

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 18 № 4 (70) 2018

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

ISSN 1682–0525

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*MATHEMATICAL JOURNAL*

Том 18 № 4 (70) 2018

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

Институт математики и математического моделирования

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

**Том 18, № 4 (70), 2018**

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

*Главный редактор: член-корр. НАН РК, д.ф.-м.н., проф. М.А. Садыбеков*

*Заместитель главного редактора: д.ф.-м.н., проф. А.Т. Асанова*

*Редакционная коллегия:*

д.ф.-м.н., проф. Л.А. Алексеева, к.ф.-м.н., проф. Д.Б. Базарханов,  
член-корр. НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Б.С. Байжанов,  
д.ф.-м.н., проф. Г.И. Бижанова, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Н.К. Б依ев,  
д.ф.-м.н., проф. В.Г. Воинов, д.ф.-м.н., проф. Н.С. Даирбеков,  
д.ф.-м.н., проф. М.Т. Дженалиев, д.ф.-м.н., проф. Д.С. Джумабаев,  
академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. А.С. Джумадиляев,  
академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Т.Ш. Кальменов, д.ф.-м.н., проф. К.Т. Мынбаев,  
д.ф.-м.н., проф. А.Ж. Найманова, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. М. Отелбаев,  
к.ф.-м.н. И.Н. Панкратова, д.ф.-м.н., проф. М.Г. Перетятыкин,  
академик РАН, д.ф.-м.н., проф. И.А. Тайманов (Россия),  
д.ф.-м.н., проф. М.И. Тлеубергенов, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. С.Н. Харин.

Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева

*Адрес редакции:*

Институт математики и математического моделирования,  
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,  
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,  
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

© Институт математики и математического моделирования, 2018 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 18

№ 4 (70)

2018

---

---

<i>Stanislav Nikolayevich Kharin</i> (to his 80-th anniversary) .....	5
<i>Алдашев С.А.</i> Неединственность решения задачи Трикоми для вырождающегося многомерного гипербола-параболического уравнения .....	22
<i>Дженалиев М.Т., Искаков С.А., Рамазанов М.И.</i> Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности в вырождающейся области .....	31
<i>Dzhumabaev D.S., Smadiyeva A.G.</i> An algorithm of solving a linear boundary value problem for a loaded Fredholm integro-differential equation .....	48
<i>Кабдрахова С.С.</i> Об одном приближенном методе нахождения решения полу-периодической краевой задачи для одного неклассического уравнения третьего порядка .....	61
<i>Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A.</i> On inverse problem of reconstructing subdiffusion process with degeneration from nonlocal data .....	86

---

---

---

---

## CONTENTS

---

---

**Volume 18**

**No. 4 (70)**

**2018**

---

---

<i>Stanislav Nikolayevich Kharin</i> (to his 80-th anniversary) .....	5
<i>Aldashev S.A.</i> Nonuniqueness of solutions of the Tricomi problem for a degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation .....	22
<i>Jenaliyev M.T., Iskakov S.A., Ramazanov M.I.</i> On one boundary value problem for the equation of a heat conduction in a degenerating domain .....	31
<i>Dzhumabaev D.S., Smadiyeva A.G.</i> An algorithm of solving a linear boundary value problem for a loaded Fredholm integro-differential equation .....	48
<i>Kabdrakhova S.S.</i> On one approximate method of finding solution of the semiperiodical boundary value problem for the nonclassical third order equation .....	61
<i>Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A.</i> On inverse problem of reconstructing subdiffusion process with degeneration from nonlocal data .....	86

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## STANISLAV NIKOLAYEVICH KHARIN

(TO HIS 80-TH ANNIVERSARY)



Stanislav Nikolayevich Kharin was born 4th December, 1938 in the village of Kaskelen, Alma-Ata region. In 1956 he graduated from high school in Voronezh with a gold medal, and applied to the Faculty of Mathematics and Mechanics of Kazakh State University, which he graduated with honors in 1961. In 1961-1964, as a graduate student of the Department of the Equations of Mathematical Physics at Kazakh State University, he was in Kharkov, where he joined the great science

under the guidance of E.I. Kim.

Already in these years S.N. Kharin showed outstanding abilities in the field of mathematical physics, as evidenced by his first scientific publication in a prestigious "Engineering Physics Journal". After that he has published many papers related to mathematical modeling phenomena in electrical contacts and thermo-bimetallic elements which used for the elaboration of new types of low voltage electrical equipment and put into mass production.

For these achievements S.N. Kharin was awarded the Badge of Honor "Inventor of the USSR" and the Gold Medal of the All Union Exhibition of Achievements of the People Economy of the USSR.

After graduating in 1964, Stanislav Nikolayevich was sent to work in the Mathematics and Mechanics Sector of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, transformed in 1965 into the Institute of Mathematics and

Mechanics of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, where all his further work activities take place. In 1968, S.N. Kharin defended his candidate dissertation, which was devoted to the solution of singular integral equations related to the problems of mathematical modeling of thermal phenomena in electrical contacts. In 1980 S.N. Kharin was worked as a senior researcher in the laboratory of equations of mathematical physics, and in 1980-1994 as the Deputy Director for Research of the Institute of Mathematics.

In 1990, Stanislav Nikolayevich defended his doctoral thesis on the topic "Mathematical models of thermo-physical processes in electrical contacts" at the Institute of Thermal Physics of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR (Novosibirsk). In 1994 S.N. Kharin was elected a Corresponding Member of the National Academy of Sciences, and in 2005, her full member. In 1994-1996 he headed the Department of Physical and Mathematical Sciences of the Academy of Sciences as its Academician-Secretary, was a member of the Presidium of the Academy of Sciences of the Kazakhstan and at the same time headed his laboratory at the Institute of Mathematics.

Original scientific results obtained by S.N. Kharin, was the reason that in 1997 he was invited to the one of the most prestigious universities in Pakistan, GIK Institute of Engineering Sciences and Technology, as a professor, where he worked until 2001. This stage turned out to be one of the most fruitful in the scientific activity of Stanislav Nikolayevich. For the results obtained in the field of mathematical modeling of thermal and electrical phenomena, he was elected a Foreign Member of the National Academy of Sciences of Pakistan and was appointed curator of the section on mathematics in the central journal "News of the Academy of Sciences of Pakistan".

In 2001 S.N. Kharin is invited to the position of the professor at the University of the West of England (Bristol, England), where he worked until 2003. Here, a fruitful team was created to study such complex and important for practice phenomena as the transition of an arc discharge into a glowing one, vibration of the contacts of vacuum switches under the action of a metal arc vapor, stagnation of an arc spot and others. Mathematical models developed by S.N. Kharin undergo experimental verification in the laboratories of Prof. D. Amft (Chemnitz, Germany), Prof. B. Miedzinsky (Wroclaw, Poland) and Prof. H. Nouri (Bristol, England). As a result of this collaboration a series of

joint original publications in leading international journals were published.

In the Fall, 2003, Stanislav Nikolayevich returned to Pakistan, where he continued to work as a professor at the GIK Institute until the Summer of 2005. In 2005, he came back to Kazakhstan and was invited to work at Kazakh-British University as a professor of mathematics, where he is currently working. In Demirel Kazakh-Turkish University, Al-Farabi Kazakh National University also conducts training of young specialists.

The research results of Stanislav Nikolayevich Kharin were presented at international conferences and congresses in the USA, England, Japan, Canada, Germany, France, Switzerland, Poland, Bulgaria, Pakistan, as well as at many All-Union and republican conferences. He published over 300 scientific papers in leading foreign and republican journals and 4 monographs, and received 12 inventor certificates for inventions. S.N. Kharin organized and conducted All-Union Seminar "Mathematical and theoretical problems in contact technology" (Alma-Ata, 1970), II All-Union Seminar "Heat and mass transfer in electrical contacts" (Alma-Ata, 1979), III All-Union seminar "Unsteady arc and near-electrode processes in electrical devices and plasma torches" (Baikal, 1991), International Symposium "Electrical contacts, Theory and application – ISECTA-93" (Alma-Ata, 1993). In 2015 in San Diego He was awarded by the International Holm Award for the outstanding achievements in the theory and applications of electrical contacts.

Stanislav Nikolayevich paid much attention to the training of scientific personnel. Under his scientific leadership, 10 candidate dissertations and 4 theses for the PhD degree were successfully defended. He was the Chairman of the Committee on Scientific and Technical Cooperation between the Republic of Kazakhstan and the Islamic Republic of Pakistan (1996-2001) and the President of the Small Academy of Sciences of schoolchildren. Now he continues his research activity successfully and evidence of this is a new monograph "Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts" published last year in Novosibirsk.

The staff of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling and numerous friends, colleagues, students of Stanislav Nikolayevich Kharin heartily congratulate him on his anniversary and wish him health, success and happiness.



LIST OF SCIENTIFIC WORKS AND INVENTIONS OF  
KHARIN STANISLAV NIKOLAYEVICH

More than 300 publications, including 4 monographs and 12 inventor's certificates

## BOOKS:

1 Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. – Изд. Наука, Алма-Ата, 1977. – 236 с.

2 Намитоков К.К., Пахомов П.И., Харин С.Н. Радиация газоразрядной плазмы. – Изд. Наука, Алма-Ата, 1984. – 304 с.

3 Намитоков К.К., Пахомов П.И., Харин С.Н. Математическое моделирование процессов в газоразрядной плазме. – Изд. Наука, Алма-Ата, 1988. – 208 с.

4 Kharin S.N. Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts. – The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, A.P. Ershov Institute of Informatics System, Novosibirsk, 2017. – 193 p.

MAIN JOURNAL PAPERS AND PUBLICATIONS IN THE PROCEEDINGS OF  
INTERNATIONAL CONFERENCES

1 Харин С.Н. и др. Решение уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами и его приложение к проблеме электрических контактов // Инженерно-физический журнал. – 1965. – Т. VIII, № 6. – 1965. – С. 761-767.

2 Харин С.Н. и др. Расчет температурного поля при размыкании электрических контактов // Известия Академии наук Каз. ССР, серия физ.-мат. – 1966. – № 12. – С. 14-20.

3 Харин С.Н. и др. О задаче теплопереноса в электрических контактах // Известия Академии наук Каз. ССР, серия физ.-мат. – 1969. – № 3. – С. 5-9.

4 Харин С.Н. и др. Плавление и сваривание замкнутых электрических контактов // Известия Академии наук Каз. ССР, серия физ.-мат. – 1970. – № 3. – С. 6-12.

5 Харин С.Н. и др. Исследование температурных режимов электрических контактов в последовательных стадиях их работы // Сборник статей

"Сильноточные электрические контакты". – Киев, Наукова Думка. – 1970. – С. 12-17.

6 Харин С.Н. и др. Температурное поле замкнутых электрических контактов с воздушным охлаждением // Сборник статей "Сильноточные электрические контакты". – Киев, Наукова Думка. – 1970. – С. 108-115.

7 Харин С.Н. и др. Температурное поле разнородных электрических контактов внахлест // Сборник статей "Сильноточные электрические контакты". – Киев, Наукова Думка. – 1970. – С. 116-125.

8 Харин С.Н. и др. Динамика теплопереноса в замкнутых неидеальных электрических контактах // Сборник статей "Электрические контакты". – Москва, Наука. – 1972. – С. 24-28.

9 Харин С.Н. и др. Трехмерная задача теплообмена в неидеальном контакте с сопротивлением, зависящим от температуры // Известия Академии наук Каз.ССР, серия физ.-мат. – 1973. – № 5. – С. 36-41.

10 Харин С.Н. и др. Расчетная схема контактного соединения внахлест // Вестник Харьковского политехнического института. – 1973. – Часть 5. – С. 14-20.

11 Kharin S.N. et al. Zastosowanie metod obliszeniowych przy konstruowaniu termo bimetalii // Proc. of the Poznan Polytechnic Institute, the Section of Electrical Apparatus. – 1975. – P. 167-174 (Pol.).

12 Харин С.Н. и др. Влияние твердости контактного материала на процесс сваривания // Вестник Харьковского политехнического института. – 1975. – Часть 1, № 110. – С. 53-58.

13 Харин С.Н. и др. Модель термоупругого разрушения электродов в импульсном разряде // Известия Академии наук Каз. ССР, серия физ.-мат. – 1976. – № 5. – С. 19-23.

14 Kharin S.N. Models for Investigation of Heat and Mass Transfer in Electrical Contacts // Proc. of the 8-th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts, Tokyo, Japan, 1976. – P. 553-558.

15 Kharin S.N. et al. Investigation of Physical Processes at the Initial Stage of Opening of Electrical Contacts // Proc. of the 8-th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts. – Tokyo, Japan, 1976. – P. 25-29.

16 Kharin S.N. et al. Calculation of Bimetallic Elements of Automatic Circuit Breakers and Thermo-Regulators of Electrical Appliances // Proc. of the 3d Int. Symp. "Perspectives and Problems of Low Voltage Electrical

Apparatus" (SIELA-77). – Plovdiv, Bulgaria, 1977. – P. 7-10.

17 Харин С.Н. и др. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах // Известия ВУЗов, Электромеханика. – 1978. – № 1. – С. 5-28.

18 Харин С.Н. и др. Постановка задач в теории мостиковой эрозии электрических контактов // Труды 5-го сов.-чехосл. симп. по прилож. мет. теории функций и функц. анал. к пробл. мат. физ. – Новосибирск, 1979. – С. 43-49.

19 Харин С.Н. Механизм термоупругого разрушения электродов // Известия СО АН СССР, серия техн. – 1980. – Т. 3, № 13. – С. 42-45.

20 Харин С.Н. и др. Об одном классе задач нелинейного теплопереноса в теории электрических контактов (Kharin S.N. About One Class of Non-linear Heat Transfer Problems in the Theory of Electrical Contacts) // Межд. конф. по дифф. уравн. и вычислит. мат. – Новосибирск. – 1980. – С. 83-86.

21 Kharin S.N. et al. The Analysis of the Influence of Various Factors on the Process of the Arc Erosion of Electrical Contacts // Proc. of the 4th Int. Symp. "Perspectives and Problems of Low Voltage Electrical Apparatus" (SIELA-80). – Plovdiv, Bulgaria, 1980. – P. 3-9.

22 Kharin S.N. et al. Mathematical Models of the Bridge Erosion in Low Voltage Electrical Contacts // Proc. of the 4th Int. Symp. "Perspectives and Problems of Low Voltage Electrical Apparatus" (SIELA-80). – Plovdiv, Bulgaria, 1980. – P. 112-118.

23 Харин С.Н. и др. Электромагнитное и температурное поля в замкнутых электрических контактах // Известия ВУЗов, Электромеханика. – 1981. – № 810. – С. 1075-1078.

24 Kharin S.N. Thermo-physical Processes in Electrical Contacts with Short Arc // Proc. of 11-th ICEC Conf. on Electrical Contacts, Berlin (West), VDE-Verlag GmbH, 1982. – P. 82-93.

25 Харин С.Н. и др. Математическая модель сваривания электрических контактов при их вибрации // Известия ВУЗов, Электромеханика. – 1982. – № 8. – С. 986-989.

26 Харин С.Н. и др. Модели теплового воздействия дуги при размыкании контактов // Известия ВУЗов, Электромеханика. – 1982. – № 8. – С. 1473-1474.

27 Харин С.Н. Механизм разрушения поверхностного слоя металла в

процессе импульсной электрической обработки // Численные методы механики твердого тела. – 1982. – Т. 13, № 3. – С. 118-121.

28 Харин С.Н. Тепло- и массоперенос в жидкометаллических мостиках между электрическими контактами // Электронная обработка металлов. – 1983. – Т. 2, № 1. – С. 20-22.

29 Ким Е.И., Харин С.Н. Модель термоупругого разрушения в процессе электроэрозионной обработки металлов // Электронная обработка металлов. – 1983. – Т. 2, № 2. – С. 5-6.

30 Kharin S.N. Thermo gas-kinetic Model of Arc and Near-electrode Phenomena in Electrical Contacts // Proc. of the 5th Int. Conf. Kontaktronika'85. – Bydgoszcz, Poland, 1985. – P. 22-31.

31 Kim E.I., Kharin S.N. Thermo-physical Model and Erosion of Electrical Contacts During Their Opening // Proc. of the Int. Conf. IC-GEMCA. – Nagoya, Japan. – 1986. – P. 195-197.

32 Kim E.I., Kharin S.N. The Influence of Surface Films on the Heating of Closed and Opening Electrical Contacts // Proc. of the Int. Conf. IC-GEMCA, Nagoya, Japan, 1986. – P. 362-268.

33 Kharin S.N. Mathematical Models of Heat and Mass Transfer in Molten Metal Electrical Contact Bridges // Proc. of the 6th Int. Conf. Kontaktronika'88. – Bydgoszcz, Poland, 1988. – P. 89-94.

34 Kharin S.N. The Influence of Near- and Intro-electrode Processes on the Dynamics of Electrical Arc and Contact Erosion // Proc. of the Int. Conf. IC - ECEMC. – Beijing, China, 1989. – P. 598-608.

35 Kharin S.N. et al. Dynamics of Thermo-physical Processes on the Cathode at the Electric Arc Influence // Proc. of the 6th Int. Conf. on Switching Arc Phenomena. – Lodz, Poland, 1989. – P. 259-262.

36 Kharin S.N. et al. The Influence of Electrical Parameters of Circuit on Arc Process at Low Current // Proc. of the 6th Int. Conf. on Switching Arc Phenomena. – Lodz, Poland, 1989. – P. 263-267.

37 Kharin S.N. Thermo-capillary Mechanism of Contact Erosion during Arcing // Proc. of the 36th IEEE Holm Conf. and 15th Int. Conf. on Electric Contacts. – Montreal, Canada, 1990. – P. 37-47.

38 Kharin S.N., Mikhailov V.V., Batalin A.S. Dynamic and Thermo-physical Processes in Low Current Sliding Contacts // Proc. of the 36th IEEE Holm Conf. and 15th Int. Conf. on Electric Contacts. – Montreal, Canada,

1990. – P. 301-305.

39 Харин С.Н. Динамика взаимодействия приэлектродных и внутри-электродных процессов в электрической дуге // Труды межд. сем. по динамике сильноточного дугового разряда в магнитном поле, Новосибирск, 1990. – С. 18-33.

40 Kharin S.N. Transient Thermo-physical Phenomena at the Pre-arcing Period during Opening of Electrical Contacts // Proc. of the 37th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Chicago, USA, 1991. – P. 53-65.

41 Харин С.Н. и др. Физические и химические процессы в зоне расплава циркониевого катода // Труды межд. сем. "Нестационарная дуга и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазмотронах. Озеро Байкал". – Изд. Гылым, Алматы, 1991. – С. 60-67.

42 Харин С.Н. Математическое моделирование процессов дуговой эрозии // Труды межд. сем. "Нестационарная дуга и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазмотронах. Озеро Байкал". – Изд. Гылым, Алматы, 1991. – С. 150-153.

43 Харин С.Н. и др. Нестационарные процессы в дуге, шунтированной емкостью // Труды межд. сем. "Нестационарная дуга и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазмотронах. Озеро Байкал". – Изд. Гылым, Алматы, 1991. – С. 60-67.

44 Харин С.Н. и др. Математические модели тепло- и массообмена в жидкометаллических электроконтактных мостиках // Труды межд. сем. "Нестационарная дуга и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазмотронах. Озеро Байкал". – Изд. Гылым, Алматы, 1991. – С. 191-194.

45 Kharin S.N. Mathematical Model of Arc Erosion in Electrical Contacts // Proc. of the 16th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts. – Loughborough, England, 1992. – P. 205-209.

46 Braunovic M., Kharin S.N. Dynamic Processes in Aluminum-to-Copper Bolted Connections Under Current-Cycling Conditions // Proc. of the 16th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts. – Loughborough, England, 1992. – P. 241-247.

47 Kharin S.N., Kavokin A.A., Shpadi Y.R. Transient Phenomena in Capacitance Shunted Arcs // Proc. of the Int. Symp. on Electrical Contacts, Theory and Applications (ISECTA'93). – Almaty, Kazakhstan, 1993. – P. 48-

52.

48 Braunovic M., Gorodnichev S.P., Kharin S.N. The Mathematical Model of Contact Welding at High Current // Proc. of the Int. Symp. on Electrical Contacts, Theory and Applications (ISECTA'93) . – Almaty, Kazakhstan, 1993. – P. 192-198.

49 Kharin S.N., Kulakhmetova A.T. Mathematical Models of Heat and Mass Transfer in Molten Metal Electrical Contact Bridging // Proc. of the Int. Symp. on Electrical Contacts, Theory and Applications (ISECTA'93). – Almaty, Kazakhstan, 1993. – P. 212-215.

50 Kharin S.N. Dynamics of the Transition of the Arc Metallic Phase into Gaseous Phase in Opening Electrical Contacts // Proc. of the 17th Int. Conf. on Electrical Contacts. – Nagoya, Japan, 1994. – P. 816-826.

51 Kharin S.N. Free Boundary Problems in the Theory of Electrical Heat and Mass Transfer // Int. Congress of Mathematicians. – Zurich, Switzerland, 1994. – 73 p.

52 Kharin S.N. Mathematical Models of Transient Arc Erosion and Intraelectrode Phenomena // Thermal Plasma and New Materials Technology. – Cambridge Interscience Publishing, England. – 1994. – V. 1. – P. 234-276.

53 Kharin S.N. Mathematical Models of Transient Arc Erosion and Intraelectrode Phenomena // Proc. of the 4th Int. Symp. on Advanced Materials. – Islamabad, Pakistan. – 1995. – P. 87-94.

54 Kharin S.N. Post Bridge Phenomena in Electrical Contacts at the Initial Stage // Proc. of the 4th IEEE Holm Conf. on Electric Contacts. – Montreal, Canada. – 1995. – P. 200-209.

55 Харин С.Н. Математическая модель явлений, предшествующих за-жиганию дуги в электрических контактах // Известия Академии наук Каз. ССР, серия физ.-мат. – 1995. – № 2. – С. 3-16.

56 Kharin S.N. Post Bridge Phenomena in Electrical Contacts at the Initial Stage // IEEE Transactions CPMT. – 1996. – Part A, V. 19, No. 3. – P. 313-319.

57 Kharin S.N. Mathematical Modeling of Phase Transformations in Thermo-Chemical Cathodes During Arcing // Keynote Paper, Proc. of the 1st Int. Symp. on Phase Transformations. – Islamabad, Pakistan, 1996. – P. 17-23.

58 Kharin S.N., Ghori Q.K., Usman M. Significance of Thermoelectric

Effects for the Bridge Transfer in Electrical Contacts // Proc. of the Int. Conf. IEEE INMIC'97. – Islamabad, Pakistan, 1997. – P. 24-28.

59 Kharin S.N., Ghori Q.K., Usman M. Mathematical Model of Material Bridge Transfer in Electrical Contacts // Proc. of the 5th Int. Symp. on Advanced Materials. – Islamabad, Pakistan, 1997. – P. 105-120.

60 Kharin S.N. Mathematical Model of the Short Arc Phenomena at the Initial Stage // Proc. of the 43d IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Philadelphia, USA, 1997. – P. 289-305.

61 Kharin S.N. The Mechanism and Models of Interaction Between Electrical Arc and Contact Materials // Keynote Paper. Proc. of the 6th Int. Symp. on Advanced Materials. – Islamabad, Pakistan, 1999. – P. 233-238.

62 Kharin S.N., Ghori Q.K., Usman M. Mathematical Model of Relay Contact Vibration With Electrical Arc // Proc. of the 1st Int. Symp. on Mechanical Vibrations. – Islamabad, Pakistan, 1998. – P. 24-29.

63 Kharin S.N. et al. Electrochemical Arc Phenomena at the Vibration of Electrodes // Proc. of the 1st Int. Symp. on Mechanical Vibrations. – Islamabad, Pakistan, 1998. – P. 30-35.

64 Kharin S.N. Modelling of Transition Arc Phenomena in Opening Electrical Contacts // Invited Paper. Proc. of the Int. Conf. on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications. – Nagoya (ICECT' 99), Japan, 1999. – P. 133-140.

65 Kharin S.N. Modelling of Various Type of Erosion in Electrical Contacts // Proc. of the Int. Conf. on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications. – Nagoya (ICECT' 99), Japan, 1999. – Extra-Volume. – P. 1-8.

66 Kharin S.N., Mukazhanov V.N., Mokryshev A.I. Electrochemical Mechanism of Electron Emission in Electrical Contacts // Proc. of the 20th Int. Conf. on Electrical Contacts (ICEC 2000). – Sweden, Stockholm, 2000. – P. 141-146.

67 Kharin S.N. Mathematical Model of Arc Evolution From Metallic Phase to Gaseous Phase // Proc. of the 20th Int. Conf. on Electrical Contacts (ICEC 2000). – Sweden, Stockholm, 2000. – P. 155-160.

68 Kharin S.N. Modeling of Vacuum Arc Evolution in Opening Electrical Contacts // Proc. of the 19th Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV-2000). – Xi' An, China, 2000. – V. 1. – P.

199-205.

69 Kharin S.N., Ghorri Q.K. Influence of Pre-Arcing Bridging on the Duration of Vacuum Arc // Proc. of the 19th Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV-2000). – Xi' An, China, 2000. – V. 1. – P. 278-285.

70 Kharin S.N., Muneer Usman, Lobanova V.N. Spontaneous Break and Vibration of Electrical Contacts // Proc. of the 2nd Int. Symp. on Mechanical Vibrations. – Islamabad, Pakistan, 2001. – P. 488-494.

71 Харин С.Н. Математическая модель динамики электрической дуги на базе цилиндрической задачи Стефана с двумя свободными границами // Математический журнал. – Алматы, 2001. – Т. 1, № 1. – С. 14-26.

72 Kharin S.N. Temperature Displacement in Electrical Contacts due to Kohler and Thomson Effects // Proc. of the 9th Int. Conf. on Switching Arc Phenomena (SAP-2001). – Lodz, Poland, 2001. – P. 190-199.

73 Bizjak M., Kharin S.N., Nouri H. Influence of Vapour Pressure on the Dynamics of Repulsion by Contact Blow-off // Proc. of the 21st Int. Conf. on Electrical Contacts. – Zurich, Switzerland, 2002. – P. 268-275.

74 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B., Wisniewski G. Transient Phenomena of Arc to Glow Discharge Transformation at Contact Opening // Proc. of the 21st Int. Conf. on Electrical Contacts. – Zurich, Switzerland, 2002. – P. 425-431.

75 Kharin S.N., Nouri H., Davies T. Influence of Inductance on the Arc Evolution in AgMeO Electrical Contacts // Proc. of the 48th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Orlando, USA, 2002. – P. 108-119.

76 Kharin S.N., Nouri H., Amft D. Dynamics of Electrical Contact Floating in Vacuum // Proc. of the 48th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Orlando, USA, 2002. – P. 197-205.

77 Kharin S.N., Nouri H., Bizjaki M. Effect of Vapour Force at the Blow-Open Process in Double-Break Contacts // IEEE Transaction on CPMT. – 2003. – Part A (Submitted for publication).

78 Kharin S.N., Nouri H., Davies T. The Mathematical Models of Welding Dynamics in Closed and Switching Electrical Contacts // Proc. of the 49th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Washington, USA, 2003. – P. 107-123.

79 Kharin S.N., Nouri H., Davies T. Effect of Metallic Vapour Pressure on



the Vibration of Electrical Contacts in Vacuum // Proc. of the 5th Int. Conf. on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis. – Glasgow, UK, 2003. – P. 505-512.

80 Miedziński B., Wiśniewski G., Okraszewski W., Nouri H., Kharin S. Analysis of an Arc to Glow Transition Using Fast Photography // Proc. of the 52nd Int. Relay Conf. Oak Brook. – Illinois, USA, 2004. – P. 8-1–8-5.

81 Nouri H., Kharin S.N., Tirmizi S.I., Siraj-ul-Islam Modelling of Arc Duration and Erosion in Electrical Contacts of Circuit Breakers // Proc. of the 39th Int. Universities Power Engineering Conf. (UPEC 2004). – Bristol, UK, 2004. – V. 1. – P. 103-108.

82 Skachek S.M., Nouri H., Kharin S.N. The Experimental Investigation of the Effect of Circuit Parameters on Erosion Dynamics in Silver Contacts in Air // Proc. of the 39th Int. Universities Power Engineering Conference (UPEC 2004). – Bristol, UK, 2004. – V. 1. – P. 109-113.

83 Kharin S.N., Nouri H., Amft D. Dynamics of Arc Phenomena at Closure of Electrical Contacts in Vacuum Circuit Breakers // Invited Paper. Proc. of the 21st Int. Symp. on Electrical Discharges and Insulation in Vacuum (ISDEIV-2004). – Yalta, Ukraine, 2004. – V. 2. – P. 301-306.

84 Kharin S.N., Nouri H., Amft D. Dynamics of Arc Phenomena at Closure of Electrical Contacts in Vacuum Circuit Breakers // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2005. – V. 19, No 1. – P. 491-497.

85 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B. Model of Arc Root Immobility in Vacuum Circuit Breakers // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2007. – № 10. – DOI: 10.1109/HOLM.2002.1040842.

86 Nouri H., Miedziński B., Kharin S.N., Wiśniewski G. Analysis and investigations of arc to glow discharge transformation under DC inductive load // Journal "Mechanizacja i Automatyzacja Gornictwa". – 2007. – № 8 (439). – P. 1-22. – PL ISSN 0208-7448.

87 Kharin S.N. Modeling of phenomena on thermo-chemical (HfN) cathodes // Advanced Materials-2007, Proceedings of ISAM-2007. – Islamabad, Pakistan, 2007. – P. 446-454.

88 Kharin S.N., Shpady Yu.R., Kulakhmetova A.T., Kulakhmetova Sh.A. Mathematical models of pre-arcing and arcing phenomena in vacuum circuit breakers // Advanced Materials-2007, Proceedings of ISAM-2007. – Islamabad, Pakistan, 2007. – P. 513-520.

89 Miedzinsky B., Nouri H., Kharin S. Efficiency of Electric Diagnosis Systems Applicable to Hermetic DC Connectors // Proc. of the 5th Int. Conf. "New Electrical and Electronic Technologies and Their Industrial Implementation". – Zakopane, Poland, 2007. – P. 34-37.

90 Kharin S.N., Berikkyzy Zh. Mathematical Model of Micro-asperity Explosion in Vacuum Circuit Breakers // Proc. of the 4th Int. Conf. on Electronics and Computer. – 2007. – P. 194-200. – ISBN № 9965-792-26-7.

91 Бериккызы Ж., Харин С.Н. Метод решения обратной задачи Веригина о водонефтяном контакте в условиях упругого режима // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 2 (28). – С. 38-43.

92 Харин С.Н., Кулахметова А.Т., Шпади Ю.Р. Нелинейная математическая модель нагрева и сваривания замкнутых электрических контактов // Сб. Электрические контакты и электроды. – Киев: Наукова Думка, 2008. – С. 12-19.

93 Kharin S.N. Temperature Asymmetry in Electrical Contacts due to Thomson and Kohler Effects // Вестник КБТУ. – 2008. – № 2(5). – С. 38-45.

94 Kharin S.N., Nouri H., Bizjak M. Effect of Vapour Force at the Blow-open Process in Double-break Contacts // IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies. – 2009. – V. 32, No. 1. – P. 180-190.

95 Kharin S.N., Shpady Yu.R., Kulakhmetova A.T. Conditions of instability for arc to glow transition in electrical contacts // Proc. of the Int. Sci.-Tech. Conf. "Third Erzhanov's Reading". – Aktobe, 2010. – P. 304-308.

96 Харин С.Н., Кулахметова А.Т., Шпади Ю.Р. Математическая модель электродуговых эрозионных процессов // Математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 4 (38). – С. 58-69.

97 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B. Phenomena at arc root immobility in electrical contacts // Труды межд. научно-практ. конф. "Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы". – Ульяновск, Россия, 2012. – С. 7-15.

98 Kharin S.N. Role of Metallic Vapour Pressure in Contact Bouncing and Welding at Closure of Electrical Contacts in Vacuum // Труды межд. научно-практ. конф. "Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы". – Ульяновск, Россия, 2012. – С. 24-29.

99 Kharin S.N., Sarsengeldin M. Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc // Trans. Tech. Publications. –

Switzerland, 2012. – V., 510-511. – P. 321-329.

100 Miedziński B., Wiśniewski G., Kharin S.N., Nouri H. Possibility of control of transition of switching arc DC into glowing // Proc. of the Pakistan Academy of Sciences. – 2012. – V. 4, No. 11. – P. 48-60.

101 Kharin S.N. Role of Metallic Vapour Pressure in Contact Bouncing and Welding at Closure of Electrical Contacts in Vacuum // Proc. of the 58th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Portland, OR, USA, 2012. – P. 235-241.

102 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B. Phenomena of Arc Root Immobility in Electrical Contacts // Proc. of the 58th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Portland, OR, USA, 2012. – P. 11-15.

103 Kharin S.N. Mathematical models of melting and evaporation in electrical contacts // Int. Sci. Conf. "Functional Analysis and Its Applications". – Astana, October 2-5, 2012. – P. 298-299.

104 Kharin S.N., Shpad Yu.R., Sarsengeldin M. Method for the Solution of the Heat Equation in Domains with Moving Boundaries Using Integral Error Functions and Confluent Hypergeometric Functions // Int. Sci. Conf. "Functional Analysis and its Applications". – Astana, October 2-5, 2012. – P. 299-300.

105 Kharin S.N., Sarsengeldin V.V. Mathematical Model of Thermoelastic Mechanism of Electrode Erosion During Arcing // Proc. of the VI Int. Sci. Conf. "The Problems of Differential Equations, Analysis and Algebra". – Actobe, 14-17 October, 2012. – P. 245-248.

106 Pyda Daniel, Miedzinski Bogdan, Dzierzanowski Witold, Nouri Hassan, Kharin S.N. Detection of high resistive ground faults in MV mining networks basing on a phase relationship of selected current harmonics // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review). – ISSN 0033-2097. – R. 88 NR 11b/2012. – P. 332-333.

107 Kharin S.N. Electrochemical Mechanism of Electron Emission in Zirconium Cathodes // Journal of Materials and Chemical Engineering. – 2014. – V. 2, Iss. 2. – P. 57-65.

108 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinsky B. A Comparative Study of Arc Erosion at Frequencies Ranging 50-1000 Hz // Proc. of the 60th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – New Orleans, LA USA, 2014. – P. 127-134.

109 Kharin S.N. The analytical solution of the two-face Stefan problem

with boundary flux condition // Математический журнал. – 2014. – № 1. – С. 55-75.

110 Kharin S.N. The method of special functions for the solution of free boundary problems // Труды межд. научной конф. "Дифференциальные уравнения и математическая физика". – Алматы, 2014. – С. 317-322.

111 Kharin S.N., Kassabek S. Mathematical Model of Thermoelectric Effects During Bridge Erosion of Electrical Contacts // Межд. конф. "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании" (CITech-2015). – Алматы, 24-27 сентября, 2015. – С. 144-145.

112 Kharin S.N. Mathematical Models of Heat and Mass Transfer in Electrical Contacts // Proc. of the 61th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – San Diego, 11-14 October, CA, USA, 2015. – P. 1-21.

113 Kharin S.N. Dynamics of the Heat Flux Components of the Electrical Arc Entering into Electrodes // Proc. of the Int. Conf. on Multidisciplinary Innovation Academic and Research (MIAR). – Almaty, 29-30 July, 2015.

114 Kharin S.N., Sagyndykuly Z. Automodel solutions of spherical and cylindrical Stefan problems // Математический журнал. – 2015. – Т. 15, № 2(56). – С. 69-79.

115 Kharin S.N. Mathematical model of electrical contact bouncing // AIP Conf. Proc. – 2015. – 1676. – P. 020019-1–020019-6. – 10.1063/1, 4930445.

116 Kharin S.N., Kassabek S. The Role of Thomson and Kohler Effects in Bridge Erosion of Electrical Contacts // Совместный выпуск журнала "Computational Technologies (Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk). – V. 20 и "Вестник КазНУ им. Аль-Фараби". Сер. Математика, механика и информатика. – 2015. – № 3 (86). – С. 171-178.

117 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B. Mathematical model of the arc erosion in bimetallic electrical contacts // Proc. of the Int. Conf. on Electrical Contacts. – Edinburgh, UK, 2016.

118 Kharin S.N. Mathematical Model of a Hollow Bridge at Contact Opening // Proc. of the Int. Conf. on Electrical Contacts. – Edinburgh, UK, 2016. – P. 16.

119 Kharin S.N. The Influence of Phase Transformations on Welding at Contact Closure // Proc. of the 62nd IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts. – Clearwater Beach, Florida, USA, 9-12 October, 2016.

120 Kharin S.N. et al. Mathematical Model of Electromagnetic Field With

Skin-effect in Closed Electrical Contacts // *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – V. 113, No. 4. – P. 625-637.

121 Sarsengeldin M., Kharin S.N. Method of the Integral Error Functions for the Solution of the One- and Two-Phase Stefan Problems and Its Application // *Filomat*. – 2017. – No. 31:4. – P. 1017-1029. – DOI 10.2298/FIL1704017S, Available at: <http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat>.

122 Kharin S.N. Comparison of spherical and cylindrical electrical contact models and the condition of their applications // *Proc. of the 63rd IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts*. – Denver, CO, USA, 2017. – P. 50-54.

123 Kharin S.N., Sarsengeldin M. The role of the arc heat flux and Joule heating in the erosion of electrical contacts // *Proc. of the 63rd IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts*. – Denver, CO, USA, 10-13 September, 2017. – P. 292-300.

124 Kharin S.N., Jabbarkhanov K. Method of the heat polynomials for the solution of free boundary problems for the generalized heat equation // *Известия Межд. казахско-турецкого университета им. Х.А. Ясави. Сер. Математика, физика, информатика*. – 2018. – № 1(4). – С. 166-170.

125 Sarsengeldin M.M., Kharin S.N., Kassabek S., Mukambetkazin Z. Exact Solution of the One Phase Stefan Problem // *Filomat*. – 2018. – No. 32:3. – P. 985-990. – Available at: <http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat>.

126 Sarsengeldin M.M., Kharin S.N. et al., Mathematical Model of Heat Transfer in Opening Electrical Contacts with Tunnel Effect // *Filomat*. – 2018. – No. 32:3. – P. 1003-1008. – No. Available at: <http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat>.

127 Miedzinski B., Wisniewski G., Kharin S.N., Nouri H., Grechanyuk N. Arc-to-Glow Transition Approach for Practical Use in DC Low-Power, Low-Voltage Electric Grids // *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*. – 2018. – V. 8, No. 6. – P. 932-938.

#### INFORMATION ON AVAILABLE PATENTS AND OTHER PROTECTION DOCUMENTS

1 А.с. 705548 СССР, 1979. Контактное устройство, В.Т. Омельченко, П.В. Фомин, Л.В. Киклевич, И.В. Кудрявцев и С.Н. Харин. Харьковский ордена Ленина политехнический институт им. В.И. Ленина, Институт математики и механики АН Каз. ССР и Специальное проектно-конструкторское и технологическое бюро Каменец-

Подольского электромеханического завода. <http://patents.su/2-705548-kontaktное-ustrojstvo.html>.

2 А.с. 796934 СССР, 1981. Мостиковая контактная система, Н.В. Анисимова, С.П. Городничий, Л.В. Киклевич, И.В. Кудрявцев, В.В. Омельченко, С.Н. Харин и П.В. Фомин. Харьковский ордена Ленина политехнический институт им. В.И. Ленина. <http://patents.su/2-796934-mostikovaya-kontaktная-sistema.html>.

3 А.с. 864393 СССР, 1981. Электрический соединитель, Е.В. Рожещенко, П.В. Фомин, В.И. Демина, С.Н. Харин и И.В. Кудрявцев. Харьковский ордена Ленина политехнический институт им. В.И. Ленина и Специальное проектно-конструкторское и технологическое бюро Каменец-Подольского электромеханического завода. <http://patents.su/2-864393-ehlektricheskiy-soedinitel.html>.

4 А.с. 980197 СССР, 1982. Контактный токопровод, Е.И. Ким, К.К. Намитоков, С.Н. Харин и В.Г. Кобеляцкий. Институт математики и механики АН КазССР. <http://patents.su/3-980197-kontaktnyy-tokoprovod.html>.

5 А.с. 1053197 СССР, 1983. Контактная пара, В.И. Демина, В.Ф. Клейнер, Л.М. Криславский, И.В. Кудрявцев, Я.Ф. Мучник, Л.В. Твердохлебов, С.Н. Харин и А.Н. Новиченко. Харьковский опытный электромеханический завод "Спецэлеватормельмаш" и Харьковский политехнический институт. <http://patents.su/2-1053197-kontaktная-para.html>.

6 А.с. 1088094 СССР, 1984. Контактная пара, В.И. Демина, Г.Н. Евтушенко, В.Ф. Клейнер, Л.М. Криславский, И.В. Кудрявцев, Я.Ф. Мучник, Л.В. Твердохлебов и С.Н. Харин. Харьковский электромеханический завод "Спецэлеватормельмаш". <http://patents.su/3-1088094-kontaktная-para.html>.

7 А.с. 1153124 СССР, 1985. Вибронасос, А.П. Колесник, И.В. Кудрявцев, Л.В. Стешенко, С.Н. Харин, Л.В. Киклевич, Ж.А. Киреева и О.А. Сербина. Харьковский завод "Электромашина Институт математики и механики АН КазССР и Харьковский политехнический институт им. В.И. Ленина. <http://patents.su/2-1153124-vibronasos.html>.

МРНТИ 27.31.17

**НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ  
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО  
ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

С.А. Алдашев

Аннотация. В работе показано, что однородная задача Трикоми для вырождающегося многомерного гипербло-параболического уравнения имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Ключевые слова. Вырождающиеся уравнения, задачи Трикоми, нетривиальные решения, функция Лежандра.

**1 ВВЕДЕНИЕ**

Краевые задачи для гипербло-параболических уравнений на плоскости изучались в монографии [1, гл. 9], в которой исследовались задача Трикоми и первая краевая задача.

Смешанная задача, характеристическая задача Коши и задача Дарбу для многомерных гипербло-параболических уравнений рассматривались в монографии [2, гл. 2].

Задача Трикоми для гипербло-параболических уравнений в многомерных областях ставилась в [3, с. 117] и исследовалась другими авторами (см., например, монографию [1] и приведённую в ней библиографию).

В работах [4], [5] показана неединственность решения задачи Трикоми для модельного многомерного гипербло-параболического уравнения.

В данной работе доказано, что однородная задача Трикоми для вырождающегося многомерного гипербло-параболического уравнения имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12.

Funding: Работа поддержана грантом AP05134615 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© С.А. Алдашев, 2018.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $D$  – конечная область евклидова пространства  $E_{m+1}$  точек  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , ограниченная в полупространстве  $t > 0$  коноидами  $K_0 : |x| = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}}$ ,  $K_1 : |x| = 1 - \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}}$ ,  $0 \leq t \leq (\frac{2+p}{4})^{\frac{2}{2+p}}$ , а при  $t < 0$  – цилиндрической поверхностью  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$  и плоскостью  $t = t_0 < 0$ , где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $p = const > 0$ .

Обозначим через  $D^+$  и  $D^-$  части области  $D$ , лежащие соответственно в полупространствах  $t > 0$  и  $t < 0$ . Части коноидов  $K_0, K_1$ , ограничивающих области  $D^+$ , обозначим через  $S_0, S_1$ . Пусть  $S = \{(x, t) : t = 0, 0 < |x| < 1\}$ ,  $\Gamma_0 = \{(x, t) : t = 0, |x| = 1\}$ .

В области  $D$  рассмотрим модельное смешанное гиперболопараболическое уравнение с многомерным оператором Геллерстедта

$$0 = \begin{cases} t^p \Delta_x u - u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Delta_x$  – оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \geq 2$ .

Следуя [3], в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

**ЗАДАЧА Т.** Найти решение уравнения (1) в области  $D$  при  $t \neq 0$  из класса  $C(\bar{D} \setminus \Gamma_0) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат  $x_1, \dots, x_m, t$  к сферическим  $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 2, 3, \dots, m - 1$ .

Пусть  $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$  – система линейно независимых сферических функций порядка  $n$ ,  $1 \leq k \leq k_n$ ,  $(m - 2)!n!k_n = (n + m - 3)!(2n + m - 2)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ .

Через  $\bar{\tau}_n^k(r)$ ,  $\bar{\nu}_n^k(r)$  обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям  $Y_{n,m}^k(\theta)$  соответственно функций  $\tau(r, \theta) = u(r, \theta, 0)$ ,  $\nu(r, \theta) = u_t(r, \theta, 0)$ .

Имеет место

**ТЕОРЕМА.** *Задача Т имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*



Отметим, что эта теорема при  $p = 0$  показана в [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В сферических координатах уравнение (1) в области  $D^+$  имеет вид [6, с. 238]

$$t^p u_{rr} + \frac{m-1}{r} t^p u_r - \frac{t^p}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0. \quad (3)$$

При  $t \rightarrow -0$  на  $S$  получим функциональное соотношение между  $\tau(r, \theta)$  и  $\nu(r, \theta)$

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r} \tau_r - \frac{1}{r^2} \delta \tau = \nu(r, \theta), \quad (4)$$

где

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left( \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [6], что спектр оператора  $\delta$  состоит из собственных чисел  $\lambda_n = n(n+m-2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , каждому из которых соответствует  $k_n$  ортонормированных собственных функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$ .

Искомое решение задачи Т в области  $D^+$  будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (5)$$

где  $\bar{u}_n^k(r, t)$  – функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (3) и (4), используя ортогональность сферических функций  $Y_{n,m}^k(\theta)$  [6], будем иметь

$$t^p \bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} t^p \bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \bar{u}_n^k = 0, \quad (6)$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r), \quad 0 < r < 1, \quad (7)$$

при этом первое из краевых условий (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k \left[ r, \left( \frac{(2+p)}{2} r \right)^{\frac{2}{2+p}} \right] = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

В (6)–(8) произведя замену  $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$  и положив затем  $r = r$ ,  $x_0 = \frac{2}{2+p} t^{\frac{(2+p)}{2}}$ , соответственно получим

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} u_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{\alpha,n}^k = 0, \quad (9_\alpha)$$

$$\tau_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \tau_n^k = \nu_n^k(r), \quad 0 < r < 1, \quad (10)$$

$$u_{\alpha,n}^k(r, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1, \quad \bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4,$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \quad \nu_n^k(r) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \bar{\nu}_n^k(r).$$

Наряду с уравнением (9<sub>α</sub>) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{0,n}^k = 0. \quad (9_0)$$

Как показано в [7], [8], существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (9<sub>α</sub>) и (9<sub>0</sub>).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если  $u_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши для уравнения (9<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (12)$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} d\xi \quad (13)$$

при  $\alpha > 0$  является решением уравнения (9<sub>α</sub>) с условием (12).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если  $u_{0,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение задачи Коши для уравнения (9<sub>0</sub>), удовлетворяющее условиям

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0,$$

то при  $0 < \alpha < 1$  функция

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = \gamma_{2-\alpha+2q} \left( \frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^q \left[ x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi x_0) (1 - \xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \quad (14)$$

является решением уравнения  $(9_\alpha)$  с начальными данными

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r),$$

где  $q \geq 0$  – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству  $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$ .

Теперь рассмотрим задачу  $(9_\alpha)$ , (11), для которой имеет место соотношение (10). Ее решение будем искать в виде  $u_{\alpha,n}^k(r, x_0) = u_{\alpha,n}^{k,1} + u_{\alpha,n}^{k,2}$ , где  $u_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$  – решение уравнения  $(9_\alpha)$  с данными

$$u_{\alpha,nx_0}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad u_{\alpha,n}^{k,1}(r, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

а  $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0)$  – решение краевой задачи для  $(9_\alpha)$  с условием

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(r, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Учитывая формулы (13), (14), задачи  $(9_\alpha)$ , (15) и  $(9_\alpha)$ , (16) соответственно сводим к задаче для  $(9_0)$  с условием

$$u_{0,nx_0}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad u_{0,n}^{k,1}(r, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

при этом  $u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r)$  в случае задачи  $(9_\alpha)$ , (15) и  $u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}$  в случае задачи  $(9_\alpha)$ , (16).

В [7] показано, что задача  $(9_0)$ , (17) имеет нетривиальные решения вида

$$u_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r+x_0}{2} \right)^\beta + \left( \frac{r-x_0}{2} \right)^\beta \right] -$$

$$-\frac{x_0}{2r} \int_{\frac{(r-x_0)}{2}}^{\frac{(r+x_0)}{2}} \xi_1^{\beta-1} P'_\lambda \left( \frac{r^2 - x_0^2 + 4\xi_1^2}{4r\xi_1} \right) d\xi_1, \quad (18)$$

$\beta = \lambda - 2s > 1, s = 1, 2, \dots, P_\lambda(z)$  – функция Лежандра,  $\lambda = n + \frac{(m-3)}{2}$ .

Далее, используя Утверждения 1 и 2, устанавливается, что задачи (9<sub>α</sub>), (15) и (9<sub>α</sub>), (16) (также (9<sub>α</sub>), (11)) имеют ненулевые решения, при этом учитывая соотношения (10) и (18), будем иметь

$$\tau_n^k(r) = r^\beta, \nu_n^k(r) = C_1 r^{\beta-2},$$

$$C_1(1 - \alpha)(3 - \alpha) \dots (2q + 1 - \alpha) = \beta(\beta - 1) + \bar{\lambda}_n, s = 1, 2, \dots$$

Из оценок [9]

$$|k_n| \leq c_2 n^{m-2}, \left| \frac{\partial^p}{\partial \theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2} - p + 1}, c_2 = const,$$

$j = \overline{1, m-1}, p = 0, 1, \dots$ , нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\beta + \frac{(1-m)}{2}} Y_{n,m}^k(\theta) \quad (19)$$

сходится абсолютно и равномерно, если  $l > \frac{3m}{2}, \beta > \frac{m-1}{2}$ .

Следовательно, функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta) \quad (20)$$

является решением задачи (3), (2), (19) в области  $D^+$ , где функции  $u_n^k(r, t)$  определяются из двумерных задач и принадлежат классу  $C(\bar{D}^+) \cap C^1(D^+ \cup S) \cap C^2(D^+)$ .

Таким образом, мы пришли в области  $D^-$  к первой краевой задаче для уравнения

$$\Delta_x u - u_t = 0 \quad (21)$$

с условиями

$$u|_S = \tau(r, \theta), u|_\Gamma = 0. \quad (22)$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (21), получим

$$u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

при этом краевое условие (22) имеет вид

$$u_n^k(r, 0) = n^{-l} r^\beta, u_n^k(1, t) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Решение задачи (23), (24) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = R_n^k(r) T_n^k(t). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), с учетом (24) получим

$$R_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_n^k + \mu R_n^k = 0, 0 < r < 1, \quad (26)$$

$$R_n^k(1) = 0, |R_n^k(0)| < \infty, \quad (27)$$

$$T_{nt}^k + \mu T_n^k = 0. \quad (28)$$

Ограниченным решением задачи (26), (27) является функция [10]

$$R_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} a_{s,n} J_\nu(\mu_s^\nu r), 0 < r < 1, \quad (29)$$

$\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$ ,  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя,  $\mu_s^\nu$  – ее нули,  $\mu = (\mu_s^k)^2$ , а решением уравнения (28) является

$$T_{s,n}^k(t) = \exp[-(\mu_s^\nu)^2 t]. \quad (30)$$

Далее из (25), (29), (30) с учетом (24) имеем

$$n^{-l} r^{\beta - \frac{1}{2}} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n}^\nu r), 0 < r < 1. \quad (31)$$

Разлагая функцию  $r^{\beta-\frac{1}{2}}$  в ряд Фурье-Бесселя [11], найдем из (31) коэффициенты  $a_{s,n}$ :

$$a_{s,n} = \frac{2n^{-l}}{[J_{\nu+1}(\mu_s^\nu)]^2} \int_0^1 \xi^{\beta+\frac{1}{2}} J_\nu(\mu_s^\nu \xi) d\xi, \quad (32)$$

при этом  $\mu_s^\nu$  – положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, из (25), (29), (30) следует, что решением задачи (21), (22) в области  $D^-$  является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n} r^{\frac{(2-m)}{2}} J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_s^\nu r) \exp(-(\mu_s^\nu)^2 t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (33)$$

которая принадлежит классу  $C(\bar{D}^- \setminus \Gamma_0) \cap C^1(D^- \cup S) \cap C^2(D^-)$ , где  $a_{s,n}$  определяются из (32).

Следовательно, задача  $T$  имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида (20) и (33).

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
- 2 Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск, 1983. – 84 с.
- 3 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1959. – 164 с.
- 4 Алдашев С.А. Неединственность решения задачи Трикоми для многомерного гипероло-параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 544-548.
- 5 Алдашев С.А. Неединственность решения многомерной задачи Трикоми для гипероло-параболического уравнения // Укр. мат. вестн. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 1-10.
- 6 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- 7 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
- 8 Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.

9 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 164 с.

10 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

11 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

Алдашев С.А. АЗЫНҒАН КӨП ӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН ТРИКОМИ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗ ЕМЕСТІГІ

Жұмыста азынған көп өлшемді гиперболалық-параболалық теңдеу үшін біртекті Трикоми есебінің шексіз көп тривиалды емес шешімдерінің бар болатындығы көрсетілген.

*Кілттік сөздер.* Азынған теңдеу, Трикоми есебі, тривиалды емес шешімдер, Лежандр функциясы.

Aldashev S.A. NONUNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A DEGENERATE MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

This paper shows that the homogeneous Tricomi problem for a degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation has infinitely many nontrivial solutions.

*Keywords.* Degenerate equations, Tricomi problem, nontrivial solutions, Legendre function.

Алдашев С.А.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125

E-mail: aldash51@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 29.10.2018*

МРНТИ 27.31.15; 27.33.15

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ  
ОБЛАСТИ**

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ, С.А. ИСКАКОВ, М.И. РАМАЗАНОВ

Аннотация. Исследуется разрешимость граничной задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрической области с производной по времени на подвижной границе. Граничная задача путем введения новой неизвестной функции редуцирована к особому интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. Для однородной граничной задачи показано, что в некотором весовом классе существенно ограниченных функций существует ненулевое решение с точностью до постоянного множителя. С помощью резольвенты построено общее решение исходной граничной задачи.

Ключевые слова. Краевая задача, уравнение теплопроводности, нецилиндрическая область, нетривиальное решение, резольвента, весовое пространство.

**1 ВВЕДЕНИЕ**

Как известно, решение задач типа Стефана сопряжено со значительными трудностями в связи с их существенной нелинейностью и требует привлечения новых идей, использования всего арсенала конструктивных методов нелинейного анализа и возможностей современной вычислительной техники.

В работе [1] было отмечено, что краевая задача

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t), \quad \{x, t\} \in G = \{x, t : 0 < x < kt, t > 0\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = u_0(t), \quad b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=kt} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = u_1(t), \quad (2)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 45D05.

Funding: Работа поддержана грантами (Grant No. AP05130928 и Grant No. AP05132262) Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© М.Т. Дженалиев, С.А. Искаков, М.И. Рамазанов, 2018.



где  $\tilde{u}(t) = u(kt, t)$ ,  $b > 0$ ,  $k > 0$ , в нецилиндрической области  $G$ , вырождающаяся в начальный момент времени, оказывается полезной при изучении однофазной задачи Стефана. Там же в весовых гильбертовых пространствах было показано, что задача (1)–(2) однозначно разрешима. В настоящей работе мы устанавливаем, что соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с заданным весом, что позволяет расширить и точно определить классы однозначной разрешимости неоднородной задачи (1)–(2).

## 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(2) И СВЕДЕНИЕ ЕЕ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Преобразуем задачу (1)–(2). Для этого введем функцию  $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ . Далее, формально дифференцируя по переменной  $x$  уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \tilde{g}(x, t), \quad 0 < x < kt, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$v(x, t)|_{x=0} = v_0(t), \quad \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \tilde{a} v(x, t) \right) |_{x=kt} = v_1(t), \quad (4)$$

где  $\tilde{g}(x, t) \equiv \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}$ ,  $v_0(t) \equiv u_0(t)$ ,  $v_1(t) \equiv \frac{u_1(t)}{a^2}$ ,  $\tilde{a} = \frac{c}{a^2}$ ,  $c = b + k$ .

Решение задачи (3)–(4) ищем в виде суммы тепловых потенциалов [2]:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \tilde{g}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \nu(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-k\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции  $\nu(t)$  и  $\varphi(t)$  являются неизвестными и подлежат определению.

Удовлетворяя решение (5) первому из условий (4), получаем

$$\begin{aligned} \nu(t) = & -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{k^2 \tau^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau - \\ & -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \tilde{g}(\xi, \tau) d\xi d\tau + 2a^2 v_0(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя представление (5) и равенство (6), получим следующее выражение для решения задачи (3)–(4):

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x+k\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -\frac{(x-k\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] \varphi(\tau) d\tau + F_1[x, t; \tilde{g}; v_0], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} F_1[x, t; \tilde{g}; v_0] \equiv & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} v_0(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] \tilde{g}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно второму граничному условию из (4) имеем

$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{k(t+\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{k^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{k^2(t-\tau)}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau - \\
& -\frac{c}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{k^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau + \\
& +\frac{c}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{k^2(t-\tau)}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau = F_2[k t, t; \tilde{g}; v_0; v_1], \quad (9)
\end{aligned}$$

где

$$F_2[x, t; \tilde{g}; v_0; v_1] = -2a^2 \frac{\partial F_1[x, t; \tilde{g}; v_0]}{\partial x} - \frac{2a^2 c}{a^2} F_1[x, t; \tilde{g}; v_0] + 2a^2 v_1(t).$$

Используя равенства

$$t + \tau = 2t - (t - \tau), \quad (t + \tau)^2 = (t - \tau)^2 + 4t\tau,$$

из (9) получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

где

$$K(t, \tau) = k(t, \tau) \exp\left\{-\frac{k^2(t-\tau)}{4a^2}\right\}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
k(t, \tau) = & -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[ \frac{2kt}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{k^2 t \tau}{a^2(t-\tau)}\right\} - \right. \\
& \left. -\frac{2c+k}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{k^2 t \tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{2c-k}{(t-\tau)^{1/2}} \right], \quad (12)
\end{aligned}$$

$$f(t) = F_2[kt, t; \tilde{g}; v_0; v_1]. \quad (13)$$

Отметим, что ядро  $K(t, \tau)$  (11) обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = 1.$$

Это означает, что к интегральному уравнению (10) неприменим метод последовательных приближений. Поэтому интегральное уравнение (10) названо особым.

Решение интегрального уравнения (10) мы будем искать в классе функций

$$\sqrt{t} \exp\{k^2 t / (4a^2)\} \varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \text{ т.е. } \varphi(t) \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+; \sqrt{t} \exp\{k^2 t / (4a^2)\}\right). \quad (14)$$

Отметим, что подобные интегральные уравнения Вольтерра второго рода были исследованы в работах [3]–[6].

### 3 СВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (10) К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ В ОБРАЗАХ ЛАПЛАСА

Если ввести новые функции

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \exp\left\{\frac{k^2 t}{4a^2}\right\}, \quad f_1(t) = f(t) \exp\left\{\frac{k^2 t}{4a^2}\right\},$$

то из (10)–(13) следует

$$\varphi_1(t) - \int_0^t k(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

В интегральном уравнении (15) произведем замену независимой переменной и введем новую неизвестную функцию:

$$t = \frac{1}{t_1}, \quad \tau = \frac{1}{\tau_1}, \quad \varphi_2(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \varphi_1(1/t_1), \quad f_2(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} f_1(1/t_1),$$

в результате этого из (13) и (15) получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{k}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{k^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{1/2}} \left[ (2c + k) \exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} - \right. \end{aligned}$$

$$-(2c - k) \int_{\tau_1}^1 \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 = f_2(t_1). \quad (16)$$

Отметим, что из решения интегрального уравнения (16), возвращаясь к первоначальному независимому переменному и исходной неизвестной функции, мы можем получить решение исходного интегрального уравнения (10).

Для решения уравнения (16) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \hat{\varphi}_2(p) - \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[ (2c + k) \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} - (2c - k) \right] \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq = \hat{f}_2(p), \quad (17)$$

здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа ([7], с. 472) и ([8], с. 158):

$$\mathcal{L} \left[ \int_{t_1}^\infty k(t_1 - \tau_1) \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 \right] = \hat{k}(-p) \cdot \hat{\varphi}_2(p), \quad \mathcal{L} \left[ \frac{1}{t_1} \cdot \varphi_2(t_1) \right] = \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq.$$

Перейдем от интегрального уравнения (17) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\hat{\psi}(p) = \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq, \quad \text{т.е.} \quad \hat{\varphi}_2(p) = -\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp}, \quad (18)$$

$$\frac{d\hat{\psi}(p)}{\hat{\psi}(p)} + \frac{(2c + k) \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} - (2c - k)}{2a\sqrt{-p} \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right]} dp = -\frac{\hat{f}_2(p)}{1 + \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\}}. \quad (19)$$

#### 4 РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (10)

##### 4.1 РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть  $f(t) \equiv 0$ . Интегрируя уравнение (19), получаем

$$\hat{\psi}(p) = C \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{(2c+k)k}{a} \sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ \frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right)^{2c}} = C \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{(2c-k)k}{a} \sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right)^{2c}}. \quad (20)$$

Используя формулу (18), из равенства (20) находим решение интегрального уравнения (17):

$$\hat{\varphi}_2(p) = \left[ -\frac{2c-k}{2} + \frac{2c+k}{2} \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \times \\ \times \frac{k \cdot \exp \left\{ -\frac{(2c-k)k}{a} \sqrt{-p} \right\}}{a\sqrt{-p} \left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right)^{2c+1}}. \quad (21)$$

Далее для нахождения оригинала для функции  $\hat{\varphi}_2(p)$  будем пользоваться следующим разложением:

$$\frac{1}{(1+z)^{2c+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^{2c+1} z^n, \quad z = \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\}, \quad |z| < 1, \quad (22)$$

где

$$(-1)^n A_n^{2c+1} = \frac{(2c+1)2c(2c-1)\dots(2c-n+2)}{n!}.$$

Используя разложение (22), из (21) получим представление функции  $\hat{\varphi}_2(p)$  в виде ряда:

$$\hat{\varphi}_2(p) = \frac{k}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^{2c+1} \left[ \frac{2c+k}{\sqrt{-p}} \exp \left\{ -\frac{(2c-k+2n+2)k}{a} \sqrt{-p} \right\} - \right. \\ \left. - \frac{2c-k}{\sqrt{-p}} \exp \left\{ -\frac{(2c-k+2n)k}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \quad \forall p \in \{p : \operatorname{Re} \{\sqrt{-p}\} > 0\}. \quad (23)$$

Так как имеет место формула обращения для образа Лапласа ([7], с. 497)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp\{-\alpha\sqrt{q}\}}{\sqrt{q}} \right] = \frac{\exp\{-\alpha^2/(4t_1)\}}{\sqrt{\pi t_1}}, \quad 0 < t_1 < \infty,$$

то из (23) имеем функцию-оригинал  $\varphi_2(t_1)$  для всех  $0 < t_1 < \infty$ :

$$\varphi_2(t_1) = \frac{k}{2a\sqrt{\pi t_1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^{2c+1} \left[ (2c+k) \exp \left\{ -\frac{k^2(2c-k+2n+2)^2}{a^2 t_1} \right\} - \right.$$

$$-(2c - k) \exp \left\{ -\frac{k^2(2c - k + 2n)^2}{a^2 t_1} \right\}.$$

Далее отсюда, возвращаясь к исходной независимой переменной  $0 < t < \infty$ , получаем

$$\varphi_1(t) = \frac{k}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^{2c+1} \left[ (2c + k)\varphi_{1,n}^{(1)}(t) - (2c - k)\varphi_{1,n}^{(2)}(t) \right], \quad (24)$$

где

$$\begin{cases} \varphi_{1,n}^{(1)}(t) = \exp \left\{ -\frac{k^2(2c - k + 2n + 2)^2 t}{a^2} \right\}, \\ \varphi_{1,n}^{(2)}(t) = \exp \left\{ -\frac{k^2(2c - k + 2n)^2 t}{a^2} \right\}. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, искомое решение исходного интегрального уравнения (10) (при  $f(t) \equiv 0$ ) определяется по формуле:

$$\varphi(t) = \frac{k}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^{2c+1} \left[ (2c + k)\varphi_n^{(1)}(t) - (2c - k)\varphi_n^{(2)}(t) \right], \quad (26)$$

где

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)}(t) = \exp \left\{ -\frac{k^2[4(2c - k + 2n + 2)^2 + 1]t}{4a^2} \right\}, \\ \varphi_n^{(2)}(t) = \exp \left\{ -\frac{k^2[4(2c - k + 2n)^2 + 1]t}{4a^2} \right\}. \end{cases} \quad (27)$$

Решение (26) принадлежит классу (16):

$$L_{\infty} \left( \mathbb{R}_+; \sqrt{t} \exp \{k^2 t / (4a^2)\} \right).$$

#### 4.2 ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (19). ОБРАЗ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Преобразуем уравнение (19) к виду

$$\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp} + \frac{[(2c + k)\exp\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\} - (2c - k)]}{2a\sqrt{-p} [1 + \exp\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\}]} \hat{\psi}(p) = -\frac{\hat{f}_2(p)}{1 + \exp\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\}} \quad (28)$$

и найдем его частное решение  $\hat{\psi}_{part}(p)$ . Используя решение однородного уравнения, методом вариаций постоянных будем иметь

$$-\hat{\psi}_{part}(p) = \frac{\exp\left\{-\frac{2c-k}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{\frac{2c}{k}}} \int_{-\infty}^p \hat{f}_2(q) \exp\left\{\frac{2c-k}{a}\sqrt{-q}\right\} \times \\ \times \left(1 + \exp\left\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^{\frac{2c}{k}-1} dq, \quad (29)$$

где

$$\hat{f}_2(q) = \int_0^{\infty} f_2(\tau_1) \exp\{q\tau_1\} d\tau_1, \quad \operatorname{Re}\{q\} < 0.$$

Проведем следующее преобразование равенства (29):

$$-\hat{\psi}_{part}(p) = \int_0^{\infty} f_2(\tau_1) \hat{R}^*(p, \tau_1) d\tau_1, \quad (30)$$

где  $\hat{R}^*(p, \tau_1)$  есть образ резольвенты, который определяется по следующей формуле:

$$\hat{R}^*(p, \tau_1) = \int_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\} \frac{\exp\left\{-\frac{2c-k}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{\frac{2c}{k}}} \exp\left\{\frac{2c-k}{a}\sqrt{-q}\right\} \times \\ \times \left(1 + \exp\left\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^{\frac{2c}{k}-1} dq. \quad (31)$$

Используя следующее представление:

$$\frac{\exp\left\{-\frac{2c-k}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2k}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{\frac{2c}{k}}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{2c_1} \exp\left\{-\frac{2c+k(2n-1)}{a}\sqrt{-p}\right\},$$

запишем резольвенту  $\hat{R}^*(p, \tau_1)$  (39) в виде

$$\hat{R}^*(p, \tau_1) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{2c_1-1} \hat{I}_{\hat{R}^*}(p, m, \tau_1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{2c_1} \exp\left\{-\frac{2c+k(2n-1)}{a}\sqrt{-p}\right\}, \quad (32)$$



где

$$\hat{I}_{\hat{R}^*}(p, m, \tau_1) = \int_{-\infty}^p \exp \left\{ \tau_1 q - \frac{k(2m+1) - 2c}{a} \sqrt{-q} \right\} dq, \quad (33)$$

$$C_m^{2c_1-1} = \frac{(2c_1-1)(2c_1-2)\dots(2c_1-1-(m-1))}{m!} = \binom{2c_1-1}{m},$$

$$B_n^{2c_1} = \frac{(-2c_1)(-2c_1-1)\dots(2c_1-1-(n-1))}{n!} = (-1)^n \binom{2c_1}{n}, \quad c_1 = \frac{c}{k}.$$

Для получения вышеуказанного ряда мы использовали известное разложение

$$\frac{1}{(1+z)^{2c_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{2c_1} z^n, \quad z = \exp \left\{ -\frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\}, \quad |z| < 1. \quad (34)$$

Отметим, что интеграл (33) представим в виде разности:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\hat{R}^*}(p, m, \tau_1) &= \frac{1}{\tau_1} \exp \left\{ \tau_1 p - \frac{k(2m+1) - 2c}{a} \sqrt{-p} \right\} - \frac{\sqrt{\pi}[k(2m+1) - 2c]}{2a\tau_1^{3/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{[k(2m+1) - 2c]^2}{4a^2\tau_1} \right\} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{-\tau_1 p} + \frac{k(2m+1) - 2c}{2a\sqrt{\tau_1}} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя соотношения (32), (33) и (35), получим следующее выражение для образа резольвенты:

$$\hat{R}^*(p, \tau_1) = \hat{R}_1^*(p, \tau_1) - \hat{R}_2(p, \tau_1), \quad (36)$$

где

$$\hat{R}_1^*(p, \tau_1) = \frac{1}{\tau_1} \exp\{\tau_1 p\} + \frac{1}{\tau_1} \sum_{\substack{m, n=0, \\ m+n \neq 0}}^{\infty} C_m^{2c_1-1} B_n^{2c_1} \exp \left\{ \tau_1 p - (m+n) \frac{2k}{a} \sqrt{-p} \right\}, \quad (37)$$

$$\hat{R}_2(p, \tau_1) = \frac{1}{\tau_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{2c_1-1} \frac{k(2m+1) - 2c}{a} \hat{I}_1(p, \tau_1, m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{2c_1} \hat{I}_2(p, \tau_1, n), \quad (38)$$

$$\hat{I}_1(p, \tau_1, m) = \frac{1}{\tau_1^{1/2}} \exp \left\{ \frac{[k(2m+1) - 2c]^2}{4a^2\tau_1} \right\} \hat{I}_1^*(p, \tau_1, m), \quad (39)$$

$$\hat{I}_1^*(p, \tau_1, m) = \exp \{ -\tau_1 p \} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{-\tau_1 p} + \frac{k(2m+1) - 2c}{2a\sqrt{\tau_1}} \right),$$

$$\hat{I}_2(p, \tau_1, n) = \exp \left\{ \tau_1 p - \frac{2c + k(2n-1)}{a} \sqrt{-p} \right\}. \quad (40)$$

#### 4.3 ПОСТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $R(t, \tau)$

Сначала найдем оригиналы изображений  $\hat{R}_1^*(p, \tau_1)$  и  $\hat{R}_2(p, \tau_1)$ . Для образа  $\hat{R}_1^*(p, \tau_1)$  имеем

$$\hat{R}_1^*(p, \tau_1) \doteq \frac{1}{\tau_1} \delta(\tau_1 - t_1) + R_1(t_1, \tau_1), \quad (41)$$

$$R_1(t_1, \tau_1) = \frac{1}{\tau_1} \sum_{\substack{m, n = 0, \\ m+n \neq 0}} C_m^{2c-1} B_n^{2c} \frac{(m+n)k}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(m+n)^2 k^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\}. \quad (42)$$

При выводе соотношений (41)–(42) из (37) были использованы следующие формулы из [7], ([9], p. 921, формула (82), Appendix D):

$$\exp\{-p\tau\} \doteq \delta(t - \tau), \quad \exp\{-k\sqrt{p}\} \doteq \frac{k}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{k^2}{4t} \right\}.$$

А для получения оригинала образа  $\hat{R}_2(p, \tau_1)$  согласно (38)–(40) достаточно найти оригиналы для образов  $\hat{I}_1(p, \tau_1, m)$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ , (39) и  $\hat{I}_2(p, n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , (40).

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Оригиналы образа  $\hat{I}_1(p, \tau_1, m)$  (39) вычисляются по формуле

$$\hat{I}_1(p, \tau_1, m) \doteq I_1(t_1, \tau_1, m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)} \exp \left\{ -\frac{[k(2m+1) - 2c]^2}{4a^2 t_1} \right\}. \quad (43)$$

Теперь, используя формулу из ([9], р. 921, formula (82), Appendix D), найдем оригинал сомножителя  $\hat{I}_2(p, \tau_1, n)$  (40). Имеем

$$\hat{I}_2(p, \tau_1, n) \doteq I_2(t_1, \tau_1, n) = \frac{k(2n-1)+2c}{2a\sqrt{\pi}(\tau_1-t_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[k(2n-1)+2c]^2}{4a^2(\tau_1-t_1)}\right\}. \quad (44)$$

Найдем свертку  $I_1(t_1, \tau, m) \star I_2(t_1, \tau, n)$  (43) и (44) для каждого  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  и  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Имеем

$$I_1(t_1, \tau, m) \star I_2(t_1, \tau, n) = \exp\left\{-\frac{(m+n)^2 k^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\} \times \left\{\frac{1}{2a\pi\sqrt{\tau_1-t_1}(2\tau_1-t_1)} + \frac{k(2n-1)+2c}{4a\sqrt{\pi}\sqrt{\tau_1}(2\tau_1-t_1)^{3/2}} \exp\{\gamma_{m,n}^2(t_1, \tau_1)\} \operatorname{erfc}(\gamma_{m,n}(t_1, \tau_1))\right\}, \quad (45)$$

где

$$\gamma_{m,n}(t_1, \tau_1) = \frac{[k(2n-1)+2c] \cdot \sqrt{\tau_1}}{2a\sqrt{\tau_1-t_1}\sqrt{2\tau_1-t_1}} + \frac{[k(2m+1)-2c] \cdot \sqrt{2\tau_1-t_1}}{2a\sqrt{\tau_1-t_1}\sqrt{\tau_1}}.$$

Отсюда

$$R_2(t_1, \tau_1) = \frac{1}{4\tau_1(2\tau_1-t_1)} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_m^{2c_1-1} B_n^{2c_1} \frac{k(2m+1)-2c}{a} \exp\left\{-\frac{(m+n)^2 k^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\} \times \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\tau_1-t_1}} + \frac{k(2n-1)+2c}{2a\sqrt{\tau_1}\sqrt{2\tau_1-t_1}} \exp\{\gamma_{m,n}^2\} \operatorname{erfc}(\gamma_{m,n})\right\}.$$

#### 4.4 ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (16)

Имеем

$$\psi_{part}(t_1) = t_1^{-1} f_2(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} [R_1(t_1, \tau_1) - R_2(t_1, \tau_1)] f_2(\tau_1) d\tau_1. \quad (46)$$

Теперь перейдем от функции  $\psi(t_1)$  к решению уравнения (17)  $\varphi_2(t_1)$ :

$$\varphi_2(t_1) = t_1 \psi_{part}(t_1) = f_2(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} t_1 [R_1(t_1, \tau_1) - R_2(t_1, \tau_1)] f_2(\tau_1) d\tau_1. \quad (47)$$

Используя следующие замены:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t_1) &= t_1^{-1/2} \varphi_1(t_1^{-1}) = t^{1/2} \varphi_1(t) = \varphi_2(t^{-1}), \\ \varphi_1(t) &= t^{-1/2} \varphi_2(t^{-1}), \quad f_2(t_1) = t_1^{-1/2} f_1(t_1^{-1}) = t^{1/2} f_1(t), \\ \varphi(t) &= \varphi_1(t) \exp \left\{ -\frac{k^2 t}{4a^2} \right\}, \quad f(t) = f_1(t) \exp \left\{ -\frac{k^2 t}{4a^2} \right\}, \end{aligned}$$

определим решение  $\varphi_1(t)$  (17) и  $\varphi_{part}(t)$  – частное решение уравнения (12):

$$\varphi_1(t) = f_1(t) + \int_0^t t^{-3/2} \tau^{-3/2} [R_1(t^{-1}, \tau^{-1}) - R_2(t^{-1}, \tau^{-1})] f_1(\tau) d\tau, \quad (48)$$

$$\varphi_{part}(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) \exp \left\{ -\frac{k^2(t-\tau)}{4a^2} \right\} f(\tau) d\tau, \quad (49)$$

где

$$R(t, \tau) = R_1(t, \tau) - R_2(t, \tau), \quad (50)$$

$$R_1(t, \tau) = t^{-3/2} \tau^{-3/2} R_1(t^{-1}, \tau^{-1}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_m^{2c_1-1} B_n^{2c_1} \cdot \frac{(m+n)k}{a\sqrt{\pi}} R_{1,m,n}(t, \tau), \quad (51)$$

$$R_{1,m,n}(t, \tau) = \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -(m+n)^2 \frac{k^2 t \tau}{a^2(t-\tau)} \right\}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} R_2(t, \tau) &= t^{-3/2} \tau^{-3/2} R_2(t^{-1}, \tau^{-1}) = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_m^{2c_1-1} B_n^{2c_1} \cdot \frac{k(2m+1) - 2c}{4a\sqrt{\pi}} \cdot R_{2,m,n}(t, \tau), \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} R_{2,m,n}(t, \tau) &= \left\{ \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}(2t-\tau)} + \frac{[k(2n-1) + 2c]\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{\tau}{(2t-\tau)^{3/2}} \times \right. \\ &\times \sqrt{\tau} \cdot \exp \{ \gamma^2(m, n, t, \tau) \} \operatorname{erfc} \{ \gamma(m, n, t, \tau) \} \cdot \exp \left\{ -(m+n)^2 \frac{k^2 t \tau}{a^2(t-\tau)} \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\gamma(m, n, t, \tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{2a\sqrt{t-\tau}} \cdot \frac{2k(m+n)t + (t-\tau)[k(2m+1) - 2c]}{\sqrt{2t-\tau}}. \quad (55)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Для резольвенты  $R(t, \tau)$  (50)–(55) справедлива оценка

$$|R(t, \tau)| \leq C \frac{\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{k^2 t \tau}{a^2 (t - \tau)} \right\}, \quad 0 < \tau < t < +\infty. \quad (56)$$

На основе Леммы 2 мы устанавливаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Для любой правой части  $f(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; \sqrt{t} \exp \{k^2 t / (4a^2)\})$  из класса (14) интегральное уравнение (10) имеет общее решение  $\varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; \sqrt{t} \exp \{k^2 t / (4a^2)\})$ :

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_{\text{hom}}(t), \quad C = \text{const},$$

где  $\varphi_{\text{hom}}(t)$  определено выражением (26) и для резольвенты  $R(t, \tau)$  (50) имеет место оценка (56):

$$|R(t, \tau)| \leq C \frac{\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{k^2 t \tau}{a^2 (t - \tau)} \right\}, \quad 0 < \tau < t < +\infty.$$

## 5 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Решение  $v(x, t)$  граничной задачи (3)–(4) определяется согласно формулам (7)–(8) и (26)–(27), а решение исходной граничной задачи (1)–(2) будет иметь вид [6]

$$u(x, t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad (57)$$

так как согласно классу решений, определяемому ниже в Теореме 2, дополнительное слагаемое к интегралу в (57) должно быть равно нулю, то есть  $c(t) \equiv 0$ , где  $v(x, t) = v_{\text{hom}}(x, t) + v_{\text{part}}(x, t)$ , при этом

$$v_{\text{hom}}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x + k\tau)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} + \right.$$

$$+ \exp \left\{ -\frac{(x - k\tau)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} v_{part}(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x - \tau)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \right] \times \\ & \times \varphi_{part}(\tau) d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x + \xi)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \right] \tilde{g}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} v_0(\tau) d\tau, \quad (59) \end{aligned}$$

где  $\varphi_{hom}(t)$  определяется из формулы (26)–(27), а  $\varphi_{part}(t)$  определяется из формулы (49).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** Для любой правой части  $f(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; \sqrt{t} \exp \{t/(4a^2)\})$  из класса (14) и для данных функций  $g(x, t) \in W_\infty^{1,0}(G; \sqrt{t} \exp \{t/(4a^2)\})$ ,  $u_0(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; t^{-\frac{1}{2}})$ ,  $u_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; t^{\frac{1}{2}})$  граничная задача (1)–(2) имеет общее решение  $u(x, t) \in L_\infty(G; (x + t^{1/2})^{-1})$ , которое определяется из формул (57)–(59).

## 6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено представление решения граничной задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрической области с производной по времени на подвижной границе. Граничная задача сводится к особому интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. С помощью построенной в работе резольвенты найдено общее решение неоднородного интегрального уравнения в некотором весовом классе существенно ограниченных функций. Определены классы решений для исходной граничной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Солонников В.А., Фазано А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 269. – С. 322-338.
- 2 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
- 3 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems. – 2014. – No. 213. – DOI: 10.1186/s13661-014-0213-4.
- 4 Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1234-1248.
- 5 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. – 2015. – V. 2015, No. 71. – 14 p.
- 6 Jenaliyev M., Ramazanov M. On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // AIP Conference Proceedings. – 2016. – No. 1759. – P. 020085-1–020085-6. – DOI: 10.1063/1.4959699.
- 7 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 679 с.
- 8 Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 703 с.
- 9 Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Dover Publications. – Inc. Mineola, New York, 2000. – XVII+1130 p.
- 10 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.2. – М.: ФизМатЛит, 2003. – 664 с.
- 11 Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products, Seventh Edition, AP. – New York, 2007. – Elsevier Inc. XLVIII+1171 p.
- 12 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1. – М.: ФизМатЛит, 2002. – 632 с.

Дженалиев М.Т., Ысқақов С.А., Рамазанов М.И. АЗЫНҒАН АЙ-МАҚТАРДАҒЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ ҮШІН БІР ШЕТТІК ЕСЕП ЖАЙЫНДА

Жылжымалы шекарада уақыт бойынша туындысы бар цилиндрлік емес аймақтағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шекаралық есептің шешімділігі зерттеледі. Шекаралық есеп жаңа белгісіз функцияны енгізу арқылы екінші текті Вольтерра типті ерекше интегралдық теңдеуіне редуци-яланған. Біртекті шекаралық есебі үшін белгілі бір елеулі шектелген сал-

мақты функциялар класында нөлдік емес шешімінің бар екені тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен көрсетілген. Резольвентаның көмегімен бастапқы шекаралық есептің жалпы шешімі құрылған.

*Кілттік сөздер.* Шеттік есеп, жылуөткізгіштік теңдеуі, цилиндрлік емес аймақ, нөлдік емес шешім, резольвента, салмақты кеңістік.

Jenaliyev M.T., Iskakov S.A., Ramazanov M.I. ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF A HEAT CONDUCTION IN A DEGENERATING DOMAIN

The solvability of a boundary value problem for the heat equation in a non-cylindrical domain with a time derivative at the moving boundary, is studied. By introducing a new unknown function the boundary value problem is reduced to a singular integral Volterra type equation of the second kind. For the homogeneous boundary value problem, it is shown that in a certain weight class of essentially bounded functions there exists a nonzero solution with an accuracy up to a constant factor. Using the resolvent, a general solution of the initial boundary value problem is constructed.

*Key words.* Boundary value problem, equation of heat conduction, non-cylindrical domain, nontrivial solution, resolvent, weight space.

Дженалиев М.Т.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125

E-mail: [muvasharkhan@gmail.com](mailto:muvasharkhan@gmail.com)

Искаков С.А.

Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова

100028, Караганда, Казахстан, ул. Университетская 28

E-mail: [isagundyk@mail.ru](mailto:isagundyk@mail.ru)

Рамазанов М.И.

Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова

100028, Караганда, Казахстан, ул. Университетская 28

E-mail: [ramamur@mail.ru](mailto:ramamur@mail.ru)

*Статья поступила в редакцию 24.12.2018*



**AN ALGORITHM OF SOLVING A LINEAR BOUNDARY  
VALUE PROBLEM FOR A LOADED FREDHOLM  
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION**

D.S. DZHUMABAEV, A.G. SMADIYEVA

**Abstract.** Based on parameterization method an algorithm of solving considered boundary value problem is proposed. Numerical implementation of the algorithm is offered.

**Keywords.** Loaded Fredholm integro-differential equation, parameterization method, fourth order Runge-Kutta method, Simpson method.

## 1 INTRODUCTION

In the present paper, we consider the boundary value problem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+N(t)x(\theta_0) + W(t)x(\theta_1) + Z(t)x(\theta_2) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad (2)$$

where  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 = T$ , the  $(n \times n)$ -matrices  $A(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $N(t)$ ,  $W(t)$ ,  $Z(t)$  and  $n$ -vector  $f(t)$  are continuous on  $[0, T]$ ,  $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$ .

Let  $C([0, T], R^n)$  be a space of continuous functions  $x : [0, T] \rightarrow R^n$  with the norm  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ . A solution to problem (1), (2) is a continuously

---

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34K10, 34K28, 45J05

Funding: This research is supported by Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan Grant No. AP05132486.

© D.S. Dzhumabaev, A.G. Smadiyeva, 2018.

differentiable on  $(0, T)$  function  $x(t) \in C([0, T], R^n)$  satisfying the loaded Fredholm integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations are studied by many authors [1]–[5]. Loaded differential equations and problems for these equations are considered in [6]–[10].

By  $\Delta_2(\theta)$  we denote the partition of interval  $[0; T]$  into two subintervals:  $[0; T] = [0; \theta_1] \cup [\theta_1; T]$ .

Denote by  $C([0, T], \Delta_2, R^{2n})$  the space of vector functions  $(x_1(t), x_2(t))$ , where functions  $x_r : [\theta_{r-1}, \theta_r) \rightarrow R^n$  are continuous and have the finite left-sided limits  $\lim_{t \rightarrow \theta_r - 0} x_r(t)$ ,  $r = \overline{1, 2}$ , with the norm  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, 2}} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|x_r(t)\|$ .

Let  $x(t)$  be a solution to the loaded Fredholm integro-differential equation (1) and  $x_1(t), x_2(t)$  be its restrictions to the subintervals  $[0; \theta_1), [\theta_1; T]$ . Then the system of two functions  $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$  belongs to  $C([0, T], \Delta_2, R^{2n})$  and satisfies the system of loaded Fredholm integro-differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A(t)x_1 + \varphi(t) \left[ \int_0^{\theta_1} \psi(\tau)x_1(\tau)d\tau + \int_{\theta_1}^T \psi(\tau)x_2(\tau)d\tau \right] + \\ &+ N(t)x_1(0) + W(t)x_2(\theta_1) + Z(t)x(T) + f(t), \quad t \in [0, \theta_1), \quad x \in R^n, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= A(t)x_2 + \varphi(t) \left[ \int_0^{\theta_1} \psi(\tau)x_1(\tau)d\tau + \int_{\theta_1}^T \psi(\tau)x_2(\tau)d\tau \right] + \\ &+ N(t)x_1(0) + W(t)x_2(\theta_1) + Z(t)x(T) + f(t), \quad t \in [\theta_1, T), \quad x \in R^n, \end{aligned} \quad (4)$$

the boundary condition

$$Bx_1(0) + Cx(T) = d, \quad (5)$$

and continuity conditions

$$\lim_{t \rightarrow \theta_1 - 0} x_1(t) = x_2(\theta_1), \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow T - 0} x_2(t) = x(T). \quad (7)$$

A pair  $(x(T), x[t])$  with  $x(T) \in R^n$  and  $x[t] = (x_1(t), x_2(t)) \in C([0, T], \Delta_2, R^{2n})$  satisfying the loaded Fredholm integro-differential equations

(3), (4), boundary condition (5) and continuity conditions (6), (7) is called a solution to the problem (3)–(7).

Introducing parameters  $\lambda_1 = x_1(0)$ ,  $\lambda_2 = x_2(\theta_1)$ ,  $\lambda_3 = x(T)$  and making the substitutions  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ,  $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$ ,  $r = \overline{1, 2}$ ,  $x(T) = \lambda_3$ , we obtain the system of integro-differential equations with parameters

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = A(t)(u_1 + \lambda_1) + \varphi(t) \left[ \int_0^{\theta_1} \psi(\tau)(u_1(\tau) + \lambda_1) d\tau + \int_{\theta_1}^T \psi(\tau)(u_2(\tau) + \lambda_2) d\tau \right] + \\ + N(t)\lambda_1 + W(t)\lambda_2 + Z(t)\lambda_3 + f(t), \quad t \in [0, \theta_1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} = A(t)(u_2 + \lambda_2) + \varphi(t) \left[ \int_0^{\theta_1} \psi(\tau)(u_1(\tau) + \lambda_1) d\tau + \int_{\theta_1}^T \psi(\tau)(u_2(\tau) + \lambda_2) d\tau \right] + \\ + N(t)\lambda_1 + W(t)\lambda_2 + Z(t)\lambda_3 + f(t), \quad t \in [\theta_1, T), \end{aligned} \quad (9)$$

initial conditions at the beginning points of subintervals

$$u_1(0) = 0, \quad (10)$$

$$u_2(\theta_1) = 0, \quad (11)$$

the boundary condition

$$B\lambda_1 + C\lambda_3 = d, \quad (12)$$

and continuity conditions

$$\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow \theta_1-0} u_1(t) - \lambda_2 = 0, \quad (13)$$

$$\lambda_2 + \lim_{t \rightarrow T-0} u_2(t) - \lambda_3 = 0. \quad (14)$$

The problem (8)–(11) is called the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters. A solution to boundary value problem (8)–(14) is a pair  $(\lambda^*, u^*[t])$  with  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) \in R^{2n}$  and  $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t)) \in C([0, T], \Delta_2, R^{2n})$ , where the functions  $u_1^*(t), u_2^*(t)$  satisfy the system of integro-differential equations (8), (9), additional conditions (10)–(14) with  $\lambda_1 = \lambda_1^*, \lambda_2 = \lambda_2^*, \lambda_3 = \lambda_3^*$  and initial conditions (10), (11).

Using the fundamental matrix  $X(t)$  of a differential equation  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ ,  $t \in [0, T]$ , we reduce the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters (8)–(11) to the equivalent system of integro-differential equations:

$$u_1(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \left[ A(\tau)\lambda_1 + \varphi(\tau) \left( \int_0^{\theta_1} \psi(s)(u_1(s) + \lambda_1) ds + \int_{\theta_1}^T \psi(s)(u_2(s) + \lambda_2) ds \right) + N(\tau)\lambda_1 + W(\tau)\lambda_2 + Z(\tau)\lambda_3 + f(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [0, \theta_1], \quad (15)$$

$$u_2(t) = X(t) \int_{\theta_1}^t X^{-1}(\tau) \left[ A(\tau)\lambda_2 + \varphi(\tau) \left( \int_0^{\theta_1} \psi(s)(u_1(s) + \lambda_1) ds + \int_{\theta_1}^T \psi(s)(u_2(s) + \lambda_2) ds \right) + N(\tau)\lambda_1 + W(\tau)\lambda_2 + Z(\tau)\lambda_3 + f(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [\theta_1, T]. \quad (16)$$

We consider the auxiliary Cauchy problems for ordinary differential equations on subintervals:

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in [0, \theta_1],$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \quad z(\theta_1) = 0, \quad t \in [\theta_1, T],$$

where  $P(t)$  is a square matrix or vector of dimension  $n$ , continuous on  $[0, \theta_1]$  or  $[\theta_1, T]$ . Their solutions we denote by  $a_1(P, t)$  and  $a_2(P, t)$ , respectively. Now, we set

$$\mu = \int_0^{\theta_1} \psi(s)u_1(s) ds + \int_{\theta_1}^T \psi(s)u_2(s) ds, \quad \hat{\psi}_1 = \int_0^{\theta_1} \psi(s) ds, \quad \hat{\psi}_2 = \int_{\theta_1}^T \psi(s) ds$$

and re-write the system of integro-differential equations (15), (16) as follows:

$$u_1(t) = a_1(\varphi, t)\mu + [a_1(A, t) + a_1(\varphi, t)\hat{\psi}_1 + a_1(N, t)]\lambda_1 + [a_1(\varphi, t)\hat{\psi}_2 + a_1(W, t)]\lambda_2 +$$

$$+a_1(Z, t)\lambda_3 + a_1(f, t), \quad t \in [0, \theta_1], \quad (17)$$

$$u_2(t) = a_2(\varphi, t)\mu + [a_2(\varphi, t)\hat{\psi}_1 + a_2(N, t)]\lambda_1 + a_2(A, t) + a_2(\varphi, t)\hat{\psi}_2 + a_2(W, t)]\lambda_2 + \\ + a_2(Z, t)\lambda_3 + a_2(f, t), \quad t \in [\theta_1, T]. \quad (18)$$

Multiplying both sides of (17), (18) by  $\psi(s)$ , integrating on the subintervals  $[0; \theta_1]$  and  $[\theta_1; T]$ , summing up both sides, we obtain the system of linear algebraic equations with respect to  $\mu$ :

$$\mu = G(\Delta_2)\mu + V_1(\Delta_2)\lambda_1 + V_2(\Delta_2)\lambda_2 + V_3(\Delta_2)\lambda_3 + g(f, \Delta_2), \quad (19)$$

with  $(n \times n)$ -matrices

$$G(\Delta_2) = \hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi), \\ V_1(\Delta_2) = \hat{\psi}_1(A) + [\hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi)] \cdot \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_1(N) + \hat{\psi}_2(N), \\ V_2(\Delta_2) = \hat{\psi}_2(A) + [\hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi)] \cdot \hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_1(W) + \hat{\psi}_2(W), \\ V_3(\Delta_2) = \hat{\psi}_1(Z) + \hat{\psi}_2(Z),$$

and vectors of the dimension  $n$ :

$$g(f, \Delta_2) = \hat{\psi}_1(f) + \hat{\psi}_2(f),$$

where

$$\hat{\psi}_1(P) = \int_0^{\theta_1} \psi(s)a_1(P, s)ds, \quad \hat{\psi}_2(P) = \int_{\theta_1}^T \psi(s)a_2(P, s)ds.$$

Using the matrices  $G(\Delta_2), V_1(\Delta_2), V_2(\Delta_2), V_3(\Delta_2)$ , we re-write system (19) in the form:

$$[I - G(\Delta_2)]\mu = V_1(\Delta_2)\lambda_1 + V_2(\Delta_2)\lambda_2 + V_3(\Delta_2)\lambda_3 + g(f, \Delta_2), \quad (20)$$

where  $I$  is the identity matrix of the dimension  $n$ .

*DEFINITION.* The special Cauchy problem (8)–(11) is called uniquely solvable, if for any  $\lambda \in R^{3n}$ ,  $f(t) \in C([0, T], R^n)$  it has a unique solution.

The special Cauchy problem (8)–(11) is equivalent to the system of integro-differential equations (15), (16). This system by virtue of the kernel degeneracy is equivalent to the system of algebraic equations (19) with respect to  $\mu \in R^n$ .

Further, we assume that the matrix  $I - G(\Delta_2)$  is invertible and  $[I - G(\Delta_2)]^{-1} = M(\Delta_2)$ . Then, we write  $\mu$  in the form

$$\begin{aligned} \mu = & M(\Delta_2)V_1(\Delta_2)\lambda_1 + M(\Delta_2)V_2(\Delta_2)\lambda_2 + \\ & + M(\Delta_2)V_3(\Delta_2)\lambda_3 + M(\Delta_2)g(f, \Delta_2). \end{aligned}$$

Substituting the right-hand side of (20) into (17), (18) instead of  $\mu$ , we get the representation of functions  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, 2}$  via  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ :

$$u_1(t) = D_{11}(\Delta_2, t)\lambda_1 + D_{12}(\Delta_2, t)\lambda_2 + D_{13}(\Delta_2, t)\lambda_3 + F_1(\Delta_2, t), \quad t \in [0, \theta_1), \quad (21)$$

$$u_2(t) = D_{21}(\Delta_2, t)\lambda_1 + D_{22}(\Delta_2, t)\lambda_2 + D_{23}(\Delta_2, t)\lambda_3 + F_2(\Delta_2, t), \quad t \in [\theta_1, T), \quad (22)$$

with

$$D_{11}(\Delta_2, t) = a_1(A, t) + a_1(\varphi, t) \cdot [M(\Delta_2) \cdot V_1(\Delta_2) + \hat{\psi}_1] + a_1(N, t),$$

$$D_{12}(\Delta_2, t) = a_1(\varphi, t) \cdot [M(\Delta_2) \cdot V_2(\Delta_2) + \hat{\psi}_2] + a_1(W, t),$$

$$D_{13}(\Delta_2, t) = a_1(\varphi, t) \cdot M(\Delta_2) \cdot V_3(\Delta_2) + a_1(Z, t),$$

$$D_{21}(\Delta_2, t) = a_2(\varphi, t) \cdot [M(\Delta_2) \cdot V_1(\Delta_2) + \hat{\psi}_1] + a_2(N, t),$$

$$D_{22}(\Delta_2, t) = a_2(A, t) + a_2(\varphi, t) \cdot [M(\Delta_2) \cdot V_2(\Delta_2) + \hat{\psi}_2] + a_2(W, t),$$

$$D_{23}(\Delta_2, t) = a_2(\varphi, t) \cdot M(\Delta_2) \cdot V_3(\Delta_2) + a_2(Z, t),$$

$$F_1(\Delta_2, t) = a_1(\varphi, t) \cdot M(\Delta_2) \cdot g(f, \Delta_2) + a_1(f, t),$$

$$F_2(\Delta_2, t) = a_2(\varphi, t) \cdot M(\Delta_2) \cdot g(f, \Delta_2) + a_2(f, t).$$

Then from (21), (22) we have

$$\lim_{t \rightarrow \theta_1 - 0} u_1(t) = D_{11}(\Delta_2, \theta_1)\lambda_1 + D_{12}(\Delta_2, \theta_1)\lambda_2 + D_{13}(\Delta_2, \theta_1)\lambda_3 + F_1(\Delta_2, \theta_1), \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow T - 0} u_2(t) = D_{21}(\Delta_2, T)\lambda_1 + D_{22}(\Delta_2, T)\lambda_2 + D_{23}(\Delta_2, T)\lambda_3 + F_2(\Delta_2, T). \quad (24)$$

Substituting the right-hand sides of (23), (24) into conditions of matching solution (13) and (14), we obtain the following system of linear algebraic equations with respect to parameters  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ :

$$B\lambda_1 + C\lambda_3 = d, \quad (25)$$

$$[I + D_{11}(\Delta_2, \theta_1)]\lambda_1 + [D_{12}(\Delta_2, \theta_1) - I]\lambda_2 + D_{13}(\Delta_2, \theta_1)\lambda_3 = -F_1(\Delta_2, \theta_1), \quad (26)$$

$$D_{21}(\Delta_2, T)\lambda_1 + [I + D_{22}(\Delta_2, T)]\lambda_2 + [D_{23}(\Delta_2, T) - I]\lambda_3 = -F_2(\Delta_2, T). \quad (27)$$

The system (25)–(27) can be written as

$$Q_*(\Delta_2)\lambda = -F_*(\Delta_2), \quad \lambda \in R^{3n}, \quad (28)$$

with

$$Q_*(\Delta_2) = \begin{pmatrix} B & O & C \\ I + D_{11}(\Delta_2, \theta_1) & D_{12}(\Delta_2, \theta_1) - I & D_{13}(\Delta_2, \theta_1) \\ D_{21}(\Delta_2, T) & I + D_{22}(\Delta_2, T) & D_{23}(\Delta_2, T) - I \end{pmatrix},$$

$$F_*(\Delta_2) = \begin{pmatrix} -d \\ F_1(\Delta_2, \theta_1) \\ F_2(\Delta_2, T) \end{pmatrix}.$$

The linear boundary value problem for the loaded Fredholm integro-differential equation (1), (2) is solvable if and only if the system of algebraic equation (28) is solvable.

Numerical solution to the problem (1), (2) we find by the following algorithm.

STEP 1. By  $\Delta_2(\theta)$  we denote the partition of interval  $[0, T)$  into two subintervals:  $[0, T) = [0, \theta_1) \cup [\theta_1, T)$ . Take  $N_1, N_2$  and divide subintervals  $[0, \theta_1)$  and  $[\theta_1, T)$  into  $2N_1$  and  $2N_2$  parts, respectively. Consider the Cauchy problems for the ordinary differential equations:

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in [0, \theta_1], \quad (29)$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t), \quad z(\theta_1) = 0, \quad t \in [\theta_1, T], \quad (30)$$

and denote by  $a_1(P, t)$  and  $a_2(P, t)$  their solutions.

Solving the problem (29), (30) by Runge-Kutta method of the fourth order for  $P(t) = A(t), P(t) = \varphi(t), P(t) = N(t), P(t) = W(t), P(t) = Z(t), P(t) =$

$f(t)$ , we obtain  $(n \times n)$ -matrices  $a_i(A, t)$ ,  $a_i(\varphi, t)$ ,  $a_i(N, t)$ ,  $a_i(W, t)$ ,  $a_i(Z, t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , and  $n$ -vector function  $a_i(f, t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , respectively.

STEP 2. Multiply each  $(n \times n)$ -matrices  $a_1(P, t)$  and  $a_2(P, t)$  to the  $(n \times n)$ -matrix  $\psi(t)$ , and using Simpson's method we evaluate the following integrals:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(A) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(A, s) ds, & \hat{\psi}_2(A) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(A, s) ds, \\ \hat{\psi}_1(\varphi) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(\varphi, s) ds, & \hat{\psi}_2(\varphi) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(\varphi, s) ds, & (31) \\ \hat{\psi}_1(N) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(N, s) ds, & \hat{\psi}_2(N) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(N, s) ds, \\ \hat{\psi}_1(W) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(W, s) ds, & \hat{\psi}_2(W) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(W, s) ds, \\ \hat{\psi}_1(Z) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(Z, s) ds, & \hat{\psi}_2(Z) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(Z, s) ds, \\ \hat{\psi}_1(f) &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) a_1(f, s) ds, & \hat{\psi}_2(f) &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) a_2(f, s) ds, \\ \hat{\psi}_1 &= \int_0^{\theta_1} \psi(s) ds, & \hat{\psi}_2 &= \int_{\theta_1}^T \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Summing up the definite integrals (31), we obtain  $(n \times n)$ -matrices:

$$G(\Delta_2) = \hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi).$$



If the matrix  $I - G(\Delta_2)$  is invertible, then we find its inverse and represent it in the form  $[I - G(\Delta_2)]^{-1} = M(\Delta_2)$ . From the equalities (12)–(16) we define  $(n \times n)$ -matrices:

$$\begin{aligned} V_1(\Delta_2) &= \hat{\psi}_1(A) + [\hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi)] \cdot \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_1(N) + \hat{\psi}_2(N), \\ V_2(\Delta_2) &= \hat{\psi}_2(A) + [\hat{\psi}_1(\varphi) + \hat{\psi}_2(\varphi)] \cdot \hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_1(W) + \hat{\psi}_2(W), \\ V_3(\Delta_2) &= \hat{\psi}_1(Z) + \hat{\psi}_2(Z) \end{aligned}$$

and vector of the dimension  $n$ :

$$g(f, \Delta_2) = \hat{\psi}_1(f) + \hat{\psi}_2(f).$$

STEP 3. Form the system of linear algebraic equations with respect to parameters:

$$Q_*(\Delta_2)\lambda = -F_*(\Delta_2), \quad \lambda \in R^{3n}. \quad (32)$$

Solving the system (32), we find  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) \in R^{3n}$ .

STEP 4. By the equalities:

$$\mu^* = M(\Delta_2)V_1(\Delta_2)\lambda_1^* + M(\Delta_2)V_2(\Delta_2)\lambda_2^* + M(\Delta_2)V_3(\Delta_2)\lambda_3^* + M(\Delta_2)g(f, \Delta_2),$$

we find  $\mu^* \in R^n$  and then solve the Cauchy problems:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + E^*(t), \quad z(0) = 0, \quad t \in [0, \theta_1], \\ \frac{dx}{dt} &= A(t)x + E^*(t), \quad z(\theta_1) = 0, \quad t \in [\theta_1, T], \end{aligned}$$

where

$$E^*(t) = \varphi(t)(\mu^* + \hat{\psi}_1\lambda_1^* + \hat{\psi}_2\lambda_2^*) + N(t)\lambda_1^* + W(t)\lambda_2^* + Z(t)\lambda_3^* + f(t).$$

EXAMPLE. Solve the linear two-point boundary value problem:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+N(t)x(0) + W(t)x(\theta_1) + Z(t)x(T) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad (33)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad (34)$$

where  $\theta_1 = \frac{3}{5}$ ,  $T = 1$ ,

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 + 1 \\ 2 - t & 3t \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 2t & t^2 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 3t \end{pmatrix},$$

$$N(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 3 - t^2 & t^3 \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} 3 - t^2 & 8 \\ t & 2 + t^3 \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} 2 + t & 7 \\ 5t^2 & t^3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 3t - (t+2) \cdot (t^2 + 1) - t^3 \cdot (t^3 - 2) - \frac{t \cdot (t+8)}{2} + \frac{152 \cdot t^2}{125} - \frac{4556}{125} \\ \frac{223 \cdot t}{125} + (t-2) \cdot (t^3 - 2) - 3 \cdot t \cdot (t+2) + t^2 - \frac{38 \cdot t^3}{5} + \frac{13}{10} \end{pmatrix}.$$

Divide subintervals  $[0, 0.6)$  and  $[0.6, 1)$  with step  $h = 0.05$ . Here  $(2 \times 2)$ -matrix  $I - G(\Delta_2)$  is invertible and

$$[I - G(\Delta_2)]^{-1} = \begin{pmatrix} -0, 5158784435 & -1, 9257121683 \\ -3, 2336506172 & -3, 3709611826 \end{pmatrix}.$$

$(6 \times 6)$ -matrix  $Q_*(\Delta_2)$  and vector  $F_*(\Delta_2) \in R^6$  have the form:

$$Q_*(\Delta_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7.96208 & -4.13306 & -7.81794 & -16.99188 & -5.00659 & -7.31456 \\ -16.55444 & -9.13479 & -16.26054 & -42.04077 & -11.97602 & -21.37263 \\ -17.37822 & -9.47101 & -12.71885 & -34.76522 & -10.73077 & -17.95951 \\ -17.37822 & -9.47101 & -12.71885 & -34.76522 & -10.73077 & -17.95951 \\ -19.58182 & -11.37182 & -16.25007 & -41.36000 & -11.03762 & -24.55247 \end{pmatrix}$$

and  $F_*(\Delta_2) = (-7; -3; 39.51073; 117.59976; 95.03249; 124.74563)'$ .

The solution to the system of linear algebraic equations is  $\lambda = -(Q^{-1} \cdot F)$ ,

$$\lambda = (-2; 1.999998; -1.783998; 2.599998; -0.999996; 3.000001)'$$

Below in Table 1, we give the results obtained by Mathcad 15:

TABLE – Numerical solution to the problem (33), (34)

$t$	$x_{(1)}(t)$	$x_{(1)}^*(t)$	$ x_{(1)}^*(t) - x_{(1)}(t) $	$x_{(2)}(t)$	$x_{(2)}^*(t)$	$ x_{(2)}^*(t) - x_{(2)}(t) $
0,00	-2	-2	$1.8 \cdot 10^{-15}$	1.9999989493	2	$1.1 \cdot 10^{-6}$
0,05	-1.9998749361	-1.999875	$6.39 \cdot 10^{-8}$	2.0499988067	2.05	$1.2 \cdot 10^{-6}$
0,10	-1.9989998652	-1.999	$1.348 \cdot 10^{-7}$	2.0999986715	2.1	$1.3 \cdot 10^{-6}$
0,15	-1.9966247877	-1.996625	$2.123 \cdot 10^{-7}$	2.149998546	2.15	$1.5 \cdot 10^{-6}$
0,20	-1.9919997038	-1.992	$2.962 \cdot 10^{-7}$	2.1999984322	2.2	$1.6 \cdot 10^{-6}$
0,25	-1.9843746141	-1.984375	$3.859 \cdot 10^{-7}$	2.2499983321	2.25	$1.7 \cdot 10^{-6}$
0,30	-1.9729995187	-1.973	$4.813 \cdot 10^{-7}$	2.2999982477	2.3	$1.8 \cdot 10^{-6}$
0,35	-1.9571244179	-1.957125	$5.821 \cdot 10^{-7}$	2.349998181	2.35	$1.8 \cdot 10^{-6}$
0,40	-1.9359993118	-1.936	$6.882 \cdot 10^{-7}$	2.3999981344	2.4	$1.9 \cdot 10^{-6}$
0,45	-1.9088742002	-1.908875	$7.998 \cdot 10^{-7}$	2.4499981106	2.45	$1.9 \cdot 10^{-6}$
0,50	-1.8749990825	-1.875	$9.175 \cdot 10^{-7}$	2.4999981125	2.5	$1.9 \cdot 10^{-6}$
0,55	-1.8336239578	-1.833625	$1.0 \cdot 10^{-6}$	2.5499981439	2.55	$1.9 \cdot 10^{-6}$
0,60	-1.7839988245	-1.784	$1.2 \cdot 10^{-6}$	2.5999982092	2.6	$1.8 \cdot 10^{-6}$
0,65	-1.72537368	-1.725375	$1.3 \cdot 10^{-6}$	2.6499983141	2.65	$1.7 \cdot 10^{-6}$
0,70	-1.6569985206	-1.657	$1.5 \cdot 10^{-6}$	2.6999984653	2.7	$1.5 \cdot 10^{-6}$
0,75	-1.578123341	-1.578125	$1.7 \cdot 10^{-6}$	2.7499986718	2.75	$1.3 \cdot 10^{-6}$
0,80	-1.4879981337	-1.488	$1.9 \cdot 10^{-6}$	2.7999989445	2.8	$1.1 \cdot 10^{-6}$
0,85	-1.3858728883	-1.385875	$2.1 \cdot 10^{-6}$	2.8499992976	2.85	$7.0 \cdot 10^{-7}$
0,90	-1.2709975907	-1.271	$2.4 \cdot 10^{-6}$	2.8999997495	2.9	$2.5 \cdot 10^{-7}$
0,95	-1.1426222213	-1.142625	$2.8 \cdot 10^{-6}$	2.9500003237	2.95	$3.2 \cdot 10^{-7}$
1,00	-0.9999967532	-1	$3.2 \cdot 10^{-6}$	3.0000010507	3	$1.1 \cdot 10^{-6}$

As we see from the Table, offered numerical algorithm is effective and allows us to obtain the numerical solution to the linear boundary value problem for the loaded Fredholm integro-differential equation of higher order accuracy.

## REFERENCES

- 1 Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems // VSP. Utrecht. Boston. – 2004. – 317 p.
- 2 Bykov Ya.A. On some problems in the theory of integro-differential equations. – Frunze: Kirgiz. Gos. Univ., 1957. – 328 p. (in Russian).
- 3 Wazwaz A.M. Linear and nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. – Higher Education Press, Beijing, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
- 4 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – No. 327. – P. 79-108.

5 Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem an integro-differential equation // Comput. Math. Math. Phys.– 2010. – No. 50. – P. 1150-1161.

6 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math Math Phys. – 2014. – No. 54. – P. 1096-1109.

7 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with nonseparated multipoint and integral conditions // Numer Anal Appl. – 2014. – No. 7. – P. 1-14.

8 Alikhanov A.A., Berezkov A.M., Shkhanukhov-Lafishev M.Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods // Comput Math Math Phys. – 2008. – No. 48. – P. 1581-1590.

9 Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mt. J. Math. – 1975. – No. 5. – P. 493-542.

10 Dzhumabaev D.S. Computational methods for solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Math. Meth Appl Sci. – 2017. – P.1-24.

Джумабаев Д.С., Смадиева А.Г. ЖҮКТЕЛГЕН ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУ АЛГОРИТМІ

Қарастырылып отырған шеттік есепті шешу алгоритмі параметрлеу әдісінің негізінде ұсынылған. Алгоритмнің сандық жүзеге асырылуы ұсынылады.

*Кілттік сөздер.* Жүктелген Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі, параметрлеу әдісі, төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі, Симпсон әдісі.

Джумабаев Д.С., Смадиева А.Г. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

На основе метода параметризации предложен алгоритм решения рассматриваемой краевой задачи. Предложена численная реализация алгоритма.

*Ключевые слова.* Нагруженное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, метод параметризации, метод Рунге-Кутты четвертого порядка, метод Симпсона.

Dzhumabaev D.S.  
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
050010, Almaty, Pushkin str., 125  
Department of Mathematical and Computer Modeling  
International Information Technology University  
050040, Almaty, Kazakhstan, Manasa Str. 8  
E-mail: dzhumabaev@list.ru, assanova@math.kz

Smadiyeva A.G.  
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
050010, Almaty, Pushkin str., 125  
al-Farabi Kazakh National University  
050010, Almaty, al-Farabi Ave., 71  
E-mail: aselya87kz@mail.ru

Received 13.12.2018

МРНТИ 27.31.15, 27.31.33, 27.31.44

**ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ  
НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

С.С. КАВДРАХОВА

**Аннотация.** Рассматривается полупериодическая краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка. Получены достаточные условия, обеспечивающие оценки близости к точному решению рассматриваемой задачи тройки функций, построенных с помощью модификации метода ломаных Эйлера.

**Ключевые слова.** Неклассические уравнения третьего порядка, полупериодические краевые задачи, модификация метода ломаных Эйлера, приближенные решения, периодические краевые задачи, системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка описывают реальные процессы механики, нелинейной акустики, магнитной гидродинамики. Продольные колебания составных стержней, состоящих из упругих и упруго-вязких участков, описываются уравнением третьего порядка [1]–[5]. Вопросы, посвященные корректной разрешимости краевых задач для уравнений третьего порядка, и методы их исследования рассмотрены в работах [6]–[9]. Следует отметить, что существует так много работ, посвященных существованию решения краевых задач, где рассматриваются гиперболические уравнения третьего порядка. Тем не менее, вопросы разрешимости и построения приближенных решений

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35L25, 35E25, 35L70, 35B10, 35A09.

Funding: Работа поддержана грантом AP05131220 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© С.С. Кавдрахова, 2018.

нелокальных задач для уравнений третьего порядка остаются актуальными. В данной статье исследуется полупериодическая краевая задача для уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными. С помощью специального преобразования неизвестной функции и ее производной по временной переменной рассматриваемое уравнение третьего порядка сводится к системе двух гиперболических уравнений со смешанными производными. Для нахождения приближенного решения краевой задачи для системы гиперболических уравнений применяется модификация метода ломаных Эйлера [10]. Получены условия оценки сходимости метода ломаных Эйлера к решению рассматриваемой краевой задачи.

В области  $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$  рассматривается полупериодическая краевая задача для одного уравнения третьего порядка неклассического типа:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_3(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + a_4(x, t) u + f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, T)}{\partial t}, \quad x \in [0, \omega], \quad (4)$$

где  $f(x, t)$ ,  $a_i(x, t)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – непрерывные на  $\bar{\Omega}$  функции,  $\psi(t)$  – дважды непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  функция, удовлетворяющая условиям  $\psi(0) = \psi(T)$ ,  $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(T)$ .

Через  $C(\bar{\Omega}, R^2)$ ,  $C([0, T], R^2)$  обозначим соответственно пространства непрерывных функций  $u : \bar{\Omega} \rightarrow R^2$  и  $\psi(t) : [0, T] \rightarrow R^2$ .

Решением задачи (1)–(4) назовем функцию  $u(x, t)$  имеющую непрерывные на  $\bar{\Omega}$  частные производные  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}$ ,  $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2}$  и удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4).

В задаче (1)–(4) произведем замену

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha_0[u_1(x, t) - u_2(x, t)], \quad (5)$$

где  $\alpha_0 = \max(1, \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |a_1(x,t)|)$ , и введем обозначения

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}, \quad V(x,t) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad W(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$A(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 + \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} & -\alpha_0 + \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} \\ \alpha_0 - \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} & -\alpha_0 - \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} \end{pmatrix},$$

$$B(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_2(x,t) & -a_2(x,t) \\ -a_2(x,t) & a_2(x,t) \end{pmatrix}, \quad F(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{f(x,t)}{2\alpha_0} \\ -\frac{f(x,t)}{2\alpha_0} \end{pmatrix},$$

$$C(x,t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_3(x,t) + \frac{a_4(x,t)}{\alpha_0} & -a_3(x,t) + \frac{a_4(x,t)}{\alpha_0} \\ -a_3(x,t) - \frac{a_4(x,t)}{\alpha_0} & a_3(x,t) - \frac{a_4(x,t)}{\alpha_0} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(t) + \frac{\dot{\psi}(t)}{\alpha_0} \\ \psi(t) - \frac{\dot{\psi}(t)}{\alpha_0} \end{pmatrix}, \quad \dot{\Psi}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\psi}(t) + \frac{\ddot{\psi}(t)}{\alpha_0} \\ \dot{\psi}(t) - \frac{\ddot{\psi}(t)}{\alpha_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда задачу (1)–(4) можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x,t)V + B(x,t)W(x,t) + C(x,t)U(x,t) + F(x,t), \quad (6)$$

$$V(x,0) = V(x,T), \quad (7)$$

$$U(x,t) = \psi(t) + \int_0^x V(\xi,t)d\xi, \quad W(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x V_t(\xi,t)d\xi \quad (8)$$

для вектор-функции  $U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$  и матрицы  $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))$  ( $i, j = 1, 2$ ).



Определим следующие нормы и обозначения:

$$\begin{aligned} \|A(x, t)\| &= \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^2 |a_{ij}(x, t)|, \|U(x, \cdot)\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \max_{i=1,2} |u_i(x, t)|, \\ \|A(x, \cdot)\|_1 &= \max_{t \in [0, T]} \|A(x, t)\|, \\ \|\psi\|_1 &= \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|, \|\Psi\|_{\alpha, 1} = \|\psi(t)\|_1 + \frac{1}{\alpha_0} \|\dot{\psi}(t)\|_1, \alpha_1 = \max_{(x, t) \in \bar{\Omega}} \|A(x, t)\|, \\ \alpha_2 &= \max_{(x, t) \in \bar{\Omega}} \|B(x, t)\|, \alpha_3 = \max_{(x, t) \in \bar{\Omega}} \|C(x, t)\|, \hat{F}(t) = \max_{x \in [0, \omega]} \|F(x, t)\|, \\ \|F\|_1 &= \max_{t \in [0, T]} \|F(x, t)\|. \end{aligned}$$

2 О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для нахождения решения задачи (6)–(8) используем модификацию метода ломаных Эйлера [10]. Разобьем отрезок  $[0, \omega]$  с шагом  $h > 0$  на  $N$  частей,  $Nh = \omega$ , и на каждом шаге решаем периодические краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функции  $V^{(0)}(t)$ ,  $\dot{V}^{(0)}(t)$  определим равенствами:  $V^{(0)}(t) = 0$ ,  $\dot{V}^{(0)}(t) = 0$ .

Решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dV^{(1)}}{dt} = A(0, t)V^{(1)} + B(0, t)\dot{\Psi}(t) + C(0, t)\Psi(t) + F(0, t), \quad V^{(1)}(0) = V^{(1)}(T), \quad (9)$$

находим функцию  $V^{(1)}(t)$ .

Функцию  $V^{(2)}(t)$  найдем, решая периодическую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(2)}}{dt} &= A(h, t)V^{(2)} + B(h, t)(\dot{\Psi}(t) + h \cdot \dot{V}^{(1)}(t)) + C(h, t)(\Psi(t) + \\ &+ h \cdot V^{(1)}(t)) + F(h, t), \quad V^{(2)}(0) = V^{(2)}(T). \end{aligned} \quad (10)$$

Считая известной  $V^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , функцию  $V^{(i+1)}(t)$  находим, решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dV^{(i+1)}}{dt} = A(ih, t)V^{(i+1)} + B(ih, t)(\dot{\Psi}(t) + h \sum_{j=0}^i \dot{V}^{(j)}(t)) +$$

$$+C(ih, t)(\Psi(t) + h \sum_{j=0}^i V^{(j)}(t)) + F(ih, t), \quad (11)$$

$$V^{(i+1)}(0) = V^{(i+1)}(T), \quad i = \overline{0, N}. \quad (12)$$

Следующее утверждение устанавливает существование единственного решения периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть выполняется неравенство  $a_1(x, t) \geq \sigma > 0$  для всех  $x \in [0, \omega]$ . Тогда для любого  $h > 0 : Nh = \omega$  периодическая краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12) имеет единственное решение  $\{V^{(i+1)}(t), i = \overline{0, N}\}$  и справедливы оценки

$$\max(\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1) \leq \lambda(\omega, h)\|\Phi(\cdot)\|_1,$$

где  $\lambda(\omega, h) = K(\alpha_0, \alpha_1, \sigma)(1 + (\alpha_2 + \alpha_3)hK(\alpha_0, \alpha_1, \sigma))^{\frac{\omega}{h}}$ ,  $K(\alpha_0, \alpha_1, \sigma) = \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1\right)$ ,  $\|\Phi(\cdot)\|_1 = (\alpha_2 + \alpha_3)\max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha, 1}) + \|\hat{F}\|_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим задачу (6)–(8). Согласно выбору числа  $\alpha_0 > 0$  выполняется неравенство

$$\alpha_0 - \frac{|a_1(x, t)|}{\alpha_0} \geq 0,$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{2} \left[ \alpha_0 + \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0} \right] \right| - \left| \frac{1}{2} \left[ \alpha_0 - \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0} \right] \right| = \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0},$$

$$\left| \frac{1}{2} \left[ \alpha_0 - \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0} \right] \right| - \left| \frac{1}{2} \left[ \alpha_0 + \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0} \right] \right| = \frac{a_1(x, t)}{\alpha_0},$$

это означает, что в матрице  $A(x, t)$  имеет место условие диагонального преобладания по строкам с положительным числом  $\frac{a_1(x, t)}{\alpha_0}$ .

Рассмотрим задачу (11), (12). По теореме 4 из [11, с. 392] существует единственное решение задачи и выполняется оценка

$$\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 \leq \frac{\alpha_0}{\sigma} \|B(ih, \cdot)\|_1 \left( \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha, 1} + h \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \frac{\alpha_0}{\sigma} \|C(ih, \cdot)\|_1 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1} + h \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \frac{\alpha_0}{\sigma} \|F(ih, \cdot)\|_1 \leq \\
& \leq \frac{\alpha_0}{\sigma} \left( (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right. \\
& \left. + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Так как  $V^{(i)}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (11), то для ее производной будет справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|\dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1 & \leq \|A(ih, \cdot)\|_1 \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + \|B(ih, \cdot)\|_1 \left( \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1} + h \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 + \right. \\
& \left. + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right) + \|C(ih, \cdot)\|_1 \left( \|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1} + h \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1 + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right) \leq \\
& \leq \alpha_1 \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_1, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_1) + \\
& + (\alpha_2 + \alpha_3)h \sum_{j=0}^i \max \left( \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1. \quad (14)
\end{aligned}$$

Подставляя в правую часть (14) оценку для  $\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1$ , получим

$$\begin{aligned}
\|\dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1 & \leq \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} \left[ (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + (\alpha_2 + \alpha_3)h \times \right. \\
& \times \max \left( \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \left. \right] + \\
& + (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \\
& + (\alpha_2 + \alpha_3)h \cdot \sum_{j=0}^i \max \left( \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \leq \\
& \leq \left( \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left[ (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right.
\end{aligned}$$

$$+(\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \Big].$$

Отсюда и из оценки (14) имеем

$$\begin{aligned} & \max (\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left[ (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right. \\ & \left. + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \sum_{j=0}^i \|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \sum_{j=0}^i \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1 \right) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Из неравенства (15) при  $i = 0$  получим

$$\begin{aligned} & \max (\|V^{(1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(1)}(\cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left[ (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right]. \end{aligned}$$

При  $i = 1$  из неравенств (15) с учетом оценки для функций  $V^{(1)}(t), \dot{V}^{(1)}(t)$  получим

$$\begin{aligned} & \max (\|V^{(2)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(2)}(\cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left( (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 + \right. \\ & \left. + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max (\|V^{(1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(1)}(\cdot)\|_1) \right) \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left( 1 + (\alpha_2 + \right. \\ & \left. + \alpha_3)h \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \right) \left( (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \|\hat{F}(\cdot)\|_1 \right). \end{aligned}$$

Аналогично для  $V^{(3)}(t), \dot{V}^{(3)}(t)$  из (15) имеем оценку

$$\begin{aligned} & \max (\|V^{(3)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(3)}(\cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left( 1 + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \right)^2 \times \\ & \quad \times \left\{ (\alpha_2 + \alpha_3) \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \|\hat{F}\|_1 \right\}. \end{aligned}$$

Продолжая, для любого  $i = \overline{0, N}$  установим оценку

$$\begin{aligned}
& \max (\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1) \leq \\
& \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left( 1 + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \right)^i \times \\
& \quad \times \left\{ (\alpha_2 + \alpha_3) \max (\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \|\hat{F}\|_1 \right\} \leq \\
& \leq K(\alpha_0, \alpha_1, \sigma) \left( 1 + (\alpha_2 + \alpha_3)hK(\alpha_0, \alpha_1, \sigma) \right)^{\frac{\omega}{h}} \left\{ \|\hat{F}\|_1 + \right. \\
& \quad \left. + (\alpha_2 + \alpha_3) \max (\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) \right\} = \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1. \quad (16)
\end{aligned}$$

Докажем единственность решения краевой задачи (11), (12). Пусть существуют два решения  $\tilde{V}^{(i)}(t)$  и  $\bar{V}^{(i)}(t)$ . Их разность обозначим через  $\Delta V^{(i)}(t)$ , т.е.  $\Delta V^{(i)}(t) = \tilde{V}^{(i)}(t) - \bar{V}^{(i)}(t)$ . Для  $\Delta V^{(i)}(t)$  имеем краевую задачу

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta V^{(i+1)}}{dt} &= A(ih, t)\Delta V^{(i+1)} + B(ih, t)h \sum_{j=0}^i \Delta \dot{V}^{(j)} + C(ih, t)h \sum_{j=0}^i \Delta V^{(j)}, \\
\Delta V^{(i+1)}(0) &= \Delta V^{(i+1)}(T)
\end{aligned}$$

и для нее справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \max (\|\Delta V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|\Delta \dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1) \leq \\
& \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) (\alpha_2 + \alpha_3)h \sum_{j=0}^i \max (\|\Delta V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\Delta \dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1). \quad (17)
\end{aligned}$$

Так как по предположению  $V^{(0)}(t) = 0$  и  $\dot{V}^{(0)}(t) = 0$ , то из (17) при  $i = 0$  получим

$$\|\Delta V^{(1)}(\cdot)\|_1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{V}^{(1)}(t) = \bar{V}^{(1)}(t).$$

Для последующих функций  $\Delta V^{(i+1)}(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , имеют место оценки

$$\|\Delta V^{(i+1)}(\cdot)\|_0 \leq \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \left( 1 + (\alpha_2 + \alpha_3)h \max \left( \frac{\alpha_0}{\sigma}, \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\sigma} + 1 \right) \right)^i \times$$

$$\times (\alpha_2 + \alpha_3) h \max \left( \|\Delta V^{(1)}(\cdot)\|_1, \|\Delta V^{(1)}(\cdot)\|_1 \right) = 0.$$

Отсюда получим, что  $\Delta V^{(i+1)}(t) \equiv 0, i = \overline{1, N}, t \in [0, T]$ .

Поэтому  $\tilde{V}^{(i+1)}(t) = \bar{V}^{(i+1)}(t)$  для всех  $t \in [0, T], i = \overline{0, N}$ , и задача (11), (12) имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

По найденным функциям  $V^{(i+1)}(t), i = \overline{0, N}$ , на  $\bar{\Omega}$  строятся функции

$$U_h(x, t) = \Psi(t) + h \sum_{j=0}^i V^{(j)}(t) + V^{(i+1)}(t)(x - ih), \quad x \in [ih, (i+1)h),$$

$$W_h(x, t) = \dot{\Psi}(t) + h \sum_{j=0}^i \dot{V}^{(j)}(t) + \dot{V}^{(i+1)}(t)(x - ih), \quad x \in [ih, (i+1)h),$$

$$V_h(x, t) = V^{(i+1)}(t) \frac{x - ih}{h} + V^{(i)}(t) \frac{(i+1)h - x}{h}, \quad x \in [ih, (i+1)h). \quad (18)$$

В следующем разделе устанавливается оценка близости построенной тройки функций  $\{U_h(x, t), V_h(x, t), W_h(x, t)\}$  к точному решению задачи (6)-(8).

### 3 УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ И АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= \max \left( \left\| \frac{f(x, \cdot) - f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \left\| \frac{f(x, \cdot) - ((i-1)h, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right), \\ A_1(x) &= \max \left( \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right), \\ A_2(x) &= \max \left\{ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \right. \\ &\quad \left. \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \Big\}, \\
A_3(x) &= \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \\
A_h^1(x) &= [A_1(x) + \max(A_2(x), A_3(x))\omega] \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \\
& + A_2(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \|F(x, \cdot)\|_1, \\
A_h^2(x) &= \frac{1}{\alpha_0} \left( \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right) A_h^1(x) + (\|A(x, \cdot) - A(ih, \cdot)\|_1 + \\
& + \|A(x, \cdot) - A((i-1)h, \cdot)\|_1) \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \\
& + \max(\|B(ih, \cdot)\|_1, \|B((i-1)h, \cdot)\|_1) + \max(\|C(ih, \cdot)\|_1, \|C((i-1)h, \cdot)\|_1) \times \\
& \times \left[ \max(\|\psi(\cdot)\|_1, \|\dot{\psi}(\cdot)\|_1) + \omega \cdot \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 \right] + \\
& + \max(\|F(x, \cdot) - F(ih, \cdot)\|_1, \|F(x, \cdot) - F((i-1)h, \cdot)\|_1), \\
A_h(x) &= \int_0^x \max(A_h^1(\xi), A_h^2(\xi)) d\xi, \\
B_h(x) &= \int_0^x \max(A_h^1(\xi), A_h^2(\xi)) d\xi + 3h\lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1, \\
\tilde{\alpha} &= \max \left( 1, 1 + \left[ \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right] \right), \quad \gamma(x) = \exp \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда на  $\bar{\Omega}$  существует единственное решение  $u^*(x, t)$  краевой задачи (1)–(4) и справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& \max \left( \|u^*(x, \cdot)\|_1, \left\| \frac{\partial u^*(x, \cdot)}{\partial t} \right\|_1, \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} \right\|_1 \right) \leq \\
& \leq \max(1, \alpha_0) \gamma(x) \left[ 2 \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi \right], \\
& \max \left( \left\| \frac{\partial u^*(x, \cdot)}{\partial x} \right\|_1, \left\| \frac{\partial^2 u^*(x, \cdot)}{\partial x \partial t} \right\|_1 \right) \leq \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 +
\end{aligned}$$

$$+\max(1, \alpha_0)A_3(x)\gamma(x)\left[2 \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий теоремы покажем, что существует решение краевой задачи (6)-(8). Решение  $\{U^*(x, t), V^*(x, t), W^*(x, t)\}$  задачи (6)-(8) найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение по  $U(x, t)$  и  $W(x, t)$  возьмем  $U_h(x, t)$  и  $W_h(x, t)$  соответственно, а  $V^{(1)}(x, t)$  найдем, как решение периодической краевой задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x, t)V + B(x, t)W_h(x, t) + C(x, t)U_h(x, t) + F(x, t), \quad (19)$$

$$V(x, 0) = V(x, T). \quad (20)$$

Так как условие теоремы обеспечивает выполнение условия теоремы из [12, С. 104], то существует единственное решение  $V^{(1)}(x, t)$  задачи (19), (20).

Оценим разность функций  $V^{(1)}(x, t)$  и  $V_h(x, t)$  с учетом представления (18):

$$\begin{aligned} & \|V^{(1)}(x, \cdot) - V_h(x, \cdot)\|_1 \leq \\ & \leq \left\| V^{(1)}(x, \cdot) \left( \frac{x - (i-1)h}{h} + \frac{ih - x}{h} \right) - V^{(i+1)} \frac{x - (i-1)h}{h} - V^{(i)} \frac{ih - x}{h} \right\|_1 \leq \\ & \leq \|V^{(1)}(x, \cdot) - v^{(i+1)}\|_1 \frac{x - (i-1)h}{h} + \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}\|_1 \frac{ih - x}{h} \leq \\ & \leq \max \left( \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i+1)}\|_1, \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}\|_1 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим через  $\Delta \tilde{V}^{(1)}(x, t)$  разность функций  $V^{(1)}(x, t) - V^{(i+1)}(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Учитывая, что  $V^{(i+1)}(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$  и  $V^{(1)}(x, t)$  – соответственно решения задач (11), (12) и (19), (20), то  $\Delta \tilde{V}^{(1)}(x, t)$  является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{V}^{(1)}}{\partial t} &= A(x, t)\Delta \tilde{V}^{(1)} + [A(x, t) - A(ih, t)]V^{(i+1)}(t) + \\ &+ [B(x, t) - B(ih, t)] \left( \dot{\psi}(t) + h \sum_{j=0}^i \dot{V}^{(j)}(t) \right) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +B(x, t)\dot{V}^{(i)}(t)(x - ih) + [C(x, t) - C(ih, t)] \times \\
& \times \left( \psi(t) + h \sum_{j=0}^i V^{(j)}(t) \right) + C(x, t)V^{(i)}(t)(x - ih) + F(x, t) - F(ih, t), \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\Delta \tilde{V}^{(1)}(x, 0) = \Delta \tilde{V}^{(1)}(x, T), \quad x \in [0, \omega]. \quad (23)$$

Для  $\Delta \tilde{V}^{(1)}(x, t)$  по теореме из [12, с. 104] справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|\Delta \tilde{V}^{(1)}(x, \cdot)\|_1 &= \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i+1)}\|_1 \leq \alpha_0 \left\| \frac{A(x, t) - A(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + \\
& + \alpha_0 \left( \left\| \frac{B(x, t) - B(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{C(x, t) - C(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \times \\
& \times \left( \max(\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) + h \sum_{j=0}^i \max(\|V^{(j)}\|_1, \|\dot{V}^{(j)}\|_1) \right) + \\
& + \alpha_0 \max(\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1) \times \\
& \times \left( \left\| \frac{B(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{C(x, t)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) |x - (i-1)h| + \alpha_0 \left\| \frac{F(x, t) - F(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \leq \\
& \leq \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \times \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
& + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left. \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \times \left[ \max(\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) + \right. \\
& + h \sum_{j=0}^i \max(\|V^{(j)}\|_1, \|\dot{V}^{(j)}\|_1) \left. \right] + \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \times \\
& \times \max(\|V^{(i+1)}\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}\|_1) |x - (i-1)h| + \left\| \frac{f(x, \cdot) - f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \leq \\
& \leq \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
& + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left. \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \max(\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \max \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
 & \quad + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) h \sum_{j=0}^{i+1} \max (\|V^{(j)}\|_1, \|\dot{V}^{(j)}\|_1) + \\
 & + \left\| \frac{f(x, t) - f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \leq \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \\
 & \quad + \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \max (\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) + \\
 & + \max \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
 & \quad + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \times \omega \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \left\| \frac{f(x, t) - f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \leq \\
 & \leq \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \max (\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) + \left[ \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\
 & \quad \left. + \max \left\{ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \right\} \omega \right] \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 +
 \end{aligned}$$

$$+\left\|\frac{f(x, \cdot)-f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)}\right\|_1. \quad (24)$$

Аналогично получим оценку

$$\begin{aligned} & \|\Delta \bar{V}^{(1)}(x, \cdot)\|_1 = \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}\|_1 \leq \\ & \leq \left[ \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \max \left\{ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \right. \\ & \quad \left. \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right] \omega \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \\ & + \left( \alpha_0 \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \alpha_0 \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) \max (\|\Psi\|_{\alpha, 1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha, 1}) \left\| \frac{f(x, \cdot) - f((i-1)h, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1. \quad (25) \end{aligned}$$

Из оценок (24), (25) получим

$$\begin{aligned} & \|\Delta V^{(1)}(x, \cdot)\|_1 = \max \left( \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i+1)}\|_1, \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}\|_1 \right) \leq \\ & \leq \max \left( \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \left\| \frac{a_1(x, \cdot) - a_1((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \\ & + \max \left\{ \max \left[ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right], \\ & \quad \left. \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right] \omega \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \max \left\{ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4(ih, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \right. \\
 & \quad \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot) - a_2((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot) - a_3((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot) - a_4((i-1)h, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right\} \times \max (\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \\
 & + \max \left( \left\| \frac{f(x, \cdot) - f(ih, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1, \left\| \frac{f(x, \cdot) - f((i-1)h, \cdot)}{2a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) = [A_1(x) + \\
 & \quad + \max (A_2(x), A_3(x))\omega] \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \|F(x, \cdot)\|_1 + \\
 & \quad + A_2(x) \max (\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}). \tag{26}
 \end{aligned}$$

Учитывая равенство (18), имеем

$$\begin{aligned}
 \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - V_{hi}(x, \cdot)\|_1 & \leq \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1 \left| \frac{x - (i-1)h}{h} \right| + \\
 & + \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1 \left| \frac{ih - x}{h} \right| \leq \\
 & \leq \max (\|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Так как функции  $V^{(1)}(x, t)$  и  $V^{(i+1)}(t)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям (11) и (19), то справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 & \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1 \leq \\
 & \leq \|A(x, t)V^{(1)}(x, \cdot) + B(x, t)W_h(x, t) + C(x, \cdot)U_h(x, \cdot) + F(x, \cdot) - \\
 & - A(ih, \cdot)v^{(i+1)}(\cdot) - B(ih, \cdot)(\dot{\Psi}(\cdot) + h \sum_{j=0}^i \dot{V}^{(j)}(\cdot)) - C(ih, \cdot)(\Psi(\cdot) + \\
 & + h \sum_{j=0}^i V^{(j)}(t)) - F(ih, \cdot)\|_1 \leq \|A(x, \cdot)\|_1 \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + \\
 & \quad + \|A(x, t) - A(ih, \cdot)\|_1 \|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1 + (\|B(ih, \cdot)\|_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|C(ih, \cdot)\|_1 \left[ \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right. \\
& \left. + h \sum_{j=0}^i \max(\|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1) \right] + \|F(x, \cdot) - F(ih, \cdot)\|_1. \quad (28)
\end{aligned}$$

Аналогично оценке (28) получим

$$\begin{aligned}
& \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1 \leq \\
& \leq \|A(x, \cdot)\|_1 \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}(\cdot)\|_1 + \|A(x, \cdot) - A((i-1)h, \cdot)\|_1 \|V^{(i)}(\cdot)\|_1 + \\
& + (\|B((i-1)h, \cdot)\|_1 + \|C((i-1)h, \cdot)\|_1) \left[ \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right. \\
& \left. + h \sum_{j=0}^{i-1} \max(\|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1) \right] + \|F(x, \cdot) - F((i-1)h, \cdot)\|_1. \quad (29)
\end{aligned}$$

Из оценок (28), (29) получим

$$\begin{aligned}
& \max(\|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|V_t^{(1)}(x, \cdot) - \dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1) \leq \\
& \leq \|A(x, \cdot)\|_1 \max(\|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|V^{(1)}(x, \cdot) - V^{(i)}(\cdot)\|_1) + \\
& + \left( \|A(x, \cdot) - A(ih, \cdot)\|_1 + \right. \\
& \left. + \|A(x, \cdot) - A((i-1)h, \cdot)\|_1 \right) \max(\|V^{(i+1)}(\cdot)\|_1, \|V^{(i)}(\cdot)\|_1) + \\
& + \max(\|B(ih, \cdot)\|_1, \|B((i-1)h, \cdot)\|_1) + \max(\|C(ih, \cdot)\|_1, \|C((i-1)h, \cdot)\|_1) \times \\
& \times \left[ \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + h \sum_{j=0}^i \max(\|V^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(j)}(\cdot)\|_1) \right] + \\
& + \max(\|F(x, \cdot) - F(ih, \cdot)\|_1, \|F(x, \cdot) - F((i-1)h, \cdot)\|_1) \leq \\
& \leq \frac{1}{\alpha_0} \left( \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right) \left( [A_1(x) + \max(A_2(x), A_3(x))\omega] \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \right. \\
& \left. + A_2(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \|F(x, \cdot)\|_1 \right) + \left( \|A(x, \cdot) - A(ih, \cdot)\|_1 + \right. \\
& \left. + \|A(x, \cdot) - A((i-1)h, \cdot)\|_1 \right) \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 + \max(\|B(ih, \cdot)\|_1, \|B((i-1)h, \cdot)\|_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \max(\|C(ih, \cdot)\|_1, \|C((i-1)h, \cdot)\|_1) \times \left[ \max(\|\Psi(\cdot)\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}(\cdot)\|_{\alpha,1}) + \right. \\
 & \left. + \omega \cdot \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 \right] + \max(\|F(x, \cdot) - F(ih, \cdot)\|_1, \|F(x, \cdot) - F((i-1)h, \cdot)\|_1) = \\
 & = A_h^2(x). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Подставляя оценку (26) в правые части (21), получим

$$\begin{aligned}
 \|V^{(1)}(x, \cdot) - V_h(x, \cdot)\|_1 & \leq \|F(x, \cdot)\|_1 + \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) A_2(x) + \\
 [A_1(x) + \max(A_2(x), A_3(x))\omega] \lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 & = A_h^1(x). \tag{31}
 \end{aligned}$$

Найденные  $V^{(1)}(x, t)$  и  $V_t^{(1)}(x, t)$  подставляя в функциональное соотношение (8), имеем

$$\begin{aligned}
 U^{(1)}(x, t) - U_h(x, t) & = \\
 = \int_0^x (V^{(1)}(\xi, t) - V_h(\xi, t)) d\xi + \int_0^x V_h(\xi, t) d\xi - h \sum_{j=0}^{i-1} V^{(j)}(t) - V^{(i)}(t) [x - (i-1)h], \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(x, t) - W_h(x, t) & = \\
 = \int_0^x (V_t^{(1)}(\xi, t) - V_{ht}(\xi, t)) d\xi + \int_0^x V_{ht}(\xi, t) d\xi - h \sum_{j=0}^{i-1} \dot{V}^{(j)}(t) - \dot{V}^{(i)}(t) [x - (i-1)h]. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Из соотношения (18) имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^x V_h(\xi, t) d\xi & = \int_0^h \left[ V^{(1)}(t) \frac{h-\xi}{h} + V^{(2)}(t) \frac{\xi}{h} \right] d\xi + \int_h^{2h} \left[ V^{(2)}(t) \frac{2h-\xi}{h} + \right. \\
 & + V^{(3)}(t) \frac{\xi-h}{h} \left. \right] d\xi + \dots + \int_{(i-2)h}^{(i-1)h} \left[ V^{(i-1)}(t) \frac{ih-\xi}{h} + V^{(i)}(t) \frac{\xi-(i-1)h}{h} \right] d\xi + \\
 & + \int_{(i-1)h}^x \left[ V^{(i)}(t) \frac{ih-\xi}{h} + V^{(i+1)}(t) \frac{\xi-(i-1)h}{h} \right] d\xi = \left[ V^{(1)}(t) + V^{(i)}(t) \right] \frac{h}{2} + h \left[ V^{(2)}(t) + \right. \\
 & \left. + V^{(3)}(t) + \dots + V^{(i-1)}(t) \right] + \int_{(i-1)h}^x \left[ V^{(i)}(t) \frac{ih-\xi}{h} + V^{(i+1)}(t) \frac{\xi-(i-1)h}{h} \right] d\xi. \tag{34}
 \end{aligned}$$

В правую часть (32) и (33) подставляя выражения (34) и учитывая оценки (16), (31), получим

$$\begin{aligned} \|U^{(1)}(x, \cdot) - U_h(x, \cdot)\|_1 &\leq \int_0^x A_h^1(\xi) d\xi + \max(\|V^{(i)}\|_1, \|V^{(i+1)}\|_1) |x - (i-1)h| + \\ &+ \max(\|V^{(i)}\|_1, \|V^{(1)}\|_1) h + \|V^{(i)}(\cdot)\|_1 |x - (i-1)h| \leq \int_0^x A_h^1(\xi) d\xi + \\ &+ 3h \max_{i=1, N} \|V^{(i+1)}\|_1 \leq \int_0^x A_h^1(\xi) d\xi + 3h\lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \|W^{(1)}(x, \cdot) - W_h(x, \cdot)\|_1 &\leq \int_0^x A_h^2(\xi) d\xi + \max(\|\dot{V}^{(i)}\|_1, \|\dot{V}^{(i+1)}\|_1) |x - (i-1)h| + \\ &+ \max(\|\dot{V}^{(i)}\|_1, \|\dot{V}^{(1)}\|_1) h + \|\dot{V}^{(i)}(\cdot)\|_1 |x - (i-1)h| \leq \int_0^x A_h^2(\xi) d\xi + \\ &+ 3h \max_{i=1, N} \|\dot{V}^{(i+1)}\|_1 \leq \int_0^x A_h^2(\xi) d\xi + 3h\lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1. \end{aligned} \quad (36)$$

Из оценок (35), (36) получим

$$\begin{aligned} \max(\|U^{(1)}(x, \cdot) - U_h(x, \cdot)\|_1, \|W^{(1)}(x, \cdot) - W_h(x, \cdot)\|_1) &\leq \\ &\leq \int_0^x \max(A_h^1(\xi), A_h^2(\xi)) d\xi + 3h\lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 = \\ &= \int_0^x A_h(\xi) d\xi + 3h\lambda(\omega, h) \|\Phi(\cdot)\|_1 = B_h(x). \end{aligned} \quad (37)$$

Снова рассматривая краевую задачу (6), (7) при  $U = U^{(1)}(x, t)$ ,  $W = W^{(1)}(x, t)$  и учитывая оценку (37), получим

$$\begin{aligned} \max(\|V^{(2)}(x, \cdot) - V^{(1)}(x, \cdot)\|_1, \|V_t^{(2)}(x, \cdot) - V_t^{(1)}(x, \cdot)\|_1) &\leq \\ &\leq \left[ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \\ &\left. + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right] \max(\|U^{(1)}(x, \cdot) - U_h(x, \cdot)\|_1, \|W^{(1)}(x, \cdot) - W_h(x, \cdot)\|_1) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left[ \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right) + \left\| \frac{a_4(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right] B_h(x) = A_3(x) B_h(x). \quad (38)$$

При  $V = V^{(2)}(x, t)$ ,  $V_t = V_t^{(2)}(x, t)$  из интегрального соотношения (8) имеем

$$U^{(2)}(x, t) = \Psi(t) + \int_0^x V^{(2)}(\xi, t) d\xi, \quad W^{(2)}(x, t) = \dot{\Psi}(t) + \int_0^x V_t^{(2)}(\xi, t) d\xi.$$

Тогда для разностей  $U^{(2)}(x, t) - U^{(1)}(x, t)$ ,  $W^{(2)}(x, t) - W^{(1)}(x, t)$ , учитывая оценку (38), имеем

$$\begin{aligned} & \max(\|U^{(2)}(x, \cdot) - U^{(1)}(x, \cdot)\|_1, \|W^{(2)}(x, \cdot) - W^{(1)}(x, \cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \int_0^x \max(\|V^{(2)}(\xi, \cdot) - V^{(1)}(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^{(2)}(\xi, \cdot) - V_t^{(1)}(\xi, \cdot)\|_1) d\xi \leq \\ & \leq \int_0^x \left( \alpha_0 \left( \left\| \frac{a_2(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{a_3(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 \right) + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{a_4(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 \right) B_h(\xi) d\xi = \int_0^x A_3(\xi) B_h(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее краевую задачу (6), (7) решаем при  $U = U^{(2)}(x, t)$ ,  $W = W^{(2)}(x, t)$ , находим  $V^{(3)}(x, t)$ . Аналогично оценкам (38), (39) получим оценки

$$\begin{aligned} & \max \left( \|V^{(3)}(x, \cdot) - V^{(2)}(x, \cdot)\|_1, \|V_t^{(3)}(x, \cdot) - V_t^{(2)}(x, \cdot)\|_1 \right) \leq \\ & \leq A_3(x) \int_0^x A_3(\xi) B_h(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \max(\|U^{(3)}(x, \cdot) - U^{(2)}(x, \cdot)\|_1, \|W^{(3)}(x, \cdot) - W^{(2)}(x, \cdot)\|_1) \leq \\ & \leq \int_0^x \max(\|V^{(3)}(\xi, \cdot) - V^{(2)}(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^{(3)}(\xi, \cdot) - V_t^{(2)}(\xi, \cdot)\|_1) d\xi \leq \end{aligned}$$



$$\leq \int_0^x A_3(\xi) \int_0^\xi A_3(\xi_1) \cdot B_h(\xi_1) d\xi_1 d\xi \leq \frac{1}{2!} \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right)^2 B_h(x). \quad (41)$$

Предполагая, что  $V^{(k)}(x, t)$ ,  $U^{(k)}(x, t)$ ,  $W^{(k)}(x, t)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , известны и установлена оценка

$$\begin{aligned} & \max \left( \|V^{(k)}(x, \cdot) - V^{(k-1)}(x, \cdot)\|_1, \|V_t^{(k)}(x, \cdot) - V_t^{(k-1)}(x, \cdot)\|_1 \right) \leq \\ & \leq A_3(x) \int_0^x \max \left( \|V^{(k-1)}(\xi, \cdot) - V^{(k-2)}(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^{(k-1)}(\xi, \cdot) - V_t^{(k-2)}(\xi, \cdot)\|_1 \right) d\xi, \quad (42) \end{aligned}$$

следующее приближение по  $V$  найдем, решая семейство периодических краевых задач

$$\frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial t} = A(x, t)V^{(k+1)} + B(x, t)W^{(k)}(x, t) + C(x, t)U^{(k)}(x, t) + F(x, t), \quad (43)$$

$$V^{(k+1)}(x, 0) = V^{(k+1)}(x, T). \quad (44)$$

Функции  $U^{(k+1)}(x, t)$  и  $W^{(k+1)}(x, t)$  определяем из функциональных соотношений

$$U^{(k+1)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x V^{(k+1)}(\xi, t) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$W^{(k+1)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x V_t^{(k+1)}(\xi, t) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда, оценивая  $U^{(k+1)}(x, t) - U^{(k)}(x, t)$ ,  $W^{(k+1)}(x, t) - W^{(k)}(x, t)$ , получим

$$\begin{aligned} & \max \left( \|U^{(k+1)}(x, \cdot) - U^{(k)}(x, \cdot)\|_1, \|W^{(k+1)}(x, \cdot) - W^{(k)}(x, \cdot)\|_1 \right) \leq \\ & \leq \int_0^x \max \left( \|V^{(k+1)}(\xi, \cdot) - V^{(k)}(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^{(k+1)}(\xi, \cdot) - V_t^{(k)}(\xi, \cdot)\|_1 \right) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (45) \end{aligned}$$

и аналогично (38)–(41) имеем

$$\max \left( \|V^{(k+1)}(x, \cdot) - V^{(k)}(x, \cdot)\|_1, \|V_t^{(k+1)}(x, \cdot) - V_t^{(k)}(x, \cdot)\|_1 \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq A_3(x) \int_0^x \max(\|V^{(k)}(\xi, \cdot) - V^{(k-1)}(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^{(k)}(\xi, \cdot) - V_t^{(k-1)}(\xi, \cdot)\|_1) d\xi \leq \\ &\leq A_3(x) \cdot \frac{1}{(k-2)!} \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right)^{k-2} B_h(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &\|V^{(k+1)}(x, \cdot) - V_h(x, \cdot)\|_1 \leq \\ &\leq \|V^{(k+1)}(x, \cdot) - V^{(k)}(x, \cdot)\|_1 + \dots + \|V^{(2)}(x, \cdot) - V^{(1)}(x, \cdot)\|_1 + \\ &+ \|V^{(1)}(x, \cdot) - V_h(x, \cdot)\|_1 \leq A_h(x) + B_h(x) \exp \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} &\left( \|U^{(k+1)}(x, \cdot) - U_h(x, \cdot)\|_1, \|W^{(k+1)}(x, \cdot) - W_h(x, \cdot)\|_1 \right) \leq \\ &\leq \max \left( \|U^{(k+1)}(x, \cdot) - U^{(k)}(x, \cdot)\|_1, \|W^{(k+1)}(x, \cdot) - W^{(k)}(x, \cdot)\|_1 \right) + \dots + \\ &+ \max \left( \|U^{(2)}(x, \cdot) - U^{(1)}(x, \cdot)\|_1, \|W^{(2)}(x, \cdot) - W^{(1)}(x, \cdot)\|_1 \right) + \\ &+ \max \left( \|U^{(1)}(x, \cdot) - U_h(x, \cdot)\|_1, \|W^{(1)}(x, \cdot) - W_h(x, \cdot)\|_1 \right) \leq \\ &\leq B_h(x) \exp \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Учитывая равномерную непрерывность функции  $F(x, t)$  на  $\bar{\Omega}$  и структуру функций  $A_h(x)$ ,  $B_h(x)$ , при  $h \rightarrow 0$  из оценок (45)–(48) получим, что последовательность функций  $\{U^{(k)}(x, t), W^{(k)}(x, t), V^{(k)}(x, t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , на  $\bar{\Omega}$  равномерно сходится к  $\{U^*(x, t), W^*(x, t), V^*(x, t)\}$  – решению задачи (6)–(8). Следовательно, система функций  $\{U_h(x, t), W_h(x, t), V_h(x, t)\}$  является приближенным решением задачи (6)–(8), построенным при помощи модификации метода ломаных Эйлера. Отсюда вытекает, что полупериодическая краевая задача (1)–(4) имеет решение  $u^*(x, t) = u_1^*(x, t) + u_2^*(x, t)$ ,  $U^*(x, t) = (u_1^*(x, t), u_2^*(x, t))$ .

По теореме из [12, с. 104] для решения  $V^*(x, t)$  задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|V^*(x, \cdot)\|_1 \leq A_3(x) \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) + \frac{1}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1,$$

$$\begin{aligned} & \|V_t^*(x, \cdot)\|_1 \leq \left( \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right) \|V^*(x, \cdot)\|_1 + \\ & + A_3(x) \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) + \frac{1}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \leq \\ \leq & \left( 1 + \left[ \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right] \right) \left[ A_3(x) \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) + \frac{1}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right]. \end{aligned}$$

Из последних неравенств получим

$$\begin{aligned} \max(\|V^*(x, \cdot)\|_1, \|V_t^*(x, \cdot)\|_1) & \leq \max \left( 1, 1 + \left[ \alpha_0 + \frac{\|a_1(x, \cdot)\|_1}{\alpha_0} \right] \right) \times \\ & \times \left[ A_3(x) \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) + \frac{1}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1 \right]. \quad (49) \end{aligned}$$

Тогда из (8) следует

$$\begin{aligned} \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) & \leq \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \\ & + \int_0^x \max(\|V^*(\xi, \cdot)\|_1, \|V_t^*(\xi, \cdot)\|_1) d\xi \leq \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \\ & + \tilde{\alpha} \int_0^x \left[ A_3(\xi) \max(\|U^*(\xi, \cdot)\|_1, \|W^*(\xi, \cdot)\|_1) + \frac{1}{2} \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 \right] d\xi, \end{aligned}$$

отсюда по неравенству Гронуолла - Беллмана получим

$$\begin{aligned} \max(\|U^*(x, \cdot)\|_1, \|W^*(x, \cdot)\|_1) & \leq \\ & \leq \tilde{\alpha} \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) \exp \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right) + \tilde{\alpha} \exp \left( \int_0^x A_3(\xi) d\xi \right) \times \\ & \times \frac{1}{2} \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi = \gamma(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \frac{1}{2} \gamma(x) \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi. \quad (50) \end{aligned}$$

Подставляя (50) в правую часть (49), имеем

$$\begin{aligned} \max(\|V^*(x, \cdot)\|_1, \|V_t^*(x, \cdot)\|_1) &\leq A_3(x)\gamma(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \\ &+ \frac{1}{2}A_3(x)\gamma(x) \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Согласно обозначениям (5) выполняются неравенства

$$\|u^*(x, \cdot)\|_1 \leq 2\|U^*(x, \cdot)\|_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} \right\|_1 \leq 2\alpha_0 \|W^*(x, \cdot)\|_1,$$

$$\left\| \frac{\partial u^*}{\partial t} \right\|_1 \leq 2\alpha_0 \|U^*(x, \cdot)\|_1, \quad \left\| \frac{\partial u^*}{\partial x} \right\|_1 \leq \|V^*(x, \cdot)\|_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial t} \right\|_1 \leq 2\alpha_0 \|V^*(x, \cdot)\|_1$$

при  $(x, t) \in \bar{\Omega}$ . С их учетом и учетом неравенств (50), (51) получим оценки

$$\begin{aligned} &\max \left( \|u^*(x, \cdot)\|_1, \left\| \frac{\partial u^*(x, \cdot)}{\partial t} \right\|_1, \left\| \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} \right\|_1 \right) \leq \\ &\leq 2 \max(1, \alpha_0)\gamma(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \max(1, \alpha_0)\gamma(x) \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi, \\ &\max \left( \left\| \frac{\partial u^*(x, \cdot)}{\partial x} \right\|_1, \left\| \frac{\partial^2 u^*(x, \cdot)}{\partial x \partial t} \right\|_1 \right) \leq \\ &\leq 2 \max(1, \alpha_0)\gamma(x)A_3(x) \max(\|\Psi\|_{\alpha,1}, \|\dot{\Psi}\|_{\alpha,1}) + \\ &+ \max(1, \alpha_0)A_3(x)\gamma(x) \int_0^x \left\| \frac{f(\xi, \cdot)}{a_1(\xi, \cdot)} \right\|_1 d\xi + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left\| \frac{f(x, \cdot)}{a_1(x, \cdot)} \right\|_1. \end{aligned}$$

Единственность решения краевой задачи (1)–(4) доказывается методом от противного. Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.А. Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка. Препринт Т. 5. – Новосибирск: ИТПМ СО АН ССР, 1980. – 36 с.
- 2 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наукова Думка, 1984. – С. 1-264.
- 3 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 1-301.
- 4 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – С. 1-287.
- 5 Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
- 6 Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – V. 324, No. 8. – P. 1242-1261.
- 7 Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Toleukhanova Z.M. On the solving of initial-boundary value problem for system of partial differential equations of the third order // News of the National Academy of Sciences of RK. Physico-Mathematical Series. – 2018. – V. 3, No. 319. – P. 67-73.
- 8 Assanova A.T., Alikhanova B.Zh., Nazarova K.Zh. Well-posedness of a nonlocal problem with integral conditions for third order system of the partial differential equations // News of the National Academy of Sciences of RK. Physico-Mathematical Series. – 2018. – V. 5, No. 321. – P. 33-41.
- 9 Асанова А.Т. Об одном подходе к решению нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений типа Аллера // Математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 2(68). – С. 5-18.
- 10 Джумабаев Д.С., Кабдрахова С.С. Метод ломаных Эйлера применительно к полупериодической краевой задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Тез. межд.конф. "Проблемы современной матем. и мех.". – Институт матем. МОН РК. – Алматы, 20-22 сентября 2005. – С. 76-77.
- 11 Джумабаев Д.С. Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30, №. 3. – С. 388-400.
- 12 Оспанов М.Н. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2004. – Т. 3. – С. 103-107.

Кабдрахова С.С. КЛАССИКАЛЫҚ ЕМЕС ҮШІНШІ РЕТТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАРТЫЛАЙ ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІН ЖУЫҚТАП ТАБУДЫҢ БІР ӘДІСІ

Классикалық емес үшінші ретті бір теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есеп қарастырылады. Жақсартылған Эйлер сынықтар әдісі арқылы құрылған функциялар үштігінің қарастырылып отырған есептің дәл шешіміне жақындығы бағалауларын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар алынған.

*Кілттік сөздер.* Классикалық емес үшінші ретті теңдеу, жартылай периодты шеттік есеп, жақсартылған Эйлер сынықтар әдісі, жуық шешімдер, периодты шеттік есептер, жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері.

Kabdrakhova S.S. ON ONE APPROXIMATE METHOD OF FINDING SOLUTION OF THE SEMIPERIODICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONCLASSICAL THIRD ORDER EQUATION

Semi-periodical boundary value problem for a non-classical third order equation is considered. Sufficient conditions are obtained which provide estimates of the proximity of the constructed three functions to the exact solution of the considering problem by modifying the Euler's broken line method.

*Keywords.* Third order nonclassical equations, semiperiodic boundary value problems, modification of the Euler's broken line method, approximate solutions, periodic boundary value problems, systems of ordinary differential equations.

Кабдрахова С.С.  
Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
050040, Алматы, Казахстан, пр. Аль-Фараби, 71  
Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125  
E-mail: S\_Kabdrachova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.11.2018

MPHTI 27.31.17

**ON INVERSE PROBLEM OF RECONSTRUCTING  
SUBDIFFUSION PROCESS WITH DEGENERATION FROM  
NONLOCAL DATA**

M.A. SADYBEKOV, A.A. SARSENBI

**Abstract.** In this article we consider an inverse problem for one-dimensional degenerate fractional heat equation with involution and with periodic boundary conditions with respect to a spatial variable. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a weakly permeable insulation. The inverse problem consists in the restoration (simultaneously with the solution) of an unknown right-hand side of the equation, which depends only on the spatial variable. The conditions for redefinition are initial and final states. Existence and uniqueness results for the given problem are obtained via the method of separation of variables.

**Keywords.** Inverse problem, heat equation, equation with involution, subdiffusion process, equation with degeneration, periodic boundary conditions, method of separation of variables.

**1 INTRODUCTION**

In recent years, the phenomena of anomalous diffusion has been observed in many fields, such as turbulence, seepage in porous media, pollution control. The demand for appropriate mathematical models is high from biomechanics to geophysics passing by acoustics. A most used approach to depicting a variety of complex anomalous diffusion phenomena is a nonlinear modeling that is generally mathematically challenging to analyze and computationally very expensive to simulate. In addition, the nonlinear models often require some parameters unavailable from experiments or field measurements. As

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R30, 35R10.

Funding: The first author was supported by the MES RK grant AP05133271, and the second author was supported by the MES RK grant AP05131225.

© M.A. Sadybekov, A.A. Sarsenbi, 2018.

alternative approaches, in recent decades, fractal and fractional derivatives have been found which is effective in modeling anomalous diffusion processes. The advantage of the fractal or the fractional derivative models over the standard integer-order derivative models is in that it can describe accurately the inherent abnormal-exponential or heavy tail decay processes.

Fractional powers in indicators also arise when describing fractal (multiscale, whole-like) media. In a fractal environment, unlike a continuous medium, a randomly wandering particle moves away from the launch site more slowly, since not all directions of motion become available for it. The slowing down of diffusion in the fractal media is so significant that the physical quantities begin to change more slowly than the first derivative and this effect can be taken into account only in an integral-differential equation containing the time derivative of fractional order:

$$D_t^\alpha u(x, t) = A_x u(x, t) + F.$$

In this paper, we consider an inverse problem close to that investigated in [1], [2]. Together with the solution, it is necessary to find the unknown source term of the equation. The equation contains a fractional derivative with respect to time and an involution with respect to the spatial variable. In contrast to [1], [2], we investigate the problem under nonlocal boundary conditions with respect to the spatial variable. The conditions for determination are initial and final states.

The second main difference in our problem is that the unknown function enters both in the right-hand side of the equation and in the conditions of the initial and final overdeterminations.

Let us consider a problem of modeling the thermal diffusion process which is close to that described in the paper of Cabada and Tojo [2], where an example that describes a concrete situation in physics is given. Consider a closed metal wire (length  $2\pi$ ) wrapped around a thin sheet of insulation material in the manner shown in Figure 1.

Assuming that the position  $x = 0$  is the lowest of the wire, and the insulation goes up to the left at  $-\pi$  and to the right up to  $\pi$ . Since the wire is closed, points  $-\pi$  and  $\pi$  coincide.

The layer of insulation is assumed to be slightly permeable. Therefore, the temperature value from one side affects the diffusion process on the other side.



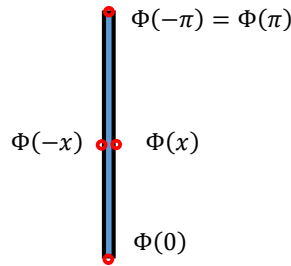


Figure 1 – The closed metal wire wrapped around a thin sheet of insulation material

For this reason, the standard heat equation is modified by adding an extra term  $\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(-x, t)$  to  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$  (where  $|\varepsilon| < 1$ ). Here  $\Phi(x, t)$  is the temperature at point  $x$  of the wire at time  $t$ .

We consider a process which is so slow that it is described by an evolution equation with a time fractional derivative:

$$t^{-\beta} D_t^\alpha \Phi(x, t) - \Phi_{xx}(x, t) + \varepsilon \Phi_{xx}(-x, t) = f(x), \quad \alpha + \beta > 0, \quad (1)$$

in the domain  $\Omega = \{(x, t) : -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$ . Here  $f(x)$  stands for an external source that does not change with time;  $t = 0$  is an initial time point and  $t = T$  is a final one. The derivative  $D_t^\alpha$  defined, for a differentiable function, as

$$(D_t^\alpha \varphi)(t) = I^{1-\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \varphi(t) \right], \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in [0, T],$$

is the Caputo derivative built on the Riemann-Liouville fractional integral

$$I^{1-\alpha}[\varphi(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in [0, T].$$

Caputo derivative allows to impose initial conditions in a natural way.

As additional information, we take

$$\Phi(x, 0) = \phi(x), \quad \Phi(x, T) = \psi(x), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (2)$$

Since the wire is closed, it is natural to assume that the temperatures at the tips of the wire are equal at all times:

$$\Phi(-\pi, t) = \Phi(\pi, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

If we consider a process in which the temperature at one end at every time point  $t$  is proportional to the (fractional) rate of change speed of the average value of the temperature throughout the wire, then,

$$\Phi(-\pi, t) = \gamma t^{-\beta} D_t^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi, t) d\xi, \quad t \in [0, T]; \quad (4)$$

here  $\gamma$  is the proportionality coefficient.

Thus the investigated process is reduced to the following inverse problem:

*Find the source term  $f(x)$  of the subdiffusion equation (1), and its solution  $\Phi(x, t)$  subject to the initial and final conditions (2), the boundary condition (3), and condition (4).*

Let us mention the case when  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  was examined in [3], [4].

## 2 REDUCTION OF THE PROBLEM

Condition (4) is nonlocal. The integral along inner lines of the domain is present in this condition. Using the idea of Samarskii, we transform this condition. Taking into account equation (1) from (4), we get

$$\Phi(-\pi, t) = \gamma \int_{-\pi}^{\pi} \{ \Phi_{\xi\xi}(\xi, t) - \varepsilon \Phi_{\xi\xi}(-\xi, t) + f(\xi) \} d\xi, \quad t \in [0, T].$$

Hence

$$\Phi(-\pi, t) = \gamma(1 - \varepsilon)[\Phi_x(\pi, t) - \Phi_x(-\pi, t)] + \gamma \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi, \quad t \in [0, T].$$

As was shown in our work [5], for the existence of a solution, it is necessary to satisfy the equality

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = 0. \quad (5)$$

In what follows, we will assume this equality to be fulfilled.

Let us set

$$u(x, t) = \Phi(x, t).$$

Then in terms of the new function  $u(x, t)$ , we get the following inverse problem: *In the domain  $\Omega = \{(x, t) : -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$  find a right-hand side  $f(x)$  of the time fractional evolution equation with involution*

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \varepsilon u_{xx}(-x, t) = f(x), \quad (6)$$

and its solution  $u(x, t)$  that satisfies one initial condition

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \alpha + \beta > 0, \quad (7)$$

one final condition

$$u(x, T) = \psi(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (8)$$

and the boundary condition

$$\begin{cases} u_x(-\pi, t) - u_x(\pi, t) - au(\pi, t) = 0, \\ u(-\pi, t) - u(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

where  $\phi(x)$  and  $\psi(x)$  are given sufficiently smooth functions,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\varepsilon$  is a nonzero real number such that  $|\varepsilon| < 1$  and  $a = \frac{1}{\gamma(\varepsilon - 1)}$ . Moreover, we assume that  $f(x)$  satisfies condition (5).

In the physical sense, the second of conditions (9) means the equality of the distribution density at the ends of the interval. And the first of conditions (9) means the proportionality of the difference of fluxes across opposite boundaries to the density value at the boundary. We note that in [1] the Dirichlet boundary conditions  $u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0$  were used instead of condition (9).

Let us mention that the well-posedness of direct and inverse problems for parabolic equations with involution is considered in [6]–[8], and the solvability of various inverse problems for parabolic equations was studied in papers of Anikonov and Belov, Bubnov Prilepko and Kostin, Monakhov, Kozhanov, Kaliev, Sabitov and many others, see [9] and [10]. In [1], good references on related issues are cited. We note [11]–[31] from recent papers close to the theme of our article. In these papers different variants of direct and inverse initial-boundary value problems for evolution equations are considered, including

problems with nonlocal boundary conditions and problems for equations with fractional derivatives.

Problem (6)–(9) for  $a = 0$  was considered in [30], and for  $a = \beta = 0$  in [31].

Let us finally mention that we will use the Fourier method to solve our problem. Here, we use a spectral problem for ordinary differential operators with involution. Similar spectral problems are considered in [32]–[43].

**DEFINITION 1.** *A regular solution of the inverse problem (6)–(9), is a pair of functions  $(u(x, t), f(x))$ ,  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ ,  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$  satisfying Eq. (6) and conditions (7)–(9).*

**DEFINITION 2.** *A generalised solution of the inverse problem (6)–(9), is a pair of functions  $(u(x, t), f(x))$ ,  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$  that satisfy Eq. (6) and conditions (7)–(9) almost everywhere.*

### 3 SPECTRAL PROBLEM

A similar spectral problem was considered in [4].

The use of the Fourier method for solving problem (6)–(9) leads to a spectral problem for the operator  $\mathcal{L}$  given by the differential expression

$$\mathcal{L}X(x) \equiv -X''(x) + \varepsilon X''(-x) = \lambda X(x), \quad -\pi < x < \pi, \quad (10)$$

and the boundary conditions

$$\begin{cases} X'(-\pi) - X'(\pi) - aX(\pi) = 0, \\ X(-\pi) - X(\pi) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

where  $\lambda$  is the spectral parameter.

Spectral problems for Eq. (10) were first considered, apparently, in [34]. There was considered cases of Dirichlet and Neumann boundary conditions, and cases of conditions in the form (11) for  $a = 0$ . Here we consider the case  $a > 0$ .

We search a solution of Eq. (10) in the form:

$$X(x) = A \sin(\mu_1 x) + B \cos(\mu_2 x), \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}},$$

where  $A$  and  $B$  are arbitrary complex numbers. The boundary conditions (11) lead to equations

$$\sin(\mu_1 \pi) = 0, \quad \tan(\mu_2 \pi) = \frac{a}{2\mu_2}.$$

Therefore, the spectral problem (10)–(11) has two series of eigenvalues:

$$\lambda_{k,1} = (1 + \varepsilon) k^2, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\lambda_{k,2} = (1 - \varepsilon) (k + \delta_k)^2, \quad \delta_k = \frac{a}{k+1} O(1) > 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\},$$

with corresponding normalized eigenfunctions given by

$$X_{k,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}; \quad X_{k,2}(x) = \nu_k \cos((k + \delta_k)x), \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad (12)$$

here  $\nu_k$  is the normalization coefficient:

$$\nu_k^{-2} = \|\cos((k + \delta_k)x)\|^2 = \pi + \frac{a^2}{(k + \delta_k) [a^2 + (k + \delta_k)^2 \pi^2]}.$$

It is easy to see that the system (12) is simultaneously a system of eigenfunctions for the Sturm-Liouville operator

$$\mathcal{L}_1 X(x) \equiv -X''(x) = \lambda X(x), \quad -\pi < x < \pi,$$

with the self-adjoint boundary conditions (11) corresponding to the eigenvalues

$$\hat{\lambda}_{k,1} = k^2, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \hat{\lambda}_{k,2} = (k + \delta_k)^2, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Consequently, the system (12) forms an orthonormal basis of  $L_2(-\pi, \pi)$ .

#### 4 UNIQUENESS OF THE SOLUTION

Let the pair of functions  $(u(x, t), f(x))$  be a solution of the inverse problem (6)–(9). Let us set

$$u_{k,i}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) X_{k,i}(x) dx, \quad f_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) X_{k,i}(x) dx, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

We apply operator  $t^{-\beta} D^\alpha$  to  $u_{k,i}(t)$ . Then, using Eq. (6) and integrating by parts, we obtain the problem

$$t^{-\beta} D^\alpha u_{k,i}(t) + \lambda_{k,i} u_{k,i}(t) = f_{k,i}, \quad 0 < t < T, \quad i = 1, 2; \quad (14)$$

$$u_{k,i}(0) = \phi_{k,i}, \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$u_{k,i}(T) = \psi_{k,i}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

where

$$\phi_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) X_{k,i}(x) dx, \quad \psi_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) X_{k,i}(x) dx.$$

It is easy to see that the function  $\tilde{u}_{k,1}(t) = (\lambda_{k,i})^{-1} f_{k,i}$  is a partial solution of the inhomogeneous equation (14). Using the general solution of the homogeneous equation (14), which is constructed in ([44], p. 233) for  $\alpha + \beta > 0$ , we get

$$u_{k,i}(t) = \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} + C_{k,i} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left( -\lambda_{k,i} t^{\alpha + \beta} \right), \quad 0 < t < T, \quad i = 1, 2,$$

where  $E_{\alpha + \beta, 1, 1 - \alpha}$  is the generalized Mittag-Leffler function ([43], p. 48):

$$E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; \quad c_0 = 1, \quad c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(j(\alpha + \beta) + \beta + 1)}{\Gamma(j(\alpha + \beta) + \alpha + \beta + 1)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

and the constants  $C_{k,i}$  and  $f_{k,i}$  are unknown.

To find these constants, we use conditions (15) and (16). From (15), we obtain a unique solution of the Cauchy problem (14)-(15) in the form

$$u_{k,i}(t) = \left[ 1 - E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left( -\lambda_{k,i} t^{\alpha + \beta} \right) \right] \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} + (\phi_{k,i}) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left( -\lambda_{k,i} t^{\alpha + \beta} \right). \quad (17)$$

Since  $\lambda_{k,i} > 0$ , then by virtue of the well-known asymptotics [44]:

$$\left| E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(z) \right| \leq \frac{M}{1 + |z|}, \quad \arg(z) = \pi, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad M = \text{Const} > 0, \quad (18)$$

$T \gg 1$ , the estimate

$$1 - E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left( -\lambda_{k,i} T^{\alpha + \beta} \right) \geq m^* > 0 \quad (19)$$

holds; the constant  $m^*$  does not depend on values of the indices  $k, i$ .

Therefore, using condition (16), we get

$$f_{k,i} = \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k,i} T^{\alpha+\beta})}{1 - E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k,i} T^{\alpha+\beta})}. \quad (20)$$

LEMMA. If (19) holds for all values of the indices  $k, i$ , then the solution  $(u(x, t), f(x))$  of the inverse problem (6)–(9) is unique.

PROOF. Suppose that there are two solutions  $(u_1(x, t), f_1(x))$  and  $(u_2(x, t), f_2(x))$  of the inverse problem (6)–(9). Set

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Then the functions  $u(x, t)$  and  $f(x)$  satisfy Eq. (6), the boundary conditions (9) and the homogeneous conditions (7) and (8):

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Therefore, by using (13) from (20), we find  $f_{k,i} = 0$ .

Whereupon, from (17) and (20), we find

$$u_{k,i}(t) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) X_{k,i}(x) dx = 0, \quad f_{k,i} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(x) X_{k,i}(x) dx = 0$$

for all values of the indices  $k \in \mathbb{N}$  for  $i = 1$  and  $k \in \mathbb{N}_0$  for  $i = 2$ . Furthermore, by the completeness of system (12) in  $L_2(-\pi, \pi)$ , we obtain

$$u(x, t) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 0 \quad \text{for all } (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

The uniqueness of the solution of the inverse problem (6)–(9) is verified.

## 5 CONSTRUCTION OF A FORMAL SOLUTION

As the eigenfunctions of the system (12) forms an orthonormal basis in  $L_2(-\pi, \pi)$ , the unknown functions  $u(x, t)$  and  $f(x)$  can be formally represented as

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t) X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,2}(t) X_{k,2}(x), \quad (21)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,1} X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,2} X_{k,2}(x), \quad (22)$$

where  $u_{k,1}(t)$  and  $u_{k,2}(t)$  are unknown functions;  $f_{k,1}$  and  $f_{k,2}$  are unknown constants.

Substituting (21) and (22) into equation (6), we obtain the inverse problems (14)–(16). If the constants  $\sigma_{k,i}$  are assumed to be given, then the solutions of these inverse problems exist, are unique and are represented by formulas (17) and (20). Substituting (17) and (20) into series (21) and (22), we obtain a formal solution of the inverse problem (6)–(9).

Indeed, from (5) and Eq. (1) we have

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} t^{-\beta} D_t^{\alpha} \Phi(\xi, t) d\xi - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \Phi_{\xi\xi}(\xi, t) + \varepsilon \Phi_{\xi\xi}(-\xi, t) \right\} d\xi.$$

For the first integral, we apply condition (4), and calculate the second integral. Then we obtain

$$0 = (1 - \varepsilon) \left[ \Phi_x(-\pi, t) - \Phi_x(\pi, t) + \frac{1}{\gamma(1 - \varepsilon)} \Phi(-\pi, t) \right].$$

This means that the boundary conditions (4) and (9) coincide. Hence, problems (6)–(9) and (1)–(4) also coincide.

Thus, in what follows we shall consider problem (1)–(3) with the boundary condition

$$\Phi_x(-\pi, t) - \Phi_x(\pi, t) - a \Phi(-\pi, t) = 0. \quad (23)$$

Thus, in what follows we will consider the inverse problem (1)–(3), (23).

Similarly, as before, the formal solution of this problem can be constructed in the form of series

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,1}(t) X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,2}(t) X_{k,2}(x), \quad (24)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,1} X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,2} X_{k,2}(x), \quad (25)$$

where

$$\Phi_{k,i}(t) = \left( \phi_{k,i} - \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} \right) E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}} \left( -\lambda_{k,i} t^{\alpha + \beta} \right) + \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}, \quad (26)$$



$$f_{k,i} = \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k,i} T^{\alpha+\beta})}{1 - E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{k,i} T^{\alpha+\beta})}. \quad (27)$$

In order to complete our study, it is necessary to justify the smoothness of the resulting formal solutions and the convergence of all appearing series.

## 6 MAIN RESULTS

Here we present the existence and uniqueness results for our inverse problem.

**THEOREM.** *Let  $a > 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$  and  $T$  be large enough that the condition (19) holds for all values of the indices  $k, i$ .*

(A) *Let  $\phi(x), \psi(x) \in W_2^2(-\pi, \pi)$  and satisfy the boundary conditions (11). Then, for a real number  $\varepsilon$  such that  $|\varepsilon| < 1$ , the inverse problem (1)-(3), (23) has a unique generalized solution, which is stable in norm:*

$$\left\| t^{-\beta} D_t^\alpha \Phi \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Phi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \leq C \left\{ \|\phi\|_{W_2^2(-\pi, \pi)}^2 + \|\psi\|_{W_2^2(-\pi, \pi)}^2 \right\},$$

where the constant  $C$  does not depend on  $\phi(x), \psi(x)$ .

(B) *Let  $\phi(x), \psi(x) \in C^4[-\pi, \pi]$  and the functions  $\phi(x), \psi(x)$  and  $\phi''(x), \psi''(x)$  satisfy the boundary conditions (11), then, for a real number  $\varepsilon$  such that  $|\varepsilon| < 1$ , the inverse problem (1)-(3), (23) has a unique regular solution.*

**PROOF.** The generalized Mittag-Leffler function's estimates (18) and (19) are known. Therefore, from representations (17) и (20), we get estimates

$$|f_{k,i}| \leq C_1 |\lambda_{k,i}| \left\{ |\phi_{k,i}| + |\psi_{k,i}| \right\}, \quad (28)$$

$$|\Phi_{k,i}(t)| \leq C_1 \left\{ |\phi_{k,i}| + |\psi_{k,i}| \right\}, \quad (29)$$

where the constant  $C_1$  does not depend on the indices  $k, i$  and on the functions  $\phi(x), \psi(x)$ . Since the eigenfunctions of the system (12) forms an orthonormal basis in  $L_2(-\pi, \pi)$ , then by virtue of the Parseval equality, it is easy to obtain estimates

$$\|f\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \leq C \left\{ \|\phi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 + \|\psi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \right\}, \quad (30)$$

$$\|\Phi_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \|\phi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 + \|\psi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \right\}. \quad (31)$$

In deriving these inequalities, we use the fact that the functions  $\phi(x), \psi(x)$  satisfy the boundary conditions (11). Now we can easily obtain an estimate for  $t^{-\beta} D_t^\alpha \Phi(x, t)$  from Eq. (6). This together with (30) and (31) gives the necessary estimate for the solution.

From the obtained estimates it also follows that in the constructed formal solution of the inverse problem all the series converge, they can be term-by-term differentiated, and the series obtained during differentiation also converge in the metrics of  $L_2$ .

From (21) and (29), by using Holder's inequality, it is easy to justify the inequality

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |\Phi(x, t)|^2 \leq C \left\{ \|\phi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 + \|\psi''\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 \right\},$$

which justifies the continuity of  $\Phi(x, t)$  in the closed domain  $\bar{\Omega}$ .

From the representation of the solution in the form of series (21), (22) and inequalities (28), (29), it is easy to justify estimate

$$|\Phi_{xx}(x, t)| + |\Phi_{tt}(x, t)| + |f(x)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{k,i}|^2 \left\{ |\phi_{k,i}| + |\psi_{k,i}| \right\}. \quad (32)$$

Let  $\phi(x), \psi(x) \in C^4[-\pi, \pi]$  and the functions  $\phi(x), \psi(x)$  and  $\phi''(x), \psi''(x)$  satisfy the boundary conditions (11), then the series in the right-hand side of (32) converges. Therefore, in such case, the formal solution gives the regular solution of the inverse problem (6)–(9). Theorem is completely proved.

#### REFERENCES

- 1 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // *Quaestiones Mathematicae*. – V. 40, No. 2. – 2017. – P. 151-160. – DOI: 10.2989/16073606.2017.1283370.
- 2 Cabada A., Tojo A.F. Equations with involutions, Workshop on Differential Equations // Malla Moravka. – Czech Republic, March, 28, 2014. – P. 240. – Available from: <http://users.math.cas.cz/~sremr/wde2014/prezentace/cabada.pdf>.
- 3 Sadybekov M., Dildabek G., Ivanova M. On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // *Advances in Mathematical Physics*. – 2018. – Article No. 8301656. – P. 1-8.

4 Dildabek G., Ivanova M. On a class of inverse problems on a source restoration in the heat conduction process from nonlocal data // *Mathematical Journal*, 2018. – V. 18, No. 2. – P. 87-106.

5 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2018 (Accepted for publication). – P. 1-10.

6 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition // *Boundary Value Problems*. – 2015. – V. 2015, No. 38. – DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5.

7 Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // *J. Nonlinear Sci. Appl.* – 2016. – V. 9. – P. 1243-1251.

8 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. – 2017. – P. 1-10. – DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997

9 Orazov I., Sadybekov M.A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // *Russian Math.* – 2012. – V. 56, No. 2. – P. 60–64. – DOI: 10.3103/S1066369X12020089.

10 Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // *Sib. Math. J.* – 2012. – V. 53, No. 1. – P. 146-151. – DOI: 10.1134/S0037446612010120.

11 Ivanchov M.I. Some inverse problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 1993. – V. 45, No. 8. – P. 1186-1192.

12 Kaliev I.A., Sabitova M.M. Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2010. – V. 4, No. 3. – P. 332-339. – DOI: 10.1134/S199047891003004X.

13 Kaliev I.A., Mugafarov M.F., Fattahova O.V. Inverse problem for forwardbackward parabolic equation with generalized conjugation conditions // *Ufa Mathematical Journal*. – 2011. – V. 3, No. 2. – P. 33-41.

14 Kirane M., Malik A.S. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time // *Appl. Math. Comput.* – 2011. – V. 218, No. 1. – P. 163-170. – DOI: 10.1016/j.amc.2011.05.084.

15 Ismailov M.I., Kanca F. The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2012. – V. 20. – P. 463–476. – DOI: 10.1080/17415977.2011.629093.

16 Kirane M., Malik A.S., Al-Gwaiz M.A. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2013. – V. 36, No. 9. – P. 1056-1069. – DOI: 10.1002/mma.2661.

17 Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Counterexamples in inverse problems for parabolic, elliptic, and hyperbolic equations // *Advances in Difference Equations*. – 2013. – V. 2013, No. 173. – P. 797-810. – DOI: 10.1186/1687-1847-2013-173.

18 Kanca F. Inverse coefficient problem of the parabolic equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // *Abstract and Applied Analysis*. – 2013. – V. 2013. (Article No. 659804). – P. 1-7. – DOI: 10.1155/2013/659804.

19 Lesnic D., Yousefi S.A., Ivanchov M. Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions // *Journal of Applied Mathematics and Computation*. – 2013. – V. 41. – P. 301-320. – DOI: 10.1007/s12190-012-0606-4.

20 Miller L., Yamamoto M. Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation // *Inverse Problems*. – 2013. – V. 29, No. 7. (Article No. 075013). – P. 1-8. – DOI: 10.1088/0266-5611/29/7/075013.

21 Li G., Zhang D., Jia X., Yamamoto M. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation // *Inverse Problems*. – 2013. – V. 29, No. 6. (Article No. 065014). – P. 1-36. – DOI: 10.1088/0266-5611/29/6/065014.

22 Kostin A.B. Counterexamples in inverse problems for parabolic, elliptic, and hyperbolic equations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 2014. – V. 54, No. 5. – P. 797-810. – DOI: 10.1134/S0965542514020092.

23 Ashyralyev A., Hanalyev A. Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators // *The Scientific World Journal*. – 2014. – V. 2014. (Article No. 519814). – P. 1-11. – DOI: 10.1155/2014/519814.

24 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition // *Boundary Value Problems*. – 2015. – V. 2015, No. 1. – DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5.

25 Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials // *AIP Conference Proceedings*. – 2015. – V. 1676. (Article No. 020005). – DOI: 10.1063/1.4930431.

26 Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional diffusion problem with not strengthened regular boundary conditions // *AIP Conference Proceedings*. – 2015. – V. 1690. (Article No. 040007). – DOI: 10.1063/1.4936714

27 Tuan N.H., Hai D.N.D., Long L.D., Thinh N.V., Kirane M. On a Riesz-Feller space fractional backward diffusion problem with a nonlinear source // *J. Comput. Appl. Math.* – 2017. – V. 312. – P. 103-126. – DOI: 10.1016/j.cam.2016.01.003.

28 Sadybekov M., Oralsyn G., Ismailov M. An inverse problem of finding the time-dependent heat transfer coefficient from an integral condition // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – V. 113, No. 4. – P. 139-149. – DOI: 10.12732/ijpam.v113i4.13.

29 Tuan N.H., Kirane M., Hoan L.V.C., Long L.D. Identification and regularization for unknown source for a time-fractional diffusion equation //

Computers and Mathematics with Applications. – 2017. – V. 73, No. 6. – P. 931-950. – DOI: 10.1016/j.camwa.2016.10.002.

30 Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative // Math Meth Appl Sci. – 2017. – V. 40. – P. 6468-6479. – DOI: 10.1002/mma.4468.

31 Kirane M. Samet, B., Torebek B.T. Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data // Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – V. 2017. (Article No. 257). – P. 1-13.

32 Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. – 2010. – V. 46, No. 4. – P. 506-511. – DOI: 10.1134/S0012266110040051.

33 Kurdyumov V.P., Khromov A.P. The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a functional differential operator with variable structure // Russian Mathematics. – 2010. – V. 2. – P. 39-52. – DOI: 10.3103/S1066369X10020052.

34 Sarsenbi A., Tengaeva A.A. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems // Differential Equations. – 2012. – V. 48, No. 2. – P. 306-308. – DOI: 10.1134/S0012266112020152.

35 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differential Equations. – 2012. – V. 48, No. 8. – P. 1112-1118. – DOI: 10.1134/S001226611208006X.

36 Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis Properties of Eigenfunctions of Second Order Differential Operators with Involution // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – V. 2012. (Article No. 576843). – P. 1-6. – DOI: 10.1155/2012/576843.

37 Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M. Spectral Properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – V. 2012. (Article No. 590781). – DOI: 10.1155/2012/590781.

38 Sarsenbi A., Sadybekov M. Eigenfunctions of a fourth order operator pencil // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1611. – P. 241-245. – DOI: 10.1063/1.4893840.

39 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differential Equations. – 2015. – V. 51, No. 8. – P. 984-990. – DOI: 10.1134/S0012266115080029.

40 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Basicity in  $L_p$  of root functions for differential equations with involution // Electron. J. Differ. Equ. – 2015. – V. 2015, No. 278. – P. 1-9.

41 Sadybekov M.A., Sarsenbi A., Tengayeva A. Description of spectral properties of a generalized spectral problem with involution for differentiation operator of the second order // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1759. (Article No. 020154). – DOI: 10.1063/1.4959768.

42 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Y. Spectral analysis of a differential operator with an involution // Journal of Evolution Equations. – 2017. – V. 17, No. 2. – P. 669-684. – DOI: 10.1007/s00028-016-0332-8.

43 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – V. 53, No. 1. – P. 33-46. – DOI: 10.1134/S0012266117010049.

44 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. – North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, 2006. – V. 204. – 540 p.

Садыбеков М.А., Сәрсенбі А.А. ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ДЕРЕКТЕРІ БОЙЫНША АЗЫНҒАН СУБДИФФУЗИЯЛЫҚ ПРОЦЕССТІ ҚАЙТА ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ КЕРІ ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Осы мақалада инволюциялы және кеңістіктегі айнымалысына қатысты периодты шекаралық шартты бір өлшемді бөлшек туындылы жылуөткізгіш теңдеуі үшін бір кері есеп қарастырылған. Бұл есеп әлсіз өткізгішті оқшаулауды орайтын жіңішке тұйықталған сымдағы жылудың тарау процесін көрсетеді. Кері есеп тек кеңістіктік айнымалыға ғана тәуелді теңдеудің белгісіз оң жақ бөлігін (бір мезгілде шешімімен бірге) қалпына келтіруден тұрады. Қайта анықтау шарттары ретінде бастапқы және соңғы күйі алынған. Берілген есептің шешімінің бар болуы және оның жалғыздығы айнымалыларды ажырату әдісімен алынған.

*Кілттік сөздер.* Кері есеп, жылуөткізгіштік теңдеуі, инволюциясы бар теңдеу, субдиффузиялық процесс, азынуы бар теңдеу, периодты шекаралық шарттар, айнымалыларды ажырату әдісі.

Садыбеков М.А., Сарсенби А.А. ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ СУБДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО НЕЛОКАЛЬНЫМ ДАННЫМ

В этой статье рассматривается одна обратная задача для одномерного вырождающегося уравнения дробной теплопроводности с инволюцией и с периодическими граничными условиями относительно пространственной переменной. Эта проблема имитирует процесс распространения тепла в тонкой замкнутой проволоке, обернутой вокруг слабо проницаемой изоляции. Обратная задача состоит в восстановлении (одновременно с решением) неизвестной правой части уравнения, зависящей только от пространственной переменной. Условиями переопределения являются начальное и конечное состояния. Результаты существования и единственности для данной задачи получены методом разделения переменных.

*Ключевые слова.* Обратная задача, уравнение теплопроводности, уравнение с инволюцией, субдиффузионный процесс, уравнение с вырождением, периодические граничные условия, метод разделения переменных.

Sadybekov M.A.  
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
050010, Almaty, Kazakhstan, Pushkin str., 125  
E-mail: sadybekov@math.kz

Sarsenbi A.A.  
M. Auezov South Kazakhstan State University  
160012, Shymkent, Kazakhstan, Taukekhan avenue, 5  
E-mail: abdisalam@mail.ru

Received 24.12.2018

## Правила "Математического журнала" для авторов статей

### *Общие положения*

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте [www.math.kz](http://www.math.kz) Института математики и математического моделирования, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

### *Требования к оформлению статей*

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-2 $\epsilon$  и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru). Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать классификатор МРНТИ. На следующих строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов. В конце указать место работы, почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.



На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, №4 (70), 2018

Собственник "Математического журнала":  
Институт математики и математического моделирования

Журнал подписан в печать  
и выставлен на сайте <http://www.math.kz> / Института математики и  
математического моделирования  
28.12.2018 г.

Тираж 300 экз. Объем 105 стр.  
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:  
Институт математики и математического моделирования  
г. Алматы, ул. Пушкина, 125  
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32  
e-mail: [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru)  
web-site: <http://www.math.kz>