ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Том 18 № 3 (69) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

Том 18 № 3 (69) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, № 3 (69), 2018

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 **№ 3 (69)** **2018**

Алдашев С.А. Задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений 5

Bizhanova G.I. Investigation of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation in the weighted Hölder space 18

Jenaliyev M.T., Yergaliyev M. About one coefficient inverse problem for the heat equation in a degenerating domain with time-dependent boundaries 34

Dzhumabaev D.S. A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations 43

Оразов Е.Т. Теоретико-игровой анализ справедливого распределения стока трансграничных вод.. 52

Peretyat'kin M.G. Complexity estimates for the relation of coincidence of model-theoretic properties with an application to semantic classes 67

CONTENTS

Volume 18 **No. 3 (69)** **2018**

Aldashev S.A. Dirichlet problem of degenerate multidimensional elliptic-parabolic equations in cylindrical domain 5
Bizhanova G.I. Investigation of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation in the weighted Hölder space 18
Jenaliyev M.T., Yergaliyev M. About one coefficient inverse problem for the heat equation in a degenerating domain with time-dependent boundaries 34
Dzhumabaev D.S. A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations 43
Orazov E.T. Game-theoretical analysis of the equitable apportionment of the transboundary rivers waters 52
Peretyat'kin M.G. Complexity estimates for the relation of coincidence of model-theoretic properties with an application to semantic classes 67

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 5–17.

МРНТИ 27.31.17

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Алдашев С.А.

Аннотация. В работах автора найдены явные виды классических решений задач Дирихле в цилиндрических областях для многомерных эллиптических уравнений. В данной статье используется метод, предложенный в работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решение задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Ключевые слова. Корректность, многомерные вырождающиеся уравнения, задача Дирихле, сферические функции, функция Бесселя.

1 Введение

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучена. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задача Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

2010 Mathematics Subject Classification: 58J10.

Funding: Работа поддержана грантом AP055134615 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

В данной работе для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области. В статье используется метод, предложенный в работах [3]–[6].

2 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β – части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, σ_β – нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая часть границ областей Ω_α и Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся многомерные эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0,\ t > 0, \\ g(t)\Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p(t) > 0$ при $t > 0$ и может обращаться в нуль при $t = 0$, $p(t) \in C([0,\alpha])$, $g(t) > 0$ при $t < 0$ и может обращаться в нуль при $t = 0$, $g(t) \in C([\beta, 0])$, а Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 1, 2, ..., m-2$, $0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). *Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(t,\theta). \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta), \psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta), \psi_2(\beta,\theta) = \varphi_2(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, ...,$ – пространства Соболева.

Имеет место [7]

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \ \ c_1, \, c_2 = const.$$

Через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты ряда (4) соответственно функций $d_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $d_i \frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m, \varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta), \psi_1(t,\theta), \psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$, H – единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\bar{\Omega}_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1, ..., m$, $l \geq m+1$, $c(r,\theta,t) \leq 0$ $\forall (r,\theta,t) \in \Omega_\alpha$, $e(r,\theta,t) \leq 0$ $\forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедливы

Теорема. *Если $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > \frac{3m}{2}$, то Задача 1 однозначно разрешима.*

Разрешимость задачи 1. Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv g(t)\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение Задачи 1 в области Ω_β будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}_n^k$, получим [8], [9]

$$\begin{gathered} g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r}g(t)\rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \right. \\ \left. + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}g(t) + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-1}^k - nd_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}g(t)\rho_1^k\bar{u}_1^k = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1\right),\ n = 1,\ k = \overline{1, k_1}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r}g(t)\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}g(t)\rho_n^k\bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \right. \\ \left. + [\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1)d_{in-1}^k)]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\ k = \overline{1, k_n},\ n = 2, 3 \dots \end{gathered} \tag{10}$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) от 1 до k_n, затем сложив полученные выражения вместе с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, – решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$g(t)\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом

$$\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0.$$

Далее из краевого условия (3) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\beta)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{2n}^k(t),\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{2n}^k(t)$, получим

$$g(t)\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right)-\bar{\upsilon}_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\beta)=\varphi_{2n}^k(r),\quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{14}$$

$$f_n^k(r,t)=\bar{f}_n^k(r,t)+\psi_{2nt}^k+\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{2n}^k,\ \varphi_{2n}^k(r)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r)-\psi_{2n}^k(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k\equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\quad \tilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}f_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ – решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=\widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\beta)=0,\ \ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ – решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r),\ \ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{21}$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kR_s(r). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23) получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu_{s,n}R_s=0,\ \ 0<r<1, \tag{24}$$

$$R_s(1)=0,\ \ |R_s(0)|<\infty, \tag{25}$$

$$T_{st}+\mu_{s,n}g(t)T_s(t)=-a_{ns}^k(t),\ \ \beta<t<0, \tag{26}$$

$$T_s(\beta)=0. \tag{27}$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [10]

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{28}$$

где $\nu=n+\frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ – нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu=\mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (26), (27) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 \int\limits_0^t g(\xi)d\xi))(\int\limits_t^\beta g(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \int\limits_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1)d\xi). \quad (29)$$

Подставляя (28) в (23), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^\infty a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^\infty b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1. \quad (30)$$

Ряды (30) – разложения в ряды Фурье-Бесселя [11], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (31)$$

$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (32)$$

где $\mu_{s,n}$, $s=1,2,...,$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (22), (28), (29) получим решение задачи (18), (19)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad (33)$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяются из (31).

Далее, подставляя (22) в (20), (21), с учетом (23) будем иметь

$$T_{st}+\mu_{s,n}^2 g(t)T_s = 0,\ \beta<t<0,\ T_s(\beta)=b_{ns}^k,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{ns}^k \exp(\mu_{s,n}^2 \int\limits_t^\beta g(\xi)d\xi). \quad (34)$$

Из (28), (34) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k \sqrt{r}(\exp \mu_{s,n}^2 \int_t^{\beta} g(\xi)d\xi) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{35}$$

где b_{ns}^k находятся из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12) $(n = 1)$ и т.д., найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33) и (35).

Итак, в области Ω_β имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \tag{36}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 – плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [12].

Отсюда и из (36) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0 \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(r) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая формулу [11] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [13], [7]

$$\begin{gathered} J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}\right) + 0\left(\tfrac{1}{z^{3/2}}\right), \ \nu \geq 0, \\ |k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \ \left| \tfrac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \ j = \overline{1, m-1}, \ l = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{38}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_1(r,\theta),\ \varphi_2(r,\theta),\ \psi_1(t,\theta),\ \psi_2(t,\theta)$, как в [4], можно показать, что полученное решение (37) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее из (33), (35), (37) при $t\to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{39}$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\Big[\int_0^\beta a_{ns}^k(\xi)(\exp\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)d\xi_1)d\xi+$$

$$+b_{ns}^k\exp(\mu_{s,n}^2\int_0^\beta g(\xi)d\xi)\Big]J_\nu(\mu_{s,n}r).$$

Из (30)–(33), (35), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta)\in W_2^l(S),\ l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (39), приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для эллиптического уравнения

$$L_2u\equiv p(t)\Delta_x u+u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0 \tag{40}$$

с данными

$$u\Big|_S=\tau(r,\theta),\ u|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),\ u|_{\sigma_\alpha}=\varphi_1(r,\theta), \tag{41}$$

имеющее единственное решение [4].

Следовательно, разрешимость Задачи 1 установлена.

3 Единственность решения Задачи 1.

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем единственность ее решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^*\upsilon\equiv g(t)\Delta_x\upsilon+\upsilon_t-\sum_{i=1}^{m}d_i\upsilon_{x_i}+d\upsilon=0 \tag{5*}$$

с данными

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \upsilon\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{42}$$

где $d(x,t) = e - \sum\limits_{i=1}^{m} d_{ix_i}$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G – множество функций $\tau(r)$ из класса $C\left([0,1]\right) \cap C^1\left((0,1)\right)$. Множество G плотно всюду в $L_2\left((0,1)\right)$ [12]. Решение задачи $(5^*), (42)$ будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений вида (8)–(10), где $\tilde{d}_{in}^k$, d_{in}^k заменены соответственно на $-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, а $\tilde{e}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i = 1, ..., m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Далее из краевого условия (42) в силу (6) получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \ \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \ k = \overline{1,k_n}, \ n = 0, 1, \ldots . \tag{43}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). Задачу (11), (43) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_n^k\right) + \upsilon_{nt}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{15$'$}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \ \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{44}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\upsilon}_n^k(r,t), \ \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \ \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Решения задачи $(15')$, (44) будем искать в виде (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ – решение задачи для уравнения (18) с данными

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0, \ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{45}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ – решение задачи для уравнения (20) с условием

$$\upsilon_{2n}^k(r,0) = 0, \ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0, \tag{46}$$

Решения задач (18), (45) и (20), (46) соответственно имеют вид

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\Bigg(\exp(\mu_{s,n}^2\int_0^t g(\xi)d\xi)\Bigg)\Bigg(\int_0^t a_{ns}^k(\xi)(\exp(-\mu_{s,n}^2\int_0^{\xi} g(\xi_1)d\xi_1)d\xi\Bigg) J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\tau_{s,n}\sqrt{r}(\exp\mu_{s,n}^2\int\limits_0^t g(\xi)d\xi)J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

где

$$\tau_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tau_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ \nu=\frac{n+(m-2)}{2}.$$

Таким образом, решение задачи (5*), (42) в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta)$$

построено, которое в силу оценок (38) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

В результате интегрирования по области Ω_β тождество [14]

$$\upsilon L_1 u-uL_1^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=g(t)\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\left(N^\perp,x_i\right),Q=\cos\left(N^\perp,t\right)-\sum_{i=1}^m d_i\cos\left(N^\perp,x_i\right),$$

а $N^\perp$ – внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$, по формуле Грина получим

$$\int\limits_S\tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{47}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$ [14], то из (47) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0\ \forall(r,\theta)\in S$. Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения (5) [15] $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$.

Далее из принципа Хопфа [16] $u\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$.

Теорема доказана полностью.

В [4] приводится явный вид решения задачи (40), (41), поэтому можно записать представление решения и для Задачи 1.

Отметим, что в случае, когда $a_i(x,t) = b(x,t) = c(x,t) = d_i(x,t) = e(x,t) \equiv 0,\ i = 1,...,m$, для Задачи 1 теорема получена в [17], [18].

Литература

1 Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Сб. переводов. Математика. – 1963. – Т. 7, № 6. – С. 99-121.

2 Олейник О.А. Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. – 360 с.

3 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ, Сер. мат., мех., инф. – 2012. – Т. 12, вып. 1. – С. 7-13.

4 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94 вып. 1. – С. 936-939.

5 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного эллиптико-параболического уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. мат., мех., инф. – 2014. – Т. 14, вып. 1. – С. 5-10.

6 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. мат., мех., инф. – 2016. – Т. 16, вып. 2. – С. 125-132.

7 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

8 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

9 Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.

10 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 576 с.

11 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

12 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

13 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

14 Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Наука, 1981. – Т. 4, ч. 2. – 550 с.

15 Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

16 Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.

17 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения // Журнал вычислительной и прикладной математики. – КНУ им. Т. Шевченко, Киев. – 2014. – № 3(117). – С. 17-22.

18 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптико-параболлических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2017. – Т. 23, № 3. – С. 7-11.

Алдашев С.А. АЗЫНҒАН КӨП ӨЛШЕМДІ ЭЛЛИПСТІК-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЦИЛИНДРЛІК ОБЛЫСТАҒЫ ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ

Автордың жұмыстарында көп өлшемді эллипстік теңдеулер үшін цилиндрлік облыстағы Дирихле есебінің классикалық шешімдері айқын түрде табылған болатын. Бұл мақалада, автордың жұмыстарында ұсынылған тәсілін пайдалана отырып, азынған көп өлшемді эллипстік-параболалық теңдеулер үшін цилиндрлік облыстағы Дирихле есебінің бірмәнді шешімділігі көрсетілген және классикалық шешімінің айқын түрі алынған.

Кілттік сөздер. Корректілік, көп өлшемді азынған теңдеулер, Дирихле есебі, сфералық функциялар, Бессель функциясы.

Aldashev S.A. DIRICHLET PROBLEM OF DEGENERATE MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS IN CYLINDRICAL DOMAIN

In the author's papers explicit forms of classical solutions of Dirichlet problems for multidimensional elliptic equations in cylindrical domains are found. In this paper we use the method proposed in the author's works, we show the unique solvability and obtain an explicit form of the classical solution of the Dirichlet problem for degenerate multidimensional elliptic-parabolic equations in a cylindrical domain.

Keywords. Correctness, multidimensional degenerate equations, Dirichlet problem, spherical functions, Bessel function.

Алдашев С.А.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125
E-mail: aldash51@mail.ru
Статья поступила в редакцию 13.09.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 18–33.

МРНТИ 27.31.44, 27.35.21, 27.35.59

INVESTIGATION OF SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION IN THE WEIGHTED HÖLDER SPACE

G.I. Bizhanova

Abstract. The Cauchy problem for a parabolic equation with the bounded coefficients at the lowest terms having the less smoothness than it is required to obtain a solution of the problem in the Hölder space is studied. This leads to the singularity of the solution at the initial moment of time. The solution of the problem is obtained in the explicit form, the weighted Hölder space for the solution is determined. The existence, estimate and uniqueness of the solution in the weighted Hölder space is proved.

Keywords. Cauchy problem, parabolic equation, existence, estimate, uniqueness of the solution, weighted Hölder space.

The boundary value problems in non-cylindrical domains with the boundaries of the less smoothness than the smoothness of the solution of the problem can be reduced to the problems for parabolic equations with singular on t coefficients at the first derivatives with respect to spatial variables.

Investigation of the problems for the parabolic equations in the non-cylindrical domain with moving boundary whose smoothness is less than the smoothness of the solutions was started by M. Gevrey [1]. L.I. Kamynin obtained results on the solvability of one-dimensional boundary value problems for the parabolic equations in the domains with a boundary satisfying the Gevrey condition [2], [3]. E.A. Baderko [4]–[6], M.F. Cherepova [7], [8] studied one-and multidimensional boundary value parabolic problems in the domains with less smoothness of the boundaries than the smoothness of the solution in the Hölder spaces. In the articles [1]–[6] there was applied the method of the

2010 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35K67, 35A01, 35A02, 35A20, 35B65.

Funding: An article was supported by the grant AP05133898 of the Committee of Science of the Ministry of the Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

theory of the heat potentials with the further reduction of the problems to the Volterra integral equations of the second kind.

V.P. Mikhailov [9] has shown that if the moving boundary of the domain is given by the equation $x = -\sqrt{t}\ln t, \quad t \in (0,1)$, then the solution of the problem is not unique.

In this work there is constructed the solution of the Cauchy problem for the second order parabolic equation in the explicit form. The existence, estimates, uniqueness of the solution is proved in the classical and weighted Hölder spaces.

Let $D := \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad D_T = D \times (0,T)$.

We consider the Cauchy problem for the parabolic equation

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{x_i x_i} u + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{t^{\beta_i}}\partial_{x_i} u + \frac{a_0}{t^{\beta_0}} u = f(x,t) \quad \text{in} \quad D_T \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{in} \quad D, \tag{2}$$

where $\beta_i < 1, \quad i = 1,\ldots,n, \quad \beta_0 < 1;\ a_{ij},\ a_i,\ a_0,\ i,j = 1,...,n,$ are constant coefficients, coefficients a_{ij} satisfy the conditions

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j = 1,...n, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geq c_0\,\xi^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ c_0 = \text{const} > 0. \tag{3}$$

In the one - dimensional case we have the problem

$$\partial_t u - a\partial^2_x u + \frac{a_1}{t^{\beta}}\partial_x u + \frac{a_0}{t^{\beta_0}} u = f(x,t) \text{ in } \quad D_T,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{in} \quad D. \tag{4}$$

We shall study the problem (1), (2) in the non-isotropic classical and weighted Hölder spaces $C^{\,2+\alpha}_{\,\beta}(\Omega_T)$ and$C^{\,l,\,l/2}_{\,x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$.

Let l be positive non - integer, $\alpha \in (0,1),\ \beta > 0,\ \Omega_T = \Omega \times (0,T), \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

The norms $|u|^{(l)}_{\Omega_T}$ and $|u|^{(2+\alpha)}_{\beta,\Omega_T}$ are defined as follows:

$$|u|^{(2+\alpha)}_{\beta,\Omega_T} = \sum_{2m_0+|m|=0}^{2} |\partial^{m_0}_t \partial^m_x u|_{\Omega_T} + \sum_{2m_0+|m|=2} [\partial^{m_0}_t \partial^m_x u]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T}$$

$$+\sum_{|m|=2}[\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}+\sup_{t\le T} t^{\alpha/2-\beta}[\partial_t u]_{t,\Omega_t'}^{(\alpha/2)}+\sum_{|m|=1}[\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \tag{5}$$

and

$$|u|_{\Omega_T}^{(l)}=\sum_{2m_0+|m|=0}^{[l]}|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{\Omega_T}$$

$$+\sum_{2m_0+|m|=[l]}\Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}+[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}\Big) \tag{6}$$

$$+\begin{cases}\sum\limits_{2m_0+|m|=[l]-1}[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, & [l]\ge 1,\\ 0, & [l]=0,\end{cases}$$

where $\alpha=l-[l]\in(0,1)$, $\Omega_t'=\Omega\times(t/2,t)$, $m=(m_1,\ldots,m_n)$, m_i are positive integers or 0, $i=1,\ldots,n$, $|m|=m_1+\ldots+m_n$,

$$|v|_{\Omega_T}=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T}|\,v|,\ [v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}=\max_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T}\frac{\big|v(x,t)-v(z,t)\big|}{|x-z|^\alpha},$$

$$[v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)}=\max_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T}\frac{\big|v(x,t)-v(x,t_1)\big|}{|t-t_1|^\alpha}$$

We shall find the solution of the problem (1), (2) in the explicit from.

Lemma 1. *Let $\beta_i<1$, $i=1,...,n$, $\beta_0<1$.*

The solution of the problem (1), (2) *has the form*

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{7}$$

$$u_1(x,t)=\int\limits_D u(\xi)\frac{1}{(\sqrt{2}\pi t)^n\sqrt{\det A}} \tag{8}$$

$$\times e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(x_i-\xi_i-\frac{a_i}{1-\beta_i}t^{1-\beta_i})(x_j-\xi_j-\frac{a_j}{1-\beta_j}t^{1-\beta_j})}{4t}}e^{-\frac{a_0}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}}d\xi$$

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D f(\eta,\tau)\frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n\det\sqrt{A}} \tag{9}$$

$$\times e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_i-\eta_i-\frac{a_i}{1-\beta_i}(t^{1-\beta_i}-\tau^{1-\beta_i}))(x_j-\eta_j-\frac{a_j}{1-\beta_j}(t^{1-\beta_j}-\tau^{1-\beta_j}))}{4(t-\tau)}} e^{-\frac{a_0}{1-\beta_0}(t^{1-\beta_0}-\tau^{1-\beta_0})} d\eta,$$

where $A = \{a_{ij}\}_{i,j}^{n}$, a^{ij}, $i, j = 1, ..., n$, *are the elements of the inverse matrix* A^{-1}.

Proof. In the problem (1), (2) we make the substitution

$$u(x,t) = e^{-\frac{a_0}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}} w(x,t), \tag{10}$$

then we obtain the problem for the function $w(x,t)$

$$\partial_t w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{x_i x_j} w + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{t^{\beta_i}} \partial_{x_i} w = f(x,t)\, e^{\frac{a_0}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}} \quad \text{in} \quad D_T, \tag{11}$$

$$w|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{in} \quad D. \tag{12}$$

We apply the coordinate mapping

$$y = x - (\frac{a_1}{1-\beta_1}t^{1-\beta_1}, ..., \frac{a_n}{1-\beta_n}t^{1-\beta_n}) \tag{13}$$

and for the function

$$w(y + (\frac{a_1}{1-\beta_1}t^{1-\beta_1}, ..., \frac{a_n}{1-\beta_n}t^{1-\beta_n}),\, t) =: v(y,t) \tag{14}$$

we shall have the problem

$$\partial_t v - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{y_i y_j} v = f_1(y,t) \quad \text{in} \quad D_T, \tag{15}$$

$$v|_{t=0} = u_0(y) \quad \text{in} \quad D, \tag{16}$$

where

$$f_1(y,t) = f(y + (\frac{a_1}{1-\beta_1}t^{1-\beta_1}, ..., \frac{a_n}{1-\beta_n}t^{1-\beta_n}), t)e^{\frac{a}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}}. \tag{17}$$

The solution of the problem (15), (16) can be written in the explicit form

$$v(y,t) = \int\limits_{D} u_0(\xi)\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n\sqrt{\det A}} e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y_i-\xi_i)(y_j-\xi_j)}{4t}} d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau \int_D f_1(\xi,\tau)\frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n\sqrt{\det A}}e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y_i-\xi_i)(y_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}}d\xi, \qquad (18)$$

where $A=\{a_{ij}\}_{i,j}^n=1,\ a^{ij}$ are the elements of the inverse matrix A^{-1}.

Then taking into consideration the mapping (13): $y = x - (\frac{a_1}{1-\beta_1}\, t^{1-\beta_1}, ..., \frac{a_n}{1-\beta_n}\, t^{1-\beta_n})$ and formula (17), from the formulas (10): $u(x,t) = e^{-\frac{a_0}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}} w(x,t)$, (14): $w(x,\,t) \ =: \ v(x-(\frac{a_1}{1-\beta_1}t^{1-\beta_1},...,\frac{a_n}{1-\beta_n}t^{1-\beta_n}),\,t)$ we obtain

$$u(x,t)=v(x-(\frac{a_1}{1-\beta_1}t^{1-\beta_1},...,\frac{a_n}{1-\beta_n}t^{1-\beta_n}),\,t)e^{-\frac{a_0}{1-\beta_0}t^{1-\beta_0}}$$

and now we make use of the change of the variables $\xi_i+\frac{a_i}{1-\beta_i}\tau^{1-\beta_i}=\eta_i, \quad i=1,...,n$, in the second integral in (18), then we shall have the solution of the problem (1), (2) in the from (7)–(9). □

It is known that for the solution of the problem (1), (2) to belong to the Hölder space $C_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ we should require that the coefficients $\frac{a_i}{t^{\beta_i}}$, $\frac{a_0}{t^{\beta_0}}$, $i=1,\dots,n$, of the equation (1) are from the space $C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, that is $\beta=-\alpha/2,\ \beta_0=-\alpha/2$, moreover $f(x,t)\in C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$ and $u_0(x,t)\in C^{\,2+\alpha}(\overline{D})$.

We shall study the Cauchy problem (1), (2) with $0<-\beta_i<\alpha/2,\ \ i=1,\dots,n,\ 0<-\beta_0<\alpha/2$, in this case the coefficients of the equation (1) do not belong to the space $C_{x\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, and the solution of the problem (1), (2) may have the singularity.

For the convenience we rewrite the problem (1), (2).

It is required to find the function $u(x,t)$ as the solution of the following Cauchy problem:

$$\partial_t u-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2_{x_ix_i}u+\sum_{i=1}^{n} a_i\,t^{\beta_i}\partial_{x_i}u+a_0\,t^{\beta_0}u=f(x,t) \quad \text{in} \quad D_T \qquad (19)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x) \quad \text{in} \quad D, \qquad (20)$$

where $\beta_i>0,\ \beta_0>0,\ \ i=1,\dots,n$, the coefficients a_{ij} satisfy the conditions (3).

In the formulas (8), (9) we replace β_k by $-\beta_k$, $k=1,\ldots,n,\ 0$, then we shall have the solution of the problem (19), (20) in the form

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{21}$$

$$u_1(x,t)=\int\limits_D u(\xi)\frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n\sqrt{\det A}} \tag{22}$$

$$\times e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_i-\xi_i-\frac{a_i}{1+\beta_i}t^{1+\beta_i})(x_j-\xi_j-\frac{a_j}{1+\beta_j}t^{1+\beta_j})}{4t}}e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}d\xi,$$

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D f(\eta,\tau)\frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n\det\sqrt{A}} \tag{23}$$

$$\times e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_i-\eta_i-\frac{a_i}{1+\beta_i}(t^{1+\beta_i}-\tau^{1+\beta_i}))(x_j-\eta_j-\frac{a_j}{1+\beta_j}(t^{1+\beta_j}-\tau^{1+\beta_j}))}{4(t-\tau)}}e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}(t^{1+\beta_0}-\tau^{1+\beta_0})}d\eta.$$

We consider the function $f_1(y,t)$ determined by formula (17) with $-\beta_k$ instead of β_k, $k=1,\ldots,n,0$,

$$f_1(y,t)=f(y+(\frac{a_1}{1+\beta_1}t^{1+\beta_1},...,\frac{a_n}{1+\beta_n}t^{1+\beta_n}),t)\,e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}. \tag{24}$$

We denote, for convenience

$$h(t)=(\frac{a_1}{1+\beta_1}t^{1+\beta_1},...,\frac{a_n}{1+\beta_n}t^{1+\beta_n}). \tag{25}$$

Lemma 2. *Let* $0<\beta_k<\alpha/2$, $k=1,\ldots,n,0$, $f(x,t)\in C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{D}_T)$, $\alpha\in(0,1)$, $0<T<\infty$.

Then the function $f_1(y,t)$ *determined by the formula* (24) *belongs to the space* $C_{x\ t}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{D}_T)$ *and satisfies an estimate*

$$|f_1(y,t)|_{D_T}^{(\alpha)}\le C_1|f(x,t)|_{D_T}^{(\alpha)}. \tag{26}$$

Proof. It is clear that

$$|f_1(y,t)|_{D_T}\le C_2|f(y,t)|_{D_T}, \tag{27}$$

$$[f_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} = [f(y+h(t),\, t)\, e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}]^{(\alpha)}_{y,D_T} \le C_3[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,\,D_T}. \qquad (28)$$

Consider the difference to derive an estimate of the Hölder constant $[f_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}$

$$\Delta := |f_1(y,t) - f_1(y,t_1)|$$

$$= |f(y+h(t),t)\, e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}} - f(y+h(t_1),t_1)\, e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t_1^{1+\beta_0}}|$$

$$\le |f(y+h(t),t) - f(y+h(t_1),t)|\, e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}$$

$$+|f(y+h(t_1),t) - f(y+h(t_1),t_1)|\, e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}$$

$$+|f(y+h(t_1),t_1)| e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}} - e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t_1^{1+\beta_0}}|. \qquad (29)$$

Let $t_1 < t$ for definiteness, then we shall have

$$\Delta \le C_4\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}|h(t)-h(t_1)|^{\alpha} + [f(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}(t-t_1)^{\alpha/2}\big)$$

$$+C_5|f(y,t)|_{D_T}|e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}} - e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t_1^{1+\beta_0}}|. \qquad (30)$$

We shall obtain the estimates of two differences in (30). We have

$$|h(t)-h(t_1)|^{\alpha} \le C_6\big(\sum_{k=1}^{n}(t^{1+\beta_k} - t_1^{1+\beta_k})^2\big)^{\alpha/2}$$

$$\le C_7\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{t_1}^{t}\tau^{\beta_k}\frac{\tau^{1/2}}{\tau^{1/2}}d\tau\Big)^2\Big)^{\alpha/2} \le C_8\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big((t-t_1)^{1/2}t^{1/2+\beta_k}\Big)^2\Big)^{\alpha/2}$$

$$\le C_9(t-t_1)^{\alpha/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}t^{1+2\beta_k}\Big)^{\alpha/2}$$

and

$$|h(t)-h(t_1)| \le C_{10}(T)(t-t_1)^{\alpha/2}. \qquad (31)$$

Further,

$$\big|e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}} - e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t_1^{1+\beta_0}}\big|$$

$$= |a_0| \int\limits_{t_1}^{t} \tau^{\beta_0} \frac{\tau^{1-\alpha/2}}{\tau^{1-\alpha/2}} d\tau \leq C_{11}(T)(t-t_1)^{\alpha/2}, \tag{32}$$

here $0 < T < \infty$, $t_1 < t$.

From the estimate (30) with the help of (31) and (32) we shall have

$$[f_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leq C_{12}\big(|f(y,t)|_{D_T} + [f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [f(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big). \tag{33}$$

The obtained estimates (27), (28) and (33) lead to the following one:

$$|f_1(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T} := |f_1(y,t)|_{D_T} + [f_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [f_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leq C_1 |f(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T}$$

Lemma is proved completely. □

We formulate the main result of the work.

Theorem 1. *Let* $\alpha \in (0,1)$, $0 < \beta_k < \alpha/2$, $k = 1, ..., n, 0$, $\beta = \min(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_0)$.

For any functions $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $f(x,t) \in C^{\,\alpha,\,\alpha/2}_{\,x\;\;\,t}(\overline{D}_T)$ *the problem (19), (20) has the unique solution* $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ *determined by the formulas (21) – (23), where* $u_1(x,t) \in C^{\,2+\alpha}_{\,\beta}(D_T)$, $u_2(x,t) \in C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\,x\qquad t}(\overline{D}_T)$ *and the estimates are valid*

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T} \leq C_{13} |u_0|^{(2+\alpha)}_{D} \tag{34}$$

$$|u_2|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leq C_{14} |f|^{(\alpha)}_{D_T}. \tag{35}$$

Proof. We can obtain Theorem 1 by the direct evaluations of the norms (5) and (6) of the solution $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ of the problem (19), (20). But we shall prove theorem in another way.

We have found the solution of the problem (19), (20) in the form (21) – (23). We make the changes of variables

$$y = x - h(t),\; h(t) = \Big(\frac{a_1}{1+\beta_1} t^{1+\beta_1}, ..., \frac{a_n}{1+\beta_n} t^{1+\beta_n}\Big) \tag{36}$$

in (22), (23) and

$$\eta_i = \xi_i + \frac{a_i}{1+\beta_i} \tau^{1+\beta_i},\; i = 1, ..., n,$$

in the integral (23), then we shall have

$$u_1(y+h(t),t) = \int\limits_D u_0(\xi)\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n\sqrt{\det A}}e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y_i-\xi_i)(y_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}}d\xi\ e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}$$

$$=: v_1(y,t)e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}, \tag{37}$$

$$u_2(y+h(t),t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D f_1(\xi,\tau)\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n\sqrt{\det A}}$$

$$e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y_i-\xi_i)(y_j-\xi_j)}{4(t-\tau)}}d\xi\ e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}} =:$$

$$=: v_2(y,t)e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}, \tag{38}$$

where

$$f_1(\xi,\tau) = f(\xi+h(\tau),\tau)\ e^{\frac{a_0}{1+\beta_0}\tau^{1+\beta_0}}.$$

By Lemma 2 $f_1(y,t) \in C_{y\ \ t}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$ and satisfies the estimate (27): $|f_1|_{D_T}^{(\alpha)} \leq C_1|f|_{D_T}^{(\alpha)}$.

Under the conditions of Theorem 1 and Lemma 2 $v_k(y,t) \in C_{y\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $k=1,2$, and the estimates are valid [10]

$$|v_1(y,t)|_{D_T}^{(2+\alpha)} \leq C_{15}|u_0|_{D_T}^{(2+\alpha)}, \tag{39}$$

$$|v_2(y,t)|_{D_T}^{(2+\alpha)} \leq C_{16}|f_1|_{D_T}^{(2+\alpha)} \leq C_{17}|f|_{D_T}^{(2+\alpha)}. \tag{40}$$

Now in the formulas (37), (38) we make the substitution (36): $y+h(t)=x$ and obtain

$$u_k(x,t) = v_k(x-h(t),t)\ e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}\ t^{1+\beta_0}},\ k=1,2. \tag{41}$$

We evaluate the functions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$.

Consider the function $u_1(x,t)$. Taking into consideration the estimate (39) we can obtain an inequality

$$|u_1(x,t)|_{D_T} + |\partial_{x_i}u_1(x,t)|_{D_T} + |\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)|_{D_T} + |\partial_t u_1(x,t)|_{D_T} +$$

$$+[\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)]^{(\alpha)}_{x,D_T}+[\partial_t u_1(x,t)]^{(\alpha)}_{x,D_T}\le C_{18}|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}, \tag{42}$$

here

$$\partial_t u_1(x,t)=\Big(-\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}v_1(x-h(t),t)a_k\,t^{\beta_k}+\partial_{t^*}v_1(x-h(t),t^*)|_{t^*=t}$$

$$-v_1(x-h(t),t)a_0\,t^{\beta_0}\Big)e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}. \tag{43}$$

We evaluate the Hölder constants $[\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}$, $[\partial_{x_i}u_1(x,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}$, $[\partial_t u_1(x,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}$, $\quad i,j=1,...,n.$

We compose the difference

$$\Delta_1:=\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)-\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t_1)=$$

$$=\big(\partial^2_{x_ix_j}v_1(x-h(t),t)-\partial^2_{x_ix_j}v_1(x-h(t_1),t)$$

$$+\partial^2_{x_ix_j}v_1(x-h(t_1),t)-\partial^2_{x_ix_j}v_1(x-h(t_1),t_1)\big)e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}$$

$$+\partial^2_{x_ix_j}v_1(x-h(t_1),t_1)\big(e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t^{1+\beta_0}}-e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0}t_1^{1+\beta_0}}\big),$$

here

$$h(t)=\big(\frac{a_1}{1+\beta_1}t^{1+\beta_1},...,\frac{a_n}{1+\beta_1}t^{1+\beta_n}\big).$$

We can see that the differences Δ determined by (29) and Δ_1 are similar, because $f(y,t)$ and $\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)$ belong to one and the same space $C^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{D}_T)$, that is Δ_1 is subjected to the estimate as (33)

$$|\Delta_1|\le C_{19}\Big(|\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)|_{D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\Big)(t-t_1)^{\alpha/2}$$

and from here we shall have

$$[\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}$$

$$\le C_{19}\big(|\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)|_{D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big), \tag{44}$$

$i,j=1,...,n.$

To estimate the Hölder constant $[\partial_{x_i} u_1(x,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}$, $i=1,\dots,n$, we evaluate the difference

$$\begin{aligned} \Delta_2 &:= \partial_{x_i} u_1(x,t) - \partial_{x_i} u_1(x,t_1) \\ &= \big(\partial_{x_i} v_1(x-h(t),t) - \partial_{x_i} v_1(x-h(t_1),t) \\ &+\partial_{x_i} v_1(x-h(t_1),t) - \partial_{x_i} v_1(x-h(t_1),t_1)\big) e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}} \\ &+\partial_{x_i} v_1(x-h(t_1),t_1)\big(e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}} - e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}}\big). \end{aligned} \tag{45}$$

First, we shall obtain the auxiliary estimates as (31), (32)

$$|h(t)-h(t_1)| \le C_{20}\Big(\sum_{k=1}^{n} \big(t^{1+\beta_k} - t_1^{1+\beta_k}\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$\le C_{21}\Big(\sum_{k=1}^{n} \big(\int_{t_1}^{t} \tau^{\beta_k} \frac{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}}\big)^2\Big)^{1/2} \le C_{22}\Big(\sum_{k=1}^{n} \big((t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}} t^{\beta_k + \frac{1-\alpha}{2}}\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$\le C_{23}(T)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

$$\big|e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}} - e^{-\frac{a_0}{1+\beta_0} t_1^{1+\beta_0}}\big|$$

$$= |a_0| \int_{t_1}^{t} \tau^{\beta_0} \frac{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}} d\tau \le C_{24}(T)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

With the help of the obtained inequalities we estimate the difference (45)

$$|\Delta_2| \le C_{25}\Big(\sum_{k=1}^{n} |\partial^2_{y_i y_k} v_1(y,t)|_{D_T} |h(t)-h(t_1)| + [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} (t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$+|\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_T} (t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big) \le$$

$$\le C_{26}\Big(\sum_{k=1}^{n} |\partial^2_{y_i y_k} v_1(y,t)|_{D_T} + [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} + |\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_T}\Big)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

and from here we shall have

$$[\partial_{x_i} u_1(x,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} \leq C_{27}\Big(\sum_{k=1}^{n} |\partial^2_{y_i y_k} v_1(y,t)|_{D_T} + [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} +$$

$$+|\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_T}\Big)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \ i=1,...,n. \tag{46}$$

Now we compose the difference taking into consideration formula (43)

$$\Delta_3 := \partial_t u_1(x,t) - \partial_{t_1} u_1(x,t_1) =$$

$$= \Big(- \sum_{k=1}^{n} \big(\partial_{x_k} v_1(x-h(t),t) - \partial_{x_k} v_1(x-h(t_1),t)$$

$$+\partial_{x_k} v_1(x-h(t_1),t) - \partial_{x_k} v_1(x-h(t_1),t_1)\big) a_k t^{\beta_k}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} v_1(x-h(t_1),t_1) a_k (t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k})$$

$$+\big(\partial_{t^*} v_1(x-h(t),t^*)|_{t^*=t} - \partial_t v_1(x-h(t_1),t)\big)$$

$$+\big(\partial_t v_1(x-h(t_1),t) - \partial_{t^*} v_1(x-h(t_1),t^*)|_{t^*=t_1}\big) \tag{47}$$

$$-\big(v_1(x-h(t),t) - v_1(x-h(t_1),t) + v_1(x-h(t_1),t) - v_1(x-h(t_1),t_1)\big) a_0 t^{\beta_0}$$

$$-v_1(x-h(t_1),t_1) a_0 (t^{\beta_0} - t_1^{\beta_0})\Big)\, e^{\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}}$$

$$+\Big(- \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} v_1(x-h(t_1),t_1) a_k t_1^{\beta_k} + \partial_{t^*} v_1(x-h(t_1),t^*)|_{t^*=t_1}$$

$$-v_1(x-h(t_1),t_1) a_0 t_1^{\beta_0}\Big)\big(e^{\frac{a_0}{1+\beta_0} t^{1+\beta_0}} - e^{\frac{a_0}{1+\beta_0} t_1^{1+\beta_0}}\big).$$

All the differences in (47) are evaluated as above, with the exception of the following one: $t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k}$. We evaluate this difference

$$\Delta_4 := t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k} = \beta_k \int_{t_1}^{t} \frac{a\tau}{\tau^{1-\beta_k-\alpha/2+\alpha/2}} \leq$$

$$\leq C_{28}\frac{1}{t^{\alpha/2-\beta_k}}(t-t_1)^{\alpha/2},\ k=1,...,n,0,\ t_1\in(t/2,t),\ \alpha/2-\beta_k>0.$$

Let $\beta=\min(\beta_1,...,\beta_n,\beta_0)$, then

$$|\Delta_3|\leq C_{29}\Big(1+\frac{1}{t^{\alpha/2-\beta}}\Big)|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}(t-t_1)^{\alpha/2}$$

and

$$\sup_{t\leq T}t^{\alpha/2-\beta}[\partial_t u_1(x,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D'_t}\leq C_{30}|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T},\ D'_t=D\times(t/2,t). \tag{48}$$

Gathering the estimates (42), (44), (46), (48) and applying (39) for $v_1(y,t)$, we obtain the estimate (34)

$$|u_1(x,t)|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T}\leq C_{31}|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}\leq C_{32}|u_0|^{(2+\alpha)}_{D}.$$

We see from the formula (48) that the weighted term in the norm (5) is appeared by the derivative $\partial_t u_1(x,t)$ and more exactly by the coefficients $t^{\beta_k},\ k=1,...,n,\ t^{\beta_0}$ in the equation (19).

Now we prove the estimate (35) for the function $u_2(x,t)$ determined by the formula (38).

We have

$$u_2(x,t)=v_2(x-h(t),t)e^{-\frac{a_0}{1+\beta}t^{1+\beta}},$$

where $v_2(y,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\ y\ \ \ \ \ \ t}(\overline{D}_T)$ and the estimate (40) for $v_2(y,t)$ is fulfilled.

The function $u_2(x,t)$ satisfies the same estimates as $u_1(x,t)$. But $u_2(x,t)|_{t=0}=0$ unlike of $u_1(x,t)|_{t=0}=u_0(x)$.

To get rid of the singularities generated by the coefficients $t^{\beta_k},\ k=1,...,n,\ t^{\beta_0}$ we shall obtain the estimates of the functions $|v_2(y,t)|,\ |\partial_{y_i}v_2(y,t)|$, where $v_2(y,t)$ is determined by the formula (38). Due to the condition (3) for the coefficients a_{ij} and consequently for $a^{ij},\ i,j=1,...,n$, we have

$$|v_2(y,t)|\leq C_{33}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D|f_1(\eta,\tau)|\frac{e^{-\frac{c_1(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{n/2}}d\eta\leq C_{34}|f(y,t)|_{D_T}t, \tag{49}$$

$$|\partial_{y_i}v_2(y,t)|\leq C_{35}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D|f_1(\eta,\tau)-f_1(y,\tau)|\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}}e^{-\frac{c_1(y-\eta)^2}{8(t-\tau)}}d\eta\leq$$

$$\leq C_{36}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}},$$

$$|\partial_{y_i} v_2(y,t)| \leq C_{37}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \tag{50}$$

$$|\partial^2_{y_i y_j} v_2(y,t)| \leq C_{38}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D |f_1(\eta,\tau) - f_1(y,\tau)| \frac{1}{(t-\tau)^{n/2+1}} e^{-\frac{c_1(y-\eta)^2}{8(t-\tau)}} d\eta \leq$$

$$\leq C_{39}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\alpha/2}, \ i,j = 1,\dots,n, \ c_1 = \mathrm{const} > 0.$$

We compose the same difference for $\partial_t u_2(x,t)$ as (47) for $\partial_t u_1(x,t)$ and estimate the terms with the difference $|t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k}|$, $k = 1,...,n,0$ taking into consideration the estimates (49), (50)

$$|\partial_{x_k} v_2(x-h(t_1),t_1)||t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k}| \leq C_{40}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{1}{t^{\alpha/2-\beta_k}}(t-t_1)^{\alpha/2} \leq$$

$$\leq C_{41}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} T^{1/2+\beta_k}(t-t_1)^{\alpha/2}, \ k = 1,...,n,$$

$$|v_2(x-h(t_1),t_1))|\,|t^{\beta_k} - t_1^{\beta_k}| \leq C_{42}|f(y,t)|_{D_T} t \frac{1}{t^{\alpha/2-\beta_0}}(t-t_1)^{\alpha/2} \leq$$

$$\leq C_{43}|f(y,t)|_{D_T} T^{1+\beta_0-\alpha/2}(t-t_1)^{\alpha/2},$$

then we shall have

$$[\partial_t u_2(x,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leq C_{44}|v_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}. \tag{51}$$

We apply the estimates (42), (44), (46) for $u_1(x,t)$ which are valid also for $u_2(x,t)$, (51), and then we make use of the estimate (40) for $v_2(y,t)$, then we shall have an inequality

$$|u_2(x,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leq C_{45}|v_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leq C_{46}|f(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T}$$

which is the estimate (35). □

References

1 Gevrey M. Sur les aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Pur. Appl. – 1913. – Ser 6., V. 9., No. 4. – P. 305-471.

2 Kamynin L.I. To the theory of Gevrey for parabolic potentials. V. // Differents. equations. – 1972. – V. 7, No. 3. – P. 494-509 (in Russian).

3 Kamynin L.I. To the theory of Gevrey for parabolic potentials. Vi. // Differents. equations. – 1972. – V. 8, No. 6. – P. 1015-1025 (in Russian).

4 Baderko E.A. On the solution of the first boundary value problem for parabolic equations with the help of the simple layer potential // DAN USSR. – 1985. – V. 283, No. 1. – P. 11-13 (in Russian).

5 Baderko E.A. Solution of the problems for linear parabolic equations of arbitrary order in non-smooth domains by the method of boundary integral equations // Diss. Dr. Phys.-Math. Sciences. – Moscow: MGU, 1992 (in Russian).

6 Baderko E.A. Boundary-value problems for a parabolic equation and boundary integral equations // Differents. equations. – 1992. – V. 28, No. 1. – P. 17-23 (in Russian).

7 Cherepova M.F. On the estimates of the second order of spatial derivatives for a parabolic potential of a simple layer // Differ. the equations. – 1996. – V. 32, No. 4. – P. 445-449 (in Russian).

8 Cherepova M.F. Boundary-value problems for parabolic equations of the arbitrary order in weighted Hölder spaces // Summary of doct. diss. – M., 2010 (in Russian).

9 Mikhailov V.P. Theorem of existence and uniqueness of a solution of a boundary value problem for the parabolic equation in the domain with special points on the boundary // Tr. MIAN SSR. – 1967 – V.91. – P. 47-58 (in Russian).

10 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. – M.: "Science ", 1967. – 736 p. (in Russian).

Бижанова Г.И. ЗІЛДЕНГЕН ГЕЛЬДЕР КЕҢІСТІГІНДЕ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІН ЗЕРТТЕУ

Гельдер кеңістігінде есептің шешімін алу үшін кіші мүшелеріндегі шектелген коэффициенттері бар параболалық теңдеулер үшін талап етілген кіші сыптығырлығы бар Коши есебі зерттеледі. Бұл уақыттың бастапқы уақытындағы шешімнің сингулярлығына алып келеді. Есептің айқын түрдегі шешімі табылды, шешім үшін зілденген Гельдер кеңістігі орнатылды. Осы зілденген Гельдер кеңістігінде шешімінің бар болуы, бағалауы және жалғыз болуы дәлелденді.

Кілттік сөздер. Коши есебі, параболалық теңдеу, бар болуы, бағалаулар, шешімнің жалғыз болуы, зілденген Гельдер кеңістігі.

Бижанова Г.И. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА

Изучается задача Коши для параболического уравнения с ограниченными коэффициентами при младших членах, имеющими меньшую гладкость, чем это требуется, чтобы получить решение задачи в пространстве Гельдера. Это приводит к сингулярности решения в начальный момент времени. Найдено решение задачи в явном виде, установлено весовое пространство Гельдера для решения. Доказаны существование, оценка и единственность решения в этом весовом пространстве Гельдера.

Ключевые слова. Задача Коши, параболическое уравнение, существование, оценки, единственность решения, весовое пространство Гельдера.

Bizhanova G.I.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010 Almaty, Kazakhstan, Pushkin str., 125,
E-mail: galina_math@mail.ru, bizhanova@math.kz

Received 10.09.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 34–42.

МРНТИ 27.31.44

ABOUT ONE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN A DEGENERATING DOMAIN WITH TIME-DEPENDENT BOUNDARIES

M.T. Jenaliyev, M. Yergaliyev

Abstract. In the paper we consider a coefficient inverse problem for the heat equation in a degenerating angular domain with time dependent boundaries. It is shown that with the help of transformations of variables and the desired function, the inverse problem for the heat equation in the degenerating angular domain with two time-dependent boundaries can be reduced to a problem for the heat equation in the degenerating angular domain but with one time-dependent boundary. For the latter problem the criterion of existence of the solution is shown.

Keywords. Coefficient inverse problem, heat equation, degenerating domain.

1 Introduction

The inverse problems of the kind which we will consider were investigated in the papers [1], [2]. In these papers it is assumed that the movable boundaries move according to the law obeying Holder class and the domain does not degenerate and the time interval is limited. The uniqueness and existence of the solution of the inverse problem where the required coefficient is a continuous function are established and numerical solutions are obtained in these papers.

The peculiarity of our study is that we consider the inverse problem for the heat equation in the degenerating angular domain. For the sake of simplicity and for the purpose of showing the effect of the degeneration of the domain, we consider the problem, where, firstly, the moving part of the boundary changes

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K65, 35K10

Funding: The work is supported by the grant projects AP05130928 (2018–2020), AP05132262 (2018–2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

linearly; secondly, the boundary value problem is completely homogeneous; thirdly, the time interval is semi-bounded. In the papers [3], [4] we investigated the inverse problem for the heat equation in the angular domain. In this work we consider a coefficient inverse problem for the heat equation in a degenerating domain with time-dependent boundaries.

2 Statement of the problem

In the domain $G_T = \{(x,t)| \ -k_1 t < x < k_2 t, \quad 0 < t < T, \}$, $T < +\infty$, we consider an inverse problem of finding a coefficient $\lambda(t)$ and a function $u(x,t)$ for following heat equation:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \lambda(t)u(x,t), \tag{1}$$

with homogeneous boundary conditions

$$u(x,t)|_{x=-k_1 t} = 0, \quad u(x,t)|_{x=k_2 t} = 0, \ 0 < t < T, \tag{2}$$

suspect to the overspecification

$$\int_{-k_1 t}^{k_2 t} u(x,t)dx = E(t), \quad |E(t)| \geq \delta > 0, \ 0 < t < T, \tag{3}$$

where $E(t) \in L_\infty(0,T)$ is a given function and $k_1, k_2 > 0$.

3 Transformations and auxiliary problems

3.1 Transformations

Using the transformations:

$$x_1 = (k_1 + k_2)x + (k_1 + k_2)k_1 t, \quad t_1 = (k_1 + k_2)^2 t, \tag{4}$$

the boundary value problem (1)–(3) in the domain G_T is reduced to a boundary value problem in the domain $G_1 = \{(x_1, t_1)|\, 0 < x_1 < t_1, \ 0 < t_1 < T_k = (k_1 + k_2)^2 T\}$:

$$u_{1t_1}(x_1,t_1) + \frac{k_1}{k_1 + k_2} u_{1x_1}(x_1,t_1) =$$
$$= u_{1x_1x_1}(x_1,t_1) - \lambda_1(t_1)u_1(x_1,t_1), \{x_1, t_1\} \in G_1, \tag{5}$$

where $\lambda_1(t_1) = \frac{1}{(k_1+k_2)^2}\lambda(t_1)$, with homogeneous boundary conditions

$$u_1(x_1,t_1)|_{x_1=0} = 0, \quad u_1(x_1,t_1)|_{x_1=t_1} = 0, \; 0 < t_1 < T_k, \tag{6}$$

suspect to the overspecification

$$\int_0^{t_1} u_1(x_1,t_1)dx_1 = E_1(t_1), \quad |E_1(t_1)| \geq \delta > 0, \; 0 < t_1 < T_k, \tag{7}$$

where

$$E_1(t_1) = (k_1+k_2)E\left(\frac{t_1}{(k_1+k_2)^2}\right),$$

$$u(x,t) = u\left(\frac{1}{k_1+k_2}x_1 - \frac{k_1}{(k_1+k_2)^2}t_1, \frac{1}{(k_1+k_2)^2}t_1\right) = u_1(x_1,t_1).$$

To transform the equation (5), we introduce new function

$$u_1(x_1,t_1) = \exp\left\{-\frac{k_1^2}{4(k_1+k_2)^2}t_1 + \frac{k_1}{2(k_1+k_2)}x_1\right\} \cdot u_2(x_1,t_1). \tag{8}$$

Then we obtain a linear homogeneous boundary value problem for the heat equation in the angular domain G_1 :

$$u_{2t_1}(x_1,t_1) = u_{2x_1x_1}(x_1,t_1) - \lambda_1(t_1)u_2(x_1,t_1), \{x_1,t_1\} \in G_1, \tag{9}$$

with homogeneous boundary conditions

$$u_2(x_1,t_1)|_{x_1=0} = 0, \quad u_2(x_1,t_1)|_{x_1=t_1} = 0, \; 0 < t_1 < T_k, \tag{10}$$

suspect to the overspecification

$$\int_0^{t_1} u_2(x_1,t_1)dx_1 = E_1(t_1), \quad |E_1(t_1)| \geq \delta > 0, \; 0 < t_1 < T_k. \tag{11}$$

3.2 The auxiliary problem

In accordance to the problem (9)–(11) we will set an auxiliary inverse problem of finding a coefficient $\lambda_2(t_1)$ and a function $v(x_1,t_1)$ in the domain $G_\infty = \{(x_1,t_1)|\; 0 < x_1 < t_1, \;\; t_1 > 0\}$:

$$v_{t_1}(x_1,t_1) = v_{x_1x_1}(x_1,t_1) - \lambda_2(t_1)v(x_1,t_1), \tag{12}$$

with homogeneous boundary conditions

$$v(x_1, t_1)|_{x_1=0} = 0, \quad v(x_1, t_1)|_{x_1=t_1} = 0, \; t_1 > 0, \tag{13}$$

suspect to the overspecification

$$\int_0^{t_1} v(x_1, t_1)dx_1 = \tilde{E}(t_1), \quad t_1 > 0, \tag{14}$$

$$\tilde{E}(t_1) = \begin{cases} E_1(t_1), & 0 < t_1 < T_k, \\ E_2(t_1), & T_k \le t_1 < \infty, \end{cases} \tag{15}$$

where $|E_2(t_1)| \ge \delta > 0$ is an arbitrary bounded function.

Remark 1. *Solving in G_∞ the problem (12)–(15) and restricting down its solution to the domain G_1, we can find the solution $\{u_2(x_1, t_1), \lambda_1(t_1);\, (x_1, t_1) \in G_1\}$ of the inverse problem (9)–(11).*

3.3 Equivalent problem

In the problem (12)–(15) we replace the required function by the following transformation

$$w(x_1, t_1) = \hat{\lambda}_2(t_1)v(x_1, t_1), \text{ where } \hat{\lambda}_2(t_1) = \exp\left\{\int_0^{t_1} \lambda_2(s)ds\right\}. \tag{16}$$

Then the inverse problem (12)–(15) is reduced to a problem for the homogeneous heat equation:

$$w_{t_1}(x_1, t_1) = w_{x_1x_1}(x_1, t_1), \quad \{x_1, t_1\} \in G_\infty, \tag{17}$$

with homogeneous boundary conditions

$$w(x_1, t_1)|_{x=0} = 0, \quad w(x_1, t_1)|_{x_1=t_1} = 0, \; t_1 > 0, \tag{18}$$

subject to the overspecification

$$\int_0^{t_1} w(x_1, t_1)dx_1 = \hat{\lambda}_2(t_1)\tilde{E}(t_1), \quad |\tilde{E}(t_1)| \ge \delta > 0, \; t_1 > 0. \tag{19}$$

4 Main result

4.1 The solution of the inverse problem (17)–(19)

It follows from our previous results [5], [6], [7], [8] that the homogeneous boundary value problem (17)–(18) along with a trivial solution has a nontrivial solution up to a constant factor defined by the formula:

$$w(x_1,t_1)=w_+(x_1,t_1)+w_-(x_1,t_1), \tag{20}$$

where

$$w_\pm(x_1,t_1)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1}\frac{x_1\pm\tau}{(t_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau, \tag{21}$$

where function $\varphi(t_1)$ is defined according to the formulas:

$$\varphi(t_1)=C\varphi_0(t_1),\quad C=\text{const}\neq 0, \tag{22}$$

$$\varphi_0(t_1)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\exp\left\{-\frac{t_1}{4}\right\}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t_1}}{2}\right)\right], \tag{23}$$

moreover, the function $\varphi(t_1)$ belongs to the following class:

$$\theta(t_1)\varphi(t_1)\in L_\infty(R_+),\text{i.e. }\varphi(t_1)\in L_\infty(R_+;\theta(t_1)), \tag{24}$$

where

$$\theta(t_1)=\begin{cases}\sqrt{t_1}\exp\left\{\frac{t_1}{4}\right\}, & \text{if}\quad 0<t_1\leq T_k,\\ 1, & \text{if}\quad T_k<t_1<+\infty,\end{cases} \tag{25}$$

and T_k does not necessarily coincide with T.

From (20)–(22) for the solution $w(x_1,t_1)=Cw_0(x_1,t_1)$ of the homogeneous boundary value problem (17)–(18) we obtain the following representation:

$$w_0(x_1,t_1)=w_{0+}(x_1,t_1)+w_{0-}(x_1,t_1), \tag{26}$$

where

$$w_{0\pm}(x_1,t_1)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1}\frac{x_1\pm\tau}{(t_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)d\tau. \tag{27}$$

Further using the representation (26)–(27) for the integral condition (19), we get:

$$\int_0^{t_1} w_0(x_1,t_1)dx = \int_0^{t_1} w_{0+}(x_1,t_1)dx_1 +$$
$$+\int_0^{t_1} w_{0-}(x_1,t_1)dx_1 = \hat\lambda_{20}(t_1)\tilde E(t_1). \tag{28}$$

It is obvious that $\hat\lambda_2(t_1) = C\hat\lambda_{20}(t_1)$. By a commutativity property in the integrals of the formula (28), in the sense of the Dirichlet formula, we have

$$\int_0^{t_1} w_{0\pm}(x_1,t_1)dx_1 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1}\varphi_0(\tau)d\tau\int_0^{t_1}\frac{x_1\pm\tau}{(t_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\}dx_1. \tag{29}$$

Let us calculate the interior integrals from (29). We get

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1}\frac{x_1\pm\tau}{(t_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\}dx_1 = \left\| y = \frac{(x_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\| =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_1-\tau)}}\left(\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t_1-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(t_1\pm\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\}\right). \tag{30}$$

Then from (19), (28)–(30) we obtain

$$\int_0^{t_1} w_0(x_1,t_1)dx_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t_1}\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}}\left[2\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t_1-\tau)}\right\} -\right.$$
$$\left. -\exp\left\{-\frac{(t_1+\tau)^2}{4(t_1-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{t_1-\tau}{4}\right\}\right]\varphi_0(\tau)d\tau = \hat\lambda_{20}(t_1)\tilde E(t_1). \tag{31}$$

From ratios (16), (19), (31) and $w(x_1,t_1) = Cw_0(x_1,t_1)$ we find the required coefficient

$$\lambda_2(t_1) = \frac{d\,\ln(\hat\lambda_2(t_1))}{d\,t_1} = \frac{(\hat\lambda_2(t_1))'}{\hat\lambda_2(t_1)} = \frac{(C\hat\lambda_{20}(t_1))'}{C\hat\lambda_{20}(t_1)} = \lambda_{20}(t_1), \tag{32}$$

where we have used the equality

$$\left(\frac{\int\limits_0^{t_1} w(x_1,t_1)d\,x_1}{\tilde E(t_1)}\right)' : \frac{\int\limits_0^{t_1} w(x_1,t_1)d\,x_1}{\tilde E(t_1)} = \left(\frac{\int\limits_0^{t_1} w_0(x_1,t_1)d\,x_1}{\tilde E(t_1)}\right)' : \frac{\int\limits_0^{t_1} w_0(x_1,t_1)d\,x_1}{\tilde E(t_1)}. \tag{33}$$

Thus, from (26)–(27), (31)–(33) we obtain the following theorems.

Theorem 1. *The inverse problem (17)–(19) has a solution* $\{w(x_1,t_1), \lambda_2(t_1)\}$ *if and only if the following condition is satisfied*

$$\operatorname{sign}\{E(t_1)\} = \operatorname{sign}\{I[\varphi_0(t_1), t_1]\}, \ \forall t_1 \in (0,\infty), \tag{34}$$

where

$$I[\varphi_0(t_1), t_1] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}} \left[2\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t_1-\tau)}\right\} - \right.$$
$$\left. - \exp\left\{-\frac{t_1-\tau}{4}\right\} \left(\exp\left\{-\frac{t_1\tau}{t_1-\tau}\right\} + 1 \right) \right] \varphi_0(\tau) d\tau, \ t_1 \in (0,\infty), \tag{35}$$

$$\varphi_0(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \exp\left\{-\frac{t_1}{4}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t_1}}{2}\right)\right], \ t_1 \in (0,\infty). \tag{36}$$

Theorem 2. *Let the conditions of theorem 1 be satisfied. Then the inverse problem (9)–(11) has the following solution* $\{u_2(x_1,t_1),\ \lambda_1(t_1)\}$*: the coefficient* $\lambda_1(t_1) = \lambda_0(t_1)$ *is determined uniquely by the formula (32)–(33) by restricting it down to a finite interval* $(0, T_k)$ *and the solution* $u_2(x_1,t_1)$ *is found by means of the restriction of the function:*

$$v(x_1,t_1){=}Cv_0(x_1,t_1), \ \text{where} v_0(x_1,t_1){=}[\hat\lambda_{10}(t_1)]^{-1} w_0(x_1,t_1), C = \text{const}, \tag{37}$$

on the bounded triangle G_1*, where* $w_0(x_1,t_1)$ *is defined by formulas (26)–(27).*

Theorem 3. *For the solution* $\{u_2(x_1,t_1), \lambda_1(t_1)\}$ *of the inverse problem (9)–(11) using backward the substitutions (4) and (8), we get the solution of the inverse problem (1)–(3).*

Remark 2. *According to formulas (23), (26)–(27), the solution* $w_0(x_1,t_1)$ *is a nonnegative function. It should be noted that according to the criterium (34) the function* $\tilde E(t_1)$ *from (19) is a variable sign function, since the integral (28) is variable sign function and the coefficient* $\hat\lambda_2(t_1) = C\hat\lambda_{20}(t_1)$ *(16), (32) is a positive function.*

In the work [3] we have showed that the solution of the equivalent problem under an additional condition is bounded. Also it has been showed that the solution of the inverse problem (9)–(11) and required function $\lambda_1(t_1)$ have singularity at small values of the variable t. Therefore it should be noted that the solution of the inverse problem $\{u(x,t), \lambda(t)\}$ also has the singularity at small values of the variable t.

6 Conclusion

In the paper we have considered the inverse problem for the heat equation in the degenerating angular domain with time-dependent boundaries. We have shown that the inverse problem for the homogeneous heat equation with homogeneous boundary conditions has the nontrivial solution $\{u(x,t),\, \lambda(t)\}$ consistent with the integral condition.

References

1 Zhou J, Xu Y. Direct and inverse problem for the parabolic equation with initial value and time-dependent boundaries // Applicable Analysis. – 2016. – No. 95(6). – P. 1307-1326.

2 Zhou J, Li H. Ritz-Galerkin method for solving an inverse problem of parabolic equation with moving boundaries and integral condition // Applicable Analysis. – 2018. – P. 1-15.

3 Jenaliyev M.T., Yergaliyev M.G. On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain // AIP Conference Proceedings. – 2018. – P. 020018.

4 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Yergaliyev M.G. On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain // Applicable Analysis. – 2018. – P. 735-752.

5 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. On boundary value problem of heat conduction with free boundary (in Russian) // Nonclassical Equations of Mathematical Physics. – 2012. – P. 29-44.

6 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. – 2015. – V. 2015(71). – P. 1-14.

7 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity (in Russian) // Differential Equations. – 2011. – No. 47. – P. 231-243.

8 Amangaliyeva M.M., Dzhenaliev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain (in Russian) // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – No. 56(71). – P. 982-995.

Жиенәлиев М.Т., Ерғалиев М.Ғ. ШЕКАРАЛАРЫ УАҚЫТҚА ТӘУЕЛДІ АЗЫНҒАН ОБЛЫСТАҒЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН КОЭФФИЦИЕНТТІ КЕРІ ЕСЕП ТУРАЛЫ

Жұмыста біз шекаралары уақытқа тәуелді азынған облыстағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған коэффициентті кері есепті қарастырамыз. Жұмыста тәуелсіз айнымалыларды және ізделінді функцияны түрлендіру арқылы екі шекарасы да уақытқа тәуелді азынған облыстағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған кері есеп шекарасының біреуі ғана уақытқа тәуелді болатын азынған облыстағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған есепке келтіруге болатындығы көрсетілді. Соңғы есеп үшін шешімділік критерийі алынды.

Кілттік сөздер. Коэффициенттік кері есеп, жылуөткізгіштік теңдеуі, азынған облыс.

Дженалиев М.Т., Ергалиев М.Г. ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ С ГРАНИЦАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

В работе мы рассматриваем коэффициентную обратную задачу для уравнения теплопроводности в вырождающейся области с границами, зависящими от времени. Было показано, что при помощи преобразования независимых переменных и искомой функции обратная задача для уравнения теплопроводности в вырождающейся области с двумя границами, зависящими от времени, может быть сведена к задаче для уравнения теплопроводности в вырождающейся угловой области, но уже с одной границей, зависящей от времени. Для последней задачи получен критерий разрешимости.

Ключевые слова. Коэффициентная обратная задача, уравнение теплопроводности, вырождающаяся область.

Jenaliyev M.T.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Pushkin str., 125. E-mail: muvasharkhan@gmail.com
Yergaliyev M.
al-Farabi Kazakh National University
050010, Almaty, al-Farabi Ave., 71
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Pushkin str., 125.
E-mail: ergaliyev.madi.g@gmail.com
Received 17.09.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 43–51.

МРНТИ 27.29.15:27.29.17:27.29.19

A METHOD FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

D.S. Dzhumabaev

Abstract. An interval is divided into N parts, the values of a solution at the beginning points of the subintervals are considered as additional parameters, and an ordinary differential equation is reduced to the Cauchy problems on the subintervals for differential equations with parameters. Using the solutions to the Cauchy problems, boundary condition, and continuity conditions of a solution at the interior points of the partition, the system of algebraic equations with respect to parameters is composed. It is shown that the solvability of boundary value problems is equivalent to the solvability of the system composed. A method for solving nonlinear boundary value problems based on construction and solution of this system is proposed.

Keywords. Solvability criteria, algorithm for solving, nonlinear boundary value problems.

In the present paper, we consider nonlinear boundary value problem (BVP) for the ordinary differential equation (ODE)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

where $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ and $g : R^n \times R^n \to R^n$ are continuous functions, $||x|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B10, 35G16, 35Q92.

Funding: The work is supported by the grant projects AP05131220 (2018–2020), AP05131220 (2018–2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

Let $C([0,T],R^n)$ denote the space of continuous functions $x:[0,T]\to R^n$ with the norm $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$. A solution to the problem (1), (2) is a continuously differentiable on $(0,T)$ function $x(t)\in C([0,T],R^n)$ satisfying differential equation (1) and boundary condition (2).

Boundary value problems for ODEs have been studied by numerous authors (see [1]–[10] and references cited therein).

Due to nonlinearity of the problem (1), (2) we come across difficulties both in studying the qualitative properties of BVP and in finding its solution.

The aim of the paper is to develop a constructive method for investigating and solving nonlinear BVPs. To this end, we apply parametrization's method [11], [12]. Take a partition $\Delta_N : t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. The restrictions of $x(t)$ to the r-th subinterval $[t_{r-1},t_r)$, we denote by $x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$. Introducing the parameters $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, and making the substitutions $u_r(t) = x_r(t)-\lambda_r$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, we reduce nonlinear BVP (1), (2) to the nonlinear BVP with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = f(t,u_r+\lambda_r),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N}, \tag{3}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0,\ r=\overline{1,N}, \tag{4}$$

$$g[\lambda_1,\lambda_N + \lim_{t\to T-0} u_N(t)] = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0,\ p=\overline{1,N-1}, \tag{6}$$

where (6) are continuity conditions for solutions to Eq. (1) at the interior points of partition Δ_N.

Denote by $C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ the space of function systems $x[t] = (x_1(t),x_2(t),...,x_N(t))$, where functions $x_r:[t_{r-1},t_r)\to R^n$ are continuous and have the finite left-sided limits $\lim\limits_{t\to t_r-0} x_r(t)$ for all $r=\overline{1,N}$, with the norm $||x[\cdot]||_2 = \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)} ||x_r(t)||$.

A solution to the problem (3)–(6) is a pair $(\lambda^*,u^*[t])$ with $\lambda^* = (\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_N^*)\in R^{nN}$ and $u^*[t] = (u_1^*(t),u_2^*(t),...,u_N^*(t))\in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$. The functions $u_r^*(t)$, $r=\overline{1,N}$, satisfy differential equations (3), boundary condition (5), and continuity conditions (6) for $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r=\overline{1,N}$. These functions satisfy initial conditions (4) as well.

Let a vector $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ be given, and let $u_r(t, \lambda_r^{(0)})$ be a unique solution to the Cauchy problem on subinterval

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(0)}),\ t \in [t_{r-1}, t_r],\ u_r(t_{r-1}) = 0, \tag{7}$$

for $r = \overline{1, N}$.

Using $\lambda^{(0)}$ and $u_r(t, \lambda_r^{(0)})$, $r = \overline{1, N}$, we compose the function $x^{(0)}(t)$ by the equalities $x^{(0)}(t) = \lambda_p^{(0)} + u_p(t, \lambda_p^{(0)})$, for $t \in [t_{p-1}, t_p]$, $p = \overline{1, N}$, and $x^{(0)}(t) = \lambda_N^{(0)} + u_N(t, \lambda_N^{(0)})$ for $t \in [t_{N-1}, t_N]$.

Condition $\mathcal{A}$. *Suppose that for any $r = \overline{1, N}$ and $\lambda_r \in S(\lambda_r^{(0)}, \rho_0) = \{\lambda \in R^n : ||\lambda_r - \lambda_r^{(0)}|| < \rho_0\}$, the Cauchy problem (3), (4) has a unique solution $u_r(t, \lambda_r)$, such that the system of functions $u[t, \lambda] = (u_1(t, \lambda_1), u_2(t, \lambda_2), ..., u_N(t, \lambda_N))$ belongs to $C([0, T], \Delta_N, R^{nN})$, and $||u[\cdot, \lambda] - u[\cdot, \lambda^{(0)}]||_2 < \rho_0$.*

It is clear that under Condition A, the solvability of nonlinear BVP (1), (2) is equivalent to the existence of a solution to the system of nonlinear algebraic equations

$$g[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda_N)] = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_p + \lim_{t \to t_p - 0} u_p(t, \lambda_p) - \lambda_{p+1} = 0,\ p = \overline{1, N-1}. \tag{9}$$

We rewrite the system of equations (8), (9) in the form

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0,\ \lambda \in R^{nN}. \tag{10}$$

If Eq.(10) has a solution $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_N^*) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$, then the pair $(\lambda^*, u[t, \lambda^*])$ is a solution to the problem (3)–(6). Therefore, the function $x^*(t)$ given by the equality $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t, \lambda_r^*)$, for $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $\overline{1, N}$, and $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N(t, \lambda_N^*)$ will be a solution to the problem (1), (2).

Thus, in order to solve nonlinear BVP (1), (2) it is enough to find a solution to the system of nonlinear algebraic equations (10) and solve the Cauchy problem (3), (4) for finding values of parameters.

To solve nonlinear system of algebraic equations (10), we should find $Q_*(\widehat{\lambda})$ and $\dfrac{\partial Q_*(\widehat{\lambda})}{\partial \lambda}$ for the given $\widehat{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$. As we see from (8), (9), to find the value $Q_*(\widehat{\lambda})$ for $\lambda = \widehat{\lambda}$, it is necessary to solve the Cauchy problems on subintervals:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \widehat{\lambda}_r), \ u_r(t_{r-1}) = 0, \ t \in [t_{r-1}, t_r], \ r = \overline{1, N},$$

and find their solutions $u_r(t, \widehat{\lambda}_r)$, $r = \overline{1, N}$. Then,

$$Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda}) = \begin{pmatrix} g[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T, \widehat{\lambda}_N)] \\ \widehat{\lambda}_1 + u_1(t_1, \widehat{\lambda}_1) - \widehat{\lambda}_2 \\ \dots \\ \widehat{\lambda}_{N-1} + u_{N-1}(t_{N-1}, \widehat{\lambda}_{N-1}) - \widehat{\lambda}_N \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Condition $\mathcal{B}$. *The functions $f(t, x)$ and $g(v, w)$ have the uniformly continuous partial derivatives $f'_x(t, x)$ and $g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$ in $G(x^{(0)}(t), 2\rho_0) = \{(t, x) : t \in [0, T], \ ||x - x^{(0)}(t)|| < 2\rho_0\}$ and $S(x^{(0)}(0), 2\rho_0) \times S(x^{(0)}(T), 2\rho_0)$, respectively.*

In order to find $\dfrac{\partial u_r(t, \lambda_r)}{\partial \lambda_r}$, $r = \overline{1, N}$, we again consider the Cauchy problems with parameters:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \ u_r(t_{r-1}) = 0, \ t \in [t_{r-1}, t_r], \ r = \overline{1, N}.$$

Differentiating both sides of differential equations and initial conditions with respect to λ_r, we have

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_r(t, \lambda_r)}{\partial \lambda_r}\right) = f'_x(t, u_r(t, \lambda_r) + \lambda_r)\frac{\partial u_r(t, \lambda_r)}{\partial \lambda_r} + f'_x(t, u_r(t, \lambda_r) + \lambda_r), \ t \in [t_{r-1}, t_r],$$

and

$$\frac{\partial u_r(t, \lambda_r)}{\partial \lambda_r}\Big|_{t=t_{r-1}} = 0, \ r = \overline{1, N}.$$

Therefore, $\dfrac{\partial u_r(t, \widehat{\lambda}_r)}{\partial \lambda_r}$ is a unique solution to the matrix Cauchy problem for the linear ODE

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{A}_r(t) z + \widehat{A}_r(t), \ z(t_{r-1}) = 0, \ t \in [t_{r-1}, t_r], \quad (12)$$

with $\widehat{A}_r(t) = f'_x(t, u_r(t, \widehat{\lambda}_r) + \widehat{\lambda}_r)$ for each $r = \overline{1, N}$. Denote by $\widehat{a}_r(\widehat{A}_r, t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N}$, the unique solution to the Cauchy problem (12).

It is clear that by virtue of Condition $\mathcal{B}$, the vector function $Q_*(\Delta_N; \lambda)$ of the dimension nN has uniformly continuous Jacobi matrix $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda})}{\partial \lambda}$: $R^{nN} \to R^{nN}$ in $S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$. Moreover, the Jacobi matrix has the form

$$\begin{pmatrix} \widehat{B} & O & O & \dots & O & \widehat{C}[I + \widehat{a}_N(\widehat{A}_N, T)] \\ I + \widehat{a}_1(\widehat{A}_1, t_1) & -I & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I + \widehat{a}_{N-1}(\widehat{A}_{N-1}, t_{N-1}) & -I \end{pmatrix} \tag{13}$$

with

$$\widehat{B} = g'_v[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T, \widehat{\lambda}_N)] \quad \text{and} \quad \widehat{C} = g'_w[\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_N + u_N(T, \widehat{\lambda}_N)]. \tag{14}$$

Thus, for the given $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, ..., \widehat{\lambda}_N) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_0)$, we find the values of the vector $Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda})$ and Jacobi matrix $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N; \widehat{\lambda})}{\partial \lambda}$ by solving Cauchy problems for ODEs on the subintervals only. Solving Cauchy problems for nonlinear ODEs determines elements of the vector, and solving Cauchy problems for linear matrix ODEs yields elements of the Jacobi matrix.

Now, we offer the following algorithm to solve the problem (1), (2). Choose $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, ..., \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ as the initial approximation and solve Eq. (9) by the iterative process

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)}, \ k = 0, 1, 2, ... \, .$$

Here $\Delta\lambda^{(k)}$ is a solution to the system of linear algebraic equations

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})}{\partial \lambda} \Delta\lambda = -\frac{1}{\alpha} Q_*(\Delta_N; \lambda^{(k)})$$

with $\alpha \geq 1$.

Step 1. a) Using vectors $u_r(t_r, \lambda_r^{(0)})$, $r = \overline{1, N}$, found by solving Cauchy problems (7), and formula (11), we find

$$Q_*(\Delta_N, \lambda^{(0)}) = \begin{pmatrix} g[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})] \\ \lambda_1^{(0)} + u_1(t_1, \lambda_1^{(0)}) - \lambda_2^{(0)} \\ \dots \\ \lambda_{N-1}^{(0)} + u_{N-1}(t_{N-1}, \lambda_{N-1}^{(0)}) - \lambda_N^{(0)} \end{pmatrix}.$$

b) Compute the $(n \times n)$-matrix $A^{(0)}(t) = f'_x(t, x^{(0)}(t))$. Solve the matrix Cauchy problems for the linear ODEs on subintervals

$$\frac{dz}{dt} = A^{(0)}(t)z + A^{(0)}(t),\ z(t_{r-1}) = 0,\ t \in [t_{r-1}, t_r],\ r = \overline{1, N},$$

and find the $(n \times n)$-matrices $a_r^{(0)}(A^{(0)}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$. Using the found matrices and (13), (14), we compose $(nN \times nN)$-Jacobi matrix

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^{(0)} & O & O & \dots & O & C^{(0)}[I + a_N^{(0)}(A^{(0)}, T)] \\ I + a_1^{(0)}(A^{(0)}, t_1) & -I & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & I + a_{N-1}^{(0)}(A^{(0)}, t_{N-1}) & -I \end{pmatrix},$$

where $B^{(0)} = g'_v[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})]$ and $C^{(0)} = g'_w[\lambda_1^{(0)}, \lambda_N^{(0)} + u_N(T, \lambda_N^{(0)})]$.

c) Solve the system of linear algebraic equations

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda} \Delta\lambda = -\frac{1}{\alpha} Q_*(\Delta_N, \lambda^{(0)}),$$

and find $\Delta\lambda^{(0)}$. Now, we determine the vector $\lambda^{(1)}$ by the equality $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}$.

d) Solve the Cauchy problems for nonlinear ODEs with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r^{(1)}),\ u_r(t_{r-1}) = 0,\ t \in [t_{r-1}, t_r],\ r = \overline{1, N},$$

and find the functions $u_r(t,\lambda_r^{(1)}),\ r=\overline{1,N}$. With the equalities $x^{(1)}(t)=\lambda_r^{(1)}+u_r(t,\lambda_r^{(1)}),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N}$, and $x^{(1)}(T)=\lambda_N^{(1)}+u_N(T,\lambda_N^{(1)})$, we define the function $x^{(1)}(t)$ piecewise continuous on $[0,T]$.

Step 2. a) Using the found $u_r(t_r,\lambda_r^{(1)}),\ r=\overline{1,N}$, and taking into account (11), we get $Q_*(\Delta_N,\lambda^{(1)})$.

b) Compute $(n\times n)$-matrix $A^{(1)}(t)=f'_x(t,x^{(1)}(t))$. Solve the matrix Cauchy problems for the linear ODEs on subintervals

$$\frac{dz}{dt}=A^{(1)}(t)z+A^{(1)}(t),\ z(t_{r-1})=0,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N},$$

and find $(n\times n)$-matrices $a_r^{(1)}(A^{(1)},t_r),\ r=\overline{1,N}$.

By formulas (13) and (14) we compose the $(nN\times nN)$-Jacobi matrix $\dfrac{\partial Q_*(\Delta_N,\lambda^{(1)})}{\partial\lambda}$.

c) By solving the system of linear algebraic equations

$$\frac{\partial Q_*(\Delta_N,\lambda^{(1)})}{\partial\lambda}\Delta\lambda=-\frac{1}{\alpha}Q_*(\Delta_N,\lambda^{(1)}),$$

we find $\Delta\lambda^{(1)}$, and we define the vector $\lambda^{(2)}$ as: $\lambda^{(2)}=\lambda^{(1)}+\Delta\lambda^{(1)}$.

d) Solve the Cauchy problems for the nonlinear ODEs with parameters on subintervals

$$\frac{du_r}{dt}=f(t,u_r+\lambda_r^{(2)}),\ u_r(t_{r-1})=0,\ t\in[t_{r-1},t_r],\ r=\overline{1,N},$$

and find the functions $u_r(t,\lambda_r^{(2)}),\ r=\overline{1,N}$. By the equalities $x^{(2)}(t)=\lambda_r^{(2)}+u_r(t,\lambda_r^{(2)}),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,N}$, and $x^{(2)}(T)=\lambda_N^{(2)}+u_N(T,\lambda_N^{(2)})$, we define the function $x^{(2)}(t)$ piecewise continuous on $[0,T]$.

Continuing iterative process, in Step k we obtain $\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\cdot,\lambda_N^{(k)})\in R^{nN}$ and $x^{(k)}(t),\ t\in[0,T]$. It is easy to see that

$$||\lambda^{(k)}-\lambda^*||\le\gamma_*||Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})||.$$

Therefore, applying Bellman-Gronwall inequality, we establish the following estimate

$$\sup_{t\in[0,T]}||x^{(k)}(t)-x^*(t)||\le\gamma_*||Q_*(\Delta_N;\lambda^{(k)})||\exp\big(L\max_{r=\overline{1,N}}(t_r-t_{r-1})\big),$$

which allows us to measure the proximity between the approximate and exact solutions after k steps of the algorithm.

References

1 Aziz A. Numerical Solutions for Ordinary Differential Equations. – New York: Academic Press, 1975. – P. 1-369.

2 Babenko K.I. Fundamentals of Numerical Analysis. – Moscow: Nauka, 1986. – P. 1-744.

3 Bakhvalov N.S. Numerical methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations. – Moscow: Mir, 1977. – P. 1-663.

4 Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems // New York, American Elsevier, 1965. – P. 1501-1503.

5 Bernfeld S.R., Lakshmikantham V. An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems. – New York: Academic Press, Mathematics in Science and Engineering. – 1974. – V. 109. – P. 1-386.

6 Butcher J.C. The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. – New York: Wiley, 1987. – P. 74-81.

7 Deuflhard P.A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting // Numer. Math. – 1974. – V. 23. – P. 289-315.

8 Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. – New York: Dover, 1992. – P. 1-192.

9 Roberts S.M., Shipman J.S. Two-Point Boundary-Value Problems // Shooting Methods. - New York: Elsevier, 1972. – P. 1-234.

10 Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary- value problems. – New York: River Edge, World Scientific, 2000.

11 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. Math. Phys. – 1989. – V. 29. – P. 34-46.

12 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // Comput. Math. Math. Phys. – 2007. – V. 47. – P. 37-61.

Джумабаев Д.С. ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУ ӘДІСІ

Аралық N бөлікке бөлінеді, шешімнің ішкі аралықтардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері қосымша параметр ретінде қарастырылады және жай дифференциалдық теңдеу параметрлері бар дифференциалдық теңдеулер үшін ішкі аралықтардағы Коши есептеріне келтіріледі. Енгізілген параметрлерге қатысты Коши есептерінің шешімдерін, шеттік шарттар мен шешімнің бөліктеудің ішкі нүктелеріндегі үзіліссіздік шарттарын пайдалана отырып алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Шеттік есептің шешілімділігінің құрылған жүйе шешілімділігіне пара-пар екендігі көрсетілді. Шеттік есептерді шешудің осы жүйелерді құруға және шешуге негізделген әдісі ұсынылды.

Кілттік сөздер. Шешілімділік критерийі, шешу алгоритмі, сызықты емес шеттік есеп.

Джумабаев Д.С. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интервал делится на N частей, значения решения в начальных точках подинтервалов рассматриваются как дополнительные параметры и обыкновенное дифференциальное уравнение сводится к задачам Коши на подинтервалах для дифференциальных уравнений с параметрами. Используя решения задачи Коши, краевые условия и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения, составляется система алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Показано, что разрешимость краевых задач эквивалентна разрешимости построенных систем. Предложен метод решения краевых задач, основанный на построении и решении этих систем.

Ключевые слова. Критерий разрешимости, алгоритм решения, нелинейная краевая задача.

Dzhumabaev D.S.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
050010, Almaty, Kazakstan, Pushkin str. 125
International Information Technology University,
050010, Almaty, Kazakstan, Dzhandosov str. 34 a
E-mail: dzhumabaev@list.ru, ddzhumabaev54@gmail.com

Received 14.09.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 52–66.

МРНТИ 39.01.77

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТОКА ТРАНСГРАНИЧНЫХ ВОД

Е.Т. Оразов

Аннотация. В данной статье рассматривается теоретико-игровая модель оптимального управления потоками суверенных вод двух государств, расположенных в бассейне одной и той же трансграничной реки. Основной вопрос здесь в том: какой расход главной реки следует ожидать в среднем многолетнем масштабе времени в створе государственной границы? Для этого строим орграфовую модель и рассчитываем потоки в сети по балансовым формулам. В качестве базовой модели управления суверенными водами двух государств в бассейне трансграничной реки будем рассматривать биматричную игру.

Ключевые слова. Трансграничные реки, боковая приточность, биматричные игры, функция выигрыша, иммитационная модель, оптимальная стратегия.

1 Содержательная модель

Пусть имеются два соседних государства, по территории которых протекает главная трансграничная река. Назовем верхнее по течению главной трансграничной реки Верхним государством, а государство расположенной ниже по течению – Нижним государством. Далее Нижнее государство будем обозначать, как Гос. 1, а Верхнее, как Гос. 2. Границу между Гос. 1 и Гос. 2 будем обозначать штрих-пунктирной линией.

Пусть далее на территории Гос. 1 формируется система малых и средних рек, которые, пересекая государственную границу, впадают в главную трансграничную реку, образуя так называемую "боковую приточность". Назовем эту систему суверенными водами Гос. 1. Аналогично систему малых и средних рек, формируемых на территории Гос. 2, образующих бо-

2010 Mathematics Subject Classification: 93B29.

Funding: Грант AP05131044, Региональный мониторинг эколого-экономической системы горнорудных месторождений Казахстана (на примере Соколово-Сарбайского ГОК).

ковую приточность главной трансграничной реки, назовем суверенными водами Гос. 2.

Пусть далее Гос. 1 в условиях полной неопределенности о стратегических планах Гос. 2 использования водных ресурсов главной трансграничной реки организует "перехват" суверенных вод на собственной территории и направляет их по искусственному каналу в главную трансграничную реку (но уже на своей территории).

Аналогично Гос. 2 в условиях полной неопределенности о стратегических планах Гос. 1 использовании "боковой приточности" организует "перехват" водных ресурсов главной трансграничной реки и направляет их вглубь своей территории по искусственному каналу.

Возникает вопрос: расход главной реки следует ожидать в среднем многолетнем масштабе времени в створе государственной границы? [1].

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, построим орграфовую модель. Зададим параметры модели в вершинах и на ребрах орграфа, затем рассчитаем потоки в сети по балансовым формулам. Для этих целей примем следующие условные обозначения и их интерпретации.

2 Условные обозначения и их интерпретации

① – гидроузел, интерпретируемый как точка концентрации суверенных вод Гос. 1 в единый поток;

W_1 – средний многолетний расход суверенных вод Гос. 1 (км^3/год); s

⑤ ← – – ② – гидроузел, интерпретируемый как точка вододеления суверенных вод Гос.1 на поток, направляемый по каналу в створ пересечения русла главной реки с государственной границей и на поток, направляемый в русло главной реки на территории Гос. 2;

– доля расхода суверенных вод, направляемая в створ государственной границы ($0 \leq s \leq 1$);

sW_1 – расход воды (км^3/год) в канале;

k_1 – коэффициент безвозвратных потерь воды в канале (в том числе водозабор по трассе канала);

$(1 - k_1) \cdot s \cdot W_1$ – расход воды в устье канала;

$(1-s)\cdot W_1$ – расход воды в водотоке миграции суверенных вод Гос. 1;

③ – гидроузел, интерпретируемый как точка концентрации суверенных вод Гос. 2 в единый поток (главную трансграничную реку);

W_2 – средний многолетний расход суверенных вод Гос. 2 (км^3/год);

④ ⟵ ③ – участок главной реки без водоотъема суверенных вод;

④ – гидроузел, интерпретируемый как точка смешивания суверенных вод Гос. 1 с суверенными водами Гос. 2;

$W_2+(1-s)\cdot W_1$ – средний многолетний расход смешанных вод;

⑥ – гидроузел, интерпретируемый как точка концентрации смешанных вод, перебрасываемых внутрь территории Гос. 2;

⑥ $<--$ ④ – искусственный канал переброски части стока главной рекивнутрь территории Гос. 2;

p – доля расхода смешанных вод, перебрасываемая на внутреннюю территорию Гос. 2;
$p\cdot[W_2+(1-s)\cdot W_1]$ – расход воды, поступающий в гидроузел 6;

⑤ – гидроузел, расположенный на территории Гос. 1 вблизи государственной границы, интерпретируемый как точка сбора вод, поступающих из двух источников: по каналу переброски части суверенных вод и по руслу основной трансграничной реки.

⑤ ⟵ ④ – трансграничный участок основной реки;

$k_2\cdot(1-p)\cdot[W_2+(1-s)\cdot W_1]$ – расход воды на трансграничном участке, где k_2 – коэффициент полезности для Гос. 2 трансграничного участка основной реки ($0 \leq k_2 \leq 1$). В рассматриваемых ниже играх с побочными платежами k_2 играет важную роль в вопросах существования и единственности ситуаций равновесия в чистых стратегиях; в играх с "бартерным обменом" суверенных вод является ключевым параметром торга. На Рис. 1 представлен взвешенный орграф имитационной модели перетоков суверенных вод по территории двух соседних государств.

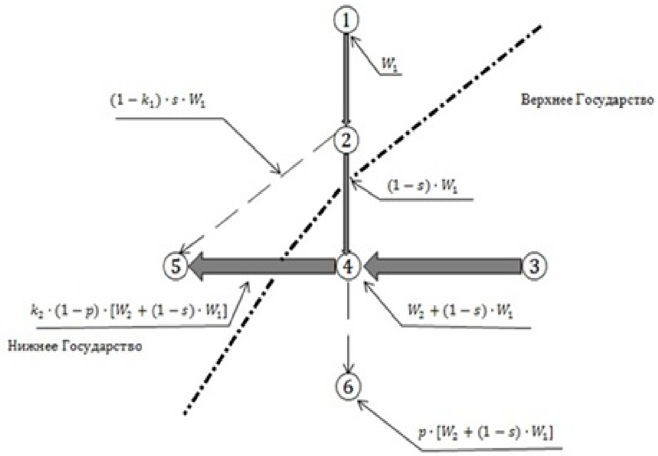

Рисунок 1 – Орграф перетоков суверенных вод по территории двух соседних государств

3 Биматричная игры

В качестве базовой модели управления суверенными водами двух государств в бассейне трансграничной реки будем рассматривать биматричную игру, в которой в качестве первого игрока всегда будем считать государство, расположенное ниже по течению рассматриваемой реки, а второго – государство, расположенное выше по течению. В качестве стратегии первого игрока, будем использовать параметр s – процент переброски суверенных вод в русло главной реки на собственной территории (вблизи государственной границы). В качестве стратегии второго игрока, параметр p – процент переброски части стока главной реки вглубь территории этого государства. При этом, для того чтобы иметь дело с играми с конечным множеством стратегий, будем полагать что стратегии игроков изменяются дискретно с одинаковым шагом. А для того, чтобы избежать слишком высокой размерности платежной матрицы, будем считать, что минимальный шаг не менее 10%. Таким образом в максимальном случае

$$s = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0;$$

$$p = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0.$$

Пару (s, p) будем называть ситуацией. Выигрыш первого игрока в ситуации (s, p) будем определять по расходу воды в гидроузле 5 имитационной модели. Выигрыш второго игрока в ситуации (s, p) будем оценивать по суммарному расходу воды в гидроузле 6 и годовому расходу воды на трансграничном участке основной реки с поправкой на коэффициент полезности воды на этом участке без ее изъятия из водотока (например, для водопоя диких и домашних животных, судоходства, рыболовства, деривационной гидроэнергетики и т.д.). Обозначим его через k_2, подчеркивая нижним индексом исключительную компетенцию второго игрока в его оценке. Как покажут дальнейшие исследования, от величины k_2 будет зависеть существование и единственность ситуации равновесия в игре.

Следующим важным элементом биматричной игры является функция выигрыша. Функция выигрыша биматричной игры представляет собой две матрицы: – определяет выигрыш первого игрока, а B – выигрыш второго игрока. Первый игрок имеет m чистых стратегий (m строк в матрицах A и). Второй игрок имеет n чистых стратегий (n столбцов в матрицах A и B).

В нашем случае $m = n \leq 10$ (обе матрицы квадратные).

Далее, для того чтобы можно было суммировать матрицы A и B будем считать что

– вода является трансферабельной полезностью [2];

– одинаково полезной для обоих государств.

В результате выбора первым игроком i-ой стратегии, а вторым игроком – j-ой стратегии, первый игрок получает выигрыш:

$$g_A(i, j) = (1 - p) \cdot [(1 - s) \cdot W_1 + W_2] + (1 - k_{1)} \cdot s \cdot W_1, \qquad (1)$$

а второй

$$g_B\left(i,j\right) = k_2 \cdot (1-p) \cdot \left[(1-s) \cdot W_1 + W_2\right] + p \cdot \left[(1-s) \cdot W_1 + W_2\right]. \qquad (2)$$

Решение биматричной игры сводится к отысканию ситуации равновесия и равновесных (оптимальных) стратегий игроков.

В биматричной игре ситуация i^*j называется приемлемой для первого игрока, если его выигрыш в этой ситуации не меньше, чем в любой другой:

$$\mathrm{g}_A\left(\mathrm{i}*,j\right) \geq \mathrm{g}_A\left(\mathrm{i},j\right),\ j = 1,2,...,n.$$

Для второго игрока ситуация ij^* приемлема, если его выигрыш в этой ситуации не меньше, чем в любой другой:

$$\mathrm{g}_A\left(\mathrm{i},\mathrm{j}*\right) \geq \mathrm{g}_A\left(\mathrm{i},\mathrm{j}\right) i = 1,2,...,n.$$

Таким образом, приемлемые ситуации для первого игрока – это максимальные элементы в столбцах матрицы A, а для второго игрока – максимальные элементы в строках матрицы B. Обозначим множество приемлемых ситуаций для первого игрока через G_1, а множество ситуаций приемлемых для второго игрока через G_2.

Ситуация в биматричной игре называется равновесной, если она приемлема для обоих игроков, то есть если любое отклонение от нее как первого игрока, так и второго игрока лишь уменьшает их выигрыш.

Множество ситуаций равновесия G образуется, как пересечение множеств приемлемых ситуаций первого и второго игроков.

Пример биматричной игры применительно к имитационной модели миграции суверенных вод.

Уточним, прежде всего, процедуру оценки параметра k_2. Из видов использования транзитных участков этих рек в обозримой перспективе можно выделить только четыре:

– рыболовство;

– водопой диких и домашних животных;

– рекреация и отдых;

– бытовое водопользование местного населения.

Предположим, что все перечисленные виды водопользования равноценны для второго игрока, тогда можно положить

– $k_2 = 0$, если ни один из перечисленных видов использования транзитных участков реки не представляет интереса для второго игрока:

– $k_2 = \frac{1}{4}$, если только один из перечисленных видов использования представляет интерес для второго игрока;

– $\mathrm{k}_2=\frac{1}{2}$, если только два из четырех видов использования представляет интерес для второго игрока;

– $\mathrm{k}_2 = \frac{3}{4}$, если три из четырех видов использования представляет интерес для второго игрока;

– $\mathrm{k}_2 = 1$, если все виды представляют интерес для второго игрока.

Далее для простоты анализа игры положим $k_1 = 0$ и, кроме того будем предполагать, что игроки имеют по три стратегии:

$s_1 = 0$ – первый игрок не собирается перебрасывать суверенные воды;

$s_1 = \frac{1}{2}$ – первый игрок собирается перебросить только половину суверенных вод;

$s_1 = 1$ – первый игрок собирается перебросить на свою территорию весь объем суверенных вод.

Аналогично может поступать и второй игрок.

Вычислим предварительно матрицу A по формулам (1). Поскольку ее элементы не зависят от параметра k_2, то она будет одинаковой для всех пяти случаев возможных значений параметра k_2:

$$A = \begin{pmatrix} W_1 + W_2 & \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & 0 \\ \frac{7}{8} \cdot W_1 + W_2 & \frac{5}{8} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{8} \cdot W_1 \\ \frac{3}{4} \cdot W_1 + W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_1 \end{pmatrix},$$

$$g_A\left(i,j\right) = (1-p) \cdot [(1-s) \cdot W_1 + W_2] + (1-k_1\ ) \cdot s \cdot W_1,$$

$$g_A\left(0,0\right) = (1-0) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 0 \cdot W_1 = \ W_1 + W_2,$$

$$g_A\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 0 \cdot W_1 = \ \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_A\left(0,1\right) = (1-1) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 0 \cdot W_1 = 0,$$

$$g_A\left(\frac{1}{2},0\right) = (1-0) \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot W_1 = \ \frac{7}{8} \cdot W_1 + W_2 g_A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot W_1 = \frac{5}{8} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_A\left(\frac{1}{2}, 1\right) = (1-1) \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot W_1 = \frac{3}{8} \cdot W_1,$$

$$g_A(1,0) = (1-0) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot W_1 = \frac{3}{4} \cdot W_1 + W_2,$$

$$g_A\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot W_1 = \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_A(1,1) = (1-1) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot W_1 = \frac{3}{4} \cdot W_1.$$

Вывод. Как видно из матрицы A, максимум по первому столбцу достигается в ситуации $(1,1)$, максимум по второму столбцу – в ситуации $(3,2)$, а максимум по третьему столбцу – в ситуации $(3,3)$. Таким образом, множество приемлемых для первого игрока состоит из трех ситуаций: $G_1 = \{(1,1), (3,2), (3,3)\}$

Случай $k_2 = 0$. Вычислим элементы матрицы B по формулам (1), (2):

$$g_B(i,j) = k_2 \cdot (1-p) \cdot [(1-s) \cdot W_1 + W_2] + p \cdot [(1-s) \cdot W_1 + W_2],$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & W_1 + W_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{1}{2} \cdot W_1 + W_2 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot W_2 & W_2 \end{pmatrix},$$

$$g_B(0,0) = 0,$$

$$g_B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] = \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_B(0,1) = 1 \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] = W_1 + W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = 0,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{2} \cdot W_1 + W_2,$$

$$g_B\left(1,0\right)=0\cdot\left[\left(1-1\right)\cdot W_1+W_2\right]=0,$$

$$g_B\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-1\right)\cdot W_1+W_2\right]=\frac{1}{2}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(1,1\right)=1\cdot\left[\left(1-1\right)\cdot W_1+W_2\right]=W_2,$$

$$A+B=\begin{pmatrix} W_1+W_2 & W_1+W_2 & W_1+W_2\\ \frac{7}{8}\cdot W_1+W_2 & \frac{7}{8}\cdot W_1+W_2 & \frac{7}{8}\cdot W_1+W_2\\ \frac{3}{4}\cdot W_1+W_2 & \frac{3}{4}\cdot W_1+W_2 & \frac{3}{4}\cdot W_1+W_2\end{pmatrix},$$

$$g_{A+B}\left(0,0\right)=\ W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\ \frac{1}{2}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{1}{2}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(0,1\right)=\ W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{7}{8}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{1}{4}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2=\frac{7}{8}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{3}{8}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_1+W_2=\frac{7}{8}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,0\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{1}{2}\cdot W_2=\frac{3}{4}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,1\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+W_2.$$

Вывод. Как видно из матрицы B, множество приемлемых для второго игрока ситуаций состоит из трех элементов, а именно: $G_2=\{(1,3),(2,3),(3,3)\}$. Пересечение множеств допустимых ситуаций непусто и состоит из одного элемента: $G=\{(3,3)\}$. Таким образом, оптимальной стратегией первого игрока является 100% переброска суверенных вод на собственную территорию, оптимальной стратегией второго игрока – также 100% переброска своих вод на внутреннюю территорию. Такая ситуация будет устойчивой, поскольку ни одному государству не будет выгодно поменять ее на любую другую в одностороннем порядке.

В то же время матрица суммарных выигрышей $A+B$ свидетельствует о том, что если удастся договориться о том, что первый не будет перебрасывать свои воды, а второй компенсирует ему упущенную выгоду, то в выигрыше будут оба игрока.

Случай $k_2 = \frac{1}{4}$:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot W_1 + \frac{1}{4}\cdot W_2 & \frac{5}{8}\cdot W_1 + \frac{5}{8}\cdot W_2 & W_1 + W_2 \\ \frac{1}{8}\cdot W_1 + \frac{1}{4}\cdot W_2 & \frac{5}{16}\cdot W_1 + \frac{5}{8}\cdot W_2 & \frac{1}{2}\cdot W_1 + W_2 \\ \frac{1}{4}\cdot W_2 & \frac{5}{8}\cdot W_2 & W_2 \end{pmatrix},$$

$$g_B(i,j) = k_2\cdot(1-p)\cdot[(1-s)\cdot W_1 + W_2] + p\cdot[(1-s)\cdot W_1 + W_2],$$

$$g_B(0,0) = \frac{1}{4}\cdot(1-0)\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] + 0\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] = \frac{1}{4}\cdot W_1 + \frac{1}{4}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] + \frac{1}{2}\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] = \frac{5}{8}\cdot W_1 + \frac{5}{8}\cdot W_2,$$

$$g_B(0,1) = \frac{1}{4}\cdot(1-1)\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] + 1\cdot[(1-0)\cdot W_1 + W_2] = W_1 + W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{4}\cdot(1-0)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] +$$
$$+0\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{8}\cdot W_1 + \frac{1}{4}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] = \frac{5}{16}\cdot W_1 + \frac{5}{8}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},1\right) = \frac{1}{4}\cdot(1-1)\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] +$$
$$+1\cdot\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{2}\cdot W_1 + W_2,$$

$$g_B(1,0) = \frac{1}{4}\cdot(1-0)\cdot[(1-1)\cdot W_1 + W_2] + 0\cdot[(1-1)\cdot W_1 + W_2] = \frac{1}{4}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot[(1-1)\cdot W_1+W_2]+\frac{1}{2}\cdot[(1-1)\cdot W_1+W_2]=\frac{5}{8}\cdot W_2,$$

$$g_B\left(1,1\right)=\frac{1}{4}\cdot(1-1)\cdot[(1-1)\cdot W_1+W_2]+1\cdot[(1-1)\cdot W_1+W_2]=W_2,$$

$$A+B=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\cdot W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2 & \frac{9}{8}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2 & W_1+W_2\\ W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2 & \frac{5}{16}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2 & \frac{7}{8}\cdot W_1+W_2\\ \frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2 & \frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2 & \frac{3}{4}\cdot W_1+W_2\end{pmatrix},$$

$$g_{A+B}\left(0,0\right)=\ W_1+W_2+\frac{1}{4}\cdot W_1+\frac{1}{4}\cdot W_2=\frac{5}{4}\cdot W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\ \frac{1}{2}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{5}{8}\cdot W_1+\frac{5}{8}\cdot W_2=\frac{9}{8}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(0,1\right)=W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{7}{8}\cdot W_1+W_2+\frac{1}{8}\cdot W_1+\frac{1}{4}\cdot W_2=W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{5}{16}\cdot W_1+\frac{5}{8}\cdot W_2=\frac{5}{16}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{3}{8}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_1+W_2=\frac{7}{8}\cdot W_1+W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,0\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+W_2+\frac{1}{4}\cdot W_2=\frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{5}{4}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{1}{2}\cdot W_2+\frac{5}{8}\cdot W_2=\frac{3}{4}\cdot W_1+\frac{9}{8}\cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1,1\right)=\frac{3}{4}\cdot W_1+W_2.$$

Вывод. В этом случае $G_2=\{(1,3)\,,(2,3)\,,(3,3)),\,G=\{(3,3)\}$, ситуация равновесия единственная, а выигрыши игроков равны соответственно

$$g_A(3,3)=\frac{3}{4}\cdot W_1,$$

$$g_B(3,3)=W_2.$$

Матрица суммарных выигрышей показывает, что максимум при кооперативном решении вопроса достигается в ситуации (1,3), а не в ситуации (3,3).

Случай $k_2 = \frac{1}{2}$:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2 & W_1 + W_2 \\ \frac{1}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{8} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2 & \frac{1}{2} \cdot W_1 + W_2 \\ \frac{1}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_2 & W_2 \end{pmatrix},$$

$$g_B\left(i,j\right) = k_2 \cdot (1-p) \cdot \left[(1-s) \cdot W_1 + W_2\right] + p \cdot \left[(1-s) \cdot W_1 + W_2\right],$$

$$g_B\left(0,0\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-0) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + 0 \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] = \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + \frac{1}{2} \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] = \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(0,1\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-1) \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] + 1 \cdot [(1-0) \cdot W_1 + W_2] = W_1 + W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-0) \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] +$$

$$+0 \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = \frac{3}{8} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(\frac{1}{2},1\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-1) \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] +$$

$$+1 \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot W_1 + W_2\right] = \frac{1}{2} \cdot W_1 + W_2,$$

$$g_B\left(1,0\right) = \frac{1}{2} \cdot (1-0) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + 0 \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] = \frac{1}{2} \cdot W_2,$$

$$g_B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + \frac{1}{2} \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] = \frac{3}{4} \cdot W_2,$$

$$g_B(1,1) = \frac{1}{2} \cdot (1-1) \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] + 1 \cdot [(1-1) \cdot W_1 + W_2] = W_2,$$

$$A+B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2 & \frac{5}{4} \cdot W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2 & W_1 + W_2 \\ \frac{9}{8} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2 & W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2 & \frac{7}{8} \cdot W_1 + W_2 \\ \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2 & \frac{3}{4} \cdot W_1 + W_2 \end{pmatrix},$$

$$g_{A+B}(0,0) = W_1 + W_2 + \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 = \frac{3}{2} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 + \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2 = \frac{5}{4} \cdot W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}(0,1) = W_1 + W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{7}{8} \cdot W_1 + W_2 + \frac{1}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 = \frac{9}{8} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 + \frac{3}{8} \cdot W_1 + \frac{3}{4} \cdot W_2 = W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{3}{8} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_1 + W_2 = \frac{7}{8} \cdot W_1 + W_2,$$

$$g_{A+B}(1,0) = \frac{3}{4} \cdot W_1 + W_2 + \frac{1}{2} \cdot W_2 = \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{3}{2} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{1}{2} \cdot W_2 + \frac{3}{4} \cdot W_2 = \frac{3}{4} \cdot W_1 + \frac{5}{4} \cdot W_2,$$

$$g_{A+B}(1,1) = \frac{3}{4} \cdot W_1 + W_2.$$

Вывод. В этом случае $G_2 = \{(1,3), (2,3), (3,3)), G = \{(3,3)\}$, оптимальной стратегией первого игрока, как и второго игрока, является полная переброска своих вод во внутренние территории.

В то же время суммарная матрица выигрышей игроков рекомендует первому игроку отказаться от переброски, а второму перебрасывать лишь половину вод.

Литература

1 Оразов Е.Т., Твердовский А.И., Литвиненко Г.Г. Теория игр при разрешении конфликтов в водопользовании. – А.: Гылым, 2012. – Т. XX. – 260 с.

2 Воробьев Н.Н. Ситуации равновесия в биматричных играх // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – Т. 3, № 3. – С. 318-331.

Оразов Е.Т. ТРАНСШЕКАРАЛЫҚ СУЛАРДЫҢ НАУАСЫН ӘДІЛ БӨЛУДІҢ ТЕОРИЯЛЫҚ-ОЙЫНДЫҚ ТАЛДАУЫ

Бұл мақалада бір ғана трансшекаралық өзеннің бассейнінінде орналасқан екі мемлекеттің тәуелсіз суларының ағынын оңтайлы басқарудың теориялық-ойындық моделі талқыланады. Мұндағы негізгі мәселе: басты өзеннің мемлекеттік шекараның тұстамасындағы орташа көп жылдық уақыт көлемінде шығыны қандай болатынын күтуге болады? Бұл үшін біз орграфиялық модельді құрып, баланстың формулалары бойынша желідегі ағындарды есептеп шығарамыз. Трансшекаралық өзен бассейніндегі екі мемлекеттің тәуелсіз суларын басқарудың базалық үлгісі ретінде біз биматрицалық ойынды қарастырамыз.

Кілттік сөздер. Трансшекаралық өендер, бүйірлік ағындылық, биматрицалық ойындар, ұтыс функциясы, иммитациялық модель, тиімді стратегия.

Orazov E.T. GAME-THEORETICAL ANALYSIS OF THE EQUITABLE APPORTIONMENT OF THE TRANSBOUNDARY RIVERS WATERS

This article discusses the game-theoretic model of the optimal management of the flows of sovereign waters of two states located in the basin of the same transboundary river. The main question here is: what is the expenditure of the flow of the main river should be expected in the multi-year average scale in the section line of the State Border? For this purpose, we create the digraph model and calculate the flows in the network according to the balance formulas. The bimatric game will be considered as a basic model to manage sovereign waters of two states in the basin of a transboundary river.

Keywords. Transboundary rivers, lateral inflow, bimatrix games, win function, simulation model, optimal strategy.

Оразов Е.Т.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Қазақстан, ул. Пушкина, 125
E-mail: orazov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30.11.2017

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 3. — С. 67–79.

МРНТИ 27.03.19, 27.03.66

COMPLEXITY ESTIMATES FOR THE RELATION OF COINCIDENCE OF MODEL-THEORETIC PROPERTIES WITH AN APPLICATION TO SEMANTIC CLASSES

M.G. Peretyat'kin

Abstract. In this paper we consider algorithmic questions of logic related to the formal definition of the concept of a model-theoretic property. We obtain upper and lower complexity estimates for the relation of the coincidence of model-theoretic properties on the class of finitely axiomatizable theories of a given finite rich signature, on its subclass consisting of complete theories as well as on some other classes. Also, a number of estimates of algorithmic complexity of some important semantic classes of sentences are obtained.

Keywords. First-order logic, model-theoretic property, Tarski-Lindenbaum algebra, semantic type, signature reduction procedure, universal construction of finitely axiomatizable theories.

A new first-order combinatorial approach is presented in the works [1], [2] and [3], whose aim is to obtain characterization of expressive power of first-order logic. Within this approach, a definition of a model-theoretic property is given in [4] and [5]. Moreover, these works present an informal substantiation of the fact that this definition is adequate to the common practice of investigations in model theory.

In this paper, we investigate a series of natural questions on algorithmic complexity of the relation $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$ of coincidence of model-theoretic properties of theories. We also find complexity estimates of some related semantic classes of sentences.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10.

Funding: The work was supported by grant AP05130852 of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2018-2020).

Preliminaries

We consider theories in *first-order predicate logic* with *equality* and use general concepts of model theory, algorithm theory, constructive models and Boolean algebras that can be found in the works [6], [7], and [8]. Special concepts and notations used in this paper can be found in [3] and [4]. Generally, *incomplete* theories are considered. In this work, we consider just signatures admitting Godel's numberings of formulas. Such a signature is called *enumerable*.

A finite signature is called *rich* if it contains at least one n-ary predicate or function symbol for $n \geqslant 2$, or two symbols of unary functions. Let σ be a signature and Σ be a subset of $SL(\sigma)$. We denote by $[\Sigma]^\sigma$ a theory of signature σ generated by Σ as a set of its axioms. An entry $T \approx_a S$ means existence of an algebraic isomorphism between the theories. The following notations are used: $SL(\sigma)$ is the set of all sentences of signature σ, $PC(\sigma)$ is predicate calculus of signature σ, i.e., a theory of signature σ defined by an empty set of axioms. For a set $A \subseteq \mathbb{N}$, we define $\Sigma^0_n \leqslant_1 A \Leftrightarrow (\forall X \in \Sigma^0_n)(X \leqslant_1 A)$. Similar notations can be applied to other classes of hierarchies.

We give a formulation of the *polar construction* of finitely axiomatizable theories, cf. [9]:

Theorem 0.1 [Statement of the Polar construction]. *Let σ be a finite rich signature. Effectively in a natural parameter n, one can construct a finitely axiomatizable theory $F = \mathbb{P}(n, \sigma)$ of signature σ together with a special halt-sentence Θ (not depending on n) such that the following assertions are satisfied*:

(a) *in the case $n \in K$, we have $F \vdash \Theta$ and the theory F has a unique, up to an isomorphism, model $\mathfrak{M}$, which is finite and rigid (i.e., the model does not have nontrivial automorphisms),*

(b) *in the case $n \notin K$, we have $F \nvdash \Theta$, the theory F is both hereditarily and essentially undecidable, and does not have computably enumerable models.*

Mention that, the polar construction represents a natural generalization of the Vaught construction described in [10], cf. [11, Sec. 0.7].

1 Cartesian extensions of theories

We use a simplest concept of an *interpretation* of a theory T_0 in the region $U(x)$ of a theory T_1, [12]. Classes of *isostone* and *model-bijective* interpretations are introduced in [11]. In this section, we introduce a technical class of interpretations presenting finitary methods in first-order logic.

Given a signature σ and a finite sequence of formulas of this signature of either of the following forms:

$$\varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_s^{m_s} \rangle, \tag{1.1}$$

where φ_k is a formula with m_k free variables.

Starting from a model $\mathfrak{M}$ of signature σ together with a tuple $\varkappa$ of the form (1.1), we are going to construct a new model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ of signature

$$\sigma_1 \ = \ \sigma \cup \{U^1, U_1^1, U_2^1, \ldots, U_s^1\} \cup \{K_1^{m_1+1}, \ldots, K_s^{m_s+1}\} \tag{1.2}$$

as follows. As the universe, we take $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$, where all specified parts are pairwise disjoint sets. On the set $|\mathfrak{M}|$, all symbols of signature σ are defined exactly as they were defined in $\mathfrak{M}$; in the remainder, they are defined trivially; predicate $U(x)$ distinguishes $|\mathfrak{M}|$; predicate $U_k(x)$ distinguishes A_k; each predicate K_k in (1.2) should be defined so that it would represent a one-to-one correspondence between the set of tuples $\{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}$ and the set $A_k = U_k(\mathfrak{M}_1)$. The model $\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ is said to be a *Cartesian extension of* $\mathfrak{M}$ *by a sequence* $\varkappa$.

Expand the operation of an extension (initially defined for models) on theories. Given a theory T and a tuple $\varkappa$ of the form (1.1). Using a fixed signature (1.2) for extensions of models, we define a new theory $T' = T\langle\varkappa\rangle$ as follows: $T' = \mathrm{Th}(M)$, $M = \{\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle \mid \mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}(T)\}$. It is called a *Cartesian extension* of T *by sequence* $\varkappa$.

Normally, we follow an algebraic approach; i.e., we consider passages $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ for which the sequence (1.1) satisfies the following technical condition:

$$\varphi_k(\bar{x}_k) \textit{ is } \exists\cap\forall\textit{-presentable, for all } k \leqslant s. \tag{1.3}$$

We denote by $\mathcal{KC}$ the set of all possible tuples of the form (1.1), while $\mathcal{KC}_{\exists\cap\forall}$ is the set of all tuples (1.1) satisfying (1.3).

In theory $T\langle\varkappa\rangle$, the region $U(x)$ represents a model of theory T. Particularly, the transformation $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ defines a natural interpretation $I_{T,\varkappa}$ of T in $T\langle\varkappa\rangle$. It is called a *special Cartesian* interpretation. Considering theories up to an algebraic isomorphism, we may use simpler term a *Cartesian* interpretation.

Lemma 1.1. *Given a theory T of an enumerable signature σ and a sequence of $\exists\cap\forall$-formulas $\varkappa \in \mathcal{K}C$. Special Cartesian-quotient interpretation $I_{T,\varkappa} : T \rightarrowtail T\langle\varkappa\rangle$ is effective, model-bijective, and isostone. In particular, the interpretation $I_{T,\varkappa}$ determines a computable isomorphism $\mu_{T,\varkappa} : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(T\langle\varkappa\rangle)$ between the Tarski-Lindenbaum algebras; moreover, it preserves semantic layer ACL, cf. Def. 1.2.*

Further properties of Cartesian-type extensions of theories and interpretations can be found in [3] and [13].

Definition 1.2. *We introduce the following notations for particular semantic layers that are relevant in this direction: ACL = the set of model-theoretic properties $\mathfrak{p} \in AL$ preserved by any special Cartesian interpretation $I_{T,\xi} : T \rightarrowtail T\langle\xi\rangle$ for an arbitrary computably axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and an arbitrary tuple $\xi = \langle\varphi_1^{m_1}, \ldots, \varphi_s^{m_s}\rangle$ of formulas of signature σ satisfying (1.3).*

Layer *ACL* is said to be the *Cartesian* semantic layer; it plays the role of a *pragmatic release* of the *finitary semantic layer*, cf. [4].

Lemma 1.3. *The following relation defined on the class of all theories*

$$T \approxeq_a^* S \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \varkappa' \varkappa'' \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}) \left[\, T\langle\varkappa'\rangle \approx_a S\langle\varkappa''\rangle \,\right] \tag{1.4}$$

is reflexive, symmetric, and transitive (i.e., it is an equivalence relation). Furthermore, the following local-type version

$$\begin{aligned} &T \approxeq_a S \;\Leftrightarrow_{dfn}\; \big(\exists \text{ computable isomorphism } \mu : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(S)\big) \\ &(\forall \text{ complete extension } T' \supseteq T)\, (\forall \text{ complete extension } S' \supseteq S) \\ &[S' = \mu(T') \;\Rightarrow\; (\exists \varkappa' \varkappa'' \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall})(T'\langle\varkappa\rangle \approx_a S'\langle\varkappa\rangle)] \end{aligned} \tag{1.5}$$

of the relation (1.5) *is also available that is an equivalence relation on the class of all theories. Moreover, we have $T \approxeq_a^* S \Rightarrow T \approxeq_a S$, for all T and S.*

2 Introduction in the definition of a model-theoretic property

We pass to the definition of a model-theoretic property. Two complete theories are said to be MT-*equivalent* if their real model-theoretic properties are identical:

$$T_1 \overset{\text{MT}}{\simeq} T_2 \;\Leftrightarrow_{dfn}\; (\forall \text{ real model-theoretic property } \mathfrak{p}) \left[\, T_1 \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow T_2 \in \mathfrak{p} \,\right]. \tag{2.1}$$

Accordingly, any classes of complete theories closed under $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$ are said to be *real* model-theoretic properties.

We point out two important dependencies for $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$ (called reasonings):

$$\begin{aligned}&\texttt{(a)}\ T \approx_a S \ \Rightarrow\ T \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} S,\\ &\texttt{(b)}\ T\langle\varkappa\rangle = S \ \Rightarrow\ T \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} S,\ \textit{for any}\ \varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall},\end{aligned} \tag{2.2}$$

where T and S are supposed to be complete theories. General significance of the reasoning (2.2)(a) is obvious. The sequence of implications (2.2)(b) for all $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$ can also be considered as adequate to the common practice of investigations in model theory.

By construction, $\approxeq^*_a$ covers both equivalence $\approx_a$ and the relations $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ for all $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$. Based on Lemma 1.3, we conclude that $\approxeq^*_a$ is exactly an equivalence relation on the set of all theories generated by $\approx_a$ and $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ for all $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$. As for $\approxeq_a$, this relation represents a localized version (1.5) of $\approxeq^*_a$. From (2.2)(a) together with (2.2)(b) for all $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$, we obtain the following dependence for all theories T and S:

$$T \approxeq_a S \Rightarrow T \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} S. \tag{2.3}$$

Based on the works [13] and [4] it is possible to show that $\approxeq_a$ coincides with $\equiv_{ACL}$, while $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$ coincides with $\approxeq_a$. Therefore, in the pragmatic (optimal) version of definition to the concept of a model-theoretic property, we have:

$$T \equiv_{ACL} S \ \Leftrightarrow\ T \approxeq_a S \ \Leftrightarrow\ T \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} S. \tag{2.4}$$

Accordingly, the class of all real model-theoretic properties is presented by the following expression:

$$AreaL \ = \ ACL \ = \ \{\, \mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C} \mid \mathfrak{p}\ \textit{is closed under}\ \equiv_{ACL} \}. \tag{2.5}$$

3 Complexity of the relation of coincidence of model-theoretic properties

We consider lower and upper estimates of the relation of coincidence of model-theoretic properties on the class of all theories. By K, we denote a c.e. creative set. We fix a finite rich signature σ together with a Godel numbering Φ_i, $i \in \mathbb{N}$, of the set $SL(\sigma)$ of all sentences of signature σ.

Theorem 3.1. *The following upper estimates take place*:

(a) $\{\langle m,n\rangle \mid [\Phi_m]^\sigma$ *complete* & $[\Phi_n]^\sigma$ *complete* & $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\} \leqslant_1 \Sigma^0_3$,

(b) $\{\langle m,n\rangle \mid [\Phi_m]^\sigma$ *decidable* & $[\Phi_n]^\sigma$ *decidable* & $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\} \leqslant_1 \Pi^1_1$,

(c) $\{\langle m,n\rangle \mid [\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\} \leqslant_1 \Pi^1_1$,

(d) $\{m \mid [\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} PC(\sigma)\} \leqslant_1 \Pi^1_1$.

Proof. We use standard methods of algorithm theory, cf. [7].

(a) The demand of being a complete theory is described by a quantifier prefix $\forall\exists$. The last conjunction member $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma$ is described by a statement of the form (1.4) because the theories are complete. This means, that there are tuples $\varkappa, \varkappa' \in \mathcal{K}C_{\exists\forall}$ together with a computable function presenting an algebraic isomorphism $[\Phi_m]^\sigma\langle\varkappa\rangle \approx_a [\Phi_n]^\sigma\langle\varkappa'\rangle$. This is described by a quantifier prefix $\exists\forall\exists$.

(b), (c), and (d): In these cases, pointed out relations between finitely axiomatizable theories are described by a statement of the common form (1.5) because the theories inside relation $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma$ may be non-complete. Obviously, any of the demands "for any complete extension" requires a $\forall^1$-quantifier, while the other parts involved in the expressions (b), (c), and (d) are described by elementary quantifiers $\exists$ and $\forall$. Applying the known Tarski-Kuratowski algorithm, [7, Sec. 16.1], we conclude that each of the relations we are considering is described with a quantifier prefix of the form $\forall^1\exists$.

Theorem 3.1 is proved. □

Theorem 3.2. *The following lower estimates take place*:

(a) $\Sigma^0_1 \leqslant_1 \{\langle m,n\rangle \mid [\Phi_m]^\sigma$ *is complete* & $[\Phi_n]^\sigma$ *is complete* & $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\}$,

(b) $\Sigma^0_1 \leqslant_1 \{\langle m,n\rangle \mid$ theory $[\Phi_m]^\sigma$ *is decidable* & theory $[\Phi_n]^\sigma$ *is decidable* & $[\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\}$,

(c) $\Sigma^0_1 \leqslant_1 \{\langle m,n\rangle \mid [\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} [\Phi_n]^\sigma\}$,

(d) $\Sigma^0_1 \leqslant_1 \{m \mid [\Phi_m]^\sigma \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} PC(\sigma)\}$.

Proof. We use method based on the polar construction, cf. Theorem 0.1. We also use a finite signature reduction procedure $T \mapsto \mathrm{Redu}(T,\sigma)$ transforming any finitely axiomatizable theory T in a finitely axiomatizable theory $T' = \mathrm{Redu}(T,\sigma)$ having given finite rich signature σ and satisfying $T \overset{\mathrm{MT}}{\simeq} T'$, cf. [4].

(a), (b), and (c): Fix a sentence Φ_{m_0} of signature σ such that theory $[\Phi_{m_0}]^\sigma$ is complete and thus decidable. Consider an arbitrary integer $k \in \mathbb{N}$. In the case $k \in K$, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ has a unique finite model that is rigid, thus, we have $[\Phi_{m_0}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} [\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma)$, therefore, $[\Phi_{m_0}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$. By construction, a Godel number n of the latter theory is found effectively in k; moreover, this theory is finitely axiomatizable, complete and decidable. In the other case $k \notin K$, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ is undecidable, therefore, $\mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$ is finitely axiomatizable; however, this theory is neither complete nor decidable. Thereby, reducibilities required in (a), (b), and (c) are indeed established.

(d) Fix a sentence Φ_{m_0} of signature σ such that theory $[\Phi_{m_0}]^\sigma$ coincides with $PC(\sigma)$. For instance, we can take $(\forall x)[x = x]$ as Φ_{m_0}. In the case $k \in K$, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ has a unique finite model that is rigid, thus, we have $[\Phi_{m_0}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} [\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma)$, therefore, $[\Phi_{m_0}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$. By construction, a Godel number n of the latter theory is found effectively in k; moreover, this theory is $\overset{\text{MT}}{\simeq}$-equivalent to $PC(\sigma)$. In the other case $k \notin K$, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ is hereditarily undecidable, thus, $\mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$ is also hereditarily undecidable, therefore, this theory cannot be $\overset{\text{MT}}{\simeq}$-equivalent to $PC(\sigma)$. Thereby, the reducibility required in (d) is indeed established.

Theorem 3.2 is proved. □

4 Semantic classes of sentences

In this section, we give a definition of the concept of a semantic class, cf. [11]. Consider a finite rich signature σ and fix a Gödel numbering Φ_i, $i \in \mathbb{N}$, for the set of all sentences of signature σ.

A class of models $M \subset \mathrm{Mod}(\sigma)$ is said to be a *semantic class*, if M is closed under the equality relation

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}').$$

A set $\Sigma \subseteq SL(\sigma)$ is said to be a *semantic class of sentences*, if there is a semantic class M of models such that one of the following relations is satisfied:

Reference_Block (4.1)

(a) $\Sigma = \mathrm{Th}(M)$,

(b) $\Sigma = SL(\sigma) \smallsetminus \mathrm{Th}(M)$,

(c) $\Sigma = \{\Phi \in SL(\sigma) \mid \Phi \textit{ has an } M\textit{-model}\}$,

(d) $\Sigma = \{\Phi \in SL(\sigma) \mid \Phi \textit{ does not have an } M\textit{-model}\}$.

End_Ref

The class of all prime models of signature σ is a simple example of a semantic class of models, while the class of all sentences of signature σ not having prime models is an example of a semantic class of sentences.

5 Complexity estimates of some common semantic classes

We consider complexity estimates for some semantic classes of sentences.

Theorem 5.1. *Let M be a nonempty semantic class of models of signature σ consisting of just finite models. Then, we have*:

(a) $\Sigma_1^0 \leqslant_1 \{n \mid \Phi_n \text{ has an } M\text{-model}\}$,

(b) $\Pi_1^0 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M)$.

Theorem 5.2. *Let M be a nonempty semantic class of models of signature σ consisting of just strongly constructive models having finitely axiomatizable theories. Then, we have*:

(a) $\Sigma_1^0 \leqslant_1 \{n \mid \Phi_n \text{ has an } M\text{-model}\}$,

(b) $\Pi_1^0 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M)$.

Theorem 5.3. *Let M be a nonempty semantic class of models of signature σ consisting of just models having finitely axiomatizable theories* (*in particular, their theories must be decidable*). *Then, we have*:

(a) $\Sigma_1^0 \leqslant_1 \{n \mid \Phi_n \text{ has an } M\text{-model}\}$,

(b) $\Pi_1^0 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M)$.

Proof for Theorem 5.1, Theorem 5.2, and Theorem 5.3. We use common notations for the three cases. By E, we denote semantic class of sentences $\{n \mid \Phi_n$ has an M-model$\}$, while D denotes the class $\mathrm{Th}(M)$. Fix a model $\mathfrak{M}_0$ in the class M. In any of the cases, $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$ is a finitely axiomatizable theory of signature σ, i.e., there is a sentence Φ_{m_0} such that $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0) = [\Phi_{m_0}]^\sigma$.

(a) For an integer parameter k, consider theory $F = \mathrm{Redu}\big(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$. By construction, F is a finitely axiomatizable theory of signature σ; moreover, its Godel's number is found effectively on k, i.e., there is a computable function $f(x)$ such that for all $k \in \mathbb{N}$ sentence $\Phi_{f(k)}$ is an axiom of this theory, that is, $F = [\Phi_{f(k)}]^\sigma$. Let $k \in K$. We have the following relations in the case. By Theorem 0.1, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ has the only (upto an isomorphism) model which is finite and rigid; thus, we obtain $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathbb{P}(m,\sigma) \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$; from this, we have $\mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big) \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$;

therefore $[\Phi_{f(k)}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$; so, we have $[\Phi_{f(k)}]^\sigma \overset{\text{MT}}{\simeq} [\Phi_{m_0}]^\sigma$; thereby, we obtain finally $\Phi_{f(k)} \in E$. Now, we consider an opposite case $k \notin K$. By Theorem 0.1, theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ is hereditarily undecidable and does not have constructive models; therefore, theory $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathbb{P}(m,\sigma)$ has the same properties; thus, $\mathrm{Redu}\big([\Phi_{m_0}]^\sigma \oplus \mathbb{P}(k,\sigma),\sigma\big)$ has again the same properties; from this, we obtain that $[\Phi_{f(k)}]^\sigma$ is hereditarily undecidable and does not have strongly constructive models, obtaining as a result $\Phi_{f(k)} \notin E$. Thereby, we have obtained a reducibility $K \leqslant_m \mathrm{Nom}(E)$. Based on the fact that Godel's numberings of sentences satisfies effective cylinder properties, we obtain finally that $K \leqslant_1 \mathrm{Nom}(E)$, that is, $\Sigma^1_0 \leqslant_1 \mathrm{Nom}(E)$.

(b) Based on the Part (a) we have proved together with the reducibilities $\Phi \in E \Leftrightarrow \neg\Phi \in D$ and $\Phi \in D \Leftrightarrow \neg\Phi \in E$, we obtain that $\Pi^0_1 \leqslant_1 \mathrm{Nom}(D)$ also takes place.

Theorems 5.1, 5.2, and 5.3 are proved. □

Let us discuss some thin points connected with the obtained results.

Application of the construction $\mathbb{P}(k,\sigma)$ in the proofs allows us by choice the parameter k to obtain finitely axiomatizable theories satisfying two polarly opposite properties. In the case when k belongs to creative set K, the theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ has the only upto an isomorphism model, which is finite and rigid, i.e., this theory seems to be extremely simple. In the other case $k \notin K$, the theory $\mathbb{P}(k,\sigma)$ is hereditarily and essentially undecidable and has no computably enumerable (the more, constructive) models, i.e., this theory is very complicated. By virtue of such a connection of the two contrast properties, construction $\mathbb{P}(k,\sigma)$ is said to be *polar*. Simplicity of the case of existence of a finite model does not raise questions. As for the complexity in the case $k \notin K$, its perfection is less obvious. Thus, a natural question arises.

QUESTION 5.4. *Is there an advanced version of the polar construction for which the contrast is maximal between the properties in the cases $k \in K$ and $k \notin K$.*

One more question:

QUESTION 5.5. *Let σ be a finite rich signature, $\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, and $M[\mathfrak{M}_0]$ be a semantic class consisting of all models $\mathfrak{M}$ of signature σ satisfying* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \overset{\text{MT}}{\simeq} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_0)$.

(a) Is it true that, for any model $\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, we have either $\Sigma^0_1 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M[\mathfrak{M}_0])$ or $\Pi^0_1 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M[\mathfrak{M}_0])$?

(b) Is there a model $\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Mod}(\sigma)$ *such that we have neither* $\Sigma_1^0 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M)$ *nor* $\Pi_1^0 \leqslant_1 \mathrm{Th}(M)$ *for* $M = M[\mathfrak{M}_0]$ *?*

If the answer to question 5.5(b) is 'yes', corresponding example of semantic class $M[\mathfrak{M}_0]$ will show that an analog to the Rice Theorem for semantic classes of sentences over the semantic layer *ACL* (coinciding with *AreaL*) is impossible.

Conclusion

Semantic classes of models and sentences were studied in [14], [10], [15], [16], [11], [17], [18] and other works. The concept of a semantic class of sentences turns out to be more interesting in comparison with the concept of an index set in algorithm theory. Indeed, the index sets represent just internal concepts of algorithm theory, while the semantic classes of sentences represent general-logic concepts based on the expressive power of first-order logic.

In this paper, we use the finite signature reduction procedure Redu having remarkable property to keep an isomorphism type of the Tarski-Lindenbaum algebra preserving all actual model-theoretic properties of corresponding complete extensions of the theories. The Hanf construction is not so suitable here as this construction does not guarantee preservation of any model-theoretic properties. On the other hand, the universal construction of finitely axiomatizable theories may be useful here since it preserves large enough infinitary semantic layer of model-theoretic properties. However, preservation of all actual model-theoretic properties is not guaranteed allowing to obtain just weak versions of results. In this sense, the polar construction $\mathbb{P}(k, \sigma)$ is much more perfect as it allows to operate with the set of all actual model-theoretic properties. Thus, finding of advanced versions of the polar construction can be useful because this will allow to obtain new estimates of algorithmic complexity of different semantic classes of sentences.

References

1 Peretyat'kin M.G. Introduction in first-order combinatorics providing a conceptual framework for computation in predicate logic // Computation tools 2013, The Fourth International Conference on Computational Logics, Algebras, Programming, Tools, and Benchmarking, IARIA. – 2013. – P. 31-36.

2 Peretyat'kin M.G. First-order combinatorics presenting a conceptual framework for two levels of expressive power of predicate logic // Computation tools 2014, The Fifth International Conference on Computational Logics, Algebras, Programming Tools, and Benchmarking, IARIA. – 2014. – P. 19-25.

3 Peretyat'kin M.G. First-order combinatorics and model-theoretic properties that can be distinct for mutually interpretable theories // Siberian Advances in Mathematics. – 2016. – V. 26, No. 3. – P. 196-214.

4 Peretyat'kin M.G. Fundamental significance of the finitary and infinitary semantic layers and characterization of the expressive power of first-order logic // Mathematical Journal. – 2017. – V. 17, No. 3(65). – P. 91-116.

5 Peretyat'kin M.G. First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications // Algebra and Model Theory 11, Proceedings of 12-th International Summer School-Conference Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory, Russia, Erlagol-2017, June 23-29, Novosibirsk State Technical University, 2017. – P. 86-101.

6 Hodges W. A shorter model theory. – Cambridge University Press, Cambridge, 1997. – 310 p.

7 Rogers H.J. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. – Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1967. – 482 p.

8 Ershov Yu.L., Goncharov S.S. Constructive models. – Transl. from the Russian. (English) Siberian School of Algebra and Logic. New York, NY: Consultants Bureau. XII. – 2000. – 293 p.

9 Peretyat'kin M.G. Polar construction of finitely axiomatizable theories // Logic and applications, International Conference on Algebra and Logic devoted to 60-year Anniversary of Academician Yu.L.Ershov, Novosibirsk, Russia, Russia, May 4–6, 2000. – P. 136.

10 Vaught R.L. Sentences true in all constructive models // J. Symbolic Logic. – 1961. – V. 25, No. 1. – P. 39-58.

11 Peretyat'kin M.G. Finitely axiomatizable theories // Plenum, New York, 1997. – 297 p. Russian equivalent in: Novosibirsk, Scientific Books. – 1997. – 318 p.

12 Shoenfield J.R. Mathematical Logic.– Addison-Wesley, Massachusetts, 1967. – 344 p.

13 Peretyat'kin M.G. Invertible multi-dimensional interpretations versus virtual isomorphisms of first-order theories // Mathematical Journal. – 2016. – No. 4(62). – P. 166-203.

14 Mostowski A. On recursive models of formalized arithmetic // Bull. Acad. Pol. Sci. – 1957. – No. 7. – P. 705-710.

15 Boone W.W., Rogers H.Jr. On a problem of J.H.C. Whitehead and a problem of Alonzo Church // Math. Scand. – 1966. – No. 19. – P. 185-192.

16 Peretyat'kin M.G. Turing Machine computations in finitely axiomatizable theories // Algebra and Logic. – 1982. – V. 21, No. 4. – P. 272-295.

17 Peretyat'kin M.G. On the Tarski-Lindenbaum algebra of the class of all strongly constructivizable prime models // Proceedings of the Turing Centenary Conference CiE2012, Lecture notes in Computer Science, 7318, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 2012. – P. 589-598.

18 Peretyat'kin M.G. The Tarski-Lindenbaum algebra of the class of all strongly constructivizable countable saturated models // P. Bonizzoni, V. Brattka, and B. Lowe (editors), Springer-Heidelberg, 2013. – V. 7921. – P. 342-352.

Перетятькин М.Г. СЕМАНТИКАЛЫҚ КЛАСТАРҒА ҚОЛДАНЫЛАТЫН ТЕОРИЯЛЫҚ-МОДЕЛДІК ҚАСИЕТТЕРДІҢ СӘЙКЕСТІГИ ҚАТЫНАСЫНЫҢ КҮРДЕЛІЛІГІНІҢ БАҒАЛАРЫ

Жұмыста теориялық-моделдік қасиет ұғымының формальды анықтамасымен байланысты логиканың алгоритмдік мәселелері қарастырылады. Теориялық-моделдік қасиеттер сәйкестігінің қатынасының үшін берілген ақырлы бай сигнатуралардың ақырлы аксиомаланған теориялардың класындағы, оның толық теориялардан тұратын ішкі класындағы және басқа кластардағы күрделілігінің жоғарғы және төменгі бағалаулары алынған. Сонымен бірге сөйлемдердің кейбір маңызды семантикалық кластарының алгоритмдік күрделілігінің бірқатар бағалары алынған.

Кілттік сөздер. Бірінші ретті логика, теориялық-моделдік қасиет, Тарский-Линденбаум алгебрасы, есептелімді изоморфизм, семантикалық класс, алгоритмдік күрделіліктің бағасы.

Перетятькин М.Г. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ОТНОШЕНИЯ СОВПАДЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К СЕМАНТИЧЕСКИМ КЛАССАМ

В работе рассматриваются алгоритмические вопросы логики, связанные с формальным определением понятия теоретико-модельного свойства. Получены верхние и нижние оценки сложности для отношения совпадения теоретико-модельных свойств на классе конечно аксиоматизируемых теорий заданной конечной богатой сигнатуры, на его подклассе состоящем из полных теорий и на других классах. Также получен ряд оценок алгоритмической сложности некоторых важных семантических классов предложений.

Ключевые слова. Логика первого порядка, теоретико-модельное свойство, алгебра Тарского-Линденбаума, вычислимый изоморфизм, семантический класс, оценка алгоритмической сложности.

Peretyat'kin M.G.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: peretyatkin@math.kz

Received 30.07.2018

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования http://www. math. kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать классификатор МРНТИ. На следующих строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов. В конце указать место работы, почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, №3 (69), 2018

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования
28.09.2018 г.

Тираж 300 экз. Объем 82 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz