, or
2. If $\beta_c = 0$, then

$$v' k_n v \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0. \tag{6}$$

To deal with the second term in (4), we apply a CLT from [5]. Suppose a function H has r-th derivative and let

$$H_\lambda^{(r)}(x) = \sup_{|y| \le \lambda} \left| H^{(r)}(x+y) \right|, \lambda > 0.$$

Definition 5. *The triplet $\{H, \{c_j\}, \{e_j\}\}$ is said to satisfy condition $C(r,\lambda)$ if there exists a number $\lambda \in (0,\infty)$ such that*
1. $H^{(r)}(x)$ exists and is continuous for all $x \in R$,
2. For all $x \in R$

$$\sup_{I \subset \mathbb{Z}} E \left[H_\lambda^{(r)} \left(x + \sum_{i \in I} c_i e_i \right) \right]^4 < \infty, \tag{7}$$

where supremum is taken over all subsets $I \subset \mathbb{Z}$.

Let e_i be independent identically distributed (i.i.d.) with $Ee_i = 0$, $Ee_i^4 < \infty$. Put $H(x) = x^2$. Then (7) is trivially satisfied with $r = 2$. By Theorem 1 of [5]

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left(v_t^2 - Ev_t^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \sigma_1^2\right), \tag{8}$$

where

$$\sigma_1^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Var\left[\sum_{t=1}^{n} v_t^2\right] = \sigma^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^4.$$

From (8) we have

$$\frac{1}{n} v'v = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} v_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(v_t^2 - Ev_t^2\right) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Ev_t^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left(v_t^2 - Ev_t^2\right)\right] + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Ev_t^2 = o_P(1) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Ev_t^2. \tag{9}$$

Since

$$Ev_t^2 = E \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} c_i c_j e_{t-i} e_{t-j} = \sigma^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^2,$$

(9) implies

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v'v \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^2. \tag{10}$$

From (4), (5), (6) and (10) we obtain the following statement.

Lemma 1. *Let* $v_t = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j e_{t-j}$, *here* e_i *being i.i.d. with* $Ee_i = 0$, $Ee_i^4 < \infty, \sigma^2 = Ee_i^2$ *and* c_j *satisfying Assumption 3. Suppose Assumption 4 holds. Denote* $R_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{t=2}^{n} \left(\sum\limits_{l=1}^{t-1} v_l\right) v_t$. *Then in case* $\beta_c \neq 0$ *we have*

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \frac{\sigma^2}{2} \left(\beta_c^2 u^2 + \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^2\right), \tag{11}$$

where u is standard normal;
in case $\beta_c = 0$

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^2. \tag{12}$$

Since convergence in distribution to a constant implies convergence in probability to the same constant, (12) is a part of (11).

For a related result, see Theorem 3.7 of [1].
For (2) by using (3) we have

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} e_t' v e_t' v = v' \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} e_t e_t' v = v' b_n v, \tag{13}$$

where b_n is a symmetric matrix of size $n\times n$:

$$b_n = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \cdots & 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \cdots & 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-1}{n} \\ 1-\frac{2}{n} & 1-\frac{2}{n} & 1-\frac{2}{n} & \cdots & 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-2}{n} & \cdots & 1-\frac{n-2}{n} & 1-\frac{n-1}{n} \\ 1-\frac{n-1}{n} & 1-\frac{n-1}{n} & 1-\frac{n-1}{n} & \cdots & 1-\frac{n-1}{n} & 1-\frac{n-1}{n} \end{pmatrix}.$$

In other words, $b_n = \left(\frac{1}{n}\left(1-\max\left\{\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right\}\right)\right)_{i,j=1}^{n}$. For given $s,t\in(0,1)^2$ choose $1\le i,j\le n$ such that

$$\frac{i-1}{n} < s < \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} < t < \frac{j}{n}.$$

It is easy to see that b_n is L_2-close to a symmetric function

$$B(s,t) = 1 - \max\{s,t\}.$$

We need to know the rate of approximation. For this consider

$$\left| b_{n_{ij}} - (\delta_{n2}B)_{ij} \right| = \left| \frac{1}{n}\left(1-\max\left\{\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right\}\right) - n\int\limits_{q_{ij}} (1-\max\{s,t\})\,dsdt \right|$$

$$= \left| \int\limits_{q_{ij}} \left[n^2 \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \max \left\{ \frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right\} \right) - n \left(1 - \max \{s,t\} \right) \right] dsdt \right|$$

$$\leq \int\limits_{q_{ij}} \left| n \left(\max \{s,t\} - \max \left\{ \frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right\} \right) \right| dsdt \leq \frac{1}{n^2}.$$

Thus,

$$\|b_n - \delta_{n2} B\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| b_{n_{ij}} - (\delta_{n2} B)_{ij} \right|^2 = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

The integral operator $\mathcal{K}$ is associated with B by the following way

$$(\mathcal{K} f)(t) = \int\limits_0^1 B(x,t) f(x) \, dx$$

and let us consider the integral equation for λ and $f(t)$

$$f(t) = \lambda \int\limits_0^1 B(x,t) f(x) \, dx,$$

here λ is the eigenvalue of the kernel $B(s,t)$; the corresponding solution $f(t)$ is an eigenfunction for the eigenvalue λ. According to [2] (p.139) eigenvalues of kernel $B(s,t)$ are

$$\lambda_k = \frac{1}{\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi \right)^2}, k \in \mathbb{N}$$

with multiplicity 1 and corresponding eigenvectors are $f_k(t) = c \cos \sqrt{\lambda_k} t$ with $c \neq 0$. By Theorem 3.9.1 from [6] we can assert that

1. If $\beta_c \neq 0$, then

$$v' b_n v \xrightarrow[n \to \infty]{d} (\sigma \beta_c)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i^2, \tag{14}$$

where u_i are independent standard normal, or

2. If $\beta_c = 0$, then

$$v' b_n v \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0. \tag{15}$$

From (13), (14) and (15) we obtain the next statement.

Lemma 2. *Let* $S_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{l=1}^{t} v_l\right)^2$, *where* v_l *as in Assumption 1. And let Assumption 2 hold. Denote* $\beta_c = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j$. *Then*
in case $\beta_c \neq 0$ *we have*

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\sigma\beta_c)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2} u_k^2 \tag{16}$$

where u_i *are independent standard normal;*
in case $\beta_c = 0$

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{17}$$

Comparing to Theorem 5.12 of [2] we have the same result but under less stringent assumptions on linear processes.

References

1 Phillips P.C.B. and Solo V. Asymptotics for Linear Processes // The Annals of Statistics. – 1992. – V. 20, № 2. – P. 971-1001.

2 Tanaka K. Time series analysis: nonstationary and noninvertible distribution theory. – Wiley, Canada, 1996.

3 Phillips P.C.B. and Perron P. Testing for a Unit Root in Time Series Regression // Biometrica. – 1988. – V. 75, № 2. – P. 335-346.

4 Dickey D.A., Fuller W.A. Disribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root // Journal of the American Statistical Association. – 1979. – V. 74, iss. 366. – P. 427-431.

5 Cheng T.-L., Ho H.-Ch. Asymptotic normality for non-linear functionals of non-causal linear processes with summable weights // Journal of Theoretical Probability. – 2005. – V. 18, № 2. – P. 345-358.

6 Mynbaev K.T. Short-memory linear processes and econometric applications. – Wiley, Hoboken, New Jersey, 2011.

Received 06.05.2016

Мыңбаев Қ.Т., Даркенбаева Д.С. РЕГРЕССИЯЛЫҚ АНАЛИЗДЕ ҚОЛДАНЫЛАТЫН КЕЙБІР КВАДРАТТЫҚ ФОРМАЛАРДЫҢ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

Баяу өзгеретін регрессоры бар регрессияларды бірлік түбірге зерттеу барысында пайда болатын екі квадраттық түрлердің үлестірілім бойынша жинақталуын қарастырамыз. Регрессияның қателері бірлік түбірге ие сызықтық процесс ретінде қарастырылады. Бұл сызықтық процесс қысқа есте сақтау қабілеттілігіне ие және тәуелсіз бірдей үлестірілген инновациялардан тұрады деп ұйғарамыз. Біздің нәтижелер [1] және [2] келтірілген кейбір нәтижелерді жалпылайды.

Мынбаев К.Т., Даркенбаева Д.С. СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

В этой статье мы рассматриваем сходимости по распределению двух квадратичных форм, которые возникают в исследованиях на единичный корень регрессий с медленно меняющимся регрессором. Ошибки регрессий представляются в виде линейного процесса, который обладает единичным корнем. Предполагаем, что линейный процесс обладает короткой паматью с независимыми одинаково распределенными инновациями. Наши результаты обобщают некоторые результаты, приведенные в [1] и [2].

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 166–179.

УДК 512.813.5

EMBEDDING THEOREM OF SOBOLEV TYPE SPACES ON STRATIFIED LIE GROUPS

B. Sabitbek
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: b.sabitbek@math.kz

Annotation: In this paper, we present a version of horizontal weighted Hardy-Rellich type inequality on stratified Lie groups and study some of its consequences. Our results reflect on many results previously known in special cases. Moreover, new Sobolev type spaces are defined on stratified Lie groups and proved an embedding theorem for these functional spaces.

Keywords: Hardy-Rellich inequality, horizontal estimate, stratified group, Sobolev type spaces, embedding theorem.

1. Introduction

Consider the following inequality

$$\left\| \frac{f(x)}{\|x\|} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p}{n-p} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \leq p < n, \tag{1}$$

where ∇ is the standard gradient in $\mathbb{R}^n$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, and the constant $\frac{p}{n-p}$ is known to be sharp. The one-dimensional version of (1) for $p = 2$ was first discovered by Hardy in [1], and then for other p in [2], see also [2] for the story behind these inequalities. Since then the inequality (1) has been widely analysed in many different settings (see e.g. [3]–[19]). Nowadays there is vast literature on this subject, for example, the MathSciNet search shows about 5000 research works related to this subject. On homogeneous Carnot groups (or stratified groups) inequalities of this type have

Keywords: *Hardy-Rellich inequality, horizontal estimate, stratified group, Sobolev type spaces, embedding theorem.*

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80.

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 5127/GF4).

been also intensively investigated (see e.g. [20]–[28]). In this case inequality (1) takes the form

$$\left\| \frac{f(x)}{d(x)} \right\|_{L^p(\mathbb{G})} \leq \frac{p}{Q-p} \left\| \nabla_H f \right\|_{L^p(\mathbb{G})}, \quad Q \geq 3, \ 1 < p < Q, \tag{2}$$

where Q is the homogeneous dimension of the stratified group $\mathbb{G}$, ∇_H is the horizontal gradient, and $d(x)$ is the so-called $\mathcal{L}$-gauge, which is a particular homogeneous quasi-norm obtained from the fundamental solution of the sub-Laplacian, that is, $d(x)^{2-Q}$ is a constant multiple of Folland's [29] (see also [30]) fundamental solution of the sub-Laplacian on $\mathbb{G}$. For a short review in this direction and some further discussions we refer to recent papers [31]–[33] and [36] as well as to references therein.

At the same time the Rellich inequalities give results of the type

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^p}{|x|^\alpha} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta f|^p}{|x|^\beta} dx$$

for certain relations between α, β, n, p. For example, the classical result by Rellich appearing at the 1954 ICM in Amsterdam [37] stated the inequality

$$\left\| \frac{f}{|x|^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{4}{n(n-4)} \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad n > 4. \tag{3}$$

We refer e.g. to Davies and Hinz [16] for history and further extensions, including the derivation of sharp constants, and to [27] and [38] for the corresponding results for the sub-Laplacian on homogeneous Carnot groups.

The main aim of this paper is to give analogues of Hardy-Rellich type inequalities on stratified groups with horizontal gradients and weights. Our results extend known Hardy and Rellich type inequalities on abelian and Heisenberg groups, for example (see e.g. [4], [12], [39] and [40]). For the convenience of the reader let us now briefly recapture the main results of this paper. Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous stratified group of homogeneous dimension Q, and let $X_1, \ldots, X_N$ be left-invariant vector fields giving the first stratum of the Lie algebra of $\mathbb{G}$, $\nabla_H = (X_1, \ldots, X_N)$, with the sub-Laplacian

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N} X_k^2.$$

Denote the variables on $\mathbb{G}$ by $x = (x', x'') \in \mathbb{G}$, where x' corresponds to the first stratum. For precise definitions we refer to Section 2.

Thus, to summarise briefly, in this paper we establish the following result.

- *(Hardy-Rellich type inequalities)* Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous stratified group with N being the dimension of the first stratum, and let α, $\beta \in \mathbb{R}$. Then for any $f \in C_0^\infty(\mathbb{G}\backslash\{x' = 0\})$, we have

$$\left(\frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx + (\alpha+\beta+1)\int_{\mathbb{G}}\frac{(x'\cdot\nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}}dx\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{G}}\frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}}dx \int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}}dx, \tag{4}$$

where $|\cdot|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^N$. Moreover, for $\alpha+\beta+3 \leq N$ we have

$$\frac{|N+\alpha+\beta-1|}{2}\left\|\frac{\nabla_H f}{|x'|^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}}\right\|_{L^2(\mathbb{G})} \leq \left\|\frac{\mathcal{L}f}{|x'|^{\beta}}\right\|_{L^2(\mathbb{G})}\left\|\frac{\nabla_H f}{|x'|^{\alpha}}\right\|_{L^2(\mathbb{G})} \tag{5}$$

with the sharp constant. In the special case of $\alpha = 1$ and $\beta = 0$, the inequality (5) gives the following stratified group version of Rellich's inequality

$$\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^2}dx \leq \left(\frac{2}{N}\right)^2\int_{\mathbb{G}}|\mathcal{L}f|^2 dx, \quad 4 \leq N, \tag{6}$$

again with the constant $\left(\frac{2}{N}\right)^2$ being sharp. In turn, we have the following stratified group version of the weighted Hardy inequality (see [41])

$$\left\|\frac{f}{|x'|^2}\right\|_{L^2(\mathbb{G})} \leq \frac{2}{N-4}\left\|\frac{\nabla_H f}{|x'|}\right\|_{L^2(\mathbb{G})}, \quad 4 < N, \tag{7}$$

again with $\frac{2}{N-2}$ being the best constant. Now combining (7) with (6) we obtain

$$\left\|\frac{f}{|x'|^2}\right\|_{L^2(\mathbb{G})} \leq \frac{4}{N(N-4)}\|\mathcal{L}f\|_{L^2(\mathbb{G})}, \quad 4 < N, \tag{8}$$

with the sharp constant. In the abelian case $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, +)$, we have $N = n$, $\nabla_H = \nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$, and $\mathcal{L} = \Delta$, so it follows the classical Rellich inequality (3), that is,

$$\left\| \frac{f}{|x|^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{4}{n(n-4)} \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad 4 < n, \tag{9}$$

for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

- *(Embedding results)* Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous stratified group with N being the dimension of the first stratum, and let α, $\beta \in \mathbb{R}$. We have the following continuous embedding

  (i)
  $$H^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{G}) \subset D^{2,2}_{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}(\mathbb{G})$$
  for $\alpha + \beta - 1 \neq N$.

  (ii)
  $$D^{2,2}_{\alpha}(\mathbb{G}) \subset D^{1,2}_{\alpha+1}(\mathbb{G})$$
  for $\alpha \leq \frac{N}{2} - 2$ with $\alpha \neq \frac{N}{2}$.

In Section 2 we very briefly recall the main concepts of stratified groups and fix the notation. In Section 3 we derive versions of Hardy-Rellich type inequalities on stratified groups and discuss their consequences including embedding results.

2. Preliminaries

A Lie group $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \circ)$ is called a stratified (Lie) group if it satisfies the following conditions:

(a) For some natural numbers $N + N_2 + ... + N_r = n$, that is $N = N_1$, the decomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^N \times ... \times \mathbb{R}^{N_r}$ is valid, and for every $\lambda > 0$ the dilation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ given by

$$\delta_\lambda(x) \equiv \delta_\lambda(x', x^{(2)}, ..., x^{(r)}) := (\lambda x', \lambda^2 x^{(2)}, ..., \lambda^r x^{(r)})$$

is an automorphism of the group $\mathbb{G}$. Here $x' \equiv x^{(1)} \in \mathbb{R}^N$ and $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{N_k}$ for $k = 2, ..., r$.

(b) Let N be as in (a) and let $X_1, ..., X_N$ be the left invariant vector fields on $\mathbb{G}$ such that $X_k(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}|_0$ for $k = 1, ..., N$. Then

$$\operatorname{rank}(\operatorname{Lie}\{X_1, ..., X_N\}) = n$$

for every $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. the iterated commutators of $X_1, ..., X_N$ span the Lie algebra of $\mathbb{G}$.

That is, we say that the triple $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \circ, \delta_\lambda)$ is a stratified group. See also e.g. [42] for discussions from the Lie algebra point of view. Here r is called a step of $\mathbb{G}$ and the left invariant vector fields $X_1, ..., X_N$ are called the (Jacobian) generators of $\mathbb{G}$. The number

$$Q = \sum_{k=1}^{r} kN_k$$

is called the homogeneous dimension of $\mathbb{G}$. The second order differential operator

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N} X_k^2, \quad N_1 = N, \tag{10}$$

is called the (canonical) sub-Laplacian on $\mathbb{G}$. The sub-Laplacian $\mathcal{L}$ is a left invariant homogeneous hypoelliptic differential operator and it is known that $\mathcal{L}$ is elliptic if and only if the step of $\mathbb{G}$ is equal to 1. We also recall that the standard Lebesque measure dx on $\mathbb{R}^n$ is the Haar measure for $\mathbb{G}$ (see, e.g. [42, Proposition 1.6.6]). The left invariant vector field X_j has an explicit form and satisfies the divergence theorem, see e.g. [31] for the derivation of the exact formula: more precisely, we can write

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x'_k} + \sum_{l=2}^{r} \sum_{m=1}^{N_l} a_{k,m}^{(l)}(x', ..., x^{(l-1)}) \frac{\partial}{\partial x_m^{(l)}}, \tag{11}$$

see also [42, Section 3.1.5] for a general presentation. We will also use the following notations

$$\nabla_H := (X_1, \ldots, X_N)$$

for the horizontal gradient,

$$\operatorname{div}_H v := \nabla_H \cdot v$$

for the horizontal divergence,

$$\mathcal{L}_p f := \operatorname{div}_H(|\nabla_H f|^{p-2}\nabla_H f), \quad 1 < p < \infty, \tag{12}$$

for the horizontal p-Laplacian (or p-sub-Laplacian), and

$$|x'| = \sqrt{x_1'^2 + \ldots + x_N'^2}$$

for the Euclidean norm on $\mathbb{R}^N$.

The explicit representation (11) allows us to have the identity

$$\operatorname{div}_H\left(\frac{x'}{|x'|^\gamma}\right) = \frac{\sum_{j=1}^N |x'|^\gamma X_j x_j' - \sum_{j=1}^N x_j' \gamma |x'|^{\gamma-1} X_j |x'|}{|x'|^{2\gamma}} = \frac{N-\gamma}{|x'|^\gamma} \tag{13}$$

for all $\gamma \in \mathbb{R}$, $|x'| \neq 0$.

3. Horizontal Hardy-Rellich type inequalities and embedding results

Below we adopt all the notation introduced in Section 2 concerning stratified groups and the horizontal operators.

Theorem 1. *Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous stratified group with N being the dimension of the first stratum, and let α, $\beta \in \mathbb{R}$. Then for any $f \in C_0^\infty(\mathbb{G}\backslash\{x' = 0\})$ we have*

$$\left(\frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2}\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx + (\alpha+\beta+1)\int_{\mathbb{G}} \frac{(x'\cdot\nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}}dx\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}}dx \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}}dx, \tag{14}$$

where $|\cdot|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^N$. Moreover, for $\alpha+\beta+3 \leq N$ we have

$$\frac{|N+\alpha+\beta-1|}{2}\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}}dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

with the sharp constant.

Let us define the following Sovolev type spaces on the stratified Lie group $\mathbb{G}$.

- Let $D^{1,2}_{\gamma}(\mathbb{G})$ be the completion of $C_0^{\infty}(\mathbb{G}\backslash\{x'=0\})$ with respect to the norm
$$\|f\|_{D^{1,2}_{\gamma}(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\gamma}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Let $D^{2,2}_{\gamma}(\mathbb{G})$ be the completion of $C_0^{\infty}(\mathbb{G}\backslash\{x'=0\})$ with respect to the norm
$$\|f\|_{D^{2,2}_{\gamma}(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^{2\gamma}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Let $H^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{G})$ be the completion of $C_0^{\infty}(\mathbb{G}\backslash\{x'=0\})$ with respect to the norm
$$\|f\|_{H^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} + \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 2. *Let $\mathbb{G}$ be a homogeneous stratified group with N being the dimension of the first stratum, and let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. We have the following continuous embedding*

(i)
$$H^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{G}) \subset D^{2,2}_{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}(\mathbb{G})$$
for $\alpha+\beta-1 \neq N$.

(ii)
$$D^{2,2}_{\alpha}(\mathbb{G}) \subset D^{1,2}_{\alpha+1}(\mathbb{G})$$
for $\alpha \leq \frac{N}{2}-2$ with $\alpha \neq \frac{N}{2}$.

In the abelian case $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, +)$, we have $N=n$, $\nabla_H = \nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$, so (14) implies the Hardy-Rellich type inequality (see e.g. [12] and [43]) for $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}^n$:
$$\left(\frac{n-(\alpha+\beta+3)}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f|^2}{\|x\|^{\alpha+\beta+1}}dx + (\alpha+\beta+1)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x\cdot\nabla \leq f)^2}{\|x\|^{\alpha+\beta+3}}dx\right)^2 \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta f|^2}{\|x\|^{2\beta}}dx \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f|^2}{\|x\|^{2\alpha}}dx, \tag{16}$$

for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, and $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

When $\alpha = 1$ and $\beta = 0$, the inequality (3) gives the following stratified group version of Rellich's inequality

$$\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^2} dx \leq \left(\frac{2}{N}\right)^2 \int_{\mathbb{G}} |\mathcal{L} f|^2 dx, \quad 4 \leq N, \tag{17}$$

with $\left(\frac{2}{N}\right)^2$ being the best constant.

Directly from the inequality (3), choosing α and β, we can obtain a number of Heisenberg-Pauli-Weyl type uncertainly inequalities which have various consequences and applications. For instance,

- $$\frac{|N+2\alpha|}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2(\alpha+1)}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^{2(\alpha+1)}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

  for $\alpha \leq \frac{N}{2} - 2$ and any $f \in H^2_{\alpha,\alpha+1}(\mathbb{G})$,

- $$\frac{|N-2|}{2} \int_{\mathbb{G}} |\nabla_H f|^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}} |x'|^{2(\alpha+1)} |\nabla_H f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

  for $3 \leq N$ and any $f \in D_0^{1,2}(\mathbb{G})$,

- $$\frac{N}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^2} dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}} |\nabla_H f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^2} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

  for any $f \in D_1^{1,2}(\mathbb{G})$,

- $$\frac{N-1}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|} dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}} |x'|^2 |\nabla_H f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L} f|^2}{|x'|^2} dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

  for $2 \leq N$ and any $f \in D_{1/2}^{1,2}(\mathbb{G})$,

- $$\frac{N-1}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|}dx \leq \left(\int_{\mathbb{G}}|\nabla_H f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{G}}|\mathcal{L}f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

  for $2 \leq N$ and any $f \in D^{1,2}_{1/2}(\mathbb{G})$.

Proof of Theorem 1. For all $s \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\int_{\mathbb{G}}\left|\frac{\nabla_H f}{|x'|^{\alpha}} + s\frac{x'}{|x'|^{\beta+1}}\mathcal{L}f\right|^2 dx \geq 0,$$

that is,

$$\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}}dx + 2s\int_{\mathbb{G}}\frac{x'\cdot\nabla_H f}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\mathcal{L}f dx + s^2\int_{\mathbb{G}}\frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}}dx \geq 0. \tag{18}$$

Since

$$\int_{\mathbb{G}}\frac{x'\cdot\nabla_H f}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\mathcal{L}f dx = \int_{\mathbb{G}}\operatorname{div}_H(\nabla_H f)\left(\frac{x'\cdot\nabla_H f}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\right)dx$$

by using the divergence theorem (see e.g. [31]) and (13) we obtain

$$\int_{\mathbb{G}}\operatorname{div}_H(\nabla_H f)\left(\frac{x'\cdot\nabla_H f}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{x'}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\cdot\nabla_H(|\nabla_H f|^2)dx -$$

$$-\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx + (\alpha+\beta+1)\int_{\mathbb{G}}\frac{(x'\cdot\nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}}dx.$$

Again by the divergence theorem and (13) we get

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{x'}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\cdot\nabla_H(|\nabla_H f|^2)dx = \frac{N-(\alpha+\beta+1)}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx.$$

Thus,

$$\int_{\mathbb{G}}\frac{x'\cdot\nabla_H f}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}\mathcal{L}f dx = \frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2}\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}}dx +$$

$$+(\alpha+\beta+1)\int_{\mathbb{G}}\frac{(x'\cdot\nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}}dx. \tag{19}$$

Therefore, the equation (18) can be restated as

$$s^2 \int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx + 2s \left(\frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}} dx + \right.$$

$$\left. +(\alpha+\beta+1) \int_{\mathbb{G}} \frac{(x' \cdot \nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}} dx \right) + \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx \geq 0. \tag{20}$$

Denoting

$$a := \int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx,$$

$$b := \frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}} dx + (\alpha+\beta+1) \int_{\mathbb{G}} \frac{(x' \cdot \nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}} dx,$$

and

$$c := \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx$$

we arrive at

$$as^2 + 2bs + c \geq 0, \tag{21}$$

which is equivalent to $b^2 - ac \leq 0$. Thus, we have

$$\left(\frac{N-(\alpha+\beta+3)}{2} \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{\alpha+\beta+1}} dx + (\alpha+\beta+1) \int_{\mathbb{G}} \frac{(x' \cdot \nabla_H f)^2}{|x'|^{\alpha+\beta+3}} dx \right)^2 \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx. \tag{22}$$

This shows the inequality (14). Now it remains to prove (3). It can be proved similarly. For a different proof of (3) we refer [41].

Proof of Theorem 2. Since $N \neq \alpha+\beta-1$, from (3) we obtain

$$\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\frac{(\alpha+\beta+1)}{2}}} dx \leq \frac{2}{|N+\alpha+\beta-1|} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{|N+\alpha+\beta-1|} \left(\int_{\mathbb{G}} \frac{|\mathcal{L}f|^2}{|x'|^{2\beta}} dx + \int_{\mathbb{G}} \frac{|\nabla_H f|^2}{|x'|^{2\alpha}} dx \right),$$

for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{G} \backslash \{x'=0\})$. This proves Part (i). Part (ii) also implies from the inequality (3), namely assuming $\alpha+\beta+3 \leq N$ and letting $\beta = \alpha+1, \ \alpha \neq \frac{N}{2}$.

4. Acknowledgment

The author would like to express his sincere appreciation to his doctoral advisor, Academician Tynysbek Sh. Kalmenov, for helpful comments and discussions. Also, the author would like to thank Dr Durvudkhan Suragan, for his valuable comments regarding this paper.

References

1 Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus // Messenger Math. – 1919. – V. 48. – P. 107-112.

2 Hardy G.H. Note on a theorem of Hilbert // Math. Z. – 1920. – V. 6, № (3-4). – P. 314-317.

3 Adimurthi and A. Sekar. Role of the fundamental solution in Hardy-Sobolev-type inequalities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 2006. – V. 136, № 6. – P. 1111-1130.

4 Badiale N., Tarantello G. A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2002. – V. 163. – P. 259-293.

5 Brezis H., Lieb E. Inequalities with remainder terms // J. Funct. Anal. – V. 62. – P. 73-86.

6 Brezis H., Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // Comm. Pure Appl. Math. – 1983. – V. 36. – P. 437-477.

7 Brezis H., Marcus M. Hardy's inequalities revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1997. – V. 25, № 4. – P. 217-237.

8 Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights // Compositio Mathematica. – 1984. – V. 53. – P. 259-275.

9 Catrina F., Wang Z.Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and non existence), and symmetry of extremals functions // Comm. Pure Appl. Math. – 2001. – V. 54. – P. 229-258.

10 Chern J., Lin C. Minimizers of Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with the Singularity on the Boundary // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2010. – V. 197. – P. 401-432.

11 Ciatti P., Cowling M.G., Ricci F. Hardy and uncertainty inequalities on stratified Lie groups // Adv. Math.. – 2015. – V. 227. – P. 365-387.

12 Costa D.G. Some new and short proofs for a class of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 337. – P. 311-317.

13 D'Ambrosio L. Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 2005. – V. 5, 4(3). – P. 451-486.

14 D'Ambrosio L., Dipierro S. Hardy inequalities on Riemannian manifolds and applications // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 2014. – V. 31, № 3. – P. 449-475.

15 Davies E.B. A review of Hardy inequalities // In The Maz'ya anniversary collection. – (Rostock, 1998. – V. 2; Oper. Theory Adv. Appl. – 1999. – V. 110. – P. 55-67.

16 Davies E.B., Hinz A.M. Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$ // Math. Z. – 1998. – V. 227, № 3. – P. 511-523.

17 Ekholm T., Kovařík H., Laptev A. Hardy inequalities for p-Laplacians with Robin boundary conditions // Nonlinear Anal. – 2015. – V. 128. – P. 365-379.

18 Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., LaptevA., Tidblom J. Many-particle Hardy inequalities // J. Lond. Math. Soc. (2). – 2008. – V. 77, № 1. – P. 99-114.

19 Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A. Hardy inequalities with homogeneous weights // J. Funct. Anal. – 2015. – V. 268, № 11. – P. 3278-3289.

20 Danielli D., Garofalo N., Phuc N.C. Hardy-Sobolev type inequalities with sharp constants in Carnot-Carathéodory spaces // Potential Anal. – 2011. – V. 34, № 3. – P. 223-242.

21 Garofalo N., Lanconelli E. Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1990. – V. 40, № 2. – P. 313-356.

22 Goldstein J.A., Kombe I. The Hardy inequality and nonlinear parabolic equations on Carnot groups // Nonlinear Anal. – 2008. – V. 69, № 12. – P. 4643-4653.

23 Grillo G. Hardy and Rellich-type inequalities for metrics defined by vector fields // Potential Anal. – 2003. – V. 18, № 3. – P. 187-217.

24 Jin Y., Shen S. Weighted Hardy and Rellich inequality on Carnot groups // Arch. Math. (Basel). – 2011. – V. 96, 3. – P. 263-271.

25 Kombe I., Özaydin M. Hardy-Poincaré, Rellich and uncertainty principle inequalities on Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 365, 10. – P. 5035-5050.

26 Kogoj A.E., Sonner S // Hardy type inequalities for Δ_λ-Laplacians. Complex Var. Elliptic Equ. – 2016. – V. 61, № 3. – P. 422-442.

27 Lian B. Some sharp Rellich type inequalities on nilpotent groups and application // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. – 2013. – V. 33, № 1. – P. 59-74.

28 Niu P., Zhang H., Wang Y. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 129, 12. – P. 3623-36301.

29 Folland G.B. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Ark. Mat. – 1975. – V. 13, № 2. – P. 161-207.

30 Folland G.B., Stein E.M. Hardy spaces on homogeneous groups // Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J. University of Tokyo Press, Tokyo, 1982. – V. 28.

31 Ruzhansky M., Suragan D. Layer potentials, Kac's problem, and refined Hardy inequality on homogeneous Carnot groups // arXiv:1512.02547. – 2015.

32 Ruzhansky M., Suragan D. Critical Hardy inequality on homogeneous groups // arXiv: 1602.04809. – 2016.

33 Ruzhansky M., Suragan D. Local Hardy and Rellich inequalities for sums of squares of vector fields // arXiv: 1601.06157, 2016.
34 Ruzhansky M., Suragan D. Hardy and Rellich inequalities, identities, and sharp remainders on homogeneous groups // arXiv:1603.06239. – 2016.
35 Ruzhansky M., Suragan D. Uncertainty relations on nilpotent Lie groups // arXiv:1604.06702. – 2016.
36 Ozawa T., Ruzhansky M., Suragan D. L^p-Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities on homogeneous groups // arXiv:1605.02520. – 2016.
37 Rellich F. Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung // In Proceedings of the International Congress of Mathematicians. – Amsterdam, 1954. – V. III. – P. 243–250; Noordhoff, Groningen, 1956.
38 Kombe I. Sharp weighted Rellich and uncertainty principle inequalities on Carnot groups // Commun. Appl. Anal. – 2010. – V. 14, № 2. – P. 251-271.
39 Costa D.G. On Hardy-Rellich type inequalities in $\mathbb{R}^N$ // Appl. Math. Letters. – 2009. – V. 22. – P. 902-905.
40 D'Ambrosio L. Some Hardy inequalities on the Heisenberg group // Differential Equations. – 2004. – V. 40, № 4. – P. 552-564.
41 Ruzhansky M., Suragan D. On horizontal Hardy, Rellich and Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on stratified groups // In progress. – 2016.
42 Fischer V., Ruzhansky M. Quantization on nilpotent Lie groups // Progress in Mathematics. – Birkhäuser, – 2016. – V. 314. , 2016.
43 Di Y., Jiang L.,Shen S., Jin Y. A note on a class of Hardy-Rellich type inequalities // J. Inequal. Appl. – 2013. – V. 84. – P. 1-6.

Received 25.08.2016

Сабитбек Б. ҚАБАТТАЛҒАН ЛИ ТОПТАРЫНДАҒЫ СОБОЛЕВ ТЕКТЕС КЕҢІСТІКТЕРДІҢ САЛЫНУ ТЕОРЕМАСЫ

Бұл мақалада біз қабатталған Ли топтарындағы Харди-Реллих тектес салмақтық теңсіздігінің горизонталь нұсқалары мен олардың кейбір салдарын ұсынамыз. Біздің нәтижелер дербес жағдайлар үшін бұрыннан белгілі нәтижелерді жалпылайды. Оған қоса, қабаттлаған Ли топтарындағы Соболев тектес жаңа функционалдық кеңістіктер анықталған және осы функционалдық кеңістіктер үшін салыну теоремасы дәлелденген.

Сабитбек Б. ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ГРУППАХ ЛИ

В этой статье мы представляем горизонтальные аналоги весового неравенства типа Харди-Реллиха на стратифицированных группах Ли и некоторые их следствия. Наши результаты обобщают многие ранее известные результаты в частных случаях. Кроме того, определены новые функциональные пространства типа Соболева на стратифицированные группах Ли и доказаны теоремы вложения для этих функциональных пространств.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 180–191.

УДК 517.927.25

PROPERTIES OF A GENERALIZED SPECTRAL PROBLEM WITH INVOLUTION FOR DIFFERENTIATION OPERATOR OF THE SECOND ORDER

A.M. Sarsenbi[1], A.A. Sarsenbi[2]

[1,2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: [1]abzhahan@mail.ru

[1,2]Auezov South Kazakhstan State University
160012, Shymkent, 5 Tauke khan avenue, e-mail: [2]sarsenbi.a.a@math.kz

Annotation: In the present paper we consider a spectral problem for a model differential operator of the second order with involution. The operator is given by a differential expression $\ell u = -u''(-x)$ and boundary conditions of the general form. A criterion of the basis property of systems of eigenfunctions of the operator is set in the sense of coefficients of the boundary conditions.

Keywords: Generalized spectral problem, involution, eigenfunctions, eigenvalues, basis property.

Issues of convergence of spectral expansions, related to non-selfadjoint differential operators, are one of the central sections of the spectral theory. Wide enough range of results of the recent time, obtained by theory apparatus of V.A. Il'in for classical and non-classical differential operators, is shown in the thematic review [1].

In [2], [3] the theory of the basis property of V.A. Il'in was developed for the case of loaded differential operators with a deviating argument, the results of these works are closely related to researches of the present paper.

In $L_2(-1,1)$ consider a non-classical operator L given by a differential expression

$$Lu= -u''(-x)\,,\ -1 < x<1, \tag{1}$$

Keywords: *Generalized spectral problem, involution, eigenfunctions, eigenvalues, basis property.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10.

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grants № 0971/GF4 and 5414/GF4).

and boundary conditions of the general form

$$\alpha_j u'(-1)+\beta_j u'(1)+\alpha_{j1} u(-1)+\beta_{j1} u(1)=0, \ \ j=1,2. \tag{2}$$

Coefficients of the boundary condition (2) are numbers, which can be complex.

The main goal of the present paper is to set a criterion of the basis property of the system of eigenfunctions (EF) of the operator L in the terms of the coefficients of the boundary conditions (2). The interest to studying the basis properties of operators of the form (1), (2) has arose relatively recently.

In works of T.Sh. Kal'menov and his disciples the *selfadjointness* property of the Cauchy operator:

$$L_K u=-u''(-x), \ -1<x<1, \quad u'(-1)=0, \ \ u(-1)=0, \tag{3}$$

is successfully applied in solving initial-boundary value problems for a heat equation with inverse time direction [4], in finding a criterion of well-posedness of the Cauchy problem for the Poisson operator [5], in formulating an asymptotic solution to problems with a small parameter [6].

Converting $\varphi(x)$ of the segment $[a,b]$ onto itself, where $a\le\varphi(x)\le b$, $\varphi(a)=b$, $\varphi(b)=a$, $\varphi(\varphi(x))=x$, is called an *involution*. Therefore in literature an expression of the form (1) is called operators with involution. However in this paper we consider the case of only the simplest involution $\varphi(x)=-x$. The works of A.P. Khromov and his disciples (see [7] and the review in it) are devoted to researching spectral properies of integral and integral-differential operators with reflection operators.

Definition 1. *The boundary conditions (2) for operator (1) we will call irregular in the following two cases:*

$$\begin{aligned} \alpha_1=\beta_1, \ \alpha_{21}+\beta_{21}=0;\\ \alpha_1=-\beta_1, \ \alpha_{21}-\beta_{21}=0. \end{aligned} \tag{4}$$

All the other boundary conditions we will call regular. The regular boundary conditions (2) we call strengthened regular if their coefficients satisfy one of the following three conditions:

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0;$$

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0,\ |\alpha_1|+|\beta_1|>0,\quad \alpha_1^2\neq\beta_1^2,\ \alpha_{21}^2\neq\beta_{21}^2;$$
$$\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0,\quad \alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}\neq 0.$$

In [8] the Riesz basis property of the system of EF of the operator L with strengthened regular boundary conditions in $L_2(-1,1)$ was proved. An issue on the basis property of the system of EF of the operator *under consideration* with not strengthened regular boundary conditions has remained to be open. In [9] examples of operators such that their system of EF also forms a Riesz basis in $L_2(-1,1)$ are introduced.

It is easy to see that if the boundary conditions (2) are regular but not strengthened regular, then $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0,\ |\alpha_1|+|\beta_1|>0$ and one of the equalities $\alpha_1^2=\beta_1^2$ or $\alpha_{21}^2=\beta_{21}^2$ holds. Excluding from here cases of irregularity of the boundary conditions (4), we get the following result.

Lemma 1. *The boundary conditions (2) will be regular but not strengthened regular if and only if* $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0,\ |\alpha_1|+|\beta_1|>0$ *and one of the following four conditions holds:*

$$\begin{gathered}\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_{21}+\beta_{21}\neq 0;\quad \alpha_{21}=\beta_{21},\quad \alpha_1+\beta_1\neq 0;\\ \alpha_1=-\beta_1,\quad \alpha_{21}-\beta_{21}\neq 0;\quad \alpha_{21}=-\beta_{21},\quad \alpha_1+\beta_1\neq 0.\end{gathered}\tag{5}$$

Note that a class of regular but not strengthened regular problems for the classical [10] differential operator $\ell u=-u''(x)$ and for the differential operator with involution (1) completely coincide. The class of strengthened regular boundary conditions for the operator with involution (1) are *wider* than for the classical differential operator. Thus, for example, the Cauchy problem (3) is strengthened regular (and even seladjoint) for an operator with involution and is irregular (degenerated, Volterra) for a classical differential operator. It is caused by the fact that the fulfillment of the inequality $\alpha_1\beta_{21}+\beta_1\alpha_{21}\neq 0$ is required in definition of regular boundary conditions for the classical differential operator of the second order in the second case of regularity. Whereas this condition is required only for regular but not strengthened regular boundary conditions in our definition for the differential operator with involution.

Theorem 1. *Spectrum of the operator L, generated by the differential expression (1) and by regular but not strengthened regular boundary conditions*

(2), is simple. The system of its eigenfunctions $\{u_k(x)\}$ forms a Riesz basis in $L_2(-1,1)$ if and only if there exist constants $L_2(-1,1)$ such that for $L_2(-1,1)$and for a biorthogonal adjoint system $\{v_k(x)\}$ inequalities hold

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(-1,1)} \le \gamma_1 \|u_k(x)\|_{L_2(-1,1)}, \quad \|v_k(x)\|_{L_\infty(-1,1)} \le \gamma_2 \|v_k(x)\|_{L_2(-1,1)},$$

$$\|u_k(x)\|_{L_\infty(-1,1)} \le \gamma_3, \qquad \|u_k(x)\|_{L_\infty(-1,1)} \le \gamma_4. \tag{6}$$

PROOF. A square of the operator L is given by a classical differential expression $L^2 u = u^{(IV)}(x)$ and by four boundary conditions: (2) and

$$\beta_j u'''(-1) + \alpha_j u'''(1) - \beta_{j1} u''(-1) - \alpha_{j1} u''(1) = 0, \quad j = 1,2. \tag{7}$$

Following [10], we get

$$\theta_{-1} = \theta_1 = -2\left[(\beta_1\beta_{21} + \alpha_1\alpha_{21})^2 + (\beta_1\alpha_{21} + \alpha_1\beta_{21})^2\right].$$

Hence, by direct calculation we make sure that $\theta_{-1} = \theta_1 \neq 0$ for each of four cases (5). Consequently, the boundary conditions (2), (7) are regular for the classical differential operator of the fourth order and its corresponding operator L^2 has the system of eigen- and associated functions forming a complete and minimal system in $L_2(-1,1)$.

But root functions of the operators L and L^2 coincide [8]. Therefore the system of root functions of the non-classical differential operator L with the regular (but not strengthened regular in the sense of our introduced definition) boundary conditions forms the complete and minimal system in $L_2(-1,1)$. However the boundary conditions (2), (7) are not strengthened regular for the classical differential operator of the fourth order, therefore an additional research is required for studying issues of the basis properties of the system of EF.

LEMMA 2. *Eigenvalues of the operator L with regular but not strengthened regular boundary conditions are simple and form two series with the following asymptotic behavior:*

$$\lambda_k^{(1)} = -\left[k\pi + \frac{\ln\xi}{2i} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]^2, \quad \lambda_k^{(2)} = \left[k\pi + \frac{\ln\xi}{2i} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]^2, \; k \to \infty, \tag{8}$$

where ξ *can take values only +1 or -1:* $\xi = -\beta_1/\alpha_1$ *for* $\alpha_1^2 = \beta_1^2$ *and* $\xi = -\beta_{21}/\alpha_{21}$ *for* $\alpha_{21}^2 = \beta_{21}^2$.

The proof of the lemma is held by direct calculation of a characteristic determiner of the spectral problem and by further use of Rouche's theorem. Since we indicate a form of the characteristic determiner below, we will not stop on the direct proof of this lemma. Thus the system of EF of the operator L with regular but not strengthened regular boundary conditions is the complete and minimal system of EF of the classical differential operator of the fourth order, where all the conditions A hold (one of preliminary conditions of the theory of V.A. Il'in [1], [11]). Therefore the result of theorem 1 follows from [12, theorem 1].

Theorem 2. *System of EF of the operator* L, *generated by the differential expression (1) and by the regular boundary conditions (2), forms a Riesz basis in* $L_2(-1,1)$.

Proof. Since the system of EF of the operator L with strengthened regular boundary conditions forms the Riesz basis [9], then we need only to consider a case of regular but strengthened regular boundary conditions. By virtue of lemma 1 all such boundary conditions can be represented in the form:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \qquad\qquad \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

where $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$ and one of the fourth conditions (5) holds.

Representing the general solution of an equation $-u''(-x) = \lambda u(x)$ in the form

$$u(x) = C_1\left(e^{\rho x} - e^{-\rho x}\right) + C_2\left(e^{i\rho x} + e^{-i\rho x}\right), \ \rho = \sqrt{\lambda}$$

and satisfying it to the boundary conditions (9), we get a linear system with respect to coefficients C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1\left[\rho(\alpha_1+\beta_1)\left(e^{\rho}+e^{-\rho}\right) - (\alpha_{11}-\beta_{11})\left(e^{\rho}-e^{-\rho}\right)\right] - \\ -C_2\left[i\rho(\alpha_1-\beta_1)\left(e^{i\rho}-e^{-i\rho}\right) - (\alpha_{11}+\beta_{11})\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)\right] = 0, \\ C_1(-\alpha_{21}+\beta_{21})\left(e^{\rho}-e^{-\rho}\right) + C_2(\alpha_{21}+\beta_{21})\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

The determiner of this system will be a characteristic determiner of the spectral problem.

Separately consider each of four cases (5).

Let at first $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_{21} + \beta_{21} \neq 0$. Then the determiner of system (10) can be represented in the form

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda)\left(e^{i\rho} + e^{-i\rho}\right),$$

where

$$\Delta_1(\lambda) = 2\left[\rho(\alpha_{21} + \beta_{21}) - C_0\right]e^{\rho} + 2\left[\rho(\alpha_{21} + \beta_{21}) + C_0\right]e^{-\rho},$$

$$C_0 = \quad \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}.$$

Therefore the spectral problem has two series of eigenvalues:

$$\lambda_k^{(8.1)} = -(\omega_k)^2,\ \ \lambda_k^{(8.2)} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\ ,$$

where $\rho_k = i\omega_k$ are roots of an equation

$$e^{2\rho} = -1 - \frac{2C_0}{\rho(\alpha_{21} + \beta_{21}) - C_0}.$$

By standard reasoning, applying the Rouche's theorem, we find

$$\omega_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Thus the spectral problem has two series of eigenfunctions

$$u_k^{(1)}(x) = \sin(\omega_k x) + \frac{\alpha_{21} - \beta_{21}}{\alpha_{21} + \beta_{21}} \frac{\sin(\omega_k)}{1 + e^{-2\omega_k}} \left(e^{\omega_k(x-1)} - e^{-\omega_k(x+1)}\right), \quad (11)$$

$$u_k^{(2)}(x) = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Evidently that $\left\|u_k^{(2)}\right\| = 1$. Calculating the norm $u_k^{(1)}(x)$ and taking into account that it consists of sum of two functions, the first of which is odd, and the second norm is even, we get

$$\left\|u_k^{(1)}\right\|^2 = \left\|\sin(\omega_k x)\ \right\|^2 + \left|\frac{\alpha_{21} - \beta_{21}}{\alpha_{21} + \beta_{21}} \frac{\sin(\omega_k)}{1 + e^{-2\omega_k}}\right|^2 \left\|e^{\omega_k(x-1)} - e^{-\omega_k(x+1)}\right\|^2.$$

Hence, after simple calculations, taking into account the asymptotic behavior, we obtain $\left\|u_k^{(1)}\right\| = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Thus, the system of EF (11) is almost normalized. By direct checking it is easy to make sure that system (11) is not quadratically close to a trigonometric system

$$\left\{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x,\ \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\ \right\}.$$

Therefore here we can not apply the theorem on closeness of the normalized Riesz basis to an orthonormal basis used in a great amount of cases.

For establishing the basis property of system (11) we apply the criterion of the Riesz basis property of the system of EF of problem (1), (2), proved in Theorem 1.

For this purpose we construct a system of functions $\left\{v_k^{(1)}(x),\ v_k^{(2)}(x)\right\}$, biorthogonally adjoint to the system $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$. This system is a system of EF of a problem adjoint to the boundary value problem (1), (2). By standard calculations, we find that a problem adjoint to problem (1), (2) is the following boundary value problem (in case of $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_{21} + \beta_{21} \neq 0$):

$$L^* v = -v''(-x),\ -1 < x < 1, \tag{12}$$

$$\begin{cases} \overline{\alpha_{21}} v'(-1) + \overline{\beta_{21}} v'(1) + \overline{\alpha_{11}}\,\overline{\beta_{21}} v(-1) + \overline{\alpha_{21}}\,\overline{\beta_{11}} v(1) = 0, \\ v(-1) + v(1) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

By virtue of the adjointness of problems, $\bar{\lambda}_k^{(1)}$ and $\bar{\lambda}_k^{(2)}$ will be the eigenvalues of the adjoint problem (12), (13). By direct calculation we obtain that the eigenfunctions of problem (12), (13) have the form:

$$v_k^{(1)}(x) = C_3 \sin(\omega_k x),$$

$$v_k^{(2)}(x) = C_4\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x \ - a_k\left(e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x-1)} - e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)}\right)\right], \tag{14}$$

where

$$a_k = \frac{(-1)^k\left(\overline{\alpha_{21}} - \overline{\beta_{21}}\right)}{\left(\overline{\alpha_{21}} + \overline{\beta_{21}}\right)\left(1 + e^{-(2k+1)\pi}\right) - 2\frac{\overline{C_0}}{(2k+1)\pi}\left(1 - e^{-(2k+1)\pi}\right)}.$$

Unlike finding eigenfunctions of a direct problem, the coefficients C_3, C_4 for the adjoint problem are found not from normalization conditions but from biorthogonality conditions of the system $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ and $\left\{v_k^{(1)}(x),\ v_k^{(2)}(x)\right\}$. Therefore we have that scalar products: $\left(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}\right) = \left(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}\right) = 1$ equal to one. Using the obtained representations (11), (14) of the eigenfunctions, taking into account that $u_k^{(1)}(x)$ is a sum of odd and even functions, and $v_k^{(2)}(x)$ is a sum of even and odd functions, it is easy to obtain that

$$\left(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}\right) = \overline{C_3}\|\sin(\omega_k x)\ \|^2,\ \left(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}\right) = \overline{C_4}.$$

Therefore the system of EF of problem (12), (13) being biorthogonal to a system $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ has the form

$$v_k^{(1)}(x) = \sin(\omega_k x) \,/\, \|\sin(\omega_k x)\|^2,$$

$$v_k^{(2)}(x) = \cos(k+1/2)\pi x \ - a_k\left(e^{(k+1/2)\pi(x-1)} - e^{-(k+1/2)\pi(x+1)}\right).$$

We prove the fulfillment of inequalities (6) for proof of the basis properties of the system of EF. For this purpose we estimate norms of the eigenfunctions found by us. As a result we have

$$\left\|u_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\left\|u_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = \left(1 + \left|\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}}\right|\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\left\|u_k^{(2)}\right\|_{L_2(-1,1)} = 1, \qquad \left\|u_k^{(2)}\right\|_{L_2(-1,1)} = 1,$$

$$\left\|v_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \left\|v_k^{(1)}\right\|_{L_?(-1,1)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\left\|v_k^{(2)}\right\|_{L_2(-1,1)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\left\|v_k^{(2)}\right\|_{L_?(-1,1)} = \left(1 + \left|\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}}\right|\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Now from these inequalities we easily make sure that inequalities (6) hold. Thereby the found systems of EF $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ and $\left\{v_k^{(1)}(x),\ v_k^{(2)}(x)\right\}$ satisfy all requirements of Theorem 1. Consequently they form the Riesz basis in $L_2(-1,1)$. Thus, Theorem 2 is proved for the first from four cases (5). The proof for the last cases is held analogously.

Now consider a case of the irregular boundary conditions (2), that is, the case when the coefficients satisfy one of conditions (4). In this case the boundary conditions can be reduced to the form (8), where $|\alpha_1|+|\beta_1|>0$, or $\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_{21}+\beta_{21}=0$, or $\alpha_1=-\beta_1,\ \alpha_{21}-\beta_{21}=0$.

Theorem 3. *The system of EF of the operator L, generated by the differential expression (1) and by the irregular boundary conditions (2), does not form even a normal basis in $L_2(-1,1)$.*

Proof. Consider only a case $\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_{21}+\beta_{21}=0$, the second case from (4) is considered similarly. As in proving theorem 2, by direct calculation, we find out that problem (1), (2) has two series of eigenvalues

$$\lambda_k^{(1)}=-(k\pi)^2,\quad \lambda_k^{(2)}=(k+1/2)^2\pi^2,\quad k=0,1,2,\dots,$$

to which two series of eigenfunctions correspond

$$u_k^{(1)}(x)=C_1\left[\sin(k\pi x)-\frac{2(-1)^k}{(\alpha_{11}+\beta_{11})}\frac{k\pi i}{(1+e^{-2k\pi})}\left(e^{k\pi(x-1)}+e^{-k\pi(x+1)}\right)\right],$$
$$u_k^{(2)}(x)=C_2\cos(k+1/2)\pi x,\quad k=0,1,2,\dots. \tag{15}$$

The eigenfunctions of the adjoint problem in this case have the form

$$v_k^{(1)}(x)=C_3\sin(k\pi x),$$
$$v_k^{(2)}(x)=C_4\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\ -a_k\left(e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x-1)}-e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)}\right)\right], \tag{16}$$
$$a_k=(-1)^k(2k+1)\pi/\left[\left(\overline{\alpha_{11}}+\overline{\beta_{11}}\right)\left(1-e^{-(2k+1)\pi}\right)\right].$$

The coefficients C_3, C_4 are found from the biorthogonality conditions of the systems. Therefore we have that the scalar products equal to one: $\left(u_k^{(1)},v_k^{(1)}\right)=\left(u_k^{(2)},v_k^{(2)}\right)=1$.

Using representations (15), (16) of the eigenfunctions and taking into account that $u_k^{(1)}(x)$ is a sum of the even and odd functions, and $v_k^{(2)}(x)$ is a sum of the odd and even functions, we have

$$1 = \left(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}\right) = C_1\overline{C_3}, \quad 1 = \left(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}\right) = C_2\overline{C_4}. \tag{17}$$

Consequently, under any choice of the coefficients C_1, C_2, the coefficients C_3, C_4 must be chosen from relations (17). Thereby we have completely computed the system of EF of the operator L with the irregular boundary conditions and constructed its biorthogonal system.

Let us show now that under any choice of the coefficients C_1, C_2 the eigenfunctions of the operator L do not form even a normal basis in $L_2(-1,1)$. For this purpose we show that for biorthogonal systems $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ and $\left\{v_k^{(1)}(x),\ v_k^{(2)}(x)\right\}$ the necessary condition of the basis property, that is, a condition of system uniform minimality [4, p. 66] does not hold:

$$\|u_k\| \cdot \|v_k\| \le C < \infty.$$

We calculate norms of the eigenfunctions found by us. It is sufficient to consider the eigenfunctions of one series. We have

$$\left\|u_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = |C_1| \sqrt{1 + \frac{4k\pi}{|\ \alpha_{11} + \beta_{11}|^2} \frac{1 + 4k\pi e^{-2k\pi} + e^{-4k\pi}}{(1 + e^{-2k\pi})^2}},$$

$$\left\|v_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = |C_3|\,.$$

Taking into account that the coefficients C_1 and C_3 are linked by relation (17), hence we find

$$\left\|u_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} \left\|v_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = \sqrt{1 + \frac{4k\pi}{|\ \alpha_{11} + \beta_{11}|^2} \frac{1 + 4k\pi e^{-2k\pi} + e^{-4k\pi}}{(1 + e^{-2k\pi})^2}},$$

It is easy to see that under any choice of the coefficient C_1, we get

$$\lim_{k\to\infty} \left\|u_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} \left\|v_k^{(1)}\right\|_{L_2(-1,1)} = \infty\ ,$$

that is, the necessary condition of the basis property does not hold. Therefore the system of EF $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ of the operator L, generated by the differential expression (1) and by the irregular boundary conditions (2), doe not form even the normal basis in $L_2(-1,1)$. Theorem 3 is proved.

The results of the present paper give a comprehensive answer on the issue on the basis property of the system of EF of the operator L in the terms of the coefficients of the boundary conditions (2). Uniting the results obtained in the paper, we can formulate them in the form of the criterion.

Theorem 4. *The system of EF of the operator L, generated by a differential expression $Lu = -u''(-x)$ and by the general boundary conditions (2), forms a Riesz basis in $L_2(-1,1)$ if and only if the boundary conditions (2) are regular.*

Acknowledgments

The authors express their gratitude to Prof. T.Sh. Kalmenov and Prof. M.A. Sadybekov, this paper has been prepared under their guidance.

References

1 Il'in V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, № 5. – P. 3489-3550.

2 Lomov I.S. A theorem on the unconditional basis property of root vectors of second-order weighted differential operators // Differ. Uravn. – 1991. – V. 27, № 9. – P. 1550-1563.

3 Tikhomirov V.V. On the unconditional basis property of root vectors of loaded operators // Differ. Uravn. – 1983. – V. 25, № 2. – P. 355-357.

4 Kalmenov T.Sh., Shaldanbaev A.S. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2010. – V. 18, № 5. – P. 471-492.

5 Kal'menov T.Sh., Iskakova U.A. Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation // Doklady Mathematics. – 2007. – V. 75, № 3. – P. 370-373.

6 Kal'menov T.Sh., Iskakova U.A. A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, № 3. – P. 874-876.

7 Kurdyumov V.P., Khromov A.P. The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a functional differential operator with variable structure // Russian Mathematics. – 2010. – V. 54, № 2. – P. 33-45.

8 Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. – 2010. – V. 46, № 4. – P. 509-514.

9 Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems // Differential Equations. – 2012. – V. 48, № 2. – P. 1-3.

10 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differential Equations. – 2012. – V. 48, № 6. – P. 896-900.

11 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. On the theory of antiprior estimates in the sense of VA Il'in // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 77, № 3. – P. 398-400.

12 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. The use of anti-A priori estimates in the theory of bases in the space L(2) // Differential Equations. – 2008. – V. 44, № 5. – P. 685-691.

Received 27.08.2016

Сәрсенбі Ә.М., Сәрсенбі Ә.А. ЕКІНШІ РЕТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОР ҮШІН ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ЖАЛПЫЛАНҒАН СПЕКТРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕРДІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Бұл жұмыста инволюциясы бар екінші ретті модельдік дифференциалдық оператор үшін спектральдық есеп қарастырылады. Оператор $\ell_p u = -u''(-x)$ дифференциалдық өрнегімен және жалпы түрдегі шекаралық шарттармен беріледі. Оператордың меншікті функцияларының жүйесінің базистігі критерийі шекаралық шарттардың коэффициенттері терминдерінде тағайындалады.

Сарсенби А.М., Сарсенби А.А. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой работе рассматривается спектральная задача для модельного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией. Оператор задается дифференциальным выражением $\ell_p u = -u''(-x)$ и граничными условиями общего вида. Критерий базисности системы собственных функций оператора устанавливается в терминах коэффициентов граничных условий.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 3. — С. 192–204.

УДК 517.956.29

A CRITERION OF WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET-CAUCHY PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION

B.T. Torebek[1], U.A. Iskakova[2]

[1,2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin str. e-mail: [1]torebek@math.kz

Dedicated to the 70th anniversary of our Teacher
Academician Tynysbek Kalmenov

Annotation: In this paper we consider the Dirichlet-Cauchy problem for multidimensional elliptic equations in a cylindrical domain. The method of spectral expansion in eigenfunctions of the Dirichlet-Cauchy problem for equations with deviating argument establishes a criterion of the strong solvability of the considered Dirichlet-Cauchy problem. It is shown that the ill-posedness of the Dirichlet-Cauchy problem is equivalent to the existence of an isolated point of the continuous spectrum for a self-adjoint operator with deviating argument.

Keywords: Elliptic equation, Cauchy problem, self-adjoint operator, ill-posedness.

1. Introduction

As it is known, the solution of the Cauchy problem for the Laplace equation is unique, but unstable. First of all it should be noted that the existence and uniqueness of its solution is essentially guaranteed by the universal Cauchy-Kovalevskaja theorem, which holds for Elliptic Problems. However, the existence of the solution is guaranteed only in a small. Traditionally the ill-posedness of the elliptic Cauchy problem is determined in relation to its equivalence to Fredholm integral equations of the first kind. The problem of solving the operator equation of the first kind can not be correct, since the operator which is inverse to completely continuous operator is not continuous.

Keywords: *Elliptic equation, Cauchy problem, self-adjoint operator, ill-posedness.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.
Funding: Committee of Science, Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan, Grant № 0820/GF4.

The Cauchy problem for the Laplace equation is one of the main examples of ill-posed problems. One can pick up the harmonic functions with arbitrarily small Cauchy data on a piece of the domain boundary, which will be arbitrarily large in the domain (the famous example of Hadamard) [1]. For the formulation of the problem to be correct, it is necessary to narrow down the class of solutions. The stability of a plane problem in the class of bounded solutions firstly was proved by Carleman [2].

From Carleman's results immediately follow estimations characterizing this stability. In the mentioned work Carleman obtained a formula for determinating an analytic function of a complex variable by its values on some piece of the arc. However, this formula is unstable and therefore can not be directly used as an efficient method. The first results related to the construction of an efficient algorithm for solving the problem, best of our knowledge, are published simultaneously in works Carlo Pucci [3] and M.M. Lavrentiev [4]. Estimates characterizing the stability of a spatial problem in the class of bounded solutions, were first obtained by M.M. Lavrent'ev [4] for harmonic functions, given in a straight cylinder and vanishing on the generators. The Cauchy data were given on the base of the cylinder. A little later, similar estimates were obtained by S.N. Mergelyan [5] for the functions within a sphere and by M.M. Lavrentiev [6] for an arbitrary spatial domain with sufficiently smooth boundary. Around the same time, E.M. Landis [7] obtained estimates characterizing the stability of spatial problem for an arbitrary elliptic equation.

The above results laid the foundation for the theory of ill-posed Cauchy problems for elliptic equations. By now this theory has deep development both for the plane, and for the spatial cases, and also for general elliptic equations of high order, etc. Methods of regularization and solutions of ill-posed problems have been proposed in [8]-[13]. In these works the concept of conditional correctness of such problems is introduced and algorithms for constructing their solutions are proposed.

In contrast to the presented results, in this paper a new criterion of well-posedness (ill-posedness) initial boundary value problem for a general an second order elliptic equation is proved. The principal difference of our work from the work of other authors is the application of spectral problems for equations with deviating argument in the study of ill posed boundary value problems. The present work is an extension of results [14]-[16] on the case of more general elliptic operators in a multidimensional cylindrical domain.

2. Formulation of the problem and main results

Let $D = \Omega \times (0,1)$ is a cylinder and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with smooth boundary S. In D we consider a mixed Dirichlet-Cauchy problem for elliptic equations

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,t) +$$

$$+a(x)u(x,t) = f(x,t),(x,t) \in D, \tag{1}$$

with Dirichlet

$$u(x,t) = 0, x \in S, t \in [0,1], \tag{2}$$

and Cauchy

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, x \in \Omega \cup S, \tag{3}$$

conditions. Here $a_{ij}(x)$ and $a(x)$ given bounded measurable functions satisfying the following conditions:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, c = const > 0, a_{ij}(x) = a_{ji}(x), a(x) \geq 0, \tag{4}$$

Definition 1. *The function $u \in L_2(D)$ we will call a strong solution of the Dirichlet-Cauchy problem* (1)–(3), *if there exists a sequence of functions $u_n \in C^2(\bar{D})$ satisfying conditions* (2) *and* (3), *such that u_n and Lu_n converge in the norm $L_2(D)$ respectively to u and f.* In the future, the following eigenvalue problem for an elliptic equation with deviating argument will play an important role. Find numerical values of λ (eigenvalues), under which the problem for a differential equation with deviating argument

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,t) +$$

$$+a(x)u(x,t) = \lambda u(x,1-t),(x,t) \in D, \tag{5}$$

has nonzero solutions (eigenfunctions) satisfying conditions (2) and (3). Obviously, the equivalent record of equation (5) has the form

$$LPu = \lambda u, (t, x) \in D,$$

where $Pu\left(x,t\right) = u\left(x, 1-t\right)$ is a unitary operator.

We consider the following spectral problem

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\left(x\right) + a\left(x\right)u_k\left(x\right) = \mu_k u_k\left(x\right), x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u_k\left(x\right) = 0, x \in S. \tag{7}$$

It is known [17], that problem (6) - (7) with the condition (4) is self-adjoint and non-negative definite operator in $L_2\left(\Omega\right)$. All the eigenvalues of the problem (6) - (7) are discrete and non-negative, and the system of eigenfunctions form a complete orthonormal system in $L_2\left(\Omega\right)$. By μ_k we denote all eigenvalues (numbered in decreasing order) and by $u_k\left(x\right), k \in \mathbb{N}$ denote a complete system of all orthonormal eigenfunctions of the problem (6)-(7) in $L_2\left(\Omega\right)$.

Theorem 1. *The spectral Dirichlet-Cauchy problem* (5), (2), (3) *has a complete orthonormal system of eigenfunctions*

$$u_{km}(x,t) = u_k\left(x\right) \cdot v_{km}\left(t\right), \tag{8}$$

where $k, m \in N$, $v_{km}(t)$ are non-zero solutions of the problem

$$v''_{km}\left(t\right) - \mu_k v_{km}\left(t\right) = \lambda_{km} v_{km}\left(1-t\right), 0 < t < 1, \tag{9}$$

$$v_{km}\left(0\right) = v'_{km}\left(0\right) = 0, \tag{10}$$

and λ_{km} are eigenvalues of problem (5), (2), (3). *In addition for the large k the smallest eigenvalue λ_{k1} has the asymptotic behavior*

$$\lambda_{k1} = 4\mu_k \exp(-\sqrt{\mu_k})\left(1 + o(1)\right). \tag{11}$$

Theorem 2. *A strong solution of the Dirichlet-Cauchy problem* (1)–(3) *exists if and only if $f\left(x,\, t\right)$ satisfies the inequality*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 < \infty, \tag{12}$$

where $\tilde{f}_{km} = (f(x,\, 1-t),\, u_{km}(x,\, t))$.

If condition (12) *holds, then a solution of problem* (1) - (3) *can be written as*

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}\,(x,\, t) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}\,(x,t)\,. \qquad (13)$$

By $\tilde{L}_2\,(D)$ we denote a subspace of $L_2(D)$, spanned by the eigenvectors $\{u_{k1}\,(x,t)\}_{k=p+1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$ and by $\hat{L}_2\,(D)$ we denote its orthogonal complement

$$L_2\,(D) = \tilde{L}_2\,(D) \oplus \hat{L}_2\,(D)\,.$$

Theorem 3. *For any* $f \in \hat{L}_2\,(D)$ *a solution of the problem* (1) - (3) *exists, is unique and belongs to* $\hat{L}_2\,(D)$. *This solution is stable and has the form*

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}\,(x,\, t) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}\,(x,t)\,. \qquad (14)$$

3. Some auxiliary statements

In this section we present some auxiliary results to prove the main results.

Lemma 1. *For each fixed value of the index* k *the spectral problem* (9)-(10) *has a complete orthonormal in* $L_2\,(0,1)$ *system of eigenfunctions* $v_{km}\,(t)\,, m \in \mathbb{N}$, *corresponding to the eigenvalues* λ_{km}. *These eigenvalues* λ_{km} *are roots of the equation*

$$\sqrt{\mu_k - \lambda} \cosh \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} \cosh \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} - \sqrt{\mu_k + \lambda} \sinh \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} \sinh \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} = 0. \qquad (15)$$

Proof. Indeed, applying an inverse operator L_C^{-1} to the Cauchy problem (9)–(10) we arrive at the operator equation

$$v_{km}\,(t) = \lambda L_C^{-1} P v_{km}\,(t)\,,$$

where $Pf\,(t) = f\,(1-t)$, and a function $\phi\,(t) = L_C^{-1} f\,(t)$ is the solution of the Cauchy problem

$$\phi''\,(t) - \mu_k \phi\,(t) = f\,(t)\,, \phi\,(0) = \phi'\,(0) = 0, \forall f\,(t) \in L_2\,(0,1)\,.$$

Then for the operator L_C^{-1} we have the representation

$$L_C^{-1} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \int\limits_0^t f(\xi) \sinh \sqrt{\mu_k} (t - \xi) \, d\xi, \forall f(t) \in L_2(0,1). \tag{16}$$

Therefore, the adjoint to L_C^{-1} operator has the form

$$\left(L_C^{-1}\right)^* f(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \int\limits_t^1 f(\xi) \sinh \sqrt{\mu_k} (\xi - t) \, d\xi, \forall f(t) \in L_2(0,1). \tag{17}$$

Taking into account representation (16) and (17), it is easy to make sure that $L_C^{-1} P f = P \left(L_C^{-1}\right)^* f$. Then the chain of equalities

$$L_C^{-1} P f = P \left(L_C^{-1}\right)^* f = P^* \left(L_C^{-1}\right)^* f = \left(L_C^{-1} P\right)^* f, \forall f(t) \in L_2(0,1),$$

allows us to conclude that the operator $L_C^{-1} P$ is completely continuous self-adjoint Hilbert-Schmidt operator [18]. Therefore for each $k \in \mathbb{N}$, the spectral problem (9), (10) has a complete orthonormal system of functions $v_{km}(t)$, $m \in \mathbb{N}$ in $L_2(0,1)$.

We are looking for eigenfunctions of problem (5), (2), (3) by means of the Fourier method of separation of variables in the form

$$u_k(x,t) = u_k(x) \, v(t),$$

where $k \in \mathbb{N}$. Therefore, for determination of unknown function $v(t)$ we get the spectral problem (9), (10). It is easy to show that the general solution of equation (9) has the form

$$v(t) = c_1 \cosh \sqrt{\mu_k + \lambda} \left(t - \frac{1}{2}\right) + c_2 \sinh \sqrt{\mu_k - \lambda} \left(t - \frac{1}{2}\right),$$

where c_1 and c_2 are some constants. Using the initial conditions (9), we arrive at the system of linear homogeneous equations concerning these constants. As we know, this system has a nontrivial solution if a determinant of the system

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cosh \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} & \sinh \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} \\ \sqrt{\mu_k + \lambda} \sinh \frac{\sqrt{\mu_k + \lambda}}{2} & \sqrt{\mu_k - \lambda} \cosh \frac{\sqrt{\mu_k - \lambda}}{2} \end{vmatrix}$$

is zero. Thus, for determining the parameter λ we get (15). The proof of Lemma 1 is complete.

Let

$$\varpi_k(\lambda) = \ln\left(\coth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}\right) + \ln\left(\coth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mu_k+\lambda}{\mu_k-\lambda}\right) = 0. \qquad (18)$$

Lemma 2. *There exists a number λ_0 such that for all*

$$0 < \lambda < \lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta},\ k \in \mathbb{N},\ \theta \in (0,\,1)\ ,$$

the following statements are true:
1) the function $\varpi_k'(\lambda)$ is a constant sign;
2) for the function $\varpi_k''(\lambda)$ the following inequality holds

$$\left|\lambda\mu_k\varpi_k''(\lambda)\right| < 1,\ \ k > 1.$$

Proof. By virtue of Lemma 1 we have the real eigenvalues of problem (9)-(10), that is, real roots λ_{km} of equation (15). It is easy to verify that $\lambda_{km} > 0$.

Indeed, let us write the asymptotic behavior of the smallest eigenvalues λ_{km} at $k \to \infty$. After a nontrivial transformation of equation (15), we have

$$\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{\sqrt{\mu_k-\lambda}} = \coth\frac{\sqrt{\mu_k+\lambda}}{2}\coth\frac{\sqrt{\mu_k-\lambda}}{2}. \qquad (19)$$

Assuming $|\lambda| < 1$ and logarithming both sides of equation (19), we obtain (18). By calculating the derivative $\varpi_k(\lambda)$, we get

$$\varpi_k'(0) = -\frac{1}{\mu_k}.$$

Then the required boundary of monotonicity of $\varpi_k(\lambda)$ can be determined from the relation

$$\varpi_k'(\lambda_0) = \varpi_k'(0) + \varpi_k''(\theta\lambda_0)\,\lambda_0 < 0.$$

Here $0 < \lambda_0 < 1$ and $\theta \in (0,1)$ is an arbitrary number. Thus, for determining λ_0 we have the condition

$$\lambda_0\mu_k\varpi_k''(\theta\lambda_0) < 1. \qquad (20)$$

We write explicitly the second derivative of functions $\varpi_k(\lambda)$:

$$\varpi_k''(\lambda) = \frac{\cosh\sqrt{\mu_k+\lambda}}{4\left(\mu_k+\lambda\right)\sinh^2\sqrt{\mu_k+\lambda}} + \frac{\cosh\sqrt{\mu_k-\lambda}}{4\left(\mu_k-\lambda\right)\sinh^2\sqrt{\mu_k-\lambda}} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\left(\mu_k+\lambda\right)^3}\sinh\sqrt{\mu_k+\lambda}} + \frac{1}{4\sqrt{\left(\mu_k-\lambda\right)^3}\sinh\sqrt{\mu_k-\lambda}} - \frac{2\lambda\mu_k}{\left(\mu_k^2-\lambda^2\right)^2}.$$

As

$$\frac{2\lambda_0\theta\mu_k}{\left(\mu_k^2-(\lambda_0\theta)^2\right)^2} \geq -\frac{1}{\left(\mu_k+\lambda_0\theta\right)^2}$$

and

$$\frac{\cosh\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}}{\sinh^2\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}} \leq \frac{1}{\cosh\sqrt{\mu_k\pm\lambda_0\theta}-1}.$$

Then the inequality

$$\varpi_k''(\lambda_0\theta) \leq \frac{1}{\left(\mu_k-\lambda_0\theta\right)} \frac{2+\left(1-\exp\left(-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}\right)\right)^2}{\left(1-\exp\left(-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}\right)\right)^2}$$

is true. Hence

$$\varpi_k''\left(\lambda_0\theta\right) < \frac{1}{\left(\mu_k-\lambda_0\theta\right)} \frac{3-2\exp\left(-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}\right)+\exp\left(-2\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}\right)}{\left(1-\exp\left(-\sqrt{\mu_k-\lambda_0\theta}\right)\right)^2}. \quad (21)$$

Further, for large values k from (21) we obtain the validity of the inequality

$$\varpi_k''\left(\lambda_0\theta\right) \leq \frac{4}{\mu_k-\lambda_0\theta}.$$

Applying the condition (18) to the last inequality, we obtain the desired boundary for λ_0 :

$$\lambda_0 < \frac{\mu_k}{4\mu_k+\theta},\ \mu_k > 1,\ 0 < \theta < 1.$$

Lemma 2 is proved.

Consider now the question of an asymptotic behavior of the eigenvalues of problem (9)–(10) at large k.

Lemma 3. *An asymptotic behavior of eigenvalues of the problem* (9)–(10), *not exceeding* λ_0, *for the large values of* k *has the form* (11).

Proof. According to Lemma 2 the monotonic function $\varpi_k(\lambda)$ in the interval $(0,\, \lambda_0)$ can have only one zero. By the Taylor formula we have

$$\varpi_k(\lambda) = \varpi_k(0) + \frac{\varpi_k'(0)}{1!}\lambda + \frac{\varpi_k''(\theta\lambda)}{2!}\lambda^2 < 0\,,\; 0 < \theta < 1.$$

Substituting the calculated values of the function ϖ_k and its derivative ϖ_k', we get

$$\varpi_k(\lambda) = 2\ln\left(\coth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right) - \frac{\lambda}{\mu_k} + \varpi_k''(\theta\lambda)\,\frac{\lambda^2}{2}.$$

Then the zero of linear part of the function

$$\mu_k\varpi_k(\lambda) = 2\mu_k\ln\left(\coth\frac{\sqrt{\mu_k}}{2}\right) - \lambda + \frac{\mu_k\lambda^2}{2}\varpi_k''(\theta\lambda)$$

will be

$$\lambda_{k1} = 2\mu_k\ln\left(\frac{1+\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)}{1-\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)}\right).$$

For sufficiently large values $k \in \mathbb{N}$, considering the asymptotic formulas, λ_{k1} can be written as

$$\lambda_{k1} = 4\mu_k\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)(1+o(1)).$$

Taking into account the result of Lemma 2 on a circle $|\lambda| = 4\mu_k\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)(1+\varepsilon)$, where ε is a greatly small positive number, for sufficiently large $k \geq k_0(\varepsilon)$ it is easy to check the validity of inequality

$$\left|\varpi_k''(\theta\lambda)\,\mu_k\lambda^2\right|_{|\lambda|=4\mu_k\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)(1+\varepsilon)} \leq$$

$$\leq C\left|2\mu_k\ln\left(\frac{1+\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)}{1-\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)}\right) - \lambda\right|_{|\lambda|=4\mu_k\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)(1+\varepsilon)}.$$

Then, by Rouche's theorem [19], we have that the quantity of zeros of $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ and its linear part coincide and are inside the circle $|\lambda| = 4\mu_k\exp\left(-\sqrt{\mu_k}\right)(1+\varepsilon)$. Consequently, the function $\mu_k\varpi_k(\lambda)$ for $0 < \lambda < \lambda_0$ has one zero, the asymptotic behavior is given by formula (11). Lemma 3 is proved.

4. Proof of the main results

Proof (Theorem 1). By $u_k(x), k \in \mathbb{N}$ we have denoted a complete system of orthonormal eigenfunctions of the problem (6)-(7) in $L_2(\Omega)$. By Lemma 1, for each fixed value of the k the spectral problem (9) - (10) has complete orthonormal system of eigenfunctions $v_{km}(t), m = 1, 2, ...$ in $L_2(0,1)$. Then the system (8) forms a complete orthogonal system in $L_2(D)$. Consequently, problem (5), (3) does not have the other eigenvalues and eigenfunctions. Theorem 1 is proved.

Proof (Theorem 2). Let $u(x,t) \in C^2(D)$ be a solution of problem (1) - (3). Then, by virtue of the completeness and orthonormality of eigenfunctions $u_{km}(x,t)$ of problem (5), (2), (3), the function $u(x,t)$ in $L_2(D)$ can be expanded in a series [20]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} u_{km}(x,t), \tag{22}$$

where a_{km} are Fourier coefficients of the system. Rewriting equation (1) in the form

$$LPu = P\left(u_{tt}(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,t) + a(x)\,u(x,t)\right) =$$

$$= Pf(x,t), \tag{23}$$

and substituting the solution of form (22) in equation (23) according to the ratio

$$P\left(\frac{\partial^2 u_{km}}{\partial t^2}(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,t) + a(x)\,u(x,t)\right) =$$

$$= \lambda_{km} u_{km}(x,t),$$

we have

$$a_{km} = \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}},$$

where $\tilde{f}_{km} = (f(x,\,1-t),\, u_{km}(x,\,t))$.

Thus for solutions $u(x,t)$ we obtain the following explicit representation

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x,t). \qquad (24)$$

Note that the representation (24) remains true for any strong solution of problem (1)-(3). We have obtained this representation under the assumption that the solution of the Dirichlet-Cauchy problem (1)-(3) exists.

The question naturally arises, for what subset of the functions $f \in L_2(D)$ there exists a strong solution?

To answer this question, we represent the formula (24) in the form (13) from which, by Parseval's equality, it follows

$$\|\mathrm{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} \left|\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}\right|^2. \qquad (25)$$

By virtue of Lemma 3 we have $\lambda_{km} \geq \frac{1}{4}$, $m > 1$. Therefore, the right-hand side of equality (25) is limited only for those $f(x,\, t)$, for which the weighted norm (12) is limited. This fact proves Theorem 2.

Proof (Theorem 3). Obviously that the operator L is invariant in $\hat{L}_2(D)$. By Theorem 2, for any $f \in \hat{L}_2(D)$ there exists a unique solution of problem (1) - (3) and it can be represented in the form (14). Therefore, a certain infinite-dimensional space $\hat{L}_2(D)$ is the space of correctness of the Dirichlet-Cauchy problem (1)-(3). Theorem 3 is proved.

5. Acknowledgements

The Authors are Grateful to Professor T.Sh. Kal'menov and to Professor M.A. Sadybekov for valuable advices during discussions of the results of the present work.

References

1 Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations. – Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

2 Garleman T. Les fonctions quasi analytiques. – Paris, 1926.

3 Pucci C. Sui problema di Cauchy non "ben posti"// Atti Accad. Naz. d. Lincei. – 1955. – V. 18, № 5. – P. 473-477.

4 Lavrentev M.M. On a Cauchy Problem for the Poisson Equation // Izv. AS USSR, ser. Math. – 1955. – V. 20, № 6. – P. 819-842.

5 Mergelyan S.N. Harmonic Approximation and Approximate Solution of the Cauchy Problem for the Laplace Equation // Usp. Matem. Nauk. – 1956. – V. 11, № 5. – P. 3-26.

6 Lavrent'ev M.M. On the Cauchy problem for second order linear elliptic equations // Dokl. Akad. Nauk. – 1957. – V. 112. – P. 195-197.

7 Landis M. Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations // Russian Math. Surveys. – 1963. – V. 18, № 1. – P. 1-62.

8 Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Methods for solving ill-posed problems. – M .: Nauka, 1979. – 142 p.

9 Qian Z., Fu C.L., Li Z.P. Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation. // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 338, № 1. – P. 479-489.

10 Falk R.S., Monk P.B. Logarithmic convexity for discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy problem for Poisson's equation. // Math. Comp. – 1986. – V. 47. – P. 135-149.

11 Kabanikhin S.I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – V. 16. – P. 317–357.

12 Eldén L., Simoncini V. A numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces. // Inverse Probl. – 2009. – V. 25, № 6. – P. 2187-2205.

13 Sun Y. Modified method of fundamental solutions for the Cauchy problem connected with the Laplace equation // Int. J. Comp. Math. – 2014. – V. 91, № 10. – P. 2185-2198.

14 Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed cauchy problem for the Laplace equation // Doklady Mathematics. – 2007. – V. 75, № 3. – P. 370-373.

15 Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, № 3. – P. 874–876.

16 Kal'menov T.S., Iskakova U.A. Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation // Differential Equations. – 2009. – V. 45, № 10. – P. 1460-1466.

17 Lawrence C. Evans Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics). – American Mathematical Society, 2010.

18 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. – M.: Nauka, 1972. – 496 p.

19 Titchmarsh E.C. The Theory of Functions. 2nd ed. – Oxford University Press, 1939.

20 Naimark M.A. Linear Differential Operators, Part II. – Ungar, New York, 1968.

Received 06.06.2016

Төребек Б.Т., Искакова У.А. ЕКІНШІ РЕТТІ ЭЛЛИПСТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН ДИРИХЛЕ-КОШИ ЕСЕБІНІҢ ҚИСЫНДЫЛЫҚ КРИТЕРИІ

Бұл жұмыста екінші ретті эллипстік теңдеу үшін цилиндрлік облыста Дирихле-Коши есебі қарастырылады. Ауытқулы аргументті теңдеу үшін Дирихле-Коши есебінің меншікті функциялары бойынша спектралды жіктеу әдісі арқылы, қарастырылған Дирихле-Коши есебінің күшті шешілімділігінің критериі алынған. Дирихле-Коши есебінің қисынсыздығы ауытқулы аргументті өз-өзіне түйіндес оператордың үзіліссіз спектрінің оқшауланған нүктелерінің бар болуына пара-пар екендігі көрсетілген.

Торебек Б.Т., Искакова У.А. КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле-Коши для эллиптического уравнения второго порядка в цилиндрической области. Методом спектрального разложения по собственным функциям задачи Дирихле-Коши для уравнения с отклоняющимся аргументом установлен критерий сильной разрешимости рассматриваемой задачи Дирихле-Коши. Показывается, что некорректность задачи Дирихле-Коши оказывается эквивалентной существованию изолированной точки непрерывного спектра для самосопряженного оператора с отклоняющимся аргументом.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, №3 (61), 2016

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
05.09.2016 г.

Тираж 300 экз. Объем 207 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz