ISSN 1682—0525

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Том 17 № 2 (64) 2017

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 17   № 2 (64)   2017

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, № 2 (64), 2017

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 17 **№ 2 (64)** **2017**

CONTENTS

Volume 17 **No. 2 (64)** **2017**

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 5–12.

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Алдашев

Казахский Национальный педагогический университет имени Абая
050012, Алматы, ул. Толе би, 86, e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация: Ранее автором показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных эллиптических уравнений. В данной работе найден новый класс вырождающихся трехмерных эллиптических уравнений, для которых в цилиндрической области задача Дирихле имеет единственное решение, при этом приводится его явный вид.

Ключевые слова: Корректность, вырождение, цилиндрическая область, плотность, системы функций.

1. Введение

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного проведены в [1], [2].

При изучении аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3]. В [4] показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений.

Keywords: *Correctness, degeneration, cylindrical domain, density, functions system.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35R12.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3492/ГФ4.

В данной работе найден новый класс вырождающихся трехмерных эллиптических уравнений, для которых в цилиндрической области задача Дирихле корректна.

2. Постановка задачи и результат

Пусть D_β – цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек $((x_1,\, x_2,\, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим вырождающиеся трехмерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t) u_{x_i x_i} + u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \qquad (1)$$

где $k_i(t) > 0$ при $t > 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $k_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta))$, $i = 1, 2$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим следующую.

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta), \qquad (2)$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi(\beta,\theta)$, $\psi(0,\theta) = \tau(1,\theta)$.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in C(\bar{D}_\beta) \cap C^1(D_\beta)$, $i = 1, 2$, $c(r,\theta,t) \leq 0$, $\forall (r,\theta,t) \in D_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема. *Если* $\varphi(r,\theta)$, $\tau(r,\theta) \in C(\bar{S}_0) \cap C^2(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in C(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^2(\Gamma_\beta)$, *то задача однозначно разрешима.*

Отметим эта Теорема при $k_1(t) = k_2(t)$ получена в [4].

3. Доказательство Теоремы

Единственность решения задачи D следует из принципа Хопфа [5]. Теперь переходим к разрешимости задачи D. Ее решение в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = u_{10}(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(u_{1n}(r,t)\cos n\theta + u_{2n}(r,t)\sin n\theta), \qquad (3)$$

где $u_{10}(r,t)$, $u_{1n}(r,t)$, $u_{2n}(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставив (3) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{gathered}
Lu \equiv k_1(t)\left(\cos^2\theta u_{10rr} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_{10r}\right) + k_2(t)\left(\sin^2\theta u_{10rr} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_{10r}\right) + u_{10tt} + \\
+a_1(r,\theta,t)\cos\theta u_{10r} + a_2(r,\theta,t)\sin\theta u_{10r} + b(r,\theta,t)u_{10t} + c(r,\theta,t)u_{10} + \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{k_1(t)\left[\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right.\right. \\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin 2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\
\left.-\frac{n^2\sin^2\theta}{r^2}(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] + k_2(t)\left[\sin^2\theta(\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \\
+\frac{n\sin 2\theta}{r}(\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2\theta}{r}(\cos n\theta u_{1nr} - \sin n\theta u_{2nr}) + \\
\left.+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right] + u_{1ntt}\cos n\theta + \\
+u_{2ntt}\sin n\theta + a_1\left[\cos\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n})\right] + \\
+a_2\left[\sin\theta(\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n})\right] + \\
\left.+b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n})\right\} = 0.
\end{gathered} \qquad (4)$$

Теперь полученное выражение (4) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)+\rho_{10}u_{10tt}+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{10}\left(u_{10rr}-\frac{1}{r}u_{10}\right)+$$
$$+a_{10}(r,t)u_{10r}++b_{10}(r,t)u_{10t}+c_{10}(r,t)u_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{jn}(u_{jnrr}+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn})+\rho_{jn}u_{jntt}+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jnrr}-\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+$$
$$\left.\left.+\frac{(k_2-k_1)n}{2}e_{jn}\left(u_{jnr}-\frac{u_{jn}}{2r}\right)+a_{jn}(r,t)u_{jnr}+b_{jn}(r,t)u_{jnt}+c_{jn}(r,t)u_{jn}\right]\right\}=0, \tag{5}$$

$$\rho_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ d_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$
$$d_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n}=-\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$
$$a_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$
$$b_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho b\cos n\theta d\theta,\ b_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho b\sin n\theta d\theta,$$
$$c_{1n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(a_1\sin\theta-a_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r}+c\cos n\theta\right]d\theta,$$
$$c_{2n}=\int\limits_0^{2\pi}\rho\left[(a_2\cos\theta-a_1\sin\theta)\frac{n\cos n\theta}{r}+c\sin n\theta\right]d\theta,\ n=0,1,\ldots.$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t)\rho_{10}\left(u_{10rr}+\frac{1}{r}u_{10r}\right)+\rho_{10}u_{10tt}=0,\ k(t)=\frac{k_1(t)+k_2(t)}{2}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}k(t)\rho_{j1}\left(u_{j1rr}+\frac{1}{r}u_{j1r}-\frac{u_{j1}}{r^2}\right)+\rho_{10}u_{j1tt}=\\ =\frac{(k_1-k_2)d_{10}}{2}\left(u_{10rr}-\frac{u_{10r}}{r}\right)-a_{10}u_{10r}-\\ -b_{10}u_{10t}-c_{10}u_{10},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}k(t)\rho_{jn}\left(u_{jnrr}+\frac{1}{r}u_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}u_{jn}\right)+\rho_{jn}u_{jntt}=\\=-\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(u_{jn-1rr}-\frac{1}{r}u_{jn-1r}-\right.\\\left.-\frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1}\right)-\frac{(k_2-k_1)(n-1)}{r}e_{jn-1}\left(u_{jn-1r}-\frac{u_{jn-1}}{r}\right)-\\-a_{jn-1}u_{jn-1r}-b_{jn-1t}u_{jn-1t}-c_{jn-1}u_{jn-1},\ j=1,2,\ n=2,3,\ldots.\end{gathered}\tag{8}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10},\ u_{jn}\}$, $j=1,2$, $n=1,2,\ \ldots$ – решение системы (6)–(8), то оно является и решением уравнения (5).

Далее, учитывая ортогональность систем тригонометрических функций $\{1,\ \cos n\theta,\ \sin n\theta,\ n=1,2,\ldots\}$ на отрезке $[0,2\pi]$ [6] из краевого условия (2) в силу (3) будем иметь

$$u_{10}(r,\beta)=\varphi_{10}(r),\ u_{10}(1,t)=\psi_{10}(t),\ u_{10}(r,0)=\tau_{10}(r),\tag{9}$$

$$\begin{gathered}u_{jn}(r,\beta)=\varphi_{jn}(r),\ u_{jn}(1,t)=\psi_{jn}(t),\\u_{jn}(r,0)=\tau_{jn}(r),\ j=1,2,\ n=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{10}$$

$$\varphi_{10}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(r,0)d\theta,\ \psi_{10}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t,0)d\theta,\ \tau_{10}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau(r,0)d\theta,$$

$$\varphi_{1n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \psi_{1n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t,\theta)\cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau(r,\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ \varphi_{2n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$\psi_{2n}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t,\theta)\sin n\theta d\theta,\ \tau_{2n}(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau(r,\theta)\sin n\theta d\theta.$$

Таким образом, задача D сведена к системе задач Дирихле для уравнений (6)–(8) с данными (9) и (10). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (6)–(8) можно представить в виде

$$k(t)\left(u^k_{nrr}+\frac{1}{r}u^k_{nr}-\frac{n^2}{r^2}u_n\right)+u_{ntt}=f^k_n(r,t),\ n=0,1,\dots, \tag{11}$$

где $f_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r,t)\equiv 0$.

В [4] получен следующий результат.

Лемма. *Задачи для уравнения (11) с краевыми условиями (9) и (10) имеют единственные решения.*

Следовательно, сначала решив задачу (6), (9) ($j=1, n=0$), а затем (7), (10) ($j=1,2, n=1$) и т.д., найдем последовательно все $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2,\ n=1,2,\dots$.

Итак, показано, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\rho(\theta)Lud\theta=0. \tag{12}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty((0,2\pi))$ плотна в $L_2((0,2\pi))$, а $T(t)\in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes(0,2\pi)\otimes V_1$ плотна в $L_2(D_\beta)$ Отсюда и из (12) следует, что

$$\int\limits_{D_\beta}f(r,\theta,t)LudD_\beta=0$$

и

$$Lu=0\quad\forall(r,\theta,t)\in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи D является функция (3), где $u_{10}(r,t)$, $u_{jn}(r,t)$, $j=1,2$, $n=1,2,...$, определяются из предыдущих двумерных задач.

Из теории рядов Фурье (см., например, [7]) следует, что если функция $u(r,\theta,t)\in C(\overline{D_\beta})\cap C^2(D_\beta)$, то ряд Фурье и ее дважды продиффернцированные ряды по системам функций $\{cosn\theta, sinn\theta\}$, $n=1,2,\dots$ сходятся абсолютно и равномерно, а также имеют место оценки

$$|u_{10}|<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}n^k|u_{in}|<\infty,\ i=1,2;\ k=0,1,2.$$

Учитывая гладкость коэффициентов уравнения (1) и заданных граничных данных, для решения $u(r,\theta,t)$ получаем такие же оценки.

Отсюда следует, что ряд (3), а также дважды продиффернцированные его ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Значит, полученное решение (3) принадлежит искомому классу $C(\overline{D_\beta})\cap C^2(D_\beta)$. Разрешимость задачи D установлена.

В [4] приводятся явные виды решений задач (11), (9) и (11), (10), поэтому можно записать представления решения и для задачи D.

Теорема доказана.

Отметим, что данный результат для модельного вырождающегося трехмерного эллиптического уравнения изложен в [8].

Литература

1 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

2 Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.:Наука, 1966. – 203 с.

3 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 6. – С. 936-939.

5 Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966.

6 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

7 Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Л.-М.: Гос. изд. техн. теор. литры, 1950. – Т. 2. – 622 с.

8 Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося трехмерного эллиптического уравнения // Материалы VII межд. научной конф. им. акад. И.И. Ляшко. – Киев: КНУ им. Т.Г. Шевченко, 2014. – С. 14-15.

Статья поступила в редакцию 07.02.2017

Aldashev S.A. CORRECTNESS OF DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR THREE-DIMENSIONAL DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

Earlier, the author shows the unique solvability of classical solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional degenerate elliptic equations. In this study, we found a new class of three-dimensional degenerate elliptic equations, for which in a cylindrical area the Dirichlet problem has a unique solution. In this case its explicit form is obtained.

Алдашев С.А. АЗҒЫНДАЛҒАН ҮШ ӨЛШЕМДІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ЦИЛИНДРЛІК ОБЛЫСТА ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТІЛІГІ

Автор бұрын цилиндрлік облыстағы азғындалған үш өлшемді эллипстік теңдеулер үшін Дирихле есебінің классикалық шешімінің нақты шешімділігін көрсеткен. Бұл жұмыста азғындалған үш өлшемді эллипстік теңдеулердің жаңа класы табылған, олар үшін цилиндрлік облыста Дирихле есебінің жалғыз шешімі бар болады, оған қоса оның айқын түрі келтіріледі.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 13–30.

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ М. БИО. 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ И ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Л.А. Алексеева[1], Е.Б. Курманов[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]alexeeva@math.kz, [2]ergaly_90@mail.ru

Аннотация: Рассматривается двухкомпонентная среда М.Био, содержащая упругую и жидкую компоненты. Для построения решений системы уравнений движения этой среды строится обобщенное преобразование Фурье фундаментальных решений, описывающих движение среды при действии импульсных сосредоточенных источников. Для построения трансформанты Фурье используется дивиргентный метод, который позволяет определить вначале трансформанты дивиргенций перемещений упругой и жидкой компонент, а затем построить решение системы в пространстве изображений Фурье. Поскольку фундаментальные решения уравнений определяются с точностью до решений однородной системы уравнений, их обобщенное преобразование Фурье определяет целый класс оригиналов с различными асимптотическими свойствами. Для выделения физического фундаментального решения, удовлетворяющего условиям излучения (тензора Грина), проводится регуляризация этого пребразования. Восстановление оригинала зависит от размерности задачи и будет предложено в продолжении этой статьи.

Ключевые слова: Среда Био, волны, фундаментальное решение, обобщенное преобразование Фурье, регуляризация.

Анализ последствий сейсмического воздействия на сооружения различного назначения свидетельствуют о том, что их прочность и надежность существенно зависят от геологического строения и физико-механических свойств окружающего массива, вида и энергии сейсмической волны. Уже

Keywords: *Biot's medium, waves, fundamental solution, generalized Fourier transform, regularization.*

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05,74K25.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0824/ГФ4.

давно ведутся интенсивные исследования влияния этих факторов на математических моделях изотропных и анизотропных упругих сред. Но эти модели не учитывают многие реальные, существенные для практики, свойства окружающего массива. Таковыми являются, например, наличие грунтовых вод, которое осложняет строительство и эксплуатацию наземных и подземных сооружений, влияет на величину и распределение напряжений.

Моделями, с помощью которых учитывается водонасыщенность слагающих земную кору структур, наличие пузырьков газа и т.д., являются многокомпонентные среды. Разнообразие многокомпонентных сред, сложность процессов, связанных с их деформацией, приводят к большому различию в методике их изучения и построении моделей, применяемых при решении волновых задач.

Пористая среда, насыщенная жидкостью или газом, с точки зрения механики сплошной среды, – это, по существу, двухфазная сплошная среда, одной из фаз которой являются частицы жидкости (газа), другой – твердые частицы скелета среды. Существуют различные математические модели таких сред, разработанные различными авторами. Наиболее известные из них – это модели М. Био [1], [2], Френкеля [3], В.Н. Николаевского [4], Л.П. Хорошуна [5]. Однако, класс решенных для них задач очень ограничен и, в основном, связан с построением и исследованием частных решений этих уравнений на основе методов полного и неполного разделений переменных и теории специальных функций [6]. Отметим здесь работы казахстанских механиков школы академика Ержанова Ж.С., исследовавших процессы дифракции сейсмических волн на круговых тоннелях и трубопроводах в двухкомпонентной водонасыщенной среде Био и воздействие движущихся транспортных нагрузок в них на окружающий массив [7]–[11].

В связи с этим актуальной является разработка эффективных методов решения краевых задач для таких сред с применением современных математических методов. Одним из таких методов является метод обобщенных функций, базирующийся на построении фундаментальных решений уравнений движения среды при действии импульсных сосредоточенных источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями. Знание таких решений позволяет решать краевые задачи для таких сред в односвязных и многосвязных областях со сложной геометрией границ на основе теории потенциала, метода обобщенных функций, метода граничных элементов и т.п.

Здесь на основе прямого преобразования Фурье уравнений движения среды М. Био при действии импульсных сосредоточенных источников строится преобразование Фурье фундаментальных решений. Поскольку фундаментальные решения уравнений определяются с точностью до решений однородной системы уравнений, их обобщенное преобразование Фурье определяет целый класс оригиналов с различными асимптотическими свойствами. Для выделения физического фундаментального решения, удовлетворяющего условиям излучения (тензора Грина), проводится регуляризация этого преобразования. Построенная трансформанта Фурье этого тензора позволяет строить оригиналы фундаментальных решений в нестационарном случае и при стационарных гармонических колебаниях, а также для пространств разной размерности, что позволяет использовать их для исследования плоской и пространственной деформаций деформируемых твердых водонасыщенных сред.

1. Параметры и уравнения движения среды М. Био

Уравнения движения однородной изотропной двухкомпонентной среды М. Био описываются следующей системой гиперболических уравнений второго порядка [1], [2]:

$$\begin{gathered} l\,(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^s+\mu\Delta u^s+Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^f+F^s\,(x,t)=\rho_{11}\ddot{u}^s+\rho_{12}\ddot{u}^f,\\ Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^s+R\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^f+F^f\,(x,t)=\rho_{12}\ddot{u}^s+\rho_{22}\ddot{u}^f, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x\in R^N$, t – время, $u^s(x,t)$ – вектор перемещений упругого скелета, $u^f(x,t)$ – вектор перемещений жидкости. Константы ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} имеют размерность плотности и связаны с плотностью масс ρ_s частиц, слагающих скелет, и плотностью жидкости ρ_f соотношениями:

$$\rho_{11}=(1-m)\,\rho_s-\rho_{12},\quad \rho_{22}=m\rho_f-\rho_{12},$$

где m – пористость среды. Константа присоединенной плотности ρ_{12} связана с дисперсией отклонения микроскоростей частиц жидкости в порах от средней скорости потока жидкости и зависит от геометрии пор. Здесь N – размерность пространства. При N=1 уравнения описывают динамику пористых стержней, при плоской деформации N=2, общей пространственной деформации соответствует N=3. Проведенные ниже построения верны и для пространств большей размерности.

Константы λ, μ – параметры Ламе изотропного упругого скелета, а Q, R характеризуют взаимодействие скелета с жидкостью на основе закона Био для напряжений:

$$\begin{array}{l} \sigma_{ij} = \left(A\partial_k u_k + Q\partial_k U_k\right)\delta_{ij} + N\left(\partial_i u_i + \partial_j u_i\right), \\ \sigma = -mp = R\partial_k U_k + Q\partial_k u_k. \end{array} \qquad (2)$$

Здесь $p(x,t)$ – давление в жидкости, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

2. Постановка задачи. Тензор Грина среды Био

Тензор Грина – это матрица фундаментальных решений

$$U(x,t) = \left\{U_l^k\ (x,t)\right\}\ \ (l,k = 1,...,2N),$$

k-ый столбец которой является решением системы (1) при действии импульсного сосредоточенного источника, описываемого сингулярными обобщенными силами с помощью δ-функции:

$$F_{sj} = \delta\left(x\right)\delta\left(t\right)\delta_j^{[k]}, \quad F_{fj} = \delta\left(x\right)\delta\left(t\right)\delta_{j+N}^{[k]}, \quad j = 1,...N,\ k = 1,...,2N.$$

Первые N компонент каждого столбца описывают перемещения упругой компоненты, следующие N компонент определяют смещения жидкости.

Для его построения запишем уравнения (1) покомпонентно:

$$\begin{array}{l} \left(\lambda+\mu\right)U_{j,ji}^k + \mu U_{i,jj}^k + QU_{j,ji}^{k+N} + \delta(x)\delta(t)\delta_j^k = \rho_{11}U_i^k,_{tt} + \rho_{12}U_i^{k+N} \\ QU_{j,ji}^k + RU_{j,ji}^{k+N} + \delta\left(x\right)\delta\left(t\right)\delta_{j+N}^k = \rho_{12}U_i^k,_{tt} + \rho_{22}U_i^{k+N}, \end{array} \qquad (3)$$

$j = 1,...N,\ k = 1,...,2N$. Здесь по повторяющимся индексам всюду проводится тензорная свертка от 1 до N. В индексах после запятой подразумеваются частные производные по соответствующей пространственной переменной или времени.

Тензор Грина должен удовлетворять следующим условиям излучения:

$$\begin{array}{ll} U(x,t) = 0 & t < 0, \\ U(x,t) = 0 & t > c_1. \end{array} \qquad (4)$$

Здесь c_1 – максимальная из трех скоростей распространения волн в среде Био, которые равны

$$c_1^2 = \frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_3}}{2\alpha_2}, \quad c_2^2 = \frac{\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_3}}{2\alpha_2}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\rho_{22}\mu}{\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)}}, \tag{5}$$

$\alpha_1 = (\lambda + 2\mu)\,\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12}, \quad \alpha_2 = \rho_{11}\rho_{22}-(\rho_{12})^2\,, \alpha_3 = (\lambda + 2\mu)\,R-Q^2.$

Первые две описывают скорости распространения двух типов продольных волн (*дилатационные* волны), которые распространяются в среде Био. Вторую, более медленную волну называют *волной переупаковки*. Третья скорость соответствует поперечным волнам (*волны сдвига*), при $\rho_{12} = 0$ она совпадает со скоростью распространения поперечных волн в упругом скелете.

Введем скорости продольных волн в упругой компоненте:

$$c_s = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{11}}}, \qquad c_f = \sqrt{\frac{R}{\rho_{22}}}.$$

Первая скорость соответствует продольным волнам в упругом скелете, вторая – в идеальной сжимаемой жидкости.

Знание тензора Грина позволяет строить решения уравнений (1) при произвольных массовых силах в виде сверток в пространстве обобщенных функций:

$$u_{si} = \sum_{j=1}^{2N} U_i^j * F_j, \qquad u_{fi} = \sum_{j=1}^{2N} U_{i+N}^j * F_j, \quad i = 1, ..., N. \tag{6}$$

Требуется построить тензор Грина для среды Био. Для этого используем аппарат преобразования Фурье обобщенных функций.

3. Преобразование Фурье фундаментальных решений и их дивергенций

Прямая и обратная формулы преобразования Фурье для регулярных функций имеют вид

$$\overline{\varphi}\,(\xi,\omega) = \int\limits_{R^{N+1}} \varphi\,(x,t)\,e^{i((\xi,x)+\omega t)}dx,$$
$$\varphi\,(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int\limits_{R^{N+1}} \overline{\varphi}\,(x,t)\,e^{-i((\xi,x)+\omega t)}d\xi d\omega.$$

Для обобщенных функций

$$(\overline{f}, \varphi) = (f, \overline{\varphi}), \tag{7}$$

где $\xi = (\xi_1, ...\xi_N)\,, \omega$ – параметры преобразования Фурье по координатам и времени, $dx = dx_1...dx_N$. Свойства преобразования Фурье производной:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \leftrightarrow -i\xi_j, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \tag{8}$$

позволяют перейти от дифференциальных уравнений (3) к алгебраическим тензорным уравнениям для трансформанты Фурье $\overline{U}_l^k$:

$$\begin{aligned} -(\lambda+\mu)\,\xi_j\xi_l\overline{U}_l^k - \mu\,\|\xi\|^2\,\overline{U}_j^k - Q\xi_j\xi_l\overline{U}_{l+N}^k + \\ +\rho_{11}\omega^2\overline{U}_j^k + \rho_{12}\omega^2\overline{U}_{j+N}^k + \delta_j^k = 0, \\ -Q\xi_j\xi_l\overline{U}_l^k - R\xi_j\xi_l\overline{U}_{l+N}^k + \rho_{12}\omega^2\overline{U}_j^k + \\ +\rho_{22}\omega^2\overline{U}_{j+N}^k + \delta_{j+N}^k = 0,\ j,l = \overline{1,N},\ k = \overline{1,2N} \end{aligned} \tag{9}$$

Систему удобно представить в виде

$$\begin{aligned} -(\lambda+\mu)\,\xi_j\theta_s^k - \mu\,\|\xi\|^2\,U_j^k - Q\xi_j\theta_f^k + \rho_{11}\omega^2 U_j^k + \rho_{12}\omega^2 U_{j+N}^k + \delta_j^k = 0, \\ -Q\xi_j\theta_s^k - R\xi_j\theta_f^k + \rho_{12}\omega^2 U_j^k + \rho_{22}\omega^2 U_{j+N}^k + \delta_{j+N}^k = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\theta_s^{\mathrm{k}} = \xi_j\overline{U}_j^k,\ \theta_f^k = \xi_j\overline{U}_{j+N}^k$. Очевидно,

$$-i\theta_{\mathrm{s}}^k = F[\partial_j U_j^k], \quad -i\theta_{\mathrm{f}}^k = F[\partial_j U_{j+N}^k]. \tag{11}$$

Поскольку матрица фундаментальных решений неоднозначна, определяется с точностью до решения однородной системы уравнений, решение системы (10) не является обобщенной функцией, но определяет целый класс фундаментальных решений (1). Для построения тензора Грина требуется регуляризация решения системы (10) в соответствии с условиями излучения.

4. Определение трансформант дивергенций перемещений упругой и жидкой компоненты фундаментальных решений

Введем следующие функции:

$$f_{0k}(\xi,\omega)=\frac{1}{c_k^2\left\|\xi\right\|^2-\omega^2},\quad f_{jk}(\xi,\omega)=\frac{1}{\omega^j\left(c_k^2\left\|\xi\right\|^2-\omega^2\right)}. \tag{12}$$

Лемма 1. *Трансформанты Фурье дивиргенций*

$$-i\theta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}}=F[\partial_j U_j^k],\quad -i\theta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{k}}=F[\partial_j U_{j+N}^k]$$

можно представить в следующем виде:
при $k=\overline{1,N}$

$$\theta_s^k=-D_1\xi_k\left(b_{s1}f_{01}(\xi,\omega)-b_{s2}f_{02}(\xi,\omega)\right),$$
$$\theta_f^k=-D_1\xi_k\left(b_{f1}f_{01}(\xi,\omega)-b_{f2}f_{02}(\xi,\omega)\right);$$

при $k=\overline{N+1,2N}$

$$\theta_s^k=-\xi_{k-N}D_1\left(b_{f1}f_{01}(\xi,\omega)-b_{f2}f_{02}(\xi,\omega)\right),$$
$$\theta_f^k=-\xi_{k-N}D_1\left(d_{s1}f_{01}(\xi,\omega)-d_{s2}f_{02}(\xi,\omega)\right).$$

Здесь константы выражаются через параметры среды Био формулами:

$$D_1=\left\{\alpha_2\left(c_1^2-c_2^2\right)\right\}^{-1},$$
$$b_{s1}=\rho_{22}\left(c_f^2-c_1^2\right),\ b_{s2}=\rho_{22}\left(c_f^2-c_2^2\right),$$
$$b_{f1}=\left(\rho_{12}c_1^2-Q\right),\ b_{f2}=\left(\rho_{12}c_2^2-Q\right),$$
$$d_{s1}=\rho_{11}\left(c_1^2-c_s^2\right),\ d_{s2}=\rho_{11}\left(c_2^2-c_s^2\right).$$

Доказательство. Систему (12) умножим на ξ_j, свернем по j и получим систему из двух уравнений для определения θ_s^k, θ_f^k:

$$\left(\rho_{11}\omega^2-(\lambda+2\mu)\left\|\xi\right\|^2\right)\theta_s^k+\left(\rho_{12}\omega^2-Q\left\|\xi\right\|^2\right)\theta_f^k=-\delta_j^k\xi_j,$$
$$\left(\rho_{12}\omega^2-Q\left\|\xi\right\|^2\right)\theta_s^k+\left(\rho_{22}\omega^2-R\left\|\xi\right\|^2\right)\theta_f^k=-\delta_{j+N}^k\xi_j. \tag{13}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta_\theta(\xi,\omega)=\alpha_2(c_1^2\left\|\xi\right\|^2-\omega^2)(c_2^2\left\|\xi\right\|^2-\omega^2). \tag{14}$$

Построим решение (13) при $k=\overline{1,N}$ (действующая сила в упругом скелете):

$$\begin{gathered}\Big(-(\lambda+2\mu)\left\|\xi\right\|^2+\rho_{11}\omega^2\Big)\,\theta_s^k+\Big(\rho_{12}\omega^2-Q\left\|\xi\right\|^2\Big)\,\theta_f^k=-\delta_j^k\xi_j,\\ \Big(\rho_{12}\omega^2-Q\left\|\xi\right\|^2\Big)\,\theta_s^k+\Big(\rho_{22}\omega^2-R\left\|\xi\right\|^2\Big)\,\theta_f^k=0,\quad k=1,2.\end{gathered}$$

Разрешая эту систему, с учетом введенных обозначений получим

$$\theta_s^k=\frac{-\xi_k(\rho_{22}\omega^2-R\|\xi\|^2)}{\alpha_2\ (c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)}=$$

$$=-\frac{\xi_k}{\alpha_2\ (c_1^2-c_2^2)}(\frac{b_{s1}}{c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2}-\frac{b_{s2}}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)})=$$

$$=-D_1\xi_k(b_{s1}f_{1k}(\xi,\omega)-b_{s2}f_{02}(\xi,\omega)), \tag{15}$$

$$\theta_f^k=\frac{\xi_k(\rho_{12}\omega^2-Q\|\xi\|^2)}{\alpha_2\ (c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)}=$$

$$=-\frac{\xi_k}{\alpha_2\ (c_1^2-c_2^2)}\{\frac{b_{f1}}{c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2}-\frac{b_{f2}}{c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2}\}=$$

$$=-D_1\xi_k(b_{f1}f_{1k}(\xi,\omega)-b_{f2}f_{02}(\xi,\omega)). \tag{16}$$

Построим решение (13) при $k=\overline{N+1,2N}$ (действующая сила в жидкости):

$$\begin{gathered}(-(\lambda+2\mu)\|\xi\|^2+\rho_{11}\omega^2)\theta_s^k+(\rho_{12}\omega^2-Q\|\xi\|^2)\theta_f^k=0,\\ (\rho_{12}\omega^2-Q\|\xi\|^2)\theta_s^k+(\rho_{22}\omega^2-R\|\xi\|^2)\theta_f^k=-\delta_{j+N}^k\xi_j,\end{gathered} \tag{17}$$

где $k = 3, 4,\ \ j = 1, 2,$

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_k = \theta_s^k = \frac{\delta_{j+N}^k \xi_j (\rho_{12}\omega^2 - Q\|\xi\|^2)}{\alpha_2\ (c_1^2\|\xi\|^2 - \omega^2)(c_2^2\|\xi\|^2 - \omega^2)} = \\
= -\frac{\xi_{k-N}}{\alpha_2\ (c_1^2 - c_2^2)}\Big(\frac{\rho_{12}c_1^2 - Q}{c_1^2\|\xi\|^2 - \omega^2} - \frac{\rho_{12}c_2^2 - Q}{({}_2^2\|\xi\|^2 - \omega^2)}\Big) = \\
= -\xi_{k-N} D_1 (b_{f1} f_{01}(\xi, \omega) - b_{f2} f_{02}(\xi, \omega)), \\
\tilde{E}_k = \theta_f^k = -\frac{\delta_{j+N}^k \xi_j ((\lambda + 2\mu)\|\xi\|^2 + \rho_{11}\omega^2)}{\alpha_2\ (c_1^2\|\xi\|^2 - \omega^2)(c_2^2\|\xi\|^2 - \omega^2)} = \\
= -\frac{\xi_{k-N}}{\alpha_2\ (c_1^2 - c_2^2)}\Big(\frac{\rho_{11}(c_1^2 - c_s^2)}{c_1^2\|\xi\|^2 - \omega^2} - \frac{\rho_{11}(c_2^2 - c_s^2)}{(c_2^2\|\xi\|^2 - \omega^2)}\Big) = \\
= -\xi_{k-N} D_1 (d_{s1} f_{01}(\xi, \omega) - d_{s2} f_{02}(\xi, \omega)).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для* $k = \overline{1, N}$ *имеет место следующее разложение:*

$$
\frac{\theta_s^k}{c_3^2\|\xi\|^2 - \omega^2} = \frac{\xi_k}{\omega^2}\{h_{s1} f_{01} - h_{s2} f_{02} - h_{s3} f_{03}\},
$$

$$
\frac{\theta_f^k}{\omega^2 - c_3^2\|\xi\|^2} = \frac{\xi_k}{\omega^2}\{h_{f2} f_{02} - h_{f1} f_{01} + h_{f3} f_{03}\},
$$

где

$$
\begin{aligned}
&h_{s1} = \tfrac{D_1 b_{s1} c_1^2}{\left(c_3^2 - c_1^2\right)} = \tfrac{D_1 \rho_{22} c_1^2 \left(c_f^2 - c_1^2\right)}{\left(c_3^2 - c_1^2\right)}, \quad h_{s2} = \tfrac{D_1 b_{s2} c_2^2}{\left(c_3^2 - c_2^2\right)} = \tfrac{D_1 \rho_{22} c_2^2 \left(c_f^2 - c_2^2\right)}{\left(c_3^2 - c_2^2\right)}, \\
&h_{s3} = \tfrac{\rho_{22} c_3^2}{\alpha_2} \tfrac{\left(c_f^2 - c_3^2\right)}{\left(c_3^2 - c_1^2\right)\left(c_3^2 - c_2^2\right)}, \quad h_{f1} = \tfrac{D_1 b_{f1} c_1^2}{\left(c_3^2 - c_1^2\right)} = c_1^2 \tfrac{D_1 b_{f1}}{\left(c_3^2 - c_1^2\right)}, \\
&h_{f2} = \tfrac{D_1 b_{f2} c_2^2}{\left(c_3^2 - c_2^2\right)} = c_2^2 \tfrac{D_1 b_{f2}}{\left(c_3^2 - c_2^2\right)}, \quad h_{f3} = \tfrac{c_3^2 \left(c_3^2 \rho_{12} - Q\right)}{\alpha_2 \left(c_3^2 - c_1^2\right)\left(c_3^2 - c_2^2\right)}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Используя формулы Леммы 1, получим

$$\frac{\theta_s^k}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}=D_1\xi_k\left(\frac{b_{s1}}{\left(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}-\frac{b_{s2}}{\left(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}\right)\frac{1}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}=$$
$$=D_1\xi_k\left\{\frac{b_{s1}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)\omega^2}\left(\frac{c_1^2}{\left(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}-\frac{c_3^2}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{b_{s2}}{\left(c_3^2-c_2^2\right)\omega^2}\left(\frac{c_2^2}{\left(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}-\frac{c_3^2}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}\right)\right\}=$$
$$=D_1\xi_k\left\{\frac{b_{s1}c_1^2}{\left(c_3^2-c_1^2\right)\omega^2}f_{01}-\frac{b_{s2}c_2^2}{\left(c_3^2-c_2^2\right)\omega^2}f_{02}-\left(\frac{b_{s1}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)}-\frac{b_{s2}}{\left(c_3^2-c_2^2\right)}\right)\frac{c_3^2}{\omega^2}f_{03}\right\},$$
$$\frac{b_{s1}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)}-\frac{b_{s2}}{\left(c_3^2-c_2^2\right)}=\frac{\rho_{22}\left(c_f^2-c_1^2\right)}{\left(c_3^2-c_1^2\right)}-\frac{\rho_{22}\left(c_f^2-c_2^2\right)}{\left(c_3^2-c_2^2\right)}=$$
$$=\frac{\rho_{22}\left\{\left(c_1^2-c_2^2\right)\left(c_f^2-c_3^2\right)\right\}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)\left(c_3^2-c_2^2\right)}=h_{s3}.$$

С учетом введенных обозначений для констант, отсюда следует первая формула леммы.

Аналогично доказывается вторая формула леммы.

Лемма 3. *Для* $k=\overline{N+1,2N}$ *имеет место следующее разложение*:

$$\frac{\theta_s^k}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}=\frac{\xi_{k-N}}{\omega^2}\left\{h'_{s1}f_{01}-h'_{s2}f_{02}-h'_{s3}f_{03}\right\},$$

$$\frac{\theta_f^k}{\left(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2\right)}=\frac{\xi_k}{\omega^2}\left\{h'_{f1}f_{01}-h'_{f2}f_{02}-h'_{f3}f_{03}\right\},$$

где введены константы:

$$h'_{s1}=\frac{D_1c_1^2b_{f1}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)},\quad h'_{s2}=\frac{D_1c_2^2b_{f2}}{\left(c_3^2-c_2^2\right)},\quad h'_{s3}=\frac{c_3^2b_{f3}}{\alpha_2\left(c_3^2-c_1^2\right)\left(c_3^2-c_2^2\right)},\quad b_{f3}=\rho_{12}c_3^2-Q,$$
$$h'_{f1}=\frac{D_1b_{f1}c_1^2}{\left(c_3^2-c_1^2\right)},\quad h'_{f1}=\frac{D_1b_{f2}c_2^2}{\left(c_3^2-c_2^2\right)},\quad h'_{f3}=c_3^2\left(\frac{b_{f1}}{\left(c_3^2-c_1^2\right)}-\frac{b_{f2}}{\left(c_3^2-c_2^2\right)}\right),$$

Доказательство.

$$\frac{\theta_s^k}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)} = D_1\xi_{k-N}\left(\frac{b_{f1}}{(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right)\frac{1}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)} =$$
$$= D_1\xi_{k-N}\left\{\frac{b_{f1}}{(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right\} =$$
$$= D_1\xi_{k-N}\left\{\frac{b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)\omega^2}\left(\frac{c_1^2}{(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{c_3^2}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)\omega^2}\left(\frac{c_2^2}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{c_3^2}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right)\right\} =$$
$$= D_1\xi_{k-N}\left\{\frac{b_{f1}c_1^2}{(c_3^2-c_1^2)\omega^2}f_{01} - \frac{b_{f2}c_2^2}{(c_3^2-c_2^2)\omega^2}f_{02} - \left(\frac{b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)}\right)\frac{c_3^2}{\omega^2}f_{03}\right\}.$$

С учетом введенных обозначений отсюда следует первая формула леммы. Аналогично получаем вторую формулу.

$$\frac{\theta_f^k}{(\omega^2-c_3^2\|\xi\|^2)} = -D_1\xi_k\left(\frac{b_{f1}}{(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right)\frac{1}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)} =$$
$$= -D_1\xi_k\left\{\frac{b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)\omega^2}\left(\frac{c_1^2}{(c_1^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{c_3^2}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)\omega^2}\left(\frac{c_2^2}{(c_2^2\|\xi\|^2-\omega^2)} - \frac{c_3^2}{(c_3^2\|\xi\|^2-\omega^2)}\right)\right\} =$$
$$= -D_1\xi_k\left\{\frac{b_{f1}c_1^2}{(c_3^2-c_1^2)\omega^2}f_{01} - \frac{b_{f2}c_2^2}{(c_3^2-c_2^2)\omega^2}f_{02} - \left(\frac{b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)}\right)\frac{c_3^2}{\omega^2}f_{03}\right\},$$

$$\frac{b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)} - \frac{b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)} = \frac{(\rho_{12}c_1^2-Q)}{(c_3^2-c_1^2)} - \frac{(\rho_{12}c_2^2-Q)}{(c_3^2-c_2^2)} = \frac{(c_1^2-c_2^2)(c_3^2\rho_{12}-Q)}{(c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)} = h'_{f3}.$$

5. Представление трансформанты Фурье $\overline{U}_j^k$

Теорема 1. *Трансформанта Фурье* $\overline{U}_j^k$ *имеет вид*

$$j = \overline{1,N},\ k = \overline{1,N},$$

$$\overline{U}_j^k = \xi_j\xi_k[\beta_1 f_{21} + \beta_2 f_{22} + \beta_3 f_{23}] + \frac{\rho_{22}}{\alpha_2}\delta_j^k f_{03},$$
$$\overline{U}_{j+N}^k = \xi_j\xi_k[\gamma_1 f_{21} - \gamma_2 f_{22} - \gamma_3 f_{23}] + \frac{(c_3^2\rho_{11}-\mu)}{\alpha_2 c_3^2}f_{03} - \frac{\mu}{\alpha_2 c_3^2}\frac{1}{\omega^2}; \tag{19}$$

$$j=\overline{1,N},\ k=\overline{N+1,2N},$$

$$\begin{aligned}\overline{U}_j^k &= \xi_j\xi_{k-N}\left[\beta_1 f_{21}+\beta_2 f_{22}+\beta_3 f_{23}\right]-\tfrac{\rho_{12}}{\alpha_2}\delta_{j+N}^k f_{03},\\ \overline{U}_{j+N}^k &= \xi_j\xi_{k-N}\left[\gamma_1 f_{21}-\gamma_2 f_{22}-\gamma_3 f_{23}\right]+\tfrac{\left(c_3^2\rho_{11}-\mu\right)}{\alpha_2 c_3^2}f_{03}-\tfrac{\mu}{\alpha_2 c_3^2}\tfrac{1}{\omega^2};\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$\begin{cases}\beta_1=\frac{D_1\rho_{22}c_1^2}{\alpha_2\left(c_3^2-c_1^2\right)}\left(d_1\left(c_f^2-c_1^2\right)-\frac{d_2}{\rho_{22}}b_{f1}\right),\\ \beta_2=\frac{D_1\rho_{22}c_2^2}{\alpha_2\left(c_3^2-c_2^2\right)}\left(\frac{d_2}{\rho_{22}}b_{f2}-d_1\left(c_f^2-c_2^2\right)\right),\\ \beta_3=\frac{\rho_{22}c_3^2}{\alpha_2\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)\left(c_3^2-c_1^2\right)\left(c_3^2-c_2^2\right)}\left(\frac{d_2}{\rho_{22}}b_{f3}-d_1\left(c_f^2-c_3^2\right)\right).\end{cases}$$

$$d_1=\left(\left(\lambda+\mu\right)\rho_{22}-Q\rho_{12}\right),\ d_2=\left(Q\rho_{22}-R\rho_{12}\right),\ d_3=\left(\rho_{11}R-Q\rho_{12}\right),$$

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{D_1c_1^2}{\alpha_2\left(c_3^2-c_1^2\right)}\left(q_1b_{f1}+q_2\rho_{22}\left(c_f^2-c_1^2\right)\right),\\ \gamma_2&=\frac{D_1c_2^2}{\alpha_2\left(c_3^2-c_2^2\right)}\left(q_1b_{f2}+q_2\rho_{11}\left(c_2^2-c_s^2\right)\right),\\ \gamma_3&=\frac{c_3^2}{\left(\alpha_2\right)^2\left(c_3^2-c_1^2\right)\left(c_3^2-c_2^2\right)}\left(q_1b_{f3}+q_2\rho_{11}\left(c_3^2-c_s^2\right)\right).\end{aligned}$$

$$q_1=-\mu\left\|\xi\right\|^2Q+\left(Q\rho_{11}-\left(\lambda+\mu\right)\rho_{12}\right),\quad q_2=\left(\rho_{11}R-Q\rho_{12}\right)-\mu\left\|\xi\right\|^2R,$$
$$\beta_j=\frac{c_j^2}{\alpha_1\alpha_2\left(c_j^2-c_3^2\right)},\ j=1,2;$$

Доказательство. Трансформанту тензора Грина можно определить из уравнений (12), записав их в виде

$$\begin{aligned}\left(-\mu\left\|\xi\right\|^2+\rho_{11}\omega^2\right)\overline{U}_j^k+\rho_{12}\omega^2\overline{U}_{j+N}^k&=\left(\left(\lambda+\mu\right)\theta_s^k+Q\theta_f^k\right)\xi_j-\delta_j^k,\\ \rho_{12}\omega^2\overline{U}_j^k+\rho_{22}\omega^2\overline{U}_{j+N}^k&=\left(Q\theta_s^k+R\theta_f^k\right)\xi_j-\delta_{j+N}^k,\end{aligned}\tag{21}$$

где правая часть уравнений определена выше. Отсюда получим для $j=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,N}$:

$$\overline{U}_j^k=\frac{\bar{D}_{s1j}\theta_s^k+\bar{D}_{f1j}\theta_f^k+\bar{D}_{01j}^k}{\alpha_2\omega^2\left(\omega^2-c_3^2\left\|\xi\right\|^2\right)},\quad \overline{U}_{j+N}^k=\frac{\bar{D}_{s2j}\theta_s^k+\bar{D}_{f2j}\theta_f^k+\bar{D}_{02j}^k}{\alpha_2\omega^2\left(\omega^2-c_3^2\left\|\xi\right\|^2\right)},\tag{22}$$

$$\bar{D}_{s1j}=\left(\left(\lambda+\mu\right)\rho_{22}-Q\rho_{12}\right)\xi_j\omega^2,\quad \bar{D}_{f1j}=\left(Q\rho_{22}-R\rho_{12}\right)\xi_j\omega^2,$$

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_{s2j} &= -\mu \left\|\xi\right\|^2 Q\xi_j + \left(Q\rho_{11} - (\lambda+\mu)\,\rho_{12}\right)\xi_j\omega^2,\\
l\bar{D}_{f2j} &= \left(\rho_{11}R - Q\rho_{12}\right)\xi_j\omega^2 - \mu \left\|\xi\right\|^2 R\xi_j,\\
\bar{D}_{01j} &= \left(\delta_{j+N}^k\rho_{12} - \delta_j^k\rho_{22}\right)\omega^2,\\
\bar{D}_{02j} &= \left(\mu\left\|\xi\right\|^2 - \rho_{11}\omega^2\right)\delta_{j+N}^k - \rho_{12}\omega^2\delta_j^k.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Для восстановления оригинала аналогично используем разложение на простые дроби каждого слагаемого в (20). Для этого воспользуемся Леммой 1:

$$
\overline{U}_j^k = \frac{d_1\xi_j\theta_s^k + d_2\xi_j\theta_f^k + \left(\delta_{j+N}^k\rho_{12} - \delta_j^k\rho_{22}\right)}{\alpha_2\left(\omega^2 - c_3^2\left\|\xi\right\|^2\right)} =
$$

$$
= \frac{d_1\xi_j}{\alpha_2}\frac{\xi_k}{\omega^2}\left\{h_{s1}f_{01} - h_{s2}f_{02} - h_{s3}f_{03}\right\} + \frac{d_2\xi_j}{\alpha_2}\frac{\xi_k}{\omega^2}\left\{h_{f2}f_{02} - h_{f1}f_{01} + h_{f3}f_{03}\right\} +
$$

$$
+\left(\tfrac{\rho_{22}\delta_j^k}{\alpha_2} - \tfrac{\rho_{12}\delta_{j+N}^k}{\alpha_2}\right)f_{03} = \tfrac{d_1\xi_j\xi_k}{\alpha_2\omega^2}\left[\tfrac{D_1c_1^2b_{s1}t}{(c_3^2-c_1^2)}f_{01} - \tfrac{D_1c_2^2b_{s2}}{(c_3^2-c_2^2)}f_{02} -\right.
$$

$$
\left.-\frac{\rho_{22}c_3^2(c_f^2-c_3^2)}{\alpha_2(c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}f_{03}\right] + \frac{d_2\xi_j\xi_k}{\alpha_2\omega^2}\left[\frac{D_1c_2^2b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)}f_{02} -\right.
$$

$$
\left.-\frac{D_1c_1^2b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)}f_{01} + \frac{c_3^2(c_3^2\rho_{12}-Q)}{\alpha_2\,(c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}f_{03}\right] +
$$

$$
+\left(\frac{\rho_{22}\delta_j^k}{\alpha_2} - \frac{\rho_{12}\delta_{j+N}^k}{\alpha_2}\right)f_{03} = \xi_j\xi_k\left\{\frac{D_1\rho_{22}c_1^2}{\alpha_2\omega^2(c_3^2-c_1^2)}\left(d_1(c_f^2-c_1^2) - \frac{d_2}{\rho_{22}}b_{f1}\right)f_{01} +\right.
$$

$$
+\frac{D_1\rho_{22}c_2^2}{\alpha_2\omega^2(c_3^2-c_2^2)}\left(\frac{d_2}{\rho_{22}}b_{f2}t - d_1(c_f^2-c_2^2)\right)f_{02} +
$$

$$
+\frac{\rho_{22}c_3^2}{\alpha_2\omega^2\alpha_2\,(c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}\left(\frac{d_2}{\rho_{22}}(\rho_{12}c_3^2-Q) - d_1(c_f^2-c_3^2)\right)f_{03} +
$$

$$
+\left(\frac{\rho_{22}\delta_j^k}{\alpha_2} - \frac{\rho_{12}\delta_{j+N}^k}{\alpha_2}\right)f_{03} = \xi_j\xi_k[\beta_1f_{21} + \beta_2f_{22} + \beta_3f_{23}] +
$$

$$+\left(\frac{\rho_{22}\delta_j^k}{\alpha_2}-\frac{\rho_{12}\delta_{j+N}^k}{\alpha_2}\right)f_{03}=\overline{U}_j^k.$$

Для $j=\overline{1,N},\ k=\overline{N+1,2N}$

$$\overline{U}_{j+N}^k=\frac{q_1\xi_j\theta_s^k+q_2\xi_j\theta_f^k+\left(\mu\left\|\xi\right\|^2-\rho_{11}\omega^2\right)\delta_{j+N}^k-\rho_{12}\omega^2\delta_j^k}{\alpha_2\omega^2\left(c_3^2\left\|\xi\right\|^2-\omega^2\right)}=$$

$$=\frac{q_1\xi_j\xi_{k-N}}{\alpha_2\omega^2}\left\{h_{s1}f_{01}-h_{s2}f_{02}-h_{s3}f_{03}\right\}+\frac{q_2\xi_j\xi_{k-N}}{\alpha_2\omega^2}\left\{h_{f1}f_{01}-h_{f2}f_{02}-h_{f3}f_{03}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_2c_3^2}f_{03}(c_3^2\rho_{11}-\mu)-\frac{\mu}{\alpha_2c_3^2\omega^2}=\frac{q_1\xi_j\xi_{k-N}}{\alpha_2\omega^2}\left[\frac{D_1c_1^2b_{f1}}{(c_3^2-c_1^2)}f_{01}-\right.$$

$$\left.-\frac{D_1c_2^2b_{f2}}{(c_3^2-c_2^2)}f_{02}-\frac{c_3^2t(\rho_{12}c_3^2-Q)}{\alpha_2\ (c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}f_{03}\right]+$$

$$+\frac{q_2\xi_j\xi_{k-N}}{\alpha_2\omega^2}\left[\frac{D_1c_1^2b_{s1}}{(c_3^2-c_1^2)}f_{01}-\frac{D_1\rho_{11}c_2^2(c_2^2-c_s^2)}{(c_3^2-c_2^2)}f_{02}-\right.$$

$$\left.-\frac{c_3^2\rho_{11}(c_f^2-c_3^2)}{\alpha_2\ (c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}f_{03}\right]+\frac{1}{\alpha_2c_3^2}f_{03}(c_3^2\rho_{11}-\mu)-\frac{\mu}{\alpha_2c_3^2\omega^2}=$$

$$=\xi_j\xi_{k-N}[\frac{D_1c_1^2}{\alpha_2\omega^2(c_3^2-c_1^2)}(q_1b_{f1}+q_2b_{s1})f_{01}-$$

$$-\frac{D_1c_2^2}{\alpha_2\omega^2(c_3^2-c_2^2)}(q_1b_{f2}+q_2\rho_{11}(c_2^2-c_s^2))f_{02}-$$

$$-\frac{c_3^2}{\alpha_2\omega^2\alpha_2\ (c_3^2-c_1^2)(c_3^2-c_2^2)}(q_1(\rho_{12}c_3^2-Q)+q_2\rho_{11}(c_3^2-c_s^2))f_{03}]+$$

$$+\frac{1}{\alpha_2c_3^2}f_{03}\left(c_3^2\rho_{11}-\mu\right)-\frac{\mu}{\alpha_2c_3^2\omega^2}=\xi_j\xi_{k-N}\left[\gamma_1f_{21}-\gamma_2f_{22}-\gamma_3f_{23}\right]+$$

$$+\frac{1}{\alpha_2c_3^2}f_{03}\left(c_3^2\rho_{11}-\mu\right)-\frac{\mu}{\alpha_2c_3^2\omega^2}.$$

6. О восстановлении оригиналов фундаментальных решений

Поскольку построенная трансформанта определяет фундаментальные решения с точностью до решения однородной системы уравнений, для восстановления оригинала следует использовать условия излучения, которым должен удовлетворять *тензор Грина* $U_j^k(x,t)$:

$$U_j^k(x,t) = 0, \quad t < 0;$$

$$U_j^k(x,t) = 0, \quad \|x\| > max\{c_1 t,\, c_2 t, c_3 t\},\, t > 0.$$

Заметим, что введенные в (12) функции $f_{0k}\,(\xi,\omega)$ являются трансформантами Фурье фундаментальных решений волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi_{0k}}{\partial t^2} - c_k^2 \triangle \Phi_{0k} = \delta(x)\delta(t),$$

фундаментальные решения которого, удовлетворяющие условиям излучения

$$\Phi_{0k}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \text{ и } \|x\| > c_k t,$$

хорошо известны. Функциям $f_{2k}(\xi,\omega)$ с таким же носителем по времени соответствуют свертки по времени:

$$\Phi_{2k}(x,t) = \Phi_{1k}(x,t) *_t H(t), \quad \Phi_{1k}(x,t) = \Phi_{0k}(x,t) *_t H(t),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, преобразование Фурье которой определяется через регуляризацию функции $\frac{1}{\omega}$:

$$H^*\,(\omega) = \frac{i}{\omega + i0}. \tag{24}$$

Вид этих функций зависит от размерности пространства N. На этом мы остановимся в последующей статье для пространств размерности $N = 1, 2, 3$.

Литература

1 Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous median // Journal of Applied Physics. – 1962. – V. 33. – P. 1482-1498.

2 Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика: Периодический сборник переводов иностранных статей. – 1963. – № 6. – С. 103-134.

3 Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АНССР георг. и геофиз. – 1944. – Т. 8, № 4. – С. 133-149.

4 Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Наука, 1984. – С. 232.

5 Хорошун Л.П. К теории насыщенных пористых сред // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 12.

6 Рахматуллин Х.А., Саатов Я.У., Филиппов И.Г., Артыков Т.У. Волны в двухкомпонентных средах. – Ташкент: Наука, 1974. – С. 266.

7 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1989. – 240 С.

8 Отарбаева А.Ж., Шершнев В.В. Дисперсия поверхностных волн в среде М. Био с цилиндрической полостью // Математический журнал, 2002. – Т. 2, № 5. – С. 69-77.

9 Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Фундаментальные решения уравнений движения среды Био // Доклады НАН РК. – 1994. – № 1. – С. 3-6.

10 Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Сейсмонапряженное состояние бетонной крепи подземного сооружения в грунтах. Сборник научных трудов "Результаты комплексных исследований сейсмоактивных районов Казахстана". – Алма-Ата: Наука Каз ССР, 1984. – 188 С.

11 Alexeyeva L.A., Eskalieva A. Zh., Shershnev V.V. Stress strain state in the neighbourhood of subways and pipe lines by the action of dynamic loads // Proc. 2-Int. Symposium on Mechanical Vibrations. Islamabad. Pakistan. – 2000. – P. 286-300.

Статья поступила в редакцию 26.04.2017

Alexeyeva L.A., Kurmanov E.B. FUNDAMENTAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF MOTION EQUATIONS OF TWO-COMPONENT BIOT'S MEDIUM

1. FOURIER TRANSFORM OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS AND THEIR REGULARIZATION

The two-component Biot's medium, containing an elastic and a liquid components are considered. To determine solutions of the motion equations of this medium, the generalized Fourier transform of fundamental solutions are constructed. They describe the motion of a medium under the action of impulsive lumped sources. To construct Fourier transform, the divergent method has been used, which allows, at first to determine the transformant of the divergence of displacements of elastic and liquid components, and then to obtain a solution of the system in the Fourier space. Since the fundamental solutions of differential equations are determined up to the solutions of a homogeneous system, their generalized Fourier transform defines the class of originals with different asymptotic properties. To isolate a physical fundamental solution that satisfies to radiation conditions, the regularization of this transformation has been performed. The restoration of the original depends on the dimension of the space ($N = 1, 2, 3$) and will be proposed in the continuation of this article.

Алексеева Л.А., Құрманов Е.Б. М. БИО ЕКІКОМПОНЕНТТІ ОРТАСЫНЫҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕҢДЕУІНІҢ ФУНДАМЕНТАЛДЫ ЖӘНЕ ЖАЛПЫЛАНҒАН ШЕШІМДЕРІ. 1. ФУНДАМЕНТАЛДЫ ШЕШІМДЕРДІҢ ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯСЫ

Серпімді және сұйық компоненттерден тұратын М. Био екікомпонентті ортасы қарастырылады. Осы ортаның қозғалыс теңдеулер жүйесінің шешімдерін тұрғызу мақсатында импульсті шоғырланған шығу көздердің әсері кезіндегі ортаның қозғалысын сипаттайтын фундаменталды шешімдердің Фурье жалпыланған түрлендіруі тұрғызылады. Фурье трансформантасын тұрғызу үшін алдымен сұйық және серпімді компоненттердің ауыстырулар дивергенцияларының трансформаталарын анықтауға, одан кейін Фурье бейнелерінің кеңістігінде жүйеле шешімін тұрғызуға мүмкіндік беретін дивергентті әдіс қолданылады. Теңдеулердің фундаменталды шешімдері біртекті теңдеулер жүйесінің шешімдеріне дейінгі дәлдікпен анықталатындықтан, олардың Фурье жалпыланған түрлендіруі әртүрлі асимптотикалық қасиеттері бар түпнұсқалардың тұтастай бір класын анықтайды. Сәулелену (Грин тензоры) шартын қанағаттандыратын физикалық фундаменталды шешімді бөліп алу үшін осы түрлендірудің регуляризациясы жүргізілген. Түпнұсқаны қайта қалпына келтіру есептің өлшемділігіне байланысты және осы мақаланың жалғасында ұсынылатын болады.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 31–42.

УДК 517.75, 519.911

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.Т. Асанова[1], Х.А. Аширбаев[2], А.П. Сабалахова[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: anarasanova@list.ru; assanova@math.kz

[2,3]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова
160003, Шымкент, пр. Тауке хана, 5, e-mail: sabalahova@mail.ru

Аннотация: Исследуется линейная нелокальная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа. Рассматриваемая задача сведена к эквивалентной задаче для гиперболического уравнения с параметрами и интегральными условиями. Предлагается алгоритм нахождения решения полученной эквивалентной задачи и установлены условия его сходимости. Получены условия разрешимости нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа в терминах исходных данных.

Ключевые слова: Интегро-дифференциальное уравнение соболевского типа, нелокальная задача, алгоритм, параметр, разрешимость.

1. Введение, постановка задачи

При исследовании различных процессов химии, биологии, физики, динамики подземных грунтовых вод, экологии, финансовой математики и др. возникают краевые задачи с нелокальными условиями для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. Вопросы существования, единственности решения нелокальных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа рассматривались в работах [1]–[8]. Установлены условия разрешимости задач с нелокальными условиями для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядков. Отметим, что известные методы решения краевых задач

Keywords: *Integro-differential equation of Sobolev type, nonlocal problem, algorithm, parameter, solvability.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0822/ГФ4.

для уравнений в частных производных не всегда применимы к исследованию нелокальных задач с интегральными условиями для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Поэтому возникает потребность модификации известных методов и разработки новых подходов решения нелокальных задач с интегральными условиями. Часто используемым и наиболее естественным подходом является сведение исследуемых задач к известным краевым задачам для гиперболических уравнений второго порядка, для которых разработаны методы решения, установлены условия разрешимости, изучены качественные свойства решений и т.д. На современном этапе актуальность приобретают нелокальные задачи с интегральными условиями для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [3]–[8]. В работе [9] исследовалась нелокальная краевая задача с интегральным условием по одной из переменных для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы его нахождения. В работах [10], [11] рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений. Получены достаточные условия существования единственного классического решения исследуемой задачи в терминах коэффициентов системы и ядра интегральных слагаемых.

В настоящей работе исследуется нелокальная задача для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с интегральным условием. На основе метода введения функциональных параметров [12], [13] и результатов работ [10], [11] установлены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных.

Рассматривается нелокальная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа в области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \int_0^T \left[K_1(\tau,x)\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2} + K_2(\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x} + K_3(\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau, \qquad (1.1)$$

$$u(0,x)+\int_0^T u(\tau,x)d\tau=\varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{1.2}$$

$$u(t,0)=\psi_1(t), \qquad t\in[0,T], \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\psi_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{1.4}$$

где функции $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, $K_1(t,x)$, $K_2(t,x)$, $K_3(t,x)$ и $f(t,x)$ непрерывны на Ω, функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и удовлетворяют условию согласования $\psi_1(0)+\int_0^T \psi_1(\tau)d\tau=\varphi(0)$.

Пусть $C(\Omega,R)$ – пространство непрерывных на Ω функций $u(t,x)$ с нормой $||u||_0=\max\limits_{(t,x)\in\Omega}|u(t,x)|$.

Функция $u(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\partial x^2}\in C(\Omega,R)$, называется классическим решением задачи (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению в частных производных (1.1), интегральному условию (1.2) и краевым условиям (1.3), (1.4).

В Разделе 2 путем введения дополнительных функций задача (1.1)–(1.4) сводится к нелокальной задаче для гиперболического уравнения второго порядка с параметрами и интегральными соотношениями. В Разделе 3 полученная задача методом введения функциональных параметров переходит к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для гиперболических уравнений с параметрами, задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных соотношений. Предложен алгоритм построения приближенных решений полученной эквивалентной задачи. В Разделе 4 установлены условия разрешимости нелокальной задачи (1.1)–(1.3) и сходимость предложенного алгоритма.

2. Переход к нелокальной задаче для гиперболического уравнения с параметрами и интегральными соотношениями

На основе введения новой неизвестной функции исследуемая задача сведена к нелокальной краевой задаче для интегро-дифференциальных гиперболических уравнений и интегральному соотношению.

Вводится $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ и задача (1.1)–(1.4) переходит к нелокальной задаче с интегральным условием для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и интегральному соотношению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + C(t,x)v + D(t,x)u + f(t,x)+$$

$$+\int_0^T \left[K_1(\tau,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x} + K_2(\tau,x)v(\tau,x) + K_3(\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau, \qquad (2.1)$$

$$v(0,x) + \int_0^T v(\tau,x)d\tau = \dot{\varphi}(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2.2)$$

$$v(t,0) = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2.3)$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega. \qquad (2.4)$$

Решением нелокальной задачи (2.1)–(2.4) является пара функций $(v(t,x), u(t,x))$, где функция $v(t,x) \in C(\Omega,R)$, имеет частные производные $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega,R)$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению гиперболического типа (2.1), краевым условиям (2.2), (2.3); функция $u(t,x)$ связана с функцией $v(t,x)$ интегральным соотношением (2.4).

Введем теперь специальный параметр

$$\int_0^T \left[K_1(\tau,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x} + K_2(\tau,x)v(\tau,x) + K_3(\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau = \theta(x).$$

Тогда задача (2.1)–(2.4) переходит к следующей нелокальной задаче для гиперболического уравнения второго порядка с двумя параметрами и интегральными условиями

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + C(t,x)v + D(t,x)u + f(t,x) + \theta(x), \qquad (2.5)$$

$$v(0,x) + \int_0^T v(\tau,x)d\tau = \dot{\varphi}(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (2.6)$$

$$v(t,0)=\psi_2(t), \qquad t\in[0,T], \tag{2.7}$$

$$u(t,x)=\psi_1(t)+\int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad (t,x)\in\Omega. \tag{2.8}$$

$$\theta(x)=\int_0^T\left[K_1(\tau,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x}+K_2(\tau,x)v(\tau,x)+K_3(\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau, \tag{2.9}$$

$x\in[0,\omega]$.

Решением нелокальной задачи с интегральными условиями (2.5)–(2.9) является тройка функций $(v(t,x),u(t,x),\theta(x))$, где функция $v(t,x)\in C(\Omega,R)$, имеет частные производные $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R)$, удовлетворяет гиперболическому уравнению с параметрами (2.5), краевому условию (2.6), интегральному условию (2.7); функция $u(t,x)$ связана с функцией $v(t,x)$ интегральным соотношением (2.8), а параметр $\theta(x)$ определяется из интегрального соотношения (2.9).

К задаче (2.5)–(2.9) применяются результаты, установленные для нелокальных краевых задач с интегральными условиями для систем гиперболических уравнений [9]–[11].

3. Схема метода введения функциональных параметров и алгоритм

Методом введения функциональных параметров задача (2.5)–(2.9) будет сведена к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для гиперболического уравнения с параметрами, задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно введенного функционального параметра и интегральных соотношений относительно $u(t,x)$, $\theta(x)$.

Пусть $\lambda(x)=u(0,x)$.

В задаче (2.5)–(2.9) осуществим замену: $v(t,x)=\widetilde{v}(t,x)+\lambda(x)$, где $\widetilde{v}(t,x)$ – новая неизвестная функция. Тогда задача (2.5)–(2.9) переходит к эквивалентной задаче с несколькими параметрами

$$\frac{\partial^2\widetilde{v}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{v}+f(t,x)+$$

$$+A(t,x)\dot{\lambda}(x)+C(t,x)\lambda(x)+D(t,x)u+\theta(x), \tag{3.1}$$

$$\widetilde{v}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.2}$$

$$\widetilde{v}(t,0) = \psi_2(t) - \psi_2(0), \qquad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

$$[1+T]\lambda(x) + \int_0^T \widetilde{v}(\tau,x)d\tau = \dot{\varphi}(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.4}$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x \widetilde{v}(t,\xi)d\xi + \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega. \tag{3.5}$$

$$\theta(x) = \int_0^T \left[K_1(\tau,x)\frac{\partial \widetilde{v}(\tau,x)}{\partial x} + K_2(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)\right]d\tau +$$

$$+\int_0^T \left[K_1(\tau,x)\dot{\lambda}(x) + K_2(\tau,x)\lambda(x) + K_3(\tau,x)u(\tau,x)\right]d\tau, \quad x \in [0,\omega]. \tag{3.6}$$

Решением задачи (3.1)–(3.6) будем называть четверку функций $(\widetilde{v}(t,x), \lambda(x), u(t,x), \theta(x))$, где функция $\widetilde{v}(t,x) \in C(\Omega,R)$, имеет частные производные $\dfrac{\partial \widetilde{v}(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial \widetilde{v}(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R)$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{v}(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega,R)$, функция $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, функция $u(t,x) \in C(\Omega,R)$, функция $\theta(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$ и удовлетворяют гиперболическому уравнению (3.1), условиям на характеристиках (3.2), (3.3), функциональному соотношению (3.4) и интегральным соотношениям (3.5), (3.6).

Из условия согласования данных в точке $(0,0)$ вытекает

$$\lambda(0) = \psi_2(0), \qquad t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

Задачи (2.5)–(2.9) и (3.1)–(3.6) эквивалентны. Если тройка функций $(v^*(t,x), u^*(t,x), \theta^*(x))$ является решением задачи (2.5)–(2.9), то четверка функций $(\widetilde{v}^*(t,x),\ \lambda^*(x),\ u^*(t,x), \theta^*(x))$, где $\widetilde{v}^*(t,x) = v^*(t,x) - \lambda^*(x)$, $\lambda^*(x) = v^*(0,x)$, будет решением задачи (3.1)–(3.6). Обратное также верно. Если четверка функций $(\widetilde{v}^{**}(t,x), \lambda^{**}(x), u^{**}(t,x), \theta^{**}(x))$ является решением задачи (3.1)–(3.6), то тройка функций $(v^{**}(t,x), u^{**}(t,x), \theta^{**}(x))$, определяемая равенствами $v^{**}(t,x) = \widetilde{v}^{**}(t,x) + \lambda^{**}(x)$, где

$$v^{**}(0,x) = \lambda^{**}(x),\ u^{**}(t,x) = \psi_1(t) + \int_0^x v^{**}(t,\xi)d\xi,\ (t,x) \in \Omega,$$

$$\theta^{**}(x)=\int_0^T\left[K_1(\tau,x)\frac{\partial v^{**}(\tau,x)}{\partial x}+K_2(\tau,x)v^{**}(\tau,x)+K_3(\tau,x)u^{**}(\tau,x)\right]d\tau,$$

будет решением задачи (2.5)–(2.9).

Задача (3.1)–(3.3) при фиксированных $\lambda(x)$, $u(t,x)$, $\theta(x)$ является задачей Гурса относительно функции $\widetilde{v}(t,x)$ в области Ω. Соотношение (3.4) позволяет определить неизвестный параметр $\lambda(x)$, а интегральные соотношения (3.5), (3.6) – неизвестные функции $u(t,x)$, $\theta(x)$, где параметр $\lambda(x)$ удовлетворяет условию (3.7).

Введем новые неизвестные функции $V(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{v}(t,x)}{\partial x}$, $W(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{v}(t,x)}{\partial t}$ и запишем решение задачи Гурса в виде системы трех интегральных уравнений:

$$V(t,x)=\dot{\psi}_2(t)+\int_0^t\Big\{A(\tau,x)V(\tau,x)+B(\tau,x)W(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)\Big\}d\tau+$$

$$+\int_0^t\Big\{A(\tau,x)\dot{\lambda}(x)+C(\tau,x)\lambda(x)+D(\tau,x)u(\tau,x)+\theta(x)+f(\tau,x)\Big\}d\tau,\quad(3.8)$$

$$W(t,x)=\int_0^x\Big\{A(t,\xi)V(t,\xi)+B(t,\xi)W(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)\Big\}d\xi+$$

$$+\int_0^x\Big\{A(t,\xi)\dot{\lambda}(\xi)+C(t,\xi)\lambda(\xi)+D(t,\xi)u(t,\xi)+\theta(\xi)+f(t,\xi)\Big\}d\xi,\quad(3.9)$$

$$\widetilde{v}(t,x)=\psi_2(t)-\psi_2(0)+\int_0^t W(\tau,x)d\tau.\quad(3.10)$$

Продифференцировав соотношение (3.4) по x, получим

$$[1+T]\dot{\lambda}(x)=-\int_0^T V(\tau,x)d\tau+\ddot{\varphi}(x),\qquad x\in[0,\omega].\quad(3.11)$$

Задача (3.11), (3.7) является задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $\lambda(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения (3.11) будет в виде

$$\lambda(x)=-\frac{1}{1+T}\int_0^T\widetilde{v}(\tau,x)d\tau+\frac{1}{1+T}\dot{\varphi}(x)+\widetilde{C},\qquad x\in[0,\omega],\quad(3.12)$$

где $\widetilde{C}$ – произвольная постоянная. Подставляя общее решение (3.12) в условие (3.7) при $x = 0$, получим

$$-\frac{1}{1+T}\int_0^T \widetilde{v}(\tau,0)d\tau + \frac{1}{1+T}\dot{\varphi}(0) + \widetilde{C} = \psi_2(0),$$

отсюда, с учетом условия (3.3), определяем $\widetilde{C}$:

$$\widetilde{C} = \frac{1}{1+T}\int_0^T \psi_2(\tau)d\tau + \frac{T}{1+T}\psi_2(0) - \frac{1}{1+T}\dot{\varphi}(0).$$

Тогда решение задачи Коши (3.11), (3.7) имеет вид

$$\lambda(x) = -\frac{1}{1+T}\int_0^T \widetilde{v}(\tau,x)d\tau + \frac{1}{1+T}\dot{\varphi}(x) + \frac{1}{1+T}\int_0^T \psi_2(\tau)d\tau +$$
$$+\frac{T}{1+T}\psi_2(0) - \frac{1}{1+T}\dot{\varphi}(0), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3.13}$$

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (3.8)–(3.10), (3.11), (3.13) и (3.5), (3.6) для определения неизвестных $V(t,x)$, $W(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $u(t,x)$, $\theta(x)$.

Если известны $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $u(t,x)$, $\theta(x)$, то из (3.8)–(3.10) находим функции $V(t,x)$, $W(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$. Обратно, если известны функции $V(t,x)$, $W(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, то из (3.11), (3.13) можем найти $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, а из (3.5), (3.6) определяем $u(t,x)$, $\theta(x)$. Неизвестными являются как $V(t,x)$, $W(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$, так и $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $u(t,x)$, $\theta(x)$. Поэтому для нахождения решения задачи (3.1)–(3.6) используется итерационный метод: четверку $(\widetilde{v}^*(t,x)$, $\lambda^*(x)$, $u^*(t,x), \theta^*(x))$ определяем, как предел последовательности $(\widetilde{u}^{(m)}(t,x)$, $\lambda^{(m)}(x)$, $u^{(m)}(t,x), \theta^{(m)}(x))$, $m = 0,1,2,...$, по следующему алгоритму.

0-шаг. 1) Полагая в правых частях (3.11), (3.13) $V(t,x) = 0$, $\widetilde{v}(\tau,x) = \psi_2(t) - \psi_2(0)$ находим начальные приближения $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda^{(0)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 2) Из интегрального соотношения (3.5) при $\widetilde{v}(t,x) = \psi_2(t) - \psi_2(0)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ определяем $u^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (3.6) при $\widetilde{v}(t,x) = \psi_2(t) - \psi_2(0)$, $V(t,x) = 0$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $u(t,x) = u^{(0)}(t,x)$ определяем $\theta^{(0)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 3) Из системы интегральных уравнений (3.8)–(3.10) при

$\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $u(t,x) = u^{(0)}(t,x)$, $\theta(x) = \theta^{(0)}(x)$ находим $V^{(0)}(t,x), W^{(0)}(t,x), \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

1-шаг. 1) Полагая в правых частях (3.11), (3.13) $V(t,x) = V^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, находим $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda^{(1)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 2) Из интегрального соотношения (3.5) при $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$ определяем $u^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (3.6) при $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $V(t,x) = V^{(0)}(t,x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $u(t,x) = u^{(1)}(t,x)$ определяем $\theta^{(1)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 3) Из системы интегральных уравнений (3.8)–(3.10) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $u(t,x) = u^{(1)}(t,x)$, $\theta(x) = \theta^{(1)}(x)$ находим $\widetilde{v}^{(1)}(t,x), \widetilde{w}^{(1)}(t,x), \widetilde{u}^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. И т. д.

m-шаг. 1) Полагая в правых частях (3.11), (3.13) $V(t,x) = V^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, находим $\dot{\lambda}^{(m)}(x)$, $\lambda^{(m)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 2) Из интегрального соотношения (3.5) при $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(m)}(x)$, определяем $u^{(m)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (3.6) при $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$, $V(t,x) = V^{(m-1)}(t,x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(m)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(m)}(x)$, $u(t,x) = u^{(m)}(t,x)$ определяем $\theta^{(m)}(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$. 3) Из системы интегральных уравнений (3.8)–(3.10) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(m)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(m)}(x)$, $u(t,x) = u^{(m)}(t,x)$, $\theta(x) = \theta^{(m)}(x)$,находим $\widetilde{v}^{(m)}(t,x), \widetilde{w}^{(m)}(t,x), \widetilde{u}^{(m)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$ $m = 1,2,\ldots$.

Данный подход разбивает на три этапа процесс нахождения решения задачи (3.1)–(3.6) – четверки функций $(\widetilde{v}(t,x), \lambda(x), u(t,x), \theta(x))$: 1) нахождение введенного функционального параметра $\lambda(x)$ из задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; 2) нахождение неизвестной функции $u(t,x)$ и специального параметра $\theta(x)$ из интегральных соотношений (3.5 и (3.6) соответственно; 3) нахождение неизвестной функции $\widetilde{v}(t,x)$ и ее производных из задачи Гурса для гиперболического уравнения.

4. Основные утверждения

Пусть

$$\alpha = \max_{(t,x)\in\Omega} |A(t,x)|, \quad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega} |B(t,x)|, \quad \chi = \max_{(t,x)\in\Omega} |C(t,x)|,$$

$$H = \alpha + \beta + \chi, \quad d = \max_{(t,x)\in\Omega} |D(t,x)|,$$

$$\kappa_1 = \max_{(t,x)\in\Omega} |K_1(t,x)|, \quad \kappa_2 = \max_{(t,x)\in\Omega} |K_2(t,x)|, \quad \kappa_3 = \max_{(t,x)\in\Omega} |K_3(t,x)|.$$

Условия следующего утверждения являются условиями сходимости предложенного выше алгоритма, которые одновременно дают условия разрешимости задачи (3.1)–(3.6).

Справедлива

Теорема 1. *Пусть*

1) функции $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, $f(t,x)$ *непрерывны на* Ω*;*

2) функция $\varphi(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0,\omega]$, *функции* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0,T]$ *и удовлетворяют условию согласования* $\psi_1(0)+\int_0^T \psi_1(\tau)d\tau=\varphi(0)$*;*

3) справедливо неравенство

$$\frac{\max(T,\omega)}{1+T}\Big\{(\alpha+\chi)T+d(1+2T)\omega+(\kappa_1+\kappa_2)T(2+T)+\kappa_3(1+2T)\omega\Big\}e^{H(T+\omega)}<1.$$

Тогда задача (3.1)–(3.6) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [11] на основе вышеприведенного алгоритма.

Из эквивалентности задач (3.1)–(3.6) и (1.1)–(1.4) вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)–3) Теоремы 1.*

Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение.

Литература

1 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984.

2 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.

3 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006.

4 Soltanalizadeh V., Roohani Ghehsareh H., Abbasbandy S. A super accurate shifted Tau method for numerical computation of the Sobolev-type differential equation with nonlocal boundary condition // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – V. 236. – P. 683-692.

5 Аристов А.И. Об одном неклассическом интегро-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1019-1026.

6 Юлдашев Т.К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Известия ВУЗов. Математика. – 2015. – № 9. – С. 74-79.

7 Юлдашев Т.К. Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска вырожденным ядром // Украинский математический журнал. – 2016. – Т. 68, № 8. – С. 1115-1131.

8 Юлдашев Т.К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 101-110.

9 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – V. 402, № 1. – P. 167-178.

10 Асанова А.Т. О разрешимости нелокальной краевой задачи с интегральными условиями для систем гиперболического типа // Математический журнал. – 2014. – Т. 14, № 2. – С. 21-35.

11 Асанова А.Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для систем гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // Известия ВУЗов. Математика. – 2017. – № 5. – С. 11-25.

12 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Ж. вычислит. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 11. – С. 1673-1685.

13 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1343-1354.

Статья поступила в редакцию 19.06.2017

Асанова А.Т., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П. СОБОЛЕВ ТЕКТЕС ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Соболев тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты бейлокал шеттік есеп зерттеледі. Қарастырылып отырған есеп пара-пар болатын параметрлері бар гиперболалық теңдеу үшін интегралдық шарттары бар есепке келтірілген. Алынған пара-пар есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылған және оның жинақтылығы тағайындалған. Соболев тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептің шешілімділік шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Assanova A.T., Ashirbaev Kh.A., Sabalakhova A.P. ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE

The linear nonlocal boundary value problem for the integro-differential equations of Sobolev type is investigated. Considered problem is reduced to equivalent problem for hyperbolic equation with parameters and integral conditions. An algorithm for finding a solution of the equivalent problem is proposed and the conditions of its convergence are established. Conditions of the solvability of nonlocal boundary value problem for the integro-differential equations of Sobolev type are obtained in terms of the initial data.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 43–52.

УДК 510.67

ESSENTIAL AND INESSENTIAL EXPANSIONS: MODEL COMPLETENESS AND NUMBER OF COUNTABLE MODELS

B.S. Baizhanov[1], S.S. Baizhanov[2], N.E. Sailaubay[3], O.A. Umbetbayev[4], T.S. Zambarnaya[5]

[1,2,3,4,5]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin Str.

[2,3,5]Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, 71 al-Farabi Ave.

e-mail: [1]baizhanov@math.kz, [2]sayan-5225@mail.ru, [3]nurbek.sailaubay@mail.ru
[4]olzhas_umbetbayev@mail.ru, [5]t.zambar@gmail.com

Annotation: The article focuses on essential and inessential expansions of theories. An essential expansion of a structure is obtained by adding a new predicate, which is not definable by use of formulas with parameters from this structure. An inessential expansion is a result of adding to a signature a predicate definable with parameters. A specific example of an inessential expansion is an expansion via a constant element. The main question is which properties can different types of expansions preserve. For instance, the following properties are maintained for inessential expansion: ω-stability, stability, superstability, and model completeness. The first section is devoted to preservation of model-completeness while expanding a weakly-o-minimal theory by a convex unary predicate for the case when a cut defined by this predicate is quasi-solitary. The proof is based on the approaches from [1] and [2]. In the second section we study reduction of the number of countable models due to an inessential expansion. Basing on the ideas from [3] we determine conditions under which the desired property takes place.

Keywords: Expansion of structure, model completeness, countable models.

1. Introduction

Expansion of structure by new relations brings change (unchange) of properties held on this structure. There are two kinds of expansion: essential and inessential. Consider model $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma \rangle$. We say that expansion by P

Keywords: *Обогащения структуры, модельная полнота, счетные модели.*

2010 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C15, 03C64.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 5125/GF4.

is essential if $P(M) = A$ and A $\notin Def(\mathfrak{M})$, where $Def(\mathfrak{M}) = \{\varphi(M, \bar{a}) \mid \bar{a} \in M\}$. Otherwise if there exists $\varphi(x, \bar{y})$ such that $\varphi(M, \bar{a}) = P(M)$, then expansion is inessential. For instance, if we consider $\langle N; < \rangle$, theory of this model is not model complete, but inessential expansion by the smallest element brings model completeness.

Essential expansions are studied in firsts section. Essential expansions of models of o-minimal theories was widely studied by D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn [1] and weakly o-minimal theories by B.S. Baizhanov [2]. They proved, that essential expansions of o-minimal, weakly o-minimal theories by convex predicate preserves o-minimality, weakly o-minimality.

Inessential expansions are studied in seconds section. The question on change in a number of countable models under inessential expansion of theories began to be studied with M. Benda [4]. In his work [5] R.E. Woodrow constructed an example of a theory, which has four countable models, and an inessential expansion of which has ω models. M.G. Peretyatkin [6] gave an example of a theory with three countable models, which has ω countable models in its inessential expansion. He also formulated a question on reducing the number of countable models from ω to a finite number. This question was positively answered by B. Omarov [3]. He constructed examples of theories with ω and 2^ω countable models which have ω countable models by means of an inessential expansion.

2. Essential expansions. Model completeness

Consider $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ structures of a signature Σ. $\mathfrak{M}$ is *substructure* of $\mathfrak{N}$ (denoted $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$) if for any quantifier free formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, ..., m_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(m_1, ..., m_n)$.

Consider $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ structures of a signature Σ. $\mathfrak{M}$ is *elementary submodel* of $\mathfrak{N}$ (denoted $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$) if for any formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ $\mathfrak{M} \models \varphi(m_1, ..., m_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(m_1, ..., m_n)$.

Let $\langle M; =, <, ... \rangle$ be ordered structure. Formula $U(x, y)$ is said to be convex to the right, if $\models \forall x, y(x < y \wedge U(x, y)) \to \forall z(x < z < y \to U(x, z))$.

A partition of an ordered structure M into two convex subsets C and D $(C < D; C \cup D = M)$ is said to be $(C; D)$-cut in A. If C has supremum or D has infinum in $A \cup \{-\infty, \infty\}$, then $(C; D)$-cut is said to be rational. Otherwise $(C; D)$-cut is irrational. Sometimes, by $(C; D)$-cut we understand the following set of formulas : $\{c \leq x \leq d; c \in C, d \in D\}$.

Let $p \in S_1(A)$. We say that a formula $\Phi(x;y;\bar{a})$; $\bar{a} \in A$ is p-preserving if for any $\alpha \models p$, there exist $\gamma_1, \gamma_2 \models p$, such that

$$\gamma_1 < \Phi(M';\alpha;\bar{a}) < \gamma_2.$$

Let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. We say that p is semi-quasisolitary to the right (left) if there is the greatest p-preserving convex to the right (left) 2-A-formula $F(x;y;\bar{a})(G(x;y;\bar{a})); \bar{a} \in A$.

Let $p \in S_1(A)$. We say that p is *quasisolitary* if it is semi-quasisolitary to the right and to the left.

Let $p \in S_1(A)$ be quaisolitary type. We say that p is *solitary* if greatest convex to the right and to the left formula $E(x, y, \bar{a}) \equiv x = y$.

Theorem 1 (B.S. Baizhanov)[2]. *Let T be a weakly o-minimal theory, $p \in S_1(A)$ is quasisolitary to right iff p is quasisolitary to left.*

Theorem 2 [MMS][1]. *Any expansion of a model of weakly o-minimal theory with solitary type by unary convex predicate is weakly o-minimal.*

Suppose $\mathfrak{M} := \langle M; \Sigma \rangle$ is a model of weakly o-minimal theory, $\mathfrak{M}^+ := \langle M; \Sigma^+ \rangle$, where $\Sigma^+ := \Sigma \cup P^1$, T^+ is theory of $\mathfrak{M}^+$. If expansion by unary convex predicate is inessential, then it preserves model completeness. Consider sufficient expansion $P^1(x)$, as it is not definable in $\mathfrak{M}$ at least one of the ends goes through cut.

Claim: For any $\varphi^+(x_1, x_2, ..., x_n)$ of theory T^+ and $a_1, a_2, ..., a_n \in M$, s.t. $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(a_1, a_2, ..., a_n)$ there exists $K_{\varphi^+}(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ of theory T and $\alpha \in N \backslash M$ s.t. $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(a_1, a_2, ..., a_n) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(a_1, a_2, ..., a_n, \alpha)$.

Essential convex expansion always go through irrational cut, as it is not definable in language of initial model. Expansion of model by convex predicate can be considered step by step as expansion through each cut. Without loss of generality we can consider such expansion, that next sentence holds true $\forall x \forall y (P(x) \wedge y < x \to P(y))$.

Theorem 3. *$\mathfrak{M} := \langle M; \Sigma \rangle$ is a model of weakly o-minimal, model complete theory. Expansion of model $\mathfrak{M}$ by unary predicate $\mathfrak{M}^+ := \langle M; \Sigma^+ \rangle$, where $\Sigma^+ := \Sigma \cup \{P^1\}$, T^+ is theory of $\mathfrak{M}^+$. Consider two model of theory T^+ $\mathfrak{L}^+ := \langle L; \Sigma^+ \rangle$ and $\mathfrak{M}^+$, such that $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{L}^+$; If $P^1(x)$ goes through solitary type then $\mathfrak{M}^+ \prec \mathfrak{L}^+$.*

Proof of Theorem 3. Let $U(x, y)$ be convex to the right formula.

Claim: If expansion as in theorem, then next sentence holds on theory

$$T^+ \vdash \exists x(P(x) \wedge \forall x'(x < x' \to \exists y(U(x', y) \wedge \neg P(y))).$$

Proof of claim: Suppose in contrary, that the sentence does not belong T^+, then

$$T^+ \vdash \forall x(P(x) \wedge \exists x'(x < x' \wedge \forall y(\neg U(x', y) \vee P(y))).$$

Consider formulas $H_i(x_i) := H_{i-1}(x_{i-1}) \wedge (x_{i-1} < x_i \to \forall y(U(x_i, y) \wedge P(y))$, where $H_0(x) := P(x) \wedge \forall y(U(x, y) \wedge P(y))$. The set $\{H_i\}$ is consistent, thus it is partial type. If we make a completion of this type to type q, then P(x), goes through type q, realization of this type will be α, such that $\mathfrak{M}^+ \models \forall y(U(\alpha, y) \wedge P(y))$, so we have $P(x)$ goes through non-solitary type, but by conditions $P(x)$ goes through solitary type. Contradiction.

For any $\varphi^+(\bar{x})$ of theory T^+ and $\bar{a} \in M$, such that $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a})$ there exists $K_{\varphi^+}(\bar{x}, y)$ of theory T and $\alpha \in N \backslash M$ such that $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a}) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(\bar{a}, \alpha)$. The same holds for $\mathfrak{L}^+$: $\mathfrak{L}^+ \models \varphi^+(\bar{b}) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(\bar{b}, \alpha)$. P(x) goes through the same type in $\mathfrak{M}^+$ and $\mathfrak{L}^+$. $K_{\varphi^+}(\bar{x}, \alpha)$ is the same formula for both $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{L}$. Whenever we consider $\bar{a} \in M$ $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(\bar{a}, \alpha) \Leftrightarrow \mathfrak{L}^+ \models \varphi^+(\bar{a})$, thus T^+ is model complete. □

Theorem 4. *$\mathfrak{M} := \langle M; \Sigma \rangle$ is a model of weakly o-minimal, model complete theory. Expansion of model $\mathfrak{M}$ by unary predicate $\mathfrak{M}^+ := \langle M; \Sigma^+ \rangle$, where $\Sigma^+ := \Sigma \cup \{P^1\}$, T^+ is theory of $\mathfrak{M}^+$. Consider two models of theory T^+ $\mathfrak{L}^+ := \langle L; \Sigma^+ \rangle$ and $\mathfrak{M}^+$, such that $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{L}^+$. Then under the restriction on signature Σ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{L}$; If $P^1(x)$ goes through quasisolitary type then $\mathfrak{M}^+ \prec \mathfrak{L}^+$.*

Proof of Theorem 4. Let $E(x, y)$ be greatest p-preserving formula. Then for any convex to the right formula $U(x, y)$, such that $E(M', a) \subset U(x, y)$ next sentence holds true on theory T^+

$$T^+ \vdash \exists x \exists y \forall y'(P(y) \wedge E(x, y) \wedge y < y' \to \exists z(\neg P(z) \wedge U(y', z)).$$

Suppose in contrary, that this sentence doesn't hold on theory T^+, then we get p-preserving formula $E'(M', a)$ such that $E(M', a) \subset E'(M', a)$, thus $E(x, y)$ is not greatest p-preserving formula, so we get contradiction.

For any $\varphi^+(\bar{x})$ of theory T^+ and $\bar{a} \in M$, such that $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a})$ there exists $K_{\varphi^+}(\bar{x}, y)$ of theory T and $\alpha \in N \backslash M$ such that $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a}) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models$

$K_{\varphi^+}(\bar{a},\alpha)$. The same holds for $\mathfrak{L}^+$: $\mathfrak{L}^+ \models \varphi^+(\bar{b}) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(\bar{b},\alpha)$ P(x) goes through the same type in $\mathfrak{M}^+$ and $\mathfrak{L}^+$. $K_{\varphi^+}(\bar{x},\alpha)$ is the same formula for both $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{L}$. Whenever we consider $\bar{a} \in M$ $\mathfrak{M}^+ \models \varphi^+(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_{\varphi^+}(\bar{a},\alpha) \Leftrightarrow \mathfrak{L}^+ \models \varphi^+(\bar{a})$, thus T^+ is model complete. □

3. Inessential expansions. Number of countable models

Until the end of this section, let T be a countable complete theory.

Let $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(A)$ be two types over a subset A of some model of T. We say that the type $p(\bar{x})$ is *not almost orthogonal* to the type $q(\bar{y})$, $p(\bar{x}) \not\perp^a q(\bar{y})$, if there is a formula $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{a})$, $\bar{a} \in A$, such that for some (equivalently, for any) model $\mathfrak{M} \models T$ realizing $p(\bar{x})$ with $A \subseteq M$, for some (equivalently, for any) realization $\bar{\alpha} \in p(M)$, $\emptyset \neq \varphi(\bar{\alpha}, M, \bar{a}) \subset q(M)$.

A family Γ of non-principal 1-types over $\emptyset$ is said to be *independent*, if for any $n < \omega$, for any finite subfamily $\Gamma' := \{p_1(x_1),\ p_2(x_2),\ ...,\ p_n(x_n)\} \subseteq \Gamma$, and any type $p_{n+1}(x_{n+1}) \in \Gamma \setminus \Gamma'$, every expansion $r(x_1, x_2, ..., x_n) \in S_n(T)$ of $\bigcup\limits_{1\le i\le n} p_i(x_i)$ to a complete n-type is almost orthogonal to the type $p_{n+1}(x_{n+1})$, $r(x_1, x_2, ..., x_n) \perp^a p_{n+1}(x_{n+1})$.

Fact 1. *Let $p(\bar{x})$, $q(\bar{y}) \in S(A)$ be two types over a subset $A \subseteq N$ of a countable saturated model $\mathfrak{N} \models T$. If the type $q(\bar{y})$ is non-principal, and $p(\bar{x}) \perp^a q(\bar{y})$, then for any realization $\bar{\gamma}$ of the type $p(\bar{x})$ any expansion $q'(\bar{y},\bar{\gamma})$ of $q(\bar{y})$ to a complete type over $(A \cup \{\bar{\gamma}\})$ is non-principal.*

Proof of Fact 1. Towards a contradiction, assume that the type $q'(\bar{y},\bar{\gamma})$ is principal. Then there exists a formula $\psi(\bar{y},\bar{a},\bar{\gamma}) \in q'(\bar{y},\bar{\gamma})$ with $\bar{a} \in A$, which generates the type $q'(\bar{y},\bar{\gamma})$. Since $q'(\bar{y},\bar{\gamma}) \supset q(\bar{y})$, we have $q(N) \supset q'(N,\bar{\gamma}) \supset \psi(N,\bar{a},\bar{\gamma}) \neq \emptyset$. Therefore, by the definition, $p(\bar{x}) \not\perp^a q(\bar{y})$. This is a contradiction. □

During the proof of the main theorem we will use the following criterion.

Theorem 5 [7] (Tarski-Vaught criterion). *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be two L-structures, with $A \subseteq B$. Then the following are equivalent:*

i) the structure $\mathfrak{A}$ is an elementary substructure of $\mathfrak{B}$;

ii) for any formula $\psi(x,\bar{y})$ of the language L and any $\bar{a} \in A$, if $\mathfrak{B} \models \exists x\ \psi(x,\bar{a})$, then $\mathfrak{B} \models \psi(d,\bar{a})$ for some $d \in A$.

The next theorem, and especially the corollaries 1 and 2 were initiated by [3].

Theorem 6. *Let T be a small countable complete theory, and let $\Gamma = \{p_1(x_1), p_2(x_2), ..., p_n(x_n), ...\}_{n<\omega}$ be a countable family of non-principal 1-types $p_i(x_i) \in S_1(T)$. If Γ is independent, then the number of countable non-isomorphic models of the theory T is continuum, $I(T, \omega) = 2^\omega$.*

Proof of Theorem 6. To prove the theorem we will use a method described in [8].

Denote by $\mathfrak{N}$ an $\aleph_1$-saturated model of T. During the proof, for an arbitrary infinite sequence of zeroes and ones, $\tau := \langle \tau(1),\ \tau(2), ..., \tau(i), ...\rangle$, $\tau(i) \in \{0, 1\}$, we construct a countable model $\mathfrak{M}_\tau \prec \mathfrak{N}$ such that $\mathfrak{M}_\tau \models p_i(x_i)$ if and only if $\tau(i) = 1$. Obviously, for different $\tau_1 \neq \tau_2$ the models $\mathfrak{M}_{\tau_1}$ and $\mathfrak{M}_{\tau_2}$ will be non-isomorphic, which will imply continuum countable models.

Take a realization $a_1 \in p_1(N)$. By the Fact 1 any completion $r_2(x_1, x_2)$ of $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$ is non-principal. Let a_2 be a realization of $r_2(a_1, x_2)$. Repeating this construction we obtain a set $A := \{a_1, a_2, \ldots,\ a_n, a_{n+1} \ldots\}$ consisting of exactly one realization of each type in Γ, such that $a_{n+1} \in r_{n+1}(a_1, ..., a_n, N)$, and $r_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) \in S_{n+1}(T)$ is a non-principal complete expansion of $r_n(x_1, ..., x_n) \cup p_{n+1}(x_{n+1})$.

Until the end of the proof fix a sequence τ and denote $\Gamma_\tau := \{p_i \in \Gamma : \tau(i) = 1\}$, and $A_\tau := \{a_i \in A :\ \tau(i) = 1\}$ (may be finite or empty). For convenience of the proof we change enumeration of A_τ: let $b_1 := a_i$, where i is the smallest index such that $a_i \in A_\tau$, and, continuing by analogy, $b_n := a_j$, where j is the smallest index of $a_j \in A_\tau$ which was not considered before. Let $B := \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$, and for $n < \omega$ denote $\bar{b}_n := \langle b_1, b_2, ..., b_n\rangle$.

Construction of $\mathfrak{M}_\tau$.

Step 1. Denote by Φ_1 the set of all $\emptyset$-definable 1-formulas of the theory T, $\Phi_1 := \{\varphi_i^1(x) : i < \omega\}$. Choose the formula $\varphi_i^1(x) \in \Phi_1$ with the smallest index i satisfying $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_i^1(x)$. Since T is small, there exists a principal over $\emptyset$ subformula $\varphi_{i,1}^1(x) \subseteq \varphi_i^1(x)$, which, in its turn, has a principal subformula over $\{b_1\}$. Repeating this procedure, we obtain a locally consistent infinite decreasing chain of principal over parameters formulas $\varphi_{i,j}^1(x, \bar{b}_j)$: $...\subseteq \varphi_{i,n+1}^1(N, \bar{b}_{n+1}) \subseteq \varphi_{i,n}^1(N, \bar{b}_n) \subseteq ... \subseteq \varphi_{i,1}^1(N, b_1) \subseteq \varphi_i^1(N)$. Denote by d_1 realization of this chain, which exists since the model $\mathfrak{N}$ is $\aleph_1$-saturated.

Step 2. Choose the formula $\varphi_i^1(x) \in \Phi_1$ which was not considered before and having the smallest index i satisfying $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_i^1(x)$, and find a realization d_2 by analogy with d_1.

Now take b_1 and consider the set of all $(\{d_1\} \cup \{b_1\})$-definable 1-formulas $\Phi_2 := \{\varphi_i^2(x, d_1, b_1) : i < \omega\}$. Choose the formula $\varphi_i^2(x, d_1, b_1) \in \Phi_2$ which was not considered previously and has the smallest index satisfying $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_i^2(x, b_1, d_1)$, and find a realization d_3 (existing since $\mathfrak{N}$ is $\aleph_1$-saturated) of the following infinite decreasing chain of principal formulas $\varphi_{i,j}^2(x, d_1, \bar{b}_j)$: ... $\subseteq \varphi_{i,n+1}^2(x, d_1, \bar{b}_{n+1}) \subseteq \varphi_{i,n}^2(x, d_1, \bar{b}_n) \subseteq ... \subseteq \varphi_i^2(x, d_1, b_1)$.

Suppose by the end of the step k we have constructed the following sets: for all m, $1 \leq m \leq k$, the sets $D_m := \{d_1, d_2, ..., d_{\frac{(m+1)m}{2}}\}$ (it is possible that $d_i = d_j$ for some i and j such that $1 \leq i < j \leq \frac{(m+1)m}{2}$), the set of all $\emptyset$-definable 1-formulas Φ_1, and for all m, $2 \leq m \leq k$, sets of all $(D_{m-1} \cup \bar{b}_{m-1})$-definable 1-formulas, Φ_m.

STEP $k{+}1$. For each m, $1 \leq m \leq k$, find a previously unused formula $\varphi_{i_m}^m \in \Phi_m$ of a minimal index, set of realizations of which in the model $\mathfrak{N}$ is nonempty. And find realizations $d_{\frac{(k+1)k}{2}+m}$ of corresponding infinite decreasing chains of principal subformulas of the formulas $\varphi_{i_m}^m$.

Denote by Φ_{k+1} the set of all $(D_k \cup \bar{b}_k)$-definable 1-formulas. And find $d_{\frac{(k+1)k}{2}+k+1}$ by analogy with the construction above. Let D_{k+1} stand for the set $\{d_1, d_2, ..., d_{\frac{(k+1)k}{2}+k+1}\}$.

Denote $M_\tau := B \cup \bigcup\limits_{i<\omega} D_i$.

The Tarski-Vaught criterion implies that the obtained model $\mathfrak{M}\tau$ is an elementary submodel of $\mathfrak{N}$. Also, due to the choice of d_i and the Fact 1, all the types from $\Gamma \backslash \Gamma_\tau$ are omitted in $\mathfrak{M}_\tau$. $\square$

For every model $\mathfrak{M}$ of the theory T we denote $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) := \{p : p \in S(T), p$ is realized in $\mathfrak{M}\}$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ is called a *finite diagram* of the model $\mathfrak{M}$ [9].

COROLLARY 1. *Let T be a small countable complete theory, and Γ be a countable independent family of non-principal types from $S_1(T)$ such that for any two non-isomorphic countable models $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_2$ of T either*

i) there exists a type $p(x) \in \Gamma$, such that there is no bijective elementary embedding from $p(M_1)$ onto $p(M_2)$; or

ii) the number of countable non-isomorphic models $\mathfrak{M}' \models T$ with $\mathcal{D}(M') \cap \Gamma = \mathcal{D}(M_1) \cap \Gamma = \mathcal{D}(M_2) \cap \Gamma$ is finite.

If there exists a type $q(y) \in S_1(T)$, which is powerful over the family Γ, then the number of countable models of the theory T can be reduced by an *inessential expansion of T.*

Corollary 2. *Let T be a small countable complete theory, and let $\Gamma = \{p_1(x_1), p_2(x_2), ..., p_n(x_n), ...\}_{n<\omega}$ be a countable family of non-principal 1-types $p_i(x_i) \in S_1(T)$ such that*

i) for any $i > 0$, $p_i(x_i) \not\perp^a p_{i+1}(x_{i+1})$;

ii) for any natural k, for all i, $i_1, i_2, ..., i_k \in N$ with $i_m < i$ $(1 \leq m \leq k)$, any expansion of $\bigcup\limits_{1\leq m\leq k} p(x_{i_m})$ to a complete n-type is almost orthogonal to the type $p_i(x_i)$, $r(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) \perp^a p_i(x_i)$.

Then T has at least ω countable non-isomorphic models.

References

1 Macpherson D., Marker D., and Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – V. 352, No. 12. – P. 5435-5483.

2 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V. 66, No. 3. – P. 1382-1414.

3 Omarov B. Nonessential extensions of complete theories // Algebra and Logic. – 1983. – V. 22, No. 5. – P. 390-397.

4 Benda M. Remarks on countable models // Fundamenta Mathematicae. – 1974. – V. 81. – P. 107-119.

5 Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models // The Journal of Symbolic Logic. – 1978. – V. 43. – P. 442-445.

6 Peretyat'kin M.G. Theories with three countable models // Algebra Logika. – 1980. – V. 19, No. 2. – P. 224-235.

7 Chang C.C., and Keisler H.J. Continuous Model Theory. — New Jersey: Princeton University Press, 1966. — 165 p.

8 Baizhanov B.S., Tazabekova N.S., Yershigeshova A.D., and Zambarnaya T.S. Types in small theories // Matematicheskij Zhurnal. – 2015. – V. 15, No. 1(55). – P. 38-56.

9 Shelah S. Classification Theory and the number of non-isomorphic models // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. – 1978. – V. 92. – 544 p.

10 Mayer L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. – 1988. – V. 53. – P. 146-159.

11 Pillay A., and Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures .i // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – V. 295. – P. 565-592.

12 Baizhanov B.S. Definability of 1-types in weakly o-minimal theories // Siberian Advances in Mathematics. – 2006. – V. 16, No 2. – P. 1-33.

Received 17.05.2017

Байжанов Б.С., Байжанов С.С., Сайлаубай Н.Е., Умбетбаев О.А., Замбарная Т.С. РЕТТЕЛГЕН ТЕОРИЯЛАРДАҒЫ БІР-ФОРМУЛАЛАР ЖӘНЕ БІР-ТИПТЕР

Жұмыста теориялардың елеулі және елеусіз байытулары қарастырылады. Құрылымның елеулі байытуы – осы сигнатурадағы параметрлері бар формулалар көмегімен анықталмайтын жаңа предикатты қосу нәтижесі болып табылады. Елеусіз байыту сигнатураға параметрлері бар формулалармен анықталатын предикатты қосу арқылы алынады. Елеусіз байытудың сипатты мысалы константалық байыту деуге болады. Басты мәселе байытулардың әр алуан түрлері кезінде сақталатын қасиеттерді тағайындаудан тұрады. Мысалы, теориялардың елеусіз байытуы кезінде теорияның тұрақтылығы, ω-тұрақтылығы, супертұрақтылығы, тәуелділігі, сондай-ақ модельдің толықтығы сақталады. Жұмыстың бірінші бөлімі теориялардың модельдік толықтығын әлсіз о-минималды теорияның құрылымын дөңес бір орынды предикатпен байыту кезіндегі сақталуына арналған, бұл жағдайда осы предикатпен анықталатын қима квазижалғыз тип болып табылады. Дәлелдемесі [1] пен [2]-ның тәсілдеріне негізделеді. Екінші бөлімде теориялардың елеусіз байытуы кезіндегі саналымды моделдердің санының азаюы туралы айтылған. Оған қоса талап етілген қасиеттің орындалуын қамтамасыз ететін шарттар анықталған, олар Б. Омаровтың [3] еңбегіндегі идеялардың негізінде алынған.

Байжанов Б.С., Байжанов С.С., Сайлаубай Н.Е., Умбетбаев О.А., Замбарная Т.С. ОДИН-ФОРМУЛЫ И ОДИН-ТИПЫ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ТЕОРИЯХ

В работе рассматриваются существенные и несущественные обогащения теорий. Существенное обогащение структуры – результат добавления нового предиката, неопределимого при помощи формул с параметрами из этой сигнатуры. Несущественное обогащение получается добавлением к сигнатуре предиката, определимого с параметрами. Характерным примером несущественного обогащения является константное обогащение. Главный вопрос заключается в установлении свойств, которые сохраняются при различных видах обогащений. Например, при несущественном обогащении теорий сохраняются стабильность, ω-стабильность, суперстабильность, зависимость, а также модельная полнота. Первая часть работы посвящена сохранению модельной полноты теорий при обогащении выпуклым одноместным предикатом структуры слабо о-минимальной теории для случая, когда сечение, определенное этим предикатом, является квазиодиночным типом. Доказательство базируется на подходах из [1] и [2]. Во второй части говорится об уменьшении числа счетных моделей при несущественном обогащении теорий. При этом определены условия, благодаря которым обеспечивается выполнение требуемого свойства, полученные на основе идей из работы Б. Омарова [3].

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 53–70.

УДК 517.977

Об УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОМПЛЕКСНЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К.Б. Бапаев[1], С.С. Сламжанова[2]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]v_gulmira@mail.ru

[2]Жетысуский Государственный университет им. И. Жансугурова
040000, Талдыкорган, ул. Жансугурова, 187 а, e-mail: [2]beksultan.82e@mail.ru

Аннотация: Исследована задача об устойчивости комплексной разностно-динамической системы и решена задача структуризации резонансных множеств заданной системы. Для линейных частей данной системы построены полиномиальные суммы. Используя отрезок формального ряда в качестве функции Ляпунова, исследованы качественные свойства комплексных разностно-динамических систем и ее устойчивость.

Ключевые слова: Комплексная разностно-динамическая система, полиномиальная сумма, функция Ляпунова.

1. Введение и постановка задачи

Для конструирования устойчивости магнитной бутылки для атомного ускорителя в начале пятидесятых годов прошлого века С.М. Уламом были исследованы точечные отображения [1], [2], которые являются дискретным аналогом работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, посвященных исследованию устойчивости движения. Работы С.М. Улама, начиная с начала семидесятого года прошлого века, были продолжены французскими математиками под руководством Х. Мира и И. Грумовского [3].

Эти же задачи для многомерных случаев с начала семидесятого года прошлого века исследуются нами и были замечены задачи устойчивости разностно-динамических систем (РДС) в многомерном случае с появлением в РДС резонанса. Это породило задачу о структуризации резонансных

Keywords: *Complex difference-dynamic system, polynomial sum, Lyapunov function.*
2010 Mathematics Subject Classification: 37H10,60H10.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3357/ГФ4.

множеств, являющуюся одной из трудных задач в теории устойчивости РДС.

В настоящей работе рассматривается комплексная разностно-динамическая система (КРДС) вида

$$z_{n+1} = Az_n + f(z_n, \overline{z}_n), \tag{1}$$

где A – комплексная $l \times l$-матрица, z_n – комплексный l-мерный вектор, $f(z_n, \overline{z}_n)$ – голоморфная по z_n, $\overline{z_n}$, l-мерная вектор-функция, разложение которой не содержит постоянных и линейных членов. Предполагается, что матрица A имеет m, по модулю равных единице, комплексных собственных чисел, а остальные $r = l - m$ по модулю меньше единицы.

К РДС (1) может быть сведена любая действительная голоморфная РДС, соответствующая критическому случаю m-пар комплексно сопряженных собственных чисел по модулю равных единице [4].

Исследование интересующей нас РДС в действительной области восходит к работам [1]–[3], [5] как дискретный аналог работы А. Пуанкаре [6], А.М. Ляпунова [7] и И.Г. Малькина [8] при $m = l = 1$. При $m > 1$ исследование РДС (1) значительно усложняется [9]–[11]. Дополнительно возникают специфические особенности многомерного критического случая, связанные с возможным существованием в РДС внутреннего резонанса

Определение 1. *Будем говорить, что КРДС (1) обладает внутренним резонансом, если существует такой целочисленный вектор $k = (k1, k2, \ldots, k_m)$ с взаимно простыми компонентами, для которого справедливо сравнение*

$$(k, \varphi) \equiv 0\, mod\, (2\pi), \quad \|k\| = \sum_{j=1}^{m} k_j, \quad (\|A - e^{i\varphi}\|) \equiv 0, \tag{2}$$

где число k – порядок внутреннего резонанса.

В работах [4], [11] было предложено обобщение описанного выше метода на нерезонансные и резонансные действительные РДС. Обобщение второго метода Ляпунова на тот же класс РДС было дано в [10].

Целью настоящей работы является распространение выше указанных методов исследования на комплексные РДС вида (1) как в нерезонансных, так и в резонансных случаях. Будем использовать основные понятия второго метода Ляпунова для комплексных систем дифференциальных уравнений, введенные в [12]–[14].

Относительно собственных чисел $e^{i\varphi}$ матрицы A будем предполагать только следующее. Если среди них есть кратные, то им соответствуют простые элементарные делители.

При сделанных предположениях можно считать, что матрица имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & B \end{pmatrix}$$

и КРДС (1) может быть записана в виде

$$\xi_{n+1} = \Lambda\xi_n + F\left(\xi_n, \overline{\xi_n}, \zeta_n, \overline{\zeta_n}\right),$$

$$\zeta_{n+1} = \mathrm{B}\zeta_n + P\left(\xi_n, \overline{\xi_n}, \zeta_n, \overline{\zeta_n}\right),$$

где $\Lambda = \left(\delta_{sj} e^{i\varphi_j}\right)$, матрица B порядка $r = l - m$ имеет собственные числа $\rho_j, \quad |\rho_j| < 1, \quad \zeta_n - r$-мерный комплексный вектор $z_n = (\xi_n, \zeta_n)$.

Будем придерживаться следующих обозначений: Q_m^* – множество m-мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами, Q_1 – множество целых чисел $\|m\| = \sum\limits_{j=1}^{l} |m_j|\,, \; m \in Q_m, \; F_s^{(j)}$ – форма j-го порядка в разложении s-ой компоненты голоморфный вектор-функции F в ряд.

Коэффициенты форм обозначим теми же, но малыми буквами. Так что

$$F_s^{(j)} = \sum_{\|p+q\|+\|h+\tau\|=j} f_{p,q,h,\tau}\xi_n^p \overline{\xi}_n^q \zeta_n^h \overline{\zeta}_n^\tau,$$

$p, q \in Q_m^+, \; h, \tau \in Q_\eta^+, \; \xi_n^p = \prod_{j=1}^M \xi_{jn}^{p_i}$. Через Δ обозначим функциональные разности некоторой формы j-го порядка вдоль линейной части КРДС:

$$\Delta\Phi^{(j)} = \Phi^{(j)}\left(\Lambda\xi_n, \overline{\Lambda\xi}_n, \mathrm{B}\zeta_n, \overline{\mathrm{B}\zeta}_n\right) - \Phi^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right). \tag{3}$$

Тогда коэффициенты формы $\Phi^{(j)}$ образуют j-ую производную матрицы A, которую обозначим через A_j [15]. Ее собственные числа χ определяются формулой

$$\chi = \exp\left[\left(i\sum_{\nu=1}^{m}(p_\nu - q_\nu)\,\varphi_\nu\right) + (h\ln x) + (\tau\ln x)\right], \tag{4}$$

где $p, q \in Q_m^+,\quad h, \tau \in Q_\eta^+,\quad \|p+q\| + \|h+\tau\| = j.$

Пусть $\alpha^* = \{\alpha\}$ – множество целочисленных решений уравнения (2). Выделим в этом множестве конечный базис $\alpha^{(i)}, ..., \alpha^{(g)}$, через который выражаются остальные векторы. В итоге РДС (3) будет обладать g существенно различными внутренними резонансами

$$\left(\alpha^{(1)}, \varphi\right) \equiv (mod\, 2\pi)\,, ..., \left(\alpha^{(g)}, \varphi\right) \equiv 0\,(mod\, 2\pi)\,. \tag{5}$$

Нерезонансные КРДС соответствуют случаю, когда $\alpha^{(*)} = \emptyset$.

2. Структура резонансного множества

Рассмотрим множества производных матриц A_j и произведем разбиение его на особые и неособые матрицы. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\chi = 1. \tag{6}$$

Из (4) нетрудно вывести, что если поливектор (p, q, h, l) удовлетворяет уравнению (6), то необходимо $h = \tau = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть уравнение

$$(p - q, \varphi) \equiv 0\,(mod\, 2\pi)\,. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение множество бивекторов (p, q):

$$\Gamma = \{(p, q)\,/\,(p - q, \varphi) \equiv 0\,(mod\, 2\pi)\,, p, q \in Q^*\}$$

Бивекторы $(p, q) \in \Gamma$ и сами множества Γ, Γ_j будем называть резонанстными. Очевидно, что A_j – особая матрица только тогда, когда $\Gamma_j \neq \emptyset$.

Выясним структуру резонансного множества. Прежде всего ясно, что резонансными будут бивекторы вида $(p, p) \in \Gamma_{2\|p\|} \subset \Gamma$, обращающие χ в единицу тождественно по φ. Это бивекторы тождественного резонанса, образующие множества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\;\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty}\Gamma_{2j}^0,\;\; \Gamma_{2j}^o = \{(p, p)\,/\,\|p\| = j\}$.

Если КРДС (3) нерезонансная, то $\Gamma_0 \equiv \Gamma$.

При наличии резонансов (5) в Γ входят бивекторы внутреннего резонанса, удовлетворяющие сравнению

$$\left(m^{(s)}, \varphi\right) \equiv 0\,(mod\,2\pi)$$

при некотором $s = 1, 2, ..., g$.

Таким образом,

$$\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma^{(1)} \bigcup ... \bigcup \Gamma^{(g)},$$

где $\Gamma^{(s)} = \left\{(p,q)/p - q = \nu m^{(s)},\ \ \nu \in Q_1,\, \nu \neq 0\right\}$, причем $\Gamma^{(s)} \bigcap \Gamma^{(j)} = \emptyset$.

Зафиксируем какой-либо из резонансов (5) и изучим строение соответствующего ему множества $\Gamma^{(s)}$. Запишем его в виде

$$\Gamma^{(s)} = \bigcup_{j=2}^{\infty} \Gamma^{(s)},\ \ \Gamma_j^{(s)} = \left\{(p,q) \in \Gamma^{(s)},\ \ \|p+q\| = j\right\}.$$

И положим для определенности

$$m_1^{(s)}, ..., m_h^{(s)} \geq 0,\ \ m_{h+1}^{(s)}, ..., m_l^{(s)} < 0.$$

Покажем, что из неравенства $p - q = \nu m^{(s)}$ при фиксированном ν следует, что

$$\min \|p+q\| = \nu \cdot l_s, \quad l_s = \left\|m^{(s)}\right\|. \tag{8}$$

Действительно, при $\nu > 0$ имеем

$$P_j = \nu m_j^{(s)} + q_j, \quad q_j > 0, \quad j = 1, 2, ..., h,$$

$$P_j = \nu m_j^{(s)} + q_j, \quad q_j \geq -\nu m_j^{(s)}, \ \ j = h+1, ..., l.$$

Откуда

$$\min_{\Gamma^{(s)}} \|q\| = \nu \left(\left\|m_{n+1}^{(s)}\right\| + ... + \left\|m_l^{(s)}\right\|\right),$$

$$\min_{\Gamma^{(s)}} \|p\| = \nu \left(\left\|m_1^{(s)}\right\| + ... + \left\|m_h^{(s)}\right\|\right).$$

Что и дает (8). При $\nu < 0$ рассуждения аналогичны.

При $\nu = \pm 1$ получим бивекторы с минимальной нормой, принадлежащие $\Gamma^{(s)}$. Таких векторов два: $\left(p^{(s)}, q^{(s)}\right)$, $\left(q^{(s)}, p^{(s)}\right)$, где $p^{(s)} = \left(m_1^{(s)}, ..., m_h^{(s)}, 0, ...0\right)$, $q^{(s)} = \left(0, ...0, -m_{h+1}^{(s)}, ..., -m_l^{(s)}\right)$.

Отсюда следует, что $\Gamma_j^{(s)} = \emptyset$ при $2 \le j \le m^{(s)} - 1$. И первое непустое множество имеет следующий вид

$$\Gamma^s_{m^{(s)}} = \left\{ \left(p^{(s)}, q^{(s)}\right), \ \left(q^{(s)}, p^{(s)}\right) \right\}.$$

Определение 2. *Будем говорить, что* $\Gamma^* \subset \Gamma$ *является положительным базисом в* Γ, *если любой элемент из* Γ *является линейной комбинацией над* Q_1^* *элементов из* Γ^*.

Убедимся, что

$$\Gamma^* = \Gamma_2^\circ \bigcup \left(\bigcup_{s=1}^{g} \Gamma^s_{m^{(s)}} \right). \tag{9}$$

Прежде всего видно, что $\Gamma^{\circ *} = \Gamma_2^{(\circ)} = \{(e_1, e_1), ..., (e_l, e_l)\}$, где e_s – s-ый орт в Q_l^+.

Пусть $(p, q) \in \Gamma^{(s)}$. С помощью (8) можно убедиться, что

$$p = |\nu| \, p^{(s)} + p^\circ, \quad \eta = |\nu| \, q^{(s)} + p^\circ, \ \ p^\circ \in Q^+. \tag{10}$$

Из (10) следует, что (p, q) есть линейная комбинация над Q_1^+ элементов из Γ_2° и $\Gamma^{(s)}_{m^{(s)}}$. Учитывая, что $\Gamma^{(j)} \bigcap \Gamma^{(s)} = \emptyset$, получаем в качестве искомого базиса (9).

Из (10) можно также вывести, что любой бивектор из $\Gamma^{(s)}$ имеет норму, определяемую равенством $\|p + q\| = \nu \, \|m_s + 2j\|$ при некоторых значениях $j = 0, \, 1, \, 2, \, ...$ и $|\nu| = 1, \, 2, \, ...$.

Если порядок резонанса четный, то непустыми будут только резонансные множества четного порядка

$$\Gamma^{(s)} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma^{(s)}_{m^{(s)}+2j}.$$

Если же резонанс нечетный, то

$$\Gamma^{(s)} = \left(\bigcup_{j=0}^{y_2(m_s+1)} \Gamma^{(s)}_{m^{(s)}+2j} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma^{(s)}_{2m^{(s)}+j} \right).$$

3. Полиноминальные суммы линейной РДС

Рассмотрим линейную КРДС

$$\xi_{n+1} = \Lambda\xi_n; \quad \zeta_{n+1} = \mathrm{B}\zeta_n \tag{11}$$

и функциональные уравнения вдоль решения (11)

$$\Phi^{(j)}\left(\Lambda\xi_n, \overline{\Lambda\xi}_n, \mathrm{B}\zeta_n, \overline{\mathrm{B}\zeta}_n\right) - \Phi^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) = \Delta\Phi^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) = 0, \tag{12}$$

определяющие суммы РДС (11) в виде форм j-го порядка.

Лемма 1. *Если множество $\Gamma_j \neq 0$, то КРДС (11) имеет семейство в качестве суммы форм j-го порядка, представляемое в виде*

$$\Phi^{(j)} = \sum_{r_j} \gamma^{(j)}_{p,q} \xi^p_n \overline{\xi}^p_n = \sum_{r_j} \gamma^{(j)}_{p,q} \Phi^{(j)}_{p,q}, \tag{13}$$

где $\gamma^{(j)}_{p,q}$ – произвольные комплексные постоянные. Если $\gamma^{(j)}_{p,q} = \overline{\gamma}_{q,p}$, то $\Phi^{(j)}$ – действительные суммы.

Доказательство. Очевидно, что КРДС $\xi_{n+1} = B\xi_n$ не может иметь суммы указанного вида. Поэтому достаточно рассмотреть подсистему $\xi_{n+1} = \Lambda\xi_n$, а вместе с (12) следует рассматривать уравнения

$$\Phi^{(j)}\left(\Lambda\xi_n, \overline{\Lambda\xi}_n\right) - \Phi^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n,\right) = \Delta\Phi\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right) = 0. \tag{14}$$

Подставляя в (14) $\Phi^{(j)}_{p,q}$, имеем

$$\Phi^{(j)}_{p,q}\left(\Lambda\xi_n, \overline{\Lambda\xi}_n\right) = (p,q) \exp i\left[(p-q), \varphi\right] \Phi_{p,q}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right).$$

Откуда следует, что $\Phi^{(j)}_{p,q}$ являются суммами КРДС тогда и только тогда, когда $(p,q) \in \Gamma_j$. Поэтому любая сумма в виде формы j-го порядка содержится в семействе (13). Последнее утверждение леммы очевидно.

Полиномиальные суммы (11) могут быть сконструированы из суммы $\Phi^{(j)}$ при различных j и при которых $\Gamma_j \neq \emptyset$. Рассмотрим множество всех полиномиальных сумм S. Оно содержит подмножество S^*, состоящее из сумм КРДС $\Phi^{(j)}_{p,q}$ с $(p,q) \in \Gamma_j$. Множество S^* образует в S базис в том смысле, что любая сумма из S полиномиально зависит от суммы из S^*. Учитывая структуру множества S^*, можно утверждать, что любая полиномиальная сумма (11) есть полином от $m+2g$ суммы из множества

$$S^* = \left\{\omega_{rn}, ..., \omega_{mn}, \xi_n^{p(s)} \overline{\xi}^{q(s)}\right\}, \quad s = 1, ..., g. \tag{15}$$

Для нерезонансных КРДС $S^* = \{\omega_{1n}, ..., \omega_{mn}\}\,, \quad \omega_{sn} = \xi_{sn}\overline{\xi}_{sn}$.

4. О формальном ряде для КРДС (3)

Рассмотрим функциональные уравнения

$$\Delta\Phi^{(j)} = G\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right), \tag{16}$$

где $G^{(j)}$ – известная форма.

Лемма 2. *Если множество $\Gamma_j = \emptyset$, то уравнение* (16) *имеет единственное решение в виде формы $\Phi^{(j)}$. Причем, если $G^{(j)}$ – действительная форма, то и $\Phi^{(j)}$ действительная.*

Доказательство следует из теоремы 1.3 [12] и основано на том, что в условиях леммы производная матрица A_j матрицы A неособенная.

Лемма 3. *Если множество $\Gamma j = \emptyset$, то какова бы ни была форма $G^{(j)}$, существуют такие $\alpha^{(j)}_{p,q}$, что уравнение*

$$\Delta\Phi^{(j)} = \sum_{\Gamma_j} \alpha^{(j)}_{p,q} \xi_n^p, \overline{\xi}_n^q + G^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) \tag{17}$$

имеет семейство решений,

$$\Phi^{(j)} = \sum_{\Gamma_j} \gamma^{(j)}_{p,q} \xi_n^p, \overline{\xi}_n^q + \hat{\Phi}^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right), \tag{18}$$

где $\gamma_{p,q}^{(j)}$ *– произвольные комплексные постоянные.* $\hat{\Phi}^{(j)}$ *и* $\alpha_{p,q}^{(j)}$ *однозначно определяются формой* $G^{(j)}$. *При этом*

$$\alpha_{p,q}^{(j)} = -G_{p,q,0,0}^{(j)}. \tag{19}$$

Если $G^{(j)}$ *– действительная форма, то при* $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{p,q}^{(j)}$ *форма* $\Phi^{(j)}$ *также действительная.*

Доказательство. Запишем $\Phi^{(j)}$ в виде

$$\Phi^{(j)} = \Phi_{\circ}^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right) + \Phi_1^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right) + \Phi^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right).$$

В таком же виде представим и форму $G^{(j)}$. Уравнение (17) распадается на три независимых уравнения

$$\Delta\Phi_{\circ}^{(j)} = \sum_{\Gamma_j} \alpha_{p,q}^{(j)} \xi_n^p, \overline{\xi}_n^q + G_0^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right), \tag{20}$$

$$\Delta\Phi_1^{(j)} = G_1^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right), \tag{21}$$

$$\Delta\Phi_2^{(j)} = G_2^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right). \tag{22}$$

Находя решения уравнения (17), придем к системе линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов $\beta(j)$ формы $\Phi^{(j)}$ с матрицей A_j. Учитывая, что уравнение (17) распадается на уравнения (20)-(21), можно утверждать, что производная матрица A_j имеет блочную структуру,

$$A_j = \begin{pmatrix} A_j^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & A_j^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & A_j^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Но тогда и все собственные числа χ матрицы A_j распадутся на три группы, соответствующие матрицам $A_j^{(s)}$:

$$\chi^{(0)} = \exp i\left((p-q), \varphi\right), \ p, q \in Q_m^+, \ \|p+q\| = j,$$

$$\chi^{(1)} = \exp\left((h, \ln\rho) + (\tau, \ln\overline{\rho})\right), \ h, \tau \in Q_r^+, \ \|h+\tau\| = j,$$

$$\chi^{(2)} = \exp\left(i\left(p-q\right),\varphi\right) + \left(h, \ln\rho\right) + \left(\tau, \ln\overline{\rho}\right),$$

$$p, q \in Q_m^+,\ h, \tau \in Q_r^+,\ \|p+q\| + \|h+\tau\| = j$$

Из формул, определяющих числа $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$, следует, что матрицы $A_j^{(1)}$ и $A_j^{(1)}$ неособые и уравнения (21), (22) имеют одинаковое решение (ср. с Леммой 2). Причем $\Phi_1^{(j)}$ и $\Phi_2^{(j)}$ действительны, если таковы $G_1^{(j)}$, $G_2^{(j)}$.

Рассмотрим уравнение (20). Полагая $G_0^{(j)} = \sum_j G_{p,q}^{(j)}\xi_n^p, \overline{\xi}_n^q$, из (20) получим

$$\left(\exp i\left(p-q,\varphi\right)-1\right)R_{p,q} = G_{p,q}^{(j)}, \quad (p,q) \notin \Gamma_j,$$

$$0R_{p,q}^{(j)} = \alpha_{p,q}^{(j)} + G_{p,q}^{(j)}, \quad (p,q) \in \Gamma_j.$$

Следовательно, если положить

$$\alpha_{p,q}^{(j)} = -G_{p,q}^{(j)}, \tag{23}$$

то уравнение (20) имеет решение

$$\Delta\hat{\Phi}_0^{(j)} = \sum_{(p,q)\notin\Gamma_j} G_{p,q}^{(j)} / \left(\left[\exp i\left[(p-q),\varphi\right]-1\right]\xi_n^p, \overline{\xi}_n^q\right),$$

а (16) имеет решение

$$\hat{\Phi}_0^{(j)} = \hat{\Phi}_0^{(j)} + \Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)}.$$

Полагая $\varphi_{p,q}^{(j)} = \gamma_{p,q}^{(j)}$ при $(p,q) \in \Gamma_j$, где $\gamma_{p,q}^{(j)}$ – произвольные постоянные, получим искомое семейство решений. Если $G^{(j)}$ – действительная форма, то $G_{p,q}^{(j)} = G_{q,p}^{(j)}$ и тогда $\alpha_{p,q}^{(j)} = \overline{\alpha}_{q,p}^{(j)}$. Если положить $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{p,q}^{(j)}$, то и $\Phi^{(j)}$ будет действительной формой. Лемма доказана.

В основе построения полиномиальных функций Ляпунова лежит следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma_k \neq \emptyset$. Тогда существует формальный ряд*

$$\Phi = \Phi^0\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right) + \Phi^{(k+1)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) + \ldots \tag{24}$$

такой, что его формальная разность в силу (3) *имеет вид*

$$\Delta\Phi = \sum_{j=k+1}^{\infty} {}^{/} \sum \alpha_{p,q}^{(j)} \xi_n^p, \overline{\xi}_n^q, \tag{25}$$

где $^{/}$ *означает, что суммирование ведется по тем* j, *, для которых* $\Gamma_j \neq \emptyset$.

Формы $\Phi^{(j)}$ *в* (24) *имеют вид* (18) *при* $\Gamma_j \neq \emptyset$, *и однозначно определяются при* $\Gamma_j \neq \emptyset$, *где числа* $\alpha_{p,q}^{(j)}$ *– линейные функции произвольных постоянных* $\gamma_{p,q}^{(r)}$ *с* $r < j$.

Если $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{p,q}^{(j)}$, *то* Φ *и* $\Delta\Phi$ *– действительные ряды.*

Доказательство. Рассмотрим ряд (24) и попытаемся формы $\Phi^{(j)}$ подобрать так, чтобы $\Delta\Phi$ имело как можно более простую структуру. С этой целью возьмем ряд

$$\Psi = \sum_{j=k+1}^{\infty} \Psi\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right)$$

и рассмотрим уравнение

$$\Delta\Phi = \Psi. \tag{26}$$

Из (26) для последовательного определения форм $\Phi^{(j)}$ имеем

$$\Phi^{(j)} = \Psi^{(j)} + G^{(j)}. \tag{27}$$

При $j = k$ (27) имеет вид $\Delta\Phi = 0$ и следовательно, $\Phi^{(k)}$ – сумма линейной части (16) (так как $\Gamma_j \neq \emptyset$, то $\Phi^{(k)} \neq \emptyset$).

Из структур формы $G^{(j)}$ и Лемм 2 и 3 следует, что уравнение (26) при соответствующем выборе Ψ имеет решение при всех $j > k$.

Причем, если $\Gamma_j = \emptyset$, то можно положить $\Psi \equiv 0$.

Если же $\Gamma_j \neq \emptyset$, то (26) имеет решение при $\Psi = \sum\limits_{\Gamma_j} \alpha_{p,q}^{(j)} \xi_n^p, \overline{\xi}_n^q$, $\alpha_{p,q}^{(j)} = -G_{p,q,0,0}^{(j)}$. Следовательно, формы $\Phi^{(j)}$ можно последовательно определить так, чтобы ряд (24) вдоль решения РДС (3) имел первую разность в виде (25). Поскольку при $\Gamma_j = \emptyset$ формы $\Phi^{(j)}$ имеют вид (18), то из структуры форм $G^{(j)}$ в (27) следует, что $\alpha_{p,q}^{(j)}$ – линейные функции произвольных постоянных $\gamma_{p,q}^{(\mu)}$, $\mu < j$.

Можно убедиться, что если $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{q,p}^{(j)}$, то $\alpha_{p,q}^{(j)} = \overline{\alpha}_{q,p}^{(j)}$ и ряды Φ и $\Delta\Phi$ будут действительными. Теорема доказана.

Заметим, что ряд (24) можно представить в виде суммы

$$\Phi = \sum_{\Gamma_k}^{\infty} \gamma_{p,q} \xi_n^p \overline{\xi}_n^q + \overset{\wedge}{\Phi} \left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right),$$

где $\overset{\wedge}{\Phi}$ однозначно определяется через постоянные $\gamma_{p,q}^{(j)}$.

Любой отрезок первого слагаемого-суть полиномиальная сумма линейной КРДС и может быть выражен как полином от суммы входящих в S^*.

5. Полиномиальные функций Ляпунова

Рассмотрим ряд (24), предполагая, что $k = 2$:

$$\Phi = \Phi^{(2)} \left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right) + \Phi^{(3)} \left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) \tag{28}$$

и будем считать, что построенные Φ и $\Delta\Phi$ – действительные ряды. Если $m = 1$, то числа $\alpha_{p,q}^{(j)}$ будут эквивалентны фокусным постоянным Ляпунова G_j в плоской проблеме центра и фокуса [4]. В многомерном случае $(m > 1)$ эти постоянные мы так же будем называть постоянными Ляпунова. Существенной особенностью многомерных постоянных Ляпунова является их зависимость от произвольных постоянных $\gamma_{p,q}^{(j)}$. В зависимости от свойств постоянных Ляпунова все КРДС (3) могут быть разбиты на два класса.

1. Существует такой выбор параметров $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{q,p}^{(j)}$, что

а) $\alpha_{p,q}^{(j)} = 0 \quad (\forall\ (p,q) \in \Gamma)$,

б) $\Phi^{(l)}$ – знакопеременная форма.

2. При любом выборе параметров $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{q,p}^{(j)}$, удовлетворяющих 1б, условие 1а нарушается.

Обозначим через $V_{2\mu}$ отрезок ряда (28) до форм μ-го порядка. Его разность вдоль решения (3) имеет вид

$$\Delta V_{2,l} = \sum_{j=3}^{\mu} \sum_{\Gamma_j} \alpha_{p,q} \xi_n^p \overline{\xi}_n^q + R_{\mu+1} \left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) = [\Delta V_{2,\mu}] + R_{\mu+1}, \tag{29}$$

где $R_{\mu+1}$ совокупность членов порядка $\geq \mu + 1$. Непосредственное использование полинома $V_{2,\mu}$ в качестве функции Ляпунова осложняется тем, что

$V_{2,\mu}$ и $\Delta V_{2,\mu}$ в общем случае $r \neq 0$ могут быть знакопеременными лишь относительно $\xi_n, \overline{\xi}_n$. Обычно в такой ситуации, прежде чем проводить анализ устойчивости, применяют принципы сведения [10].

Однако, на самом деле нет необходимости в применении принципа сведения при построении его для анализа устойчивости с помощью дискретного аналога теорем Ляпунова [4].

Лемма 4. *Постоянные Ляпунова $\alpha_{p,q}^{(j)}$ инвариантны относительно преобразования, используемого в принципе сведения* [9].

Доказательство. Пусть Φ – ряд (29), постоянный для КРДС (3). Тогда справедливо тождество

$$\Delta\Phi = \sum_{j=3}^{\mu}\sum \alpha_{p,q}^{(j)}\xi_n^p\overline{\xi}_n^q. \tag{30}$$

В соответствии с принципом сведения рассмотрим функциональные уравнения

$$\begin{gathered}\xi\left(\Lambda\xi_n\right) + F\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) * \bar{\Lambda}\overline{\xi}_n + \\ + \bar{F}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) = B\xi_n + P\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right),\end{gathered} \tag{31}$$

которые допускают в качестве решения формальный ряд

$$\zeta_n = \zeta\left(\xi_n, \overline{\zeta}_n\right) = \sum_{j=2}^{\infty}\zeta^{(j)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right).$$

Сделаем в (3) замену $\zeta_n = \eta_n + \zeta\left(\xi_n, \overline{\xi}_n\right)$.

Тогда получим

$$\xi_{n+1} = \Lambda\xi_n + F\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \eta_n + \xi, \bar{\eta} + \xi\right), \tag{32}$$

$$\eta_{n+1} = \chi\eta_n + \mathrm{P}^*\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \eta_n, \bar{\eta}_n\right)$$

Выделим из (32) укороченную КРДС

$$\xi_{n+1} = \Lambda\xi_n + F\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) \tag{33}$$

и убедимся, что постоянные Ляпунова для РДС (32) и (3) совпадают. С этой целью рассмотрим ряд $\Phi_* = \Phi\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right)$ и вычислим $\Delta\Phi_*$ в силу (33). Учитывая, что $\xi_n, \overline{\xi}_n$ обращает (31) в тождество, будем иметь

$$\Delta\Phi_* = \sum_{j=3}^{\mu} \sum_{\Gamma_j} \alpha_{p,q} \xi_n^p \overline{\xi}_n^q,$$

где $\alpha_{p,q}^{(j)}$ те же, что и в $\Delta\Phi$. Лемма доказана.

Если $[\Delta V_{2,\mu}]$ – знакоопределенный полином, то $V_{2,l}$, отрезок ряда Φ_*, является функцией Ляпунова для КРДС (32).

И хотя $\Delta V_{2,\mu}$ не будет формально функцией Ляпунова для полной КРДС (3), тем не менее, мы можем с ее помощью сделать заключения об устойчивости точно такие, как и с помощью Φ_* Именно это и позволяет избежать применения преобразования, предусматриваемого принципом сведения.

Теорема 2. *Для того, чтобы КРДС* (3) *обладала независящей от n формальной суммой* (28), *необходимо и достаточно, чтобы выбором параметров $\gamma_{p,q}^{(j)} = \overline{\gamma}_{q,p}^{(j)}$ все постоянные Ляпунова $\alpha_{p,q}^{(j)}$ можно было обратить в нуль, т.е. чтобы была совместной счетная система уравнений*

$$\alpha_{p,q}^{(j)} = 0, \quad \|p+q\| = j, \ \ (p,q) \in \Gamma_j, \ \ j = 3, 4, \dots \,. \tag{34}$$

Если при этом $\Phi^{(2)}$ – знакоопределенная форма, то КРДС (3) *устойчива по Биркгофу в любом конечном порядке, и устойчива по Ляпунову, если ряд* (28) *сходится.*

Сформулированная теорема приводит к многомерному аналогу проблемы центра и фокуса, одной из задач которого является выделение класса систем, для которых выполняется (34).

Трансцендентный случай устойчивости, определяемый условиями (34), может быть двух типов:

а) (34) выполняется тождественно по $\gamma_{p,q}^{(j)}$,

б) (34) выполняется при фиксированном выборе всех или части $\gamma_{p,q}^{(j)}$.

Трансцендентные случаи устойчивости, изучавшиеся в [16], относятся к типу а). Можно показать, что к тому же типу относится и случай, который характеризуется наличием у (3) m– суммы

$$\Phi_s = \xi_n\overline{\xi}_n + \Phi_s^{(3)}\left(\xi_n, \overline{\xi}_n, \zeta_n, \overline{\zeta}_n\right) + ...; \;\; s = \overline{1, m}. \tag{35}$$

Отметим без доказательства следующий результат.

Теорема 3. *Если правые части КРДС (3) – аналитические функции ξ_n и, если в РДС нет резонансов $(L, \varphi) \equiv 0\,(mod 2\pi)$ таких что $(\exists s)\,(\exists j)\left(k_j + \delta_{s_j} \geq 0\right)$, то у нее существует формальная сумма (28) и нулевое решение устойчиво, по крайнем мере, в любом конечном порядке.*

КРДС (3), удовлетворяющие Теореме 3, имеют семейство сумм (35). Как следует из [4], в этом случае КРДС (3) обладает семейством ограниченных решений (по крайней мере, формальным), аналогичных семейству периодических решений А.М. Ляпунова [2].

Рассмотрим КРДС 2-го класса. Для любой такой КРДС выполняется условие $(\alpha_{2,\mu} = 0)$. Существует такое натуральное μ, что система линейных уравнений

$$\alpha_{p,q}^{(j)} = 0, \quad \|p+q\| = j, \quad j = 2, ..., \mu - 1, \tag{36}$$

допускает относительно $\gamma_{p,q}^{(h)}$ нетривиальное решение. Но система (36) несовместима при $j = 2, 3, ..., \mu$.

Рассмотрим полином $V_{2,\mu}$ – отрезок ряда (28) до μ-го порядка. В качестве параметров $\gamma^{(h)}$ в $V_{2,\mu}$ входит в семейство решений системы (36). Тогда первая разность (29) от полинома $V_{2,\mu}$ будет иметь вид

$$\Delta V_{2,\mu} = \sum_{\Gamma} \alpha_{p,q}^{(\mu)} \xi_n^p \overline{\xi}_n^q + R_{\mu+1} = [\Delta V_{2,\mu}] + R_{\mu+1}. \tag{37}$$

Лемма 4 и Теорема Ляпунова [5] приводят к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть РДС (3) принадлежит типу $\alpha_{2,\mu}$ с четным $\mu = 2N_0$, пусть выбором параметров $\gamma_{p,q}^{(h)}$, $2 \leq h \leq \mu - 1$, удовлетворяющих при $2 \leq h \leq \mu{-}1$ системе (36), можно добиться определенной положительности формы $[\Delta V_{2,\mu}]$.*

Тогда, если $\Phi^{(2)}$определенно отрицательно, то нулевое решение КРДС (3) асимптотически устойчиво и неустойчиво в противном случае. Если КРДС (3) нерезонансная, то чисел μ необходимо четное $\Phi^{(2)} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \omega_{jn}$, а $[\Delta V_{2,\mu}]$ зависит только от ω_{jn}, что следует из структуры множеств Γ, Γ^*, S^*.

Если удастся выбором $\gamma_{p,q}^{(h)}$ добиться выполнения не только (36), но и обращения в нуль чисел $\alpha_{p,q}^{\mu}$ при $p \neq q$, то и в резонансном случае $[\Delta V_{2,\mu}]$ будет зависеть только от $\omega_{1n}, ..., \omega_{mn}$. Заметим, что последнее требование в многомерных КРДС зачастую выполнимо. Так, если $\mu = 2N$ порядок младшего внутреннего резонанса, то нужно добиться обращения в нуль лишь двух чисел Ляпунова, соответствующих множеству $\Gamma_{\mu(s)}^{(s)}$.

Если же выше указанные требования выполнены, то анализ знакоопределенности формы $[\Delta V_{2,\mu}]$ принципиально осуществим. Этот анализ основан на теорема Полия [17] об однородных формах от положительных переменных.

Чтобы списать процесс исследования знакаопределенности на этой теореме, рассмотрим совокупность форм

$$[\Delta V_{\mu+k}] = \sum_{|p|=N+k} \Delta V_{\mu+k} \omega_n^p = \left[\Delta V_{\mu+k} \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_{jn} \right)^k \right].$$

Через S_m обозначим систему лиейных неравенств $\alpha_p^{(N+k)} > 0, \ \|p\| = N + k, \ \ p \in Q \ \ (S_m)$. Непосредственным следствием теоремы Полия является следующая лемма.

Лемма 5. *Для того, чтобы $[V_{\mu+k}]$ выбором параметров $\gamma_{p,q}^{(j)}$ могла быть определено положительной, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое m, при котором система линейных неравенств (S_m) совместна.*

Лемма 5 описывает регулярный процесс выбора параметров, обеспечивающих знакоопределенность $[\triangle V_{p+k}]$. Однако, недостатком этого процесса является то, что мы не можем указать верхней границы числа m, причем эта граница не может быть указана принципиально. Все это приводят к следующему.

Теорема 5. *Пусть КРДС (3) принадлежит типу $\alpha_{2,\mu}$ с четным μ и пусть форма $[\triangle V_{\mu}]$ зависит только от ω_{jn} (может быть за счет выбора параметров $\gamma_{p,q}^{(s)}$). Для того, чтобы полином $\Delta V_{2,\mu}^{*}$ удовлетворял одной из классических теорем Ляпунова, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, что система линейных неравенств (S_m) совместна.*

Если при этом среди решений $\gamma_{p,q}^{(j)}$ *системы* (S_m) *имеются такие, что форма* $\Phi^{(2)}$ *определенно отрицательна, то нулевое решение асимптотически устойчиво и неустойчиво в противном случае.*

Требование четности μ является существенным. Если μ – нечетное, то, как следует из структуры резонансных множеств, в РДС обязательно есть внутренний резонанс нечетного порядка. В этом случае удается использовать отрезок ряда (24), в котором L – порядок внутреннего резонанса для построения функции Четаева.

При наличии в КРДС нескольких внутренних резонансов иногда целесообразно использовать полиномы $V_{k,\mu}$, где k следует выбрать так, чтобы $\Phi^{(k)}$ был полиномом от всех сумм, входящих в базис S^k.

Литература

1 Ulam S.M. Some properties of certain non-linear transformations // Procedings of Int. conf. On mathematical models in physical sciences. – New York: University of Notre Dame, 1962. – P. 85-95.

2 Stein P.R., Ulam S.M. Nonlinear transformation studies on electronic computers // Rozprawy Matematycne. – 1964. – V. 39. – P. 1-65.

3 Grumowski I., Mira C. Recurrences and Discrete Dynamic Systems. – Springer, 1980. – P. 319.

4 Бопаев К.Б. Устойчивость систем разностных уравнений в критическом случае при наличии резонанса и в случаях к критическим // Препринт № 2, КазГУ и НГУ. – Алматы, Новосибирск, 1995. – 63 с.

5 Бромберг П.И. Устойчивость и автоколебание импульсных систем регулирования. – М., 1953. – 247 с.

6 Пуанкаре А. О кривых, определенных дифференциальными уравнениями. – М-Л., 1947. – 240 с.

7 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М-Л., 1956. – Т. 11. – 421 с.

8 И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. – М., 1966. – 354 с.

9 Бопаев К.Б., Гольцер Я.М. Исследование устойчивости разностных уравнений в одном критическом случае // Труды семинара по теории устойчивости движения. – Алма-Ата, 1972. – вып. 4. – С. 3-13.

10 Бопаев К.Б. Устойчивость РДС в критических и близко к критическим случаях // Журнал Д.С.С. – Новосибирск, 1999. – № 6. – С. 5-9.

11 Бопаев К.Б. Нормализация систем не линейных разностных уравнений // Препринт №1, КазГУ и НГУ. – Алматы-Новосибирск, 1995. – 61 с.

12 Харди Г.Г., Литльвуд Д.Е., Полия Г. Неравенства. – М., 1948. – 451 с.

13 Бостанов У.А., Гольцер А.М. О построении функции Ляпунова в комплексной области // Сборник Матем. наук. – Алма-Ата, 1975. – Вып. 2. – С. 40-53.
14 Бопаев К.Б., Гольцер Я.М. О разрешимости некоторых линейных уравнений в частных разностях в классе форм // Труды семинара по теории устойчивости движения. – Алма-Ата, 1975. – Вып. 5. – С. 27-36.
15 Бопаев К.Б., Гольцер Я.М. Разрешимость некоторых линейных уравнений в частных разностях в классе форм // Труды семинара по теории устойчивости движения. – Алма-Ата, 1974. – Вып. 2. – С. 27-36.
16 Бопаев К.Б. Устойчивости дискретных динамических систем при нескольких резонансах // Доклады НАН РК. – 1999. – № 5. – С. 4-12.
17 Tvrdy M. The normal form and stability of solutions of a System of differential equations in the complex domain // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1970. – V. 20, issue 1. – P. 39-73.

Статья поступила в редакцию 22.05.2017

Бапаев К.Б., Сламжанова С.С. КОМПЛЕКСТI АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДIҢ БIР КЛАСЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Жұмыста комплекстi айырымдық-динамикалық жүйенiң орнықтылығы жөнiндегi есеп зерттелген және берiлген жүйенiң резонанстық жиындарын құрылымдау есебi шешiлген. Берiлген жүйенiң сызықтық бөлiктерi үшiн полиномдық қосындылар құрылған. Формалды қатардың үзiгiн Ляпунов функциясы ретiнде пайдаланып комплекстi айырымдық-динамикалық жүйелердiң сапалық қасиеттерi және оның орнықтылығы зерттелген.

Bapaev K.B., Slamzhanova S.S. ON STABILITY OF ONE CLASS OF THE COMPLEX DIFFERENCE-DYNAMIC SYSTEMS

The problem of stability of the complex difference-dynamic system is investigated. The problem of structuring resonant sets of the system is solved. Polynomial sums are constructed for the linear parts of the given system. Using the segment of the formal series as a Lyapunov function the qualitative properties of complex difference-dynamic systems and its stability are investigated.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 71–82.

УДК 517.95

О НЕТРИВИАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.Т. Дженалиев[1], М.Г. Ергалиев[2], М.И. Рамазанов[3]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]muvasharkhan@gmail.com, [2]ergaliyev.madi.g@gmail.com
[3]Институт прикладной математики
[3]Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: [3]ramamur@mail.ru

Аннотация: Ранее в работах авторов было показано существование нетривиальных решений для однородной граничной задачи для линейного уравнения теплопроводности в вырождающихся (в степенном порядке) областях. Установлен класс этих нетривиальных решений, более того, сужение найденного класса обеспечивало отсутствие нетривиальных решений. В данной работе, основываясь на наших предыдущих результатах для линейного случая, мы показываем в вырождающейся области существование нетривиальных решений для одного нелинейного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, однородная граничная задача, нетривиальное решение.

1. Введение

В работе в бесконечной угловой области $G = \{x, t| \, 0 < x < t, \ t > 0\}$ обсуждаются вопросы существования нетривиального решения для следующей граничной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) + w_x^2(x,t), \quad \{x,t\} \in G, \\ w(x,t)|_{x=0} = w(x,t)|_{x=t} = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

С помощью преобразования

$$u(x,t) = \exp\{w(x,t)\} - 1 \tag{2}$$

Keywords: *Heat equation, homogeneous boundary value problem, nontrivial solution.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K02, 35K20.
Funding: Номер грантового финансирования МОН РК №0052/ПЦФ-14, №0823/ГФ4.

граничная задача (1) сводится к линейной однородной граничной задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \{x,t\} \in G, \\ u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=t} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

2. Сведение граничной задачи для уравнения теплопроводности к интегральному уравнению

Решение задачи (3) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [1]–[7]:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\} \nu(\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Известно [7], что функция (4) удовлетворяет уравнению (3) при любых $\nu(t)$ и $\varphi(t)$. Используя граничные условия из (3) и свойства тепловых потенциалов, имеем следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$[I-K]\varphi \equiv \varphi(t) - \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0, \ t > 0, \tag{5}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\right\} \right].$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Нами ранее было показано [3]–[6], что интегральное уравнение (5) наряду с тривиальным решением имеет и нетривиальные решения с точностью до постоянного множителя. А именно, справедлива

Теорема 1. *Общее решение уравнения (5) имеет вид*

$$\varphi(t) = C \cdot \varphi_0(t), \;\; C = const, \tag{7}$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right]. \tag{8}$$

В следующем пункте мы уточняем класс решений (8) интегрального уравнения (5), который был нами установлен ранее в работах [3]–[6].

3. Класс решений интегрального уравнения (5)

Вначале установим свойство интегрального оператора K в уравнении (5). Введем весовой класс существенно ограниченных функций

$$L_\infty(\mathbb{R}_+\,;\,\theta_1(t)) = \{\varphi|\,\theta_1(t)\varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)\}, \tag{9}$$

где

$$\theta_1(t) = \begin{cases} t^{1/2}, & \text{если } 0 < t \le T, \\ T^{1/2}, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases} \tag{10}$$

и T – произвольное положительное ограниченное число. Введем весовой класс существенно ограниченных функций (класс единственности)

$$L_\infty(\mathbb{R}_+\,;\,\theta_1(t,\varepsilon)) = \{\varphi|\,\theta_1(t,\varepsilon)\varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)\}, \tag{11}$$

где

$$\theta_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} t^{1/2-\epsilon}, & \text{если } 0 < t \le T, \\ T^{1/2-\epsilon}, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases} \tag{12}$$

и T – произвольное положительное ограниченное число, $\varepsilon > 0$.

Лемма 1. *Интегральный оператор K в уравнении (5) является ограниченным в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}_+;\theta_1(t))$, т.е.*

$$K \in \mathcal{L}\left(L_\infty(\mathbb{R}_+;\theta_1(t)); L_\infty(\mathbb{R}_+;\theta_1(t))\right). \tag{13}$$

Доказательство. Оценим интегральный оператор K. Покажем, что имеет место неравенство

$$\|K\| \le I_{(0,T)} + I_{(T,Inf)}, \tag{14}$$

где через $I_{(0,T)}$ и $I_{(T,Inf)}$ обозначены нормы сужений интегрального оператора K, действующих соответственно в классах

$$L_\infty((0,T);\theta_1(t)),\ L_\infty((T,+\infty);\theta_1(t))$$

и для которых верны оценки

$$I_{(0,T)} \le I_{1,(0,T)} + I_{2,(0,T)}, \tag{15}$$

где

$$I_{1,(0,T)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t^{3/2}}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{t-\tau}\right\} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\right\} d\tau,$$

$$I_{2,(0,T)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t^{1/2}}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \left[1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{t-\tau}\right\}\right] \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\right\} d\tau.$$

$$I_{(T,Inf)} \le I_{1,(T,Inf)} + I_{2,(T,Inf)}, \tag{16}$$

где

$$I_{1,(T,Inf)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau,$$

$$I_{2,(T,Inf)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[1-\exp\left\{-\frac{t\tau}{t-\tau}\right\}\right] \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\right\} d\tau.$$

Теперь для доказательства Леммы 1 достаточно показать ограниченность интегралов в правых частях неравенств (15)–(16). Делая замену $\tau = t\sin^2\alpha$ в интегралах $I_{1,(0,T)}$ и $I_{2,(0,T)}$ из (15), имеем:

$$I_{1,(0,T)} \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\sqrt{t}\cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\} d\left(\sqrt{t}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right) = 1, \tag{17}$$

$$I_{2,(0,T)} \leq \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{2t \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{t^{1/2}\sin\alpha \cdot t^{1/2}\cos\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi t}}{4}. \tag{18}$$

Делая замену $\tau = t\sin^2\alpha$ в интеграле $I_{1,(T,Inf)}$ и оценивая интеграл $I_{2,(T,Inf)}$ из (16), имеем:

$$I_{1,(T,Inf)} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\sqrt{t}\cdot \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\} d\left(\sqrt{t}\cdot \operatorname{tg}\alpha\right) = 1, \tag{19}$$

$$I_{2,(T,Inf)} \leq -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{2}\right\} d\sqrt{\frac{t-\tau}{2}} = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right). \tag{20}$$

Из (17)–(20) следует неравенство (14), т.е. справедливо утверждение (13). Лемма 1 доказана.

Из утверждения Леммы 1 следует справедливость следующих лемм.

Лемма 2. *Решение интегрального уравнения (5) принадлежит классу* $L_\infty(\mathbb{R}_+;\theta_1(t))$, *т.е.*

$$\theta_1(t)\varphi_0(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{21}$$

Лемма 3. *Для интегрального уравнения (5) пространство* $L_\infty(\mathbb{R}_+;\theta_1(t,\varepsilon))$ *является классом единственности, т.е. в этом классе уравнение (5) имеет только тривиальное решение.*

4. Класс решений граничной задачи для уравнения теплопроводности (3)

Для дальнейшего преобразуем представление (4) решения задачи (3). Для этой цели, подставляя представление функции $\nu(t)$ (6) в (4), получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{t} M(x,t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \tag{22}$$

где

$$M(x,t,\tau) = \frac{x+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\} + \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\}. \tag{23}$$

$$\theta_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} t^{1/2}, & \text{если } 0 < t \le T, \\ T^{1/2} \exp\left\{-(\frac{1}{4}+\varepsilon)(t-T)\right\}, & \text{если } T < t < +\infty, \end{cases} \tag{24}$$

и T – произвольное положительное ограниченное число, $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. *Пусть $G_{0,T} = \{0 < x < t,\ 0 < t \le T\}$. Тогда решение $u(x,t)$ граничной задачи (3) принадлежит классу*

$$L_\infty(G_{0,T}; \theta_2(t,\varepsilon)).$$

Доказательство. Так как $\{x,t\} \in G_{0,T}$, то по определению (24) имеем $\theta_2(t,\varepsilon) = t^{1/2}$. Оценим решение (22)–(23) на множестве $G_{0,T}$. Покажем, что имеет место неравенство

$$\|u(x,t)\|_{L_\infty(G_{0,T};\theta_2(t,\varepsilon))} \le \sum_{k=1}^{4} I_k(x,t), \tag{25}$$

где

$$I_1(x,t) = \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{x+t}{2}\right\} \int_0^t \frac{x+t}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x+t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{26}$$

$$I_2(x,t) = \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{x+t}{2}\right\} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x+t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{27}$$

$$I_3(x,t) = \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{t-x}{2}\right\} \int_0^t \frac{t-x}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{28}$$

$$I_4(x,t) = \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{t-x}{2}\right\} \int_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau. \tag{29}$$

При получении выражений (26)–(29) в представлении решения $u(x,t)$ (22)–(23) использованы следующие преобразования:

$$x+\tau = x+t-(t-\tau),\ \ x-\tau = x-t+(t-\tau).$$

Покажем ограниченность интегралов (26)–(29) на множестве $G_{0,T}$.

Делая замену $\tau = t\sin^2\alpha$ в интегралах (26)–(29), будем иметь:

$$I_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{t^2-x^2}{4t}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{x+t}{2\sqrt{t}}\operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\} d\left(\frac{x+t}{2\sqrt{t}}\operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1}{4}\exp\left\{\frac{t^2-x^2}{4t}\right\}. \quad (30)$$

$$I_2(x,t) \le \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{x+t}{2}\right\} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, t^{1/2}}{4} \exp\left\{\frac{x+t}{2}\right\}, \quad (31)$$

$$I_3(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2-x^2}{4t}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\} d\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{t^2-x^2}{4t}\right\}. \quad (32)$$

$$I_4(x,t) \le \frac{t^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{t-x}{2}\right\} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}\, t^{1/2}}{4} \exp\left\{\frac{t-x}{2}\right\}. \quad (33)$$

Из ограниченности на множестве $G_{0,T}$ правых частей соотношений (30)–(33) следует утверждение Леммы 4.

Лемма 5. *Пусть $G_{T,Inf} = \{0 < x < t,\, T < t < \infty\}$. Тогда решение $u(x,t)$ граничной задачи (3) принадлежит классу*

$$L_\infty(G_{T,Inf}\,;\, \theta_2(t,\varepsilon)).$$

Доказательство. Так как $\{x,t\} \in G_{T,Inf}$, то по определению (24) имеем

$$\theta_2(t,\varepsilon) = T^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)(t-T)\right\}.$$

Оценим решение (22)–(23) на множестве $G_{T,Inf}$. Покажем, что имеет место неравенство

$$\|u(x,t)\|_{L_\infty(G_{T,Inf}\,;\theta_2(t,\varepsilon))} \le \sum_{k=1}^{4} T^{1/2} J_k(x,t), \tag{34}$$

где

$$J_1(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{2x+t}{4} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^t \frac{x+t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x+t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{35}$$

$$J_2(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{2x+t}{4} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x+t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{36}$$

$$J_3(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{2x-t}{4} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^t \frac{t-x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \tag{37}$$

$$J_4(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{2x-t}{4} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau. \tag{38}$$

При получении выражений (35)–(38) в представлении решения $u(x,t)$ (22)–(23) использованы следующие преобразования:

$$x+\tau = x+t-(t-\tau),\ \ x-\tau = x-t+(t-\tau).$$

Покажем ограниченность интегралов (35)–(38) на множестве $G_{T,Inf}$.
Делая замену $\tau = t\sin^2\alpha$ в интегралах (35)–(38), будем иметь:

$$J_1(x,t) \le \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{x+t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\right\} d\left(\frac{x+t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right) = \frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\}, \tag{39}$$

$$J_2(x,t) \le \frac{t^{1/2}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{x+t}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\right\} d\alpha \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\pi}\, t^{1/2}}{4} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\}, \qquad (40)$$

$$J_3(x,t) \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\right\} d\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\}, \qquad (41)$$

$$J_4(x,t) \le \frac{t^{1/2}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\} \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{tg}\,\alpha\right)^2\right\} d\alpha \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\pi}\, t^{1/2}}{4} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} - \varepsilon\, t\right\}. \qquad (42)$$

Из ограниченности на множестве $G_{T,Inf}$ правых частей соотношений (39)–(42) следует утверждение Леммы 5.

Из утверждений Лемм 4 и 5 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Наряду с тривиальным решением граничная задача (3) имеет семейство нетривиальных решений*

$$\{C \cdot u(x,t),\, C = const \ne 0\},$$

где

$$u(x,t) \in L_\infty(G\,;\, \theta_2(t,\varepsilon)),$$

определяемое соотношениями (22)–(23).

Теорема 3. *Граничная задача (3) имеет только тривиальное решение в классе* $L_\infty(G\,;\,\theta_{2-1}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2))$, *где*

$$\theta_{2-1}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\begin{cases} t^{1/2-\varepsilon_1-\varepsilon_2}, & \text{если } 0<t\le T,\\ T^{1/2-\varepsilon_1-\varepsilon_2}\exp\left\{-\left(\frac{1}{4}+\varepsilon_2\right)(t-T)\right\}, & \text{если } T<t<+\infty,\end{cases} \tag{43}$$

и T *– произвольное положительное ограниченное число,* $\varepsilon_1\ge 0,\ \varepsilon_2\ge 0$.

5. Основной результат для нелинейного уравнения

Из установленных выше теорем и лемм следует

Теорема 4. *Наряду с тривиальным решением граничная задача (1) имеет семейство нетривиальных решений*

$$\{w(x,t)=\ln[1+C\cdot u(x,t)],\ C=const\ne 0\},$$

которое определяется с помощью преобразования (2), где

$$u(x,t)\in L_\infty(G\,;\,\theta_2(t,\varepsilon)).$$

Для решения нелинейного уравнения имеем:

$$\exp\{w(x,t)\}-1\in L_\infty(G\,;\,\theta_2(t,\varepsilon)).$$

6. Заключение

Из утверждения Теоремы 4 следует, что некоторые функционалы от нетривиальных решений нелинейного уравнения допускают рост как в вершине угла, так и на бесконечности.

Порядки роста определяются весовыми функциями $\theta_1(t)$, $\theta_2(t,\varepsilon)$.

Литература

1 Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Граничная задача для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 231-243.

2 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 527-547.

3 Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об особом интегральном уравнении второго рода со спектральным параметром // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 3-14.

4 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 2014:213. – 21 p.

5 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. – 2015. – V.2015:71. – 14 p.

6 Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1234-1248.

7 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

Статья поступила в редакцию 17.05.2017

Жиенәлиев М.Т., Ерғалиев М.Г., Рамазанов М.Ы. СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС БІР ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНІҢ ТРИВИАЛДЫ ЕМЕС ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Бұған дейін авторлардың жұмыстарында сызықты жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шекаралық есептің (дәрежелік ретте) азғындалатын облыста тривиалды емес шешімдерінің бар болатындығы көрсетілген. Осы тривиалды емес шешімдердің класы анықталып, бұған қоса, табылған кластың тарылуы тривиалды емес шешімдердің жоқтығын қамтамасыз ететіндігі көрсетілген. Бұл жұмыста бұған дейін сызықты жағдай үшін жасаған нәтижелерімізге сүйене отырып, біз сызықты емес бір жылуөткізгіштік теңдеуінің тривиалды емес шешімдерінің бар болуын азғындалатын облыста көрсетеміз.

Jenaliyev M.T., Yergaliyev M.G., Ramazanov M.I. ON A NONTRIVIAL SOLUTION OF ONE NONLINEAR HEAT EQUATION

Earlier in the work of the authors it was shown the existence of non-trivial solutions for the homogeneous boundary value problem for linear heat equation in degenerating (in the power-law order) domains. The class of these non-trivial solutions was stated, moreover, the narrowing of the found class provided of the absence non-trivial solutions. In this paper, based on our previous results for the linear case, we show in the degenerating domain the existence of nontrivial solutions for a nonlinear heat equation.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 83–109.

УДК 517.95

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ж.К. Джобулаева

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: zhanat-78@mail.ru

Аннотация: Изучена линеаризованная двухфазная задача с двумя малыми параметрами для системы параболических уравнений. Исходная нелинейная задача со свободной границей описывает процесс фазового перехода (плавление, затвердевание) вещества с примесью неизвестной концентрацией. В пространстве Гельдера доказаны существование, единственность решения и коэрцитивные оценки решения с константами, независящими от малых параметров.

Ключевые слова: Параболические уравнения, малые параметры, коэрцитивные оценки, пространство Гельдера.

1. Введение. Постановка задачи. Основные результаты

В данной работе исследуется двухфазная задача с двумя малыми параметрами $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ при старших членах в условиях сопряжения для системы уравнений теплопроводности. Эта задача является математической моделью, описывающей процесс фазовых переходов (плавление, кристализацию) вещества, в котором содержится примесь с концентрациями. Неизвестными являются температура и концентрация в жидкой и твердой фазах, а также граница раздела фаз.

Задача при $\kappa = 1$, $\varepsilon = 1$ была изучена А.Г. Петровой [1] в пространстве Гельдера $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT})$, $\alpha \in (0,1)$. Линеаризованные задачи с одним и двумя малыми параметрами в граничных условиях для параболических уравнений Стефана и Веригина изучались в работах [2]–[4].

Keywords: *Parabolic equations, small parameters, coercitive estimates, Hölder space.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта № 3358/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Задача будет изучена в пространстве Гельдера $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT}),\ j=1,2,$ где l – нецелое положительное число. Доказаны существование, единственность, оценки решения задачи с константами не зависящими от малых параметров в пространстве Гельдера. Это дает возможность получить существование, единственность и оценки решений задач без потери гладкости заданных функций при $\kappa=0,\ \varepsilon>0;\ \kappa>0,\ \varepsilon=0$ и $\kappa=0,\ \varepsilon=0$. Кроме того, полученные результаты позволят исследовать нелинейную нерегулярную задачу со свободной границей о плавлении бинарных сплавов с двумя малыми параметрами для системы параболических уравнений.

Пусть $D_1=\{x\mid x<0\},\ D_2=\{x\mid x>0\},\ D_{jT}=D_j\times(0,T),\ j=1,2,\ \sigma_T=(0,T)$.

Требуется определить функции $u_j(x,t),\ c_j(x,t),\ j=1,2,$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\partial_t u_j-a_j\partial_x^2 u_j-\alpha_j\psi'=f_j(x,t)\quad \text{в}\quad D_{jT},\ j=1,2, \tag{1}$$

$$\partial_t c_j-a_{j+2}\partial_x^2 c_j-\beta_j\psi'=g_j(x,t)\quad \text{в}\quad D_{jT},\ j=1,2, \tag{2}$$

начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0}=0,\quad u_j\big|_{t=0}=0,\quad c_j\big|_{t=0}=0\quad \text{в}\quad D_j,\ j=1,2, \tag{3}$$

и условиям сопряжения на границе $x=0,\ t\in(0,T)$

$$(u_1-u_2)\big|_{x=0}=\varphi_1(t), \tag{4}$$

$$(c_1-\gamma_1u_1)\big|_{x=0}=\varphi_2(t),\ (c_2-\gamma_2u_2)\big|_{x=0}=\varphi_3(t), \tag{5}$$

$$(\lambda_1\partial_xu_1-\lambda_2\partial_xu_2)\big|_{x=0}+\kappa\psi'=q_1(t), \tag{6}$$

$$(k_1\partial_xc_1-k_2\partial_xc_2)\big|_{x=0}-\varepsilon\psi'=q_2(t), \tag{7}$$

где все коэффициенты постоянные, $a_j,\ a_{j+2},\ \lambda_j,\ k_j,\ \gamma_j>0,\ j=1,2,\ \kappa,\ \varepsilon$ – положительные; $\partial_t=\partial/\partial_t,\ \partial_x=\partial/\partial_x,\ \partial_x^2=\partial^2/\partial_{x^2},\ D_t^k=d^k/dt^k$.

Задача (1)–(7) была изучена в пространстве Гельдера [5]. Пусть l – нецелое положительное число, $\alpha=l-[l]\in(0,1)$.

Под $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT})$ и $\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ будем понимать банаховы пространства функций $u(x,t)$ и $\psi(t)$, имеющих нормы

$$|u|^{(2+l)}_{D_T} := \sum_{2m_0+m=0}^{2+[l]} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{D_T} + \sum_{2m_0+m=2+[l]} \Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \Big) +$$

$$+ \sum_{2m_0+m=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}, \tag{8}$$

$$|\psi|^{(1+l/2)} := \sum_{m_0=0}^{1+[l/2]} |D_t^{m_0}\psi|_{\sigma_T} + [D_t^{1+[l/2]}\psi]^{(l/2-[l/2])}_{\sigma_T}, \tag{9}$$

где

$$|v|_{D_T} = \sup_{(x,t)\in D_T} |v|,$$

$$[v]^{(\alpha)}_{x,D_T} = \sup_{(x,t),(z,t)\in D_T} \frac{|v(x,t)-v(z,t)|}{|x-z|^{\alpha}}, \quad [v]^{(\alpha)}_{t,D_T} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in D_T} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^{\alpha}}.$$

Через $\overset{\circ}{C}{}^{l,\ l/2}_{x\ t}(\overline{D}_T)$ и $\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ будем обозначать подпространство функций $u(x,t)$, принадлежащих $C^{l,\ l/2}_{x\ \ t}(\overline{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям

$$\partial_t^k u\big|_{t=0} = 0, \ \ k = 0,1,...,1+[l/2].$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}^{(1+l)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, l – *нецелое положительное число, норма* $|\psi|^{(1+l/2)}_{\overline{\sigma}_T}$, *определенная по формуле (9), эквивалентна норме*

$$\|\psi\|^{(1+l)/2}_{\overline{\sigma}_T} = \sup_{t\in\sigma_T} t^{-\frac{1+l}{2}}|\psi|_{\overline{\sigma}_T} + \Big[D_t^{[(1+l)/2]}\psi\Big]^{\left(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}]\right)}_{\overline{\sigma}_T}. \tag{10}$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \kappa \le \kappa_0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \le \kappa_0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *и выполняются условия*

$$\mu_j = \beta_j - \gamma_j\alpha_j > 0,\ \mu_{j+2} = \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0,\ j = 1,2. \tag{11}$$

Для любых функций $f_j \in \overset{\circ}{C}{}^{l,\ l/2}_{x\ t}(\overline{D}_{jT}),\ g_j \in \overset{\circ}{C}{}^{l,\ l/2}_{x\ t}(\overline{D}_{jT}),\ q_j \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ j = 1,2,\ \varphi_k \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ k = 1,2,3,$ *задача (1)–(7) имеет единственное решение* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT}),\ c_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT}),\ \psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ (\kappa + \varepsilon)\psi' \in \overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}(|u_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} + |c_j|^{(2+l)}_{D_{jT}}) + |\psi|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + |(\kappa+\varepsilon)\psi'|^{(\frac{1+l}{2})}_{\sigma_T} \le$$

$$\le C_1\left(\sum_{j=1}^{2}\left(|f_j|^{(l)}_{D_{jT}} + |g_j|^{(l)}_{D_{jT}} + |q_j|^{(\frac{1+l}{2})}_{\sigma_T}\right) + \sum_{k=1}^{3}|\varphi_k|^{(1+l/2)}_{\sigma_T}\right), \tag{12}$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* ε.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда производные* $\kappa\psi'(t)$ *и* $\varepsilon\psi'(t)$ *в условиях (6), (7) задачи (1)–(7) удовлетворяет неравенствам*

$$|\kappa\psi'(t)|^{\left(\frac{1+[l]+\beta}{2}\right)}_{\sigma_T} \le C_2 k^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{2}|f_j|^{(l)}_{D_{jT}} + \sum_{k=1}^{3}|\varphi_k|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + |q_1|^{(\frac{1+l}{2})}_{\sigma_T}\Big), \tag{13}$$

$$|\varepsilon\psi'(t)|^{\left(\frac{1+[l]+\beta}{2}\right)}_{\sigma_T} \le C_3\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{2}|g_j|^{(l)}_{D_{jT}} + \sum_{k=2}^{3}|\varphi_k|^{(1+l/2)}_{\sigma_T} + |q_2|^{(\frac{1+l}{2})}_{\sigma_T}\Big), \tag{14}$$

где $\beta \in (0,\alpha)$, *постоянные* C_2, C_3 *не зависят от* κ *и* ε.

Преобразуем задачу (1)–(7) к эквивалентной с однородными уравнениями (1), (2) и условиями (4)–(6). Для этого построим вспомогательные функции $V_j,\ Z_j,\ j=1,2$, как решения следующих краевых задач:

$$\begin{aligned}
&\partial_t V_j(x,t) - a_j\partial_x^2 V_j(x,t) = f_j(x,t) \quad \text{в} \quad D_{jT},\ j=1,2,\\
&V_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_j,\ j=1,2,\\
&(V_1 - V_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t),\ (\lambda_1\partial_x V_1 - \lambda_2\partial_x V_2)\big|_{x=0} = q_1(t).
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t Z_1(x,t) - a_3\partial_x^2 Z_1(x,t) = g_1(x,t) \quad \text{в} \quad D_{1T},\\
&Z_1\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_1,\quad Z_2\big|_{x=0} = \varphi_2(t) + \gamma_1 V_1\big|_{x=0},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t Z_2(x,t) - a_4\partial_x^2 Z_2(x,t) = g_2(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T},\\
&Z_2\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_2,\quad Z_2\big|_{x=0} = \varphi_3(t) + \gamma_2 V_2\big|_{x=0}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Задача (15) является задачей сопряжения, а (16), (17) – две первые краевые задачи. Каждая из этих задач в силу [5], [6] имеет единственное решение

$$V_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\quad t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ Z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\quad t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ j=1,2, \tag{18}$$

удовлетворяющее оценкам

$$|V_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_4\big(|f_j|_{D_{1T}}^{(l)} + |\varphi_1|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |q_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\big),\ j=1,2, \tag{19}$$

$$|Z_1|_{D_{1T}}^{(2+l)} \le C_5\big(|g_1|_{D_{1T}}^{(l)} + |\varphi_2|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |V_1|_{D_{1T}}^{(2+l)}\big), \tag{20}$$

$$|Z_2|_{D_{2T}}^{(2+l)} \le C_6\big(|g_2|_{D_{2T}}^{(l)} + |\varphi_3|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |V_2|_{D_{2T}}^{(2+l)}\big). \tag{21}$$

В задаче (1)–(7) произведем замену

$$\begin{aligned}
&u_j(x,t) = v_j(x,t) + V_j(x,t) + \alpha_j\psi(t),\ j=1,2,\\
&c_j(x,t) = z_j(x,t) + Z_j(x,t) + \beta_j\psi(t),\ j=1,2,
\end{aligned} \tag{22}$$

и мы получим задачу для нахождения функций $v_j(x,t), z_j(x,t),\ j=1,2$, и $\psi(t)$, удовлетворяющих уравнениям теплопроводности

$$\partial_t v_j - a_j \partial_x^2 v_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j = 1, 2, \tag{23}$$

$$\partial_t z_j - a_{j+2} \partial_x^2 z_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j = 1, 2, \tag{24}$$

нулевым начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad v_j\big|_{t=0} = 0, \quad z_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

и условиям сопряжения на границе $x = 0,\ t \in (0, T)$:

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=0} + (\alpha_1 - \alpha_2)\psi = 0, \tag{26}$$

$$(z_1 - \gamma_1 v_1)\big|_{x=0} + \mu_1 \psi = 0, \quad (z_2 - \gamma_2 v_2)\big|_{x=0} + \mu_2 \psi = 0, \tag{27}$$

$$(\lambda_1 \partial_x v_1 - \lambda_2 \partial_x v_2)\big|_{x=0} + \kappa \psi' = 0, \tag{28}$$

$$(k_1 \partial_x z_1 - k_2 \partial_x z_2)\big|_{x=0} - \varepsilon \psi' = \Phi(t), \tag{29}$$

где $\Phi(t) = q_2(t) - (k_1 \partial_x Z_1 - k_2 \partial_x Z_2)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T),\ \mu_j = \beta_j - \gamma_j \alpha_j,\ j = 1, 2,$

$$|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leq C_7 \Big(\sum_{j=1}^{2} |g_j|_{D_{jT}}^{(l)} + |q_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + \sum_{k=2}^{3} |\varphi_k|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} \Big). \tag{30}$$

Справедлива следующая Лемма 2.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leq \kappa \leq \kappa_0,\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \leq \kappa_0,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *и* $\mu_j = \beta_j - \gamma_j \alpha_j > 0,\ \mu_{j+2} = \beta_{3-j} - \gamma_{3-j} \alpha_j > 0,\ j = 1, 2.$

При любой $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\sigma_T)$, l *– нецелое положительное число, решение задачи (23)–(29) может быть представлено в виде*

$$\psi(t) = \frac{2\big(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\big)}{k_0} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_x\big(x + \frac{\mu}{k_0}\sigma, t - \tau - \sigma\big)\big|_{x=0} d\sigma,\ x > 0, \tag{31}$$

$$v_1(x,t) = 2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0} - \frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{1x}\big(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau-\sigma\big)d\sigma+$$

$$+\frac{2\kappa\sqrt{a_1}}{k_0}\int\limits_0^t \Phi(\tau)\Gamma_1\big(-x, t-\tau\big)d\tau,\ x<0, \tag{32}$$

$$v_2(x,t) = 2a_2\left(\frac{\mu\kappa}{k_0^2} + \frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\right)\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{2x}\big(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma, t-\tau-\sigma\big)d\sigma+$$

$$+\frac{2\kappa\sqrt{a_2}}{k_0}\int\limits_0^t \Phi(\tau)\Gamma_2\big(x, t-\tau\big)d\tau,\ x>0, \tag{33}$$

$$z_1(x,t)=2a_3\left(\frac{\big(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_1+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_4\big)}{k_0} - \frac{\gamma_1\kappa\mu}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{3x}\big(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_3}\sigma, t-\tau-\sigma\big)d\sigma+$$

$$+\frac{2\gamma_1\kappa\sqrt{a_3}}{k_0}\int\limits_0^t \Phi(\tau)\Gamma_3\big(-x, t-\tau\big)d\tau,\ x<0, \tag{34}$$

$$z_2(x,t)=-2a_4\left(\frac{\big(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_3+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_2\big)}{k_0} - \frac{\gamma_2\kappa\mu}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{4x}\big(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_4}\sigma, t-\tau-\sigma\big)d\sigma+$$

$$+\frac{2\gamma_2\kappa\sqrt{a_4}}{k_0}\int\limits_0^t \Phi(\tau)\Gamma_4\big(x, t-\tau\big)d\tau,\ x>0, \tag{35}$$

где

$$k_0 = \kappa(k_1\gamma_1/\sqrt{a_3} + k_2\gamma_2/\sqrt{a_4}) + \varepsilon(\lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}), \tag{36}$$

$$\mu = k_2\lambda_2\mu_2/\sqrt{a_2}\sqrt{a_4} + k_1\lambda_1\mu_1/\sqrt{a_3}\sqrt{a_1} + k_2\lambda_1\mu_3/\sqrt{a_4}\sqrt{a_1} + k_1\lambda_2\mu_4/\sqrt{a_3}\sqrt{a_2},$$

$\Gamma_i(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a_i\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a_i t}}$, $i = 1-4$, – фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t w - a_i \partial_x^2 w = 0$, удовлетворяющее оценке

$$|\partial_t^k \partial_x^m \Gamma_i(x,t)| \le C_8 \frac{1}{t^{\frac{1+2k+m}{2}}} e^{-\frac{x^2}{8a_i t}}, \ i = 1-4. \tag{37}$$

Доказательство Леммы 2. Применим к задаче (23)–(29) преобразование Лапласа по переменной t

$$\widetilde{F}(p) \equiv L[F] = \int\limits_0^t F(t) e^{-pt} dt,$$

и после некоторых преобразований решение задачи (23)–(29) в области изображений Лапласа запишется в виде

$$\widetilde{\psi} = -\frac{(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}})\ \widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)},$$

$$\widetilde{v}_1 = \frac{\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}(\alpha_1 - \alpha_2)\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{\sqrt{\frac{p}{a_1}}x} + \frac{\kappa\sqrt{p}\ \widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{\sqrt{\frac{p}{a_1}}x}, \ x < 0,$$

$$\widetilde{v}_2 = -\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}(\alpha_1 - \alpha_2)\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{-\sqrt{\frac{p}{a_2}}x} + \frac{\kappa\sqrt{p}\ \widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{-\sqrt{\frac{p}{a_2}}x}, \ x > 0,$$

$$\widetilde{z}_1 = \frac{\gamma_1\kappa\sqrt{p}\ \widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{\sqrt{\frac{p}{a_3}}x} + \frac{(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_4)\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{\sqrt{\frac{p}{a_3}}x}, \ x < 0,$$

$$\widetilde{z}_2 = \frac{\gamma_2\kappa\sqrt{p}\ \widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{-\sqrt{\frac{p}{a_4}}x} + \frac{(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_3 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_2)\widetilde{\Phi}(p)}{k_0(\frac{\mu}{k_0}\sqrt{p} + p)} e^{-\sqrt{\frac{p}{a_4}}x}, \ x > 0.$$

Применим к функциям $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{v}_j$, $\widetilde{z}_j$, $j = 1, 2$, формулы обратных преобразований Лапласа [7] при $x < 0$:

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}x}}{p + b\sqrt{p}} \doteqdot \int\limits_0^t \frac{-x + b\sqrt{a}\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\sigma)^3}} e^{-\frac{(-x+b\sqrt{a}\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma = 2a \int\limits_0^t \partial_x \Gamma(-x + b\sqrt{a}\sigma, t-\sigma) d\sigma,$$

$$\widetilde{\Phi}(p)\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}(-x)}}{p+b\sqrt{p}} \doteqdot 2a\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \partial_x \Gamma(-x+b\sqrt{a}\sigma, t-\tau-\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \frac{-x+b\sqrt{a}\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)^3}} e^{-\frac{(-x+b\sqrt{a}\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}} d\sigma,$$

$$\widetilde{\Phi}(p)\partial_x \frac{1}{p+b\sqrt{p}} e^{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}x} \doteqdot 2\int \Phi(\tau)\Gamma(-x,t-\tau)d\tau -$$

$$-2b\sqrt{a}\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \Gamma_x(-x+b\sqrt{a}\sigma, t-\tau-\sigma)d\sigma =$$

$$= 2\int \Phi(\tau)\Gamma(-x,t-\tau)d\tau - \frac{b}{\sqrt{a}}\int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \frac{-x+b\sqrt{a}\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)^3}} e^{-\frac{(-x+b\sqrt{a}\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}} d\sigma$$

и аналогичные при $x > 0$. И мы получим решение задачи (23)–(29) в виде (31)–(35).

2. Доказательства Теорем 1 и 2

Теорема 3. *Пусть* $0 \le \kappa \le \kappa_0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \le \kappa_0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *и* $\mu_j = \beta_j - \gamma_j\alpha_j > 0,\ \mu_{j+2} = \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0,\ j = 1, 2.$

Для любой функции $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *задача (23)–(29) имеет единственное решение* $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,1+l/2}{}_t(\overline{D}_{jT}),\ z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,1+l/2}{}_t(\overline{D}_{jT}),\ \psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T),\ (\kappa+\varepsilon)\psi' \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}(|v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} + |z_j|_{D_{jT}}^{(2+l)}) + |\psi|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |(\kappa+\varepsilon)\psi'|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_9|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \qquad (38)$$

где постоянная C_9 *не зависит от* κ *и* ε.

Для доказательства этой Теоремы установим сначала следующую Лемму.

Лемма 3. *В условиях Теоремы 3 производные* $\partial_x v_j(x,t))|_{x=0}, \partial_x z_j(x,t)|_{x=0}$ *функций* $v_j(x,t),\ z_j(x,t),\ j=1,2,$ *определенных по формулам (32)–(35), принадлежат пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *и подчиняются оценкам*

$$|\partial_x v_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{10}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \tag{39}$$

$$|\partial_x z_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{11}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j=1,2, \tag{40}$$

где постоянные C_{10}, C_{11} *не зависят от* κ *и* ε.

Доказательство. Для определенности рассмотрим производную функции v_1

$$\partial_x v_1(x,t)|_{x=0} =$$

$$=2a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1}[\Phi(\tau_1-\sigma)-\Phi(\tau_1)]\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau_1)d\sigma\big|_{x=0}-$$

$$-\frac{2k_0\sqrt{a_1}}{\mu}\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\int_0^t \Phi(\tau_1)\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\tau_1,t-\tau_1)d\tau_1\big|_{x=0}.$$

(см. формулы (32), (33)). Для доказательства Леммы 3 согласно определению нормы (10) оценим норму производной $\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}$. Для этого применим неравенства

$$|\Phi(\tau_1)| \le M\tau_1^{\frac{1+l}{2}}, \quad \text{где} \quad M=|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$

$$|\Phi(\tau_1-\sigma)-\Phi(\tau_1)| \le [\Phi]_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}},\ [l]=0,\ l=\alpha\in(0,1),$$

$$|\Phi(\tau_1-\sigma)-\Phi(\tau_1)| \le M\sigma\tau_1^{\frac{l-1}{2}},\ [l]\ge 1,$$

$$|\xi|^\gamma e^{-\xi^2} \le C_\gamma e^{-\xi^2/2},\ \gamma\ge 0, \tag{41}$$

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}}e^{-\frac{(\mu a_1\sigma)^2+x^2}{4k_o^2a_1^2(t-\sigma)}}d\sigma \le \frac{C_{12}k_0}{t}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2t}}, \tag{42}$$

тогда будем иметь при $[l]=0$

$$|\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}| \leq \frac{C_{13}M}{k_0}\Big(\int\limits_0^t \frac{d\tau_1}{(t-\tau_1)^{3/2}}\int\limits_0^{\tau_1}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-\tau_1)}}d\sigma+$$

$$+k_0\int\limits_0^t \frac{\tau_1^{\frac{1+l}{2}}\tau_1/k_0}{(t-\tau_1)^{3/2}}e^{-\frac{\mu^2\tau_1^2}{4k_0^2(t-\tau_1)}}d\tau_1\Big), \tag{43}$$

в первом интеграле поменяем порядок интегрирования и произведем замену $\frac{\sigma}{k_0\sqrt{t-\tau_1}}=z$, $\frac{d\tau_1}{(t-\tau_1)^{3/2}}=\frac{dzk_0}{\sigma}$, а во втором интеграле воспользовавшись неравенством (42), мы получим

$$|\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}| \leq C_{14}M\Big(\int\limits_0^t \sigma^{\frac{1+\alpha}{2}-1}d\sigma+\frac{t^{\frac{1+l}{2}}tk_0}{k_0 t}\Big)\leq C_{15}Mt^{\frac{1+l}{2}}, \tag{44}$$

где C_{15} не зависит от κ и ε.

При $[l]\geq 1$ мы получим

$$|\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}| \leq C_{16}M\Big(\frac{1}{k_0}\int\limits_0^t \frac{\tau_1^{\frac{l-1}{2}}}{(t-\tau_1)^{3/2}}d\tau_1\int\limits_0^{\tau_1}\sigma e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{k_0^2(t-\tau_1)}}d\sigma+\frac{t^{\frac{1+l}{2}}tk_0}{k_0 t}\Big)\leq$$

$$\leq C_{16}M\Big(\frac{1}{k_0}t^{\frac{l-1}{2}}\int\limits_0^t\sigma d\sigma\int\limits_\sigma^t\frac{1}{(t-\tau_1)^{3/2}}e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-\tau_1)}}d\tau_1+\frac{t^{\frac{1+l}{2}}tk_0}{k_0 t}\Big)\leq C_{17}Mt^{\frac{1+l}{2}}, \tag{45}$$

где C_{17} не зависит от κ и ε.

Оценим константы Гельдера старшей производной. Для этого перекинем производную $\partial_\tau^{m_0}$ на $\Phi(\tau)$

$$\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}=$$

$$=2a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\int\limits_0^t p_i(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{1xx}\big(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau-\sigma\big)d\sigma\big|_{x=0}+$$

$$+\frac{2\kappa\sqrt{a_1}}{k_0}\int\limits_0^t p_i(\tau)\Gamma_{1x}\big(-x,t-\tau\big)d\tau\big|_{x=0}, \tag{46}$$

где $m_0=\left[\frac{1+l}{2}\right]$ и

$$p_1(t):=D_t^k\Phi(t)\in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T) \text{ при } [l]=2k \text{ -- четном}, \tag{47}$$

$$p_2(t):=D_t^{k+1}\Phi(t)\in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T) \text{ при } [l]=2k+1 \text{ -- четном}, \tag{48}$$

$k=0,...,\left[\frac{1+l}{2}\right],\ \alpha=l-[l]\in(0,1)$.

Так как $p_i(t)\in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{2+\alpha-i}{2}}(\overline{\sigma}_T),\ i=1,2,$ то для этих функций справедливы следующие неравенства при $t_1<t:$

$$|p_i(t)-p_i(t_1)|\le M_i(t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}},\ |p_i(t)|\le M_i t^{\frac{2+\alpha-i}{2}},\ M_i=[p_i]_{\sigma_T}^{(\frac{2+\alpha-i}{2})}, \tag{49}$$

$i=1,2,$ которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

В зависимости от значения показателя l нам необходимо оценить нормы $\left|\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}\right|_{\overline{\sigma}_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ и $\left|\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}\right|_{\overline{\sigma}_T}^{(\frac{\alpha}{2})}$.

Рассмотрим производную (46). В формуле (46) поменяем порядок интегрирования, произведем замену $t-\tau+\sigma=\tau_1$ в интеграле по τ и запишем производную $\partial_t^{m_0}\partial_x v_1$ в виде

$$\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}=$$

$$=2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t d\sigma\int\limits_\sigma^t [p_i(\tau_1-\sigma)-p_i(t-\sigma)]\Gamma_{1xx}(\cdot,t-\tau_1)d\tau_1\big|_{x=0}+$$

$$+2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t p_i(t-\sigma)d\sigma\int\limits_\sigma^t \Gamma_{1xx}(\cdot,t-\tau_1)d\tau_1\big|_{x=0}.$$

Во втором интеграле воспользуемся равенством $\partial_x^2\Gamma_1$ на $-\frac{1}{a_1^2}\partial_{\tau_1}\Gamma_1,\ j=1,2,$ и проинтегрируем по τ_1, тогда получим

$$\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}=$$

$$=2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau[p_i(\tau-\sigma)-p_i(t-\sigma)]\Gamma_{1xx}(\cdot,t-\tau)d\sigma\big|_{x=0}+$$

$$+\frac{1}{a_1^2}2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\int\limits_0^t p_i(t-\sigma)\Gamma_1(\cdot,t-\sigma)d\sigma\big|_{x=0}, \qquad (50)$$

где $i=1,2,\ m_0=[\frac{1+l}{2}]$, а вместо τ_1 мы снова записали τ.

Приняв $0<t_1<t<T$, для определенности, и воспользовавшись формулой (50), запишем разность производной $\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}$ в виде

$$\Delta_i=\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)-\partial_{t_1}^{m_0}\partial_x v_1(x,t_1)|_{x=0}\equiv$$

$$\equiv 2a_1\left(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\right)\left(\int\limits_{t_1}^t d\tau\int\limits_0^\tau[p_i(\tau-\sigma)-p_i(t-\sigma)]\Gamma_{1xx}(\cdot,t-\tau)|_{x=0}d\sigma+\right.$$

$$+\int\limits_0^{t_1}d\tau\int\limits_0^\tau[p_i(\tau-\sigma)-p_i(t_1-\sigma)]d\sigma\int\limits_{t_1}^t\partial_{t_2}\Gamma_{1xx}(\cdot,t_2-\tau)|_{x=0}dt_2+$$

$$+\int\limits_{t_1}^t p_i(t-\sigma)\Gamma_1(\cdot,t-\sigma)|_{x=0}d\sigma+\int\limits_0^{t_1}[p_i(t-\sigma)-p_i(t_1-\sigma)]\Gamma_1(\cdot,t-t_1)|_{x=0}d\sigma+$$

$$\left.+\int\limits_0^{t_1}p_i(t_1-\sigma)d\sigma\int\limits_{t_1}^t\partial_{t_2}\Gamma_{1xx}(\cdot,t_2-\tau)|_{x=0}dt_2\right).$$

Для оценки Δ_i используем неравенства (37) и (49), тогда будем иметь

$$|\Delta_i|\leq\frac{C_{18}M_i}{k_0}\left(\int\limits_{t_1}^t d\tau\int\limits_0^\tau\frac{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$+\int\limits_{t_1}^t dt_2\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t_2-\tau)^{5/2}}d\tau\int\limits_0^\tau e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t_2-\tau)}}d\sigma+\int\limits_{t_1}^t\frac{(t-\sigma)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{(t-\sigma)^{1/2}}e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t_2-\tau)}}d\sigma+$$

$$+(t-t_1)^{\frac{1+\alpha-i}{2}}\int\limits_0^{t_1} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-t_1)}}d\sigma+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\sigma)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}d\sigma\int\limits_{t_1}^{t}\frac{e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t_2-\sigma)}}}{(t_2-\sigma)^{3/2}}dt_2\Bigg).$$

Применив неравенства $t_1-\tau\leq t_2-\sigma$ во втором, $t-\sigma\leq t-t_1$, $1/(t-\sigma)\geq 1/(t-t_1)$ в третьем, и $(t_1-\sigma)\leq t_1\leq t_2$ в последнем интегралах и проинтегрировав первый и четвертый интегралы, найдем

$$|\Delta_i|\leq\frac{C_{19}M_i}{k_0}\Bigg((t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}k_0+\int\limits_{t_1}^{t}t_2^{\frac{2+\alpha-i}{2}}dt_2\int\limits_0^{t_2}\frac{e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t_2-\sigma)}}}{(t_2-\sigma)^{3/2}}d\sigma\Bigg).$$

Воспользовавшись в интеграле по σ оценкой (42) [8] получим

$$|\Delta_i|\leq C_{20}M_i(t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}},\ \ [\partial_t^{m_0}\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}]_{t,\sigma_T}^{(\frac{2+\alpha-i}{2})}\leq C_{20}M_i,\ i=1,2,\quad(51)$$

здесь постоянная C_{20} не зависит от κ,ε.

Из оценок (43), (45), (47)–(49), (51) следует, что согласно Лемме 1 $\partial_x v_1|_{x=0}\in\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leq C_{21}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\quad(52)$$

где постоянная C_{21} не зависит от κ,ε. Аналогично доказывается, что $\partial_x v_2|_{x=0},\partial_x z_1|_{x=0},\partial_x z_2|_{x=0}\in\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и $|\partial_x v_2|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leq C_{22}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, $|\partial_x z_j|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leq C_{23}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, $j=1,2$. □

Доказательство Теоремы 3. По Лемме 3 производная $\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}$, принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, тогда по теореме о следах функций общей теории параболических уравнений мы имеем, что $v_j(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),z_j(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),j=1,2,$ и $|v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)}\leq C_{24}|\partial_x v_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leq C_{25}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},|z_j|_{D_{jT}}^{(2+l)}\leq C_{26}|\partial_x z_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leq C_{27}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, $j=1,2$. Из равенства (26) вытекает, что функция $\psi(t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T)$ и подчиняется оценке $|\psi(t)|_{\sigma_T}^{(1+l/2)}\leq$

$C_{28}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\sum\limits_{j=1}^{2}|v_j|_{R_T}^{(2+l)} \leq C_{29}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, а из равенств (28), (29) будет следовать, что $\kappa\psi'(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\varepsilon\psi'(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и $|\kappa\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leq C_{30}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, $|\varepsilon\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leq C_{31}|\Phi(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}$, где постоянные C_{24}–C_{31} не зависят от κ, ε. Итак мы доказали Теорему 3 и неравенство (38). □

Доказательство Теоремы 1. Из формул (22):

$$u_j(x,t)=v_j(x,t)+V_j(x,t)+\alpha_j\psi(t), c_j(x,t)=z_j(x,t)+Z_j(x,t)+\beta_j\psi(t),\ j=1,2,$$

и на основании Теоремы 3 и оценок (38) и (19)–(21), (30), для функций $V_j(x,t)$, $j=1,2$, $Z_1(x,t)$, $Z_2(x,t)$ и $\Phi(t)$ получим Теоремы 1. □

Теперь докажем Теорему 2. Установим сначала Теорему 4 для задачи (23)–(29), к которой мы свели задачу (1)–(7).

Теорема 4. *Пусть* $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \leq \kappa_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *и* $\mu_j = \beta_j - \gamma_j\alpha_j > 0$, $\mu_{j+2} = \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0$, $j=1,2$.

При любой $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $k=0,1,\ldots$, *тогда производные* $\kappa\psi'$ *и* $\varepsilon\psi'$ *в условиях (28), (29) задачи (23)–(29) удовлетворяют неравенствам*

$$|\kappa\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})} \leq C_{32}\kappa^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})},\ \beta \in (0,\alpha), \tag{53}$$

$$|\varepsilon\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})} \leq C_{33}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})},\ \beta \in (0,\alpha), \tag{54}$$

где постоянные C_{32}, C_{33} *не зависят от* κ *и* ε.

Доказательство. Рассмотрим задачу (23)–(29). Мы построили ее решение в явном виде (31)–(35). Из условии (28) и (29) найдем

$$\kappa\psi'(t) = -\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{x=0}, \tag{55}$$

$$\varepsilon\psi'(t) = \big(k_1\partial_x z_1 - k_2\partial_x z_2\big)\big|_{x=0} - \Phi(t). \tag{56}$$

Вычислим производные $\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{x=0}$, $\big(k_1\partial_x z_1 - k_2\partial_x z_2\big)\big|_{x=0}$:

$$\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{x=0} =$$

$$= 2\lambda_1 a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\Bigg(\int\limits_0^t\Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^\tau\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma+w_1(t)\Bigg)+$$

$$+\frac{2\lambda_1 k\sqrt{a_1}}{k_0}\int\limits_0^t\Phi(\tau)\Gamma_{1x}(-x,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau-\frac{2\lambda_2 k\sqrt{a_2}}{k_0}\int\limits_0^t\Phi(\tau)\Gamma_{2x}(x,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau-$$

$$-2\lambda_2 a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2}+\frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\int\limits_0^t\Phi(\tau)d\tau\int\limits_0^\tau\Gamma_{2xx}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma-$$

$$-2\lambda_2 a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2}+\frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)w_3(t), \tag{57}$$

где

$$w_1(t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau[\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(\tau)]\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma, \tag{58}$$

$$w_3(t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau[\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(\tau)]\Gamma_{2xx}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma. \tag{59}$$

В формуле (57) проинтегрируем первый и четвертый интегралы по σ, учитывая равенства $\Gamma_{1xx}=-\frac{\mu\sqrt{a_1}}{k_0}\Gamma_{1x\sigma},\ \Gamma_{2xx}=\frac{\mu\sqrt{a_2}}{k_0}\Gamma_{2x\sigma}$:

$$\int\limits_0^\tau\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma=-\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\int\limits_0^\tau\partial_\sigma\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma=$$

$$=\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\Big[\Gamma_{1x}(-x,t-\tau)\big|_{x=0}-\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\tau,t-\tau)\big|_{x=0}\Big],$$

$$\int\limits_0^\tau\Gamma_{2xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma=\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\int\limits_0^\tau\partial_\sigma\Gamma_{2x}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma=$$

$$=-\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\Big[\Gamma_{2x}(x,t-\tau)\big|_{x=0}-\Gamma_{2x}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\tau_1,t-\tau)\big|_{x=0}\Big].$$

Подставив эти выражения в (57) и применяя формулы скачка потенциала двойного слоя

$$\int_0^t \Phi(\tau)\Gamma_{1x}(-x,t-\tau)d\tau \to \frac{\Phi(t)}{2a_1} \quad \text{при } x\to 0,$$

$$\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\int_0^t \Phi(\tau_1)\frac{(-x)}{4a_1\sqrt{\pi a_1(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}}d\tau_1 \to \frac{k_0}{2\mu\sqrt{a_1^3}}\Phi(t) \quad \text{при } x\to 0,$$

$$\int_0^t \Phi(\tau)\Gamma_{2x}(x,t-\tau)d\tau \to -\frac{\Phi(t)}{2a_2} \quad \text{при } x\to 0,$$

$$\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\int_0^t \Phi(\tau_1)\frac{x}{4a_2\sqrt{\pi a_2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}}d\tau_1 \to \frac{k_0}{2\mu\sqrt{a_2^3}}\Phi(t) \quad \text{при } x\to 0,$$

получим

$$\begin{gathered}\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{x=0} = \\ = \Bigg(\frac{\lambda_1 k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0} - \frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big) + \frac{\lambda_1\kappa}{k_0\sqrt{a_1}} + \\ + \frac{\lambda_2\kappa}{k_0\sqrt{a_2}} - \frac{\lambda_2 k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2} + \frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\Bigg)\Phi(t) + \\ + 2\lambda_1 a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0} - \frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\big(w_1(t)+w_2(t)\big) - \\ - 2\lambda_2 a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2} + \frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\big(w_3(t)+w_4(t)\big),\end{gathered} \tag{60}$$

где $w_1(t), w_3(t)$ определены по формулам (58), (59) и

$$w_2(t) = -\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\int_0^t \Phi(\tau)\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\tau, t-\tau)d\tau, \tag{61}$$

$$w_4(t)=\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\int\limits_0^t\Phi(\tau)\Gamma_{2x}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\tau,t-\tau)d\tau. \tag{62}$$

Подставив выражение (60) в формулу (55), мы получим

$$\kappa\psi'(t)=-2\lambda_1a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\big(w_1(t)+w_2(t)\big)+$$

$$+2\lambda_2a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2}+\frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\big(w_3(t)+w_4(t)\big). \tag{63}$$

Аналогично находим

$$\big(k_1\partial_xz_1-k_2\partial_xz_2\big)\big|_{x=0}=$$

$$=\Bigg(\frac{k_1\gamma_1k}{k_0\sqrt{a_3}}+\frac{k_1k_0}{\mu\sqrt{a_3}}\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_1+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_4}{k_0}-\frac{\gamma_1\kappa\mu}{k_0^2}\Big)+$$

$$+\frac{k_2\gamma_2\kappa}{k_0\sqrt{a_4}}+\frac{k_2k_0}{\mu\sqrt{a_4}}\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_3+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_2}{k_0}-\frac{\gamma_2\kappa\mu}{k_0^2}\Big)\Bigg)\Phi(t)+$$

$$+2k_1a_3\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_1+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_4}{k_0}-\frac{\gamma_1\kappa\mu}{k_0^2}\Big)\big(w_5(t)+w_6(t)\big)+$$

$$+2k_2a_4\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_3+\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_2}{k_0}-\frac{\gamma_2\kappa\mu}{k_0^2}\Big)\big(w_7(t)+w_8(t)\big), \tag{64}$$

где

$$w_5(t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau[\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(\tau)]\Gamma_{3xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_3}\sigma,t-\tau)\big|_{x=0}d\sigma, \tag{65}$$

$$w_6(t)=-\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_3}}\int\limits_0^t\Phi(\tau)\Gamma_{3x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_3}\tau,t-\tau)d\tau, \tag{66}$$

$$w_7(t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau [\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(\tau)]\Gamma_{4xx}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_4}\sigma, t-\tau)\big|_{x=0} d\sigma, \qquad (67)$$

$$w_8(t) = \frac{k_0}{\mu\sqrt{a_4}} \int\limits_0^t \Phi(\tau)\Gamma_{4x}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_4}\tau, t-\tau)d\tau. \qquad (68)$$

Из формул (56) и (64) находим

$$\varepsilon\psi'(t) = 2k_1 a_3\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_4}{k_0} - \frac{\gamma_1\kappa\mu}{k_0^2}\Big)\big(w_5(t)+w_6(t)\big) +$$

$$+2k_2 a_4\Big(\frac{\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}\mu_3 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\mu_2}{k_0} - \frac{\gamma_2\kappa\mu}{k_0^2}\Big)\big(w_7(t)+w_8(t)\big). \qquad (69)$$

Рассмотрим функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Мы должны оценить нормы этих функций в пространстве $\overset{\circ}{C}{}_t^{(1+k+\beta)/2}(\bar\sigma_T)$, $\beta \in (0,\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, $k = 0,1,\dots$. По Лемме 1 нам достаточно оценить норму (10) вместо нормы (9).

Оценим норму потенциала $w_1(t)$. Для этого используем неравенство (37) для $\Gamma_1(x,t)$ и оценки для функции $\Phi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{(1+k+\alpha)/2}(\bar\sigma_T)$:

$$|\Phi(\tau)-\Phi(\tau-\sigma)| \le \begin{cases} M\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}} & \text{при} \quad k=0, \\ C_{34}M\sigma\tau^{\frac{k-1+\alpha}{2}} & \text{при} \quad k\ge 1, \end{cases} \qquad (70)$$

$$|\Phi(t)| \le Mt^{\frac{1+k+\alpha}{2}},\ M = [D_t^m\Phi]^{(\frac{1+k+\alpha}{2}-m)},\ m = [(1+k+\alpha)/2]. \qquad (71)$$

Тогда при $k=0$ мы получим

$$|w_1(t)| \le C_{35}M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-\tau)}} d\sigma, \qquad (72)$$

а при $k \ge 1$

$$|w_1(t)| \le C_{36}M\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\sigma\tau^{\frac{k-1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2(t-\tau)}} d\sigma. \qquad (73)$$

В (72) применяя неравенства (41) и $\sigma^{(1+\beta)/2} \le \tau^{(1+\beta)/2} \le t^{(1+\beta)/2}$, $\beta \in (0,\alpha)$, и интегрируя по σ, будем иметь

$$|w_1(t)| \le C_{37} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} k_0 t^{\frac{1+\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} = C_{38} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} k_0 t^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}. \quad (74)$$

Далее,

$$|2\lambda_1 a_1 \Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0} - \frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big) w_1(t)| \le C_{39}\frac{1}{k_0}|w_1(t)| \le C_{40} k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}. \quad (75)$$

В (73) ($k \ge 1$) используем неравенства $\tau^{\frac{k-1+\alpha}{2}} \le t^{\frac{k-1+\alpha}{2}}$ и (41), затем $\sigma^{1-(\alpha-\beta)/2} \le \tau^{1-(\alpha-\beta)/2} \le t^{1-(\alpha-\beta)/2}$, $\beta \in (0,\alpha)$, и проинтегрировав по σ, найдем

$$|w_1(t)| \le C_{41} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} = C_{42} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} k_0 t^{\frac{1+k+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}, \quad (76)$$

отсюда

$$|2\lambda_1 a_1 \Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0} - \frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big) w_1(t)| \le C_{43} k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}, \quad (77)$$

где M – константа Гёльдера из (71).

Оценка модуля функции $w_2(t)$ производится аналогично

$$|w_2(t)| \le C_{44} M k_0 \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{\frac{1+k+\alpha}{2}}}{\tau} e^{-\frac{\mu^2(t-\tau)^2}{4k_0^2\tau}} d\tau \le$$

$$\le C_{45} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \le$$

$$\le C_{46} M k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}, \ \beta \in (0,\alpha), \ k = 0,1,2,\dots . \quad (78)$$

В зависимости от четности и нечетности числа k показатель Гёльдера старшей производной функции $\Phi(t)$ из (70) и (71) будет разным:

1) при $k=2m$ – четном $\Phi(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{(1+2m+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$ и $D_t^m\Phi(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{(1+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$;

2) при $k=2m+1$ – нечетном $\Phi(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{(2+2m+\alpha)/2}(\bar{\sigma}_T)$ и $D_t^{m+1}\Phi(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{\alpha/2}(\bar{\sigma}_T)$, $m=0,1,...,\left[\frac{1+k+\alpha}{2}\right]$.

Обозначим

$$p_1(t):=D_t^m\Phi(t)\quad\text{при}\quad k=2m,\ p_2(t):=D_t^{m+1}\Phi(t)\quad\text{при}\quad k=2m+1,\tag{79}$$

тогда $p_i(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{2+\alpha-i}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, $i=1,2$, и для них справедливы неравенства (49).

Мы можем представить производные функций $\kappa\psi'(t)$, $\varepsilon\psi'(t)$ в формулах (55), (56) следующем образом:

$$\kappa D_t^{[\frac{1+k+\beta}{2}]}\psi(t)=-(\lambda_1\partial_x v_1-\lambda_2\partial_x v_2)|_{x=0},$$

$$\varepsilon D_t^{[\frac{1+k+\beta}{2}]}\psi(t)=(k_1\partial_x z_1-k_2\partial_x z_2)|_{x=0}-p_i(t),\ i=1,2.$$

Тогда, используя обозначения (79) и произведя преобразования, как в (57)–(63), получим

$$\kappa D_t^{[\frac{1+k+\beta}{2}]}\psi(t)=-2\lambda_1 a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\big(\bar{w}_1(t)+\bar{w}_2(t)\big)+$$

$$+2\lambda_2 a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2}+\frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\big(\bar{w}_3(t)+\bar{w}_4(t)\big),\tag{80}$$

где $\bar{w}_j(t)=D_t^{[\frac{1+k+\beta}{2}]}w_j(t)$, $j=1-4$,

$$\bar{w}_1(t)=\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_0^{t-\tau_1}[p_i(t-\tau_1-\sigma)-p_i(t-\tau_1)]\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}\sigma,\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma,$$

$$\bar{w}_2(t)=-\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_1}}\int\limits_0^t p_i(t-\tau_1)\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}(t-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}d\tau_1,$$

$$\bar{w}_3(t)=\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_0^{t-\tau_1}[p_i(t-\tau_1-\sigma)-p_i(t-\tau_1)]\Gamma_{2xx}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\sigma,\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma.$$

$$\bar{w}_4(t)=\frac{k_0}{\mu\sqrt{a_2}}\int\limits_0^t p_i(t-\tau_1)\Gamma_{2x}(x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_2}\tau,(t-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}d\tau_1.$$

Аналогично, находим $\varepsilon D_t^{[\frac{1+k+\beta}{2}]}\psi(t)=(k_1\partial_x z_1-k_2\partial_x z_2)|_{x=0}-p_i(t),\ i=1,2.$

Теперь оценим константы Гёльдера. Для этого сформируем разности, положив $t>t_1$:

$$\Delta_j:=-2\lambda_1 a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)(\bar{w}_j(t)-\bar{w}_j(t_1)),\ j=1,2,$$

$$\Delta_1=-2\lambda_1 a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\Big(\int\limits_{t_1}^t d\tau_1\int\limits_0^{t-\tau_1}[p_i(t-\tau_1-\sigma)-p_i(t-\tau_1)]\Gamma_{1xx}(\cdot,\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\tau_1\int\limits_0^{t_1-\tau_1}\tilde{\Delta}_1\Gamma_{1xx}(\cdot,\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\tau_1\int\limits_{t_1-\tau_1}^{t-\tau_1}[p_i(t-\tau_1-\sigma)-p_i(t-\tau_1)]\Gamma_{1xx}(\cdot,\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma\Big),\qquad(81)$$

где $\tilde{\Delta}_1=p_i(t-\tau_1-\sigma)-p_i(t-\tau_1)-p_i(t_1-\tau_1-\sigma)+p_i(t_1-\tau_1),\ i=1,2;$

$$\Delta_2=\frac{2\lambda_1 k_0\sqrt{a_1}}{\mu}\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\Big(\int\limits_{t_1}^t p_i(t-\tau_1)\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}(t-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}d\tau_1+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\tilde{\Delta}_2\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}(t_1-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}d\tau_1+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}p_i(t-\tau_1)d\tau_1\int\limits_{t_1}^t\Big(\frac{-\mu\sqrt{a_1}}{k_0}\Big)\Gamma_{1xx}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}(t_2-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}dt_2\Big),\quad(82)$$

где $\partial_{t_2}\Gamma_{1x}(-x+\frac{\mu}{k_0}\sqrt{a_1}(t_2-\tau_1),\tau_1)\big|_{x=0}=-\frac{\mu\sqrt{a_1}}{k_0}\Gamma_{1xx}(\cdot,\tau_1)\big|_{x=0}$,
$\tilde{\Delta}_2=p_i(t-\tau_1)-p_i(t_1-\tau_1),\ i=1,2.$

Оценим разности $|\tilde{\Delta}_j| = |\tilde{\Delta}_j|^{\theta}|\tilde{\Delta}_j|^{1-\theta},\ j = 1,2$. Взяв $\theta = \frac{2+\beta-i}{2+\alpha-i},\ \beta \in (0,\alpha),\ i = 1,2$, и используя неравенства (49) для p_i, мы имеем

$$|\tilde{\Delta}_1| = |(p_i(t-\tau_1-\sigma) - p_i(t_1-\tau_1-\sigma)) + (p_i(t_1-\tau_1) - p_i(t-\tau_1))|^{\theta}\times$$
$$\times|(p_i(t-\tau_1-\sigma) - p_i(t-\tau_1)) + (p_i(t_1-\tau_1) - p_i(t_1-\tau_1-\sigma))|^{1-\theta} \leq$$
$$\leq C_{47}\Big(M_i(t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\Big)^{\theta}\Big(M_i\sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\Big)^{1-\theta} \leq$$
$$\leq C_{48}M_i(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}; \tag{83}$$
$$|\tilde{\Delta}_2| \leq C_{49}\Big(M_i(t-t_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\Big)^{\theta}\Big(M_i((t-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}} + (t_1-\tau)^{\frac{2+\alpha-i}{2}})\Big)^{1-\theta} \leq$$
$$\leq C_{49}M_i(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}},\ \theta = \frac{2+\beta-i}{2+\alpha-i},\ \beta\in(0,\alpha),\ i=1,2, \tag{84}$$

здесь $\sigma \geq 0,\ t_1 < t,\ t_1, t \in (0,T]$.

Рассмотрим разность (81). Воспользуемся неравенствами (37) для Γ_1, (49) для p_i и (83), тогда мы получим

$$|\Delta_1| \leq \frac{C_{50}M_i}{k_0}\Bigg(\int\limits_{t_1}^{t} d\tau_1 \int\limits_0^{t-\tau_1} \frac{\sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau_1^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2\tau_1}} d\sigma +$$
$$+\int\limits_0^{t_1} d\tau_1 \int\limits_0^{t_1-\tau_1} \frac{\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}}{\tau_1^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2\tau_1}} d\sigma + \int\limits_0^{t_1} d\tau_1 \int\limits_{t_1-\tau_1}^{t-\tau_1} \frac{\sigma^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau_1^{3/2}} e^{-\frac{\mu^2\sigma^2}{4k_0^2\tau_1}} d\sigma\Bigg).$$

В первом и последнем интегралах применим неравенства $\sigma^{\frac{2+\beta-i}{2}} \leq (t-\tau_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}} \leq (t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}$ и (41) и интегрируя по σ, получим

$$|\Delta_1| \equiv |\bar{w}_1(t) - \bar{w}_1(t_1)| \leq C_{51}M_i k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}} \int\limits_0^{t} \frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-(\alpha-\beta)/4}} \leq$$
$$\leq C_{52}M_i k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}},\ i=1,2,$$

и

$$[\bar{w}_1(t)]_{\sigma_T}^{\frac{2+\beta-i}{2}} \leq C_{53}M_i k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}[p_i]^{\frac{2+\alpha-i}{2}}, \tag{85}$$

где $\beta \in (0,\alpha),\ i=1,2,\ t_1<t,\ t_1,t\in(0,T]$.

Рассмотрим разность Δ_2, которая была определена в (82). После применения неравенств (37), (49) и (84) найдем

$$|\Delta_2| \le C_{54}M_i\Bigg(\int\limits_{t_1}^{t}\frac{(t-\tau_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau_1}e^{-\frac{\mu^2(t-\tau_1)^2}{4k_0^2\tau_1}}d\tau_1+$$

$$+(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t-\tau_1)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau_1}e^{-\frac{\mu^2(t-\tau_1)^2}{4k_0^2\tau_1}}d\tau_1-\frac{1}{k_0}\int\limits_{t_1}^{t}dt_2\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-\tau_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}}{\tau_1^{3/2}}\Bigg),$$

Воспользуемся оценками $(t-\tau_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\le(t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}, \tau_1\in(t_1,t)$, и

$$(t_1-\tau_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\le(t_2-\tau_1)^{\frac{2+\alpha-i}{2}}\le\frac{(t_2-\tau_1)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(t_2-t_1)^{\frac{i-\beta}{2}}},\ t_2\in(t_1,t),\ \tau_1\in(t_1,t),$$

в первом и последнем интегралах соответственно, затем, применяя неравенство (41) во всех интегралах, тогда будем иметь

$$|\Delta_2|\le C_{55}M_ik_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\Bigg((t-t_1)^{\frac{2+\beta-i}{2}}\int\limits_0^{t}\frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-(\alpha-\beta)/4}}+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{dt_2}{(t_2-t_1)^{\frac{i-\beta}{2}}}\int\limits_0^{t_1}\frac{d\tau_1}{\tau_1^{1-(\alpha-\beta)/4}}\Bigg),$$

и после интегрирования получим

$$[\bar w_2(t)]_{\sigma_T}^{(\frac{2+\beta-i}{2})}\le C_{56}k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}[p_i]_{\sigma_T}^{(\frac{2+\alpha-i}{2})}, \tag{86}$$

здесь $\sigma\ge0,\ t_1<t,\ t_1,t\in(0,T]$.

Собирая оценки (77), (78), (85), (86), мы получим оценки норм (10) функций $w_1(t),w_2(t)$: $\|w_j(t)\|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}\le C_{56}k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|\Phi\|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}$, $j=1,2$. В силу Леммы 1 будем иметь $|w_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}\le C_{57}k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}$, $j=1,2$. Тогда из формулы (63) $\kappa\psi'(t)=-2\lambda_1a_1\Big(\frac{\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_0}-\frac{\mu\kappa}{k_0^2}\Big)\big(w_1(t)+w_2(t)\big)+2\lambda_2a_2\Big(\frac{\mu\kappa}{k_0^2}+\frac{\lambda_1(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_1}k_0}\Big)\big(w_3(t)+w_4(t)\big)$ будет следовать оценка (53):

$$|\kappa\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}\le C_{32}k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})},\ \beta\in(0,\alpha),\ t\in(0,T], \tag{87}$$

где постоянные C_{56}, C_{57}, C_{32} не зависят от $\kappa,\ \varepsilon$,

k_0 определяется формулой (36):

$k_0 = \kappa b_1 + \varepsilon b_2,\ b_1 = (k_1\gamma_1/\sqrt{a_3} + k_2\gamma_2/\sqrt{a_4}) > 0,\ b_2 = (\lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}) > 0,$

$$|\kappa\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})} \leq C_{32} k_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})} = C_{32}(\kappa b_1 + \varepsilon b_2)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})}.$$

В неравенстве (86), устремим ε к нулю, и мы получим

$$|\kappa\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})} \leq C_{56} \kappa^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |\Phi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})},\ \beta \in (0,\alpha),\ t \in (0,T],$$

где постоянная $C_{56} = C_{32} b_1$ не зависит от κ.

Аналогично также доказываем $|\varepsilon\psi'(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\beta}{2})}$.

Доказательство Теоремы 2. Из Теоремы 4 и неравенств (53), (30) для функции $\Phi(t)$ вытекают оценки (13), (14) и, следовательно, Теорема 2.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.И. Бижановой за внимание и помощь при написании этой работы.

Литература

1 Петрова А.Г. Локальная разрешимость термодиффузионной задачи Стефана // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1982. – Вып. 58. – С. 156-163.

2 Bizhanova G.I. On the Stefan problem with the small parameter // Banach Center Publications. – 2008. – V. 81. – P. 43-63.

3 Bizhanova G.I. On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. II // Matem. zhurnal. – 2012. – № 1. – P. 70-86.

4 Алимжанов Е.С. Решение модельной задачи Веригина с малым параметром в пространстве Гельдера // Вестник КазНУ, сер. мат.,мех., инф. – 2013. – № 3(78). – С. 19-32.

5 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

6 Бижанова Г.И. Решение одной n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в гельдеровском пространстве функций // Известия АН КазССР. Серия Физ.-матем. – 1991. – № 5. – С. 21-27.

7 Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 344 с.

8 Bizhanova G.I. Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boubdary, Stefan type problems // Zapiski nauchn. semin. POMI. – 2008. – V. 362. – P. 64-91.

Статья поступила в редакцию 17.05.2017

Джобулаева Ж.К. ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ТҮЙІНДЕСУ ШАРТТАРЫНДА ЕКІ КІШІ ПАРАМЕТРІ БАР ЕКІФАЗАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ БАҒАЛАУЛАРЫ

Параболалық теңдеулер жүйесі үшін екі кіші параметрі бар сызықтандырылған екіфазалық есеп зерттелді. Алғашқы еркін шекаралы сызықсыз есеп концентрациясы белгісіз болатын қоспасы бар заттың фазалық ауысу (балқу, қатаю) процесін сипаттайды. Гельдер кеңістігінде шешімнің бар болуы, жалғыздығы және шешімнің кіші параметрлерден тәуелсіз коэрцитивтік бағалаулары дәлелденді.

Dzhobulaeva Zh.K. THE ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE TWO PHASE PROBLEM WITH A TWO SMALL PARAMETERS IN THE CONJUGATE CONDITIONS FOR THE SYSTEM OF THE PARABOLIC EQUATIONS

There is studied the linearized two phase problem with a two small parameters for the system of the parabolic equations. The original nonlinear free boundary problem describes the process of phase transition (melting, solidification) of substance with the admixture of unknown concentration. In the Hölder spaces there are proved the existence, uniqueness and coercitive estimates of the solution with the constants not depending on a small parameters.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 110–123.

УДК 512.554

FREE COMMUTATIVE MEDIAL ALGEBRA AS MODULE OF SYMMETRIC GROUP

Bekzat K. Zhakhayev[1,2]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modelling
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: bekzat22@hotmail.com

[2]Suleyman Demirel University
040900, Kaskelen, Abylai khan st., 1/1

Annotation: An algebra $(A, \cdot)$ with identities $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (c \cdot b)$ is called *commutative medial*. In this work we give description of multi-linear part of free commutative medial algebras as module over symmetric group.

Keywords: Free algebra, module structure, rooted tree, Young subgroup, induced representation.

1. Introduction

An algebra $(A, \cdot)$ is called *commutative medial*, if for any $a, b, c \in A$ the following identities are hold

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (c \cdot b).$$

One of main problems of algebra concern construction of free algebras. Module structures of multi-linear parts of free algebras over symmetric groups are important ingredients of operads theory. For some cases these structures are known. Let us remind some such results.

Let F_n^{assoc}, F_n^{zinb} and F_n^{leib} are multi-linear parts of free associative, free Zinbiel and free Leibniz algebras with n generators, respectively. Then F_n^{assoc}, F_n^{zinb} and F_n^{leib} as S_n-module are isomorphic to regular module of S_n.

Keywords: *Free algebra, module structure, rooted tree, Young subgroup, induced representation.*

2010 Mathematics Subject Classification: 17A50, 05C05, 20B35, 22D30.

Funding: Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Grant No. 0828/GF4.

If F_n^{lie} is a multi-linear part of free Lie algebras, then F_n^{lie} as S_n-module is studied in [1], [2].

In [3], [4] are studied module structures of multi-linear parts F_n^{bicom}, F_n^{nov} of free bicommutative and Novikov algebras, respectively.

In [5] module structures of multi-linear part F_n^{acom} of free anti-commutative algebra for $1 \le n \le 7$ are constructed. In [6] trace formulas for multi-linear parts of free anti-commutative algebra F_n^{acom} and for free commutative algebra F_n^{com} are calculated.

In [7] trace formulas for multi-linear parts of free right-symmetric algebra F_n^{rsym} and for free right-commutative algebra F_n^{rcom} are constructed.

In this paper we consider multi-linear part $F_n^{multi} = F_n^{multi}(X)$ of free commutative medial algebra $F(X)$ as S_n-module. We suppose that a main field K is a field of characteristic 0.

Let $M(T)$ be module constructed by medial commutative tree T.

Теорема 1. *If T is a com-medial tree with n leaves, then as S_n-module*

$$M(T) \cong M^{\omega(T)},$$

where $M^{\omega(T)}$ is permutation module for partition $\omega(T) \vdash n$.

We show that $M(T)$ is a module induced by trivial module of subgroup generated by weight $\omega(T)$, namely,

$$M(T) \cong Ind_{S_{\omega(T)}}^{S_n}(\mathbf{1}_{S_{\omega(T)}}),$$

where $1_{S_{\omega(T)}}$ is trivial module of $S_{\omega(T)}$. Definitions of medial commutative tree T and their weight $\omega(T)$ will be given below. Details on permutation modules see [8], [9], [10], [11] and group of automorphisms of rooted trees see [12].

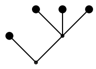
2. Base of Free Commutative Medial Algebra

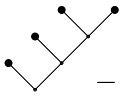
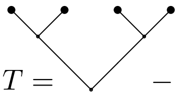
Definition 1. *A planar rooted tree is called binary if each vertex has out-degree 0 or 2.*

Vertex of binary tree with out-degree 0 is called leaf and vertex with out-degree 2 is called inner.

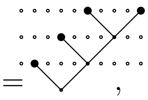
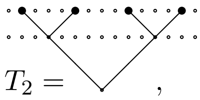
Number of leaves of binary tree T is called order of binary tree and denoted by $|T|$.

Example 1. Let $|T| = 4$. Then

$T =$  – non binary tree,

$T =$  – binary tree, $T =$  – binary tree.

All binary trees have levels and leaf-levels. For example, let given

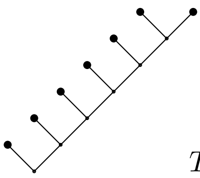
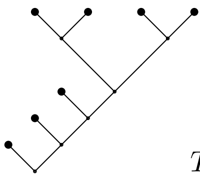
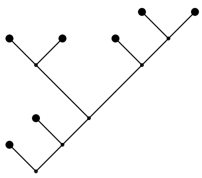
$T_1 =$  , $T_2 =$  ,

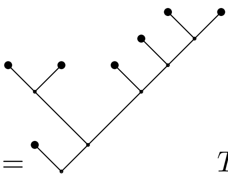
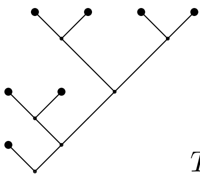
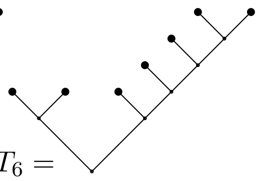
then T_1 have 3 levels and 3 leaf-levels, T_2 have 2 levels and 1 leaf-level.

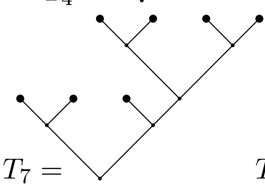
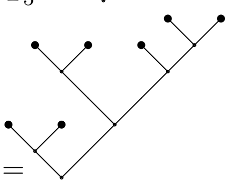
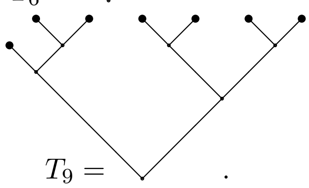
Definition 2. *A binary tree is called commutative-medial or shortly com-medial if the following conditions are hold:*

- *for any inner vertex its subtrees of depth 1 are ordered from the left to the right*
- *for any inner vertex its subtrees of depth 2 are ordered from the left to the right.*

Example 2. There are 9 com-medial trees with 7 leaves. They are

$T_1 =$  $T_2 =$  $T_3 =$ 

$T_4 =$  $T_5 =$  $T_6 =$ 

$T_7 =$  $T_8 =$  $T_9 =$  .

Now we will fill leaves of com-medial tree T, $|T| = n$ by elements (generators) of $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

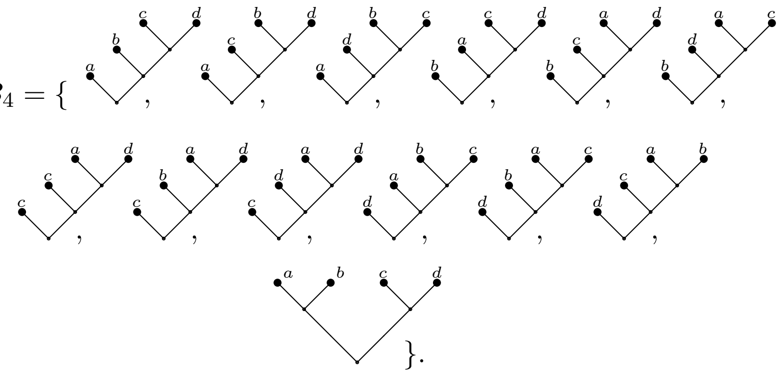
Filling rule

• $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$, $1 \le k \le n$, if $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ lies in one leaf-level of com-medial tree

Denote by B_n set of labeled above the rule all com-medial trees with n leaves by $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Example 3. Let $n = 4$ and $X = \{a, b, c, d\}, a < b < c < d$. Then

$B_4 = \{$



Let $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ be a set of generators and $F(X)$ be a free commutative medial algebra on X and $F_n^{multi}(X)$ be multi-linear part of $F(X)$.

Let T be a com-medial unlabeled tree with n leaves. We define left action of S_n on the space $F_n^{multi}(X)$ in a natural way. Denote by $M(T)$ a S_n-module generated by T. For example, if $\sigma = (123)(45) \in S_5$ and $m = (a_5 \cdot ((a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4))) \in F_5^{multi}(X)$, then

$$\sigma(m) = (a_4 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot (a_1 \cdot a_5))).$$

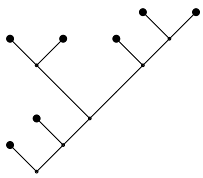
3. Coloring of leaves

Now we color the leaves of com-medial tree by the following algorithm

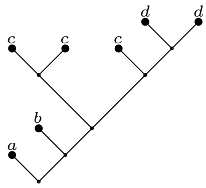
• all leaves in one leaf-level have same color,

• each leaf-level has distinct colors.

EXAMPLE 4. Let

$T =$ 

and $\Omega = \{a, b, c, d\}$ be a set of colors. Then

$T =$ 

or $color(T) = \{a, b, 3c, 2d\}$.

Therefore we can correspond for each com-medial tree its color, that is, if T is a com-medial tree with l-leaf-levels and $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ is set of colors, then

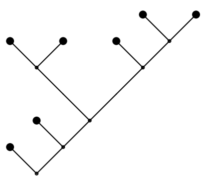
$$color(T) = \{k_1c_1, k_2c_2, \dots, k_lc_l\},$$

where k_i is multiplicity of color $c_i \in \Omega$.

DEFINITION 3. Let T be a com-medial tree and $color(T) = \{k_1c_1, k_2c_2, \dots, k_lc_l\}$. Weight of com-medial tree T is defined by

$$\omega(T) = \omega(\{k_1c_1, k_2c_2, \dots, k_lc_l\}) = sort(k_1, k_2, \dots, k_l).$$

EXAMPLE 5. Let

$T =$ 

and $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Then

$$\omega(T) = (3, 2, 1, 1).$$

Let us present labeled com-medial trees in following form

$$L(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_l; \dots; c_1, c_2, \dots c_m),$$

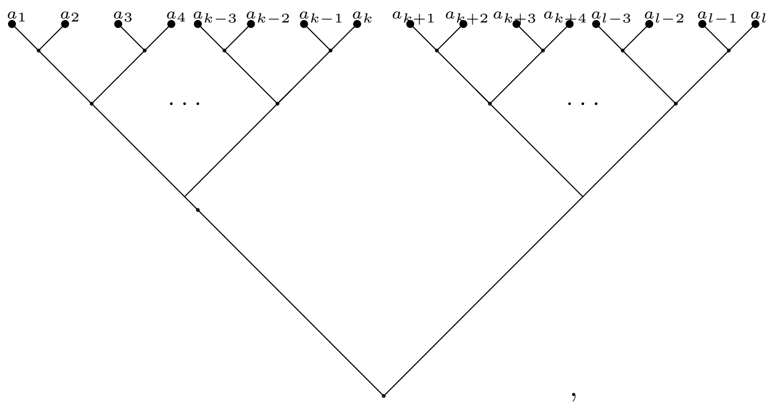
where $a_1, a_2, \dots, a_k$ are leaves in first leaf-level, $b_1, b_2, \dots, b_l$ are leaves in second leaf-level and etc.

Лемма 1. *Let $\alpha \in S_k$, $\beta \in S_l$, $\dots$, $\gamma \in S_m$. Then*

$$L(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, \dots, a_{\alpha(k)}; b_{\beta(1)}, b_{\beta(2)}, \dots, b_{\beta(l)}; \dots; c_{\gamma(1)}, c_{\gamma(2)}, \dots c_{\gamma(m)}) =$$

$$L(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_l; \dots; c_1, c_2, \dots c_m).$$

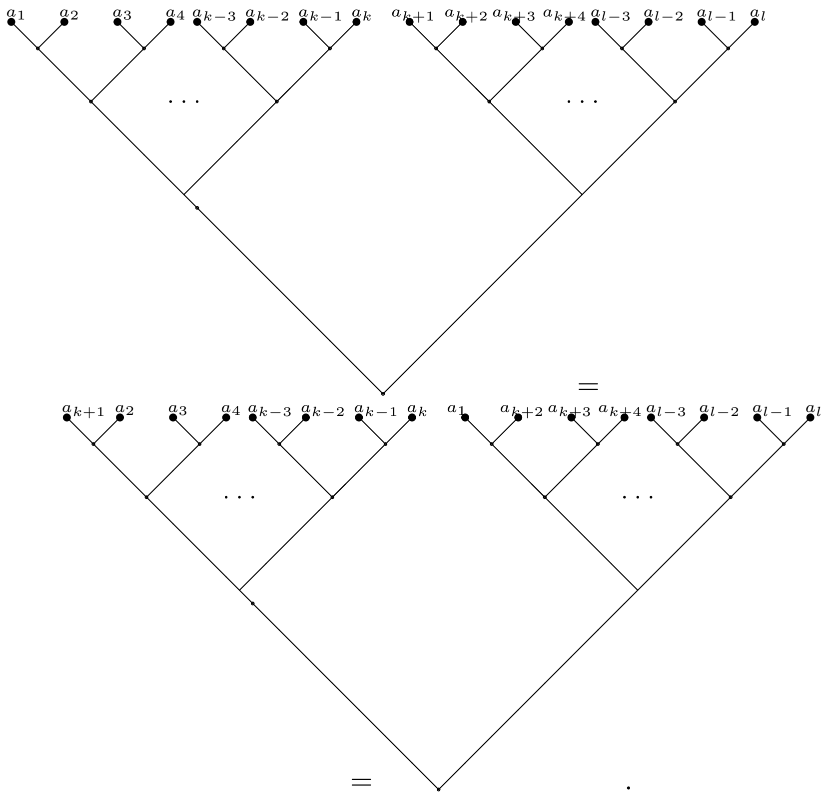
Proof. It is enough to consider labelled com-medial tree T in the following form



,

where $l = 2^n$ and $k = 2^{n-1}$.

It is sufficient to prove the following equality



Let us use induction on l.
Base of induction.
Let $l = 2$

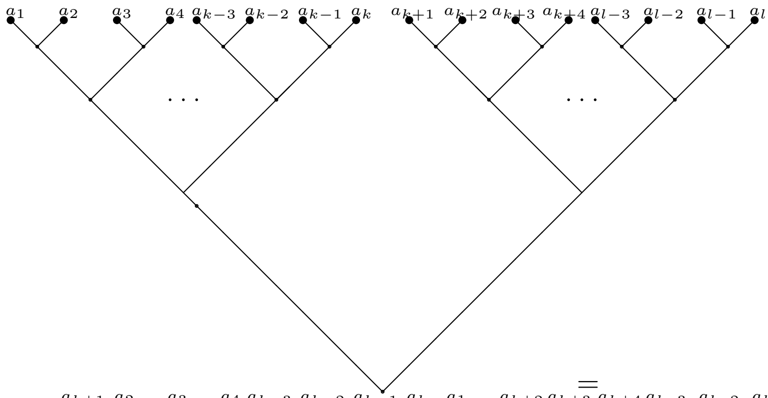
$$(a_1 a_2) = com = (a_2 a_1).$$

Let $l = 4$

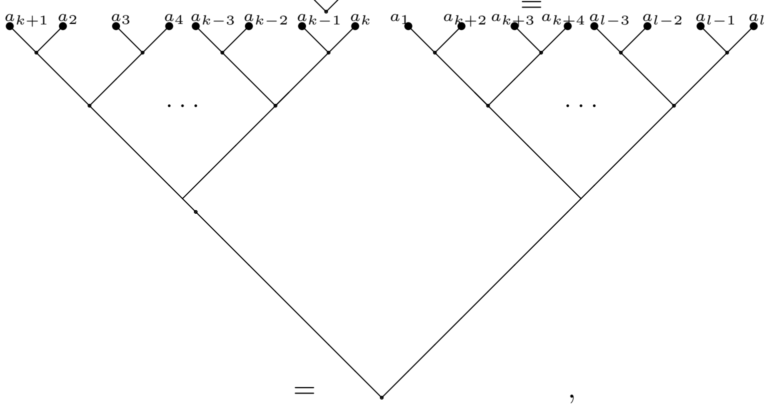
$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = com = (a_2 a_1)(a_3 a_4) = com = (a_2 a_1)(a_4 a_3) =$$

$$= medial = (a_2 a_3)(a_4 a_1) = com = (a_3 a_2)(a_4 a_1) = com = (a_3 a_2)(a_1 a_4).$$

Step of induction.
Assume that the proposition is true for $l = 2^{n-1}$, i.e.



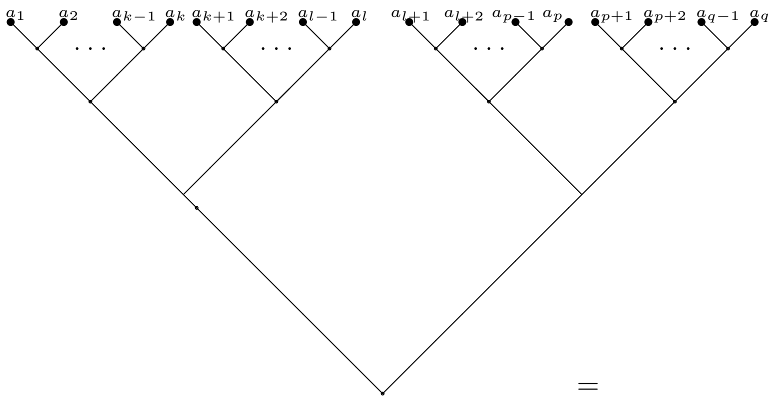
$=$



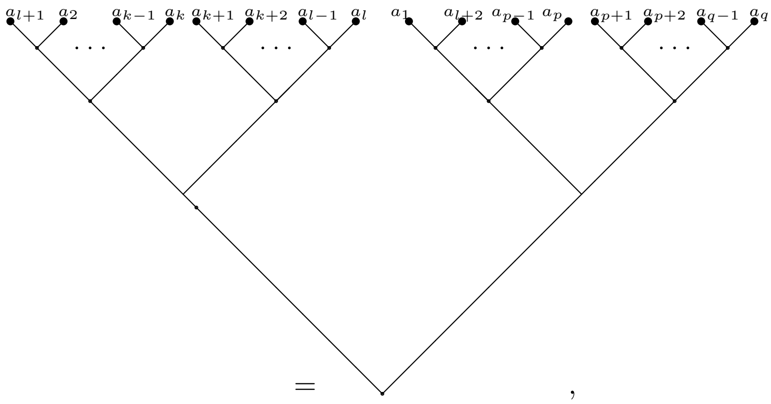
$=$,

where $l = 2^{n-1}$ and $k = 2^{n-2}$.

We have

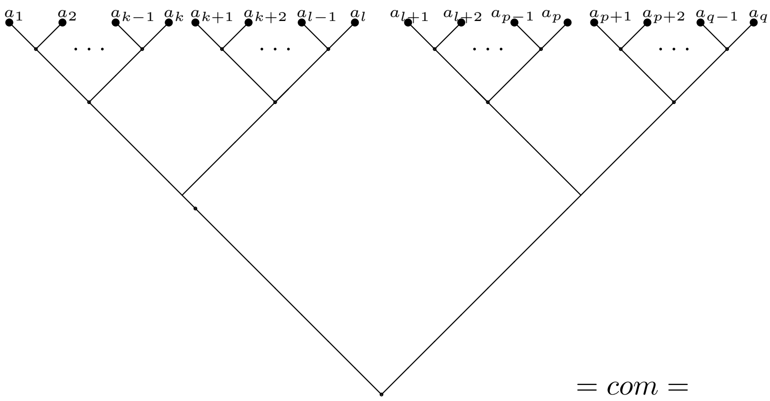


$=$

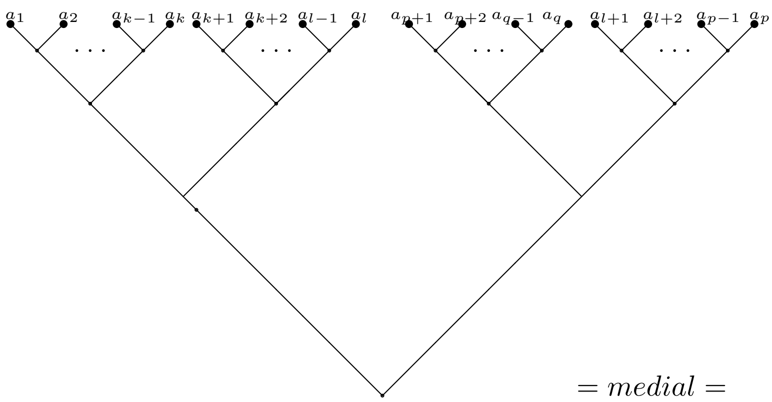


$=$,

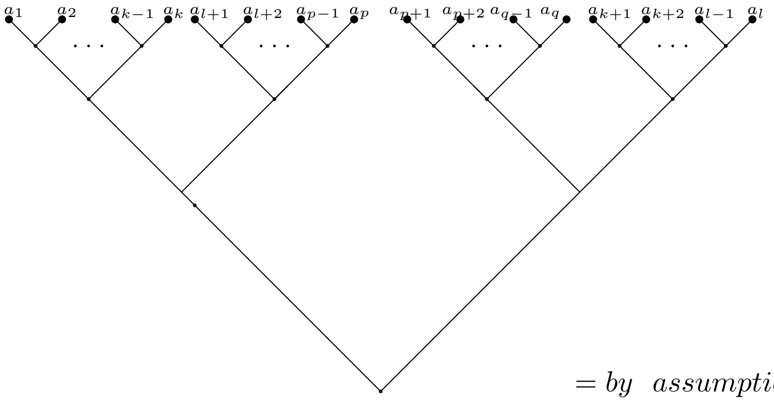
where $q = 2^n$, $l = 2^{n-1}$, $k = 2^{n-2}$ and $p = 3 \cdot 2^{n-2}$.



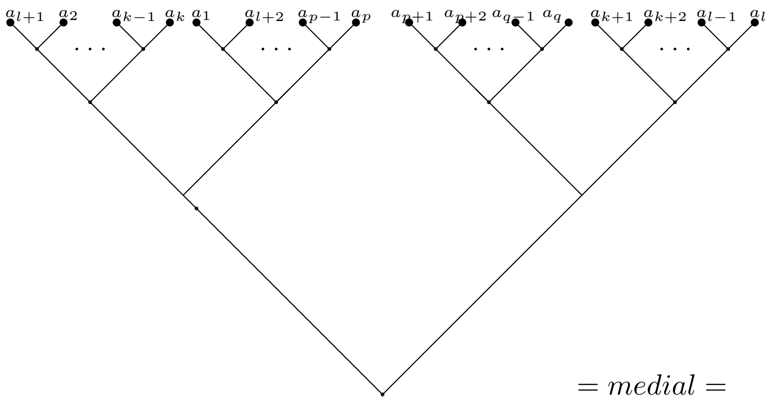
$= com =$



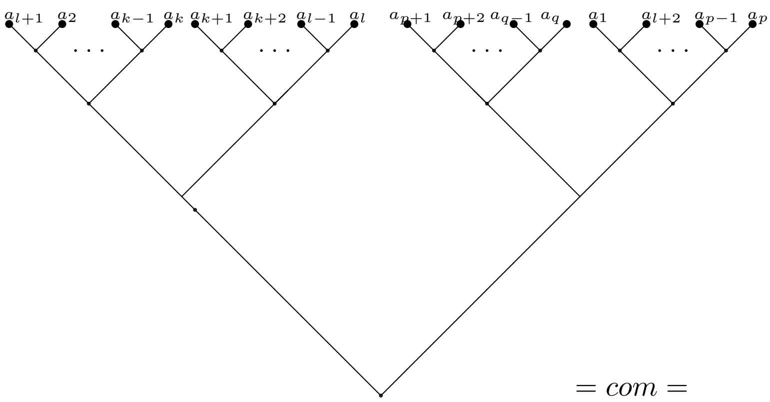
$= medial =$



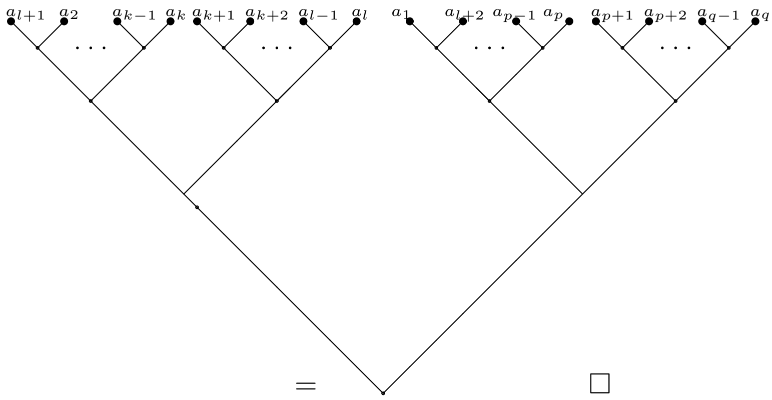
$= by \quad assumption =$



$= medial =$



$= com =$



$=$ $\square$

4. Proof of Theorem 1

Let T be a com-medial tree with n leaves. By Lemma 1 all possible permutations of leaves in one leaf-level do not destroy base rule. Leaf-levels and leaves in leaf-level generate weight of T, $\omega(T)$. Therefore group of automorphisms of a com-medial tree T is $S_{\omega(T)}$ and $S_{\omega(T)}$ is Young subgroup of S_n. Therefore, S_n-module structures of $M(T)$ are calculated by formula

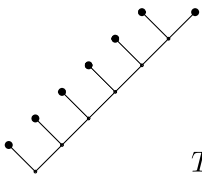
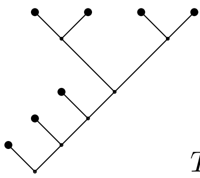
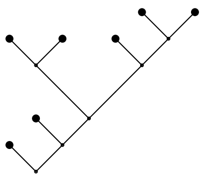
$$M(T) \cong Ind_{S_{\omega(T)}}^{S_n}(\mathbf{1}_{S_{\omega(T)}}),$$

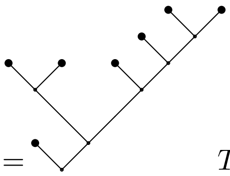
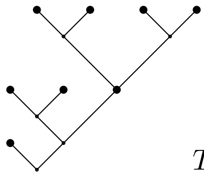
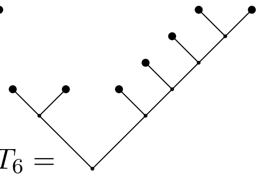
where $1_{S_{\omega(T)}}$ is trivial representation (or trivial module) of $S_{\omega(T)}$ and we are known that

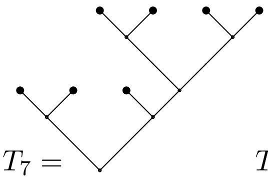
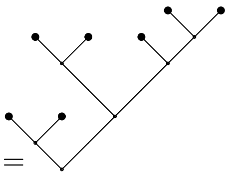
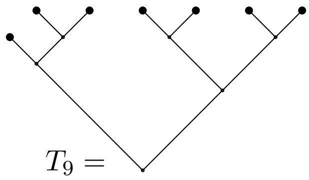
$$M^{\omega(T)} \cong Ind_{S_{\omega(T)}}^{S_n}(\mathbf{1}_{S_{\omega(T)}})$$

is a permutation module for partition $\omega(T) \vdash n$. $\square$

Example 6. Let $n = 7$. Then

$T_1 =$  $T_2 =$  $T_3 =$ 

$T_4 =$  $T_5 =$  $T_6 =$ 

$T_7 =$  $T_8 =$  $T_9 =$ 

and

$$\omega(T_1) = (2,1,1,1,1,1), \omega(T_2) = (4,1,1,1), \omega(T_3) = (3,2,1,1),$$
$$\omega(T_4) = (3,2,1,1), \omega(T_5) = (4,2,1), \omega(T_6) = (3,2,1,1),$$
$$\omega(T_7) = (4,3), \omega(T_8) = (3,2,2), \omega(T_9) = (6,1).$$

Therefore

$$M(T_1) \cong M^{(2,1,1,1,1,1)} \cong S^{(2,1,1,1,1,1)} \oplus 4S^{(2,2,1,1,1)} \oplus 5S^{(2,2,2,1)} \oplus 5S^{(3,1,1,1,1)} \oplus$$
$$\oplus 15S^{(3,2,1,1)} \oplus 10S^{(3,2,2)} \oplus 11S^{(3,3,1)} \oplus 10S^{(4,1,1,1)} \oplus 20S^{(4,2,1)} \oplus 9S^{(4,3)} \oplus$$
$$\oplus 10S^{(5,1,1)} \oplus 10S^{(5,2)} \oplus 5S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_2) \cong M^{(4,1,1,1)} \cong S^{(4,1,1,1)} \oplus 2S^{(4,2,1)} \oplus S^{(4,3)} \oplus 3S^{(5,1,1)} \oplus 3S^{(5,2)} \oplus 3S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_3) \cong M^{(3,2,1,1)} \cong S^{(3,2,1,1)} \oplus S^{(3,2,2)} \oplus 2S^{(3,3,1)} \oplus S^{(4,1,1,1)} \oplus 4S^{(4,2,1)} \oplus 3S^{(4,3)} \oplus$$
$$\oplus 3S^{(5,1,1)} \oplus 4S^{(5,2)} \oplus 3S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_4) \cong M^{(3,2,1,1)} \cong S^{(3,2,1,1)} \oplus S^{(3,2,2)} \oplus 2S^{(3,3,1)} \oplus S^{(4,1,1,1)} \oplus 4S^{(4,2,1)} \oplus 3S^{(4,3)} \oplus$$

$$\oplus 3S^{(5,1,1)} \oplus 4S^{(5,2)} \oplus 3S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_5) \cong M^{(4,2,1)} \cong S^{(4,2,1)} \oplus S^{(4,3)} \oplus S^{(5,1,1)} \oplus 2S^{(5,2)} \oplus 2S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_6) \cong M^{(3,2,1,1)} \cong S^{(3,2,1,1)} \oplus S^{(3,2,2)} \oplus 2S^{(3,3,1)} \oplus S^{(4,1,1,1)} \oplus 4S^{(4,2,1)} \oplus 3S^{(4,3)} \oplus$$

$$\oplus 3S^{(5,1,1)} \oplus 4S^{(5,2)} \oplus 3S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_7) \cong M^{(4,3)} \cong S^{(4,3)} \oplus S^{(5,2)} \oplus S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_8) \cong M^{(3,2,2)} \cong S^{(3,2,2)} \oplus S^{(3,3,1)} \oplus 2S^{(4,2,1)} \oplus 2S^{(4,3)} \oplus S^{(5,1,1)} \oplus 3S^{(5,2)} \oplus 2S^{(6,1)} \oplus S^{(7)},$$

$$M(T_9) \cong M^{(6,1)} \cong S^{(6,1)} \oplus S^{(7)}.$$

References

1 Klyachko A.A. Lie elements in the tensor algebra // Siberian Mathematical Journal. – 1974. – V. 15. – P. 914-920.

2 Kraśkiewicz W., Weynman J. Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element // Bayreuth. Math. Schr. – 2001. – V. 63. – P. 265-284.

3 Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M. Free bicommuatative algebras // Serdica Math. J. – 2011. – V. 37, No. 1. – P. 25-44.

4 Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A. S_n – and GL_n – module structures on free Novikov algebras // Journal of Algebra. – 2014. – V. 416. – P. 287-313.

5 Bremner M. Classifying varieties of anti-commutative algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. – 1996. – V. 4, No. 2. – P. 119-127.

6 Billey S.C., Konvalinka M., Matsen F.A. IV. On the enumeration of tanglegrams and tangled chains // J. Comb. Theory, Ser. – 2017. – A. 146. – P. 239-263.

7 Labelle G. Some new computational methods in the theory of species // Combinatoire énumérative, Lecture Notes in Mathematics. – 1986. – V. 1234. – P. 192-209.

8 Fulton W., Harris J. Representation Theory. A first course. – Springer-Verlag New York Inc., 1991. – 551 p.

9 James G., Kerber A. The Representation Theory of the Symmetric Group. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981. – 510 p.

10 Sagan B.E. The symmetric group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Graduate Texts in Mathematics. – Springer Verlag, New York, 2001. – V. 203. – 241 p.

11 Fulton W. Young tableaux with Applications to Representation theory and Geometry. – Cambridge University Press, 1997. – 261 p.

12 Harary F., Palmer E.M. Graphical Enumeration, Academic Press. – New York and London, 1973. – 271 p.

Received 31.05.2017

Жахаев Б.К. СВОБОДНАЯ КОММУТАТИВНО-МЕДИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА КАК МОДУЛЬ СИМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Алгебра $(A, \cdot)$ называется *коммутативно-медиальной*, если она удовлетворяет следующие тождества $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (c \cdot b)$. В настоящей работе дается описания полилинейной части свободных 12 коммутативно-медиальных алгебр как модуля над симметрической группой.

Жахаев Б.К. ЕРКIН КОММУТАТИВ-МЕДИАЛДЫ АЛГЕБРА СИММЕТРИЯЛЫҚ ТОПТЫҢ МОДУЛI РЕТIНДЕ

$(A, \cdot)$ алгебрасы коммутатив-медиалды деп аталады, егер алгебрада $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (c \cdot b)$ тепе-теңдiктерi орындалса. Жұмыста 12 еркiн коммутатив-медиалды алгебралардың полисызықты бөлiгiнiң симметриялық топтың үстiндегi модуль ретiндегi сипаттамасы берiледi.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 124–131.

УДК 517.5

О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОДНИМ КЛАССОМ РЕГУЛЯРНЫХ СПЛАЙНОВ

М.Р. Исмагулов
Университет КИМЭП
050010, Алматы, пр. Абая, 4, e-mail: mukhtar@kimep.kz

Аннотация: Рассматривается класс регулярных сплайнов, обобщающих, в частности, кубические, рациональные сплайны Шпэта с одним полюсом и другие. Получена оценка приближения интерполяционными локальными сплайнами на классе непрерывно-дифференцируемых функций.

Ключевые слова: Регулярные сплайны, обобщенные сплайны, оценки приближения.

1. Введение

Термин "регулярный сплайн" впервые появился в работе Шабака (Schaback, [1]). Им была рассмотрена интерполяционная задача для общих нелинейных классов сплайн-функций, которые среди прочих содержат некоторые экспоненциальные, тригонометрические, рациональные функции и их комбинации. Различные свойства таких регулярных сплайнов и их приложения рассматривались Арндтом (Arndt, [2]–[3]), Вернером (Werner, [4]), Вернером и Лоэбом (Werner, Loeb, [5]) и другими авторами. Позже автором [6]–[7] были рассмотрены регулярные сплайны (с другими условиями регулярности), обобщающими, в частности, рациональные сплайны Шпэта с двумя полюсами. (Späth H., [8, § 6.4]). В работе [9] была исследована задача аппроксимации непрерывных периодических функций обобщенными интерполяционными параболическими сплайнами, определенными в [10]. В настоящей работе рассматривается класс регулярных сплайнов, обобщающих, в частности, класс рациональных сплайнов Шпэта с одним полюсом (Späth H., [8, § 6.3]). Получена оценка приближения интерполяционными регулярными сплайнами (ИРС) на классе непрерывно дифференцируемых функций.

Keywords: *Regular splines, generalized splines, error estimations.*
2010 Mathematics Subject Classification: 41A15, 26A06.

2. Определение ИРС

Пусть C^r – класс функций, непрерывных вместе с r-ой производной на отрезке [0,1] ($r = 0, 1, ...; C^0 = C$), $\widetilde{C}^r$ – соответствующий класс 1-периодических функций. На отрезке [0,1] зададим разбиение:

$$H_n = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}.$$

Определение 1. *Регулярным сплайном по разбиению H_n назовем функцию $S_n(x) \in C^1$, имеющую на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ следующий вид:*

$$S_n(x) = A_i + B_i t + C_i t^2 + D_i u_i(t), \tag{1}$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, A_i, B_i, C_i, D_i – вещественные коэффициенты, $u_i(t)$ – заданные функции из C^2, удовлетворяющие следующим условиям (регулярности):

а) вторые производные $u_i''(t)$ монотонны на $[0, 1]$,

б) $u_i''(t)$ тождественно не равны константе на $[0, 1]$.

Каждой функции $f \in C$ (или $f \in \widetilde{C}$) поставим в соответствие ее интерполяционный регулярный сплайн (ИРС) $S_n(f, x) \in C^1$, осуществляющий (0,1) – интерполяцию, т.е. сплайн (1) такой, что

$$S_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) =: f_i^j, \tag{2}$$

для $i = 0, 1, ..., n$ и $j = 0, 1$.

3. Вспомогательные результаты

Введем обозначения:

$$\Delta_i = 2\big(u_i(1) - u_i(0)\big) - \big(u_i'(1) + u_i'(0)\big), \tag{3}$$

$$\beta_i(t) = 1 + \frac{1}{\Delta_i}\Big[2(u_i(t) - u_i(1)) + u_i'(0)(1-t)^2 + u_i'(1)(1-t^2)\Big], \tag{4}$$

$$\varphi_i(t) = \big[u_i(1) - u_i(t)\big] + \big[u_i(0) - u_i(1)\big](1-t)^2 + u_i'(1)t(t-1), \tag{5}$$

$$\psi_i(t) = \big[u_i(1) - u_i(t)\big] + \big[u_i(0) - u_i(1)\big](1-t^2) + u_i'(0)t(1-t). \tag{6}$$

Отметим следующие соотношения:

$$\frac{\varphi_i(t)-\psi_i(t)}{\Delta_i}=t(1-t) \tag{7}$$

и

$$(1-t)\beta_i(t)+\frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i}=t(1-\beta_i(t))-\frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}=W_i(t)\ (i=0,1,...,n-1). \tag{8}$$

Выпишем некоторые свойства вышеуказанных функций.

Свойство 1.

$$\beta_i(0)=0,\ \beta_i(1)=1,\ \beta_i^{'}(0)=0,\ \beta_i^{'}(1)=0,$$
$$0\leqslant\beta_i(t)\leqslant 1\ (i=0,1,...,n-1).$$

Для доказательства Свойства 1 заметим, что функции $\beta_i(t)$ монотонны, т.е. их производные не меняют знак, в противном случае вторые производные функций $\beta_i(t)$, а следовательно, и функций $u_i(t)$ не могут быть монотонны, что противоречит условиям регулярности из Определения 1.

Аналогично могут быть доказаны следующие свойства.

Свойство 2.

$$\varphi_i(0)=0,\ \varphi_i(1)=0,\ \varphi_i^{'}(0)=\Delta_i,\ \varphi_i^{'}(1)=0,$$
$$0\leqslant\frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i}\leqslant t(1-t)\ (i=0,1,...,n-1).$$

Свойство 3.

$$\psi_i(0)=0,\ \psi_i(1)=0,\ \psi_i^{'}(0)=0,\ \psi_i^{'}(1)=\Delta_i,$$
$$t(t-1)\leqslant\frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}\leqslant 0\ (i=0,1,...,n-1).$$

4. Оценка приближения на классе C^1

Теорема 1. *Пусть $f\in C^1$ (или $f\in\widetilde{C}^1$) и сплайн $S_n(f,x)$ удовлетворяет условиям (2). Тогда на каждом отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ справедливо неравенство*

$$\Big|S_n(f,x)-f(x)\Big|\ \leqslant\ \big|W_i(t)\big|\,h_i\,\omega(f^{'},h_i)\ \leqslant\frac{5}{8}\,h_i\,\omega(f^{'},h_i), \tag{9}$$

где $\omega(f^{'}, h_i)$ – *модуль непрерывности производной функции* f, $W_i(t)$ *определена в (8),* $t = (x - x_i)/h_i$.

Доказательство. Из условий (2) определим коэффициенты сплайна:

$$A_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[f_i\left(2u_i(1) - u_i^{'}(1) - u_i^{'}(0)\right) - u_i(0)\left(2f_{i+1} - f_{i+1}^{'}h_i - f_i^{'}h_i\right)\right], \quad (10)$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(2u_i(1) - 2u_i(0) - u_i^{'}(1)\right)f_i^{'}h_i + u_i^{'}(0)\left(2f_i + f_{i+1}^{'}h_i - 2f_{i+1}\right)\right], \quad (11)$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(f_{i+1} - f_i\right)(u_i^{'}(0) - u_i^{'}(1)) + \left(u_i(1) - u_i(0)\right)(f_{i+1}^{'} - f_i^{'})h_i + \right.$$

$$\left. +(f_i^{'}u_i^{'}(1) - f_{i+1}^{'}u_i^{'}(0))h_i\right], \quad (12)$$

$$D_i = \frac{1}{\Delta_i}\left[2\left(f_{i+1} - f_i\right) - f_i^{'}h_i - f_{i+1}^{'}h_i\right]. \quad (13)$$

Тогда сплайн $S_n(f, x)$ может быть представлен в виде:

$$S_n(f,x) = f_i\,(1 - \beta_i(t)) + f_{i+1}\,\beta_i(t) + f_i^{'}h_i\frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i} + f_{i+1}^{'}h_i\frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}\,, \quad (14)$$

где функции $\beta_i(t)$, $\varphi_i(t)$,$\psi_i(t)$ и Δ_i определены в (3)–(6).

Используя представления

$$f_i = f(x) + f^{'}(\xi_i)(x_i - x) = f(x) - f^{'}(\xi_i)th_i, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$f_{i+1} = f(x) + f^{'}(\eta_i)(x_{i+1} - x) = f(x) + f^{'}(\eta_i)(1 - t)h_i, \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

оценим уклонение

$$\left|S_n(f,x) - f(x)\right| = h_i\left|f^{'}(\eta_i)\,(1 - t)\,\beta_i(t) - \right.$$

$$\left. -f^{'}(\xi_i)\,(1 - \beta_i(t))\,t\; + \;f_i^{'}\,\frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i} + f_{i+1}^{'}\,\frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}\right|. \quad (15)$$

Поскольку $(1-t)\,\beta_i(t) \geqslant 0$, $(1-\beta_i(t))\,t \leqslant 0$, $\dfrac{\varphi_i(t)}{\Delta_i} \geqslant 0$, $\dfrac{\psi_i(t)}{\Delta_i} \leqslant 0$ (см. Свойства 1–3), то, применяя теорему о промежуточных значениях, имеем

$$\Big|S_n(f,x)-f(x)\Big| = h_i\,\Big|f'(\theta_i)\left[(1-t)\,\beta_i(t)+\frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i}\right]-$$

$$-f'(\nu_i)\left[(1-\beta_i(t))\,t-\frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}\right]\Big|. \tag{16}$$

Учитывая соотношение (8), получаем

$$\Big|S_n(f,x)-f(x)\Big| = h_i\,\Big|W_i(t)\Big|\cdot\Big|f'(\theta_i)-f'(\nu_i)\Big| \leqslant \Big|W_i(t)\Big|\cdot h_i\,\omega(f',h_i). \tag{17}$$

Из (8) и (7) также следует, что

$$2\,W_i(t) = (1-t)\,\beta_i(t) + t\,(1-\beta_i(t)) + t(1-t), \tag{18}$$

откуда и из Свойства 1

$$2\,\Big|W_i(t)\Big| \leqslant 1 + t(1-t) \leqslant \frac{5}{4}\,. \tag{19}$$

Из (17) и (19) следует утверждение Теоремы.

5. Оценка на классе W^1H^ω

Пусть W^1H^ω – класс функций $f \in C^1$, у которых производная $f' \in H^\omega$, где H^ω – класс функций $g(t) \in C$ с модулем непрерывности, не превосходящим заданного выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, т.е.

$$\big|g(t')-g(t'')\big| \leqslant \omega(\big|t'-t''\big|) \tag{20}$$

при всех $t', t'' \in [0,1]$.

Получим оценку снизу для функций из класса W^1H^ω.

Построим на $[x_i, x_{i+1}]$ следующую функцию

$$g_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2t-2x_i), & t \in [x_i, x_i+\frac{h_i}{4}], \\ \frac{1}{2}\,\omega(2x_i+h_i-2t), & t \in [x_i+\frac{h_i}{4}, x_i+\frac{h_i}{2}], \\ -\frac{1}{2}\,\omega(2t-2x_i-h_i), & t \in [x_i+\frac{h_i}{2}, x_i+\frac{3h_i}{4}], \\ -\frac{1}{2}\,\omega(2x_i+2h_i-2t), & t \in [x_i+\frac{3h_i}{4}, x_{i+1}], \end{cases}$$

Из свойств модуля непрерывности (см., например, [11, § 4.2]) ясно, что $g_i(t) \in H^{\omega}$.

Тогда для функции

$$f_i(x) = \begin{cases} \int\limits_{x_i}^{x} g_i(t)\,dt, & t \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ в остальных точках отрезка } [0,\, 1] \end{cases}$$

имеем

$$\|f_i\| = f_i\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right) = 2 \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{h_i}{4}} \frac{1}{2}\,\omega(2t - 2x_i)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{h_i}{2}} \omega(z)\,dz, \tag{21}$$

где $z = 2t - 2x_i$.

Отсюда

$$\left\|S_n(f,x) - f(x)\right\| = \max_i \left\|S_n(f_i,x) - f_i(x)\right\| = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\bar{h}/2} \omega(z)\,dz, \tag{22}$$

где $\bar{h} = \max\limits_i h_i$ и, в силу выпуклости вверх модуля непрерывности,

$$\left\|S_n(f,x) - f(x)\right\| = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\bar{h}/2} \omega(z)\,dz \geqslant \frac{\bar{h}}{8}\,\omega\left(\frac{\bar{h}}{2}\right) \geqslant \frac{\bar{h}}{16}\,\omega\left(\bar{h}\right). \tag{23}$$

Оценка сверху сразу следует из Теоремы 1.

6. Примеры

1) Если взять $u_i = t^3$, то получим обычные кубические сплайны.

2) При

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{k} d_{ij}(t - \alpha_j)_+^2$$

получаем параболические сплайны с дополнительными узлами.

3) При

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{k} d_{ij}(t-\alpha_j)_+^3$$

получаем кубические сплайны с дополнительными узлами.

4) При

$$u_i(t) = \frac{t^3}{1+p_i t}$$

получаем рациональные сплайны Шпэта с одним полюсом [8, §6.3].

Можно рассмотреть также следующие функции:

5) $u_i(t) = \sqrt{t+\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$,

6) $u_i(t) = ln(t+\alpha_i)$, $\alpha_i > 0$,

7) $u_i(t) = e^{\alpha_i t}$.

Литература

1 Schaback R. Interpolation mit nichtlinearen Klassen von Spline-Funktionen // J. Approximation Theory. – 1973. – No. 8. – P. 173-188.

2 Arndt H. Interpolation mit regulären Splines // J. Approxim. Theory. – 1977. – V. 20, No. 1. – P. 23-45.

3 Arndt H. Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nichtlinearen Splines // Numer. Math. – 1979. – V. 33, No. 3. – P. 323-338.

4 Werner H. Interpolation and integration of initial value problems of ordinary differential equations by regular splines // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – V. 12, No. 2. – P. 255-271.

5 Werner H., Loeb H. Tschebyscheff-approximation by regular splines with free knots // Lect. Notes Math. – 1976. – V. 556. – P. 439-452.

6 Исмагулов М.Р. Оценки приближения интерполяционными регулярными сплайнами на классах непрерывных и дифференцируемых функций // Каз. гос. ун-т. – Алма-Ата, 1987. – 43 с.

7 Исмагулов М.Р. Точные оценки приближения непрерывных периодических функций регулярными сплайнами // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 1. – С. 9-20.

8 Späth H. One Dimensional Spline Interpolation Algorithms // Peters, Massachusetts. – 1995.

9 Исмагулов М.Р. Оценка приближения непрерывных периодических функций регулярными параболическими сплайнами // Математический журнал. – Алматы, 2008. – Т. 8, № 1(27). – С. 35-39.

10 Исмагулов М.Р. Об интерполяции регулярными параболическими сплайнами // Известия НАН РК, Серия физ.-мат. – 1994. – № 1. – С. 37-40.

11 Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения // М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 30.09.2016

Ысмағұлов М.Р. РЕГУЛЯРЛЫ СПЛАЙДАРДЫҢ БІР КЛАСЫМЕН ЛОКАЛДЫ ЖУЫҚТАУ ТУРАЛЫ

Регулярды сплайндардың класы қарастырылады, бұлар, атап айтсақ, кубтық сплайндарды, бір полюсті Шпэттің рационал сплайндарын және тағы басқа сплайндарды жалпылайды. Үзіліссіз дифференциалданатын функциялар класында интерполяциялық регулярлы локалды сплайндармен жуықтаудың бағалауы алынған.

Ismagulov M.R. ON LOCAL APPROXIMATION OF ONE CLASS OF REGULAR SPLINES

The class of regular splines generalizing such cases as cubic splines, rational splines with one pole and others is considered. The error estimate by local interpolating regular splines on the class of continuously differentiable functions is obtained.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 132–149.

УДК 519.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.С. Кабдрахова

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050040, Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, e-mail: S_Kabdrachova@mail.ru

[2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125

Аннотация: Получены достаточные условия, обеспечивающие оценки близости построенной тройки функции с помощью модификации метода ломаных Эйлера к точному решению полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова: Нелинейные гиперболические уравнения, полупериодические краевые задачи, модификация метода ломаных Эйлера, приближенное решения, единственность решения в шаре.

1. Введение

Одной из основных и наиболее изученных задач теории гиперболических уравнений второго порядка является периодическая по времени краевая задача. Изучение периодических краевых задач для гиперболических уравнений со смешанной производной началось с работ L. Cesari. Дальнейшее развитие оно получило в работах J.K. Hale, G. Hesguet, A.K. Aziz, A.K. Aziz и A.M. Meyers, A.K. Aziz и M.G. Horak, A.K. Aziz и S.L. Brodsky, V. Lakshmikantham и S.G. Pandit, С.В. Жесткова, А.М. Самойленко, Т.И. Кигурадзе. Условия существования периодических решений гиперболических уравнений высоких порядков изучались Б.И. Пташником. В работах Ю.А.

Keywords: *Nonlinear hyperbolic equation, semiperiodic boundary value problem, modification broken Euler's method, approximate solutions, uniqueness of a solution in a ball.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35L51, 35L53.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 4057/GF4.

Митропольского, Г.П. Хомы, М.И. Громяк для исследования периодических решений гиперболических уравнений были применены асимптотические методы. Для решения периодических краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка были применены метод Фурье, метод последовательных приближений, методы функционального анализа, вариационный метод и др. Дальнейшее развитие теория нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной получила в работах Д.С. Джумабаева, А.Т. Асановой и их учеников. А.Т. Асановой [1], [2] на основе метода параметризации, предложенного Д.С. Джумабаевым [3], [4] для изучения и решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, был разработан метод введения функциональных параметров для исследования краевых задач с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной.

На $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для нелинейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \qquad x \in [0, \omega], \tag{2}$$

$$u(0, t) = \psi(t), \qquad t \in [0, T], \tag{3}$$

где $f : \overline{\Omega} \times R^3 \to R$ – непрерывная на $\bar{\Omega}$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ и удовлетворяющая условию $\psi(0) = \psi(T)$ функции.

Функция $u(x, t) \in C(\overline{\Omega})$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in$ $\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega})$, называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x, t) \in$ $\in \overline{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2)–(3).

Введем новые неизвестные функции $v(x, t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $w(x, t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и задачу (1)–(3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x, t, u(x, t), w(x, t), v), \tag{4}$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi,t)d\xi,\ w(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t(\xi,t)d\xi. \qquad (6)$$

Тройка функций $\{u(x,t), w(x,t), v(x,t)\}$, непрерывных на $\bar{\Omega}$, называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет семейству периодических краевых задач (4), (5), где функции $u(x,t)$, $w(x,t)$ связаны с $v(x,t)$, $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

Задачи (1)–(3) и (4)–(6) эквивалентны в том смысле, что если тройка $\{u(x,t), w(x,t), v(x,t)\}$ будет решением задачи (4)–(6), то функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3) и, наоборот, если тройка $\{u^*(x,t), w^*(x,t), v^*(x,t)\}$ – решение задачи (4)–(6), то $u^*(x,t)$ будет решением задачи (1)–(3).

В работе [5] получены достаточные условия существования изолированного решения полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной на основе метода параметризации, а в работе [6] модификация метода ломаных Эйлера применяется для нахождения решения (1)–(3). Установлены достаточные условия существования изолированного решения задачи и оценки разности между решением и начальным приближением. В настоящей работе доказывается сходимость модификации метода метода ломаных Эйлера к решению задачи (1)–(3).

2. Сходимость модификации метода ломаных Эйлера

Чтобы показать сходимость модификации метода метода ломаных Эйлера к решению задачи (1)–(3), возьмем шаг $h = \dfrac{\omega}{mN_0} = \dfrac{h_0}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$, отрезок $[0,\omega]$ разобьем на mN_0 частей и на каждом шаге решаем периодические краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функции $v^{(0)}(t)$, $\dot{v}^{(0)}(t)$, $u^{(0)}(t)$, $w^{(0)}(t)$ определим равенствами:

$$v^{(0)}(t) = 0, \quad \dot{v}^{(0)}(t) = 0, \quad u^{(0)}(t) = \psi(t), \quad w^{(0)}(t) = \dot{\psi}(t), \quad t \in [0,T]$$

и решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = f(0,t,u^{(0)}(t), w^{(0)}(t), v^{(1)}),\ t \in [0,T], \quad v^{(1)}(0) = v^{(1)}(T).$$

найдем функцию $v^{(1)}(t)$. По $v^{(1)}(t)$, $\dot{v}^{(1)}(t)$ определим функции:

$$u^{(1)}(t) = \psi(t) + hv^{(1)}(t), \quad w^{(1)}(t) = \dot{\psi}(t) + h\dot{v}^{(1)}(t), \quad t \in [0,T].$$

Функцию $v^{(2)}(t)$, найдем решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(2)}}{dt} = f(h,t,u^{(1)}(t),w^{(1)}(t),v^{(2)}),\ t \in [0,T], \quad v^{(2)}(0) = v^{(2)}(T).$$

По $v^{(1)}(t)$, $\dot{v}^{(1)}(t)$ и $v^{(2)}(t)$, $\dot{v}^{(2)}(t)$ определим функции:

$$u^{(2)}(t) = \psi(t) + h[v^{(1)}(t) + v^{(2)}(t)], \quad t \in [0,T],$$

$$w^{(2)}(t) = \dot{\psi}(t) + h[\dot{v}^{(1)}(t) + v^{(2)}(t)], \quad t \in [0,T].$$

Считая известными $v^{(i)}(t)$, $u^{(i)}(t)$, $w^{(i)}(t)$, функцию $v^{(i+1)}(t)$ находим, периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(i+1)}}{dt} = f(ih_0,t,u^{(i)}(t),w^{(i)}(t),v^{(i+1)}), \quad t \in [0,T],$$

$$v^{(i+1)}(0) = v^{(i+1)}(T), \quad i = \overline{1,N}.$$

Функции $u^{(i+1)}(t)$, $w^{(i+1)}(t)$ по $v^{(i+1)}(t)$, $\dot{v}^{(i+1)}(t)$ определим равенствами

$$\begin{aligned} u^{(i+1)}(t) &= \psi(t) + h\sum_{j=0}^{i+1} v^{(j)}(t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,N}, \\ w^{(i+1)}(t) &= \dot{\psi}(t) + h\sum_{j=0}^{i+1} \dot{v}^{(j)}(t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv^{(i+1)}}{dt} = f(ih,t,\psi(t) + h\sum_{j=0}^{i} v^{(j)}(t), \dot{\psi}(t) + h\sum_{j=0}^{i} \dot{v}^{(j)}, v^{(i+1)}), \tag{7}$$

$$v^{(i+1)}(0) = v^{(i+1)}(T), \quad t \in [0,T],\ i = \overline{1,mN_0}. \tag{8}$$

На $\overline{\Omega}$ построим функции

$$U_h(x,t) = \psi(t) + h\sum_{j=1}^{i-1} v^{(j)}(t) + v^{(i)}(t)(x-(i-1)h), x \in [(i-1)h, ih), \quad (9)$$

$$W_h(x,t) = \dot{\psi}(t) + h\sum_{j=1}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(t) + \dot{v}^{(i)}(t)(x-(i-1)h), x \in [(i-1)h, ih), \quad (10)$$

$$V_h(x,t) = v^{(i+1)}(t)\frac{x-(i-1)h}{h} + v^{(i)}(t)\frac{ih-x}{h}, \; x \in [(i-1)h, ih). \quad (11)$$

Взяв в качестве начального приближения $\{U_h(x,t),\, W_h(x,t),\, V_h(x,t)\}$ решение задачи (4)-(6) найдем как предел последовательности троек $\{u^{(k)}(x,t), w^{(k)}(x,t), V^{(k)}(x,t)\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, определяемых по следующему алгоритму

1-шаг. А) Функцию $v^{(1)}(x,t)$ находим, решая краевую задачу (4), (5) при $u(x,t) = U_h(x,t)$, $w(x,t) = W_h(x,t)$.

Б) Первые приближения $u(x,t), w(x,t)$ определяются через $v^{(1)}(x,t)$, $v_t^{(1)}(x,t)$ равенствами: $u^{(1)}(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(1)}(\xi,t)d\xi$ и $w^{(1)}(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t^{(1)}(\xi,t)d\xi$.

2-шаг. А) Решая краевую задачу (4), (5) при $u(x,t) = u^{(1)}(x,t)$, $w(x,t) = w^{(1)}(x,t)$ находим функцию $v^{(2)}(x,t)$.

Б) Через $v^{(2)}(x,t)$ определим функции $u^{(2)}(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(2)}(\xi,t)d\xi$ и $w^{(2)}(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t^{(2)}(\xi,t)d\xi$.

Продолжая процесс, на k- *ом шаге* алгоритма получаем систему троек $\{u^{(k)}(x,t), w^{(k)}(x,t), v^{(k)}(x,t)\}, k = 1, 2, 3, ...$

Введем следующие обозначения:

$$d_h^1(x) = \max\Big\{\|f(x,\cdot,\psi(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i} \dot{v}^{(j)}(\cdot), v^{(i+1)}(\cdot)) -$$

$$-f(ih,\cdot,\psi(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i} \dot{v}^{(j)}(\cdot), v^{(i+1)}(\cdot))\|_1, \|f(x,\cdot,\psi(\cdot) +$$

$$+h\sum_{j=1}^{i-1} v^{(j)}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot)) - f((i-1)h,\cdot,\psi(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i-1} v^{(j)}(\cdot),$$

$$\dot{\psi}(\cdot) + h\sum_{j=1}^{i-1} \dot{v}^{(j)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot))\|_1\Big\} + 2L_3(x)\|v^{(i+1)}(\cdot) - v^{(i)}(\cdot)\|_1 \left|\frac{x-(i-1)h}{h}\right|\left|\frac{ih-x}{h}\right| +$$

$+2\big(L_1(x)+L_2(x)\big)\max\left(\|v^{(i)}(\cdot)\|_1, \|\dot{v}^{(i)}(\cdot)\|_1\right)h,\ x\in[(i-1)h, ih),\ i=\overline{1,N}$,
$c_h(\gamma,x)=\max\left(\gamma, 1+\gamma L_3(x)\right)\left[L_1(x)+L_2(x)\right], d_h^2(x)=\big(1+2\gamma L_3(x)\big)d_h^1(x)$,
$d_h(x)=\max(\gamma, 1+2\gamma L_3(x))d_h^1(x), B_h(x)=3h\max\Big(\max\limits_{i=\overline{1,N_0}}\|v^{(i)}(\cdot)\|_1$,

$\max\limits_{i=\overline{1,N_0}}\|\dot{v}^{(i)}(\cdot)\|_1\Big)+\max\Big(\int_0^x d_h^1(\xi)d\xi, \int_0^x d_h^2(\xi)d\xi\Big),\ x\in[(i-1)h, ih)$,
$\max\left(\hat{\delta}_0^{(s,j)},\ \hat{\delta}_1^{(s,j)}\right)=\max\Big(\|V^{((s-1)m+j)}(\cdot)-V^{((s-1)m+j-1)}(\cdot)\|_1$,
$\|\dot{V}^{((s-1)m+j)}(\cdot)-\dot{V}^{((s-1)m+j-1)}(\cdot)\|_1\Big),\ \varepsilon(h_0)=\|f\big(((s-1)m+j)h,\cdot,\psi(\cdot)+$
$+h\sum\limits_{k=1}^{j-1}v^{(k)}(\cdot),\dot{\psi}(\cdot)+h\sum\limits_{k=1}^{j-1}\dot{v}^{(k)}(\cdot), \frac{j-1}{m}\dot{V}^{(s+2)}(\cdot)+\frac{m-(j-1)}{m}\dot{V}^{(s+1)}(\cdot)\big)-$
$-f((s-1)m+j-1)h,\psi(\cdot)+h\sum\limits_{k=1}^{j-1}v^{(k)}(\cdot),\dot{\psi}(\cdot)+h\sum\limits_{k=1}^{j-1}\dot{v}^{(k)}(\cdot), \frac{j-1}{m}\dot{V}^{(s+2)}(\cdot)+$
$+\frac{m-(j-1)}{m}\dot{V}^{(s+1)}(\cdot))\|_1,\quad A=\max\Big(\widetilde{\gamma}, 1+\widetilde{\gamma}L_3(h_0)\Big)\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]$,
$B=A\max\left(\hat{\delta}_0^{(s,j)},\hat{\delta}_1^{(s,j)}\right)h+\max\Big(\widetilde{\gamma}, 2+\widetilde{\gamma}L_3(h_0)\Big)\cdot\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\dfrac{j-1}{m}\times$
$\times[m-(j-1)]h\max\left(\|V^{(s+1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{V}^{(s+1)}(\cdot)\|_1\right)+\max\Big(\widetilde{\gamma}, 2+\widetilde{\gamma}L_3(h_0)\Big)\times$
$\times\frac{j-1}{m}\cdot L_3(h_0)\frac{m-(j-1)}{m}\|V^{(s+2)}(\cdot)-V^{(s+1)}(\cdot)\|_1+\max\Big(\widetilde{\gamma}, 1+\widetilde{\gamma}L_3(h_0)\Big)\varepsilon(h_0)$.
Справедлива

Теорема. *Пусть при некотором N_0, ($h_0=\omega/N_0$) задача (7), (8) имеет решение $\{V^{(1)}(t), V^{(2)}(t)\ldots, V^{(N_0+1)}(t)\}$, выполняется условие A во множестве $G_{h_0}^0$ и следующие неравенства:*

$$1)\Big|\int_0^T f_v(x,t,u,w,v)dt\Big|\geq\delta>0\ \ \text{для любых}\ (x,t,u,w,v)\in G_{h_0}^0;$$

$$2)\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}+d_h(x)+c_h(\gamma,x)B_h(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)<\rho_{1,h}(x),$$

$$3)\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}\omega+B_h(x)\cdot\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)<\rho_{2,h}(x).$$

Тогда а) задача (1)–(3) в $S\big(U_{h_0}(x,t),\rho_{2,h_0}(x)\big)$ имеет единственное решение $u^*(x,t)$, б) для любого $N=mN_0, m=1,2,3,\ldots,(h=\dfrac{\omega}{N})$;

задача $(7),(8)$ *имеет единственное решение* $\{v^{(1)}(t),\ldots,v^{(mN_0+1)}(t)\}$, *где* $\{v^{(k)}(t)\}\in\big(V_{h_0}((k-1)h,t),\rho_{1,h_0}((k-1)h)\big)$, $k=1,2,\ldots,mN_0+1$ *и справедливы оценки*

$$\max\Big(\|u^*(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1,\Big\|\frac{\partial u^*}{\partial t}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\Big\|_1\Big)\le$$

$$\le B_h(x)\cdot\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big),\tag{12}$$

$$\Big\|\frac{\partial u^*}{\partial x}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\Big\|_1\le d_h(x)+c_h(\gamma,x)B_h(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big).\tag{13}$$

Доказательство. При предположениях Теоремы покажем, что для любого $m\in\mathbb{N}$ периодическая краевая задача (7), (8) имеет решения $\{v^{(1)}(t),v^{(2)}(t),\ldots,v^{(mN_0)}(t)\}$. Из (7), (8) при $i=1$ получим периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(2)}}{dt}=f(h,t,\psi(t)+hv^{(1)}(t),\dot\psi(t)+h\dot v^{(1)}(t)),\quad v^{(2)}(0)=v^{(2)}(T).$$

Чтобы найти функцию $v^{(2)}(t)$ в качестве начального приближения возьмем $V_{h_0}(h,t)$, т. е. $v^{(2,0)}(t)=V_{h_0}(h,t)=\dfrac{h}{h_0}V^{(2)}(t)+\dfrac{h_0-h}{h_0}V^{(1)}(t)$.

Поскольку $h_0=mh$, то $v^{(2,0)}(t)=\dfrac{1}{m}V^{(2)}(t)+\dfrac{m-1}{m}V^{(1)}(t)$. Так как условия Теоремы обеспечивают выполнения условий локального варианта теоремы Адамара [7], то задача (7), (8) при $i=1$ в $S\big(V_{h_0}(h,t),\rho_{1,h_0}\big)$ имеет изолированное решение $v^{(2)}(t)$ и справедлива оценка

$$\Delta_0^{(2)}=\|v^{(2)}(\cdot)-v^{(2,0)}(\cdot)\|_1\le\widetilde\gamma\cdot\|\dot v^{(2,0)}(\cdot)-f\big(h,\cdot,\psi(\cdot)+hv^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot v^{(1)}(\cdot),$$

$$v^{(2,0)}(\cdot)\big)\|_1\le\widetilde\gamma\Big(\frac{m-1}{m}h\big[L_1(h_0)+L_1(0)\big]\|V^{(1)}(\cdot)\|_1+\frac{m-1}{m}\cdot h\cdot\big[L_1(h_0)+L_2(0)\big]\times$$

$$\times\|\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\big[L_3(h_0)+L_3(0)\big]\|V^{(2)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1+$$

$$+\frac{1}{m}\|f\big(mh,\cdot,\psi(\cdot)+hV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot V^{(1)}(\cdot),\frac{1}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-1}{m}V^{(1)}(\cdot)\big)-$$

$$-f\big(h,\cdot,\psi(\cdot)+hV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot V^{(1)}(\cdot),\frac{1}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-1}{m}V^{(1)}(\cdot)\big)\|_1+$$

$$+\frac{m-1}{m}\|f\big(0,\cdot,\psi(\cdot)+hV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot V^{(1)}(\cdot),\frac{1}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-1}{m}V^{(1)}(\cdot)\big)-$$

$$-f\big(h,\cdot,\psi(\cdot)+hV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot V^{(1)}(\cdot),\frac{1}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-1}{m}V^{(1)}(\cdot)\big)\|_1. \quad (14)$$

Найдем $v^{(3)}(t)$. В качестве начального приближения возьмем $V_{h_0}(2h,t)$, т. е.

$$v^{(3,0)}(t)=V_{h_0}(2h,t)=\frac{2}{m}V^{(2)}(t)+\frac{m-2}{m}V^{(1)}(t).$$

Имеет место следующая оценка:

$$\Delta_0^{(3)}=\|v^{(3)}(\cdot)-v^{(3,0)}(\cdot)\|_1\le$$

$$\le\widetilde\gamma\cdot\|\dot v^{(3,0)}(\cdot)-f\big(h,\cdot,\psi(\cdot)+hv^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+h\dot v^{(1)}(\cdot),v^{(3,0)}(\cdot)\big)\|_1\le$$

$$\le\widetilde\gamma\Big\{\frac{2(m-2)h}{m}[L_1(0)+L_1(h_0)]\|V^{(1)}(\cdot)\|_1+\frac{2(m-2)h}{m}[L_2(0)+L_2(h_0)]\times$$

$$\times\|\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1+\frac{2}{m}\cdot h\Big[\frac{m-2}{m}L_1(0)+\frac{2}{m}L_1(h_0)\Big]\|V^{(2)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1+$$

$$+\frac{2}{m}\cdot h\Big[\frac{m-2}{m}L_2(0)+\frac{2}{m}L_2(h_0)\Big]\|\dot V^{(2)}(\cdot)-\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1+\frac{2}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\big[L_3(0)+L_3(h_0)\big]\times$$

$$\times\|V^{(2)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1+\Big[\frac{2}{m}L_1(h_0)+\frac{m-2}{m}L_1(0)\Big]\cdot h\cdot\Delta_0^2+\Big[\frac{2}{m}L_2(h_0)+\frac{m-2}{m}L_2(0)\Big]\times$$

$$\times h\cdot\Delta_1^2+\frac{2}{m}\|f(mh,\cdot,\psi(\cdot)+mhV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+mh\dot V^{(1)}(\cdot),V^{(2)}(\cdot))-f(2h,\cdot,\psi(\cdot)+$$

$$+mhV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+mh\dot V^{(1)}(\cdot),V^{(2)}(\cdot))\|_1+$$

$$+\frac{m-2}{m}\|f(0,\cdot,\psi(\cdot)+h[v^{(1)}(\cdot)+v^{(2)}(\cdot)],\dot\psi(\cdot)+$$

$$+h[\dot v^{(1)}(\cdot)+\dot v^{(2)}(\cdot)],\frac{2}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-2}{m}V^{(1)}(\cdot))-f(2h,\cdot,\psi(\cdot)+$$

$$+mhV^{(1)}(\cdot),\dot\psi(\cdot)+mh\dot V^{(1)}(\cdot),\frac{2}{m}V^{(2)}(\cdot)+\frac{m-2}{m}V^{(1)}(\cdot))\|_1\Big\}. \quad (15)$$

Тогда для разностей $\Delta_0^{(j)}=\|v^{(j+1)}(t)-v^{(j+1,0)}(t)\|_1, \Delta_1^{(j)}=\|\dot v^{(j)}(\cdot)-$ $-\dot v^{(j,0)}(\cdot)\|_1,\ j=1,2,3,\ldots,m,$ где $v^{(j+1,0)}(t)=V_{h_0}(jh_0,t)=\dfrac{j-1}{m}V^{(2)}(t)+$ $+\frac{m-(j-1)}{m}V^{(1)}(t),$ справедлива оценка

$$\Delta^{(j)}=\max\left(\Delta_0^{(j)},\Delta_1^{(j)}\right)\le\max\Big(1,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\cdot h\times$$
$$\times\sum_{k=2}^{j-1}\max\left(\Delta_0^{(k)},\Delta_1^{(k)}\right)+\max\Big(1,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\cdot h\times$$
$$\times\max\left(\|V^{(2)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1,\|\dot V^{(2)}(\cdot)-\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1\right)+\max\Big(1,2+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\times$$
$$\times\frac{j-1}{m}\cdot h\cdot\big[m-(j-1)h\big]\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\max\left(\|V^{(1)}(\cdot)\|_1,\|\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1\right)+$$
$$+\max\Big(1,2+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\frac{j-1}{m}\cdot\frac{m-(j-1)}{m}\cdot L_3(h_0)\|V^{(2)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1+$$
$$+\max\Big(1,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\varepsilon(h_0).$$

Таким образом, для любого $s=\overline{1,N_0},\ j=2,3,\ldots,$ имеем оценку

$$\Delta^{((s-1)m+j)}=\max\Big(\|v^{((s-1)m+j)}(\cdot)-v^{((s-1)m+j,0)}(\cdot)\|_1,$$
$$\|\dot v^{((s-1)m+j)}(\cdot)-\dot v^{(s-1)m+j,0)}(\cdot)\|_1\Big)\le$$
$$\le\max\Big(\widetilde\gamma,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\cdot h\cdot\sum_{k=1}^{(s-1)m+j-1}\Delta^{(k)}+$$
$$+\max\Big(\widetilde\gamma,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\max\Big(\hat\delta_0^{(s,j)},\hat\delta_1^{(s,j)}\Big)\cdot h\quad+$$
$$+\max\Big(\widetilde\gamma,2+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\cdot\Big[L_1(h_0)+L_2(h_0)\Big]\frac{j-1}{m}[m-(j-1)]\cdot h\times$$
$$\times\max\left(\|V^{(s+1)}(\cdot)\|_1,\|\dot V^{(s+1)}(\cdot)\|_1\right)+\max\Big(\widetilde\gamma,2+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\frac{j-1}{m}\cdot L_3(h_0)\times$$
$$\times\frac{m-(j-1)}{m}\|V^{(s+2)}(\cdot)-V^{(s+1)}(\cdot)\|_1+\max\Big(\widetilde\gamma,1+\widetilde\gamma L_3(h_0)\Big)\varepsilon(h_0)=$$

$$= B + A \cdot h \cdot \sum_{k=1}^{(s-1)m+j-1} \Delta^{(k)}. \tag{16}$$

Из оценки (16) получим

$$\Delta^{((s-1)m+j)} < \left[B + Ah\Delta^{(1)}\right]\left(1 + Ah\right)^{\frac{\omega}{h}}, \quad s = \overline{1, N_0 + 1},\ j = \overline{1, m}. \tag{17}$$

Теперь установим оценки $\|V_h(x,\cdot) - V_{h_0}(\cdot)\|_1$, $\|U_h(x,\cdot) - U_{h_0}(\cdot)\|_1$, $\|W_h(x,\cdot) - W_{h_0}(\cdot)\|_1$.

Если $x \in \Big[\big((s-1)m + j - 1\big)h, \big((s-1)m + j\big)h\Big)$, $s = \overline{1, N_0}$, $j = \overline{1, m}$, то функции $U_h(x,t), W_h(x,t), V_h(x,t)$ имеют вид

$$V_h(x,t) = v^{((s-1)m+j+1)} \times$$

$$\times \frac{x - ((s-1)m + j - 1)h}{h} + v^{((s-1)m+j)}(t)\frac{((s-1)m+j)h - x}{h}, \tag{18}$$

$$U_h(x,t) = \psi(t) + h \sum_{k=0}^{(s-1)m+j-1} v^{(k)}(t) +$$

$$+ v^{((s-1)m+j)}(t)[x - ((s-1)m + j - 1)h], \tag{19}$$

$$W_h(x,t) = \dot{\psi}(t) + h \sum_{k=0}^{(s-1)m+j-1} \dot{v}^{(k)}(t) +$$

$$+ \dot{v}^{((s-1)m+j)}(t)[x - ((s-1)m + j - 1)h], \tag{20}$$

Для функции $u^{(i)}(\cdot), w^{(i)}(\cdot)$ имеет место следующая оценка

$$\max\left(\|u^{(i)}(\cdot) - \psi(\cdot)\|_1, \|w^{(i)}(\cdot) - \dot{\psi}(\cdot)\|_1\right) \leq$$

$$\leq h_0 \sum_{j=1}^{i} \max\left(\|v^{(j)}(\cdot)\|_1, \|\dot{v}^{(j)}(\cdot)\|_1\right) \leq h_0 \sum_{j=1}^{i} \max\left(\|v^{(j)}(\cdot) - v^{(1)}(\cdot)\|_1,\right.$$

$$\left.\|\dot{v}^{(j)}(\cdot) - \dot{v}^{(1)}(\cdot)\|_1\right) + h_0 \sum_{j=1}^{i} \max\left(\|v^{(1)}(\cdot)\|_1, \|\dot{v}^{(1)}(\cdot)\|_1\right). \tag{21}$$

Учитывая выражения (18) и оценку (21), имеем

$$\|V_h(x,\cdot)-V_{h_0}(\cdot)\|_1\le$$

$$\le\|v^{(s-1)m+j+1)}(\cdot)-v^{((s-1)m+j+1,0)}(\cdot)\|_1\Big|\frac{x-((s-1)m+j-1)h}{h}\Big|+$$

$$+\|v^{((s-1)m+j)}(\cdot)-v^{(s-1)m+j),0)}(\cdot)\|_1\Big|\frac{((s-1)m+j))h-x}{h}\Big|\le$$

$$\le\max\Big(\Delta^{((s-1)m+j+1)},\Delta^{(s-1)m+j)}\Big)<\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}. \tag{22}$$

Учитывая (19), (20), (21), получим оценку для разностей $U_h(x,t)-U_{h_0}(x,t)$ и $W_h(x,t)-W_{h_0}(x,t)$:

$$\max\Big(\|U_h(x,\cdot)-U_{h_0}(x,\cdot)\|_1,\|W_h(x,\cdot)-W_{h_0}(x,\cdot)\|_1\Big)\le$$

$$\le\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}\cdot((s-1)m+j)h+\frac{m+2}{2m}\cdot(j-1)h\times$$

$$\times\max\Big(\|V^{(s+1)}(\cdot)-V^{(s)}(\cdot)\|_1,\|\dot V^{(s+1)}(\cdot)-\dot V^{(s)}(\cdot)\|_1\Big)+$$

$$+\frac{m-1}{2}\cdot h\cdot\max\Big(\|V^{(s)}(\cdot)-V^{(1)}(\cdot)\|_1,\|\dot V^{(s)}(\cdot)-\dot V^{(1)}(\cdot)\|_1\Big). \tag{23}$$

Теперь установим оценки $\|v^*(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|$, $\|u^*(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|$, $\|w^*-W_h(x,\cdot)\|$.

Для этого рассмотрим периодическую краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,U_h(x,t),W_h(x,t),v), \tag{24}$$

$$v(x,0)=v(x,T). \tag{25}$$

Так как условия Теоремы обеспечивают выполнение условий усиления локального варианта теоремы Адамара [7], то задача (24), (25) в $S\Big(V_h(x,t),\rho_{1,h}(x)\Big)$ имеет изолированное решение $v^{(1)}(x,t)$, которое удовлетворяет уравнению (4) при $u=U_h(x,t)$, $w=W_h(x,t)$ и $V_h(x,t)$ определяется из равенства (13), и справедлива следующая оценка

$$\max\big(\|v^{(1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1,\|v_t^{(1)}(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\big)\le$$

$$\leq \max\big(\gamma, 1+2\gamma L_3\big) d_h^1(x) = d_h(x). \tag{26}$$

Учитывая оценку (26), получим оценку

$$\max\Big(\|u^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1\Big) \leq \max\Big(\int_0^x d_h^1(\xi)d\xi,$$

$$\int_0^x d_h^2(\xi)d\xi\Big) + 3h\max\Big(\max_{i=\overline{1,N+1}}\|v^{(i)}(\cdot)\|_1, \max_{i=\overline{1,N+1}}\|\dot v^{(i)}(\cdot)\|_1\Big) = B_h(x). \tag{27}$$

Возьмем

$$\rho_{1,h}^{(1)}(x) = c_h(\gamma,x)B_h(x)+\varepsilon_1, \quad \rho_{2,h}^{(1)}(x) = B_h(x)\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi+\varepsilon_2,$$

где числа $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0$ соответственно удовлетворяют неравенствам

$$\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}+d_h(x)+c_h(\gamma,x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)\cdot B_h(x)+\varepsilon_1<\rho_{1,h}(x),$$

$$\big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+A\cdot h\big)^{\frac{\omega}{h}}\omega+\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)B_h(x)+\varepsilon_2<\rho_{2,h}(x).$$

Построим множества

$$S\Big(v^{(1)}(x,t),\rho_{1,h}^{(1)}(x)\Big), S\Big(u^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big),\ S\Big(w^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big).$$

Покажем, что

$$S\Big(v^{(1)}(x,t),\rho_{1,h}^{(1)}(x)\Big)\subset S\Big(V_h(x,t),\rho_{1,h}(x)\Big), S\Big(u^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big)\subset$$

$$\subset S\Big(U_h(x,t),\rho_{2,h}(x)\Big), S\Big(w^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big)\subset S\Big(W_h(x,t),\rho_{2,h}(x)\Big).$$

Действительно, если

$$v(x,t)\in S\Big(v^{(1)}(x,t),\rho_{1,h}^{(1)}(x)\Big), u(x,t)\in S\Big(u^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big), w(x,t)\in$$

$$\in S\Big(w^{(1)}(x,t),\rho_{2,h}^{(1)}(x)\Big),$$

то, учитывая неравенство (27) получим

$$\max\Big(\|v(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1, \|v_t(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\Big) \le$$

$$\le \max\Big(\|v(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1, \|v_t(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1\Big) + \max\big(\|V^{(1)}(x,\cdot)-$$

$$-V_h(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(1)}(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\big) \le \rho_{1,h}^{(1)}(x) + \max\big(\|v^{(1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1,$$

$$\|v_t^{(1)}(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\big) \le d_h(x) + c_h(\gamma,x)B_h(x) + \varepsilon_1 < \rho_{1,h}(x), \qquad (28)$$

Используя неравенство (28), имеем

$$\max(\|u(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1) \le \max(\|u(x,\cdot)-U^{(1)}(x,\cdot)\|_1,$$

$$\|w(x,\cdot)-w^{(1)}(x,\cdot)\|_1) + \max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1) \le$$

$$\le \rho_{2,h}^{(1)}(x) + B_h(x) \le \Big[1 + \int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big] B_h(x) + \varepsilon_2 < \rho_{2,h}(x). \qquad (29)$$

Взяв за начальное приближение $v^{(1)}(x,t)$ и в множестве $S\Big(v^{(1)}(x,t), \rho_{1,h}^{(1)}(x)\Big)$ вновь применяя усиление локального варианта теоремы Адамара, получим существование изолированного решения $v^{(2)}(x,t) \in \in S\Big(v^{(1)}(x,t), \rho_{1,h}^{(1)}(x)\Big)$ задачи (4), (5) при $u = u^{(1)}(x,t), w = w^{(1)}(x,t)$ и оценку

$$\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1 \le \gamma\|v_t^{(1)}(x,\cdot)-f(x,\cdot,u^{(1)}(x,\cdot),w^{(1)}(x,\cdot),v^{(1)}(x,\cdot))\|_1 \le$$

$$\le \gamma f(x,\cdot,U_h(x,\cdot),W_h(x,\cdot),v^{(1)}(x,\cdot)) - f(x,\cdot,u^{(1)}(x,\cdot),w^{(1)}(x,\cdot),v^{(1)}(x,\cdot))\|_1 \le$$

$$\le \gamma\big[L_1(x)+L_2(x)\big]\max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1) \le$$

$$\le \gamma\big[L_1(x)+L_2(x)\big]B_h(x). \qquad (30)$$

Учитывая, что функция $v^{(2)}(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4), при $u = u^{(1)}(x,t)$, $w = w^{(1)}(x,t)$ и используя оценку (30), получим

$$\|v_t^{(2)}(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1 \le$$

$$\le \big(L_1(x)+L_2(x)\big)\max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1)+$$

$$+L_3(x)\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1 \le \big(1+\gamma L_3(x)\big)\big[L_1(x)+L_2(x)\big]B_h(x). \quad (31)$$

Из оценок (30), (31) имеем

$$\max\Big(\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(2)}(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1\Big) \le$$

$$\le \max\big(\gamma, 1+\gamma L_3(x)\big)\big[L_1(x)+L_2(x)\big]B_h(x) = c_h(\gamma,x)B_h(x). \quad (32)$$

Найденные $v^{(2)}(x,t)$, $v_t^{(2)}(x,t)$ подставляя в интегральные соотношения (6) и учитывая оценку (32), получим

$$\max(\|u^{(2)}(x,\cdot)-u^{(1)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(2)}(x,\cdot)-w^{(1)}(x,\cdot)\|_1) \le$$

$$\le \int_0^x \max\big(\|v^{(2)}(\xi,\cdot)-v^{(1)}(\xi,\cdot)\|_1, \|v_t^{(2)}(\xi,\cdot)-v_t^{(1)}(\xi,\cdot)\|_1\big)d\xi \le$$

$$\le B_h(x)\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi. \quad (33)$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\max(\|u^{(k)}(x,\cdot)-u^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(k)}(x,\cdot)-w^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1) \le$$

$$\le B_h(x)\int_0^x c_h(\gamma,\xi_1)d\xi_1\int_0^{\xi_1} c_h(\gamma,\xi_2)d\xi_2\ldots\int_0^{\xi_{k-2}} c_h(\gamma,\xi_{k-1})d\xi_{k-1} \le$$

$$\le \frac{1}{(k-1)!}\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)^{k-1}B_h(x),\ k=2,3,\ldots, \quad (34)$$

$$\max(\|v^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v_t^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1) \le$$

$$\le c_h(\gamma,x)\frac{1}{(k-3)!}\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)^{k-3},\ k=3,4,\ldots. \quad (35)$$

Предполагая, что $u^{(k)}(x,t), w^{(k)}(x,t), v^{(k)}(x,t), \quad k=2,3,\ldots,$ известны и установлена оценка

$$\max(\|v^{(k)}(x,\cdot)-v^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k)}(x,\cdot)-v_t^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1) \le B_h(x)\times$$

$$\times\int_0^x \max(\|v^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v_t^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1), \quad (36)$$

следующее приближение по V найдем, решая семейство периодических краевых задач

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t} = f(x,t,u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t),v^{(k+1)}),$$

$$v^{(k+1)}(x,0) = v^{(k+1)}(x,T),\ (x,t) \in \overline{\Omega},$$

Функции $u^{(k+1)}(x,t), w^{(k+1)}(x,t)$ определяются из функциональных соотношений

$$u^{(k+1)}(x,t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(k+1)}(\xi,t)d\xi,$$

$$w^{(k+1)}(x,t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t^{(k+1)}(\xi,t)d\xi,\ k = 1,2,\dots.$$

Возьмем $\rho_{1,h}^{(k)}(x) = c_h(\gamma,x)\dfrac{1}{(k-1)!}\Big(\displaystyle\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)^{k-1} \cdot B_h(x) + \varepsilon_1$, $\rho_{2,h}^{(k)}(x) = \dfrac{1}{k!}\Big(\displaystyle\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big)^{k} \cdot B_h(x) + \varepsilon_2$ и построим множества

$$S\Big(v^{(k)}(x,t),\rho_{1,h}^{(k)}(x)\Big), S\Big(u^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big), S\Big(w^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big).$$

Для любых $v(x,t) \in S\Big(v^{(k)}(x,t),\rho_{1,h_0}^{(k)}(x)\Big)$, $u(x,t) \in S\Big(u^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big)$, $w(x,t) \in S\Big(w^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big)$ аналогично (28), (29) устанавливаются неравенства, обеспечивающие соотношения

$$S\Big(v^{(k)}(x,t),\rho_{1,h}^{(k)}(x)\Big) \subset S\Big(V_h(x,t),\rho_{1,h}(x)\Big), S\Big(u^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big) \subset$$

$$\subset S\Big(U_h(x,t),\rho_{2,h}(x)\Big), S\Big(w^{(k)}(x,t),\rho_{2,h}^{(k)}(x)\Big) \subset S\Big(W_h(x,t),\rho_{2,h}(x)\Big).$$

Взяв за начальное приближение функцию $v^{(k)}(x,t)$ и в множестве $S\Big(v^{(k)}(x,t),\rho_{1,h}^{(k)}(x)\Big)$ вновь применяя усиление локального варианта теоремы Адамара при $u = u^{(k)}(x,t)$, $w(x,t) = w^{(k)}(x,t)$, получим существование изолированного решения $v^{(k+1)}(x,t) \in S\Big(v^{(k)}(x,t),\rho_{1,h}^{(k)}(x)\Big)$. Подставляя найденные $v^{(k+1)}(x,t), v^{(k)}(x,t)$ в функциональное соотношение (6) и оценивая их разность для всех $k = 1,2,\dots$, имеем

$$\max(\|u^{(k+1)}(x,\cdot) - u^{(k)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(k+1)}(x,\cdot) - w^{(k)}(x,\cdot)\|_1) \leq$$

$$\leq \int_0^x \max(\|v^{(k)}(\xi,\cdot)-v^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k)}(\xi,t)-v_t^{(k-1)}(\xi,t)\|_1)d\xi \tag{37}$$

и, аналогично неравенству (36), для всех $k = 1, 2, \ldots$, получим оценку

$$\max(\|v^{(k+1)}(x,\cdot)-v^{(k)}(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k+1)}(x,\cdot)-v_t^{(k)}(x,\cdot)\|_1) \leq B_h(x)\times$$

$$\times \int_0^x \max(\|v^{(k)}(\xi,\cdot)-v^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k)}(\xi,\cdot)-v_t^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_1)d\xi. \tag{38}$$

Учитывая оценки (26), (27), (32)–(34), получим

$$\max\big(\|v^{(k+1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k+1)}(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\big) \leq \max\big(\|v^{(k+1)}(x,\cdot)-$$

$$-v^{(k)}(x,\cdot)\|_1, \|v_t^{(k+1)}(x,\cdot)-v_t^{(k)}(x,\cdot)\big)\|_1 + \ldots + \max\big(\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1,$$

$$\|v_t^{(2)}(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1\big) + \max\big(\|v^{(1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1,$$

$$\|v_t^{(1)}(x,\cdot)-V_{ht}(x,\cdot)\|_1\big) \leq d_h(x) + B_h^1(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big), \tag{39}$$

$$\max(\|u^{(k+1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(k+1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1) \leq$$

$$\leq \max(\|u^{(k+1)}(x,\cdot)-u^{(k)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(k+1)}(x,\cdot)-w^{(k)}(x,\cdot)\|_1) + \ldots +$$

$$+\max(\|u^{(2)}(x,\cdot)-u^{(1)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(2)}(x,\cdot)-w^{(1)}(x,\cdot)\|_1) + \max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-$$

$$-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1) \leq B_h(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big). \tag{40}$$

Учитывая равномерную непрерывность функции $f(x,t,u,w,v)$ на $\overline{\Omega}$ и структуру функций $d_h(x), B_h^1(x)$, при $h \to 0$ из оценок (37)–(40) получим, что последовательность функций $\{u^{(k)}(x,t), w^{(k)}(x,t), v^{(k)}(x,t)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ на $\overline{\Omega}$ равномерно сходится к $\{u^*(x,t), w^*(x,t), v^*(x,t)\}$ – решению задачи (1)–(3). Отсюда вытекает, что полупериодическая краевая задача (1)–(3) имеет решение $u^*(x,t)$. Установим следующие оценки, обеспечивающие принадлежность $\{u^*(x,t), w^*(x,t), v^*(x,t)\}$ к $S\big(U_{h_0}(x,t), \rho_{2,h}(x)\big) \times S\big(W_{h_0}(x,t), \rho_{2,h}(x)\big) \times S\big(V_{h_0}(x,t), \rho_{1,h}(x)\big)$:

$$\|v^*(x,\cdot)-V_{h_0}(x,\cdot)\|_1 \leq \|v^*(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_1 + \|V_h(x,\cdot)-V_{h_0}(x,\cdot)\|_1,$$

$$\max\Big(\|u^*(x,\cdot)-U_{h_0}(x,\cdot)\|_1, \|w^*(x,\cdot)-W_{h_0}(x,\cdot)\|_1\Big) \leq$$

$$\leq \max\Big(\|u^*(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1, \|w^*(x,\cdot)-W_h(x,\cdot)\|_1\Big)+$$
$$+\max\Big(\|U_h(x,\cdot)-U_{h_0}(x,\cdot)\|_1, \|W_h(x,\cdot)-W_{h_0}(x,\cdot)\|_1\Big). \qquad (41)$$

Подставляя оценки (22), (39) и (23), (41) соответственно в правую часть (41), имеем

$$\|v^*(x,\cdot)-V_{h_0}(x,\cdot)\|_1 \leq$$
$$\leq \big[B+Ah\Delta^{(1)}\big]\big(1+Ah\big)^{\frac{\omega}{h}}+d_h(x)+c_h(\gamma,x)B_h(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big),$$
$$\max(\|u^*(x,\cdot)-U_{h_0}(x,\cdot)\|_1, \|w^*(x,\cdot)-W_{h_0}\|_1) \leq$$
$$\leq \big[B+A\cdot h\Delta^{(1)}\big]\big(1+A\cdot h\big)^{\frac{\omega}{h}}\omega+B_h(x)\exp\Big(\int_0^x c_h(\gamma,\xi)d\xi\Big).$$

Теорема доказана.

Литература

1 Асанова А. Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 11. – С. 1673-1685.

2 Асанова А. Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1343-1354.

3 Джумабаев Д.С. Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник АН КазССР. – 1988. – № 1. – С. 48-52.

4 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

5 Кабдрахова С.С. О существовании изолированного решения полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения // Математический журнал. – 2007. – Т. 7, № 2(20). – С. 64-73.

6 Кабдрахова С.С. Модификация метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 2(28). – С. 60-62.

7 Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 39-63.

Статья поступила в редакцию 30.03.2017

Kabdrakhova S.S. ON THE EXISTENCE OF A SOLUTION OF SEMI-PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION

Sufficient conditions are obtained that ensure the closeness of the constructed triple of a function by modifying the Euler method to Exact solution of semi-periodic boundary-value problem for nonlinear hyperbolic equation with two independent variables.

Кабдрахова С.С. СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАРТЫЛАЙ ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ

Эйлер әдісінің модификациясы көмегімен тұрғызылған функциялар үштігінің тәуелсіз екі айнымалысы бар сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің дәл шешіміне жақындығының бағалауларын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар алынған.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 150–174.

УДК 512.54+510.674

ON THE COMPUTABILITY OF THE TERMS AND QUOTIENT GROUPS BY THEM IN THE UPPER AND LOWER CENTRAL SERIES OF THE COMPUTABLE GROUPS

I.V. Latkin
East Kazakhstan state technical university
070010, Ust-Kamenogorsk, Serikbaev str., 19, e-mail: lativan@yandex.ru

Annotation: We will be concerned with the complexity of computing the terms in the upper and lower central series of a computable group; more precisely, we will consider the problem of occurrence into commutants and terms in these central series of constructive nilpotent groups. We also will investigate the computability of quotient groups by these subgroups.

Keywords: Computable group, upper and lower central series, quotient group, nilpotent group, computable complexity, problem of occurence.

One can find all other terms of the group theory and their definitions, which are not explained here, in [1]–[5]; for background on Computability theory and constructive algebras, we refer the reader to [6]–[7].

1. The primary definitions and the statement of problem

1.1 Group theory

Let G be a group written multiplicatively. For $x, y \in G$ (the group and its universe are designated by uniform sign), the *commutator of* x *and* y is $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. If H and K are subgroups of G, then $[H, K]$ is the subgroup generated by the commutators $[h, k]$ with $h \in H$ and $k \in K$, i.e, $[H, K] = gr(\{[h, k] \,|\, h \in H,\ k \in K\})$. As usually, the entry $H \trianglelefteq G$ denotes that the H is normal subgroup in the G.

Keywords: *Вычислимая группа, верхний и нижний центральные ряды, фактор группа, нильпотентная группа, сложность вычисления, проблема вхождения.*

2010 Mathematics Subject Classification: 03C57, 03D40, 03D45, 06F15, 20F10, 20F18.

Funding: The author acknowledges support from the Committee on Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project No 3953/GF4).

Definition 1. *The lower central series of a group G is $G = \gamma_1 G \trianglerighteq \gamma_2 G \trianglerighteq \gamma_3 G \trianglerighteq \ldots$ defined inductively by $\gamma_1 G = G$ and $\gamma_{i+1}G = [\gamma_i G, G]$. A group G is a class r nilpotent, if $\gamma_{r+1}G = 1$, and $\gamma_r G \neq 1$. The second term $\gamma_2 G = [G, G]$ is also named as the (first) commutant of the group G, and it is denoted by G'; the i-th term $\gamma_i G$ is sometimes termed the i-th central of the group G.*

The *simple* commutators are defined inductively by $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_n], x_{n+1}]$. A group G is nilpotent iff there is an $r \geqslant 1$ such that $[x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}] = 1$ for all $x_1, \ldots, x_{r+1} \in G$. For the least such r, G is class r nilpotent. Thus all groups that are the class no more than r nilpotent constitute *a variety $\mathfrak{N}_r$ of groups* given by the identity $[x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}] = 1$ [3].

For any normal subgroup H of a group G, there is a natural projection $\pi_H : G \to G/H$ given by $\pi_H(g) = gH$. The *center of G*, denoted $C(G)$, is defined by $g \in C(G)$ iff $gh = hg$ for all $h \in G$. Since $C(G)$ is a normal subgroup; therefore taking the center of $G/C(G)$ and pulling back to G by $\pi^{-1}_{C(G)}$, one gets another normal subgroup of G.

Definition 2. *The upper central series of a group G is $1 = \zeta_0 G \trianglelefteq \zeta_1 G \trianglelefteq \zeta_2 G \trianglelefteq \ldots$ defined inductively by $\zeta_0 G = 1$ and $\zeta_{i+1} G = \pi^{-1}_{\zeta_i G}(C(G/(\zeta_i G)))$. The i-th term $\zeta_i G$ is sometimes termed the i-th hypercenter of the group G.*

A group G is a class r nilpotent iff $\zeta_r G = G$, and r is the least number with such property. It is well known, that if $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_r = G$ is some central series of a class r nilpotent group G, then we have the following scheme of inclusions:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \zeta_0 G & \lhd & \zeta_1 G & \lhd & \ldots & \lhd & \zeta_{r-1} G & \lhd & \zeta_r G & & \\
 & /\!/ & \parallel & & \nabla\!| & & & & \nabla\!| & & \parallel & \backslash\!\backslash & \\
1 & = & G_0 & \lhd & G_1 & \lhd & \ldots & \lhd & G_{r-1} & \lhd & G_r & = & G \\
 & \backslash\!\backslash & \parallel & & \nabla\!| & & & & \nabla\!| & & \parallel & /\!/ & \\
 & & \gamma_{r+1} G & \lhd & \gamma_r G & \lhd & \ldots & \lhd & \gamma_2 G & \lhd & \gamma_1 G & &
\end{array} \qquad (1)$$

The class 1 nilpotent groups are exactly the abelian groups, so the nilpotent class can be thought of as giving a measure of closeness to being abelian.

We recall that *a periodic part* τG of the group G is a set that consists of the elements $g \in G$ for which there is an integer $n > 0$ such that $g^n = 1$; the least such n is called *an order* of element g. When the periodic part τG is trivial, then the group G will named *torsion-free*. It is known that the periodic part of a nilpotent group is a normal subgroup [1]–[3].

1.2 Constructive groups

Let $G = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ be a countable group. A mapping $\nu : D \to G$ of the computable subset D of all natural numbers $\mathbb{N}$ onto universe G is called *a numbering of* G, and a pair (G, ν) is called an *enumerated group*.

Definition 3. *An enumerated group (G, ν) is named constructive (or computable numbered), if there are computable functions f, g such that for all $n, m \in D$, the equalities $\nu(n) \cdot \nu(m) = \nu f(n, m)$ and $(\nu(n))^{-1} = \nu g(n)$ hold, and a set $\nu^{-1}(1)$ is computable. If the set $\nu^{-1}(1)$ is computably enumerable, then the numbering ν will be positive. A numbering ν of group G such that (G, ν) is constructive, is called a constructivization (or computable numbering) of the group G. The group, which has a constructivization, is termed computable.*

Let (G, ν) be an enumerated group, M be a subset in G. This subset is *computable* (or *computably enumerable*) if its numeral set $\nu^{-1}(M)$ is the same.

Given the computably enumerable (c.e.) subgroup H of the enumerated group (G, ν), one can define a numbering μ of H with the help of computable function f that enumerates the numeral set $\nu^{-1}(H)$: $\mu(x) = \nu f(x)$. If the numbering ν is constructive, then so will be μ [6]. Since the periodic part and all terms of lower central series are computably enumerable in every constructive group according to their definition, therefore these subgroups of the computable group are the computable group.

If $H \trianglelefteq G$, then for every numbering ν of the G, one can define a *canonical* (or *natural*) numbering ν/H of the quotient group G/H by $(\nu/H)(m) = \nu(m)/H$ for any $m \in \mathbb{N}$. The numbering ν/H will be positive (computable), when H is computably enumerable (computable) in G under ν [6].

1.3 Problem definition

The problem of occurrence into the terms of the central series and the computability of their quotient groups for constructive groups is interesting because many algebraical properties of nilpotent groups are proved by induction on class nilpotent. The terms of upper or lower series and factor group by them are often considered for this purpose. It is quite natural to expect that this method is applicable for the computable groups, too. These hopes are partly reasonable for R-groups with some additional conditions – see [8]. Furthermore the scheme of inclusions (1) creates the illusion that the ability to solve the problem of occurrence for any of the term of these central series will enable us easily to solve such issues for the others.

It is true for finitely generated groups. Really, let (G,ν) be such a positive enumerated group. Then $\nu/\gamma_n G$ is a positive numbering of the finitely generated nilpotent group $G/\gamma_n G$. Because the word problem for positive enumerated finitely generated nilpotent groups is soluble, the group $(G/\gamma_n G, \nu/\gamma_n G)$ is constructive. Moreover, an element g of G belongs to center iff the equality $[g,x]=1$ holds for each generator x of G. Therefore, one can easily prove by induction on parameter i that the every term $\zeta_i G$ in the upper central series can be effectively calculated in computable finitely generated group G.

Thus, we focus our attention on infinitely generated nilpotent computable groups. We know that the centrals of a constructive group are computably enumerable. Furthermore, the hypercenters are Π^0_1-sets, because $[g \in \zeta_1 G \Leftrightarrow \forall h(gh = hg)]$ & $[g \in \zeta_{i+1} G \Leftrightarrow \forall h([g,h] \in \zeta_i G)]$ holds. Hence, the terms in the upper and lower central series of a computable group have c.e. Turing degree.

Definition 4. *Let $\langle G,\nu\rangle$ be a numbered group and $H \subseteq G$. The Turing degree of unsolvability of the set $\nu^{-1}(H)$ is called the algorithmic complexity of the occurrence problem in the H in the group $\langle G,\nu\rangle$ and is denoted by $T(G,H,\nu)$.*

Everywhere in the sequel, by a degree of set we mean the Turing degree [7]. It is obvious that if the upper central series of a computable group G coincides with its lower one, then $T(G,\gamma_n G,\nu) = T(G,\zeta_n G,\nu) = 0$ for all n and every constructivization ν. In particular, this is true for free nilpotent groups.

Nevertheless, the complexity of the problem of occurrence into the centrals and hypercenters is intricate enough in the general case.

Theorem 1 ([9]). *For each natural number $n \geqslant 2$ there exists a torsion-free nilpotent group $G(n)$ of class n such that for each set of c.e. degrees $\hat{a} = \langle a_2,\ldots,a_n\rangle$ there exists a constructivization $\nu(\hat{a})$ of this group for wich $T(G(n),\gamma_2 G(n),\nu(\hat{a})) = a_2,\ldots,T(G(n),\gamma_n G(n),\nu(\hat{a})) = a_n$.*

Theorem 2 ([9]). *For each natural number $n \geqslant 2$ and an arbitrary set $\hat{a} = \langle a_2,\ldots,a_n\rangle$ of c.e. degrees there exists a computable nilpotent group $G(\hat{a})$, of class n, possessing the following properties:*

(i) $T(G(\hat{a}), \gamma_2 G(\hat{a}), \nu) = a_2, \ldots, T(G(\hat{a}), \gamma_n G(\hat{a}), \nu) = a_n$ *for each constructivization* ν *of* $G(\hat{a})$*; the quotient-group* $G(\hat{a})/\gamma_i G(\hat{a})$ *is computable iff* $a_i = 0$*;*

(ii) for each c.e. degree b *there exists a constructivization* μ *of the group* $G(\hat{a})$ *such that* $T(G(\hat{a}), \tau G(\hat{a}), \mu) = b$*, where* $\tau G(\hat{a})$ *is the periodic part of* $G(\hat{a})$*. In particular, this group is non-autostable.*

Theorem 3 ([10]). *Fix* $n \geqslant 2$ *and c.e. Turing degrees* $d_1, \ldots, d_{n-1}$ *and* $e_2, \ldots, e_n$*. There is a constructive torsion-free group* (G, α) *which is class* n *nilpotent with* $T(G, \zeta_i G, \alpha) = d_i$ *for* $1 \leqslant i \leqslant n-1$ *and* $T(G, \gamma_i G, \alpha) = e_i$ *for* $2 \leqslant i \leqslant n$*. Furthermore,* (G, α) *admits a computable order so this computational independence property holds for computable ordered nilpotent groups as well.*

There is the following comment in [10]: "The construction of $G(\hat{a})$ in Theorem 2 uses torsion elements and hence $G(\hat{a})$ does not admit an order (computable or otherwise). This observation raises the question of whether one can obtain a similar result using a torsion-free nilpotent group, and if so, whether such a group could admit a computable order (in some or possibly all computable copies). Theorem 2 also raises the natural question of whether one can obtain a similar result for the terms in the upper central series, and if so, whether one can do it with a torsion-free (or possibly computably orderable) nilpotent computable group".

Furthermore, it is rather easy to see that the computability of the members of the lower central series is the necessary condition for the computability of nilpotent product in many cases; for instance, the nilpotent product of infinite cyclic group with the computable class two nilpotent group $G(a_2)$ constructed in the proof of Theorem 2 is not computable for every $a_2 > 0$ [11].

1.4 The main result

We will give a partial answer at the second question in [10] with the following below theorem. But let us notice at the beginning that for every constructivization of group G, the complexity of the occurrence problem into a normal subgroup H cannot be equal to zero, if the H or the factor group G/H is not computable. This observation necessitates of the following definition. The tuple $\langle d_1, \ldots, d_{n-1} \rangle$ of degrees is termed *coordinated* with the set $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ consisting of zeroes and unities, if for every $1 \leqslant j \leqslant n-1$, the condition $\alpha_j = \beta_j = 0 \leftrightarrow d_j = 0$ holds.

Theorem 4. *Fix* $n \geqslant 2$ *and a set* $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ *of zeroes and unities. Let* $d_1, \ldots, d_{n-1}$ *and* $e_2, \ldots, e_n$ *be c.e. degrees such that the tuple* $\langle d_1, \ldots, d_{n-1}\rangle$ *coordinated with* $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$. *Then there exists a computable class* n *nilpotent group* $H(\hat{d}, \hat{e})$, *possessing the following properties:*

1) for every computable numbering ν, $T(H(\hat{d}, \hat{e}), \gamma_i H(\hat{d}, \hat{e}), \nu) = e_i$ *holds for* $2 \leqslant i \leqslant n$; *the quotient-group* $H(\hat{d}, \hat{e})/\gamma_i H(\hat{d}, \hat{e})$ *is computable iff* $e_i = 0$;

2) for every computable numbering ν, $T(H(\hat{d}, \hat{e}), \zeta_i H(\hat{d}, \hat{e}), \alpha) = d_i$ *holds for* $1 \leqslant i \leqslant n-1$;

3) for each c.e. degree b, *there exists a constructivization* μ *of the group* $H(\hat{d}, \hat{e})$ *such that* $T(H(\hat{d}, \hat{e}), \tau H(\hat{d}, \hat{e}), \mu) = b$; *so this group is non-autostable;*

4) if $\alpha_j = 1$, *then the hypercenter* $\zeta_j H(\hat{d}, \hat{e})$ *is non-computable; when* $\beta_j = 1$, *then factor-group* $H(\hat{d}, \hat{e})/\zeta_j H(\hat{d}, \hat{e})$ *is non-computable for* $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Proof. See Sections 3–5. As in [9], [10], we break the proof of Theorem 4 into smaller steps, using Proposition 2, its corollary (Subsection 2.3), and the fact that a periodic part and the terms in the upper and lower central series interact nicely with direct products: for any groups G and H, $\gamma_i(G \times H) = \gamma_i G \times \gamma_i H$; $\zeta_i(G \times H) = \zeta_i G \times \zeta_i H$; and $\tau(G \times H) = \tau G \times \tau H$.

Therefore, we will start with the constructing of group $G_u(\hat{d})$, which have Properties 2) and 4) (Sections 3,4, and 5.2); then we will build a group $G_l(\hat{e})$ with Property 1) and 3), modifying the consruction of group $G(\hat{a})$ from [9]. Finally, we will 'assemble' the group $H(\hat{d}, \hat{e})$ in Subsection 5.3.

2. Necessary information from Combinatorial Group theory

2.1 The symbol-combinatoric and numeric approaches to the study of algorithmic problems

Let M be a set of words over some alphabet A. A *Gödel numbering* of the M is a biunivocal mapping γ of the set M into the set of natural numbers $\mathbb{N}$ such that one can effectively recognize if a given natural integer is the number of an element of M, and from a number, one can recover the structure of the corresponding word [6].

Let $Gen(G) = \{g_0, g_1, \ldots\}$ be a set of the generators of the group G; and $Rel(G) = \{R_0(\bar{g}), R_1(\bar{g}), \ldots\}$ be a set of its defining relations; so the group G has presentation

$$G = \langle Gen(G) | Rel(G)\rangle = \langle g_0, g_1, \ldots | R_0(\bar{g}), R_1(\bar{g}), \ldots\rangle, \qquad (2)$$

— see [4]–[5] for further details. One can define the Gödel numbering of the set of all word in an alphabet $\{g_0, g_0^{-1}, g_1, g_1^{-1}, \ldots\}$. Consider an inverse mapping $\nu(\gamma) = \gamma^{-1}$; it already is the numbering of the group G. Such a numbering is named *natural, constructed by Gödel numbering of the words in the given presentation*; or briefly, *natural (Gödel) numbering of given presentation*.

It is obvious that when the set $Gen(G)$ is computable, in particular finite, and the set $Rel(G)$ is computably enumerable, in particular finite, then the numbering $\nu(\gamma)$ will be positive. The word problem is soluble for given group presentation $\langle Gen(G)|Rel(G)\rangle$ iff its natural numbering $\nu(\gamma)$ is constructive. Therefore, it will be convenient for us to describe the group by specifying its sets of generators and defining relations in order to obtain a numbering of group with the requisite algorithmic properties as is done in [9], [10].

We will always consider the quotient-group G/N with the same set of generators as the group G, but with 'additional' defining relations. Namely, if a group G has presentation of the kind (2), and $N = gr_G\{S_0(\bar{g}), S_1(\bar{g}), \ldots\}$, then $G/N \cong \langle g_0, g_1, \ldots | R_0(\bar{g}), R_1(\bar{g}), \ldots; S_0(\bar{g}, S_1(\bar{g}), \ldots\rangle$ hold [5]. So, every word in the generators of group G can regarded as both an element of the G and an element of its factor-group. We will always specify these cases below.

Nevertheless, we will apply the Hall-Witt commutator identities [1]–[5] as a rule without special comment.

2.2 Basic commutators

We recall the definition of the basic commutators for the free (or free class r nilpotent) group F on the set $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ [1], [5]. Fix an order on X, for instance, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$.

We generate a set $BC(X) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} BC_i(X)$ of basic commutators, assign weights to these basic commutators and define an order on them. The weight of a basic commutator c is denoted by $w(c)$.

1. The letters in X are the basic commutators of weight 1, i.e., $BC_1(X) = X$.

2. Assume that the basic commutators of weight $j \leqslant k$ have been defined and we have produced an order of them. A commutator $[c, d]$ is a basic commutator of weight $k+1$ (i.e., $[c, d] \in BC_{k+1}(X)$) iff (i) c and d are basic commutators and $w(c)+w(d) = k+1$; (ii) $d < c$; (iii) if $c = [u, v]$, then $v \leqslant d$.

We assign $x < y$, when x and y are the basic commutators, $w(x) \leqslant k$, and $w(y) = k+1$. We define the order on the basic commutators of weight $k+1$ by

$[c, d] < [u, v] \Leftrightarrow (c, d) <_{lex} (u, v)$, where $<_{lex}$ is the lexicographic order.

Let us notice that firstly, if $[a, b^{(1)}] \rightleftharpoons [a, b]$ is the basic commutator, then for any j, the commutator of the kind $[a, b^{(j+1)}] \rightleftharpoons [[[a, b^{(j)}], b]$ will be basic too; we define $[a, b^{(0)}] \rightleftharpoons a$; secondly, for Gödel numbering of group F, a set of numbers of all the basic commutators and a set of numbers of basic commutators of weight j are computable sets.

The following normal form theorem was stated for finitely generated free nilpotent groups [1], [5], but it holds for infinitely generated groups too.

Theorem 5 ([1], [5]). *Let F be a free class r nilpotent group on the set of generators $x_0, x_1, \dots$ with a fixed order on the basic commutators. Each $y \in F$ can be uniquely written as a finite product $c_0^{m_0} \cdot c_1^{m_1} \cdots c_l^{m_l}$, where c_i is a basic commutator, $c_i < c_{i+1}$, and $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Furthermore, each lower central factor $\gamma_i F / \gamma_{i+1} F$ is a free abelian group on the basic commutators of weight i.*

2.3 Auxiliary statements

Let F be a free nilpotent group; $BC_{\geqslant j}(X)$ be a set of the basic commutators, whose weight is not less than j.

Proposition 2.1 (The generalized Hall, Jr. theorem). *Let $BC_k(R)$ be a set $BC_k(X) \cap gr_F(R)$, where $gr_F(R)$ is a normal subgroup generated by the subset R in the F, and $R \subset BC_{\geqslant j}(X)$.*
(i) If $k \geqslant j \geqslant 2$, then $BC_k(R) = \{d \,|\, d \in BC_k(X)$ and record of d contains some commutator $c \in R\}$; and $BC_k(R) = \varnothing$ for $k < j$.
(ii) Each $y \in F/gr_F(R)$ can be uniquely written as a finite product $c_0^{m_0} \cdot c_1^{m_1} \cdots c_l^{m_l}$, where $c_i \in BC(X) \setminus BC(R)$; $c_i < c_{i+1}$; and $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
(iii) Each lower central factor $H_k = \gamma_k(F/gr_F(R))/\gamma_{k+1}(F/gr_F(R))$ is a free abelian group on the set $BC_k(X) \setminus BC_k(R)$.

Proof. (i) We have $g \in gr_F(R)$ iff there are $c_1, \dots, c_t \in R$ and $h_1, \dots, h_t \in F$ such that $g = c_1^{h_1} \cdots c_t^{h_t}$. Further, $c^h = c \cdot [c, h]$; $c^{-h} = h^{-1} c^{-1} h = [c, h]^{-1} \cdot c^{-1}$; $c^{h^{-1}} = c \cdot [c, h^{(2)}] \cdot [c, h^{(4)}] \cdot \ldots \cdot [c, h^{(3)}]^{-1} \cdot [c, h]^{-1}$; and $c^{-h^{-1}} = h c^{-1} h^{-1} = [c, h] \cdot [c, h^{(3)}] \cdot \ldots \cdot [c, h^{(4)}]^{-1} \cdot [c, h^{(2)}]^{-1} \cdot c^{-1}$ (the products in the third and fourth equations are finite because $[x, y^{(k)}] = 1$ for all k greater than or equal to the class of the nilpotent group) – sees Subsection 11.1 in [1] or Lemma 2.4 in [10]. Moreover, if $h \in X$ and $c \in BC_{\geqslant 2}$, then each commutator $[c, h^{(k)}]$ is basic.

(ii) and (iii). Let y be a word in the generators X. Consider this word as an element of the free group F, then by Theorem 5, it can be uniquely written in the form $c_0^{m_0} \cdot c_1^{m_1} \cdots c_l^{m_l}$, where c_i is a basic commutator, $c_i < c_{i+1}$, and $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. In accordance with homomorphism theorems, we have that $H_k \cong \gamma_k F/(\gamma_{k+1}F \cdot (gr_F(R) \cap \gamma_k F))$. Thus, the H_k arrises from the free abelian group $\gamma_k F/\gamma_{k+1}F$, when all generators that belong to the set $BC_k(R)$ are 'unwritten' in the last group. It is clear that the remaining generators form a free basis of the group H_k. Therefore, we can remain in the record of element y only the basic commutators that do not belong to the $BC(R)$.

We identify an *external direct* product $G_1 \times \ldots \times G_k$ with *inner direct* product (as that is understood in [3]), specifically each efficient G_i is identified with its copy in the group G.

Proposition 2.2. *Let G be a direct product $G_1 \times \ldots \times G_k$; and H be a subdirect decomposible subgroup in G, i.e., there exist subgroup $H_1 \leqslant G_1, \ldots, H_k \leqslant G_k$ such that $H = H_1 \times \ldots \times H_k$. Suppose that λ is a computable numbering of G, and the numeral set $\lambda^{-1}(G_i)$ of every multiplier G_i is computable. Then $T(G,H,\lambda) = \sup\{T(G_i,H_i,\lambda_i) | \, 1 \leqslant i \leqslant k\}$, where $\lambda_i = \lambda \upharpoonright (\lambda^{-1}(G_i))$ is the restriction of numbering λ; in particular, the complexity of periodic part and each term in the lower and upper central series is the join of degrees the corresponding subgroups in the G_i for every such constructivization λ.*

Proof. For each given element, whose number is m, one can effectively find the numbers $m_1, \ldots, m_k$ such that $\lambda m = \lambda m_1 \cdot \ldots \cdot \lambda m_k$, since all the set $\lambda^{-1}(G_i)$ are computable. These elements $\lambda m_1, \ldots, \lambda m_k$ are found unambiguously, because $G_1 \times \ldots \times G_k$ is the direct product. So, the problem of whether an element belongs to the subgroup H reduces to k the questiens of whether the element λm_j belongs to subgroup H_j.

Corollary 1. *Suppose that H is a subdirect decomposible subgroup in a group $G = G_1 \times \ldots \times G_k$. Let B_i be a set of pseudo-generators of the group G_i for $1 \leqslant i \leqslant k$, i.e., $B_i = \{b_j^m \cdot h | \, j \in T_i;\ R_i(m,j);\ h \in \gamma_2 G_i$ for $b_j \notin \zeta G_i$; and $h = 1$ for $b_j \in \zeta G_i\}$, where R_i is some predicat, T_i is any set; and B_i contains a generating set $\{b_j | \, j \in T_i\}$ of group G_i. If μ is computable numbering of G and each of the numeral sets $\mu^{-1}(B_i)$ is c.e., then $T(G,H,\mu) = \sup\{T(G_i,H_i,\mu_i) | \, 1 \leqslant i \leqslant k\}$.*

Proof. Since the set of pseudo-generators for every subgroup G_i is c.e., one can enumerate the whole of this subgroup and its complement; therefore each numeral sets $\mu^{-1}(G_i)$ is computable.

3. Computable group, whose factor-group by the last proper hypercenter is non-computable

Theorem 6. *For each natural $r \geqslant 2$ and every c.e. degree d, there exists a computable metabelian class r nilpotent group $G_r(M)$ such that for each of its constructivization λ, $T(G_r(M), \tau G_r(M), \lambda) = T(G_r(M), \gamma_j G_r(M), \lambda) = T(G_r(M), \zeta_i G_r(M), \lambda) = 0$, where $1 \leqslant i \leqslant r-2$, $2 \leqslant j \leqslant r$; Nevertheless, $T(G_r(M), \zeta_{r-1} G_r(M), \lambda) = d$, and a factor group $G_r(M)/\zeta_{r-1}G_r(M)$ is computable iff $d=0$. However, the hypercenter $\zeta_{r-1}G_r(M)$ is a computable group.*

Proof. Let U and W be infinite computable set, and $F(C, A)$ be a free class r nilpotent group on the set $C \cup A$, where $A = \{a_n | \, n \in U\}$ and $C = \{z_k | \, k \in W\}$. We specify the following order on $C \cup A$: $z_{i_0} < z_{i_1} < z_{i_2} < \ldots < a_{j_0} < a_{j_1} < \ldots$. Since $F(C, A)$ is class r nilpotent, all commutators of weight $> r$ are equivalent to the identity, so we consider only basic commutators of weight $\leqslant r$.

Let us consider the following set of the basic commutators:

$$\begin{aligned} R \rightleftharpoons\ & \{[a_n, a_m] | \, n, m \in U\} \ \cup \ \{[z_n, z_k] | \, n, k \in W\} \ \cup \\ \cup\ & \{c | \, c \text{ contains more than two different generators}\} \cup \\ \cup\ & \{[d, e] \, | \, \text{both d and e contains a generator from set } A\}. \end{aligned} \tag{3}$$

It is easy to see that for $i \geqslant 2$, $BC_i(H) \rightleftharpoons BC_i(C, A) \setminus BC_i(R) = \{[a_n, z_k^{(i-1)}] | \, k \in W, \ n \in U\}$ and $BC_1(H) = A \cup C$; furthermore, the $BC_i(H)$ is a basis of free abelian group $\gamma_i H_r / \gamma_{i+1} H_r$ according to Proposition 2.1, where $H_r \rightleftharpoons F(C, A)/gr_{F(C,A)}(R)$.

Lemma 1. *Let (A) and (C) be subgroups, which are respectively generated by the sets A and C in the group H_r.*
(i) (A) and (C) are the free abelian group on the sets A and C, accordingly.
(ii) The mutual commutant $[A, C]$ of the subgroups (A) and (C) has trivial intersection with each of these groups; and $[A, C] \cong \gamma_2 H_r$ is abelian group.
(iii) For $1 \leqslant i \leqslant r$, $\zeta_{r-i+1} H_r = \gamma_i H_r$.

Proof. (i) Consider a natural projection $\varphi : H_r \to H_r / gr_{H_r}(C)$. According to Subsection 2.1, we must add the defining relations $\{z_k \, | \, k \in \mathbb{N}\}$ to the set R

in order to obtain a presentation of factor group $H_r/gr_{H_r}(C)$. Now we apply the Tietze transformations to obtained presentation [5]: firstly, we replace each generator z_k with 1 in all other relations, which contain this generators. All these relations are the commutators, therefore they become trivial. Secondly, we delete the trivial generators z_k and trivial relations. Finally, we obtain that the group $H_r/gr_{H_r}(C)$ is isomorphic to $\tilde{A} \rightleftharpoons \langle A \mid \{[a_i, a_j] \mid i, j \in U\}\rangle$, which is free abelian group. It is isomorphic to the (A), because the φ images the latter onto the $\tilde{A}$, and the $\varphi \restriction (A)$ is a biunique function.

The statement about the group (C) can be proved in a like manner.

(ii) We again consider a canonical homomorphism of the group H_r onto its quotient-group $H_r/[A, C]$. Using the Tietze transformations, we obtain that this factor group is isomorphic to $\langle A \cup C \mid \{[a_i, a_j] \mid i, j \in U\} \cup \{[z_k, z_l] \mid k, l \in W\}\rangle \cong (A) \times (C)$. Hence, $(A) \cap [A, C] = (C) \cap [A, C] = 1$ and $\gamma_2 H_r \leqslant [A, C]$. It is easy to see that the last group is abelian.

(iii) According to scheme of inclusions (1), $\gamma_{i+1} H_r \leqslant \zeta_{r-i} H_r$. Let g be an element in $\gamma_i H_r \setminus \gamma_{i+1} H_r$ for $i < r$. By Proposition 2.1, there is a basic commutator $h = [a_n, z_k^{(i-1)}]$, which occurs in the record of g and $[h, z_k^{(r-i)}] \neq 1$. Therefore, $[g, z_k^{(r-i)}] \neq 1$ too, and $g \notin \zeta_{r-i} H_r$. Lemma is proved.

Let d be c.e. degree. We select so infinite a subset M in the set U that the M belongs to the class Π^0_1 of the arithmetical hierarchy, has a degree d, and $U \setminus M$ is infinite [7]. There exists a biunique partially computable function f that maps the set W onto the $U \setminus M$; so $\forall n \in U (n \in U \setminus M \Leftrightarrow \exists j (f(j) = n))$.

We suppose that r is the least element in M, and $U \cap W = \varnothing$. Let D_r be a subgroup (in the H_r) that are generated by the set $\{[a_n, z_k^{(r-1)}]^{p_n} \mid n \neq r \wedge f(k) \neq n\} \cup \{[a_r, z_k^{(r-1)}]^{p_k} | k \in W\}$, where p_k is $(k+1)$-th prime number.

The D_r is a subgroup in $\gamma_r H_r \leqslant \zeta_1 H_r$, therefore it is normal. Since the subgroups (A) and (C) have trivial intersection with the mutual commutant $[A, C]$, these subgroups are isomorphically embedded into factor-group $G_r(M) \rightleftharpoons H_r/D_r$. According to usual algebraical practice, we will identify the groups (A) and (C) themselves with their images in $G_r(M)$.

Since the $\gamma_r H_r$ is a free abelian group on the set $BC_r(H) = \{[a_n, z_k^{(r-1)}] | k \in W,\ n \in U\}$ in accordance with Proposition 2.1(iii), and the group D_r is generated by the degrees of these generators, therefore

$$\tau G_r(M) = \prod_{f(k)\neq n} B_{n,k}; \qquad \gamma_r G_r(M) = \tau G_r(M) \times \prod_{n=f(k)} [a_n, z_k^{(r-1)}], \tag{4}$$

where $B_{n,k} = gr([a_n, z_k^{(r-1)}])/([a_n, z_k^{(r-1)}]^{p_n}) \cong \mathbb{Z}_{p_n}$ for $n \in U \wedge k \in W \wedge n \neq r \wedge f(k) \neq n$; and $B_{n,k} = gr([a_r, z_k^{(r-1)}])/([a_r, z_k^{(r-1)}]^{p_k}) \cong \mathbb{Z}_{p_k}$ for $k \in W$.

Lemma 2. *Let $r \geqslant 3$ and D_{r-1} be a subgroup (in $G_r(M)$) generated by the set $\{[a_n, z_k^{(r-2)}]^{p_n} \mid n \neq r \wedge f(k) \neq n\} \cup \{[a_r, z_k^{(r-2)}]^{p_k} | k \in W\}$. Then $\zeta G_r(M) = D_{r-1} \cdot \gamma_r G_r(M)$ for $r > 2$; $\zeta G_2(M) = (A)^M \cdot \gamma_2 G_2(M)$, where $(A)^M$ is the subgroup generated by the set $\{a_n^{p_n} \mid n \in M \setminus \{r\}\}$.*

Proof. We show that the center of the group $G_r(M)$ contains all the elements of the last central $\gamma_r G_r(M)$ and D_{r-1} (or $(A)^M$). Indeed, the equality $[[a_n, z_k^{(r-2)}]^{p_n}, x] = [a_n, z_k^{(r-2)}], x]^{p_n}$ holds, because H_r is the class r nilpotent group. Now for $r > 2$ and $n \neq r$, if $x = z_k$, and $n \neq f(k)$, then $[a_n, z_k^{(r-2)}], x]^{p_n} = 1$, since it is a relation of group $G_r(M)$; when $x \neq z_k$, then the $[a_n, z_k^{(r-2)}], x]$ contains three generators or two the entries of the generators from the set A, and so it belongs to the set R. The case when $n = r$ is investigated similarly. If $r = 2$ and $n \in M \setminus \{r\}$, then $\forall k (n \neq f(k))$ holds; therefore, for every $l, n \in U$ and $k \in W$, $[a_n, a_l] = [a_n^{p_n}, z_k] = [a_n, z_k]^{p_n} = 1$ are the relations of group $G_r(M)$.

Let g be an element of the $\zeta G_r(M)$ and x be a generator. Then the commutator $[g, x]$ belongs to subgroup $D_r < \gamma_r H_r$, if it is considered as an element in group H_r. Hence, $g \in \gamma_{r-1} H_r$. By Proposition 2.1, we can uniquely write it through the basic commutators from $BC_{\geqslant r-1}(H)$: $g = v_1^{\alpha_1} \cdots v_t^{\alpha_t} \cdot h$, where $h \in \gamma_r H_r$. We have $[g, x] = [v_1^{\alpha_1}, x] \cdots [v_t^{\alpha_t}, x] = [v_1, x]^{\alpha_1} \cdots [v_t, x]^{\alpha_t}$.

Case $r > 2$. If $x \neq z_k$, where z_k is generator occurring in the record v_i, then the commutator $[v_i, x]$ contains more than two generators or two the entries of the generators from the set A, and so it equals to 1.

Let $x = z_k$ be included in two or more commutators v_i and v_j. When they contain the different elements as the second generators, then between the basic commutators $[v_i, x]$ and $[v_j, x]$ will not occur nontrivial relations in accordance with Decomposition (4). If the second generators are uniform, then v_i and v_j will be equal too. Thus, for each v_i, one can choose a generator x such that the commutator $[v_i, x]$ is basic, and it is different from the other basic commutators $[v_j, x]$. Therefore for these v_i and x, the inclusion $[g, x] \in D_r$ implies $[v_i, x]^{\alpha_i} \in D_r$. This means that either $[v_i, x] = [a_n, z_k^{(r-1)}]$ and $n \neq r$ for $f(k) \neq n$ or $[v_i, x] = [a_r, z_k^{(r-1)}]$. Moreover, it follows from $[v_i, x]^{\alpha_i} \in D_r$, (4) and (5) that α_i is divisible by p_n or p_k (briefly: $p_n | \alpha_i \vee p_k | \alpha$).

Case $r = 2$. When some v_i is a_n for $n \in U \setminus M$, then there is a natural k, such that $f(k) = n$, and hence $[g, z_k] = [a_n, z_k]^{\alpha_i} \notin D_2$. If there are an i and a k such that $v_i = z_k$, then $f(k) = n$, and so $[g, a_n] = [a_n, z_k]^{-\alpha_i} \notin D_2$ again, since the function $f : W \to U \setminus M$ is total on the W. For $v_i = a_r$, we choose a k such that $p_k \nmid \alpha_i$; now $[g, z_k] = [a_r, z_k]^{\alpha_i} \notin D_2$ holds.

Thus, all the elements z_k have infinite order in the factor group of $G_2(M)$ by its center; and the element a_n has order p_n in this factor group, iff $n \in M \setminus \{r\}$.

Corollary 2. *For every $r \geqslant 3$, $G_r(M)/\zeta G_r(M) \cong G_{r-1}(M)$.*

Proof. In order to obtain a presentation of quotient-group $G_r(M)/\zeta G_r(M)$, we must add the generators of the subgroup $D_{r-1} \cdot \gamma_r G_r(M)$ to the defining relations of the group $G_r(M)$.

Corollary 3. *For every $r \geqslant 2$, $G_r(M)/\zeta_{r-1} G_r(M) \cong \big((A)/(A^M)\big) \times (C)$.*

Proof. It is evident from the previous corollary and the last paragraph of the lemma proof.

Lemma 3. *The group $G_r(M)$ has a soluble word problem, when it is presented by the generating set $A \cup C$ and the defining relations $R \cup \{[a_n, z_k^{(r-1)}]^{p_n} | \, n \neq r \wedge f(k) \neq n\} \cup \{[a_r, z_k^{(r-1)}]^{p_k} | k \in W\}$ in the variety $\mathfrak{N}_r$.*

Proof. Every word g in the generators a_n and z_k can be considered as an element of the group H_r. We can write it uniquely and effectively in the form $g = bch_2 \ldots h_r$, where $b \in (A)$, $c \in (C)$, and $h_i \in \gamma_i H_r$ is a finite product of the integer degrees of the basic commutators from $BC_i(H)$. Moreover, $g = 1$ iff $b = 1$, $c = 1$, and $h_2 = h_3 = \ldots = h_r = 1$. The first r equalities are verified simply, because the (A),(C), and each $\gamma_i H_r / \gamma_{i+1} H_r$ (for $2 \leqslant i \leqslant r-1$) are free abelian groups by Proposition 2.1 and Lemma 1(i). We have seen in the proof of Lemma 2 that the question of whether h_r belongs to the group D_r reduces to the verification of finite number of equations of the kind $f(k) = n$.

Lemma 4. *The quotient-group $G_r(M)/\zeta_{r-1}G_r(M)$ is non-computable, if $d \neq 0$.*

Proof. It is easy to see that if G is a computable group and U is a computable set, then $L_1(G;U) \rightleftharpoons \{n \in U | \exists y(y^{p_n} = 1 \wedge \forall k(1 \leqslant k \leqslant p_n - 1 \to y^k \neq 1))\}$ is a c.e. set. However, we have $L_1\big(G_r(M)/\zeta_{r-1}G_r(M)\big) = M \setminus \{r\}$ by Corollary 3; and the set M is the complement to computably enumerable,but non-computable set, when the degree d is not equal to 0 [7]. Lemma is proved.

Notice that the product $\zeta_{r-1}G_r(M) = (A)^M \cdot \gamma_2 G_r(M)$, is direct; a commutant is a computable group, if so is the whole of group; and $(A)^M = gr(\{a_n^{p_n} \mid n \in M \setminus \{r\}\}) \cong \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}^{(k)}$ is computable, where $\mathbb{Z}^{(k)} \cong \mathbb{Z}$ for each k. Therefore, $\zeta_{r-1}G_r(M)$ is computable, since it is the direct product of computable groups.

Let λ be a constructivization of group $G_r(M)$. We fix one of the λ-numbers of element a_r, for example v. One can enumerate all the elements of the kind $z_k^j \cdot h_0$ for $p_k \nmid j$ and $h_0 \in \gamma_2 G_r(M)$, because they must obey the conditions: $[\lambda v, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}]^{p_k} = 1$, but $[\lambda v, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}] \neq 1$. Now, it is possible to enumerate all the elements that are of the form $a_n^i \cdot h$ for $p_n \nmid i$ and $n \neq r$, where $h \in \gamma_2 G_r(M)$. To this purpose, we search a number k such that $f(k) \neq n$ for given n. Then the required elements commute with λv and $[a_n^i \cdot h, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}]^{p_n} = 1$, but $[a_n^i \cdot h, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}] \neq 1$, provided that $p_n \nmid j$.

It is obvious that $[a_n^i h, (z_k^j h_0)^{(t-1)}] = [a_n, z_k^{(t-1)}]^{ij^{t-1}} \cdot g \in \gamma_t G_r(M) \setminus \gamma_{t+1} G_r(M)$ for some $g \in \gamma_{t+1} G_r(M)$. Hence, it is easy to obtain an algorithm that enumerates all the elements, which of the form gh, where $g \notin \gamma_{t+1} G_r(M)$ and $h \in \gamma_{t+1} G_r(M)$, i.e., all elements, which are not included in the $(t+1)$th central of group $G_r(M)$, and so $T(G_r(M), \gamma_{t+1}G_r(M), \lambda) = 0$ for $1 \leqslant t \leqslant r-1$.

Furthermore, one can design an algorithm, which enumerates each subgroup $D_{m-1} \cdot \gamma_m G_r(M)$ for $3 \leqslant m \leqslant r$, using the elements $a_n^i \cdot h$ and $z_k^j \cdot h_0$ and checking the equality $f(k) = n$ sometimes. Because this subgroup coincides with the hypercenter $\zeta_{r-m+1} G_r(M)$, which is the complement to c.e. set, we have $T(G_r(M), \zeta_{r-m+1}G_r(M), \lambda) = 0$ for these m.

We know how to list the elements of the kind $a_n^i \cdot h$ or $z_k^j \cdot h_0$, where i is not divisible by p_n. If the $n \notin M$, then $[a_n^i \cdot h, z_k^{(r-1)}]^{p_n} = [a_n, z_k^{(r-1)}]^{ip_n} \neq 1$ holds for $f(k) = n$. Therefore, when $n \notin M$, there exists an element g such that $[a_n^i h, g^{(r-1)}]^{p_n} \neq 1$. Since the elements of the form $[a_n, z_k^{(r-1)}]^i = [a_n^i h, (z_k h_0)^{(r-1)}]$, where $f(k) = n$ and $p_n \nmid i$, generate the difference between $\gamma_r G_r(M)$ and $\tau G_r(M)$, we obtain that $T(G_r(M), \tau G_r(M), \lambda) = 0$.

Suppose, we can solve the question of whether any number belongs to the set M. The occurence problem into the last hypercenter reduces to the same questiens about the elements of the kind $a_n^i h$ by Corollary 3. The element of the form $a_n^i h$ belongs to the $\zeta_{r-1}G_r(M)$ iff $n \notin M \setminus \{r\}$. So, in this case, this hypercenter is c.e. subgroup, because it is generated by all such elements and commutant, i.e., $T(G_r(M), \zeta_{r-1}G_r(M), \lambda) \leqslant_T d$. Conversely, if we can solve the question of whether the $\zeta_{r-1}G_r(M)$ contains the elements of the kind $a_n^i h$, then the set M is converted into computable.

4. The computable nilpotent group, whose the last proper hypercenters are non computable

The particular case of the following theorem was proved for $r=2$ in [12].

Theorem 7. *For each natural $r \geqslant 2$ and every c.e. degree e there exists a computable metabelian class r nilpotent group $G_r(K)$ such that for each of its constructivization λ, $T(G_r(K), \tau G_r(K), \lambda) = T(G_r(K), \gamma_j G_r(K), \lambda) = T(G_r(K), \zeta_i G_r(K), \lambda) = 0$, where $1 \leqslant i \leqslant r-2$, $2 \leqslant j \leqslant r$. At the same time, $T(G_r(K), \zeta_{r-1}G_r(K), \lambda) = e$, and the last hypercenter $\zeta_{r-1}G_r(K)$ is computable iff $e=0$, but the factor group by this hypercenter is a computable group.*

Proof. Let us consider a free class r nilpotent group $F(x_n, y_n, z_k)$ on the set $\{x_n, y_n, z_k\}$ for some $k, n \in \mathbb{N}$ and define the following subset of the basic commutators: $S \rightleftharpoons \{c|\, c$ contains generator y_n *twice*$\} \cup \{[x_n, y_n],\ [x_n, z_k]\}$.

Let $\hat{E}$ be a quotient-group of $F(x_n, y_n, z_k)$ by $gr_{F(x_n,y,z_k)}(S)$. As before (see Lemma 1), it is sufficiently simply proved that the subgroup generated by the set $\{x_n, y_n\}$ in the $\hat{E}$ is the free abelian group; each group $\gamma_i\hat{E}/\gamma_{i+1}\hat{E}$ is infinite cyclic, its generator is $[y_n, z_k^{(i-1)}]$ by Proposition 2.1.

We introduce the additional relations $\hat{S} \rightleftharpoons \{x_n^{p_{2n+1}p_{2n}},\ y_n^{p_{2n}^2}, x_n^{-p_{2n+1}}y_n^{p_{2n}}\}$. If $E_{n,k} \rightleftharpoons \hat{E}/gr_{\hat{E}}(\hat{S})$, and $\varphi : E_{n,k} \to E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}(z)$ is a canonical homomorphism, then the subgroup generated by set $\{x_n, y_n\}$ in $E_{n,k}$ is isomorphically mapped onto $\langle x_n, y_n |\, [x_n, y_n], x_n^{p_{2n+1}p_{2n}}, y_n^{p^2 2n}, x_n^{-p_{2n+1}}y_n^{p_{2n}}\rangle$, which is the direct product of the finite cyclic groups (x_n) and (y_n) with the amalgamated subgroup generated by the element $x_n^{-p_{2n+1}}y_n^{p_{2n}}$; and so the orders of the elements x_n and y_n are accordingly equal to $p_{2n+1}p_{2n}$ and p_{2n}^2 in group $E_{n,k}$, too.

Lemma 5. *Each central $\gamma_c E_{n,k}$ of group $E_{n,k}$ is a cyclic group of order p_{2n}.*

Proof. Really, $[y_n, z_k^{(c-1)}]^{p_{2n}} = [y_n^{p_{2n}}, z_k^{(c-1)}] = [x_n^{p_{2n+1}}, z_k^{(c-1)}] = 1$. Let us show that $[y_n, z_k^{(c-1)}] \neq 1$ for $1 \leqslant c \leqslant r$ by induction on the parametr c. This is true for $c = 1$, because $E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}(z_k) \models y_n \neq 1$. Suppose that this is true for $c = i$. We have $E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}(x_n) \cong \langle y_n, z_k \,|\, \{y_n^{p_{2n}}\} \cup \{d \,|\, \text{d is basic commutator and contains generator } y_n \textit{ twice}\}\rangle$ in the variety $\mathfrak{N}_r$, and also $E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}(x_n) \models [y_n, z_k^{(i-1)}]^{p_{2n}} = 1$. The subgroup H_i, of group $E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}(x_n)$, generated by the $[y_n, z_k^{(i-1)}]$ and z_k is class $r-i+1$ nilpotent.

Let us consider the following (3×3)-matrices

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & YZ^{i-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \widehat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

over the ring $\mathbb{Z}_{p_{2n}}[Y, Z]$. The group $(\widehat{Y}, \widehat{Z})$ is class two nilpotent and the equalities $\widehat{Y}^{p_{2n}} = \widehat{Z}^{p_{2n}} = 1$ hold, i.e., the stronger identities and relations hold true in this group than in group H_i. Therefore the mapping $z_k \mapsto \widehat{Z}$, $[y_n, z_k^{(i-1)}] \mapsto \widehat{Y}$ extends to a homomorphism φ of the group H_i onto $(\widehat{Y}, \widehat{Z})$ [5]. Hence, we obtain that

$$\varphi([y_n, z_k^{(i)}]) = \varphi([[y_n, z_k^{(i-1)}], z_k]) = [\widehat{Y}, \widehat{Z}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & YZ^i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

It follows from this that the inequality $[y_n, z_k^{(i)}] \neq 1$ holds too.

Lemma 6. *For $1 \leqslant m \leqslant r-1$, $\zeta_m E_{n,k} = gr(x_n) \times \gamma_{r-m+1} E_{n,k}$.*

Proof. It is obvios that $\zeta_m E_{n,k} \geqslant gr(x_n) \times \gamma_{r-m+1} E_{n,k}$. If an element g does not belong to $gr(x_n) \times \gamma_{r-m+1} E_{n,k}$, then one can simply prove that $[g, z_k^{(m)}] \neq 1$, using the inequalities $[y_n, z_k^{(c-1)}] \neq 1$ for $1 \leqslant c \leqslant r$.

Corollary 4. *Every proper hypercenter $\zeta_m E_{n,k}$ contains only elements, whose orders are the products of the different primes in the first degree.*

Let V and W be computable infinite sets, and $(V \oplus V) \cap W = (\{2n \,|\, n \in V\} \cup \{2n+1 \,|\, n \in V\}) \cap W = \varnothing$. We select such a c.e. subset K in V that has given degree e; then for every natural number n, $n \in K$ iff $(\exists j \in W)(g(j) = n)$, where g is a biunique partially computable function from the W onto K [7].

Finally, we define the desired group $G_r(K)$ by a generator set, which is an union of the sets $\{a_r\}$, $X = \{x_i | \, i \in V\}$, $Y = \{y_i | \, i \in V\}$, and $C = \{z_k | \, k \in W\}$, and the following defining relations in the variety $\mathfrak{N}_r$:

$$\{c \,|\, \text{c is a basic commutator, } w(c) \geqslant 2, \text{ and c is different from } [y_n, z_k^{(j-1)}] \; or \; [a_r, z_k^{(j-1)}] \; for \; 2 \leqslant j \leqslant r, \; n \in V, \; and \; k \in W\} \; \cup \tag{5}$$

$$\cup \; \{\text{the defining relations of all the groups } E_{n,k} \; for \; n \in V \; and \; k \in W\} \; \cup \tag{6}$$

$$\cup \; \{[a_r, z_k^{(r-1)}]^{p_k} | k \in W\} \cup \; \{[y_n, z_k^{(r-1)}] | \, n \in V \wedge k \in W \wedge g(k) \neq n\}. \tag{7}$$

From this it follows that the relations $\{[a_r, x_m] | \, m \in V\} \cup \{[a_r, y_m] | \, m \in V\} \cup \{[x_n, x_m] | \, n, m \in V\} \cup \{[y_n, y_m] | \, n, m \in V\} \cup \{[x_n, y_k] | \, n, k \in V\} \cup \{[x_n, z_k] \,|\, n \in V, k \in W\} \cup \{[z_n, z_k] | \, n, k \in W\}$ hold true in the $G_r(K)$, too.

It is easy to see that each subgroup $B_{n,k}$ generated by the elements x_n, y_n, and z_k is isomorphic to group $E_{n,k}$ for $g(k) = n$; and $B_{n,k} \cong E_{n,k}/\gamma_r E_{n,k} = E_{n,k}/gr_{E_{n,k}}([y_n, z_k^{(r-1)}])$ for $g(k) \neq n$. Hence, we obtain that

$$\gamma_r G_r(K) = \prod_{n \in K, g(k) = n} ([y_n, z_k^{(r-1)}]) \times \prod_{k \in W} ([a_r, z_k^{(r-1)}])/([a_r, z_k^{(r-1)}]^{p_k}); \tag{8}$$

$$\gamma_j G_r(K)/\gamma_{j+1} G_r(K) \cong \prod_{n \in V, k \in W} ([y_n, z_k^{(j-1)}]) \times \prod_{k \in W} ([a_r, z_k^{(j-1)}]); \tag{9}$$

$$\zeta_{r-j} G_r(K) = \gamma_{j+1} G_r(K) \times \prod_{n \in V \setminus K, k \in W} ([y_n, z_k^{(j-1)}]) \times \prod_{n \in V} (x_n), \tag{10}$$

for $2 \leqslant j \leqslant r-1$. Moreover,

$$\zeta_{r-1} G_r(K) = \gamma_2 G_r(K) \times \Big[\prod_{n \in V \setminus K} (y_n) \cdot \prod_{k \in V} (x_k) \Big]. \tag{11}$$

In accordance with Decompositions (8),(9) and Lemma 5, the commutant $\gamma_2 G_r(K)$ contains only the elements, whose orders are either the products of the various prime numbers in the first degrees or infinite. The orders of the elements in group $\prod_{n\in V}(x_n)$ are the products of the different primes in the first degrees, too. However, an order of element y_n is p_{2n}^2 — see the paragraph before Lemma 5. Therefore, the set $L_2(\zeta_{r-1}G_r(K);V)=\{n\in V\,|\,$there exists an element y, in $\zeta_{r-1}G_r(K)$, such that its order equals to $p_{2n}^2\}$ coincides with $V\setminus K$. At the same time it is clear that the set $L_2(G,V)$ will be c.e., if the group G and the set V are computable. Consequently, the last proper hypercenter of $G_r(K)$ is non-computable, provided that $e\neq 0$.

Lemma 7. *The group $G_r(K)$ has a soluble word problem, when it is presented by the generating set $\{a_r\}\cup X\cup Y\cup C$ and the defining relations (5)–(7) in the variety $\mathfrak{N}_r$, i.e., its Gödel numbering is computable.*

Proof. Let us consider a word g in the generators of the $G_r(K)$ as an element of the group that has a presentation $\langle\{a_r\}\cup X\cup Y\cup C|\text{defining relations (5)}\rangle$ in the variety $\mathfrak{N}_r$. The element g of this group can be represented as a product of the powers of the basic commutators of the kind $x_n, z_l, [a_r, z_k^{(j-1)}], [y_m, z_t^{(j-1)}]$ for $1\leqslant j\leqslant r$; and such a presentation can be done efficiently and uniquely by Proposition 2.1. Now, a test for equality $g=1$ reduces to the questions about the validity of relations of the kind $p_{2n}p_{2n+1}|\alpha_n$, $\eta_l=0$, $p_k|\delta_k$, $\varepsilon_r=0$, $p_{2m}^2|\beta_m$, $p_{2m}|\gamma_{m,t}$, and $g(t)=m$ according to Lemmata 5, 6, Corollary 4, Relations (6),(7), and Decompositions (8)–(10). Lemma is proved.

It follows from Decomposition (11) that $G_r(K)/\zeta_{r-1}G_r(K)\cong(a_r)\times(X)\times\prod\limits_{n\in K}(y_n)\times(C)\cong\mathbb{Z}\oplus\sum\limits_{i\in V}\mathbb{Z}_{p_{2i}p_{2i+1}}\oplus\sum\limits_{n\in K}\mathbb{Z}_{p_{2n}^2}\oplus\sum\limits_{k\in W}\mathbb{Z}^{(k)}$, where $\mathbb{Z}^{(k)}\cong\mathbb{Z}$ for each k. So, this factor group is isomorphic to c.e. subgroup of the computable group $\sum\limits_{i\in V}\mathbb{Z}_{p_{2i}p_{2i+1}}\oplus\sum\limits_{n\in V}\mathbb{Z}_{p_{2n}^2}\oplus\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}^{(k)}$, since the latter is the direct sum (in additive notation) of the computable sequence of computable groups [6]. Therefore, the quotient group $G_r(K)/\zeta_{r-1}G_r(K)$ is computable too.

Let λ be a constructivization of group $G_r(K)$. We fix one of the λ-numbers of element a_r as in proof of Theorem 6. One again can enumerate all the elements of the kind $z_k^j\cdot h_0$ for $p_k\nmid j$ and $h_0\in\gamma_2G_r(K)$ as it is done there. In addition, it is possible to enumerate all elements x_n^j and y_n^l for $n\in V$, $p_{2n+1}\nmid j$, and $p_{2n}\nmid j,l$, based on the fact that only these elements have orders of $p_{2n}p_{2n+1}$ and p_{2n}^2 respectively. Now it is no longer difficult to build algorithms that list every hypercenter $\zeta_mG_r(K)$ for $1\leqslant m\leqslant r-2$ as well as all complements to the periodic part and to each central in accordance with Decompositions (8)–(10).

Hence, $T(G_r(K),\tau G_r(K),\lambda)=T(G_r(K),\gamma_j G_r,\lambda)=T(G(K),\zeta_m G(K),\lambda)=0$ for $1\leqslant m\leqslant r-2$ and $2\leqslant j\leqslant r$.

The problem of whether an element g belongs to the $\zeta_{r-1}G_r(K)$ reduces to the questions of whether certain of the y_n belong to this subgroup according to Decomposition (11). Because the belonging $y_n\in\zeta_{r-1}G_r(K)$ is tantamount to $n\in V\setminus K$ and the set V is computable, we obtain $T(G_r(K),\zeta_{r-1}G_r(K),\lambda)\leqslant deg(K)$. The inverse inequality is also proved simply.

5. Independence of the complexity of the occurrence problems into hypercenters and centrals from each other

5.1 Independence of the complexity of the structures of the last hypercenter and factor by it from each other

Let U, V and W be infinite computable sets such that $V\oplus V\rightleftharpoons\{2n\,|\,n\in V\}\cup\{2n+1\,|\,n\in V\}$, U, and W are the pairwise disjoint subsets of $\mathbb{N}$. We define the sets A, C, X, and Y just as it is done in the proofs of Theorems 6 and 7. We after that choose a c.e. infinite subset K of the V and such a subset M in the U that the subset $U\setminus M$ is c.e. and infinite.

Let us consider a group $G_r(M,K)$, which is given by its presentation with the generating set $A\cup C\cup X\cup Y$ and the union of the sets of defining relations of groups $G_r(M)$ and $G_r(K)$ and the set $\{[a_n,x_m|\,n\in U,m\in V\}\{[a_n,y_m]|\,n\in U,m\in V\}$ in the variety $\mathfrak{N}_r$ — see Sections 3 and 4, or more precisely

$$G_r(M,K)=\langle A\cup C\cup X\cup Y\,| \\ \widehat{R}\cup\{\text{generators of group } D_r\}\cup\{\mathit{Relations}\ (6)\ \mathit{and}\ (7)\}\rangle, \tag{12}$$

where $\widehat{R}\rightleftharpoons\{c\,|\,\text{c is a basic commutator};\ w(c)\geqslant 2;\ \text{and c is different from } [y_n,z_k^{(j-1)}]\ \mathit{or}\ [a_m,z_k^{(j-1)}]\ \text{for } 2\leqslant j\leqslant r,\ m\in U,\ n\in V,\ \mathit{and}\ k\in W\}$.

It is easy to see that its subgroups $(A\cup C)$ and $(X\cup Y\cup\{a_r\}\cup C)$ generated by corresponding sets are isomorphic to $G_r(M)$ and $G_r(K)$ respectively. In order to establish this point it is enough to consider the natural homomorphisms of the $G_r(M,K)$ onto its factor-groups $G_r(M,K)/gr_{G_r(M,K)}(X\cup Y)$ and $G_r(M,K)/gr_{G_r(M,K)}(A\setminus\{a_r\})$ and to apply the Tietze transformations to the obtained presentations of these quotient group [5]. Therefore according to the usual algebraic practice, we identify the groups $G_r(M)$ and $G_r(K)$ themselves with their images in group $G_r(M,K)$.

Since $G_r(M,K)=G_r(M)\cdot G_r(K)$, we obtain immediately that

$$\zeta_{r-1}G_r(M,K)=\gamma_2 G_r(M,K)\times\Big[\prod_{n\in V\setminus K}(y_n)\cdot\prod_{k\in V}(x_k)\Big]\times\prod_{m\in M\setminus\{r\}}(a_m)^{p_m}. \quad (13)$$

The group $G_r(M,K)$ is computable, since its presentation (12) has soluble word problem. Really, if g is a word in generators of this group, then we consider it as an element of group $\langle A\cup C\cup X\cup Y\,|\,\widehat{R}\rangle$ in the variety $\mathfrak{N}_r$. Then this element can be uniquely represented as a product of the powers of the basic commutators of the form $x_n, z_l, [a_n, z_k^{(j-1)}], [y_m, z_t^{(j-1)}]$ for $1\leqslant j\leqslant r$; and such a presentation can be done efficiently by Proposition 2.1. A further verification of the equality $g=1$ is also carried out as in the proof of Lemmata 3 and 7.

Let λ be a constructivization of group $G_r(M,K)$. We fix one of the λ-numbers of element a_r again as in proof of Theorems 6 and 7. One can again enumerate all the elements of the kind $z_k^j\cdot h_0$ for $p_k\nmid j$ and $h_0\in\gamma_2G_r(M,K)$. It is possible after that to enumerate all the elements that are of the form $a_m^i\cdot h$ for $p_m\nmid i$ and $m\neq r$, where $h\in\gamma_2G_r(M,K)$, as it is done there. In addition, one can list all elements x_n^j and y_n^l for $n\in V$, $GCD(p_{2n}p_{2n+1},j)=1$, and $GCD(p_{2n}^2,l)=1$, based on the fact that only these elements have orders of $p_{2n}p_{2n+1}$ and p_{2n}^2 respectively. Now it is no longer difficult to build algorithms that list every hypercenter $\zeta_mG_r(M,K)$ for $1\leqslant m\leqslant r-2$ as well as all complements to the periodic part and to each central as in the proofs of those theorems. Hence, we obtain that $T(G_r(M,K),\tau G_r(M,K),\lambda)=T(G_r(M,K),\gamma_jG_r,\lambda)=T(G(M,K),\zeta_mG(M,K),\lambda)=0$ for $1\leqslant m\leqslant r-2$ and $2\leqslant j\leqslant r$.

The problem of the occurence of any element to the last hypercenter reduces to the same questiens about the elements of the kind a_m^ih and y_n^j according to Decomposition (13). It is easy to see, using this fact, that $T(G_r(M,K),\zeta_{r-1}G_r(M,K),\lambda)=\sup(\deg(M),\deg(K))=\deg(M\oplus K)$.

It follows from Decomposition (13) also that $L_2(\zeta_{r-1}G_r(M,K);V)=(V\setminus K)$ (see the paragraph before Lemma 7), therefore the last proper hypercenter of $G_r(M,K)$ is computable iff $\deg(K)=0$. Again using this decomposition, we obtain $G_r(K)/\zeta_{r-1}G_r(K)\cong(a_r)\times(X)\times\prod_{n\in K}(y_n)\times(C)\times\prod_{m\in M\setminus\{r\}}(a_m)/(a_m)^{p_m}$. Hence, $L_1(G(M,K)/\zeta_{r-1}G_r(M,K);U)=M\setminus\{r\}$ — see the proof of Lemma 4; and the factor group $(G(M,K)/\zeta_{r-1}G_r(M,K)$ is computable iff $\deg(M)=0$.

5.2 Independence of the complexity of the problems of occurrence in hypercenters from each other

We now construct the group $G_u(\hat{d})$ possessing the properties 2) and 4) in Theorem 4.

Let $d_1, \ldots, d_{n-1}$ be c.e. degrees such that the tuple $\langle d_1, \ldots, d_{n-1} \rangle$ coordinated with the given set $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) = (\alpha_1, \ldots, \ \alpha_{n-1}; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ of zeroes and unities. First, we choose the computable infinite subsets $U_2, \ldots,$ $U_n, V_2, \ldots, V_n$, and $W_2, \ldots, W_n$ of $\mathbb{N}$ such that the $U_2, \ldots, U_n, V_2 \oplus V_2, \ldots, V_n \oplus$ V_n, and $W_2, \ldots, W_n$ are the pairwise disjoint sets.

Second, if $\alpha_r = \beta_r$ for $1 \leqslant r \leqslant n-1$, then we take a subset M_{r+1} in the U_{r+1} and a subset K_{r+1} in the V_{r+1} so that the degree of both of these subsets equals d_r. When $\alpha_r = 0$ and $\beta_r = 1$, i.e., the r-th hypercenter has a simple structure, but the quotient group by it is complicated, then we select a subset M_{r+1} of degree d_r in U_{r+1} and a computable subset K_{r+1} in V_{r+1}. And vice versa, for $\alpha_r = 1$ and $\beta_r = 0$, i.e., if the r-th hypercenter has a complicated construction, but the quotient group by it is simple, we select a computable subset M_{r+1} in U_{r+1} and a subset K_{r+1} of degree d_r in V_{r+1}. However, the K_{r+1} and $U_{r+1} \setminus M_{r+1}$ must be c.e. infinite sets in any case.

Then we construct the groups $G_r(M_r, K_r)$ for $2 \leqslant r \leqslant n$ in exactly the same way as described in Subsection 5.1, using the selected sets U_r, V_r, W_r, M_r, and K_r in the capacity of U, V, W, M, and K. Naturally, each of these groups has its own computable set of generators that does not intersect the generating sets of other groups.

Last we define $G_u(\hat{d}) \rightleftharpoons \prod_{2 \leqslant r \leqslant n} G_r(M_r, K_r)$. This group is computable, since it is the direct product of finite numbers of the computable groups [6].

We recall that r is the least element in the subset M_r of the set U_r. Because the sets $U_2, \ldots, \ U_n$ are the pairwise disjoint sets, we obtain that $a_i \neq a_j$ for $2 \leqslant i, j \leqslant n$ and $i \neq j$.

Let λ be a computable numbering of group $G_u(\hat{d})$. We again fix one of the λ-numbers of each element a_r for $2 \leqslant r \leqslant n$, for instance v_r as it is done in proof of Theorems 6 and 7 and in Subsection 5.1. One can afresh enumerate all the elements of the kind $z_k^j \cdot h_0$ for $k \in W_r$, $p_k \nmid j$, and $h_0 \in \gamma_2 G_r(M, K)$, since these elements commute with 'else's' λv_i (i.e., with those a_i, for which $i \neq r$ holds), but $[\lambda v_r, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}]^{p_k} = 1$ and $[\lambda v_r, (z_k^j \cdot h_0)^{(r-1)}] \neq 1$ hold. After that, it is possible to enumerate all the elements that are of the form $a_m^i \cdot h$ for $m \in U_r$

$p_m \nmid i$ and $m \neq r$, where $h \in \gamma_2 G_r(M,K)$, as it is done in the proof of Theorem 6, because these elements are also permutable with 'else's' $z_k^j \cdot h_0$. In addition, one can enumerate all elements x_t^j and y_t^l for $t \in V_r$, $GCD(p_{2t}p_{2t+1}, j) = 1$, and $GCD(p_{2t}^2, l) = 1$, based on the fact that only these elements have orders of $p_{2t}p_{2t+1}$ and p_{2t}^2 respectively.

We have learned how to enumerate the sets of pseudo-generators for each direct efficient of the group $G_u(\widehat{d})$ for given constructivization λ. Therefore, we obtain in accordance with Corollary 1 and the results of Subsecton 5.1 that $T(G_u(\widehat{d}), \tau G_u(\widehat{d}), \lambda) = \sup\{T(G_r(M_r,K_r), \tau G_r(M_r,K_r), \lambda_r) | 2 \leqslant r \leqslant n\} = 0$; $T(G_u(\widehat{d}), \gamma_j G_u(\widehat{d}), \lambda) = \sup\{T(G_r(M_r,K_r), \gamma_j G_r, \lambda_r) | 2 \leqslant r \leqslant n\} = 0$; $T(G_u(\widehat{d}), \zeta_m G_u(\widehat{d}), \lambda) = \sup\{T(G(M_r,K_r), \zeta_m G(M_r,K_r), \lambda_r) | 2 \leqslant r \leqslant n\} = d_m$ for $1 \leqslant m \leqslant n-1$ and $2 \leqslant j \leqslant n$.

5.3 The ending of the proof of Theorem 4

We need some more details of the construction of the group $G(\hat{a})$ in Theorem 2. It is defined as the direct product of $n-1$ auxiliary groups H_j for $2 \leqslant j \leqslant n$, the group H_j is denoted as $H(A^j)$ for $2 \leqslant j \leqslant n-1$ in [9], and H_n is $G(A^n)$ there; a degree of each c.e. set A^j equals to given degree a_j. Every group H_j is the direct product of groups $H_j(X_j)$ and $H_j(Y_j)$, which are accordingly generated by the sets X_j and Y_j, with an amalgamated central subgroup. All the set $X_2, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n$ are computable, infinite, and pairwise disjoint. Each subgroup $H_j(Y_j)$ is class j–1 nilpotent, and for $j>2$, its factor group $H_j(Y_j)/\gamma_j H_j(Y_j)$ is free nilpotent; every susgroup $H_j(X_j)$ is class j nilpotent, and its factor group $H_j(X_j)/\gamma_j H_k(Y_j)$ is free nilpotent. The periodic parts of all subgroups $H_k(Y_k)$ and $H_j(X_j)$ coincide with their centers and $\tau H_j(X_j) = \gamma_j H_j(X_j)$ for $2 \leqslant k \leqslant n$ and $2 \leqslant j \leqslant n-1$; and if $k>2$, then $\tau H_k(Y_k) = \gamma_{k-1} H_k(Y_k)$ holds, too — this is Corollary 3.2 in [9]. But $\tau H_n(X_n)$ is a proper subgroup of $\zeta H_n(X_n) = \gamma_n H_n(X_n) = \gamma_n G(\hat{a})$ — this is used in the proof of Property (ii) in Theorem 2 (Lemma 3.5 in [9]). Hence $\zeta G(\hat{a}) = \tau G(\hat{a}) \cdot \gamma_n G(\hat{a})$, and so $T(G(\widehat{a}), \tau G(\widehat{a}), \lambda) = 0$ for every constructivization of $G(\widehat{a})$.

Notice that the periodic part of all subgroups of the group $G(\widehat{a})$, including it itself, consists of only the elements whose orders are the product of distinct prime numbers. More precisely, the numbers of these primes constitute the union of the infinite computable sets $R^2, \ldots, R^n; S^2, \ldots, S^n; T^2, \ldots, T^{n-1}$ that are pairwise disjoint.

Finally we begin to build the group $H(\widehat{d},\widehat{e})$ in Theorem 4. Let $d_1,\ldots,d_{n-1}$ and $e_2,\ldots,e_n$ be c.e. degrees such that the tuple $\langle d_1,\ldots,d_{n-1}\rangle$ coordinated with the given set $(\widehat{\alpha},\widehat{\beta})=(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_{n-1};\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$ of zeroes and unities.

First, we choose the computable infinite sets $R^2,\ldots,R^n;S^2,\ldots,S^n;$ $T^2,\ldots,T^{n-1};U_2,\ldots,U_n,V_2\oplus V_2,\ldots,V_n\oplus V_n$, and $W_2,\ldots,W_n$ that are pairwise disjoint subsets of $\mathbb{N}$. Then we construct a group $G_u(\widehat{d})$ just as described in Subsection 5.2 for given $d_1,\ldots,d_{n-1}$ and $(\widehat{\alpha},\widehat{\beta})$. Next we specify a group $G_l(\widehat{e})$, whose generating set does not intersect the generating set of group $G_u(\widehat{d})$; this group $G_l(\widehat{e})$ is defined as $G(\widehat{a})$ in [9] for $\widehat{a}=\widehat{e}$. However, we single out one 'particular' element, for instance $x_{j,o}$, in each generating set X_j, and the same generator $y_{k,o}$ in every set Y_k for $k>2$.

Last we define $H(\widehat{d},\widehat{e})\rightleftharpoons G_u(\widehat{d})\times G_l(\widehat{e})$. It is computable, since so are its direct multipliers.

Let λ be a computable numbering of group $H(\hat{d},\hat{e})$. We again fix one of the λ-numbers of each element a_r for $2\leqslant r\leqslant n$, for example v_r, as it is done above in Subsections 5.1 and 5.2. We also choose one of the λ-numbers of every 'particular' generator $x_{j,o}$ and a λ-number of each element $y_{k,o}$, for instance u_j and w_k correspondingly. Using these choosen λ-numbers, one can afresh enumerate the sets of pseudo-generators of every direct efficient $G_r(M_r,K_r)$ of the group $G_u(\hat{d})$ as it is done above. Furthermore, one can also enumerate the sets of pseudo-generators of each direct multiplier $H_j=H_j(Y_j)\cdot H_j(X_j)$, because, firstly, any of the generators in Y_2 has an order p_t for $t\in R^2\cup S^2$; secondly, each generator x in X_k is permutable with all of the λv_r, λu_j, and 'else's' λw_i, but $[x,\lambda w_k^{(k-1)}]\neq 1$ holds; thirdly, a statement similar to the second is also true for all generators in Y_j for $j\geqslant 3$.

Consequently, we obtain in accordance with Corollary 4 that

$$T(H(\widehat{d},\widehat{e}),\kappa H(\widehat{d},\widehat{e}),\lambda)=\sup\{T(G_u(\widehat{d}),\kappa G(\widehat{d}),\mu);T(G_l(\widehat{e}),\kappa G_l(\widehat{e}),\nu)\}$$

for every constructivization λ of the $H(\widehat{d},\widehat{e})$, where κG is the periodic part, or any central, or some hypercenter of a group G, and μ and ν are the restrictions of numbering λ; moreover, $T(G_l(\widehat{e}),\zeta_m G_l(\widehat{e}),\nu)=\sup\{T(H_r,\zeta_m H_r,\nu_r)|\,2\leqslant r\leqslant n\}=0$ for $1\leqslant m\leqslant n-1$, since each center $\zeta H_r=\gamma_r H_r(X_r)\cdot\tau H_r(Y_r)$ is computable, and every factor $H_r/\zeta H_r$ is the direct product of two the free nilpotent groups. This completes the proof of Theorem 4 on the basis of the established above properties of groups $G_l(\widehat{e})$ and $G_u(\widehat{d})$.

Notice that the proof, of property (i) in Theorem 2, given in [9] (see the proof of Theorem 3.1 in [9]), can be significantly simplified, if we apply the described method of the enumeration of the pseudo-generating sets for this purpose. Furthermore, the generalized Hall, Jr. theorem (Proposition 1) is enable to simplify the proof of Theorem 3 in [10] (it is Theorem 1.3 in [10]).

References

1 Hall M. The Theory of Groups. – New York: Macmillan, 1959. – 434 p.

2 Hall P. Nilpotent Groups. – in Queen Mary College Math. Notes, —London: Queen Mary Coll. (Univ. London), 1969. – 128 p.

3 Kargapolov M. I. and Merzljakov Yu. I. Fundamentals of the Theory of Groups. – translations of Osnovy theorii grupp, 2nd. Edn., 1977, translated by R. G. Burns. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer, Grad. Texts in Math., 62, 1979. – 324 p.

4 Lyndon R. C. and Schupp P. E. Combinatorial Group Theory. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1977. – 448 p.

5 Magnus W., Karrass A., and Solitar D. Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. – New York, London, Sydney: Interscience Publishers, A division of Wiley & Sons, Inc., Interscience, 1966. – 512 p.

6 Ershov Y. L. and Goncharov S. S. Constructive Models. (in Russian). — Novosibirsk: Nauch. Kniga, Ser. Siberian School of Algebra and Logic, 1996. – [translated in: Consultants Bureau, New York, 2000.] – 346 p.

7 Soare R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. – 564 p.

8 Khisamiev N. G. On positive and constructive groups (in Russian) // Sibirsk. Mat. Zh. – 2012. – V. 53, № 5. – P. 1133-1146; [translated in: Siberian Math. J. – 2012. – V. 53, No. 5, – P. 906-917].

9 Latkin I. V. Algorithmic complexity of the problem of occurrence in commutants and the members of the lower central series (in Russian) // Sibirsk. Math. Zh. – 1987. – V. 28, № 5. – P. 102-110. [translated in: Siberian J. Math. – 1987. – V. 28, No. 5. – P. 772-779].

10 Csima B. F. and Solomon R. The complexity of central series in nilpotent computable groups // Annals of Pure and Appl. Logic – 2011. – V. 162 – P. 667-678.

11 Latkin I. V. Constructive groups, nilpotent product of which is not constructivizable (in Russian) // 8-th Union. Conf. Math. Logic. – Moscow, 1986. – P. 101.

12 Latkin I. V. Constructive nilpotent groups with a non-constructivizable center (in Russian) // Bulletin of the East Kazakhstan State Technical University – 2004. – V. 23, № 1. – P. 82-84.

Received 25.04.2017

Латкин И.В. ЕСЕПТЕЛІМДІ ТОПТАРДЫҢ ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ОРТАЛЫҚ ҚАТАРЛАРЫНДАҒЫ МҮШЕЛЕР МЕН ОЛАР БОЙЫНША ФАКТОР ТОПТАРДЫҢ ЕСЕПТЕЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бізді есептелімді топтардың жоғарғы және төменгі орталық қатарларындағы мүшелерді есептеудің күрделілігі қызықтыратын болады. Нақтырақ айтсақ, конструктивті нильпотентті топтардағы осы орталық қатарлардың коммутанттар мен мүшелерге ену мәселелерін қарастырамыз. Біз сондай-ақ, фактор топтардың осы ішкі топтар бойынша есептелімділігін зерттейміз.

Латкин И.В. О ВЫЧИСЛИМОСТИ ЧЛЕНОВ И ФАКТОР ГРУПП ПО НИМ В ВЕРХНЕМ И НИЖНЕМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РЯДАХ ВЫЧИСЛИМЫХ ГРУПП

Нас будет интересовать сложность вычисления членов в верхнем и нижнем центральных рядах вычислимой группы. Точнее, мы рассмотрим проблему вхождения в коммутанты и члены этих центральных рядов у конструктивных нильпотентных групп. Мы также исследуем вычислимость фактор групп по этим подгруппам.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 175–183.

УДК 517.927.25

ПОЛНОТА И БАЗИСНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.А. Сарсенби

Южно Казахстанский Государственный Университет Им. М.Ауэзова
160012, Шымкент, пр. Тауке хан 5, e-mail: abdsisalam@mail.ru

Аннотация: В работе показана полнота и базисность неортогональных собственных функций спектральной задачи для одномерного дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией с несамосопряженными краевыми условиями.

Ключевые слова: Уравнение с инволюцией, функция Грина, разложение по собственным функциям, базис, метод Фурье.

1. Введение

Исследованию различных вопросов дифференциальных уравнений с инволюцией посвящено немало работ (см., например, [1]–[3]. Исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящены работы [4]–[7]. Теория функции Грина краевых задач для дифференциальных уравнений с инволюцией рассматривается в работах [8]–[9]. Вопросы разрешимости задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией изучаются в работе [10]. В качестве примера возникновения спектральной задачи для дифференциальных операторов с инволюцией можно привести следующую задачу. Для уравнения гиперболического типа с инволюцией

$$u_{tt}\left(x,t\right) = u_{xx}\left(-x,t\right), \; -1 < x < 1, \; -\infty < t < T,$$

Keywords: *Equation with involution, Green's function, eigenfunction expansion, basis, Fourier method.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (грант № 5414/ГФ4.

рассмотрим смешанную задачу

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \; u(-1,t) = 0, \; u_x(-1,t) = u_x(1,t).$$

Использование метода Фурье приводит к изучению спектральной задачи

$$-X''(-x) = \lambda^2 X(x), \tag{1}$$

$$X(-1) = 0, \; X'(-1) = X'(1). \tag{2}$$

Заметим, что краевые условия (2) являются несамосопряженными. Поэтому сразу же выпишем сопряженную спектральную задачу

$$-Y''(-x) = \bar{\lambda}^2 Y(x), \tag{1*}$$

$$Y'(1) = 0, \; Y(-1) = Y(1). \tag{2*}$$

Применение метода Фурье ставит вопрос о возможности разложения некоторых заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в сходящийся ряд по собственным функциям спектральной задачи (1), (2). Хорошо известно, если система собственных функций $\{X_k(x)\}$ спектральной задачи (1), (2) образует базис пространства $L_2(-1,1)$, то любая функция из этого класса разлагается в сходящийся ряд Фурье по данной системе. Поэтому переходим к изучению базисности системы собственных функций $\{X_k(x)\}$ спектральной задачи (1), (2).

2. Полнота и базисность систем собственных функций спектральной задачи (1), (2)

Спектральная задача (1), (2) имеет две серии собственных значений: $\lambda_{k1} = -(k\pi)^2$, $\lambda_{k2} = (k\pi)^2$. Соответствующая им система собственных функций выписывается в виде

$$\left\{X_{01}=x+1, \; X_{k1}=\sin k\pi x, X_{k2}=(-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x, \; k=1,2,..\right\}. \tag{3}$$

Биортогонально сопряженная система состоит из собственных функций сопряженной задачи (1*), (2*) и имеет вид

$$\left\{Y_0=\frac{1}{2}, \; Y_{k2}=\cos k\pi x, \; Y_{k1}=(-1)^k \frac{e^{k\pi x}+e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \sin k\pi x, \; k = 1,2,...\right\}. \tag{4}$$

Теорема 2.1. *Система собственных функций (3) спектральной задачи (1), (2) полна в* $L_2(-1,1)$. *Система собственных функций (4) сопряженной спектральной задачи (1*), (2*) полна в* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Пусть для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ выполнено условие $(f, X_k) = 0$, $k = 0,1,2,....$ Это значит, что

$$\int_{-1}^{1} f(x)(x+1)\,dx = 0, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sin k\pi x dx = 0,\ k = 1,2,..., \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x\right) dx = 0,\ k = 1,2,... \,. \tag{7}$$

Так как

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sin k\pi x dx = \int_{-1}^{0} f(x)\sin k\pi x dx +$$

$$+\int_{0}^{1} f(x)\sin k\pi x dx = \int_{0}^{1} (f(x) - f(-x))\sin k\pi x dx = 0$$

и система $\{\sin k\pi x\}$, $k = 1,2,...$, полна в $L_2(0,1)$, то

$$f(x) - f(-x) = 0. \tag{8}$$

Из (5) и (8) следует

$$\int_{-1}^{1} f(x)(x+1)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)(x+1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 f(-x)(-x+1)\,dx + \int_0^1 f(x)(x+1)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (f(x) - f(-x))\,x dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Так что,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0. \tag{9}$$

А из (7) и (8) получим

$$\int_{-1}^1 f(x)\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 f(x)\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x\right) dx +$$

$$+ \int_0^1 f(x)\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + \cos k\pi x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (f(x) - f(-x))(-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} dx +$$

$$+ \int_0^1 (f(x) + f(-x)) \cos k\pi x dx = 0.$$

Отсюда в силу (8) получаем

$$\int_0^1 f(x) \cos k\pi x dx = 0. \tag{10}$$

Так как система $\{\cos k\pi x\}$, $k = 0, 1, 2, ...$, полна в $L_2(0,1)$, то из равенств (9) и (10) следует тождество $f(x) \equiv 0$. Аналогично доказывается полнота системы (4). Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Система собственных функций (3) спектральной задачи (1), (2) образует базис Рисса в пространстве* $L_2(-1,1)$. *Система собственных функций (4) спектральной задачи (1*), (2*) образует базис Рисса в пространстве* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Для доказательства базисности Рисса системы (3), в силу теоремы Н.К. Бари [11], достаточно доказать бесселевость каждой из систем (3) и (4), т.е. справедливость неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\ \sin k\pi x)|^2 < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\ (-1)^k\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+\cos k\pi x\right)\right|^2<\infty, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\ \cos k\pi x)|^2< \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\ (-1)^k\frac{e^{k\pi x}+e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+\sin k\pi x\right)\right|^2 < \infty \quad (12)$$

для любой функции $f(x) \in L_2(-1,\ 1)$, ибо, если одна из биортогонально сопряженных систем бесселева, то другая гильбертова и, наоборот. А система, которая является одновременно бесселевой и гильбертовой является базисом Рисса. Отсюда следует базисность Рисса каждой из систем (3), (4). Первые из неравенств и в (11), и в (12) хорошо известны, так как они представляют собой неравенство Бесселя для ортонормированной системы. Докажем второе неравенство в (11), а второе неравенство в (12) доказывается совершенно аналогично. Так как

$$\left|\left(f,\ (-1)^k\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+\cos k\pi x\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left|\left(f,\ \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2+2|(f,\ \cos k\pi x)|^2$$

и второе слагаемое в правой части есть коэффициенты Фурье по ортонормированной системе, то нам достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\ \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2. \quad (13)$$

Рассмотрим общий член этого ряда и преобразуем его:

$$\left|\left(f,\ \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right| = \left|\int\limits_{-1}^{1} f(x)\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\left[\int\limits_{-1}^{1} f(x)e^{k\pi x}dx - \int\limits_{-1}^{1} f(x)e^{-k\pi x}dx\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\left[\int\limits_{-1}^{0} f(x)e^{k\pi x}dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)e^{k\pi x}dx - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{-1}^{0} f(x)e^{-k\pi x}dx - \int\limits_{0}^{1} f(x)e^{-k\pi x}dx\right]\right| \le$$

$$\le \frac{2}{e^{k\pi}}\left[\int\limits_{-1}^{0} f(x)e^{k\pi x}dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)e^{k\pi x}dx - \int\limits_{-1}^{0} f(x)e^{-k\pi x}dx - \int\limits_{0}^{1} f(x)e^{-k\pi x}dx\right] =$$

$$= 2\left|\left\{\int\limits_{0}^{1}\Big[f(-x)-f(x)\Big]e^{-k\pi(x+1)}dx + \int\limits_{0}^{1}\Big[f(x)-f(-x)\Big]e^{k\pi(x-1)}dx\right\}\right|.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\ \frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\right)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}\left(\int\limits_{0}^{1}[f(-x)-f(x)]e^{-k\pi(x+1)}dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{0}^{1}[f(x)-f(-x)]e^{k\pi(x-1)}dx\right)\right|^2. \tag{14}$$

В дальнейших рассуждениях мы опираемся на следующий факт из работы [12].

Лемма 2.1 [12]. *Пусть* $f(x) \in L_2(0,\ 1)$ *и*

$$a_k = \int\limits_0^1 f(x)e^{-\lambda kx}dx,\ b_k = \int\limits_0^1 f(x)e^{\lambda k(x-1)}dx,$$

где λ *– произвольное комплексное число с положительной вещественной частью* ($\lambda = \alpha + i\beta,\ \ \alpha > 0$). *Тогда ряды* $\sum |a_k|^2,\ \ \sum |b_k|^2$ *сходятся.* На основании этой леммы мы получаем сходимость ряда (14) или, что то же самое, сходимость ряда (11). Это следует из того, что общий член ряда (13) мажорируется следующими величинами:

$$\left|\int\limits_0^1 [f(-x) - f(x)]\, e^{-k\pi(x+1)}dx + \int\limits_0^1 [f(x) - f(-x)]\, e^{k\pi(x-1)}dx\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left|\int\limits_0^1 [f(-x) - f(x)]\, e^{-k\pi x}dx\right|^2 + 2\left|\int\limits_0^1 [f(x) - f(-x)]\, e^{k\pi(x-1)}dx\right|^2.$$

Теорема 2.2 доказана.

Таким образом, любую функцию $f\,(x)$ из класса $L_2\,(-1,1)$ можно разложить в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи (1), (2).

Литература

1 Babbage A. An essay towards the calculus of calculus of functions, Part II. // Philos Trans. Roy. Soc. – London. – 1816. – V. 106. – P. 179-256.

2 Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument. An Algebraic Approach. – Amsterdam, Warszawa: Elsevier Scientific Publishing Comp. PWN – Polish Scientific Publishers, 1973.

3 Wiener J. Generalized Solutions of Functional-Differential Equations. – New Jersey: World Scientific Pub. – 1993.

4 Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. – 2010. – V. 46, issue 4. – P. 509-514.

5 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differential Equations. – 2012. – V. 48, issue 8. – P. 1112-1118.

6 Kritskov L., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution // Differential Equations. – 2015. – V. 51, № 8. – P. 984-990.

7 Kritskov L., Sarsenbi A.M. Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – № 278. – P. 1-9.

8 Cabada A., Tojo F.A.F. Solutions and Green's function of the first order linear equation with reflection and initial conditions // Boundary Value Problems. – 2014. – № 1. – P. 99.

9 Sarsenbi A.A. Green's function of the second-order differential operator with involution from boundary conditions of Neumann // AIP Publishing. – 2015. – V. 1676. – P. 020074.

10 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V. 2015. – No. 284. – P. 1-8.

11 Сарсенби Абдижахан М. Теория базисности корневых векторов линейных несамосопряженных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. – Шымкент, 2009. – 267 с.

12 Кессельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР, Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.

Статья поступила в редакцию 30.03.2017

Сарсенби А.А. ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ӨЗ-ӨЗІНЕ ТҮЙІНДЕС ЕМЕС СПЕКТРАЛДЫҚ ЕСЕПТІҢ МЕНШІКТИ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ТОЛЫҚТЫҒЫ МЕН БАЗИСТІГІ

Жұмыста инволюциясы бар екінші ретті бірөлшемді дифференциалдық теңдеу үшін спектралдық есептің ортогоналды емес меншікті функцияларының толықтығы мен базистігі көрсетілген.

Sarsenbi A.A. COMPLETENESS AND BASICITY OF EIGENFUNCTIONS OF NONSELFADJOINT SPECTRAL PROBLEM WITH INVOLUTION

In this work the completeness and basis property of non-orthogonal eigenfunctions of the spectral problem for one-dimensional second order differential equation with involution and nonselfajoint boundary conditions are proved.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 2. — С. 184–185.

УДК 517.51

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

Аннотация: Дано исправление к статье автора.

Ключевые слова: Теорема.

В моей статье [1] в формулировке Теоремы 1 вместо “$1 < p_j < q_j \le \frac{p_j}{p_j-1} = p_j', j = 1, ..., m$“, должно быть “$1 < p_j < 2 < q_j \le \frac{p_j}{p_j-1} = p_j', j = 1, ..., m$“. В первом соотношении этой теоремы пропущены условия $r_j > \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., m$ и $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu+1, ..., m$.

Эти неточности допущены по вине автора. Ниже приведена исправленная формулировка Теоремы 1 [1].

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_j < 2 < q_j < \frac{p_j}{p_j-1}$, $\quad 1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}$, $\quad 1 \le \tau_j \le \infty$, $j = 1, ...m$ *и* $\max\limits_j q_j < \min\limits_j \frac{p_j}{p_j-1}$, $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \le ... \le r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$.

1. Если $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = 1, ..., m$, $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu+1, ..., m$, *и* $\tau_j \le \theta_j^{(2)}, j = 1, ..., m$, *или* $\theta_j^{(2)} < \tau_j$, $\quad 2 < \tau_j$, $\quad j = 1, ..., m$, *то*

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}.$$

2. Если $\theta_j^{(2)} < \tau_j$, $\quad 1 \le \tau_j \le 2, j = 1, ..., m$, *то*

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \le CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})_+}.$$

Keywords: *Theorem.*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 5129/ГФ4.

Литература

1 Акишев Г. Оценки тригонометрических поперечников классов в пространстве Лоренца // Математический Журнал. – 2012. – Т. 12, № 4. – С. 41-57.

Поступила 30.05.2017

Ақышев Ғ. РЕДАКЦИЯҒА ХАТ

Автордың мақаласына түзету берілген.

Akishev G. LETTER TO THE EDITORIAL

A correction to the author's article is given.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www. math. kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК. На следующих

строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов; место работы; почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, №2 (64), 2017

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
30.06.2017 г.

Тираж 300 экз. Объем 188 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz