ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Том 18 № 2 (68) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 18   № 2 (68)   2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, № 2 (68), 2018

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 **№ 2 (68)** **2018**

CONTENTS

Volume 18 **No. 2 (68)** **2018**

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 5–18.

МРНТИ 27.31.17:27.33.19

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА АЛЛЕРА

А.Т. Асанова

Аннотация. Рассматривается нелокальная задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера. Для решения указанной задачи предлагается новый подход, основанный на введении новых неизвестных функций в виде интегрального соотношения. Исследован вопрос существования единственного классического решения нелокальной задачи и предложены способы построения ее приближенных решений. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера в терминах исходных данных.

Ключевые слова. Уравнение типа Аллера, система нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, нелокальная задача, разрешимость, алгоритм.

1 Введение, постановка задачи

В области $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается нелокальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b u(t,x)dx + C(t,x)u + f(t,x), \quad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B10, 35G16, 35Q92.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант №AP05131220.

$$\alpha_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0}+\alpha_2(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=\omega}+\alpha_3(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}+$$
$$+\alpha_4(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega}+\alpha_5(t)u(t,0)+\alpha_6(t)u(t,\omega)=d_1(t),\quad t\in[0,T],\qquad(3)$$
$$\beta_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=0}+\beta_2(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big|_{x=\omega}+\beta_3(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}+$$
$$+\beta_4(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega}+\beta_5(t)u(t,0)+\beta_6(t)u(t,\omega)=d_2(t),\quad t\in[0,T],\qquad(4)$$

где $u(t,x)=col(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))$ – неизвестная функция, $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, $0\le a<b\le\omega$, n-вектор-функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, $(n\times n)$-матрицы $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $j=\overline{1,6}$, и n-вектор-функции $d_j(t)$, $j=1,2$, непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$.

Функция $u(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, называется *классическим решением* задачи (1)–(4), если она удовлетворяет системе нагруженных уравнений (1) для всех $(t,x)\in\Omega$, краевому условию (2) для всех $x\in[0,\omega]$ и нелокальным условиям (3), (4) для всех $t\in[0,T]$.

Математическое моделирование движения влаги в почве, физических процессов химии, биологии и др. приводит к исследованию нелокальных задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных типа Аллера [1]–[15]. Задача Гурса и некоторые типы нелокальных задач для частных случаев уравнения типа Аллера, в основном, исследовались с помощью метода Римана, где от коэффициентов уравнения требовалась непрерывная дифференцируемость по одной или двум переменным [6], [8]–[12], [14]–[15]. Также использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений и математической физики, при которых учитывались различные физические свойства и законы [1]–[5], [7], [13].

В настоящей работе исследуются вопросы существования классического решения нелокальной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера (1)–(4) и способы построения ее приближенного решения. Предлагается новый подход для решения указанной задачи, основанный на введении новых неизвестных функций [16] через интегральное соотношение, связывающее исходную и новые функции. В качестве вспомогательной задачи рассмотрена нелокальная задача для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка, установлены условия ее однозначной разрешимости. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказана его сходимость. Получены достаточные условия существования и единственности классического решения нелокальной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера в терминах исходных данных.

Результаты данной работы были частично анонсированы в [17].

2 Сведение к эквивалентной задаче с параметром

Пусть $\lambda(t) = u(t,0)$ и введем новую неизвестную функцию $\widetilde{u}(t,x)$. В задаче (1)–(4) осуществим замену функции $u(t,x)$ следующим образом:

$$u(t,x) = \lambda(t) + \int\limits_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega.$$

Тогда задача (1)–(4) переходит к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\widetilde{u} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b \int\limits_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi dx +$$

$$+C(t,x)\int\limits_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi + (b-a)\dot{\lambda}(t) + C(t,x)\lambda(t) + f(t,x), \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = \dot{\varphi}(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$\alpha_1(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} + \alpha_2(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} + \alpha_3(t)\widetilde{u}(t,0) + \alpha_4(t)\widetilde{u}(t,\omega) +$$

$$+\alpha_6(t)\int\limits_0^\omega \widetilde{u}(t,\xi)d\xi + [\alpha_5(t) + \alpha_6(t)]\lambda(t) = d_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\beta_1(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}+\beta_2(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega}+\beta_3(t)\widetilde{u}(t,0)+\beta_4(t)\widetilde{u}(t,\omega)+$$

$$+\beta_6(t)\int\limits_0^\omega\widetilde{u}(t,\xi)d\xi+[\beta_5(t)+\beta_6(t)]\lambda(t)=d_2(t),\qquad t\in[0,T], \tag{8}$$

$$\lambda(0)=\varphi(0). \tag{9}$$

Здесь учтены соотношения

$$u(t,0)=\lambda(t),\qquad u(t,\omega)=\lambda(t)+\int\limits_0^\omega\widetilde{u}(t,\xi)d\xi,\qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\widetilde{u}(t,x),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x},\qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2\partial t}=\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,x)}{\partial x\partial t},\qquad (t,x)\in\Omega,$$

и условие согласования данных в точке $(0,0)$.

Решением задачи (5)–(9) называется пара функций $(\widetilde{u}(t,x),\lambda(t))$, где функция $\widetilde{u}(t,x)\in C(\Omega,R)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2\widetilde{u}(t,x)}{\partial x\partial t}\in C(\Omega,R^n)$, а функция $\lambda(t)\in C([0,T],R^n)$ имеет производную $\dot{\lambda}(t)\in C([0,T],R^n)$: и удовлетворяет системе нагруженных гиперболических уравнений (5) для всех $(t,x)\in\Omega$ и условиям (6)–(9). Функция $u(t,x)$ определяется через функцию $\widetilde{u}(t,x)$ из интегрального соотношения

$$u(t,x)=\lambda(t)+\int\limits_0^x\widetilde{u}(t,\xi)d\xi,\qquad (t,x)\in\Omega. \tag{10}$$

Задачи (1)–(4) и (5)–(9) эквивалентны. Если функция $u^*(t,x)$ является классическим решением задачи (1)–(4), то пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x),\lambda^*(t))$, где $\widetilde{u}^*(t,x)=\dfrac{\partial u^*(t,x)}{\partial x}$ для всех $(t,x)\in\Omega$, $\lambda^*(t)=u^*(t,0)$ для всех $t\in[0,T]$, будет решением задачи (5)–(9). И наоборот, если пара функций $(\widetilde{u}^{**}(t,x),\lambda^{**}(t))$ является решением задачи (5)–(9), то функция $u^{**}(t,x)$, определяемая интегральным соотношением

$$u^{**}(t,x) = \lambda^{**}(t) + \int_0^x \widetilde{u}^{**}(t,\xi)d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega,$$

будет классическим решением задачи (1)–(4).

При фиксированном $\lambda(t)$ задача (5)–(7) является нелокальной задачей для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка. Нелокальное соотношение (8) вместе с условием (9) позволяют определить неизвестный параметр $\lambda(t)$.

Таким образом, задачу (5)–(9) можно трактовать, как задачу управления для системы нагруженных гиперболических уравнений с управляющим параметром $\lambda(t)$ или обратную задачу для системы нагруженных гиперболических уравнений с неизвестной функцией $\lambda(t)$ [17].

3 Нелокальная задача для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка

Таким образом, исходная задача (1)–(4) редуцирована к эквивалентной задаче (5)–(9), состоящей из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка с параметром и функциональных соотношений относительно параметра. В данном разделе будут приведены условия разрешимости нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка в терминах коэффициентов системы (5) и граничных матриц условия (7).

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\widetilde{u} + \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \int_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi dx + C(t,x)\int_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi + F(t,x), \tag{11}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = \dot{\varphi}(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{12}$$

$$\alpha_1(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} + \alpha_2(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} + \alpha_3(t)\widetilde{u}(t,0) + \alpha_4(t)\widetilde{u}(t,\omega) + $$
$$+\alpha_6(t)\int_0^\omega \widetilde{u}(t,\xi)d\xi = D(t), \qquad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $F(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, $D(t) \in C^1([0,T], R^n)$.

Пусть $\mu(t) = \widetilde{u}(t,0)$ и в задаче (11)–(13) осуществим замену $\widetilde{u}(t,x)$ следующим образом: $\widetilde{u}(t,x) = \widehat{u}(t,x) + \mu(t)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. Тогда задача (11)–(13) переходит к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x} + B(t,x)\widehat{u} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b \int\limits_0^x \widehat{u}(t,\xi)d\xi dx + C(t,x)\int\limits_0^x \widehat{u}(t,\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}(b-a)^2\dot{\mu}(t) + [B(t,x) + C(t,x)x]\mu(t) + F(t,x), \tag{14}$$

$$\widehat{u}(t,0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$\widehat{u}(0,x) = \dot{\varphi}(x) - \mu(0), \qquad x \in [0,\omega], \tag{16}$$

$$\alpha_1(t)\frac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} + \alpha_2(t)\frac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} + \alpha_4(t)\widehat{u}(t,\omega) + \alpha_6(t)\int\limits_0^\omega \widehat{u}(t,\xi)d\xi +$$

$$+[\alpha_3(t) + \alpha_4(t) + \alpha_6(t)\omega]\mu(t) = D(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{17}$$

С учетом условия (12) и согласования данных в точке $(0,0)$ получим

$$\mu(0) = \dot{\varphi}(0). \tag{18}$$

Решением задачи (14)–(17) называется пара функций $(\widehat{u}(t,x), \mu(t))$, где функция $\widehat{u}(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 \widehat{u}(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$, а функция $\mu(t) \in C([0,T], R^n)$ имеет производную $\dot{\mu}(t) \in C([0,T], R^n)$: и удовлетворяет системе нагруженных уравнений (14) для всех $(t,x) \in \Omega$, условиям на характеристиках (15), (16) и нелокальному условию (17).

Задачи (11)–(13) и (14)–(17) эквивалентны. Если функция $\widetilde{u}^*(t,x)$ является классическим решением задачи (11)–(13), то пара функций $(\widehat{u}^*(t,x), \mu^*(t))$, где $\widehat{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^*(t,x) - \widetilde{u}^*(t,0)$ для всех $(t,x) \in \Omega$, $\mu^*(t) = \widetilde{u}^*(t,0)$ для всех $t \in [0,T]$, будет решением задачи (14)–(17). И наоборот, если пара функций $(\widehat{u}^{**}(t,x), \mu^{**}(t))$ является решением задачи (14)–(17), то функция $\widetilde{u}^{**}(t,x)$, определяемая равенством

$$\widetilde{u}^{**}(t,x) = \widehat{u}^{**}(t,x) + \mu^{**}(t)$$

для всех $(t,x) \in \Omega$, будет классическим решением задачи (14)–(17).

При фиксированном $\mu(t)$ задача (14)–(16) является задачей Гурса для системы нагруженных гиперболических уравнений. Вопросы разрешимости задачи Гурса для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка исследованы в работах [8], [12], [15]. При предположениях относительно данных задачи и учитывая интегральное представление нагруженных слагаемых в системе (11), задача Гурса для системы нагруженных гиперболических уравнений (14)–(16): имеет единственное классическое решение при фиксированном $\mu(t)$ [18].

Пусть $\widehat{v}(t,x) = \dfrac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widehat{w}(t,x) = \dfrac{\partial \widehat{u}(t,x)}{\partial t}$. Задача Гурса (14)–(16) будет эквивалентна системе трех интегральных уравнений:

$$\widehat{w}(t,x) = \int\limits_0^x \Big\{ A(t,\xi)\widehat{v}(t,\xi) + B(t,\xi)\widehat{u}(t,\xi) \Big\} d\xi +$$

$$+ x\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b \int\limits_0^\xi \widehat{u}(t,\xi_1)d\xi_1 d\xi + \int\limits_0^x C(t,\xi)\int\limits_0^\xi \widehat{u}(t,\xi_1)d\xi_1 d\xi + x\frac{1}{2}(b-a)^2\dot{\mu}(t) +$$

$$+ \int\limits_0^x [B(t,\xi) + C(t,\xi)\xi]d\xi\mu(t) + \int\limits_0^x F(t,\xi)d\xi, \tag{19}$$

$$\widehat{v}(t,x) = \ddot{\varphi}(x) + \int\limits_0^t \Big\{ A(\tau,x)\widehat{v}(\tau,x) + B(\tau,x)\widehat{u}(\tau,x) \Big\} d\tau +$$

$$+ \int\limits_a^b \int\limits_0^x \widehat{u}(t,\xi)d\xi dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \int\limits_0^t C(\tau,x)\int\limits_0^x \widehat{u}(\tau,\xi)d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{(b-a)^2}{2}\mu(t) + \int\limits_0^t [B(\tau,x) + C(\tau,x)x]\mu(\tau)d\tau + \int\limits_0^t F(\tau,x)d\tau, \tag{20}$$

$$\widehat{u}(t,x) = \dot{\varphi}(x) - \dot{\varphi}(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t \Big\{ A(\tau,\xi)\widehat{v}(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi) \Big\} d\tau d\xi +$$

$$+ x \int\limits_a^b \int\limits_0^\xi \widehat{u}(t,\xi_1) d\xi_1 d\xi - x \int\limits_a^b \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_0^x \int\limits_0^t C(\tau,\xi) \int\limits_0^\xi \widehat{u}(\tau,\xi_1) d\xi_1 d\tau d\xi +$$

$$+ x\frac{(b-a)^2}{2}\mu(t) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t [B(\tau,\xi) + C(\tau,\xi)\xi]\mu(\tau) d\tau d\xi + \int\limits_0^x \int\limits_0^t F(\tau,\xi) d\tau d\xi. \quad (21)$$

Продифференцировав соотношение (17) по t и подставляя правую часть системы (14) вместо $\frac{\partial^2 \widehat{u}(t,x)}{\partial x \partial t}$ при $x = 0$ и $x = \omega$, с учетом условий (15), (16), получим

$$Q_1(t)\dot{\mu}(t) = -E_1(t)\mu(t) - G_1(t,\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) + H_1(t,F,D), \qquad t \in [0,T], \quad (22)$$

где $Q_1(t) = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)]\dfrac{(b-a)^2}{2} + \alpha_3(t) + \alpha_4(t) + \alpha_6(t)\omega,$

$$E_1(t) = \alpha_1(t)B(t,0) + \alpha_2(t)[B(t,\omega) + C(t,\omega)\omega] + \dot{\alpha}_3(t) + \dot{\alpha}_4(t) + \dot{\alpha}_6(t)\omega,$$

$$G_1(t,\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) = [\alpha_2(t)B(t,\omega) + \dot{\alpha}_4(t)]\widehat{u}(t,\omega) +$$

$$+ [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)]\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b \int\limits_0^x \widehat{u}(t,\xi) d\xi dx + [\alpha_2(t)C(t,\omega) + \dot{\alpha}_6(t)] \int\limits_0^\omega \widehat{u}(t,\xi) d\xi +$$

$$+ [\alpha_1(t)A(t,0) + \dot{\alpha}_1(t)]\widehat{v}(t,0) + [\alpha_2(t)A(t,\omega) + \dot{\alpha}_2(t)]\widehat{v}(t,\omega) +$$

$$+ \alpha_4(t)\widehat{w}(t,\omega) + \alpha_6(t)\int\limits_0^\omega \widehat{w}(t,\xi) d\xi,$$

$$H_1(t,F,D) = \dot{D}(t) - \alpha_1(t)F(t,0) - \alpha_2(t)F(t,\omega).$$

Как было отмечено выше, функция $\mu(t)$ удовлетворяет начальному условию (18).

Система уравнений (22) вместе с условием (18) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $\mu(t)$.

При фиксированных $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}$ и справедливости вышеприведенных предположений относительно исходных данных, а также обратимости $(n \times n)$-матрицы $Q_1(t)$ для всех $t \in [0, T]$ задача Коши (22), (18) имеет единственное решение.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

i) $(n \times n)$*-матрицы* $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ *и* n*-вектор-функция* $F(t,x)$ *непрерывны на* Ω *и* $0 \le a < b \le \omega$*;*

ii) n*-вектор-функция* $\varphi(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0,\omega]$, $(n \times n)$*-матрицы* $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,6}$, $i \neq 5$, *и* n*-вектор-функция* $D(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0,T]$*;*

iii) $(n \times n)$*-матрица* $Q_1(t) = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)]\frac{(b-a)^2}{2} + \alpha_3(t) + \alpha_4(t) + \alpha_6(t)\omega$ *обратима для всех* $t \in [0,T]$.

Тогда нелокальная задача для системы нагруженных гиперболических уравнений (11)–(13) имеет единственное классическое решение $\widetilde{u}^*(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ *и справедлива оценка*

$$\max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}||\widetilde{u}^*(t,x)||, \max_{x\in[0,\omega]}\Big|\Big|\frac{\partial \widetilde{u}^*(t,x)}{\partial x}\Big|\Big|, \max_{x\in[0,\omega]}\Big|\Big|\frac{\partial \widetilde{u}^*(t,x)}{\partial t}\Big|\Big|\Big) \le$$

$$\le K \max\Big(\max_{(t,x)\in\Omega}||F(t,x)||, \max_{x\in[0,\omega]}||\dot{\varphi}(x)||, \max_{t\in[0,T]}||D(t)||\Big),$$

где K *– постоянная, которая вычисляется с помощью коэффициентов системы (11), граничных матриц условия (13) и чисел* T, ω, a, b.

Доказательство теоремы аналогично схеме доказательства теоремы 2 из [18].

4 Алгоритм нахождения решения задачи (5)–(9)

Продифференцируем соотношение (8) по t и подставив правую часть системы (5) вместо $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}(t,x)}{\partial x \partial t}$ при $x = 0$ и $x = \omega$, получим

$$Q_2(t)\dot{\lambda}(t) = -E_2(t)\lambda(t) - G_2\Big(t, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\Big) + H_2(t, f, d_2), \qquad t \in [0,T], \quad (23)$$

где $Q_2(t) = [\beta_1(t) + \beta_2(t)](b-a) + \beta_5(t) + \beta_6(t)$,

$$E_2(t) = \beta_1(t)C(t,0) + \beta_2(t)C(t,\omega) + \dot{\beta}_5(t) + \dot{\beta}_6(t),$$

$$G_2\Big(t, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\Big) = [\beta_1(t)B(t,0) + \dot{\beta}_3(t)]\widetilde{u}(t,0) + [\beta_2(t)B(t,\omega) + \dot{\beta}_4(t)]\widetilde{u}(t,\omega) +$$

$$+[\beta_1(t) + \beta_2(t)]\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^b\int\limits_0^x \widetilde{u}(t,\xi)d\xi dx + [\beta_2(t)C(t,\omega) + \dot{\beta}_6(t)]\int\limits_0^\omega \widetilde{u}(t,\xi)d\xi +$$

$$+[\beta_1(t)A(t,0) + \dot{\beta}_1(t)]\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} + [\beta_2(t)A(t,\omega) + \dot{\beta}_2(t)]\frac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} +$$

$$+\beta_3(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,0)}{\partial t} + \beta_4(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\omega)}{\partial t} + \beta_6(t)\int\limits_0^\omega \frac{\partial \widetilde{u}(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

$$H_2(t, f, d_2) = \dot{d}_2(t) - \beta_1(t)f(t,0) - \beta_2(t)f(t,\omega).$$

Система уравнений (23) вместе с условием (9) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $\lambda(t)$.

Если известна функция $\widetilde{u}(t,x)$ и ее производные $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$, то из задачи Коши (23), (9) находим функцию $\lambda(t)$ для всех $t \in [0,T]$. Если известна функция $\lambda(t)$, то из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений (5)–(8) находим функцию $\widetilde{u}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Если известны функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\lambda(t)$, то из интегрального соотношения (10) определяем исходную неизвестную функцию $u(t,x)$.

Так как неизвестными являются как функция $\widetilde{u}(t,x)$, так и функция $\lambda(t)$, применяется итерационный метод и решение задачи (5)–(8) – пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \lambda^*(t))$ определяется, как предел последовательности пар функций $(\widetilde{u}^{(k)}(t,x), \lambda^{(k)}(t,x))$ по следующему алгоритму.

1-шаг. Используем значение функции $\widetilde{u}(t,x)$ при $t = 0$. Полагая $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x) = \dot{\varphi}(x)$, $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial \widetilde{u}^{(0)}(t,x)}{\partial x} = \ddot{\varphi}(x)$, $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t} =$

$\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(0)}(t,x)}{\partial t}=0$ в правой части системы дифференциальных уравнений (23), и решая задачу Коши (23), (9), находим первое приближение $\lambda^{(1)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений (5)–(7) при $\lambda(t)=\lambda^{(1)}(t)$, $\dot{\lambda}(t)=\dot{\lambda}^{(1)}(t)$ определяем $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2-шаг. Полагая $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(1)}(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ в правой части системы дифференциальных уравнений (23), и решая задачу Коши (23), (9), находим второе приближение $\lambda^{(2)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений (5)–(7) при $\lambda(t)=\lambda^{(2)}(t)$, $\dot{\lambda}(t)=\dot{\lambda}^{(2)}(t)$ определяем $\widetilde{u}^{(2)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

И так далее до $(k-1)$-го шага.

k-шаг. Полагая $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$ в правой части системы дифференциальных уравнений (23) и решая задачу Коши (23), (9), находим k-ое приближение $\lambda^{(k)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений (5)–(7) при $\lambda(t)=\lambda^{(k)}(t)$, $\dot{\lambda}(t)=\dot{\lambda}^{(k)}(t)$ определяем $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$, $k=1,2,\dots$.

5 Условия разрешимости задачи (1)–(4)

Таким образом, итерационный процесс строится в следующем виде:

$$u^{(0)}(t,x)=\varphi(x),\qquad u^{(k)}(t,x)=\lambda^{(k)}(t)+\int\limits_0^x\widetilde{u}^{(k)}(t,\xi)d\xi,\tag{24}$$

где последовательные приближения функций $\{\lambda^{(k)}(t)\}$ определяются из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (9) при $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)}{\partial t}$ для всех $(t,x)\in\Omega$, а последовательные приближения функций $\{\widetilde{u}^{(k)}(t,x)\}$ определяются из нелокальной задачи для системы нагруженных гиперболических уравнений (5)–(7) при $\lambda(t) = \lambda^{(k)}(t)$, $\dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}^{(k)}(t)$ для всех $t \in [0,T]$, $k = 1,2,3,\ldots$.

Следующее утверждение дает условия сходимости предложенного алгоритма и однозначной разрешимости задачи (1)–(4) в терминах исходных данных.

Теорема 2. *Пусть*

i) $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω и $0 \le a < b \le \omega$;

ii) n-вектор-функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, $(n\times n)$-матрицы $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,6}$, и n-вектор-функции $d_1(t)$, $d_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$;

iii) $(n\times n)$-матрица $Q_1(t) = [\alpha_1(t)+\alpha_2(t)]\frac{(b-a)^2}{2} + \alpha_3(t)+\alpha_4(t)+\alpha_6(t)\omega$ обратима для всех $t\in[0,T]$;

iv) $(n\times n)$-матрица $Q_2(t) = [\beta_1(t)+\beta_2(t)](b-a)+\beta_5(t)+\beta_6(t)$ обратима для всех $t\in[0,T]$.

Тогда нелокальная задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка типа Аллера (1)–(4) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)\in C(\Omega,R^n)$, к которому сходится последовательность функций $\{u^{(k)}(t,x)\}$, $k=1,2,\ldots$, определяемая итерационным процессом (24), где последовательные приближения $\{\lambda^{(k)}(t)\}$ и $\{\widetilde{u}^{(k)}(t,x)\}$ находятся из задачи с параметром (5)–(8) с помощью построенного выше алгоритма.

Доказательство Теоремы 2 проводится на основе вышеприведенного алгоритма и результатов по нелокальной задаче для системы нагруженных гиперболических уравнений.

Литература

1 Hallaire M. Le potential efficace de l'eau dans le sol an regime de dessechement, L'eau et production vegetale. – Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. – No. 9. – P. 27-62.

2 Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equat., 1972. – V. 12, No. 3. – P. 559-565.

3 Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solution of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc., 1977. – V. 63, No. 10. – P. 77-81.

4 Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc., 1979. – V. 76, No. 2. – P. 253-257.

5 Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 680-699.

6 Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 163-166.

7 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 1-264.

8 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 1-301.

9 Джохадзе О.М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 4. – С. 523-535.

10 Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 10. – С. 73-76.

11 Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 769-774.

12 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – С. 1-287.

13 Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – V. 324, No. 8. – P. 1242-1261.

14 Maher A., Utkina Ye.A. On problems reduced to the Goursat problem for a third order equation // Iran. J. Sci. Technol., Trans. A. – 2006. – V. 30, (A3). – P. 271-277.

15 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. – М.: Наука, 2012. – С. 1-232.

16 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – V. 402, No. 1. – P. 167-178.

17 Assanova A.T. Nonlocal problem for integro-differential equation Sobolev type with integral condition // Abstracts of VI congress of the Turkic world mathematical society (TWMS 2017). – Astana. October 2-5, 2017. – P. 41.

18 Асанова А.Т. О корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа // Математический журнал. – 2009. – Т. 9, № 1. – С. 26-33.

Асанова А.Т. АЛЛЕР ТЕКТЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ЕСЕПТІ ШЕШУГЕ ҚАТЫСТЫ БІР ТӘСІЛ ТУРАЛЫ

Аллер тектес үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есеп қарастырылады. Аталған есепті шешуге арналған, жаңа белгісіз функцияларды интегралдық қатынас түрінде енгізуге негізделген жаңа тәсіл ұсынылады. Бейлокал есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы мәселесі зерттеледі және оның жуық шешімдерін тұрғызу жолдары ұсынылады. Аллер тектес үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған.

Кілттік сөздер. Аллер тектес теңдеулер, үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі, бейлокал есеп, шешілімділік, алгоритм.

Assanova A.T. ON ONE APPROACH TO THE SOLVING NONLOCAL PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HALLAIRE TYPE

A nonlocal problem for the system of partial differential equations of third order of Hallaire type. For solving this problem a new approach, based on the introduction of new unknown functions in the form of integral relation, is proposed. The question of the existence of a unique classical solution of the nonlocal problem is investigated and methods for constructing its approximate solutions are proposed. Sufficient conditions for the unique solvability of the nonlocal problem for the system of the third order partial differential equations of Hallaire type are established in the terms of the initial data.

Keywords. Equation of Hallaire type, system of loaded of third order partial differential equations, nonlocal problem, solvability, algorithm.

Асанова А.Т.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Қазақстан, ул. Пушкина, 125
E-mail: anarasanova@list.ru, assanova@math.kz

Статья поступила в редакцию 23.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 19–30.

МРНТИ 27.29.15, 27.29.17

О СУЩЕСТВОВАНИИ m-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СУММИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К.Б. Бапаев, Г.К. Василина, С.С. Сламжанова

Аннотация. Доказывается существование $2m$-параметрических суммируемых многообразий для разностно-динамических систем.

Ключевые слова. Разностно-динамическая система, суммируемые многообразия.

1 Введение

Основной задачей качественной теории динамических систем или каскадов (в том числе разностных динамических систем) является их разумная классификация. Это положение высказывал С. Смейл в своей работе [1]. Одно время казалось, что отношением эквивалентности, на котором должна основываться такая классификация, может служить топологическая эквивалентность. Представлялось, что если ограничиться потоками или каскадом в конечномерных пространствах или на конечномерных многообразиях, то всюду плотное множество в пространстве потоков составляет так называемые грубые потоки, остающиеся топологически эквивалентными исходному при малых возмущениях. Однако, впоследствии выявилось, что это не так. Грубые потоки (каскады) [1]–[5] не образуют всюду плотные множества в пространстве потоков (каскадов). Поэтому понятие грубости, а тем самым, и понятие топологической эквивалентности оказалось на первый взгляд менее важным, чем это предполагалось вначале [5]–[7].

2010 Mathematics Subject Classification: 39A10, 39A30.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, проект № AP05131369.

Однако, при рассмотрении локальной задачи, т.е. при рассмотрении разностно-динамической системы (РДС) не во всей области определения, а лишь в достаточно малой окрестности точки покоя или какого-либо другого инвариантного множества, понятие топологической эквивалентности дает возможность провести удовлетворительную классификацию элементарных точек покоя и многообразий.

Предлагаемая работа посвящена в основном задачам локальной топологической эквивалентности каскада представленных РДС, удовлетворяющих условиям существования и единственности решения. При этом результаты, полученные ранее для элементарных точек покоя и замкнутых траекторий, обобщаются и на такие неэлементарные точки покоя и многообразия.

В работе методом решения поставленной задачи является метод сравнения, использующий ранее известные, а также новые, полученные в работе дискретные неравенства.

2 Постановка задачи

Рассмотрим разностно-динамическую систему (РДС)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Lambda x_n + X(n, x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= A(n) z_n + z_n + Z(n, x_n, y_n, z_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Lambda = \left(\delta_{sj} e^{i\varphi j}\right)_1^m$ – диагональная матрица, $x_n = \bar{y}_n - m$-мерные векторы (черта означает комплексную сопряженность), $A(n)$ – $k \times k$-матрица, собственные числа которой отделены (по модулю) от единицы, среди которых есть по модулю больше и меньше единицы, $X(n, x_n, y_n, z_n), Z(n, x_n, y_n, z_n)$ являются функциями, удовлетворяющими условиям Липшица с малой константой.

С помощью дискретных неравенств доказывается существование $2m$-параметрических суммируемых многообразий для РДС (1); результаты в определенном смысле являются обобщениями на РДС некоторых результатов из [5], [8].

Пусть матрица $A(n)$ удовлетворяет условиям следующего типа [9]: для $\forall n,\ n \in Z$, существуют оператор проекции $P\left(P^2 = P\right)$ и постоянные s, ρ

такие, что

$$\left|Z(n)\cdot P\cdot Z^{-1}(n)\right| \leq s\rho^{2(n-j)},\ n>j$$
$$\left|Z(n)\cdot (I-P)\cdot Z^{-1}(n)\right| \leq \rho^{(n-j)},\ j\geq n, \tag{2}$$

где $Z(n)$ – фундаментальная матрица системы

$$Z_{n+1} = A(n)z_n. \tag{3}$$

Определение 1. *Ограниченные функции $\varphi(n,x_n,y_n) : Z\times R^{zm} \to R^k$ называются суммируемыми многообразиями РДС (1), если для некоторых решений РДС*

$$x_{n+1} = \Lambda x_n + X(n,x_n,y_n,\varphi(n,x_n,y_n)), \tag{4}$$

x_n, y_n, z_n являются решениями (1) в Z такими, что $\sup\{|z_n|\}<\infty$, где $z_n=\varphi(n,x_n,y_n)\ \ \forall n : n\in Z$.

Теорема 1 *(О существовании решений РДС). Рассмотрим систему*

$$x_{n+1} = F(n,x_n), \tag{5}$$

где $F(n,x_n) : Z\times R^l \to R^l$ – функции такие, что

$$\left|F(n,x^{'}) - F(n,x^{''})\right| \leq q\left|x^{'}-x^{''}\right|$$

$\forall n : n\in Z; x^{'},x^{''}\in R^l, 0<q<1.$

Тогда при некотором n_0, $n_0\in Z$, существует единственное решение $x_{n_0}\in R^l$ РДС (4), удовлетворяющее начальным условиям $x_{n_0}=x_0$.

Доказательство. Из-за рекурсии ясно, что РДС (4) имеет единственное решение $x(n)$ такое, что $x_{n_0}=x_0$ для $n\geq n_0$. Положим $s\leq n_0$. Рассмотрим множество $I=\{s,s+1,...,n_0\}$.

Пусть E – множество всех функций $X : I\to R^l$ такое, что

$$|x| = \sup\left\{|x_n|\cdot\rho^{n_0-n}, n\in I\right\},\ \rho<1-q.$$

Определим оператор M на E следующим образом:

$$Mx(n) = x_0 - \sum_{j=n}^{n_0-1}\left(F(j,x(j)) - x(j)\right),\ n\in I.$$

Тогда, если $x_1, x_2 \in E$, то имеем

$$\rho^{n_0-n}\left|Mx_1(n)-Mx_2(n)\right| \leq q\sum\left|x_1(j)-x_2(j)\right|\rho^{j-n}\rho^{n_0-j},$$

из которого получим

$$\left|Mx_1-Mx_2\right| \leq \frac{r}{1-\rho}\left|x_1-x_2\right|.$$

Из того, что $\rho < 1-q$, следует сжимаемость оператора M в пространстве E. Поэтому существует единственный элемент $x \in E$ такой, что $Mx = x$. Что доказывает теорему.

Теорема 2. *Предположим, что РДС* (3) *удовлетворяет условию* (2) *на* Z. *Рассмотрим функцию* $Z(n, z_n) : Z \times R^k \to R^k$ *такую, что*

$$|Z(n, z(n))| \leq \alpha$$

и

$$\left|Z(n, z^{'}) - Z(n, z^{''})\right| \leq \beta\left|z^{'} - z^{''}\right|,$$

где $n \in Z,\ \alpha, \beta > 0,\ z_n, z_n^{'}, z_n^{''} \in R^k$ *и* $\frac{2s\beta}{1-\rho^2} < 1$. *Тогда РДС*

$$z_{n+1} = A(n)z_n + Z(n, z_n)$$

имеет единственное ограниченное решение $z_n, n \in Z$.

Доказательство. Обозначим через C пространство ограниченных функций $z_n : Z \to R^k$ с $|z_n| = \sup\{|z_n|\}, n \in Z$. Рассмотрим оператор M, определяемый равенством

$$Mz_n = \sum_{s=-\infty}^{n-1}\tilde{Z}(n)\bar{Z}^{-1}(s+1)Z(s, z_s) - \sum_{s=n}^{\infty}\tilde{Z}(s)(I-P)\bar{Z}^{-1}(s+1)\cdot Z(s, z_s).$$

Отсюда мы получим

$$|Mz_n| = \sum_{j=-\infty}^{n-1}\alpha s\rho^{2(n-j-1)} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha s\rho^{2(j+1-n)} \leq \frac{2s\cdot\alpha}{1-\rho^r},$$

т.е. $M : C \to B \subset C$. Если $Z', Z'' \in C$, то получим

$$\left| Mz' - Mz'' \right| \leq \frac{2s \cdot \beta}{1-\rho^2} \left| z' - z'' \right|.$$

Из того, что $\frac{2s \cdot \beta}{1-\rho^2} < 1$, следует, что M – сжимающий оператор. Поэтому существует единственный элемент $z_n \in C$ такой, что $Mz_n = z_n$. Отсюда легко убедиться, что z_n является решением системы (5).

Действительно, пусть z_n – некоторое другое ограничение решение РДС (5). Тогда $z_n = Mz_n$ – ограниченное решение РДС (2). Как известно из [9], единственное ограниченное решение (3) – это нулевое решение. Таким образом, $z_n = Mz_n$ для некоторых $n \in Z$. Поэтому РДС (5) имеет единственное ограниченное решение.

Теорема 3. *Пусть РДС* (1) X *удовлетворяет неравенству*

$$|X(n, x_1, y_1, z_1) - X(n, x_2, y_2, z_2) - \Lambda x_1 + \Lambda x_2| \leq L_1 |x_1 - x_2| + L_2 |z_1 - z_2|, \tag{6}$$

$A(n)$ *со своей обратной матрицей* $\forall n \in Z$ *удовлетворяет условию* (2) *и функции* $Z(n, x, y, z)$ *такие, что выполняется условие*

$$|Z(n, x_1, y_1, z_1) - Z(n, x_2, y_2, z_2)| \leq L_3 (|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|) \tag{7}$$

$\forall (n, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ *и* $|Z| \leq \alpha$.

Для $\forall n \in Z \quad (x_n, y_n) \in R^{rm}, z_n \in R^k$. *Тогда, если*

$$\rho\bar{k} < 1, \;\; L_1 < \frac{1}{4}, \;\; L_3 < \frac{1-\rho^2\bar{k}}{8L}, \;\; L_3 < \frac{(1-\rho\bar{k})\rho}{32LL_3},$$

то существует функция $\varphi : Z \times R^{2m} \to R^k$ *многообразия системы (1) которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$|\varphi(n, x_n, y_n)| \leq \frac{2L\alpha}{1-\rho^r}; |\varphi(n, x_1, y_1) - \varphi(n, x_2, y_2)| < \frac{8LL_3}{1-\rho^r k} |x_1 - x_2|.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство

$$B = \{\varphi(n, x, y)\} : Z \times R^{2m} \to R^k$$

такое, что

$$|\varphi(n,x,y)| \le \frac{2L\alpha}{1-\rho^r}; |\varphi(n,x_1,y_1)-\varphi(n,x_2,y_2)| \le d\,|x_1-x_2|\,; d=\frac{8LL_3}{1-\rho^2 e}.$$

Пусть M – оператор на B, определенный следующим образом:

$$M\varphi(n,x,y)=\sum_{j=-\infty}^{n-1}\tilde{Z}(n)\rho\tilde{Z}^{-1}(j^{-1})Z(j,n,x(j),y(j)),y(j,n,x(j),y(j)),$$

$$\varphi(j,n,x(j),y(j),y(j,n,x(j),y(j)))-\sum_{j=n}^{\infty}\tilde{Z}(n)(I-P)\tilde{Z}^{-1}(j+1),$$

где $x(j,n,x(j),y(j)),y(j,n,x(j),y(j))$ – решение РДС

$$x_{j+1}=\Lambda x_j+X(j,x(j),y(j),\varphi(j),x(j),y(j)) \tag{8}$$

такое, что $x(n)=x, y(n)=y$. Докажем, что значение оператора M принадлежит B. Действительно,

$$M\varphi(n,x,y)\le\sum_{j=-\infty}^{n-1}L\rho^{2(n-j-1)}\alpha+\sum_{j=n}^{\infty}L\rho^{2(-n+j+1)}\alpha\le\frac{2L\alpha}{1-\rho^r}. \tag{9}$$

Если $x_1,y_1,x_2,y_2\in R^{2m}$, из (7) мы имеем

$$|M\varphi(n,x_1,y_1)-M\varphi(n,x_2,y_2)|\le$$

$$\le\sum_{j=-\infty}^{n-1}L\rho^{2(n-j-1)}L_3(2|x_1(j)-x_2(j)|+$$

$$+|\varphi(j,x_1(j),y_1(j))-\varphi(j,x_2(j),y_2(j))|+$$

$$+\sum_{j=n}^{\infty}L\rho^{2(j+1+n)}L_3(2|x_1(j)-x_2(j)|+$$

$$+|\varphi(j,x_1(j),y_1(j))-\varphi(j,x_2(j),y_2(j))|)), \tag{10}$$

где $x_\nu(n) = x_\nu,\ y_\nu(n) = y_\nu,\ \nu = 1, 2$. Для любого решения $x(j, n, x, y)$, $y(j, n, x, y)$ РДС (8) выполняется

$$x(j) = x + \sum_{\tau=1}^{n-1} \left((I - \Lambda) \, x(\tau) - X(\tau, x(\tau), y(\tau), \varphi(\tau, x(\tau), y(\tau))) \right)$$

и

$$x(j) = x + \sum_{\tau=1}^{j-1} \left(X(\tau, x(\tau), y(\tau), \varphi(\tau, x(\tau), y(\tau))) - (I - \Lambda) \, x(\tau) \right). \qquad (11)$$

Поэтому из (6) и $\varphi \in B$ для $j < n$ получим

$$|x_1(j) - x_2(j)| = |x_1 - x_2| +$$

$$+ \sum_{\tau=j}^{n-1} \left(L_1 \left| x_1(\tau) - x_2(\tau) \right| + L_2 \left| \varphi(\tau, x_1(\tau), y_1(\tau)) - \varphi(\tau, x_2(\tau), y_2(\tau)) \right| \right) \leq$$

$$\leq |x_1(\tau) - x_2(\tau)| + \sum_{\tau=j}^{n-1} (L_1 + L_2 d) \left| x_1(\tau) - x_2(\tau) \right|,$$

где $d = \frac{8LL_3}{1-\rho^2 k}$.

Из условий Теоремы имеем $L_1 + L_2 d < \frac{1}{2}$. Поэтому из последнего соотношения получим

$$|x_1(s) - x_2(s)| \leq \frac{1}{1 - L_1 + L_2 d} (x_1 - x_2) + \sum_{\tau=j+1}^{n-1} \frac{L_1 + L_2 d}{1 - L_1 - L_2 d} \left| x_1(\tau) - x_2(\tau) \right|.$$

По Лемме 1 из [3] $\forall n > s$ имеем

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq \frac{1}{1 - L_1 - L_2 d} (x_1 - x_2) \prod_{\tau=1}^{j} \left[1 + \frac{L_1 + L_2 d}{1 - L_1 - L_2 d} \right] (n - \tau - 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - L_1 - L_2 d} \left| x_1 - x_2 \right| \exp \left(\frac{L_1 + L_2 d}{1 - L_1 - L_2 d} \right) (n - \tau - 1). \qquad (12)$$

Теперь рассмотрим случай $n < j$. Это дает

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq |x_1 - x_2| + \sum_{\tau=n}^{j-1} (L_1 + L_2 d)\, |x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,.$$

По той же Лемме 1 из [3] получим

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq |x_1 - x_2| \prod_{\tau=n}^{j} [L_1 + L_2 d]^{\tau - n} \leq$$

$$\leq |x_1 - x_2| \exp\left(L_1 + L_2 d\right) \cdot (j - n). \qquad (13)$$

Используя (10)–(12), получим

$$|M\varphi(n, x_1(n), y_1(n)) - M\varphi(n, x_2(n), y_2(n))| \leq$$

$$\leq \frac{LL_{3(1+d)}}{1 - L_1 - L_2 d}\, |x_1 - x_2| \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^{n-1} \rho^{2(n-j-1)} \cdot \exp\left(\frac{2L_1 + L_2 d}{1 - 2L_1 - L_2 d} \right) (n - j - 1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=n}^{\alpha} \rho^{2(j+1-n)} \exp\left(\frac{2L_1 + L_2 d}{1 - 2L_1 - L_2 d} \right) (j + 1 - n) \right).$$

И так как $L_1 + L_2 d < \frac{1}{2}$ и $\rho^r l < 1$, имеет место следующее неравенство:

$$|M\varphi(n, x_1(n), y_1(n)) - M\varphi(n, x_2(n), y_2(n))| \leq \frac{4LL_3}{1 - \rho^2 e}(1 + d)\, |x_1 - x_2|\,. \qquad (14)$$

Таким образом, из (7), (12) следует, что M из B.

Теперь докажем, что M – сжимающий оператор. Рассмотрим две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C$. Пусть

$$x_1(j) = x_1(j, \varphi_1) = x_1(j, n, x, y),$$

$$x_2(j) = x_2(j, \varphi_2) = x_2(j, n, x, y)$$

являются решениями

$$x(j+1) = \Lambda x(j) + X(j, x(j), y(j); \varphi_1(j, x(j), y(j)))$$

и

$$x(j+1) = \Lambda x(j) + X(j, x(j), y(j); \varphi_2(j, x(j), y(j))).$$

Соответственно из (6) и (10) для $n > j$ получим

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq \sum_{\tau=i}^{n-1} \left(L_1 \left| x_1(\tau) - x_2(\tau) \right| + L_2(\varphi_1 - \varphi_2) \right).$$

Положив $|\varphi_1 - \varphi_2| = \sup \left\{ |\varphi_1 - \varphi_2|, n \in Z, (x,y) \in R^{2m} \right\}$, из $\varphi_1, \varphi_2 \in C$ имеем

$$|\varphi_1(\tau, x_1\tau, y_1\tau) - \varphi_2(\tau, x_2\tau, y_2\tau)| \leq |\varphi_1(\tau, x_1\tau, y_1\tau) - \varphi_2(\tau, x_2\tau, y_2\tau)| +$$

$$+ |\varphi_1(\tau, x_1\tau, y_1\tau) - \varphi_2(\tau, x_2\tau, y_2\tau)| \leq C \cdot |x_1(\tau) - x_2(\tau)| + |\varphi_1 - \varphi_2|. \tag{15}$$

Если положим $L_4 = L_1 + L_2 C$, то получим

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq$$

$$\leq L_4 |x_1(j) - x_2(j)| + \sum_{\tau=j+1}^{n-1} L_4 |x_1(\tau) - x_2(\tau)| + L_2 |\varphi_1 - \varphi_2| (n-j).$$

Так как $L_4 < 1$, имеем

$$|x_1(j) - x_2(j)| \leq \frac{L_2 |\varphi_1 - \varphi_2| (n-j)}{1 - L_4} + \sum_{\tau=j+1}^{n-1} \frac{L_3}{1 - L_3} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|.$$

Следовательно,

$$\rho^{n-j-1} |x_1(j) - x_2(j)| \leq \frac{L_2 \rho^{n-j-1}(n-j)}{1 - L_4} |\varphi_1 - \varphi_2| +$$

$$+ \frac{L_4}{1 - L_3} \sum_{\tau=j+1}^{n-1} \rho^{\tau-j} \rho^{n-\tau-1} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|.$$

Учитывая, что $\exp(-(n-j)\ln\rho) > 1 + (n-j)\ln\rho^{-1}$ или то же самое $\rho^{(n-j)}(n-j) \leq \frac{1}{\ln \rho^{-1}}$, получим

$$\rho^{n-j-1} |x_1(j) - x_2(j)| \leq$$

$$\leq \frac{L_2\rho^{-1}}{(1-L_4)\ln\rho^{-1}}\left|\varphi_1-\varphi_2\right| + \sum_{\tau=j+1}^{n-1}\frac{L_4}{1-L_4}\rho^{n-\tau-1}\left|x_1(\tau)-x_2(\tau)\right|.$$

Применяя Лемму 1 из [10], имеем

$$n>j:\rho^{n-j-1}\left|x_1(j)-x_2(j)\right| \leq \frac{L_2\rho^{-1}}{(1-L_4)\ln\rho^{-1}}(\varphi_1-\varphi_2)\exp\frac{L_4}{1-L_4}(n-j-1). \tag{16}$$

Из (6) и (11) для $n\leq j$ убедимся, что

$$\left|x_1(j)-x_2(j)\right| \leq \sum_{\tau=n}^{j-1} L_1\left|x_1(\tau)-x_2(\tau)\right| + L_2\left|\varphi_1(\tau,x_1(\tau),y_1(\tau))-\varphi_2(\tau,x_2(\tau),y_2(\tau))\right|.$$

Следовательно, по Лемме 1 из [10] и рассуждая как выше, получим

$$\rho^{-n+j+1}\left|x_1(j)-x_2(j)\right| \leq \frac{L_2}{\ln\rho^{-1}}(\varphi_1-\varphi_2)\exp((j-n)L_4).$$

Отсюда, из (12),(13),(16) и из неравенства $\rho\exp\frac{L_4}{1-L_4}<\rho l$ имеем

$$\left|M\varphi_1(n,x_1,y_1)-M\varphi_2(n,x_2,y_2)\right| \leq \frac{2LL_2L_3\rho^3(1+c)}{(1-L_4)(1-\rho e)\ln\rho^{-1}} + \frac{2LL_3}{1-\rho^2}\left|\varphi_1-\varphi_2\right|.$$

Из того, что $\frac{2LL_3}{1-\rho^2}<\frac{1}{4}$ и $\rho k<1$, получим

$$\frac{2LL_2L_3(1+c)}{(1-L_4)(1-\rho\bar{k})\ln\rho^{-1}} \leq \frac{1}{4\ln\rho^{-1}} < \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем, что M – сжимающий оператор. Поэтому существует единственное $\varphi\in C$ такое, что $M\varphi=\varphi$. Это показывает, что если $x(n)$ являются решениями $x_n+1=\Lambda x_n+X(n,x_n,y_n,\varphi)$, тогда x_n,y_n,φ являются решениями системы (1). Пусть теперь x_n,y_n,z_n в Z такие, что $\sup\{\left|z_n\right|,n\in Z\}<\alpha$. Тогда по Теореме 2 имеем $z_n=\varphi(n,x_n,y_n)$. Следовательно, функции $\varphi(n,x_n,y_n)$ являются суммируемыми многообразиями РДС (1). Теорема доказана.

Литература

1 Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 73. – P. 747-817.

2 Зубов В.И. Устойчивость движения. – М.: Высшая школа, 1973. – 467 с.

3 Власенко И.Ю., Максименко С.И., Полулях Е.А. Топологические методы в изучении групп преобразований. – Москва-Ижевск: ИКИ, НИЦ РХД, 2006. – 268 с.

4 Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. – Киев, 2006. – 334 с.

5 Бопаев К.Б. Устойчивость решений нелинейных итерационных систем уравнений // Динамика сплошной среды. – 1999. – Вып. 114. – С. 52-60.

6 Пилюгин С.Ю. Пространства динамических систем. – Москва-Ижевск: ИКИ, НИЦ РХД, 2008. – 272 с.

7 Халил Х.К. Нелинейные системы. – Москва-Ижевск:ИКИ, НИЦ РХД, 2009. – 832 с.

8 Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 467 с.

9 Бопаев К.Б. Исследование асимптотического поведения решений РДС // Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 4 (18). – С. 52-60.

10 Бопаев К.Б. О некоторых новых дискретных неравенствах // University Annual Applied Mathematics. Book 3. – 1982. – V. 18. – P. 91-100.

Бапаев К.Б., Василина Г.К., Сламжанова С.С. АЙЫРЫМДЫ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР ҮШІН m-ПАРАМЕТРЛІК ҚОСЫНДЫЛАНАТЫН КӨПБЕЙНЕЛЕРДІҢ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ

Айырымды-динамикалық жүйелер үшін $2m$-параметрлік қосындыланатын көпбейнелердің бар болуы дәлелденеді.

Кілттік сөздер. Айырымды-динамикалық жүйе, қосындыланатын көпбейнелер.

Bapaev K.B., Vassilina G.K., Slamzhanova S.S. ON EXISTENCE OF m-PARAMETRIC SUMMABLE MANIFOLDS FOR DIFFERENCE-DYNAMIC SYSTEMS

The existence of $2m$-parameter summable manifolds for difference-dynamical systems is proved.

Key words. Difference-dynamical system, summable manifolds.

Бапаев К.Б.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: v_gulmira@mail.ru

Василина Г.К.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
Алматинский университет энергетики и связи
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126
E-mail: v_gulmira@mail.ru

Сламжанова С.С.
Жетысуский Государственный университет им. И. Жансугурова
040000, Талдыкорган, ул. Жансугурова, 187а
E-mail: beksultan.82e@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30.03.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 31–46.

МРНТИ 35Q79, 35K05, 35K20

О КОНУСАХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Н.А. Бокаев, М.Л. Гольдман, Г.Ж. Каршыгина

Аннотация. Рассматриваются различные конусы монотонных функций на положительной полуоси. Устанавливаются условия поточечного и порядкового накрывания рассматриваемых конусов при отношении определенного порядка.

Ключевые слова. Конусы убывающих перестановок, накрывание конусов, перестановочно инвариантные пространства, банаховы функциональные пространства.

1 Введение

Работа посвящена исследованию свойств конусов монотонных функций на положительной полуоси. При исследовании вопросов вложения пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства возникает необходимость рассмотрения конусов убывающих перестановок для потенциалов [1]–[5]. В терминах влечения таких конусов можно сформулировать критерии вложения потенциалов в перестановочно инвариантные пространства. Отметим, что конусы убывающих перестановок потенциалов устроены довольно сложно. Поэтому актуален вопрос об их эквивалентных описаниях в более прозрачных терминах.

Приведем необходимые в дальнейшем понятия банахова функционального пространства, перестановочно инвариантного пространства и порядкового накрывания конусов неотрицательных измеримых функций. Мы опираемся на понятия, введенные в книгах С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова [6] и К. Беннетта и Р. Шарпли [7], а также на понятия, приведенные в работе [5].

Пусть (S, Σ, μ) есть пространство с мерой. Здесь $\Sigma - \sigma$-алгебра подмножеств множества S, на которых определена неотрицательная σ-конечная,

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 42A16.

σ-аддитивная мера μ. Через $L_0 = L_0(S, \Sigma, \mu)$ обозначим множество μ-измеримых вещественнозначных функций

$$f : S \to R, L_0^+ = \{f \in L_0 : f \geq 0\}.$$

Определение 1 (см. [4]). *Отображение $\rho : L_0^+ \to [0, \infty]$ называется функциональной нормой (кратко: ФН), если для всех $f, g, f_n \in L_0^+$, $n \in N$ выполнены условия:*

$(P1)$ $\rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0$, $\mu-$ почти всюду (кратко: $\mu-$ п.в);

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f), \alpha \geq 0; \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ (свойства нормы);

$(P2)$ $f \leq g$, ($\mu-$ п.в.) $\Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$ (монотонность нормы);

$(P3)$ $f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \to \rho(f)(n \to \infty)$ (свойство Фату);

$(P4)$ $0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \int\limits_\sigma f d\mu \leq c_\sigma \rho(f), f \in L_0^+$ (локальная интегрируемость);

$(P5)$ $0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_\sigma) < \infty$ (конечность ФН для характеристических функций (χ_σ) множеств конечной меры).

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что $f_n \leq f_{n+1}, \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ($\mu-$ п.в).

Определение 2. *Пусть ρ есть ФН. Множество $X = X(\rho)$ функций из L_0, для которых $\rho(|f|) < \infty$, называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным ФН ρ. Для $f \in X$ полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Пусть на L_0^+ введены отношения частичного порядка и эквивалентности: $f \prec g$ со свойствами транзитивности, т.е. $f \prec f$,

$$f \prec g, \quad g \prec h \Rightarrow f \prec h; \;\; f \approx g \Leftrightarrow f \prec g \prec f.$$

Считаем, что отношение порядка починено поточечной оценке μ-п.в., т.е.

$$1) \;\; f \leq g, \quad (\mu - \texttt{п.в.}) \Rightarrow f \prec g; \qquad 2) \;\; f_n \uparrow f \quad \Rightarrow \quad f_n \underline{\uparrow} \; f.$$

Здесь $f_n \underline{\uparrow} f$ означает, что $f_n \prec f_{n+1}$; $f = [\sup] f_n$, т.е. $f_n \prec f$, $n \in N$, и, если $f_n \prec \hat{f}$, $n \in N$, то $f \prec \hat{f}$.

Базовый пример отношения порядка: $f \prec g \Leftrightarrow f \leq g$, μ-п.в.$\Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$.

Нас будут интересовать отношения порядка, связанные с убывающими перестановками функций. Обозначим для $f \in L_0$

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in S : \ |f(x)| > y\}, \quad y \in [0, \infty)$$

Лебегова функция распределения. Через $\overset{\bullet}{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$, для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности, т.е. $\exists\, y_0 \in [0, \infty) : \lambda_f(y_0) < \infty$. Для $f \in \overset{\bullet}{L}_0$ введем убывающую перестановку f^*, как правую обратную функцию к убывающей функции λ_f, т.е.

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0, \infty) : \quad \lambda_f(y) \le t\}, \quad t \in R_+ = (0, \infty).$$

Известно, что $0 \le f^* \downarrow; f^*(t+0) = f^*(t), t \in R_+;$ f^* равноизмерима с $|f|$, т.е. $\mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\} = \lambda_f(y), y \in [0, \infty)$, кроме того, для $f \in \overset{\bullet}{L}_0$ имеем $\lambda_f(y) \to 0, (y \to +\infty) \Leftrightarrow |f(x)| < \infty, (\mu - \texttt{п.в.})$ на S. Определим отношения порядка для функций из $\overset{\bullet}{L}{}_0^+$:

$$1) \quad f \prec g \Leftrightarrow \quad f^*(t) \le g^*(t); \quad t \in (0, \mu(S)), \tag{1}$$

$$2) \quad f \prec g \Leftrightarrow \quad \int_0^t f^* d\tau \le \int_0^t g^* d\tau; \quad t \in (0, \mu(S)). \tag{2}$$

Отношения (1) и (2) подчинены поточечной оценке μ-п.в. Эквивалентность функций в смысле отношения (1) означает их равноизмеримость.

Определение 3. *Пусть ρ есть функциональная норма. Скажем, что ρ согласована с отношением порядка $\prec$, если для $f,\ g \in L_0^+,\ f \prec g$ имеем $\rho(f) \le \rho(g)$.*

Отметим, что по свойству $(P2)$ любая ФН согласована с поточечной оценкой

$$f \le g \quad (\mu - \texttt{п.в.}) \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g).$$

Определение 4. *ФН ρ называется перестановочно инвариантной, если она согласована с отношением порядка (1), т.е.*

$$f^* \le g^* \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g).$$

БФП $X = X(\rho)$, порожденное перестановочно инвариантной ФН ρ, будем называть перестановочно инвариантным пространством (кратко: ПИП).

Пусть $T \in (0,\infty]$. Через $\Omega(T)$ обозначим множество функций φ на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со свойствами

$$\begin{cases} 1) \quad 0<\varphi(t)\downarrow, \quad \varphi(t+0)=\varphi(t), \quad \int\limits_0^t \varphi d\xi<\infty; \quad t\in(0,T); \\ 2) \quad \texttt{если} \ \ T<\infty, \texttt{то} \quad \varphi(t)=0, \quad t\in[T,\infty). \end{cases} \tag{3}$$

При $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \Omega(T)$ введем функции

$$f_\varphi(t,\tau)=\varphi(\max\{t,\tau\})=\begin{cases}\varphi(t), & 0<\tau\le t,\\ \varphi(\tau), & t<\tau<\infty;\end{cases} \tag{4}$$

$$\check{f}_\varphi(t,\tau)=\varphi(\max\{2^n t,2^n\tau\})=\begin{cases}\varphi(2^n t), & 0<\tau\le t,\\ \varphi(2^n\tau), & t<\tau<\infty;\end{cases} \tag{5}$$

$$\tilde{f}_\varphi(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi, & 0<\tau\le t,;\\ \varphi(\tau), & t<\tau<\infty.\end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что при $T<\infty$

$$f_\varphi(t,\tau)=0, \ t\ge T, \ \tau\in\mathbb{R}_+ \ \check{f}_\varphi(t,\tau)=0, \ t\ge 2^{-n}T, \ \tau\in\mathbb{R}_+.$$

Пусть $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ есть ПИП с нормой $\|\cdot\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}$, $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ – ассоциированное ПИП (см. [7]),

$$\tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+)=\left\{g\in\tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+): \ 0\le g\downarrow; \ g(t+0)=g(t), \ t\in\mathbb{R}_+\right\}$$

и при $T<\infty$

$$\tilde{E}^{\downarrow}(0,T)=\left\{g\in\tilde{E}^{\downarrow}(\mathbb{R}_+): \quad g(t)=0, \ \ t\in[T,\infty)\right\}.$$

Введем конусы неотрицательных функций на $\mathbb{R}_+$:

$$K(T) = K_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{ h(t) \equiv h(g;t) := \int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g(\tau)d\tau : \quad g \in \tilde{E}^\downarrow(0,T) \right\}; \quad (7)$$

$$\check{K}(T) = \check{K}_{\varphi,E}(T) = \left\{ \check{h}(t) \equiv \check{h}(g;t) := \int\limits_0^T \check{f}_\varphi(t,\tau)\check{g}(\tau)d\tau : \quad \check{g} \in E^\downarrow(0,T) \right\}; \quad (8)$$

$$\tilde{K}(T) = \tilde{K}_{\varphi,\tilde{E}}(T) = \left\{ \tilde{h}(t) \equiv \tilde{h}(g;t) := \int\limits_0^\infty \tilde{f}_\varphi(t,\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau : \quad \tilde{g} \in E^\downarrow(0,T) \right\}, \quad (9)$$

снабдив их положительно однородными функционалами (соответственно)

$$\rho_{K(T)}(h) = \inf \left\{ \|g\|_{\tilde{E}} : \quad g \in \tilde{E}^\downarrow(0,T); \quad h(g;t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \right\}; \qquad (10)$$

$$\rho_{\check{K}}(\check{h}) = \inf \left\{ \|\check{g}\|_{\tilde{E}} : \quad \check{g} \in \tilde{E}^\downarrow(0,T); \ \check{h}(\check{g};t) = \check{h}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \right\}; \qquad (11)$$

$$\rho_{\tilde{K}}(\tilde{h}) = \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{\tilde{E}} : \quad \tilde{g} \in \tilde{E}^\downarrow(0,T); \ \tilde{h}(\tilde{g};t) = \tilde{h}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \right\}. \qquad (12)$$

В функционале (10) нижняя грань берется по всем функциям $g \in \tilde{E}^\downarrow(0,T)$, для которых представление $h(g;t)$ в виде интеграла (7) совпадает с данной функцией $h \in K(T)$. Аналогично понимаются функционалы (11), (12). Положительная однородность функционалов означает, что $h \in K(T)$, $\alpha \geq 0 \Rightarrow \quad \rho_{K(T)}(\alpha h) = \alpha \rho_{K(T)}(h)$; аналогично для $\rho_{\check{K}}$ и $\rho_{\tilde{K}}$.

Замечание 1. *Для $\varphi \in \Omega(T)$ справедливы неравенства*

$$\varphi(2^n t) \leq \varphi(t); \quad \varphi(t) \leq \frac{1}{t}\int_0^t \varphi d\xi, \quad t \in \mathbb{R}_+. \qquad (13)$$

Поэтому

$$\check{f}_\varphi(t,\tau) \leq f_\varphi(t,\tau) \leq \tilde{f}_\varphi(t,\tau), \quad t,\tau \in \mathbb{R}_+. \qquad (14)$$

Замечание 2. *Всюду в данной работе мы требуем, чтобы при любом $t \in \mathbb{R}_+$ по переменной τ имели место включения*

$$f_\varphi(t,\cdot) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+),\ \check{f}_\varphi(t,\cdot) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+),\ \tilde{f}_\varphi(t,\cdot) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+). \tag{15}$$

В случае $T < \infty$ условия (15) выполнены для любой $\varphi \in \Omega(T)$ и при любом ПИП $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, т.к. в этом случае $0 \leq f_\varphi(t,\tau),\ \check{f}_\varphi(t,\tau),\ \tilde{f}_\varphi(t,\tau)$ – ограниченные убывающие функции переменной τ с компактным носителем.

Такие функции принадлежат $L_1(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+)$ а, значит, и любому ПИП $\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$.

В случае $T = \infty$ каждое из условий (15) эквивалентно тому, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(\tau)\chi_{(t,\infty)}(\tau) \in \tilde{E}'(\mathbb{R}_+). \tag{16}$$

Из условий (15) следуют оценки при $t \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq h(t) \leq \| f_\varphi(t,\cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{K(T)}(h),\ h \in K(T); \tag{17}$$

$$0 \leq \check{h}(t) \leq \| \check{f}_\varphi(t,\cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{\check{K}(T)}(\check{h}),\ \check{h} \in \check{K}(T); \tag{18}$$

$$0 \leq \tilde{h}(t) \leq \| \tilde{f}_\varphi(t,\cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}),\ \tilde{h} \in \tilde{K}(T). \tag{19}$$

Действительно, для $h \in K(T)$ из представления (7) по неравенству Гельдера следует, что

$$0 \leq h(t) \leq \| f_\varphi(t,\cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \| g \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}\ \forall g \in E^{\downarrow}(0,T).$$

Переходя к нижней грани по всем $g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$, для которых $h(g;t) = h(t)$ получим, в силу (10) неравенство (17). Аналогично выводятся неравенства (18) и (19).

Замечание 3. *Из оценок (17)–(19) следует невырожденность функционалов (10)–(12). Действительно, если $h \in K(T)$ для $\rho_{K(T)}(h) = 0$, то из (17) следует, что $h(t) = 0, t \in \mathbb{R}_+$. Аналогично для $\check{h} \in \check{K}(T)$ и $\tilde{h} \in \tilde{K}(T)$.*

2 О накрывании конусов монотонных функций на положительной полуоси

Следуя [5], приведем определение порядков. Пусть на подмножестве $\mathfrak{L} \subset L_0^+(\mathbb{R}_+)$ введено отношение частичного порядка $\prec$, подчиненное поточечной оценке почти всюду: $h_1, h_2 \in \mathfrak{L},\ h_1 \leq h_2$ п.в. на $\mathbb{R}_+$ влечет, что

$h_1 \prec h_2$. Пусть $K,\ M \subset \mathfrak{L}$ – некоторые конусы, снабженные невырожденными положительно однородными функционалами ρ_K и ρ_M.

Определение 5. *Конус M порядково накрывает конус K при отношении порядка $\prec$ с константами накрывания $c_0 \in (0,\infty)$, $c_1 \in [0,\infty)$, если для любой $h_1 \in K$ найдется $h_2 \in M$, такая что*

$$\rho_M(h_2) \leq c_0\rho_K(h_1);\ h_1 \prec h_2 + c_1\rho_K(h_1). \tag{20}$$

В случае, когда отношение порядка определяется поточечной оценкой, мы говорим о поточечном накрывании конусов с константами накрывания c_0, c_1.

Обозначения: $K \prec M$ – конус M порядково накрывает конус K; $K \approx M \Leftrightarrow K \prec M \prec K$ – порядковая эквивалентность конусов.

Определение 6. *Конус M поточечно накрывает конус K с константами накрывания $c_0 \in (0,\infty)$, $c_1 \in [0,\infty)$, если для любой $h_1 \in K$ найдется $h_2 \in M$, такая что*

$$\rho_M(h_2) \leq c_0\rho_K(h_1), \quad h_1(t) \leq h_2(t) + c_1\rho_K(h_1) \quad (\texttt{п.в.}). \tag{21}$$

Поточечное накрывание: $K \leq M$, поточечная эквивалентность: $K \cong M$.

При отношении порядка, подчиненном поточечной оценке, имеем

$$K \leq M \Rightarrow K \prec M; \quad K \cong M \Rightarrow K \approx M. \tag{22}$$

Нас будет интересовать, в первую очередь, отношение порядка с поточечной оценкой: для $f_1, f_2 \in L_0^+(\mathbb{R}_+)$ имеем $f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq f_2$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим также множество $\mathfrak{L}$ функций $f \in L_0^+(\mathbb{R}_+)$, для которых их лебеговы функции распределения

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in \mathbb{R}_+ : (x) > y\},\ y \in [0,\infty),$$

не тождественны бесконечности, т.е. $\exists y_0 \in [0,\infty) : \lambda_f(y_0) < \infty$. Для $f \in \mathfrak{L}$ введем убывающую перестановку f^*, как правую обратную функцию к убывающей функции λ_f, т.е.

$$f^*(t) = inf\{y \in [0,\infty) : \ \lambda_f(y) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определим отношение порядка для $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}_+)$: считаем, что $f_1 \prec f_2$, если

$$\int\limits_0^t f_1^* d\tau \le \int\limits_0^t f_2^* d\tau, \; t \in \mathbb{R}_+. \tag{23}$$

Оно подчинено отношению порядка с поточечной оценкой:

$$0 \le f_1 \le f_2 \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{R}_+ \Rightarrow f_1^* \le f_2^* \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{R}_+ \Rightarrow (23).$$

Приведем результат о взаимном поточечном накрывании конусов $K(T),\ \check{K}(T),\ \tilde{K}(T)$.

Теорема 1.

1. В обозначениях и условиях (3)–(15) справедливы поточечные накрывания

$$(A) : \check{K}(T) \le K(T); \quad K(T) \le \tilde{K}(T) \tag{24}$$

с константами накрывания $c_0(A) \le 1 + \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0;\; c_1(A) = 0.$

2. Пусть, выполнены условия части 1 и еще существует постоянная $c \in [1, \infty)$ *такая, что*

$$\varphi(t) \le c\varphi(2^n t), \quad t \in (0, \;\; 2^{-n}T) \tag{25}$$

(при $T = \infty$ *в (25) при любом* $t \in \mathbb{R}_+$*). Тогда справедливо поточечное накрывание*

$$(B) : K(T) \le \check{K}(T) \tag{26}$$

с константами накрывания $c_0(B) \le c2^n \parallel \sigma_{2^n} \parallel,$

$$c_1(B) = 0, \text{ если } T = \infty;\; c_1(B) = \parallel f_\varphi(2^{-n}T, \cdot) \parallel_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}, \text{ если } T < \infty. \tag{27}$$

Здесь $(\sigma_{2^n} g; \tau) = g(2^n \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+$ *– оператор растяжения,* $\parallel \sigma_{2^n} \parallel$ *– норма оператора* $\sigma_{2^n} : \;\; \tilde{E}(\mathbb{R}_+) \to \tilde{E}(\mathbb{R}_+).$

3. Пусть выполнены условия части 1 и

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(T) := \sup_{t \in (0,T)} \frac{\int\limits_0^t \varphi d\tau}{t\varphi(t)} < \infty. \tag{28}$$

Тогда имеет место поточечное накрывание

$$(\mathcal{D}) : \tilde{K}(T) \leq K(T) \tag{29}$$

с константами накрывания

$$c_0(\mathcal{D}) \leq (1+\varepsilon)A_\varphi \ \forall \varepsilon > 0; \tag{30}$$

$$c_1(\mathcal{D}) = 0, \ \textit{если}\ T = \infty; \ c_1(\mathcal{D}) = \| \ \tilde{f}_\varphi(T,\cdot) \ \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)}, \ \textit{если}\ T < \infty. \tag{31}$$

Замечание 4. *В условиях части 3 Теоремы 1 справедлива оценка (25) с постоянной* $c = 2^n A_\varphi$ *и соответственно имеет место накрывание (26) с константами накрывания* $c_0(B) \leq A_\varphi 2^{2n} \parallel \sigma_{2^n} \parallel$ *и* $c_1(B)$ *вида (27).*

Приведем результат о порядковом накрывании конусов $K(T)$, $\check{K}(T)$.

Теорема 2. *В обозначениях и условиях (3)–(15) справедливо порядковое накрывание*

$$(E) : K(T) \prec \check{K}(T) \tag{32}$$

при отношении порядка (23) с константами накрывания

$$c_0(E) \leq 2^{2n+1} \parallel \sigma_{2^n} \parallel; \quad c_1(E) = 0. \tag{33}$$

Следствие 1. *В условиях части 3 Теоремы 1 имеет место поточечная эквивалентность конусов*

$$\check{K}(T) \cong \tilde{K}(T) \cong K(T). \tag{34}$$

Действительно, с учетом Замечания 4 имеем накрывания

$$\tilde{K}(T) \leq K(T) \leq \check{K}(T),$$

которые вместе с накрыванием (24) дают эквивалентности (34).

Следствие 2. *В условиях части 2 Теоремы 1 имеет место поточечная эквивалентность конусов*

$$\check{K}(T) \cong K(T). \tag{35}$$

Она следует из накрываний (24) и (26).

Следствие 3. *В условиях Теоремы 2 имеет место порядковая эквивалентность конусов*

$$\check{K}(T) \approx K(T) \tag{36}$$

при отношении порядка (23).

Это следует из источечного накрывания $\check{K}(T) \leq K(T)$ и порядкового накрывания (32).

3 Доказательство Теорем 1 и 2

3.1 Доказательство Теоремы 1, часть 1

Докажем первое накрывание (24). Для $\check{h} \in \check{K}(T)$ при любой постоянной $c > 1$ найдем функцию $\check{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$ такую, что $\check{h}(t) = \check{h}(\check{g};t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ и $\| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq c\rho_{\check{K}(T)}(\check{h})$ (см. (8), (11)). Положим $h(t) := h(\check{g};t)$ т.е. $h(t) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(t,\tau)\check{g}(\tau)d\tau \in K(T)$; $\rho_{K(T)}(h) \leq \| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)}$ (см. (7), (10)). При этом из (14) следует неравенство

$$\check{h}(t) = \int_0^{\infty} \check{f}_{\varphi}(t,\tau)\check{g}(\tau)d\tau \leq \int_0^{\infty} f_{\varphi}(t,\tau)\check{g}(\tau)d\tau = h(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+,$$

кроме того, $\rho_{K(T)}(h) \leq \| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq c\rho_{\check{K}(T)}(\check{h})$.

Эти оценки доказывают накрывание $\check{K}(T) \leq K(T)$ с константами накрывания $c_0(A) > 1$ – любая; $c_1(A) = 0$.

Аналогично доказывается второе накрывание в (24): $K(T) \leq \tilde{K}(T)$ с такими же константами накрывания (используем второе неравенство в (14)).

3.2 Доказательство Теоремы 1, часть 2

Пусть $h \in K(T)$. Тогда $\exists g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T):\ h(t) = h(g;t)$, $\| g \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq 2\rho_{K(T)}(h)$. Введем

$$\check{g}(\tau) = c2^n g(2^n\tau) \in \tilde{E}^{\downarrow}(0, 2^{-n}T). \tag{37}$$

Здесь $c \in [1,\infty)$ – постоянная из условия (25).

Имеем в силу (7)

$$h \in K(T) \Rightarrow h(t) = \int\limits_0^{\infty} f_{\varphi}(t,\tau)g(\tau)d\tau = \int\limits_0^{\infty} \check{f}_{\varphi}(2^{-n}t, 2^{-n}\tau)g(\tau)d\tau =$$

$$= 2^n \int\limits_0^\infty \check{f}_\varphi(2^{-n}t,s)g(2^n s)ds = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty \check{f}_\varphi(2^{-n}t,s)\check{g}(s)ds. \tag{38}$$

Обозначим

$$\check{h}(t) = \int\limits_0^\infty \check{f}_\varphi(t,s)\check{g}(s)ds \in \check{K}(T), \tag{39}$$

Тогда в силу (37)

$$\rho_{\check{K}(T)}(\check{h}) \leq \| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} = c2^n \| \sigma_{2^n}(g) \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq c2^n \| \sigma_{2^n} \| \| g \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq c2^{n+1} \| \sigma_{2^n} \| \rho_{K(T)}(h). \tag{40}$$

Здесь $\sigma_{2^n}(g,s) = g(2^n s)$; $\sigma_{2^n} : \tilde{E}(\mathbb{R}_+) \to \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ – ограниченный оператор, $\| \sigma_{2^n} \| < \infty$.

Итак, для любой $h \in K(T)$ нашли $\check{h} \in \check{K}(T)$ такую, что $\rho_{\check{K}(T)}(\check{h}) \leq c_0 \rho_{K(T)}(h)$, где

$$c_0 = c2^{n+1} \| \sigma_{2^n} \| \in \mathbb{R}_+.$$

Далее из (38) и (39) следует, что

$$h(t) = \frac{1}{c}\check{h}(2^{-n}t) = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty \check{f}_\varphi(2^{-n}t,s)\check{g}(s)ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

т.е.

$$\frac{1}{c}\check{h}(t) = h(2^n t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(2^n t,\tau)g(\tau)d\tau, t \in \mathbb{R}_+. \tag{41}$$

Покажем, что при $t \in (0, 2^{-n}T)$ верна оценка для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$

$$f_\varphi(2^n t,\tau) \geq \frac{1}{c} f_\varphi(t,\tau). \tag{42}$$

Действительно, при $t \in (0, 2^{-n}T)$ имеем

$$f_\varphi(2^n t,\tau) = \left\{\begin{matrix} \varphi(2^n t), & 0 < \tau \leq 2^n t \\ \varphi(\tau), & \tau > 2^n t \end{matrix}\right\} \geq \left\{\begin{matrix} \frac{1}{c}\varphi(t), & 0 < \tau \leq 2^n t \\ \varphi(\tau), & \tau > 2^n t \end{matrix}\right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{c} f_\varphi(t,\tau).$$

Из (41) и (42) следует, что $\frac{1}{c}\check{h}(t) \geq \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g(\tau)d\tau = \frac{1}{c}h(t)$, т.е.

$$h(t) \leq \check{h}(t), \quad t \in (0, \quad 2^{-n}T). \tag{43}$$

При $T = \infty$ это неравенство верно для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть теперь $T < \infty$.

При $t \in [2^{-n}T, T)$ имеем $\check{h}(t) = 0$ (т.к. $\check{f}_\varphi(t,\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}_+$) и в силу (17) при всех $t \in \mathbb{R}_+$

$$h(t) \leq h(2^{-n}T) \leq \| f_\varphi(2^{-n}T, \cdot) \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{K(T)}(h) = \check{h}(t) + c_1\rho_{K(T)}(h). \tag{44}$$

Неравенство (43) при $T = \infty$ или (3.8) при $T < \infty$ вместе с (40) доказывает (26)–(27).

Доказательство части 3 Теоремы 1

Пусть $\tilde{h} \in \tilde{K}(T)$. Согласно (9), (12) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$ такая, что

$$\tilde{h}(t) = \tilde{h}(\tilde{g};t) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}_\varphi(t,\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau; \quad \| \tilde{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \in (1+\varepsilon)\rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}).$$

Определим тогда $h \in K(T)$ формулой

$$h(t) = h(\tilde{g};t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)A_\varphi\tilde{g}(\tau)d\tau.$$

Здесь $A_\varphi\tilde{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$ и

$$\rho_{K(T)}(h) \leq \| A_\varphi\tilde{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} = A_\varphi \| \tilde{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \leq (1+\varepsilon)A_\varphi\rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}). \tag{45}$$

Отметим, что $A_\varphi \geq 1$ в силу неравенства (13), так что из (6) получаем при $t \in (0,T)$

$$\tilde{f}_\varphi(t,\tau) \leq \begin{Bmatrix} A_\varphi\varphi(t), & 0 < \tau \leq t, \\ \varphi(\tau), & t < \tau < \infty \end{Bmatrix} \leq A_\varphi \begin{Bmatrix} \varphi(t), & 0 < \tau \leq t, \\ \varphi(\tau), & t < \tau < \infty \end{Bmatrix} = A_\varphi f_\varphi(t,\tau).$$

Значит, при $t \in (0, T)$

$$\tilde{h}(t) = \int_0^\infty \tilde{f}_\varphi(t,\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau \le A_\varphi \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau)\tilde{g}(\tau)d\tau = h(t). \tag{46}$$

Полученные оценки при $T = \infty$ доказывают накрывание $\tilde{K}(\infty) \le K(\infty)$ с константами накрывания $c_0 \le (1+\varepsilon)A_\varphi$, $c_1 = 0$ (при любом $\varepsilon > 0$).

При $T < \infty$ неравенство (46) нужно дополнить соответствующей оценкой для $t \in [T, \infty)$. Для таких значений t имеем $f_\varphi(t,\tau) = 0, \tau \in \mathbb{R}_+$, так что $h(t) = 0, t \in [T, \infty)$. В тоже время $\tilde{g}(\tau) = 0, \tau \in [T, \infty)$, так что $\tilde{h}(t) = \int\limits_0^T \tilde{f}_\varphi(t,\tau)g(\tau)d\tau$.

В формуле (6) при $\tau \in (0,T), t \in [T,\infty)$ учтем, что $\varphi(\xi) = 0, \xi \in [T,t]$, так что

$$\tilde{f}_\varphi(t,\tau) = \frac{1}{t}\int\limits_0^T \varphi(\xi)d\xi \le \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi(\xi)d\xi = \tilde{f}_\varphi(T,\tau) \Rightarrow \tilde{h}(t) \le \tilde{h}(T).$$

Отсюда и из (19) следует, что при $t \in [T, \infty)$

$$\tilde{h}(t) \le \parallel \tilde{f}_\varphi(T,\cdot) \parallel_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}) = h(t) + \parallel \tilde{f}_\varphi(T,\cdot) \parallel_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}).$$

Вместе с неравенством (46) это дает

$$\tilde{h}(t) \le h(t) + \parallel \tilde{f}_\varphi(T,\cdot) \parallel_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \rho_{\tilde{K}(T)}(\tilde{h}), t \in \mathbb{R}_+. \tag{47}$$

Из (45) и (47) следует накрывание (29) с константами накрывания (30), (31).

3.3 Доказательство Теоремы 2

Для любой $h \in K(T)$ найдем $g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$ такую, что (см. (7), (10))

$$h(g;t) = h(t), t \in \mathbb{R}_+; \parallel g \parallel_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le 2\rho_{K(T)}(h). \tag{48}$$

Положим

$$\breve{g}(\tau) = 2^{2n} g(2^n \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+; \;\; \breve{h}(t) = \breve{h}(\breve{g};t) = \int\limits_0^\infty \breve{f}_\varphi(t,\tau)\breve{g}(\tau)d\tau. \tag{49}$$

Тогда $0 \le \check{g}(\tau) \downarrow, \quad \check{g}(\tau+0) = \check{g}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+; \quad \check{g}(\tau) = 0, \quad \tau \in [2^{-n}T, \infty)$ (последнее, если $T < \infty$), причем

$$\| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} = 2^{2n} \| g(2^n \cdot) \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le 2^{2n} \| \sigma_{2^n} \| \| g \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le 2^{2n+1} \| \sigma_{2^n} \| \rho_{K(T)}(h).$$

Таким образом, $\check{g} \in \tilde{E}^{\downarrow}(0, 2^{-n}T)$ и $\check{h}(t) = \check{h}(g;t) \in \check{K}(T)$, причем

$$\rho_{\check{K}(T)}(\check{h}) \le \| \check{g} \|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)} \le 2^{2n+1} \| \sigma_{2^n} \| \rho_{K(T)}(h). \tag{50}$$

Далее

$$0 \le h \downarrow; \quad h(t+0) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \quad h^* = h;$$

$$0 \le \check{h} \downarrow; \quad \check{h}(t+0) = \check{h}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\check{h})^* = \check{h}.$$

Поэтому для доказательства порядкового накрывания при отношении порядка (23) достаточно проверить, что

$$\int_0^t h d\xi \le \int_0^t \check{h} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{51}$$

Вместе с (47) это докажет накрывание $K(T) \prec \check{K}(T)$ с константами накрывания $c_0(E) \le 2^{2n+1} \| \sigma_{2^n} \|, \quad c_1(E) = 0$ (см. (30)).

Согласно (7) для $h \in K(T)$

$$H(t) := \int_0^t h(\xi) d\xi = \int_0^t \left(\int_0^\infty f_\varphi(\xi, \tau) g(\tau) d\tau \right) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\infty \check{f}_\varphi(2^{-n}\xi, 2^{-n}\tau) g(\tau) d\tau \right) d\xi.$$

В интеграле по ξ делаем замену $\lambda = 2^{-n}\xi; \quad d\xi = 2^n d\lambda$, в интеграле по τ – замену $s = 2^{-n}\tau, \quad d\tau = 2^n d\xi$. Тогда с учетом равенства (46)

$$H(t) = 2^n \int\limits_0^{2^{-n}t} \left(\int_0^\infty \check{f}_\varphi(\lambda, 2^{-n}\tau) g(\tau) d\tau \right) d\lambda =$$

$$= 2^{2n} \int\limits_0^{2^{-n}t} \left(\int\limits_0^{\infty} \check{f}_{\varphi}(\lambda, s) g(2^n s) ds \right) d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^{2^{-n}t} \left(\int\limits_0^{\infty} \check{f}_{\varphi}(\lambda, s) \check{g}(s) ds \right) d\lambda = \int\limits_0^{2^{-n}t} \check{h}(\lambda) d\lambda.$$

Итак, для $h \in K(T)$ нашли $\check{h} \in \check{K}(T)$ такую, что справедлива оценка (47) и

$$\int\limits_0^t h(\xi) d\xi = \int\limits_0^{2^{-n}t} \check{h}(\lambda) d\lambda \leq \int_0^t \check{h}(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В конце мы учли, что $\check{h}(\lambda) \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Итак, справедливы неравенства (47) и (48), причем для $h \in K(T), \check{h} \in \check{K}(T)$ (48) совпадает с условием, что $h \prec \check{h}$ при отношении порядка (23). Тем самым доказано порядковое накрывание (30) с константами накрывания

$$c_0(E) \leq 2^{2n+1} \parallel \sigma_{2^n} \parallel, \ c_1(E) = 0.$$

Литература

1 Гольдман М.Л. Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – Р. 91-111.

2 Бахтигареева Э.Г., Гольдман М.Л. Построение оптимальной оболочки для конуса неотрицателных функций со свойствами монотонности // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2016. – Т. 293, № 4. – С. 43-61.

3 Goldman M.L. On equivalent criteria for the boundedness of Hardy type operators on the cone of decreasing functions // Analysis Mathematica. – 2011. – V. 37, No. 2. – P. 83-102.

4 Гольдман М.Л., Забрейко П.П. Оптимальное банахово функциональное пространство для конуса неотрицательных убывающих функций // Тр. Ин-та матем. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 24-34.

5 Goldman M.L. Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of functions with properties of monotonicity // Eurasian Mathem. Journal. – 2012. – V. 3(246), No. 2. – P. 53-84.

6 Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

7 Bennett C., Sharpley R. Iterpolation of Operators. – L.: Academic Press, INC, 1946. – 469 p.

Боқаев Н.Ә., Гольдман М.Л., Қаршығина Г.Ж. ЖАРТЫЛАЙ ӨСТІҢ ОҢ ЖАҒЫНДА ОРНАЛАСҚАН МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КОНУСТАРЫ ТУРАЛЫ

Жартылай өстің оң жағында орналасқан монотонды функциялардың әртүрлі конустары қарастырылған. Анықталған реттік қатынасқа байланысты қарастырылып отырған конустардың нүктелік және реттік көмкерілу (жабылу) шарттары тағайындалған.

Кілттік сөздер. Кемімелі ауыстырылымдардың конустары, конустардың көмкеріліулері (жабылулары), ауыстырылымды инвариантты кеңістіктер, Банах функционалдық кеңістіктері.

Bokaev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. ON CONES OF MONOTONE FUNCTIONS ON THE POSITIVE SEMIAXIS

Various cones of monotonic functions on the positive semiaxis are considered. The conditions for the pointwise and ordinal covering of the cones under consideration are established for a certain order.

Key words. Cones of decreasing permutations, covering cones, rearrangement invariant space, Banach function spaces.

Бокаев Н.А.
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева
010000, Астана, Казахстан, ул. К. Мунайтпасова, 5
E-mail: bokayev2011@yandex.ru

Гольдман М.Л.
Российский университет дружбы народов
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, 10/2
Математический институт имени Академика С.М. Никольского
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, 10/2
E-mail: seulydia@yandex.ru

Каршыгина Г.Ж.
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева
010000, Астана, Казахстан, ул. К. Мунайтпасова, 5
E-mail: karshygina84@mail.ru

Статья поступила в редакцию 21.04.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 47–58.

МРНТИ 27.15.23:27.45.15

POLYNOMIAL IN TIME NONNEGATIVE INTEGER SOLUTIONS OF KNAPSACKS AND SIMILAR PROBLEMS IN R: P=NP?

Vassilly Voinov, Natalya Pya Arnqvist, Yevgeniy Voinov

"A new result is the well forgotten old one"(A Russian proverb)

Annotation. An R-package "nilde" [1] for the enumeration of all existing nonnegative integer solutions of linear Diophantine equations and inequalities and related problems is presented. The software uses the approach based on a generating function of Hardy and Littlewood [2] introduced in 1966 and the algorithm proposed by Voinov and Nikulin [3] in 1997. The package proves to be useful for solving 0-1, bounded and unbounded knapsacks, subset sum problems, integer linear programs, partitioning of natural numbers, etc. The main advantage of the proposed software is that it solves all the above problems in polynomial time. Numerous examples illustrate applications of the package. Strong theoretical and empirical arguments in favor of equality P=NP are presented.

Keywords. Linear Diophantine equations, Combinatorial optimization, Polynomial in time algorithms, Knapsack-type problems, P=NP.

1 Introduction

Three basic approaches for solving nonnegative integer combinatorial optimization problems such as knapsack, subset sum, integer program, and others are known. They are: Branch-and-Bound (BB) (see the classical book of Martello and Toth [4], Babayev et al [5], Martello et al [6], Mansini and Speranza [7], Martello and Toth [8], Seong et al [9], Lodi et al [10], and many others), dynamic programming (DP) (Andonov et al [11], Poirriez et al [12], and others), and hybrid BB and DP (He et al [13]). It has to be noted that

2010 Mathematics Subject Classification: 05A05, 05A15.

both BB and DP approaches usually cannot find all existing optimal solutions of a particular problem in polynomial time.

The other known but well forgotten method uses generating functions (Voinov and Nikulin [3]). We revisit the algorithm for the enumeration of all existing nonnegative integer solutions of a linear Diophantine equation suggested by Voinov and Nikulin [3]. The authors of that paper published in 1997 erroneously thought (see [3], p. 159) that their algorithm is exponential in time. More than 20 years later using preliminary scripts for the R-package "nilde" Voinov [14] has empirically showed that the algorithm is actually polynomial in time. Moreover, compared to BB and DP approaches this algorithm being enumerative in its nature is able to find all existing solutions of a problem.

Section 2 provides the main R-functions of the package "nilde" [1] with applications.

The discussion and the overall conclusion are provided in Section 3.

2 Basic functions of "nilde"

The R-package "nilde" provides routines for enumerating all existing nonnegative integer solutions of a linear Diophantine equation. Based on the implementation of that enumeration the package provides also functions for partitioning of natural numbers, solving 0-1, bounded and unbounded knapsacks, subset sum problems, integer programs, etc.

2.1 Function "get.knapsack"

This function solves the unbounded, bounded and 0-1 knapsack problems that can be written mathematically as

$$\begin{aligned} \text{maximize}\ \ & c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_l s_l, \\ \text{subject to}\ \ & a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_l s_l \le n, \\ & s_i \ge 0,\ \text{integers},\ i = 1, 2, ..., l, \end{aligned} \tag{1}$$

where $a_i,\ i = 1, 2, ..., l$, and n are positive integers. The bounded knapsack problem has additional constraints: $0 \le s_i \le b_i,\ 0 < b_i \le [n/a_i]$, and integer. The 0-1 knapsack problem arises when $s_i = 0$ or 1.

The usage of the function is defined by "get.knapsack (objective, a, n, problem="uknap bounds=NULL) where "objective" is the l-vector of the objective function to be maximized, a is the l-vector of *weights*, n is the capacity of the knapsack, argument "problem" can be "uknap" (by default) for the unbounded problem, "bknap" for the bounded knapsack, and "knap01" for 0-1 problem.

Consider the most interesting, intriguing and important example of an unbounded knapsack problem (UKP) known as "hard" intractable NP-problem

$$\begin{aligned} \text{maximize } \ C = 200s_1 + 201s_2 + \cdots + 206s_7, \\ \text{subject to } \ 100s_1 + 101s_2 + \cdots + 106s_7 \le n, \\ s_i \ge 0, \ \text{integers}, \ i = 1, ..., 7, \end{aligned} \tag{2}$$

where $p = (p_1, p_2, ..., p_7) = (200, 201, ..., 206)$ are *profits*, $w = (w_1, w_2, ..., w_7) = (100, 101, ..., 106)$ are *weights*, and n is the *capacity* of the knapsack. Note that *weights* and *profits* are strongly correlated (Pearson's correlation coefficient is 1). Martello and Toth ([4], p. 91) noted that "the optimal solution of such problems appears to be practically impossible".

The application of "nilde" for the problem in (2) if n=1999 (get. knapsack(objective
=c(200:206), a=c(100:106), n=1999, problem="uknap")) gives all 110 optimal solutions of it. It is of great importance to note that several other known approaches (BB, DP and a hybrid algorithm EDUK2 [12]) cannot find all those solutions. The IBM CPLEX version 12.2.0.0 gives only 51 with $C = 3899$ [15]. The EDUK2 and "pyasukp" give by one different solution each ($\{2, 0, 0, 0, 1, 1, 15\}$ and $\{1, 0, 0, 0, 4, 1, 13\}$ respectively) [16]. The R-package "Rglpk" gives the unique solution $\{2, 0, 0, 1, 0, 0, 16\}$. Note that all three single solutions are optimal but different. At the same time all of them are in the list of all 110 solutions that are easily and fast obtained by "nilde".

From the above it follows that BB and DP searching algorithms cannot enumerate all optimal solutions of the problem in (2). On the contrary the enumerative algorithm of "nilde" permits to get all optimal solutions. For example, lines

```
b5<-get.knapsack(objective
=c(200:206), a=c(100:106), n=2999, problem="uknap")
b5$p.n
options(max.print=5E5)
```

print(b5)
enumerate on a standard PC 24,354 optimal solutions of (2) with $C = 5899$ for 153.4 seconds (0.0063 sec. per one solution). Note that under the default settings CPLEX 12.7.1 gives only one optimal solution $\{10, 1, 1, 1, 1, 1, 14\}$ for 0.06 sec.

2.2 Function "get.partitions"

This function solves the problem of additive partitioning of natural numbers. It enumerates all partitions of a positive integer n on at most (or exactly) $M \leq n$ parts.

The usage of the function is defined by "get.partitions (n,M,at.most=TRUE) where n is a natural number to be partitioned, M, the number of parts of n, is a positive integer. If "at.most=TRUE then n will be partitioned into at most M parts, if FALSE, then on exactly M parts.

For example, the line
b<-get.partitions(8,6,at.most=FALSE)
gives two solutions: $\{3, 1, 1, 1, 1, 1\}$ and $\{2, 2, 1, 1, 1, 1\}$.

2.3 Function "get.subsetsum"

By default this function solves the following 0-1 subset sum problem. Given the set of positive integers $\{a_1, a_2, ..., a_l\}$ and a natural number n, it finds all non-empty subsets that sum to n so that each of the integers a_i, $i = 1, ..., l$, either appears in the subset or does not and the total number of summands does not exceed M, $M \leq l$. The bounded option possesses the additional constraints on the number of times the term a_i can appear in the subset.

The usage of the function is defined by "get.subsetsum(a,n,M=NULL, problem= "subsetsum01 bounds=NULL) where a is the l - vector of positive integers, $l \geq 2$, n is a natural number, M being a positive integer that defines the maximum number of summands. The argument "problem" can be "subsetsum01" (default) for a 0-1 subset sum problem or "bsubsetsum"for a bounded option. The argument "bounds" is the l – vector of positive integers b_i that defines the number of a_i to appear in the subset.

Let one need to get all subsets for the vector $a = \{30, 29, 32, 31, 33\}$ that will be summed up to $n = 91$. The following lines:
b3<-get.subsetsum(a=c(30,29,32,31,33), M=5, n=91, problem="subsetsum01")

b3
colSums(b3$solutions*c(30,29,32,31,33))
give only one solution $\{1, 1, 1, 0, 0\}$.

Since the subset sum problem is a particular case of the knapsack one when *profits* equal to *weights*, the same result can be obtained using the "get.knapsack"-function as follows:
b31<-get.knapsack(objective=c(30,29,32,31,33), a=c(30,29,32,31,33), n=91, problem=
"knap01")
b31.

An example of a bounded problem is presented below:
b4<-get.subsetsum(a=c(30,29,32,31,33), M=5, n=91, problem="bsubsetsum bounds =c(1,2,1,3,4))
b4
colSums(b4$solutions*c(30,29,32,31,33)).

There are three solutions of the problem: $\{0, 1, 0, 2, 0\}$, $\{1, 1, 1, 0, 0\}$, and $\{0, 2, 0, 0, 1\}$. Alternatively, one may get the same results as follows:
b41<-get.knapsack(objective=c(30,29,32,31,33), a=c(30,29,32,31,33), n=91, problem=
"bknap bounds=c(1,2,1,3,4))
b41.

Consider the following 0-1 subset sum problem of Chvátal ([17], p. 1408) that turns up to be "hard"for both BB and DP approaches

$$\begin{aligned} &\text{maximize } C = \sum_{j=1}^{10} a_j s_j, \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{10} a_j s_j \le n, \\ &s_i = 0, 1, \ i = 1, 2, ..., 10, \end{aligned} \tag{3}$$

where $a_j = 2^{12} + 2^{1+j} + 1, \quad j = 1, 2, ..., 10.$

The following lines:
b5<-get.subsetsum(a=c(4101, 4105, 4113, 4129, 4161, 4225, 4353, 4609, 5121, 6145), M=10, n=26582, problem="subsetsum01")
b5
colSums(b5$solutions*c(4101, 4105, 4113, 4129, 4161, 4225, 4353, 4609, 5121,

6145))
easily and fast give one solution $\{0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0\}$. Replacing n by 26,583 one will get "no solutions".

2.4 Function "nlde"

This function enumerates all existing nonnegative integer solutions of a linear Diophantine equation (NLDE)

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_l s_l = n, \tag{4}$$

where $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_l,\ a_i > 0,\ n > 0,\ s_i \geq 0,\ i = 1, ..., l$, and all the variables involved are integers.

The usage of the function is defined by "nlde (a, n, M=NULL, at. most=TRUE, option=0)", where a is the $l \geq 2$ – vector of positive integers (coefficients of the left-hand-side of NLDE (4)), n is the positive integer, $M \leq n$ is the number of parts of n. The argument "at. most" can be TRUE for partitioning of n into at most M parts or FALSE for partitioning on exactly M parts. If the argument "option" is set to 1 (or any positive integer), then only 0-1 solutions will be enumerated.

The solutions of the equation (4) represent a natural number n as a sum of positive integers a_i. that may, in particular, be prime numbers. For example, the command nlde (a=c (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19), n=20, at most=T) produces 29 representations of n=20 as a sum of prime numbers.

3 A discussion and concluding remarks

All results of the package "nilde" are based on the function of Hardy and Littlewood [2] $\psi_a = (z^{a_1} + z^{a_2} + \cdots + z^{a_l})^{[n/a_1]}$ that generates all existing nonnegative integer solutions of the equation in (4) and the technique of Voinov and Nikulin [3] based on the results published in [18]. The most important point of the above is that the algorithm of Voinov and Nikulin [3] (see, e.g., [14], p. 14) is a deterministic one. It produces absolutely all solutions of (4), if they exist, or returns "no solutions". It is naturally to assume that this algorithm is polynomial in time. Using the instance given in (2) (the numerical example that is considered in [17] to be very hard for BB and DP approaches) Voinov [14], p. 18 showed that the example is easily solved by "nilde" and that the time complexity of the solution is approximately $O(n^2)$. It can also be empirically shown that the algorithm is still polynomial in time of complexity $O(n^5)$ if the number of terms l in (2) is considered as a size of the problem (see Figure 1).

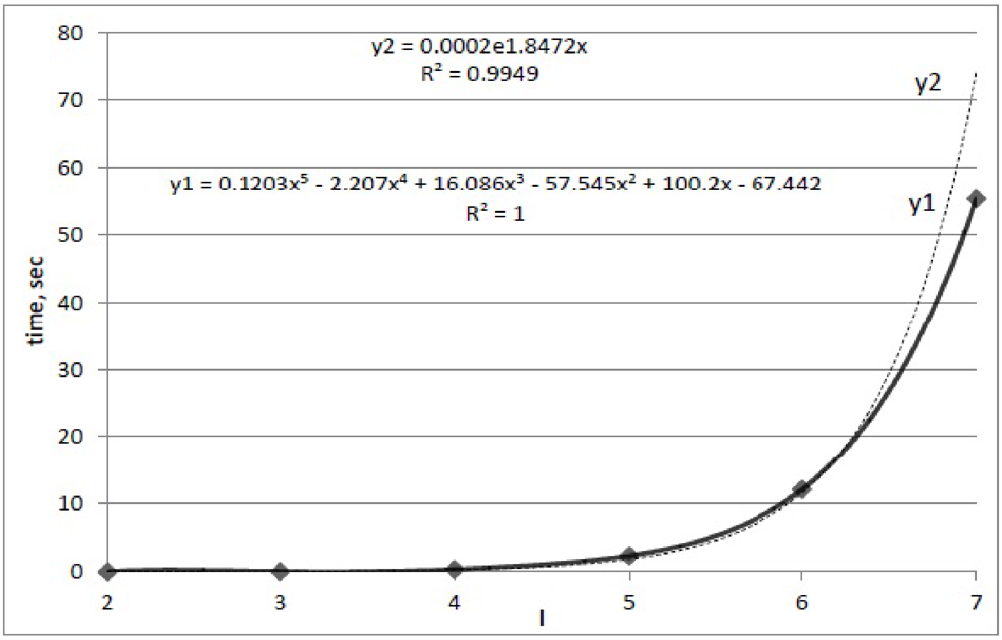

Figure 1 – Empirical dependence of computing time (solid line with black squares for assessed times) on the number of terms in problem (2). The dashed line corresponds to the exponential fit of data

At this point it is of interest to note that the number N of solutions of the inequality $\sum_{i=1}^{l} a_i s_i \leq n$, where a_i's and n being naturals and $s_i \geq 0$ are integers, in the most worst case is bounded above by a polynomial function $(n+a_1+\cdots+a_l)^l/(l!\prod_{i=1}^{l} a_i)$ (see formula (17) of Mahmoudvand et al. [21]). Since the verification of candidates for a solution can evidently be done in polynomial time, one may expect that there should be an algorithm (e.g., used in "nilde") that solves the whole problem in polynomial time. Our numerical example in (2) confirms this, because the empirical number of solutions in that example is bounded above by the polynomial of order 4 (see Figure 2).

We may consider the above result as a weak theoretical justification of

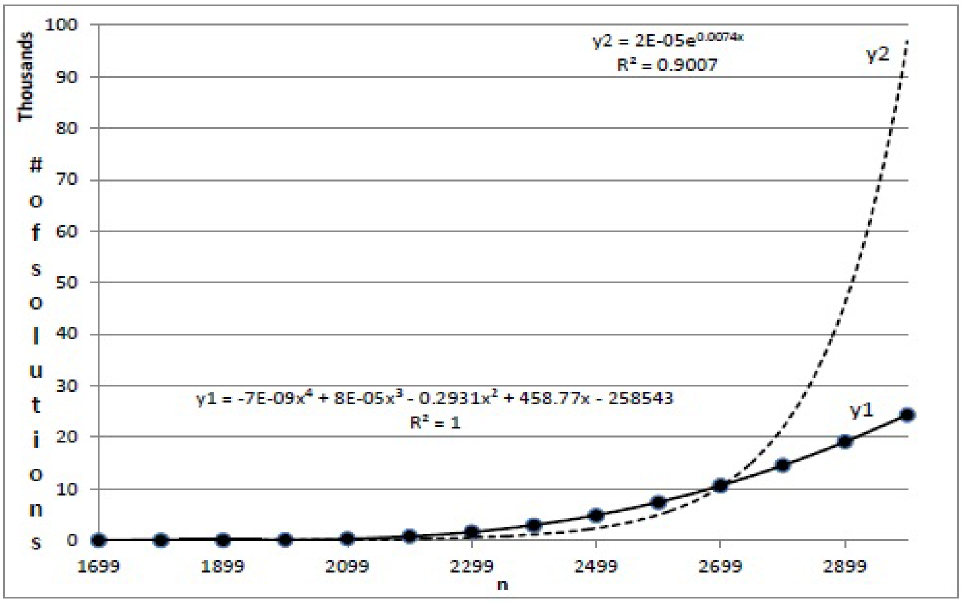

Figure 2 – Empirical dependence of the number of solutions of problem (2) on n. The dashed line corresponds to the exponential fit of data

the fact that "nilde" uses polynomial in time algorithm for solving linear optimization problems in nonnegative integers.

The results of this note can be summarized as follows:

1) It is well known (see, e.g., [9]) that the performance of BB and DP searching approaches for solving knapsack problems essentially depends on the correlation of weights and values of items. On the contrary, there is no such problem for R-package "nilde" (based on enumerative algorithm) that is absolutely insensitive for that correlation. Actually, all "hard" linear optimization problems in nonnegative integers are solved easily and fast.

2) It was shown numerically (see [14]) that partition, knapsack, subset sum and related problems are solved in polynomial time.

3) Due to classical results of Karp [22] and Garey and Johnson [20] from the above it follows that all NP-complete problems are solvable in polynomial time, and, hence, P=NP.

Acknowledgments

The authors would like to thank Rumen Andonov and Vincent Poirriez for their help in using IBM CPLEX, EDUK2 and "pyasukp" software for solving our numerical example in (2).

References

1 Pya Arnqvist N., Voinov V., Voinov Y. (2018). nilde: Nonnegative Integer Solutions of Linear Diophantine Equations with Applications. R package version 1.1-1. https://CRAN. R-project.org/package=nilde.

2 Hardy G.H., Littlewood J.E. Collected Papers of Hardy G. H. – Including Joint Papers with Littlewood J. E. and Others. – Oxford: Clarendon Press, 1966.

3 Voinov V., Nikulin M. On a subset sum algorithm and its probabilistic and other applications // Balakrishnan N, ed. – Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics. – Boston: Birkhäuser, 1997. – P. 153-163.

4 Martello S., Toth P. Knapsack Problems. Algorithms and Computer Implementations. – New York: Wiley, 1990.

5 Babayev D. A., Glover F., Ryan J. A New Knapsack Solution Approach by Integer Equivalent Aggregation and Consistency Determination // INFORMS Journal on Computing. – 1997. – V. 9. – P. 43-50.

6 Martello S., Pisinger D., Vigo D. The Three-Dimensional Bin Packing Problem // Operations Research. – 2000. – V. 48. – P. 256-267.

7 Mansini R., Speranza M. G. A Multidimensional Knapsack Model for Asset-Backed Securitization // The J. of the Operational Research Society. – 2002. – V. 53.

– P. 822-832.
8 Martello S., Toth P. An Exact Algorithm for the Two-Constraint 0-1 Knapsack Problem // Operations Research. – 2003. – V. 51. – P. 826-835.
9 Seong Y-J, G Y-G, Kang M-K, Kang, C-W. An improved branch and bound algorithm for a strongly correlated unbounded knapsack problem // J. of the Operational Research Society. – 2004. – V. 55. – P. 547-552.
10 Lodi A., Martello S., Monaci V., Ciconetti C., Lenzini L., Mingozzi E., Eklund C., Moilanen J. Efficient two-dimensional packing algorithms for Mobile WiMAX // Management Science. – 2011. – V. 57. – P. 2130-2144.
11 Andonov R., Poirriez V., Rajopadhye S. Unbounded knapsack problem: Dynamic programming revisited // European J. of Operational Research. – 2000. – V. 123. – P. 394-407.
12 Poirriez V., Yanev N., Andonov R. A. Hybrid algorithm for the unbounded Knapsack problem // Discrete Optimization, Elsevier. – 2009. – V. 6. – P. 110-124.
13 He X., Hartman J.C., Pardalos, P.M. Dynamic-programming-based inequalities for the unbounded integer Knapsack problem // INFORMATICA. – 2016. – V. 27. – P. 433-450.
14 Voinov V. A note on the intractability of partition, knapsack, subset sum and related problems // Mathematical Journal (ISSN 1682-0525). – 2017. – V. 17. – P. 13-24.
15 Andonov R. // Private communication. – 2017.
16 Poirriez V. // Private communication. – 2017.
17 Chvátal V. Hard Knapsack Problems // Operations Research. – 1980. – V. 28. – P. 1402-1411.
18 Voinov V., Nikulin M. Generating functions, problems of additive number theory, and some statistical applications // Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1995. – V. 40. – P. 107-147.
19 Hirschberg D.S., Wong C.K. A polynomial-time algorithm for the Knapsack problem with two variables // J. of the Assoc. for Computing Machinery. – 1976. – V. 23. – P. 147-154.
20 Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. – New York: Freeman W. H. and Co., 1979.
21 Mahmoudvand R., Hassani H., Farzaneh A., Howell G. The Exact Number Of Nonnegative Integer Solutions For A Linear Diophantine inequality // Int. J. of Applied Mathematics. – 2010. – V. 40. – P. 1-5.
22 Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems. Miller R. E., Thatcher J. W., eds. Complexity of Computer Computations. – New York: Plenum Press, 1972. – P. 85-103.

Василий Воинов, Наталья Пя А., Евгений Воинов R-дегі РАНЕЦТІ ЖАЙҒАСТЫРУ ЕСЕПТЕРІНІҢ ЖӘНЕ СОҒАН ҰҚСАС МӘСЕЛЕЛЕРДІҢ УАҚЫТ БОЙЫНША ПОЛИНОМДЫҚ ТЕРІС ЕМЕС БҮТІН САНДЫҚ ШЕШІМДЕРІ: P=NP?

Сызықтық Диофанттық теңдеулер мен теңсіздіктердің және соған ұқсас есептердің бұрыннан бар барлық теріс емес бүтін сандық шешімдерін санамалауға арналған "nilde" R-пакеті ұсынылған. Программалық қамсыздандыру 1966 жылы енгізілген Харди мен Литтлвудтың туындаушы функциясына және 1997 жылы Воинов пен Никулин ұсынған алгоритмге негізделген тәсілді қолданады. Пакет 0-1, шектеулі және шектеусіз жолқапшықтарды жайғастыру есептерін шешуге, қосалқы жиынтықтарды, бүтін сандық сызықтық программаларды қосындылау, натурал сандарды бөліктеу үшін және т.т. пайдалы. ұсынылып отырған программалық қамсыздандырудың негізгі артықшылығы ол жоғарыда аталған есептердің барлығын полиномдық уақыт аралығында шешеді. Көптеген мысалдар пакеттің қолданыстарын көрсетеді. P=NP теңігінің пайдасына байыпты теориялық және эмпирикалық дәлелдер ұсынылған.

Кілттік сөздер. Сызықтық Диофанттық теңдеулер, комбинаторлық оңтайландыру, уақыт бойынша полиномды алгоритмдер, ранецті жайғастыру тектес есептер, P=NP.

Василий Воинов, Наталья Пя А., Евгений Воинов ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УКЛАДКИ РАНЦА И ПОДОБНЫХ ПРОБЛЕМ В R: P=NP?

Представлен R-пакет "nilde" для перечисления всех существующих неотрицательных целочисленных решений линейных Диофантовых уравнений и неравенств и подобных задач. Программное обеспечение использует подход, основанный на производящей функции Харди и Литтлвуда, введенной в 1966 году, и алгоритме, предложенном Воиновым и Никулиным в 1997 году. Пакет полезен для решения задач укладки 0-1, ограниченных и неограниченных рюкзаков, суммирования подмножеств, целочисленных линейных программ, разбиений натуральных чисел и т.п. Основное преимущество предложенного программного обеспечения состоит в том, что оно решает все вышеперечисленные задачи за полиномиальное время. Многочисленные примеры иллюстрируют применения пакета. Представлены серьезные теоретические и эмпирические аргументы в пользу равенства P=NP.

Ключевые слова. Линейные Диофантовы уравнения, комбинаторная оптимизация, полиномиальные по времени алгоритмы, задачи типа укладки ранца, P=NP.

Vassilly Voinov
KIMEP University
050010, Almaty, Abai Av. 2
E-mail: voinovv@kimep.kz

Natalya Pya Arnqvist
Umeå University
SE 901 87, Umeå, Sweden
E-mail: nat.pya@gmail.com

Yevgeniy Voinov
KIMEP University
050010, Almaty, Abai Av. 2
E-mail: zhenya1988v@gmail.com

Received 20.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 59–70.

МРНТИ 27.31.15

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В ПРОСТРАНСТВЕ

С.З. Джамалов, Р.Р. Ашуров

Аннотация. В данной работе при выполнении некоторых условий на коэффициенты многомерного уравнения Чаплыгина доказываются однозначная разрешимость и гладкость решения одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами в пространствах Соболева.

Ключевые слова. Многомерные уравнения Чаплыгина, однозначная разрешимость и гладкость решения а пространствах Соболева.

1 Введение и постановки задачи

Краевые задачи с нелокальными условиями для уравнения Чаплыгина впервые были предложены и изучены в работе Ф.И. Франкля при изучении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [1]. С другой стороны, в отличие от задачи Дирихле, именно такие задачи, охватывающие всю границу, оказались корректными для уравнения смешанного типа первого рода в частности для уравнения Чаплыгина.

Это было обнаружено в работе А.В. Бицадзе [2]. Далее аналогичные краевые задачи для уравнения смешанного типа первого рода были изучены в работе Т.Ш. Кальменова [3]. Как близкие по постановке изучаемых задач отметим также работы [4], [5], [6], [7].

В данной работе для уравнения многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве изучается корректность некоторой другой нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10,35M20.

Пусть $\Omega = \prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i, \beta_i)$, $n-$мерный параллелепипед евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $(x_1, ..., x_n)$, $\alpha_1 < 0 < \beta_1,\ 0 < \alpha_i < x_i < \beta_i < +\infty\ \forall i = \overline{2, n}.$ Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T) \times (0, \ell) = Q_1 \times (0, \ell) = \{(x, t, y); x \in \Omega, 0 < y < \ell, 0 < t < T < +\infty\}$ область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial Q_1 \times (0, \ell)$, $\partial Q_1 = \partial\Omega \times (0, T)$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x)\, u_{tt} - \left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} - a(x, t) u_{yy} + \alpha(x, t)\, u_t + c(x, t)\, u = f(x, t, y), \quad (1)$$

здесь $x_1 \cdot K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$.

Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n и будем предполагать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественно значные и достаточно гладкие.

Предположим

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ji}(\beta_k)\ \forall k = \overline{1, n};$ $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Кроме того, пусть выполнено одно из условий для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{\Omega}$:

(a) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где $a_0 - const > 0$,

(b) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$, где $a_1 - const < 0$.

Через $W_2^l(Q)$ $(2 \leq l$ – натуральное число) обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(,)_l$ и нормой $\|\cdot\|_{W_2^l(Q)}$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ – пространство квадратично суммируемых функций.

При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ:

$$\forall u, v > 0\ \forall \sigma > 0, \qquad u \cdot v \leq \frac{\sigma u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}.$$

Для производных порядка p удобно принять обозначение: $D_z^p u = \dfrac{\partial^p u}{\partial z^p}$; при этом $D_z^0 u = u$.

2 Нелокальная краевая задача

Найти решение $u(x, t, y)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$, удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u|_{x_i=\beta_i}, \tag{3}$$

$$u(x,t,0) = u(x,t,\ell) = 0\,, \tag{4}$$

при $p = 0, 1$; η_i $\forall i = \overline{1,n}$ и γ – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже.

Ранее однозначная разрешимость и гладкость решения нелокальной краевой задачи (2)–(3) для уравнения смешанного типа первого рода (1) в случае $a(x,t) = 0$ были изучены в работах [4], [5]. В настоящей работе в случае $a(x,t) \neq 0$ и при выполнении условия (4) на решении уравнения (1), используя результаты работ [4], [5], изучается однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (1)–(4) в многомерных пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

Сначала рассмотрим случай $m = 0$.

3 Единственность решения задачи

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1); кроме того, пусть* $2\alpha(x,t) + \lambda K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\, c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\, a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\gamma| > 1$ *в случае* a) *и* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\gamma| < 1$ *в случае* b), $|\eta_i| \geq 1$, $\forall i = \overline{1,n}$, $c\,(x,0) \leq c\,(x,T)$, $a\,(x,0) \leq a\,(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t,y) \in L_2(Q)$, *если существует решение задачи (1)–(4) в пространстве* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно.*

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (1)–(4) с помощью интеграла энергии. Пусть существует решение задачи (1)–(4) из $W_2^2(Q)$.

Рассмотрим тождество:

$$2\,(Lu, \rho(x,t)u_t)_0 = 2\,(f, \rho(x,t)u_t)_0, \tag{5}$$

где $\rho(x,t) = \exp(-\lambda t - \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i x_i)$, где λ, τ_i $(\forall i = \overline{1,n})$ – consts, такие что, $\lambda > 0$ в случае выполнение условие (a), $\lambda < 0$ в случае выполнение условие (b), $\tau_i \geq 0$.

В силу условий Теоремы 1, интегрируя по частям тождество (5), легко получить следующее тождество:

$$2\int\limits_Q Lu\cdot\rho(x,t)\cdot u_t\,dxdt = \int\limits_Q \rho(x,t)\{(2a+\lambda\,K)\cdot u_t^2+\lambda\,a_{ij}\,u_{x_i}u_{x_j}+(\lambda\,a-a_t)\cdot u_y^2+$$

$$+(\lambda\,c-c_t)\cdot u^2\}\;d\,x\,d\,tdy-\tau_j\int\limits_Q\rho(x,t)\,a_{ij}u_{x_i}u_t d\,x\,d\,tdy+$$

$$+\int\limits_{\partial Q}\rho(x,t)\,\{K(x)u_t^{\,2}\,e_t-2a_{ij}u_{x_i}\,u_t\,e_{x_i}+a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,e_t+c\cdot u^2\,e_t+$$

$$+au_y^2e_t-2au_yu_te_y\}\;d\,s, \tag{6}$$

где $\overrightarrow{e}=(e_{x_i}=\cos(e,x_i),e_t=\cos(e,t),e_y=\cos(e,y))$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q, $0\le\tau_i=\frac{2}{\theta_i}\ln|\eta_i|$, $0<\theta_i=(\beta_i-\alpha_i)$ $\forall i=\overline{1,n}$. Теперь рассмотрим граничные интегралы. Так как $u\in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3), то

$$\int\limits_{\partial Q}\rho(x,t)\{\,K(x)\,u_t^{\,2}\,e_t-a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,e_t+c\,u^2\,e_t+au_y^2e_t-2\,a_{ij}u_{x_i}\,u_t\,e_{x_i}-2au_yu_te_y\}\;ds=$$

$$=[e^{-\lambda T}\gamma^2-1]\times\int\limits_0^\ell\int\limits_\Omega e^{-\sum\limits_{i=1}^n\tau_ix_i}\{K(x)u_t^2(x,0,y)+a_{ij}(x)u_{x_i}^2(x,0,y)\}dxdy+$$

$$+\int\limits_0^\ell\int\limits_\Omega e^{-\sum\limits_{i=1}^n\tau_ix_i}\{[c(x,T)-c(x,0)]u^2(x,0,y)+[a(x,T)-a(x,0)]u_y^2(x,0,y)\}d\,xdy-$$

$$-2\int\limits_{\partial Q}a\,u_y\,u_te_y\,ds-2\cdot[e^{-\tau_j\beta_j}\eta_j^2-e^{-\tau_j\alpha_j}]\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\ldots\int\limits_{\alpha_{j-1}}^{\beta_{j-1}}\int\limits_{\alpha_{j+1}}^{\beta_{j+1}}\ldots\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\int\limits_0^T\int\limits_0^\ell e^{-\lambda t}e^{\sum\limits_{i=1;i\neq j}^n-\tau_ix_i}u_{x_i}(\overline{x},t,y)\,u_t(\overline{x},t,y)d\overline{x}\,dt\,dy=\sum_{i=1}^4 J_i,$$

где $\overline{x} = (x_1, ..., x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, ..., x_n)$, $d\overline{x} = dx_1 dx_2, ..., dx_{j-1} dx_{j+1}, ..., dx_n$, $J_i (i = 1,2,3,4)$ – граничные интегралы. Учитывая условия Теоремы 1, краевые условия (2)–(4) и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$, $\eta_i^2 = e^{-\tau_i \theta_i}$, получим, что граничные интегралы J_1, J_3, J_4 равны нулю, а граничный интеграл $J_2 \geq 0$. Условия Теоремы 1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Отбрасывая положительный граничный интеграл в тождестве (6) и учитывая вышесказанное, из тождества (6), применяя неравенства Коши с σ, получим следующее неравенство:

$$2 \int\limits_{\partial Q} Lu \cdot \rho(x,t) \cdot u_t dxdtdy \ \geq \ \int\limits_{Q} \rho(x,t) \{ (2a + \lambda\, K(x)) \cdot u_t^2 + \lambda a_\kappa\, u_x^2 +$$

$$+ (\lambda\, a - a_t) \cdot u_y^2 + (\lambda\, c - c_t) \cdot u^2 \}\, dxdtdy - \sigma\, \|u_x\|_0^2 - c(\sigma) \cdot \|u_t\|_0^2 \,, \qquad (7)$$

где $a_k = a_0$ в случае $a)$, $a_k = a_1$ в случае $b)$; $\tau = \max\{\tau_1, ..., \tau_n\}$; σ и $c(\sigma) = \tau^2 \sigma^{-1} \|a_{ij}\|_{C(\Omega)}$ – коэффициенты неравенства Коши с σ.

Выбирая коэффициенты $\lambda a_k - \sigma \geq \lambda_0 > 0$, $\delta_1 - c(\sigma) > \delta_0 > 0$, из неравенства (7) получим необходимую первую априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1\, \|f\|^2_{L_2(Q)} \,. \qquad (8)$$

Теперь докажем единственность решения задачи (1)–(4) из $W_2^2(Q)$. Пусть сушествуют $u_1(x,t,y)$ и $u_2(x,t,y)$ – два решения задачи (1)–(4) из $W_2^2(Q)$, тогда для $u = u_1 - u_2$ из неравенства (8) получим $\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq 0$, из которой следует единственность решения задачи (1)–(4) из $W_2^2(Q)$.

Через c_i здесь и далее обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные. Теорема 1 доказана.

Для доказательства разрешимости задачи (1)–(4) сначала используем метод Фурье. А именно: решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u(x,t,y) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x,t) Y_s(y), \qquad (A)$$

где функции $Y_s(y) = \{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_s y\}$, $\mu_s = (\frac{\pi s}{\ell})^2$, $s = 1,2,3,...$, являются решениями спектральной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле. Известно, что система собственных функций $\{Y_s(y)\}$ полна в пространстве

$L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис [8], [9], [10], а для определения функции $u_s(x,t),\ s=1,2,3,...$, получим в области $Q_1=\Omega\times(0,T)$ бесконечное число систем уравнений смешанного типа второго порядка:

$$Lu_s = K(x)u_{stt} - (a_{ij}(x)u_{sx_i})_{x_j} + \alpha(x,t)u_{st} +$$

$$+(c(x,t)+a(x,t)\mu_s^2)u_s = f_s(x,t), \tag{9}$$

$$\gamma D_t^p u_s|_{t=0} = D_t^p u_s|_{t=T}, \tag{10}$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u_s|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_s|_{x_i=\beta_i}, \tag{11}$$

здесь $f_s(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cdot\int\limits_0^\ell f(x,t,y)\sin\mu_s y dy$.

Отметим, что в работах [4], [5] при фиксированном s в случае, когда $a(x,t)=0$, при выполнении условия Теоремы 1 исследована однозначная разрешимость задачи (9)–(11) в пространстве $W_2^{m+2}(Q_1)$ $(m=0,1,...)$.

4 Уравнение третьего порядка с малым параметром

Разрешимость задачи (9)–(11) докажем методами "ε – регуляризации", а именно: в области $Q_1=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим семейство бесконечных уравнений третьего порядка с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon} = -\varepsilon\frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}}{\partial t^3} + Lu_{s,\varepsilon} = f_s(x,t), \tag{12}$$

$$\gamma D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=T},\ q=0,1,2; \tag{13}$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}|_{x_i=\beta_i},\ p=0,1, \tag{14}$$

где ε – малое положительное число, $D_z^q w=\frac{\partial^q w}{\partial z^q},\ q=1,2;\ D_z^0 w=w$.

Ниже используем системы уравнений третьего порядка с малым параметром (12) в качестве "ε – регуляризирующего" уравнения для системы уравнения смешанного типа второго порядка (9) [4], [5], [11], [12].

Через $W(Q_1)$ ниже будем обозначать пространство вектор-функций $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^\infty$ таких, как $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^\infty\in W_2^2(Q_1)$, $\{\vartheta_{sttt}\}_1^\infty\in L_2(Q_1)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (13), (14).

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|\vartheta_s\|^2_{W(Q_1)} = \|\vartheta_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} + \varepsilon\,\|\vartheta_{sttt}\|^2_{L_2(Q_1)}\,.$$

Очевидно, что пространство $W(Q_1)$ с заданной нормой является банаховым [9], [10].

Определение. *Решением задачи (12)–(14) будем называть вектор-функцию* $\{u_{s,\varepsilon}(x,t)\} \in W(Q_1)$, *удовлетворяющую уравнению (12).*

Теорема 2. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (12); кроме того, пусть* $2\alpha(x,t) + \lambda K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\, c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\, a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\gamma| > 1$ *в случае a) и* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\gamma| < 1$ *в случае b),* $|\eta_i| \geq 1\ \forall i = \overline{1,n}$, $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любой функции* $f_s(x,t) \in L_2(Q_1)$ *такой, что* $f_{st}(x,t) \in L_2(Q_1)$, $\gamma \cdot f_s(x,0) = f_s(x,T)$, *существует единственное решение задачи (12)–(14) в пространстве* $W(Q_1)$ *и для решения задачи (12)–(14) справедливы следующие оценки:*

$$I) \quad \varepsilon\,\|u_{s,\varepsilon tt}\|_0^2 + \|u_{s,\varepsilon}\|_1^2 \leq c_2\,\|f_s\|_0^2\,,$$

$$II) \quad \varepsilon\,\|u_{s,\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{s,\varepsilon}\|_2^2 \leq c_3[\|f_s\|_0^2 + \|f_{st}\|_0^2].$$

Доказательство. Сначала докажем первую оценку.

$$2\int\limits_{Q_1} \rho(x,t)\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\ \cdot u_{s,\varepsilon t}\, d\,x\, d\,t\ =\ 2\int\limits_{Q_1} \rho(x,t)\cdot f_s \cdot u_{s,\varepsilon t}\, d\,x\, d\,t. \qquad (15)$$

Интегрируя по частям тождество (15) и учитывая условие Теоремы 2, нетрудно получить I) – первую оценку аналогичную оценке (8), из которой следует единственность решения задачи (12)–(14) при фиксированном s.

Теперь докажем справедливость второй оценки.

Для этого рассмотрим тождество

$$-2\int\limits_{Q_1} \rho(x,t)\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\ \cdot \ell u_{s,\varepsilon}\, d\,x\, d\,t\ =\ -2\int\limits_{Q_1} \rho(x,t)\cdot f_s \cdot \ell u_{s,\varepsilon}\, d\,x\, d\,t\,, \qquad (16)$$

где $\ell u_{s,\varepsilon} = (u_{s,\varepsilon ttt} - \lambda\, u_{s,\varepsilon tt} + \frac{\lambda}{2} u_{s,\varepsilon xx} - \lambda u_{s,\varepsilon t})$.

Интегрируя по частям (16) с учетом условий Теоремы 2 и краевых условий

(13), (14), получим следующее неравенство:

$$\left|2(f_s,\rho(x,t)\ell u_{s,\varepsilon})_0\right| \geq \varepsilon \,\|\, u_{s,\varepsilon ttt}\,\|_0^2 + \int\limits_{Q_1} \rho(x,t)\{(\,2a+\lambda\,K)\,u^2_{s,\varepsilon tt}+$$

$$+\lambda\, a_k(u^2_{s,\varepsilon tx}+u^2_{s,\varepsilon xx})\}dxdt+b_0\left\|u_{s,\varepsilon}\right\|_1^2+\int\limits_{\partial Q_1}\rho(x,t)[(K(x)\,u^2_{s,\varepsilon tt}-2\alpha u_{s,\varepsilon t}\,u_{s,\varepsilon tt}+$$

$$+2a_k u_{s,\varepsilon x_i t}u_{s,\varepsilon t x_j}+2a_{ijx_j}u_{x_i}u_{tt}-2(c+a\mu_s^2)u_{s,\varepsilon}(u_{s,\varepsilon tt}+u_{s,\varepsilon xx}))e_t-$$

$$-2a_{ij}u_{s,\varepsilon tt}u_{s,\varepsilon x_i t}\,e_{x_i}]ds-\sigma(\left\|u_{s,\varepsilon xx}\right\|_0^2+\left\|u_{s,\varepsilon xt}\right\|_0^2)-c(\sigma)\left\|u_{s,\varepsilon tt}\right\|_0^2-$$

$$-c_1(\sigma)\left\|u_{s,\varepsilon}\right\|_1^2=\sum_{i=1}^{6}J_i, \tag{17}$$

где $J_i(i=1,2,3,5,6)$ – интегралы по области, J_4 – интеграл по границе, σ и $c(\sigma)=\tau^2\sigma^{-1}\max\{\,\|a_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})}\}$, $c_1(\sigma)=\sigma^{-1}\max\{\|\alpha\|_{C^1(Q_1)},\|a_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})},$ $\|c\|_{C^1(Q_1)},\|a\|_{C^1(Q_1)}\}$ – коэффициенты неравенства Коши с σ. Выбирая коэффициенты $\lambda a_k-2\sigma\geq\lambda_0>0$, $\delta_1-c(\sigma)>\delta_0>0$, $b_0=\min\{\delta_0,\,\lambda_0,\delta_2+\delta_3\cdot(\frac{\pi}{\ell})^2\}$ и учитывая условия Теоремы 2 и краевые условия (13), (14), получим, что $J_4=0, J_i>0\,(i=1,2,3)$, из неравенства (17) получим необходимую вторую оценку. Из полученных оценок получим однозначную разрешимость задачи (12)–(14) из пространства $W(Q_1)$. Теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (9)–(11).

5 Существование решения задачи

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда решение задачи (9)–(11) существует и единственно в* $W_2^2(Q_1)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (9)–(11) в пространстве $W_2^2(Q_1)$ доказывается анологично как в Теореме 1. Теперь докажем существование решения задачи (9)–(11) в $W_2^2(Q_1)$. Для этого рассмотрим в области Q_1 уравнение (12) и краевые условия (13), (14) при $\varepsilon>0$. Так как выполнены все условия Теоремы 2, то существует единственное решение задачи (12)–(14) из $W(Q_1)$ при $\varepsilon>0$ и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества вектор-функций

$\{\, u_{s,\varepsilon}(x,t)\}$ $\varepsilon > 0$, при фиксированном s можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций такую, что $\{\, u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\,\} \to u_s\,(x,t)$ при $\varepsilon_i \to 0$ в $W(Q_1)$.

Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu_s = f_s$ (уравнению (9)) почти всюду. В самом деле, так как последовательность $\{\, u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q_1)$, а последовательность $\{\, \frac{\partial^3 u_{\,s,\varepsilon_{\,i}}(x,t)}{\partial\, t^3}\,\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q_1)$ и оператор L линейный, то имеем

$$Lu_s - f_s = Lu_s - Lu_{\,s,\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial^3 u_{\,\varepsilon_i}}{\partial\, t^3} = L\,(u_s - u_{\,s,\varepsilon_i}) + \varepsilon_i\, \frac{\partial^3 u_{\,\varepsilon_i}}{\partial\, t^3}. \qquad (18)$$

Из равенства (18), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$ и при фиксированном s, получим единственное решение задачи (9)–(11). Таким образом, Теорема 3 доказана.

Теперь перейдем к доказательству разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия Теорем 2 и 3. Тогда решение задачи (1)–(4) существует и единственно в* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (1)–(4) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказано в Теореме 1. Во втором пункте статьи мы доказывали однозначную разрешимость задачи (9)–(11) в пространстве $W_2^2(Q_1)$ и для решения задачи (9)–(11) доказана соответствующая оценка:

$$\|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} \le c_3 \cdot \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)}\,.$$

Так как система собственных функций $\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\mu_s y\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис, используя равенства Парсеваля-Стеклова [9], [10] для решения задачи (1)–(4), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} < c_3 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)} = c_3 \cdot \|f\|^2_1\,. \qquad (19)$$

Отсюда получим существование единственного решения задачи (1)–(4) из пространства $W_2^2(Q)$. Теорема 4 доказана.

6 Гладкость решения

Теперь обратимся к исследованию гладкости решения задачи (1)–(4), когда $m \geq 1$. Ниже для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия Теоремы 1, кроме того, пусть, $D_t^q \alpha|_{t=0} = D_t^q \alpha|_{t=T}$, $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$, $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$. $f \in W_2^m(Q)$, $D_t^{m+1} f \in L_2(Q)$, $D_t^q f|_{t=0} = \gamma \cdot D_t^q f|_{t=T}$, $(q = 0, 1, 2, 3, ..., m)$. Тогда существует, причем единственное решение задачи (1)–(4) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$, где $m = 1, 2, 3, ...$.

Доказательство. Отметим также, что в работах [4], [5] при фиксированном s в более общем случае, когда $a(x,t) = 0$, и при ослабленных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа второго порядка (9) исследована гладкость решения нелокальной краевой задачи (9)–(11) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q_1)$, $1 \leq m \in N$, и доказаны соответствующие оценки

$$\|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} \leq c_{m+3} \cdot \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)} \ \ (m = 1, 2, 3, 4, ...). \tag{20}$$

Аналогичными рассуждениями при фиксированном s, в случае $a(x,t) \neq 0$ для решения нелокальной краевой задачи (9)–(11), можно доказать априорные оценки (20).

Так как система собственных функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_s y\right\}$ полна в пространстве $L_2(0, \ell)$ и в нем образует ортонормированный базис, используя равенства Парсеваля-Стеклова [9], [10] для решения задачи (9)–(11), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} <$$

$$< c_{m+3} \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)} = c_{m+3} \|f\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} \, . \tag{21}$$

Отсюда получим существование и единственность решения задачи (1)–(4) из пространства $W_2^{m+2}(Q)$, $1 \leq m \in N$. Теорема 5 доказана.

Литература

1 Франкль Ф.И. О задачах С.А. Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945. – Т. 9, № 2. – С. 121-143.

2 Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР, 1953. – Т. 122, № 2. – С. 167-170.

3 Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения, 1978. – Т. 14,№ 3. – С. 546-548.

4 Dzhamalov S.Z. The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed type of equation of the first kind in a plane // Malaysian journal of mathematical sciences. – 2018. – T. 12, No. 1. – P. 49-62.

5 Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат.науки, 2017. – Т. 21, № 4. – С. 1-14.

6 Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН, 2007. – Т. 413, № 1. – С. 23-26.

7 Цыбиков Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа // В. кн: Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 1986. – С. 201-206.

8 Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965.

9 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М. 1973. – С. 407.

10 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М. Наука, 1980. – С. 495.

11 Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. – НГУ, 1983. – 84 с.

12 Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Учебное пособие. – Новосибирск. НГУ, 1990. – С. 130.

Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. КӨПӨЛШЕМДІ ЧАПЛЫГИН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕҢІСТІКТЕГІ БІР БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ ТЕГІСТІГІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста көпөлшемді Чаплыгин теңдеуінің коэффициенттері үшін белгілі бір шарттар орындалғанда Соболев кеңістіктеріндегі тұрақты коэффициентті бейлокал бір шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі және шешімінің тегістігі дәлелденеді.

Кілттік сөздер. Көпөлшемді Чаплыгин теңдеулері, Соболев кеңістіктеріндегі бірмәнді шешілімділі және шешімнің тегістігі.

Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. ON THE SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MULTIDIMENSIONAL CHAPLYGIN'S EQUATION

In the present paper under some conditions on coefficients of the multidimensional Chaplygin's equation, the unique solvability and a smoothness of the solution of a nonlocal boundary value problem with constant coefficients in Sobolev's spaces are proved.

Keywords. Multidimensional Chaplygin's equations, unique solvability and smoothness of the solution in Sobolev's spaces.

Джамалов С.З.
Институт математики Академии Наук Республик Узбекистан
100170, г. Ташкент, Узбекистан, ул. Мирзо Улугбек, 81
E-mail: siroj63@mail.ru

Ашуров Р.Р.
Институт математики Академии Наук Республик Узбекистан
100170, г. Ташкент, Узбекистан, ул. Мирзо Улугбек, 81
E-mail: ashurovr@gmail.com

Статья поступила в редакцию 02.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 71–86.

МРНТИ 27.31.44, 27.35.21, 27.35.59

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА

Ж.К. Джобулаева

Аннотация. Изучена модельная задача для системы параболических уравнений. Исходная нелинейная задача со свободной границей типа Флорина описывает процесс фильтрации жидкостей и газов в пористой среде. В пространстве Гельдера доказаны существование, единственность и коэрцитивные оценки решения с константами, не зависящими от малых параметров.

Ключевые слова. Параболические уравнения, малые параметры, коэрцитивные оценки, пространство Гельдера.

1 Введение. Постановка задачи.

В работе изучается задача типа Флорина для системы параболический уравнений в пространствах Гельдера. Эта задача является математической моделью, описывающей процесс фильтрации жидкостей и газов в пористой среде.

Линейные задачи с малыми параметрами при производных по времени функции свободной границы были изучены в работах [1]–[7]. В настоящей статье изучается задача без производных по времени функции свободной границы $\psi(t)$ в правых частях условий (6), (7), которая соответствует вырожденной нелинейной задаче со свободной границей о плавлении бинарных сплавов и в которой свободная граница задается как неявная функция. В отличие от задач в [1]–[7], где свободная граница задана в явном виде.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35.

Funding: Работа выполнена по гранту № AP05133898 КН МОН РК.

Задача со свободной границей типа Флорина будет изучена в пространстве Гельдера $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1, 2$, где l – нецелое положительное число. Будут доказаны существование, единственность, оценки решения задачи с константами, не зависящими от малых параметров в пространстве Гельдера. Это дает нам возможность установить существование, единственность и оценки решения задачи без потери гладкости заданных функций при $\kappa = 0,\ \varepsilon > 0;\ \kappa > 0,\ \varepsilon = 0$ и $\kappa = 0,\ \varepsilon = 0$.

Пусть $D_1 = \{x \mid x < 0\},\ D_2 = \{x \mid x > 0\},\ D_{jT} = D_j \times (0, T),\ j = 1, 2,\ \sigma_T = (0, T)$.

Требуется определить функции $u_j(x, t),\ c_j(x, t),\ j = 1, 2$, и $\psi(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$\partial_t u_j - a_j \partial_x^2 u_j - \alpha_j \psi' = f_j(x, t) \quad \text{в} \quad D_{jT},\ j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\partial_t c_j - a_{j+2} \partial_x^2 c_j - \beta_j \psi' = f_{j+2}(x, t) \quad \text{в} \quad D_{jT},\ j = 1, 2, \tag{2}$$

начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad u_j\big|_{t=0} = 0, \quad c_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_j,\ j = 1, 2, \tag{3}$$

и условиям сопряжения на границе $x = 0,\ t \in (0, T)$

$$(u_1 - u_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \tag{4}$$

$$(c_1 - \gamma_1 u_1)\big|_{x=0} = \varphi_2(t),\ (c_2 - \gamma_2 u_2)\big|_{x=0} = \varphi_3(t), \tag{5}$$

$$(\lambda_1 \partial_x u_1 - \kappa \lambda_2 \partial_x u_2)\big|_{x=0} = g_1(t) + \kappa g_2(t), \tag{6}$$

$$(k_1 \partial_x c_1 - \varepsilon k_2 \partial_x c_2)\big|_{x=0} = g_3(t) + \varepsilon g_4(t), \tag{7}$$

где все коэффициенты постоянные, $a_j,\ a_{j+2}, \alpha_j,\ \beta_j,\ \gamma_j,\ \lambda_j,\ k_j > 0,\ j = 1, 2,\ \kappa,\ \varepsilon$ – положительные; $\partial_t = \partial/\partial_t,\ \partial_x = \partial/\partial_x,\ \partial_x^2 = \partial^2/\partial_{x^2},\ D_t^k = d^k/dt^k$.

Задача (1)–(7) лежит в основе решения нелинейной задачи со свободной границей для системы параболических уравнений, в которой свободная граница задается как неявная функция.

Задача (1)–(7) будет изучена в пространстве Гельдера [8]. Пусть l – нецелое положительное число, $\alpha = l - [l] \in (0, 1)$.

Под $C_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$ и $C_{\ t}^{\ l/2}(\overline{\sigma}_T)$ будем понимать банаховы пространства функций $u(x,t)$ и $\psi(t)$, имеющих нормы

$$|u|_{D_T}^{(2+l)} := \sum_{2m_0+m=0}^{2+[l]} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{D_T} + \sum_{2m_0+m=2+[l]} \Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{x,D_T}^{(\alpha)} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,D_T}^{(\alpha/2)}\Big) +$$

$$+ \sum_{2m_0+m=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,D_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},$$

$$|\psi|_{\sigma_T}^{(l/2)} := \sum_{m_0=0}^{[l/2]} |D_t^{m_0}\psi|_{\sigma_T} + [D_t^{[l/2]}\psi]_{\sigma_T}^{(l/2-[l/2])}, \tag{8}$$

где

$$|v|_{D_T} = \sup_{(x,t)\in D_T} |v|,$$

$$[v]_{x,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(z,t)\in D_T} \frac{|v(x,t)-v(z,t)|}{|x-z|^\alpha}, \quad [v]_{t,D_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,t_1)\in D_T} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^\alpha}.$$

Через $\overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{l,\ l/2}(\overline{D}_T)$ будем обозначать подпространства функций $u(x,t)$, принадлежащих $C_{x\ t}^{l,\ l/2}(\overline{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям

$$\partial_t^k u\big|_{t=0} = 0,\ k=0,...,[l/2].$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}_{\ t}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, l *– нецелое положительное число, норма* $|\psi|_{\overline{\sigma}_T}^{(1+l/2)}$, *определенная по формуле (8), эквивалентна норме*

$$\|\psi\|_{\overline{\sigma}_T}^{(\frac{1+l}{2})} = \sup_{t\in\sigma_T} t^{-\frac{1+l}{2}}|\psi|_{\overline{\sigma}_T} + \Big[D_t^{[(1+l)/2]}\psi\Big]_{\overline{\sigma}_T}^{\left(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}]\right)}.$$

2 Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $0 \le \kappa \le \kappa_0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \le \kappa_0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *и выполняются условия*

$$\alpha_1 - \alpha_2 > 0,\ \beta_j - \gamma_j \alpha_j > 0,\ \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0,\ j = 1,2.$$

Для любых функций $f_j \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{l,\ l/2}(\overline{D}_{jT})$, $f_{j+2} \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ t}^{l,\ l/2}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2$; $\varphi_k \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T)$, $k = 1,2,3$; $g_1, \kappa g_2, g_3, \varepsilon g_4 \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, *задача (1)–(7) имеет единственное решение* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\quad t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $c_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\quad t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $\psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}(|u_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} + |c_j|_{D_{jT}}^{(2+l)}) + |\psi|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} \le$$

$$\le C_1\left(\sum_{j=1}^{2}\left(|f_j|_{D_{jT}}^{(l)} + |f_{j+2}|_{D_{jT}}^{(l)}\right) + \sum_{k=1}^{3}|\varphi_k|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + \right. \tag{9}$$

$$\left. + |g_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + \kappa|g_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + |g_3|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + \varepsilon|g_4|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\right),$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* ε.

Для сведения задачу (1)–(7) к более удобной форме построим вспомогательные функции $V_j,\ Z_j,\ j = 1,2$, как решения следующих краевых задач:

$$\begin{aligned}
&\partial_t V_j(x,t) - a_j \partial_x^2 V_j(x,t) = f_j(x,t) \quad \text{в} \quad D_{jT},\ j = 1,2,\\
&V_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_j,\ j = 1,2,\\
&(V_1 - V_2)\big|_{x=0} = \varphi_1(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t Z_1(x,t) - a_3 \partial_x^2 Z_1(x,t) = f_3(x,t) \quad \text{в} \quad D_{1T},\\
&Z_1\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_1, \quad Z_2\big|_{x=0} = \varphi_2(t) + \gamma_1 V_1\big|_{x=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t Z_2(x,t) - a_4 \partial_x^2 Z_2(x,t) = f_4(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T},\\
&Z_2\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_2, \quad Z_2\big|_{x=0} = \varphi_3(t) + \gamma_2 V_2\big|_{x=0}.
\end{aligned}$$

Каждая из этих задач в силу [8] имеет единственное решение

$$V_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ Z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ j=1,2,$$

удовлетворяющее оценкам

$$|V_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \leq C_2\big(|f_j|_{D_{1T}}^{(l)} + |\varphi_1|_{\sigma_T}^{(1+l/2)}\big),\ j=1,2, \tag{10}$$

$$|Z_1|_{D_{1T}}^{(2+l)} \leq C_3\big(|f_3|_{D_{1T}}^{(l)} + |\varphi_2|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |V_1|_{D_{1T}}^{(2+l)}\big), \tag{11}$$

$$|Z_2|_{D_{2T}}^{(2+l)} \leq C_4\big(|f_4|_{D_{2T}}^{(l)} + |\varphi_3|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |V_2|_{D_{2T}}^{(2+l)}\big). \tag{12}$$

С помощью замены в задаче (1)–(7)

$$\begin{aligned} u_j(x,t) &= v_j(x,t) + V_j(x,t) + \alpha_j\psi(t),\ j=1,2,\\ c_j(x,t) &= z_j(x,t) + Z_j(x,t) + \beta_j\psi(t),\ j=1,2, \end{aligned} \tag{13}$$

мы получим задачу для нахождения новых неизвестных функций $v_j(x,t), z_j(x,t),\ j=1,2,$ и $\psi(t)$:

$$\partial_t v_j - a_j\partial_x^2 v_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j=1,2, \tag{14}$$

$$\partial_t z_j - a_{j+2}\partial_x^2 z_j = 0 \quad \text{в} \quad D_{jT}, \quad j=1,2, \tag{15}$$

удовлетворяющих нулевым начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \quad v_j\big|_{t=0} = 0, \quad z_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_j, \quad j=1,2, \tag{16}$$

и условиям сопряжения на границе $x=0,\ t\in(0,T)$:

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=0} + (\alpha_1-\alpha_2)\psi = 0, \tag{17}$$

$$(z_1-\gamma_1 v_1)\big|_{x=0} + (\beta_1-\gamma_1\alpha_1)\psi = 0,\ \ (z_2-\gamma_2 v_2)\big|_{x=0} + (\beta_2-\gamma_2\alpha_2)\psi = 0, \tag{18}$$

$$(\lambda_1\partial_x v_1 - \kappa\lambda_2\partial_x v_2)\big|_{x=0} = \Phi_1(t), \tag{19}$$

$$(k_1\partial_x z_1 - \varepsilon k_2\partial_x z_2)\big|_{x=0} = \Phi_2(t), \tag{20}$$

где $\Phi_1(t) := g_1(t) + \kappa g_2(t) - (\lambda_1 \partial_x V_1 - \kappa\lambda_2 \partial_x V_2)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$,

$\Phi_2(t) := g_3(t) + \varepsilon g_4(t) - (k_1 \partial_x Z_1 - \varepsilon k_2 \partial_x Z_2)\big|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|\Phi_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leq C_5 \left(\sum_{j=1}^{2} |f_j|_{D_{jT}}^{(l)} + \sum_{k=1}^{3} |\varphi_k|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |g_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + \kappa |g_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \right), \quad (21)$$

$$|\Phi_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leq C_6 \left(\sum_{j=1}^{2} |f_{j+2}|_{D_{jT}}^{(l)} + \sum_{k=2}^{3} |\varphi_k|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} + |g_3|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} + \varepsilon |g_4|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \right). \quad (22)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ или $0 < \kappa \leq \kappa_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$, $\beta_j - \gamma_j \alpha_j > 0$, $\beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$, l – нецелое положительное число.*

При любых $\Phi_j(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $j = 1, 2$, решение задачи (14)–(20) может быть представлено в виде

$$\psi(t) = \frac{2\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} + \kappa \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\right)}{k_{01}} \int_0^t \Phi_2(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_x(x+\sigma, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma -$$

$$- \frac{2\left(\frac{k_1\gamma_1}{\sqrt{a_3}} + \varepsilon \frac{k_2\gamma_2}{\sqrt{a_4}}\right)}{k_{01}} \int_0^t \Phi_1(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_x(x+\sigma, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma, \ x > 0, \quad (23)$$

$$v_1(x,t) = \frac{2a_1\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}} + \varepsilon \frac{k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_4}}\right)}{k_{01}} \int_0^t \Phi_1(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma +$$

$$+ \frac{2a_1\kappa\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{k_{01}\sqrt{a_2}} \int_0^t \Phi_2(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_{1x}(\cdot, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma, \ x < 0. \quad (24)$$

$$v_2(x,t) = -\frac{2a_2\left(\frac{k_1(\beta_1-\alpha_2\gamma_1)}{\sqrt{a_3}} + \varepsilon \frac{k_2(\beta_2-\alpha_2\gamma_2)}{\sqrt{a_4}}\right)}{k_{01}} \int_0^t \Phi_1(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \Gamma_{2x}(x+\sqrt{a_2}\sigma, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma -$$

$$-\frac{2a_2\lambda_1(\alpha_2-\alpha_1)}{k_{01}\sqrt{a_1}}\int\limits_0^t\Phi_2(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{2x}(\cdot,t-\tau-\sigma)\big|_{x=0}d\sigma, \tag{25}$$

$$z_1(x,t)=\frac{2a_3\varepsilon k_2(\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1)}{k_{01}\sqrt{a_4}}\int\limits_0^t\Phi_1(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{3x}(-x+\sqrt{a_3}\sigma,t-\tau-\sigma)d\sigma+$$

$$+\frac{2a_3\Big(\kappa\frac{\lambda_2(\beta_1-\gamma_1\alpha_2)}{\sqrt{a_2}}+\frac{\lambda_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\Big)}{k_{01}}\int\limits_0^t\Phi_2(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{3x}(\cdot,t-\tau-\sigma)d\sigma,\ x<0, \tag{26}$$

$$z_2(x,t)=-\frac{2a_4k_1(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)}{k_{01}\sqrt{a_3}}\int\limits_0^t\Phi_1(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{4x}(x+\sqrt{a_4}\sigma,t-\tau-\sigma)d\sigma-$$

$$-\frac{2a_4\Big(\kappa\frac{\lambda_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_2)}{\sqrt{a_2}}+\frac{\lambda_1(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\Big)}{k_{01}}\int\limits_0^t\Phi_2(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{4x}(\cdot,t-\tau-\sigma)d\sigma,\ x>0, \tag{27}$$

где

$$k_{01}=\kappa\frac{k_1\lambda_2(\beta_1-\alpha_2\gamma_1)}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_2}}+\varepsilon\kappa\frac{k_2\lambda_2(\beta_2-\alpha_2\gamma_2)}{\sqrt{a_4}\sqrt{a_2}}+$$
$$+\frac{k_1\lambda_1(\beta_1-\alpha_1\gamma_1)}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}}+\varepsilon\frac{k_2\lambda_1(\beta_2-\alpha_1\gamma_2)}{\sqrt{a_4}\sqrt{a_1}}, \tag{28}$$

$\Gamma_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{a_i\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a_it}},\ i=1-4,$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t w-a_i\partial_x^2 w=0$, удовлетворяющее оценке

$$|\partial_t^k\partial_x^m\Gamma_i(x,t)|\le C_7\frac{1}{t^{\frac{1+2k+m}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8a_it}},\ i=1-4. \tag{29}$$

Замечание. *Как видно из формулы (28), малые параметры κ и ε содержатся в k_{01}, в знаменателях решения (23)–(27)*, но величина $\frac{1}{k_{01}}$ ограничена, действительно

$$k_{01}\ge\frac{k_1\lambda_1(\beta_1-\alpha_1\gamma_1)}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}}>0,\ \frac{1}{k_{01}}\le\frac{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}}{k_1\lambda_1(\beta_1-\alpha_1\gamma_1)}\quad\forall\kappa,\varepsilon\ge0. \tag{30}$$

Доказательство Леммы 2. В задаче (14)–(20) применим преобразование Лапласа по переменной $t:\ \widetilde{F}(p)\equiv L[F]=\int\limits_0^t F(t)e^{-pt}dt$ и после некоторых преобразований решение задачи (14)–(20) в области изображений Лапласа запишется в виде

$$\widetilde{\psi}=-\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}}+\kappa\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}\right)\widetilde{\Phi}_2(p)}{\sqrt{p}k_{01}}+\frac{\left(\frac{k_1\gamma_1}{\sqrt{a_3}}+\varepsilon\frac{k_2\gamma_2}{\sqrt{a_4}}\right)\widetilde{\Phi}_1(p)}{\sqrt{p}k_{01}},$$

$$\widetilde{v}_1=\left(\frac{\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}}+\varepsilon\frac{k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_2)}{\sqrt{a_4}}\right)\widetilde{\Phi}_1(p)}{\sqrt{p}k_{01}}+\frac{\kappa\frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}}(\alpha_1-\alpha_2)\widetilde{\Phi}_2(p)}{\sqrt{p}k_{01}}\right)e^{\sqrt{\frac{p}{a_1}}x},\ x<0,$$

$$\widetilde{v}_2=\left(\frac{\left(\frac{k_1(\beta_1-\alpha_2\gamma_1)}{\sqrt{a_3}}+\varepsilon\frac{k_2(\beta_2-\alpha_2\gamma_2)}{\sqrt{a_4}}\right)\widetilde{\Phi}_1(p)}{\sqrt{p}k_{01}}+\frac{\frac{\lambda_1(\alpha_2-\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\widetilde{\Phi}_2(p)}{\sqrt{p}k_{01}}\right)e^{-\sqrt{\frac{p}{a_2}}x},\ \ x>0,$$

$$\widetilde{z}_1=\left(\frac{\varepsilon\frac{k_2(\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1)}{\sqrt{a_4}}\widetilde{\Phi}_1(p)}{\sqrt{p}k_{01}}+\frac{\left(\kappa\frac{\lambda_2(\beta_1-\gamma_1\alpha_2)}{\sqrt{a_2}}+\frac{\lambda_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)\widetilde{\Phi}_2(p)}{\sqrt{p}k_{01}}\right)e^{\sqrt{\frac{p}{a_3}}x},\ x<0,$$

$$\widetilde{z}_2=\left(\frac{\frac{k_1(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)}{\sqrt{a_3}}\widetilde{\Phi}_1(p)}{\sqrt{p}k_{01}}+\frac{\left(\kappa\frac{\lambda_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_2)}{\sqrt{a_2}}+\frac{\lambda_1(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)\widetilde{\Phi}_2(p)}{\sqrt{p}k_{01}}\right)e^{-\sqrt{\frac{p}{a_4}}x},\ x>0.$$

Применим к функциям $\widetilde{\psi},\ \widetilde{v}_j,\ \widetilde{z}_j,\ j=1,2,$ формулы обратных преобразований Лапласа [9] при $x<0$:

$$\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}}x}}{\sqrt{p}}\doteqdot\int\limits_0^t\frac{-x+\sqrt{a}\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\sigma)^3}}e^{-\frac{(-x+\sqrt{a}\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}}d\sigma=2a\int\limits_0^t\partial_x\Gamma(-x+\sqrt{a}\sigma,t-\sigma)d\sigma,$$

$$\widetilde{\Phi}_j(p)\frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}(-x)}}{\sqrt{p}}\doteqdot 2a\int\limits_0^t\Phi_j(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_x(-x+\sqrt{a}\sigma,t-\tau-\sigma)d\sigma=$$

$$=\int\limits_0^t\Phi_j(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\frac{-x+\sqrt{a}\sigma}{2\sqrt{\pi a(t-\tau-\sigma)^3}}e^{-\frac{(-x+\sqrt{a}\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}}d\sigma,\ \ j=1,2,$$

и аналогичные при $x > 0$. И мы получим решение задачи (14)–(20) в виде (23)–(27).

3 Доказательство Теоремы 1

Мы свели задачу (1)–(7) к эквивалентной задаче (14)–(20). Для доказательства Теоремы 1 для задачи (1)–(7) установим сначала теорему для задачи (14)–(20).

Теорема 2. *Пусть* $0 \le \kappa \le \kappa_0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *или* $0 < \kappa \le \kappa_0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *и*

$$\alpha_1 - \alpha_2 > 0,\ \beta_j - \gamma_j\alpha_j > 0,\ \beta_{3-j} - \gamma_{3-j}\alpha_j > 0,\ j = 1, 2.$$

Для любых функций $\Phi_j(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T),\ j = 1, 2,$ *задача (14)–(20) имеет единственное решение* $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT}),\ \psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T)$ *и для решения справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}\left(|v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} + |z_j|_{D_{jT}}^{(2+l)}\right) + |\psi|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} \le C_8 \sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j = 1, 2, \tag{31}$$

где постоянная C_8 *не зависит от* κ *и* ε.

Для доказательства Теоремы 2 установим сначала следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия Теоремы 2. Тогда производные* $\partial_x v_j(x,t)\big|_{x=0}, \partial_x z_j(x,t)|_{x=0},\ j = 1, 2,$ *принадлежат пространству* $\overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *и подчиняются оценкам*

$$|\partial_x v_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_9 \sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j = 1, 2,$$

$$|\partial_x z_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{10} \sum_{j=1}^{2} |\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j = 1, 2,$$

где постоянные C_9, C_{10} *не зависят от* κ *и* ε.

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, производную функции $v_1(x,t)$,

$$\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} := w_1(t)+w_2(t)+w_3(t)+w_4(t)\equiv$$

$$\equiv\frac{2a_1\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}}+\frac{\varepsilon k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)}{k_{01}}\left(-\frac{1}{\sqrt{a_1}}\int\limits_0^t\Phi_1(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau-\sigma)\big|_{x=0}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1}\int\limits_0^t\Phi_1(\tau)\Gamma_1(-x,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau\right)+ \tag{32}$$

$$+\frac{2a_1\kappa\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{a_2}k_{01}}\left(-\frac{1}{\sqrt{a_1}}\int\limits_0^t\Phi_2(\tau)d\tau\int\limits_0^{t-\tau}\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau-\sigma)\big|_{x=0}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1}\int\limits_0^t\Phi_2(\tau)\Gamma_1(-x,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau\right),\ j=1,2.$$

Оценим норму производной $\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0}$.

Тепловой потенциал простого слоя $\int\limits_0^t\Phi_j(\tau)\Gamma_1(-x,t-\tau)\big|_{x=0}d\tau,\ j=1,2,$ в формуле (32) согласно общей теории [8] принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,1+l/2}{}_t(\overline{D}_{jT})$, l – нецелое положительное число, и подчиняется оценке

$$\sum_{j=2,4}|w_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\le\frac{C_{11}}{k_{01}}\sum_{j=2,4}|w_j|_{\sigma_T}^{(1+l/2)}\le\frac{C_{12}}{k_{01}}\sum_{j=1}^{2}|\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \tag{33}$$

где постоянная C_{12} не зависит от κ и ε.

Оценим функцию $w_1(t)$ в (32), для определенности. Произведя замену $t-\tau-\sigma=t-\tau_1$ по σ и поменяв порядок интегрирования, получим

$$w_1(t)=\frac{2\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}}+\frac{\varepsilon k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)}{k_{01}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_0^{\tau_1}[\Phi_1(\tau_1-\sigma)-\Phi_1(\tau_1)]\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t\Phi_1(\tau_1)d\tau_1\int\limits_0^{\tau_1}\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma,t-\tau_1)\big|_{x=0}d\sigma\right).$$

Для $\Phi_j(t)\in\overset{\circ}{C}{}_t^{(\frac{1+l}{2})}(\overline{\sigma}_T),\ j=1,2$, справедливы неравенства

$$|\Phi_j(\tau_1)|\le M\tau_1^{\frac{1+l}{2}},\quad\text{где}\quad M=|\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$

$$|\Phi_j(\tau_1-\sigma)-\Phi_j(\tau_1)|\le[\Phi_j]_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}},\ [l]=0,\ l=\alpha\in(0,1),$$

$$|\Phi_j(\tau_1-\sigma)-\Phi_j(\tau_1)|\le M\sigma\tau_1^{\frac{l-1}{2}},\ [l]\ge 1.$$

При $[l]=0$ мы получим

$$|w_1(t)|\le\frac{C_{13}M}{k_{01}}\left(\int\limits_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_0^{\tau}\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}}e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}}{t-\tau}d\tau\int\limits_0^{\tau}e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}}d\sigma\right)\le\frac{C_{14}M}{k_{01}}t^{1+\frac{\alpha}{2}},\tag{34}$$

где C_{14} не зависит от κ и ε, а вместо τ_1 мы снова записали τ.

При $[l]\ge 1$ применим неравенство

$$|\xi|^{\gamma}e^{-\xi^2}\le C_{\gamma}e^{-\xi^2/2},\ \gamma\ge 0,$$

тогда

$$|w_1(t)|\le\frac{C_{15}M}{k_{01}}\left(\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{l-1}{2}}}{t-\tau}d\tau\int\limits_0^{\tau}\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{1+l}{2}}}{t-\tau}d\tau\int\limits_0^{\tau}e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}}d\sigma\right)\le\frac{C_{16}M}{k_{01}}\Big(t^{\frac{1+l}{2}}+t^{1+\frac{l}{2}}\Big)=\frac{C_{16}M}{k_{01}}t^{\frac{1+l}{2}}\Big(1+\sqrt{T}\Big),\tag{35}$$

где C_{16} не зависит от κ и ε.

Оценим константу Гельдера старшей производной, для этого $D_t^k w_1(t),\ k = \left[\frac{1+l}{2}\right]$ потенциал проинтегрируем по частям k раз, тогда

$$\partial_t^k w_1(t) =$$

$$= \frac{2a_1\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}} + \frac{\varepsilon k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)}{k_{01}} \int\limits_0^t \Phi(\tau)d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau-\sigma)\big|_{x=0} d\sigma. \quad (36)$$

Так как $\Phi_1(\tau) \in \overset{\circ}{C}{}_{\tau}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, то $\Phi(\tau) := D_\tau^k \Phi_1(\tau) \in \overset{\circ}{C}{}_{\tau}^{\frac{1+l}{2}-\left[\frac{1+l}{2}\right]}(\overline{\sigma}_T),\ k = \left[\frac{1+l}{2}\right]$. Для удобства обозначим $\alpha = l - [l]$, $\frac{\beta}{2} = \frac{1+l}{2} - \left[\frac{1+l}{2}\right]$, очевидно

$$\beta = \begin{cases} 1+\alpha, & \left[\frac{1+l}{2}\right] \text{ – четное число или } 0, \\ \alpha, & \left[\frac{1+l}{2}\right] \text{ – нечетное число.} \end{cases}$$

Справедливы следующие неравенства при $t_1 < t$:

$$|\Phi(t) - \Phi(t_1)| \le N(t-t_1)^{\beta/2},\ |\Phi(t)| \le N t^{\beta/2},\ N = [\Phi]_{\overline{\sigma}_T}^{(\beta/2)}. \quad (37)$$

Рассмотрим производную (36), поменяем порядок интегрирования, произведем замену $t - \tau - \sigma = t - \tau_1$ в интеграле по τ и запишем производную $\partial_t^k w_1(t)$ в следующем виде:

$$\partial_t^k w_1(t) = \frac{2a_1\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}} + \frac{\varepsilon k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)}{k_{01}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} [\Phi(\tau_1-\sigma) - \Phi(t-\sigma)] \Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau_1)\big|_{x=0} d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \Phi(t-\sigma) \Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau_1)\big|_{x=0} d\sigma \right).$$

Сформируем разность производной $\partial_t^k w_1(t)$, положив для определенности $0 < t_1 < t < T$,

$$\Delta = \partial_t^k w_1(t) - \partial_{t_1}^k w_1(t_1) \equiv \frac{2a_1\left(\frac{k_1(\beta_1-\gamma_1\alpha_1)}{\sqrt{a_3}} + \frac{\varepsilon k_2(\beta_2-\gamma_2\alpha_1)}{\sqrt{a_1}}\right)}{k_{01}} \times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_0^{\tau} [\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(t_1-\sigma)]d\sigma \int\limits_{t_1}^{t} \partial_{t_2}\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t_2-\tau)\big|_{x=0} dt_2+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{\tau} [\Phi(\tau-\sigma)-\Phi(t-\sigma)]\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau)\big|_{x=0} d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{t_1} d\tau \int\limits_0^{\tau} \Phi(t_1-\sigma)d\sigma \int\limits_{t_1}^{t} \partial_{t_2}\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t_2-\tau)\big|_{x=0} dt_2+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{\tau} \Phi(t-\sigma)\Gamma_{1x}(-x+\sqrt{a_1}\sigma, t-\tau)\big|_{x=0} d\sigma\Bigg),$$

где вместо τ_1 мы записали τ.

Оценим Δ, используя формулы (29) и (37), будем иметь

$$|\Delta| \le \frac{C_{17}N}{k_{01}}\Bigg(\int\limits_{t_1}^{t} dt_2 \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{\beta/2}}{(t_2-\tau)^2} d\tau \int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{\sigma^2}{4(t_2-\tau)}} d\sigma+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{\beta/2}}{t-\tau} d\tau \int\limits_0^{\tau} e^{-\frac{\sigma^2}{4(t_2-\tau)}} d\sigma+\int\limits_{t_1}^{t} dt_2 \int\limits_0^{t_1} \frac{d\tau}{(t_2-\tau)^2} \int\limits_0^{\tau} (t_1-\sigma)^{\beta/2} e^{-\frac{\sigma^2}{4(t_2-\tau)}} d\sigma+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\tau_1 \int\limits_0^{\tau} \frac{(t-\sigma)^{\beta/2}}{t-\tau} e^{-\frac{\sigma^2}{4(t-\tau)}} d\sigma\Bigg).$$

В первом и во втором интеграле проинтегрируем по σ и используем неравенства $(t_1-\tau)^{\beta/2} \le (t_2-\tau)^{\beta/2}$ в первом, $(t-\tau)^{\beta/2} \le (t-t_1)^{\beta/2}$ во втором, $(t_1-\sigma)^{\beta/2} \le (t_1-\tau)^{\beta/2}$ в третьем и $(t-\sigma)^{\beta/2} \le t^{\beta/2}$ в последнем интеграле, тогда мы получим

$$|\Delta| \le \frac{C_{18}N}{k_{01}}(t-t_1)^{\frac{1+\beta}{2}},\ [\partial_t^k w_1(t)]_{t,\sigma_T}^{(\beta/2)} \le \frac{C_{18}}{k_{01}}[\Phi]_{\sigma_T}^{(\beta/2)} \le \frac{C_{19}}{k_{01}}|\Phi_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \quad (38)$$

где постоянная C_{19} не зависит от κ и ε.

Из оценок (34), (35), (38) следует, что согласно Лемме 1 $w_1(t) \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|w_1(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{20}\|w_1(t)\|_{\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})} \le \frac{C_{21}}{k_{01}}|\Phi_1|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \tag{39}$$

где постоянная C_{21} не зависит от κ и ε.

Как видно из формулы (32), потенциал $w_3(t)$ такой же, как $w_1(t)$. Поэтому он подчиняется такой же оценке (39)

$$|w_3(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le \frac{C_{22}}{k_{01}}|\Phi_2|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \tag{40}$$

где постоянная C_{22} не зависит от κ и ε.

Из формулы (32): $\partial_x v_1(x,t)\big|_{x=0} := w_1(t)+w_2(t)+w_3(t)+w_4(t)$ и оценок (33), (39), (40) и (30) для k_{01} будем иметь

$$|\partial_x v_1(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le \frac{C_{23}}{k_{01}}\sum_{j=1}^{2}|\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{24}\sum_{j=1}^{2}|\Phi_j|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$

где постоянная C_{24} не зависит от κ и ε.

Аналогично доказывается, что $\partial_x v_2|_{x=0},\ \partial_x z_1|_{x=0},\ \partial_x z_2|_{x=0} \in \overset{\circ}{C}{}_t^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ и

$$|\partial_x v_2|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{25}|\Phi_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, |\partial_x z_j|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{26}|\Phi_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j=1,2.$$

$\square$

По Лемме 3 производная $\partial_x v_j|_{x=0}, \partial_x z_j|_{x=0}, j=1,2$, принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{\frac{1+l}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, тогда по теореме о следах функций общей теории параболических уравнений мы имеем, что $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\overline{D}_{jT}), z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\overline{D}_{jT}), j=1,2$, и

$$|v_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_{27}|\partial_x v_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{28}|\Phi_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$

$$|z_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_{29}|\partial_x z_j(x,t)|_{x=0}|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \le C_{30}|\Phi_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ j=1,2.$$

Из условий (17) вытекает, что функция $\psi(t) = (v_1 - v_2)|_{x=0}$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}_t^{1+l/2}(\overline{\sigma}_T)$ и подчиняется оценке

$$|\psi(t)|_{\sigma_T}^{(1+l/2)} \le C_{31}\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\sum_{j=1}^{2}|v_j|_{R_T}^{(2+l)} \le C_{32}\sum_{j=1}^{2}|\Phi_j(t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$

где постоянные C_{25}–C_{32} не зависят от $\kappa, \varepsilon,\ \alpha_1-\alpha_2>0$. Итак, мы доказали Теорему 3 и неравенство (31). □

Доказательство Теоремы 1. Из формул (13)

$$u_j(x,t) = v_j(x,t)+V_j(x,t)+\alpha_j\psi(t), c_j(x,t) = z_j(x,t)+Z_j(x,t)+\beta_j\psi(t),\ j=1,2,$$

на основании Теоремы 2 и оценок (31), (10)–(12), (21), (22) для функций $V_j(x,t),\ j=1,2,\ Z_1(x,t),\ Z_2(x,t)$ и $\Phi_j(t),\ j=1,2,$ получим Теорему 1 и оценку (9). □

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.И. Бижановой за внимание и помощь при написании этой работы.

Литература

1 Джобулаева Ж.К. Оценки решения двухфазной задачи с двумя малыми параметрами в условиях сопряжения для системы параболических уравнений // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 83-109.

2 Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi F. On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems // Math. Ann. – 1999. – V. 315. – P. 61-95.

3 Bizhanova G.I. On the Stefan problem with the small parameter // Banach Center Publications. – 2008. – V. 81. – P. 43-63.

4 Bizhanova G.I. On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. II // Matem. zhurnal. – 2012. – No. 1. – P. 70-86.

5 Алимжанов Е.С. Решение модельной задачи Веригина с малым параметром в пространстве Гельдера // Вестник КазНУ, сер. мат.,мех., инф. – 2013. – № 3(78). – С. 19-32.

6 Bizhanova G.I. Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boubdary, Stefan type problems // Zapiski nauchn. semin. POMI. – 2008. – V. 362. – P. 64-91.

7 Bizhanova G.I. On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter I // Математический журнал. Алматы. – 2012. – V. 12, No. 1(43). – P. 24-37.

8 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

9 Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 344 с.

Джобулаева Ж.К. ГЕЛЬДЕР КЕҢIСТIГIНДЕ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСI ҮШIН МОДЕЛЬДIК ЕСЕПТIҢ ШЕШIМIНIҢ БАҒАЛАУЛАРЫ

Параболалық теңдеулер жүйесi үшiн модельдiк есеп зерттелдi. Алғашқы еркiн шекаралы сызықсыз Флорин типтi есебi кеуектi ортадағы сұйықтықтарды және газдардың процесiн сипаттайды. Гельдер кеңiстiгiнде шешiмнiң бар болуы, жалғыздығы және шешiмнiң кiшi параметрлерден тәуелсiз коэрцитивтiк бағалаулары дәлелдендi.

Кiлттiк сөздер. Параболалық теңдеулер, кiшi параметрлер, коэрцитивтiк бағалаулар, Гельдер кеңiстiгi.

Dzhobulaeva Zh.K. THE ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE MODEL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF THE PARABOLIC EQUATIONS IN THE HÖLDER SPACE

There is studied the model problem for the system of the parabolic equations. The original nonlinear free boundary problem of Florin type describes the process of filtration of liquids and gases in the porous medium. There are proved in the Hölder space the existence, uniqueness and uniform coercive estimates of the solution with respect to the small parameters.

Keywords. Parabolic equations, small parameters, coercive estimates, Hölder space.

Джобулаева Ж.К.
Институт математики и математического моделирования
050100, Алматы, ул. Пушкина, 125
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050010, Алматы, Казахстан, пр. ал-Фараби, 71
E-mail: zhanat-78@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.05.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 87–106.

МРНТИ 27.31.19

ON A CLASS OF INVERSE PROBLEMS ON A SOURCE RESTORATION IN THE HEAT CONDUCTION PROCESS FROM NONLOCAL DATA

G. Dildabek, M.B. Ivanova

Annotation. In this article we consider an inverse problem for one-dimensional heat equation with involution and with periodic boundary conditions with respect to a spatial variable. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a weakly permeable insulation. The inverse problem consists in the restoration (simultaneously with the solution) of an unknown right-hand side of the equation, which depends only on the spatial variable. The conditions for redefinition are initial and final states. Existence and uniqueness results for the given problem are obtained via the method of separation of variables.

Keywords. Inverse problem, heat equation, equation with involution, periodic boundary conditions, method of separation of variables.

1 Introduction

The problems that imply the determination of coefficients or the right-hand side of a differential equation (together with its solution) are commonly referred to inverse problems of mathematical physics. In this paper we consider one family of problems implying the determination of the density distribution and of heat sources from given values of initial and final distributions. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a weakly permeable insulation. The mathematical statement of such problems leads to an inverse problem for the heat equation, where it is required to find not only a solution of the problem, but also its right-hand side that depends only on the spatial variable.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R30, 35R10.

Funding: The authors were supported in parts by the MES RK grant AP 05133271.

In this paper, we will consider the inverse problem close to that investigated in [1], [2]. Together with the solution it is necessary to find an unknown right-hand side of the equation. The equation contains the usual time derivative and an involution with respect to the spatial variable. In contrast to [1], we investigate the problem under nonlocal boundary conditions with respect to the spatial variable. The conditions for overdetermination are initial and final states.

The second of the main differences in the investigated inverse problem being studied is that the unknown function enters, both in the right-hand side of the equation, and in the conditions of the initial and final overdetermination.

Let us consider a problem of modeling the thermal diffusion process which is close to that described in the report of Cabada and Tojo [2], where the example that describes a concrete situation in physics is given. Consider a closed metal wire (length 2π) wrapped around a thin sheet of insulation material in the manner shown in Figure 1.

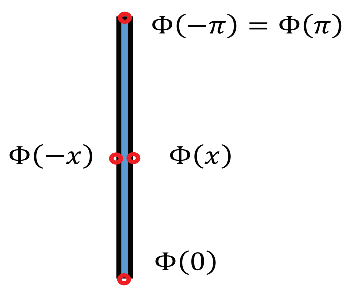

Figure 1 – The closed metal wire wrapped around a thin sheet of insulation material

Assuming that the position $x = 0$ is the lowest of the wire, and the insulation goes up to the left at $-\pi$ and to the right up to π. Since the wire is closed, points $-\pi$ and π coincide.

The layer of insulation is assumed to be slightly permeable. Therefore, the temperature value from one side affects the diffusion process on the other side. For this reason, the standard heat equation is modified and to its right-hand side $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ a third term $\varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(-x,t)$ (where $|\varepsilon| < 1$) is added. Here $\Phi(x,t)$ is the temperature at point x of the wire at time t.

Thus, this process is described by the equation

$$\Phi_t(x,t) - \Phi_{xx}(x,t) + \varepsilon\Phi_{xx}(-x,t) = f(x) \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \{(x,t): -\pi < x < \pi,\ 0 < t < T\}$. Here $f(x)$ is the influence of an internal source that does not change with time; $t = 0$ is an initial time point and $t = T$ is a final one.

As the additional information we take values of the initial and final conditions of the temperature

$$\Phi(x,0) = \phi(x), \quad \Phi(x,T) = \psi(x), \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Since the wire is closed, it is natural to assume that the temperature at the ends of the wire is the same at all times:

$$\Phi(-\pi,t) = \Phi(\pi,t), \ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Since $\Phi(x,t)$ is the temperature at point x of the wire at time t, average temperature along the entire length of the wire at time t can be calculated from formula $\widetilde{\Phi}(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi,t)\, d\xi$. If additional heating (cooling) is applied through the boundary point $x = -\pi$, then the average temperature of the wire $\widetilde{\Phi}(t)$ increases (decreases). The greater the importance of this heating (cooling), the faster the average temperature of the wire $\widetilde{\Phi}(t)$ changes.

Consider a process in which the temperature at one end at every time point t is proportional to the change speed of the average value of the temperature throughout the wire. Then,

$$\Phi(-\pi,t) = \gamma \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi,t)\, d\xi, \ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Here γ is a proportionality coefficient.

Thus the investigated process is reduced to the following mathematical inverse problem: *Find the right-hand side* $f(x)$ *of the heat equation* (1)*, and its solution* $\Phi(x,t)$ *subject to the initial and final conditions* (2)*, the boundary condition* (3)*, and condition* (4)*.*

2 Reduction to a mathematical problem

Condition (4) is significantly nonlocal (i.e. values of the unknown function over the entire domain are used). The integral along inner lines of the domain is present in this condition. Using the idea of A.A. Samarskii, we transform this condition. Taking into account Eq. (1) from (4), we get

$$\Phi\left(-\pi,t\right)=\gamma\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\Phi_{\xi\xi}\left(\xi,t\right)-\varepsilon\Phi_{\xi\xi}\left(-\xi,t\right)+f\left(\xi\right)\right\}d\xi,\ t\in\left[0,T\right].$$

Hence

$$\Phi\left(-\pi,t\right)=\gamma(1-\varepsilon)[\Phi_{x}\left(\pi,t\right)-\Phi_{x}\left(-\pi,t\right)]+\gamma\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\xi\right)d\xi,\ t\in\left[0,T\right].$$

Let us introduce the notations

$$u(x,t)=\Phi(x,t)-\gamma\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\xi\right)d\xi. \tag{5}$$

Then in terms of a new function $u(x,t)$ we get the following inverse problem: *In the domain $\Omega=\{(x,t):\ -\pi<x<\pi,\ 0<t<T\}$ find the right-hand side $f(x)$ of the heat equation with involution*

$$u_{t}\left(x,t\right)-u_{xx}\left(x,t\right)+\varepsilon u_{xx}\left(-x,t\right)=f\left(x\right), \tag{6}$$

and its solution $u(x,t)$ satisfying the initial conditions

$$u\left(x,0\right)=\phi\left(x\right)-\gamma\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\xi\right)d\xi,\quad x\in[-\pi,\pi], \tag{7}$$

and the final conditions

$$u(x,T)=\psi(x)-\gamma\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\xi\right)d\xi,\quad x\in[-\pi,\pi], \tag{8}$$

and the boundary ones

$$\left\{\begin{array}{r}u_{x}\left(-\pi,t\right)-u_{x}\left(\pi,t\right)-au\left(\pi,t\right)=0,\\ u\left(-\pi,t\right)-u\left(\pi,t\right)=0,\end{array}\right.\qquad t\in\left[0,T\right]. \tag{9}$$

Where $\phi(x)$ and $\psi\ (x)$ are given sufficiently smooth functions; ε is a nonzero real number such that $|\varepsilon| < 1$; and $a = \frac{1}{\gamma(\varepsilon-1)}$.

In the physical sense, the second of conditions (9) means the equality of the distribution densities at the ends of the interval. And the first of conditions (9) means the proportionality of the difference of fluxes across opposite boundaries to the density value at the boundary. We note that in [1] the Dirichlet boundary conditions $u\,(-\pi, t) = u\,(\pi, t) = 0$ were used instead of condition (9).

The well-posedness of direct and inverse problems for parabolic equations with involution was considered in [3]–[5].

The solvability of various inverse problems for parabolic equations was studied in papers of Anikonov Yu.E. and Belov Yu.Ya., Bubnov B.A., Prilepko A.I. and Kostin A.B., Monakhov V.N., Kozhanov A.I., Kaliev I. A., Sabitov K.B. and many others. These citations can be seen in our papers [6], [7]. In [1] there are good references to publications on related issues. We note [8]–[29] from recent papers close to the theme of our article. In these papers different variants of direct and inverse initial-boundary value problems for evolutionary equations are considered, including problems with nonlocal boundary conditions and problems for equations with fractional derivatives.

In this paper we shall use a spectral problem for an ordinary differential operators with involution. Such and similar spectral problems were considered in [30]–[42].

Definition 1. *By a regular solution of the inverse problem* (6)–(9) *we mean a pair of functions* $(u(x,t), f(x))$ *of the class* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ *that inverts Eq.* (6) *and conditions* (7)–(9) *into an identity.*

Definition 2. *By a generalized solution of the inverse problem* (6)-(9) *we mean a pair of functions* $(u(x,t), f(x))$ *of the class* $u(x,t) \in W^{2,1}_2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, $f(x) \in L_2\,(-\pi, \pi)$ *that satisfies Eq.* (6) *and conditions* (7)–(9) *almost everywhere.*

When one uses the method of separation of variables to solve the problem, a spectral problem appears, which is mentioned in the next section.

3 Spectral problem

The use of the Fourier method for solving problem (6)–(9) leads to a spectral problem for an operator $\mathcal{L}$ given by the differential expression

$$\mathcal{L}X(x) \equiv -X''(x) + \varepsilon X''(-x) = \lambda X(x), \ -\pi < x < \pi, \tag{10}$$

and the boundary conditions

$$\begin{cases} X'(-\pi) - X'(\pi) - aX(\pi) = 0, \\ X(-\pi) - X(\pi) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

where λ is a spectral parameter.

The spectral problems for Eq. (10) were first considered, apparently in [38]. There was considered a case of Dirichlet and Neumann boundary conditions, and cases of conditions in the form (11) for $a = 0$. Here we consider the case $a \neq 0$. We assume that $a > 0$.

A general solution of Eq. (10) we represent in the form:

$$X(x) = A\sin(\mu_1 x) + B\cos(\mu_2 x), \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}},$$

where A and B are arbitrary complex numbers. Satisfying the boundary conditions (11) for finding eigenvalues, we obtain equations

$$\sin(\mu_1\pi) = 0, \quad \tan(\mu_2\pi) = \frac{a}{2\mu_2}.$$

Therefore, the spectral problem (10)–(11) has two series of eigenvalues

$$\lambda_{k,1} = (1+\varepsilon)k^2, \ k \in \mathbb{N};$$

$$\lambda_{k,2} = (1-\varepsilon)(k+\delta_k)^2, \ k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$\text{where } \delta_k = O\left(\frac{a}{k+1}\right) > 0, \text{ as } k \to \infty,$$

with corresponding normalized eigenfunctions given by

$$X_{k,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \ k \in \mathbb{N}; \ X_{k,2}(x) = \nu_k \cos((k+\delta_k)x), \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Here ν_k is a normalization coefficient:

$$\nu_k^{-2} = \| \cos\left(\left(k+\delta_k\right)x\right)\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} = \pi + \frac{a^2}{\left(k+\delta_k\right)\left[a^2+\left(k+\delta_k\right)^2\pi^2\right]}.$$

Lemma 1. *The system of functions* (12) *are complete and orthonormal in* $L_2\left(-\pi,\pi\right)$.

Proof. We note that the system of eigenfunctions (12) does not depend on the parameter ε. Only the eigenvalues of problem (10)–(11) depend on ε.

In the case when $\varepsilon = 0$, system (12) is a system of eigenfunctions of the classical Strum-Liouville problem

$$-X''\left(x\right) = \lambda X\left(x\right), \;\; -\pi < x < \pi,$$

with the self-adjoint boundary conditions (11).

Consequently, system (12) forms the complete orthonormal system in $L_2\left(-\pi,\pi\right)$, that is, is the orthonormal basis of the space. □

4 Uniqueness of the solution of the problem

Let the pair of functions $(u(x,t), f(x))$ be a solution of the inverse problem (6)–(9). Let us introduce notations

$$u_{k,i}\left(t\right) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)X_{k,i}\left(x\right)dx, \;\; f_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)X_{k,i}\left(x\right)dx, \;\; i=1,2. \qquad (13)$$

We apply the operator $\frac{d}{dt}$ to $u_{k,i}\left(t\right)$. Then, using Eq. (6), by integrating by parts, we obtain the problem

$$u'_{k,i}\left(t\right) + \lambda_{k,i}u_{k,i}\left(t\right) = f_{k,i}, \quad 0 < t < T, \quad i=1,2, \qquad (14)$$

$$u_{k,i}\left(0\right) = \phi_{k,i} - \sigma_{k,i}, \quad i=1,2, \qquad (15)$$

$$u_{k,i}\left(T\right) = \psi_{k,i} - \sigma_{k,i}, \quad i=1,2. \qquad (16)$$

Here we use notations

$$\phi_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)X_{k,i}\left(x\right)dx, \;\; \psi_{k,i} = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)X_{k,i}\left(x\right)dx,$$

$$\sigma_{k,i} = \gamma \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right) d\xi \int_{-\pi}^{\pi} X_{k,i}\left(x\right) dx.$$

It is easy to see that the function $\tilde{u}_{k,1}\left(t\right) = \left(\lambda_{k,i}\right)^{-1} f_{k,i}$ is a partial solution of the inhomogeneous equation (14). Therefore, we obtain a unique solution of the Cauchy problem (14)–(15) in the form

$$u_{k,i}\left(t\right) = \left(\phi_{k,i} - \sigma_{k,i} - \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\right) e^{-\lambda_{k,i} t} + \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\ . \tag{17}$$

Since $|\varepsilon| < 1$, $a > 0$, we have $\lambda_{k,i} > 0$ for all k, i. Consequently,

$$1 - e^{-\lambda_{k,i} T} \geq 1 - e^{-\lambda_{0,2} T} > 0 \text{ for all the values of the indexes } k, i. \tag{18}$$

Therefore, using the condition of "final overdetermination" (16), we get

$$f_{k,i} = \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} e^{-\lambda_{k,i} T}}{1 - e^{-\lambda_{k,i} T}} - \lambda_{k,i} \sigma_{k,i}. \tag{19}$$

Lemma 2. *If $a > 0$, then the generalized solution $(u(x,t), f(x))$ of the inverse problem (6)–(9) is unique.*

Proof. Suppose that there are two generalized solutions of the inverse problem (6)–(9): $(u_1(x,t), f_1(x))$ and $(u_2(x,t), f_2(x))$. Denote

$$u\left(x,t\right) = u_1\left(x,t\right) - u_2\left(x,t\right), \quad f\left(x\right) = f_1\left(x\right) - f_2\left(x\right).$$

Then the functions $u(x,t)$ and $f(x)$ satisfy Eq. (6), the boundary conditions (9) and the homogeneous conditions (7) and (8):

$$u\left(x,0\right) = -\gamma \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right) d\xi, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$u(x,T) = -\gamma \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right) d\xi, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Therefore, by using the notations (13) from (19), we find

$$f_{k,i} = -\lambda_{k,i}\sigma_{k,i} \equiv -\lambda_{k,i}\gamma \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right) d\xi \int_{-\pi}^{\pi} X_{k,i}\left(x\right) dx.$$

Since

$$\lambda_{k,i}\int_{-\pi}^{\pi} X_{k,i}\left(x\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{-X''_{k,i}\left(x\right)+\varepsilon X''_{k,i}\left(-x\right)\right\}dx=$$

$$=(1-\varepsilon)\left\{X'_{k,i}\left(-\pi\right)-X'_{k,i}\left(\pi\right)\right\}=a(1-\varepsilon)X_{k,i}\left(\pi\right),$$

this gives

$$f_{k,i}=-a(1-\varepsilon)\left(\gamma\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right)d\xi\right)X_{k,i}\left(\pi\right). \tag{20}$$

Since $X_{k,1}\left(\pi\right)=0$, then for $i=1$ from Eq. (20) we have $f_{k,1}=0$.

For the generalized solution of the problem (6)–(9) it is necessary that $f\in L_2\left(-\pi,\pi\right)$. From this, by virtue of Parseval's equality for orthogonal bases, we have that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{k,2}\right|^2\leq\left\|f\right\|^2<\infty \tag{21}$$

is necessary.

Since $a(1-\varepsilon)\neq 0$,

$$X_{k,2}\left(\pi\right)=\nu_k\cos\left(\left(k+\delta_k\right)\pi\right),\ \lim_{k\to\infty}\nu_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \lim_{k\to\infty}\delta_k=0,$$

then Eq. (20) and inequality (21) are possible only at $\left(\gamma\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\xi\right)d\xi\right)=0$. Hence we obtain $f_{k,2}=0$.

Therefore, using this result, from (17) and (19) we find

$$u_{k,i}\left(t\right)\equiv\int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)X_{k,i}\left(x\right)dx=0,\ \ f_{k,i}\equiv\int_{-\pi}^{\pi} f(x)X_{k,i}\left(x\right)dx=0$$

for all values of the indexes $k\in\mathbb{N}$ for $i=1$ and $k\in\mathbb{N}_0$ for $i=2$. Further, by the completeness of system (12) in $L_2\left(-\pi,\pi\right)$ we obtain

$$u\left(x,t\right)\equiv 0,\ \ f\left(x\right)\equiv 0\ \ \forall\ \left(x,t\right)\in\overline{\Omega}.$$

The uniqueness of the generalized solution of the inverse problem (6)–(9) is proved. □

Corollary 1. *If $a > 0$, then the regular solution $(u(x,t), f(x))$ of the inverse problem* (6)–(9) *is unique.*

5 Construction of a formal solution of the problem

As the eigenfunctions system (12) forms the orthonormal basis in $L_2(-\pi,\pi)$, then the unknown functions $u(x,t)$ and $f\,(x)$ can be represented as

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}\,(t)\,X_{k,1}\,(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,2}\,(t)\,X_{k,2}\,(x), \tag{22}$$

$$f\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,1} X_{k,1}\,(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,2} X_{k,2}\,(x), \tag{23}$$

where $u_{k,1}\,(t)$ and $u_{k,2}\,(t)$ are unknown functions; $f_{k,1}$ and $f_{k,2}$ are unknown constants.

Substituting (22) and (23) into Eq. (6), we obtain the inverse problems (14)–(16). If the constants $\sigma_{k,i}$ are assumed to be given, then the solutions of these inverse problems exist, are unique and are represented by formulas (17) and (19). Substituting (17) and (19) into series (22) and (23), we obtain a formal solution of the inverse problem (6)–(9).

Let $\phi(x), \psi(x) \in W_2^2\,(-\pi,\pi)$ and satisfy the boundary conditions (11). Since $\lambda_{k,i} > 0$, then

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} e^{-\lambda_{k,i}T}}{1 - e^{-\lambda_{k,i}T}} \right|^2 \le C \left\{ \|\phi\|^2_{W_2^2(-\pi,\pi)} + \|\psi\|^2_{W_2^2(-\pi,\pi)} \right\},\ i = 1, 2.$$

Therefore, from the analysis of formula (19) it is easy to see that in order for the formal solution (22) of the problem (6)–(9) to be a generalized solution, it is necessary that

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{k,i}\sigma_{k,i} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{24}$$

holds.

As above, we calculate

$$\lambda_{k,i}\sigma_{k,i} \equiv a(1-\varepsilon)\left(\gamma \int_{-\pi}^{\pi} f\,(\xi)\,d\xi\right) X_{k,i}\,(\pi)\,,$$

where $X_{k,1}(\pi) = 0$ and

$$X_{k,2}(\pi) = \nu_k \cos((k + \delta_k)\pi), \lim_{k\to\infty} \nu_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0.$$

Thus, (24) holds if and only if $\sigma_{k,i} = 0$ for all values of the indexes k, i. This is possible only in the case

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi = 0. \tag{25}$$

Thus, condition (25) is a necessary condition for the existence of the generalized solution of the inverse problem (6)–(9). In this case, problems (6)–(9) and (1)–(4) coincide. Indeed, from (25) and Eq. (1) we have

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(\xi, t)\, d\xi - \int_{-\pi}^{\pi} \Big\{\Phi_{\xi\xi}(\xi, t) + \varepsilon \Phi_{\xi\xi}(-\xi, t)\Big\} d\xi.$$

For the first integral we apply condition (4), and calculate the second integral. Then we obtain

$$0 = (1 - \varepsilon)\left[\Phi_x(-\pi, t) - \Phi_x(\pi, t) + \frac{1}{\gamma(1-\varepsilon)}\Phi(-\pi, t)\right].$$

This means that the boundary conditions (4) and (9) coincide. Hence, the problems (6)-(9) and (1)–(4) also coincide.

Thus, in what follows we shall consider problem (1)–(3) with the boundary condition

$$\Phi_x(-\pi, t) - \Phi_x(\pi, t) - a\Phi(-\pi, t) = 0. \tag{26}$$

Thus, in what follows we will consider the inverse problem (1)–(3), (26).

Similarly, as before, the formal solution of this problem can be constructed in the form of series

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,1}(t)\, X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,2}(t)\, X_{k,2}(x), \tag{27}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,1} X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,2} X_{k,2}(x), \tag{28}$$

where
$$\Phi_{k,i}\left(t\right)=\left(\phi_{k,i}-\frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\right)e^{-\lambda_{k,i}t}+\frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\ , \tag{29}$$
$$f_{k,i}=\lambda_{k,i}\frac{\psi_{k,i}-\phi_{k,i}e^{-\lambda_{k,i}T}}{1-e^{-\lambda_{k,i}T}}. \tag{30}$$

In order to complete our study, it is necessary, as in the Fourier method, to justify the smoothness of the resulting formal solutions and the convergence of all appearing series.

6 Main results

Here we present the existence and uniqueness results for our inverse problem.

Theorem 1. *Let $a>0$.*
(A) Let $\phi(x),\psi(x)\in W_2^2\left(-\pi,\pi\right)$ and let the functions $\phi(x),\psi(x)$ satisfy the boundary conditions (11)*. Then for a real number ε such that $|\varepsilon|<1$ the inverse problem* (1)*–*(3)*,* (26) *has a unique generalized solution, which is stable in norm:*
$$\|\Phi_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Phi_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|f\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}\leq$$
$$\leq C\left\{\|\phi\|^2_{W_2^2(-\pi,\pi)}+\|\psi\|^2_{W_2^2(-\pi,\pi)}\right\}, \tag{31}$$
where the constant C does not depend on $\phi(x)$ and $\psi(x)$.
(B) Let $\phi(x),\psi(x)\in C^4\left[-\pi,\pi\right]$ and the functions $\phi(x),\psi(x)$ and $\phi''(x)$, $\psi''(x)$ satisfy the boundary conditions (11)*, then for a real number ε such that $|\varepsilon|<1$ the inverse problem* (1)*–*(3)*,* (26) *has a unique regular solution.*

Proof. Since $|\varepsilon|<1$, $a>0$, we have $\lambda_{k,i}>0$ for all k,i. Consequently, there exists a constant $\beta>0$, such that for all the values of the indexes k,i we have
$$1-e^{-\lambda_{k,i}T}\geq 1-e^{-\lambda_{0,2}T}\geq\beta>0.$$

Since $\lambda_{k,i}>0$, then $e^{-\lambda_{k,i}T}\leq e^{-\lambda_{k,i}t}<1$. Therefore, from representations (29) and (30) we get estimates
$$|f_{k,i}|\leq\frac{|\lambda_{k,i}|}{\beta}\left\{|\phi_{k,i}|+|\psi_{k,i}|\right\}, \tag{32}$$

$$|\Phi_{k,i}(t)| \leq \left(1+\frac{2}{\beta}\right)\{|\phi_{k,i}|+|\psi_{k,i}|\}, \tag{33}$$

where the constant β does not depend on the indexes k, i and on the functions $\phi(x)$ and $\psi(x)$.

As proved in Lemma 1, the eigenfunctions system (12) forms the orthonormal basis in $L_2(-\pi,\pi)$. Therefore, we have an expansion

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_{k,1}X_{k,1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{k,2}X_{k,2}(x).$$

Taking into account Eq. (10), we obtain

$$-\phi''(x)+\varepsilon\phi''(-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,1}\phi_{k,1}X_{k,1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k,2}\phi_{k,2}X_{k,2}(x).$$

From this, by Parseval's equality, it is easy to obtain an estimate

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,1}|^2|\phi_{k,1}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,2}|^2|\phi_{k,2}|^2\leq 2\left(1+\varepsilon^2\right)\|\phi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}. \tag{34}$$

Similarly, for the coefficients of the expansion

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{k,1}X_{k,1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{k,2}X_{k,2}(x)$$

we have the inequality

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,1}|^2|\psi_{k,1}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,2}|^2|\psi_{k,2}|^2\leq 2\left(1+\varepsilon^2\right)\|\psi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}. \tag{35}$$

Now, from (32), (34) and (35) we see that the series (28) converges and the estimate

$$\|f\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}\leq 2\frac{1+\varepsilon^2}{\beta^2}\left\{\|\phi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}+\|\psi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}\right\} \tag{36}$$

holds.

Taking into account Eq. (10), from (27) we obtain

$$-\Phi_{xx}(x,t)+\varepsilon\Phi_{xx}(-x,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,1}\Phi_{k,1}(t)X_{k,1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k,2}\Phi_{k,2}(t)X_{k,2}(x). \tag{37}$$

Substituting the value $(-x)$ instead of x, we find

$$-\Phi_{xx}(-x,t)+\varepsilon\Phi_{xx}(x,t)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,1}\Phi_{k,1}(t)X_{k,1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k,2}\Phi_{k,2}(t)X_{k,2}(x). \tag{38}$$

Here we use the properties $X_{k,1}(-x)=-X_{k,1}(x)$, $X_{k,2}(-x)=X_{k,2}(x)$ obtained from the explicit form (10) of the eigenfunctions.

Multiplying Eq. (38) by ε and summing with Eq. (37), we have

$$(-1+\varepsilon^2)\Phi_{xx}(x,t)=(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,1}\Phi_{k,1}(t)X_{k,1}(x)+(1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k,2}\Phi_{k,2}(t)X_{k,2}(x).$$

Since $|\varepsilon|<1$, from this, by Parseval's equality, we find

$$\|\Phi_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,1}|^2|\Phi_{k,1}(t)|^2+\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_{k,2}|^2|\Phi_{k,2}(t)|^2$$

for each $t\in[0,T]$. Integrating this equation with respect to $t\in[0,T]$, taking (33) into account, we have

$$\|\Phi_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}\le\frac{8T}{(1-\varepsilon^2)^2}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)^2\sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,i}|^2\left\{|\phi_{k,i}|^2+|\psi_{k,i}|^2\right\}\right\}.$$

Hence, using (34) and (35), we obtain

$$\|\Phi_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}\le 16T\frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\left(1+\frac{2}{\beta}\right)^2\left\{\|\phi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}+\|\psi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}\right\}. \tag{39}$$

Now we can easily obtain an estimate for $\Psi_t\,(x,t)$ from Eq. (1). This fact together with (36) and (39) gives the necessary estimate (31) for the solution.

From the obtained estimates it also follows that in the constructed by us formal solution of the inverse problem all the series converge, they can be term-by-term differentiated, and the series obtained during differentiation also converge in sense of the metrics L_2.

From (27) and (33), by using the Holder's inequality, it is easy to justify the inequality

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |\Phi\,(x,t)|^2 \;\le C\left\{\|\phi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} + \|\psi''\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}\right\},$$

which justifies the continuity of $\Phi\,(x,t)$ in the closed domain $\overline{\Omega}$.

From the representation of the solution in the form of series (22), (23) and inequalities (32), (33) it is easy to justify the estimates

$$|\Phi_{xx}\,(x,t)| + |\Phi_t\,(x,t)| + |f\,(x)| \le C\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_{k,i}|^2\,\{|\phi_{k,i}| + |\psi_{k,i}|\}. \tag{40}$$

Let $\phi(x), \psi(x) \in C^4\,[-\pi,\pi]$ and let the functions $\phi(x)$, $\psi(x)$ and $\phi''(x)$, $\psi''(x)$ satisfy the boundary conditions (11), then the number series in the right-hand side of (40) converges. Therefore, in such case the constructed by us formal solution gives the regular solution of the inverse problem (1)–(3), (26).

The uniqueness of this constructed solution follows from Lemma 2.

The Theorem is completely proved. □

Acknowledgements

The authors thank Sadybekov M.A., under whose guidance this paper was made.

References

1 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An in-verse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. – 2017. – V. 40, No. 2. – P. 151-160, DOI: 10.2989/16073606.2017.1283370.

2 Cabada A., Tojo A.F. Equations with involutions, Workshop on Differential Equations // Malla Moravka, Czech Republic, p. 240, March, 28, 2014), Available from: http://users.math.cas.cz/ sremr/wde2014/prezentace/cabada.pdf.

3 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition // Boundary Value Problems. – 2015. – No. 38. – 2015, DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5.

4 Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – V. 9. – P. 1243-1251.

5 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – P. 1-10, DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997

6 Orazov I., Sadybekov M.A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Math. – 2012. – V. 56, No. 2. – P. 60-64, DOI: 10.3103/S1066369X12020089.

7 Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Sib. Math. J. – 2012. – V. 53, No. 1. – P. 146-151, DOI: 10.1134/S0037446612010120.

8 Ivanchov M.I. Some inverse problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions // Ukrainian Mathematical Journal. – 1993. – V. 45, No. 8. – P. 1186-1192.

9 Kaliev I.A., Sabitova M.M. Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – V. 4, No. 3. – P. 332-339, DOI: 10.1134/S199047891003004X.

10 Kaliev I.A., Mugafarov M.F., Fattahova O.V. Inverse problem for forwardbackward parabolic equation with generalized conjugation conditions // Ufa Mathematical Journal. – 2011. – V. 3, No. 2. – P. 33-41.

11 Kirane M., Malik A.S. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time // Appl. Math. Comput. – 2011. – V. 218, No. 1. – P. 163-170, DOI: 10.1016/j.amc.2011.05.084.

12 Ismailov M.I., Kanca F. The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2012. – V. 20. – P. 463-476, DOI: 10.1080/17415977.2011.629093.

13 Kirane M., Malik A.S., Al-Gwaiz M.A. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Math. Methods Appl. Sci. – 2013. – V. 36, No. 9. – P. 1056-1069, DOI: 10.1002/mma.2661.

14 Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Counterexamples in inverse problems for parabolic, elliptic, and hyperbolic equations // Advances in Difference Equations. – 2013. – V. 2013, No. 173. – P. 797-810, DOI: 10.1186/1687-1847-2013-173.

15 Kanca F. Inverse coefficient problem of the parabolic equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // Abstract and Applied Analysis. – V. 2013. (Article No. 659804). – 2013. – P. 1-7 , DOI: 10.1155/2013/659804.

16 Lesnic D., Yousefi S.A., Ivanchov M. Determination of a time-dependent diffusivity form nonlocal conditions // Journal of Applied Mathematics and Computation. – 2013. – V. 41. – P. 301-320, DOI: 10.1007/s12190-012-0606-4.

17 Miller L., Yamamoto M. Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. – V. 29, No. 7. (Article No. 075013). – 2013. – P. 1-8, DOI: 10.1088/0266-5611/29/7/075013.

18 Li G., Zhang D., Jia X., Yamamoto M. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2013. – V. 29, No. 6. (Article No. 065014). – P. 1-36, DOI: 10.1088/0266-5611/29/6/065014.

19 Kostin A.B. Counterexamples in inverse problems for parabolic, elliptic, and hyperbolic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2014. – V. 54, No. 5. – P. 797-810, DOI: 10.1134/S0965542514020092.

20 Ashyralyev A., Hanalyev A. Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators // The Scientific World Journal. – V. 2014. (Article No. 519814). – 2014. – P. 1-11, DOI: 10.1155/2014/519814.

21 Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition // Boundary Value Problems. – 2015. – No. 1. – DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5.

22 Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials // AIP Conference Proceedings. – 2015. – V. 1676. – DOI: 10.1063/1.4930431.

23 Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional diffusion problem with not strengthened regular boundary conditions // AIP Conference Proceedings. – 2015. – V. 1690. – DOI: 10.1063/1.4936714.

24 Tuan N.H., Hai D.N.D., Long L.D., Thinh N.V., Kirane M. On a Riesz-Feller space fractional backward diffusion problem with a nonlinear source // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – V. 312. – P. 103-126, DOI: 10.1016/j.cam.2016.01.003.

25 Sadybekov M., Oralsyn G., Ismailov M. An inverse problem of finding the time-dependent heat transfer coefficient from an integral condition // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – V. 113, No. 4. – 2017. – P. 139-149, DOI: 10.12732/ijpam.v113i4.13.

26 Tuan N.H., Kirane M., Hoan L.V.C., Long L.D. Identification and regularization for unknown source for a time-fractional diffusion equation // Computers & Mathematics with Applications. – V. 73, No. 6. – 2017. – P. 931-950, DOI: 10.1016/j.camwa.2016.10.002.

27 Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative // Math Meth Appl Sci. – 2017. – V. 40. – P. 6468-6479, DOI: 10.1002/mma.4468.

28 Kirane M. Samet, B., Torebek B.T. Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data

// Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – V. 2017. (Article No. 257). – P. 1-13.

29 Taki-Eddine O., Abdelfatah B. On determining the coefficient in a parabolic equation with nonlocal boundary and integral condition // Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – V. 6, No. 1. – P. 94-102.

30 Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. – 2010. – V. 46, No. 4. – P. 506-511, DOI: 10.1134/S0012266110040051.

31 Kurdyumov V.P., Khromov A.P. The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a functional differential operator with variable structure // Russian Mathematics. – 2010. – V. 2. – P. 39-52, DOI: 10.3103/S1066369X10020052.

32 Sarsenbi A., Tengaeva A.A. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems // Differential Equations. – 2012. – V. 48, No. 2. – P. 306-308, DOI: 10.1134/S0012266112020152.

33 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differential Equations. – 2012. – V. 48, No. 8. – P. 1112-1118, DOI: 10.1134/S001226611208006X.

34 Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis Properties of Eigenfunctions of Second Order Differential Operators with Involution // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – V. 2012. (Article No. 576843). – P. 1-6, DOI: 10.1155/2012/576843.

35 Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M. Spectral Properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – V. 2012. (Article No. 590781). – DOI: 10.1155/2012/590781.

36 Sarsenbi A., Sadybekov M. Eigenfunctions of a fourth order operator pencil // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1611. – P. 241-245, DOI: 10.1063/1.4893840.

37 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differential Equations. – 2015. – V. 51, No. 8. – P. 984–990, DOI: 10.1134/S0012266115080029.

38 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution // Electron. J. Differ. Equ. – 2015. – V. 2015, No. 278. – P. 25-32.

39 Sadybekov M.A., Sarsenbi A., Tengayeva A. Description of spectral properties of a generalized spectral problem with involution for differentiation operator of the second order // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1759. (Article No. 020154). – DOI: 10.1063/1.4959768.

40 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Y. Spectral analysis of a differential operator with an involution // Journal of Evolution Equations. – 2017. – V. 17, No. 2. – P. 669-684, DOI: 10.1007/s00028-016-0332-8.

41 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – V. 53, No. 1. – P. 33-46, DOI: 10.1134/S0012266117010049.

42 Sadybekov M., Dildabek G., Ivanova M. On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // Advances in Mathematical Physics. – 2018. – (Article No. 8301656). – P. 1-8.

Дилдабек Г., Иванова М.Б. ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ДЕРЕКТЕРМЕН БЕРІЛГЕН ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ПРОЦЕСС КӨЗДЕРІН ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ КЕРІ ЕСЕПТЕРІНІҢ БІР КЛАСЫ ТУРАЛЫ

Осы мақалада инволюциялы және кеңістіктегі айнымалысына қатысты периодты шекаралық шартты бірөлшемді жылуөткізгіш теңдеуі үшін бір кері есеп қарастырылған. Бұл есеп – әлсіз өткізетін оқшаулаушының сыртынан оралған жіңішке тұйықталған сымдағы жылудың тарау процесін ұқсатып көрсетеді. Кері есеп теңдеудің тек кеңістіктік айнымалыға тәуелді болатын белгісіз оң жақ бөлігін (шешіммен бір мезгілде) табудан тұрады. Қайта анықтау шарттары ретінде бастапқы және соңғы жағдайы алынған. Берілген есептің шешімінің бар болуы және оның жалғыздығы айнымалыларды ажырату әдісімен алынған.

Кілттік сөздер. Кері есеп, жылуөткізгіштік теңдеуі, инволюциялы теңдеу, периодтық шекаралық шарттар, айнымалыларды ажырату әдісі.

Дилдабек Г., Иванова М.Б. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕЛОКАЛЬНЫМ ДАННЫМ

В этой статье рассматривается одна обратная задача для одномерного уравнения теплопроводности с инволюцией и с периодическими граничными условиями относительно пространственной переменной. Эта проблема имитирует процесс распространения тепла в тонкой замкнутой проволоке, обернутой вокруг слабо проницаемой изоляции. Обратная задача состоит в восстановлении (одновременно с решением) неизвестной правой части уравнения, зависящей только от пространственной переменной. Условиями переопределения являются начальное и конечное состояния. Результаты существования и единственности для данной задачи получены методом разделения переменных.

Ключевые слова. Обратная задача, уравнение теплопроводности, уравнение с инволюцией, периодические граничные условия, метод разделения переменных.

Dildabek G.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
E-mail: dildabek.g@gmail.com

Ivanova M.B.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
South-Kazakhstan State Pharmaceutical Academy,
160019, Shymkent, Al-Farabi square, 1
E-mail: marina-iv@mail.ru

Received 04.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 107–123.

МРНТИ 27.29.19

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ДВУХКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С РЕГУЛЯРНЫМИ ПО БИРКГОФУ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Л.К. Жапсарбаева, Б.Е. Кангужин, А.А. Сеитова

Аннотация. В работе для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде выделены невырожденные по В.А. Марченко и регулярные по Биркгофу краевые условия. Затем строится асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве $L_2(\Im)$. Оператор с невырожденными граничными условиями может иметь неполную в $L_2(\Im)$ систему корневых функций. В то же время оператор с регулярными по Биркгофу граничными условиями имеет полную в $L_2(\Im)$ систему корневых функций. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова. Регулярные по Биркгофу граничные условия, собственные значения, условия Кирхгофа, граф-звезда, асимптотика.

1 Введение

Пусть $m-$ фиксированное натуральное число.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -y''_{m+1}(x_{m+1}) = \rho^2 y_{m+1}(x_{m+1}),\ 0 < x_{m+1} < 1, \\ -y''_m(x_m) = \rho^2 y_m(x_m),\ 0 < x_m < 1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -y''_1(x_1) = \rho^2 y_1(x_1),\ 0 < x_1 < 1 \end{cases} \tag{1}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34L20.

Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проекты № AP05131292, № AP05131845).

с условиями вида (a)

$$\begin{gathered} y_{m+1}(1) = y_1(0) = \ldots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(1) = y'_1(0) + \ldots + y'_m(0) \end{gathered} \tag{2}$$

и условиями вида (b)

$$\begin{aligned} &U_s(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{2} \Big[a_{sj} y_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)} y_2^{(j-1)}(1) + \ldots + a_{s(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(1) + \\ &+ a_{s(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0) \Big] = 0, \ s = 1, \ldots, m+1. \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицу из коэффициентов условий вида (b) обозначим через A,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,2m+1} & a_{1,2m+2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,2m+1} & a_{2,2m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \ldots & a_{m+1,2m+1} & a_{m+1,2m+2} \end{Vmatrix},$$

где a_{sp} – некоторые, быть может, комплексные числа. Считаем, что $rank\, A = m + 1$.

Согласно результатам работ [1], [2] задача (1), (2), (3) может быть интерпретирована, как задача на собственные значения оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде $\Im = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$.

Здесь $\mathcal{V}$ представляет множество вершин, занумерованных от 0 до $m+1$, а множество $\mathcal{E}$ означает множество дуг $e_1, \ldots, e_m$ [3]. На каждой дуге e_j выполняется одно из дифференциальных уравнений системы (1). Вершина $m+1 \in \mathcal{V}$ называется внутренней вершиной графа-звезды. Условия вида (a) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [4]. Вершины $0, 1, \ldots, m$ называются граничными вершинами графа-звезды (Рис. 1). Условия вида (b) представляют набор граничных условий. При $m = 1$ задача (1), (2), (3) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \ 0 < x < 2, \tag{4}$$

$$U_j(u) = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} u^{(k-1)}(0) + \sum_{k=1}^{2} a_{j(k+2)} u^{(k-1)}(2), \ j = 1, 2. \tag{5}$$

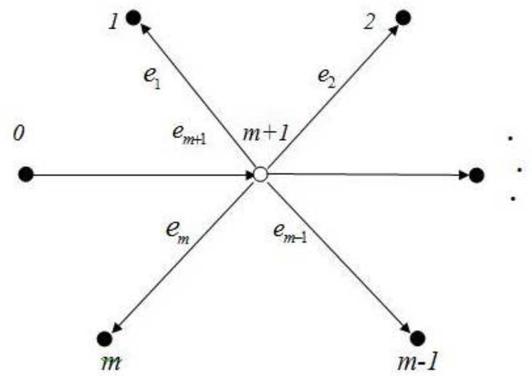

Рисунок 1 – Граф-звезда

В этом случае матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Согласно монографии В.А. Марченко [5] условия (5) называются невырожденными граничными условиями, если выполнено одно из следующих требований:

$$1) A_{34} \neq 0,\ 2) A_{34} = 0,\ A_{14} + A_{23} \neq 0,\ 3) A_{34} = 0,\ A_{14} + A_{23} = 0,\ A_{12} \neq 0.$$

Здесь A_{ij} означает минор матрицы (6), составленный из столбцов матрицы A с номерами i и j.

В первой части данной работы определены невырожденные по В.А. Марченко граничные условия для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде.

В монографии М.А. Наймарка [6] среди условий вида (5) выделены регулярные по Биркгофу краевые условия. В настоящей работе для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде выделены регулярные по Биркгофу краевые условия. Затем вычислена асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве $L_2(\Im)$.

В настоящей работе варьируются только граничные условия типа (b). В работе М.Г. Завгороднего [7] изучены нормированные краевые условия для дифференциальных уравнений на графах, когда варьируются как условия типа (a), так и условия типа (b). В то же время в монографии Ю.В. Покорного [8] ставилась задача исследования дифференциальных операторов на графах, когда варьируются только условия в граничных вершинах. Так что данная статья соответствует проблеме, поставленной в монографии [5].

2 Зависимость решений системы дифференциальных уравнений (1) с условиями (2) от спектрального параметра

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $y_{m+1}(x_{m+1}) = e^{i\rho x_{m+1}}$ при $x_{m+1} \in e_{m+1}$. Тогда решение системы (1) с условиями (2) определяется по формулам*

$$y_s(x_s) = e^{i\rho(x_s+1)} - B_s i e^{i\rho} \sin \rho x_s, \quad x_s \in e_s, \; s = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

причем постоянные $B_1, B_2, \ldots, B_m$ удовлетворяют соотношению

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_m = m - 1, \tag{8}$$

а в остальном – произвольные.

Утверждение остается справедливым, если ρ заменить на $-\rho$. При этом набор чисел $B_1, B_2, \ldots, B_m$ не меняется.

3 Невырожденные по В.А. Марченко краевые условия вида (3)

В данном пункте положим $m = 2$ и определим невырожденные по В.А. Марченко краевые условия.

Общее решение первого уравнения системы (1) имеет вид

$$y_3(x_3, \rho) = \alpha_1 \cos \rho x_3 + \alpha_2 \frac{\sin \rho x_3}{\rho}, \tag{9}$$

где α_1 и α_2 – произвольные величины, независящие от x_3.

Тогда согласно утверждению пункта 2 для функций $y_1(x_1,\rho), y_2(x_2,\rho)$, удовлетворяющих (1), (2), получим следующие представления:

$$\begin{cases} y_1(x_1,\rho) = \alpha_1\left(\cos\rho(x_1+1) + \beta_1 \sin\rho \sin\rho x_1\right) + \\ \quad +\alpha_2 \left(\frac{\sin\rho(x_1+1)}{\rho} - \beta_1 \cos\rho \frac{\sin\rho x_1}{\rho}\right), \\ y_2(x_2,\rho) = \alpha_1\left(\cos\rho(x_2+1) + \beta_2 \sin\rho \sin\rho x_2\right) + \\ \quad +\alpha_2 \left(\frac{\sin\rho(x_2+1)}{\rho} - \beta_2 \cos\rho \frac{\sin\rho x_2}{\rho}\right), \end{cases} \tag{10}$$

причем числа β_1 и β_2 удовлетворяют соотношению

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.$$

Введем вектор $\vec{T}(\rho)$, определенный по формуле

$$\vec{T}(\rho) = \begin{bmatrix} t_1(1,\rho) \\ t_2(1,\rho) \\ t_3(0,\rho) \\ t_1'(1,\rho) \\ t_2'(1,\rho) \\ t_3'(0,\rho) \end{bmatrix},$$

где

$$t_1(x_1,\rho) = \cos\rho(x_1+1) + \beta_1 \sin\rho \sin\rho x_1,$$
$$t_2(x_2,\rho) = \cos\rho(x_2+1) + \beta_2 \sin\rho \sin\rho x_2,$$
$$t_3(x_3,\rho) = \cos\rho x_3.$$

Легко преобразовать вектор $\vec{T}(\rho)$ к следующему виду:

$$\vec{T}(\rho) = \begin{bmatrix} \cos 2\rho \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 1 \\ -\rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 0 \\ \frac{1}{2}\rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Здесь учтено, что $\beta_2 = 1 - \beta_1$. Удобно ввести обозначения

$$\vec{T}_0(\rho) = \begin{bmatrix} \cos 2\rho \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 1 \\ -\rho\sin 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{T}_1(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 0 \\ \frac{1}{2}\rho\sin 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично вектору $\vec{T}(\rho)$ определим вектор $\vec{R}(\rho)$ по формуле

$$\vec{R}(\rho) = \begin{bmatrix} \tau_1(1,\rho) \\ \tau_2(1,\rho) \\ \tau_3(0,\rho) \\ \tau_1'(1,\rho) \\ \tau_2'(1,\rho) \\ \tau_3'(0,\rho) \end{bmatrix},$$

где

$$\tau_1(x_1,\rho) = \frac{\sin\rho(x_1+1)}{\rho} - \beta_1\cos\rho\frac{\sin\rho x_1}{\rho},$$
$$\tau_2(x_2,\rho) = \frac{\sin\rho(x_2+1)}{\rho} - \beta_2\cos\rho\frac{\sin\rho x_2}{\rho},$$
$$\tau_3(x_3,\rho) = \frac{\sin\rho x_3}{\rho}.$$

Векторы $\vec{R}_0(\rho)$ и $\vec{R}_1(\rho)$ определяются по аналогии с векторами $\vec{T}_0(\rho)$ и $\vec{T}_1(\rho)$:

$$\vec{R}_0(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 0 \\ \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{R}_1(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Справедливо векторное равенство

$$\vec{R}(\rho) = \vec{R}_0(\rho) - \beta_1 \vec{R}_1(\rho). \qquad (12)$$

Теперь подставим представления (9) и (10) в граничные условия (3). В результате получим следующую систему алгебраических уравнений, записанную в матрично-векторной форме:

$$\alpha_1 \left[A\vec{T}_0(\rho) + \beta_1 A\vec{T}_1(\rho) \right] + \alpha_2 \left[A\vec{R}_0(\rho) - \beta_1 A\vec{R}_1(\rho) \right] = 0. \qquad (13)$$

Здесь A – заданная прямоугольная матрица размерности 3×6. Строки матрицы A удобно обозначать через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, где $\vec{a}_i$ – i-ая строка. Из системы (13) исключим неизвестные α_1 и α_2. В результате получим систему двух уравнений

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_0(\rho) + \beta_1\vec{a}_1\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_0(\rho) - \beta_1\vec{a}_1\vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_0(\rho) + \beta_1\vec{a}_k\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_0(\rho) - \beta_1\vec{a}_k\vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, 3. \qquad (14)$$

Из системы (14) надо исключить неизвестный параметр β_1. Для этого сначала перепишем (14) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} + \qquad (15)$$

$$+\beta_1 \left(\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} \right) = 0$$

при $k = 2, 3$. Здесь учтено, что определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, 3,$$

так как $\vec{T}_1(\rho)\cos\rho = \vec{R}_1(\rho)\rho\sin\rho$.

Исключая из системы (15) величину β_1, получим равенство

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \varepsilon_2 \\ \gamma_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

где

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix}, \quad k = 2, 3,$$

$$\varepsilon_k = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1\vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k\vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k\vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix}, \quad k = 2, 3.$$

Правую часть равенства (16) обычно обозначают через $\Delta(\rho)$ и называют характеристическим определителем задачи (1), (2), (3) при $m = 2$.

Так как

$$\gamma_k = \det \left\{ \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_k \end{pmatrix} \left(\vec{T}_0(\rho) | \vec{R}_0(\rho) \right) \right\}, \quad k = 2, 3,$$

представляет определитель произведения двух матриц, то вычислим его с помощью формулы Бине-Коши. Сначала рассмотрим матрицу размерности 6×2:

$$\left[\vec{T}_0(\rho) | \vec{R}_0(\rho) \right] = \begin{bmatrix} \cos 2\rho & \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho & \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 1 & 0 \\ -\rho \sin 2\rho & \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho \sin 2\rho & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и вычислим ее миноры размерности два:

$$\begin{aligned}
&m_{12} = -\frac{\sin 2\rho}{2\rho}, \quad m_{13} = -\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \quad m_{14} = 1, \\
&m_{15} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad m_{16} = \cos 2\rho, \quad m_{23} = -\frac{\sin 2\rho}{2\rho}, \\
&m_{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad m_{25} = 0, \quad m_{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho, \\
&m_{34} = \cos 2\rho, \quad m_{35} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad m_{36} = 1, \\
&m_{45} = \frac{1}{2}\rho \sin 2\rho, \quad m_{46} = -\rho \sin 2\rho, \quad m_{56} = -\frac{1}{2}\rho \sin 2\rho.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $k=2,3$ можно записать представление для γ_k:

$$\gamma_k = h_1^{(k)}\rho\sin 2\rho + h_2^{(k)}\cos 2\rho + h_3^{(k)}\frac{\sin 2\rho}{\rho} + h_4^{(k)}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
h_1^{(k)} &= \frac{1}{2}A_{45}^{(k)} - A_{46}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{56}^{(k)},\\
h_2^{(k)} &= -\frac{1}{2}A_{15}^{(k)} + A_{16}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} + A_{34}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{35}^{(k)},\\
h_3^{(k)} &= -\frac{1}{2}A_{12}^{(k)} - A_{13}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{23}^{(k)},\\
h_4^{(k)} &= A_{14}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{15}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{35}^{(k)} + A_{36}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим ε_k при $k=2,3$. Для этого составим матрицу размерности 6×2:

$$\left[\vec{T}_1(\rho)|\vec{R}_0(\rho)\right] = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho & \frac{\sin 2\rho}{\rho}\\
-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho & \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho}\\
0 & 0\\
\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho & \cos 2\rho\\
-\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho\\
0 & 1
\end{bmatrix}$$

и вычислим все ее миноры второго порядка:

$$\begin{aligned}
&\hat{m}_{12} = \frac{3}{4}\frac{\sin 2\rho}{\rho} - \frac{3}{8}\frac{\sin 4\rho}{\rho}, \quad \hat{m}_{13}=0, \quad \hat{m}_{14} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho,\\
&\hat{m}_{15} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\rho - \frac{3}{8}\cos 4\rho, \quad \hat{m}_{16} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho,\\
&\hat{m}_{23}=0, \quad \hat{m}_{24} = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\rho + \frac{3}{8}\cos 4\rho,\\
&\hat{m}_{25} = -\frac{1}{2}\cos 2\rho + \frac{1}{2}, \quad \hat{m}_{26} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad \hat{m}_{34}=0,\\
&\hat{m}_{35}=0, \quad \hat{m}_{36}=0, \quad \hat{m}_{45} = \frac{3}{8}\rho\sin 4\rho - \frac{1}{4}\rho\sin 2\rho,\\
&\hat{m}_{46} = \frac{1}{2}\rho\sin 2\rho, \quad \hat{m}_{56} = -\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho.
\end{aligned}$$

Составим матрицу размерности 6×2:

$$\left[\vec{T}_0(\rho)|\vec{R}_1(\rho)\right] = \begin{bmatrix} \cos 2\rho & \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho & -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 1 & 0 \\ -\rho\sin 2\rho & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho \\ -\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и вычислим все ее миноры второго порядка:

$$\begin{gathered} \check{m}_{12} = -\frac{3}{8}\frac{\sin 4\rho}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \quad \check{m}_{13} = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \check{m}_{14} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad \check{m}_{15} = -\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\rho - \frac{3}{8}\cos 4\rho, \\ \check{m}_{16} = 0, \quad \check{m}_{23} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \check{m}_{24} = \frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\rho + \frac{3}{8}\cos 4\rho, \quad \check{m}_{25} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho, \\ \check{m}_{26} = 0, \quad \check{m}_{34} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad \check{m}_{35} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho, \\ \check{m}_{36} = 0, \quad \check{m}_{45} = \frac{3}{4}\rho\sin 2\rho + \frac{3}{8}\rho\sin 4\rho, \quad \check{m}_{46} = 0, \quad \check{m}_{56} = 0. \end{gathered}$$

Находим разности миноров $\hat{m}_{ln}$ и $\check{m}_{ln}$:

$$\begin{gathered} \hat{m}_{12} - \check{m}_{12} = \frac{\sin 2\rho}{\rho}, \quad \hat{m}_{13} - \check{m}_{13} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \hat{m}_{14} - \check{m}_{14} = -1, \quad \hat{m}_{15} - \check{m}_{15} = \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{16} - \check{m}_{16} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad \hat{m}_{23} - \check{m}_{23} = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \hat{m}_{24} - \check{m}_{24} = -\cos 2\rho, \quad \hat{m}_{25} - \check{m}_{25} = 1, \end{gathered}$$

$$\hat{m}_{26} - \check{m}_{26} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho,$$
$$\hat{m}_{34} - \check{m}_{34} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\rho,$$
$$\hat{m}_{35} - \check{m}_{35} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\rho, \quad \hat{m}_{36} - \check{m}_{36} = 0,$$
$$\hat{m}_{45} - \check{m}_{45} = -\rho\sin 2\rho, \quad \hat{m}_{46} - \check{m}_{46} = \frac{1}{2}\rho\sin 2\rho,$$
$$\hat{m}_{56} - \check{m}_{56} = -\frac{1}{2}\rho\sin 2\rho.$$

Следовательно, при $k = 2, 3$ можно записать окончательное представление для ε_k:

$$\varepsilon_k = g_1^{(k)}\rho\sin 2\rho + g_2^{(k)}\cos 2\rho + g_3^{(k)}\frac{\sin 2\rho}{\rho} + g_4^{(k)}, \tag{18}$$

где

$$g_1^{(k)} = -A_{45}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{46}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{56}^{(k)},$$
$$g_2^{(k)} = A_{15}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{16}^{(k)} - A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{34}^{(k)},$$
$$g_3^{(k)} = A_{12}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{13}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{23}^{(k)},$$
$$g_4^{(k)} = -A_{14}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{16}^{(k)} + A_{25}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{34}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{35}^{(k)}.$$

Теперь мы готовы вычислить $\Delta(\rho)$. Подставим в (16) соотношения (17) и (18) при $k = 2, 3$. Обозначим $s_1(\rho) = \rho\sin 2\rho$, $s_2(\rho) = \cos 2\rho$, $s_3(\rho) = \frac{\sin 2\rho}{\rho}$, $s_4(\rho) = 1$. В результате получим

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \gamma_2(\rho) & \varepsilon_2(\rho) \\ \gamma_3(\rho) & \varepsilon_3(\rho) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^4 h_k^{(2)} s_k(\rho) & \sum_{k=1}^4 g_k^{(2)} s_k(\rho) \\ \sum_{k=1}^4 h_k^{(3)} s_k(\rho) & \sum_{k=1}^4 g_k^{(3)} s_k(\rho) \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta(\rho) = f_1\rho^2\cos 4\rho + f_2\rho\sin 4\rho + f_3\cos 4\rho + \\ + f_4\rho\sin 2\rho + f_5\cos 2\rho + f_6\frac{\sin 2\rho}{\rho} + f_7, \tag{19}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_7$ выражаются через $\{h_j^{(2)}, g_k^{(2)}, h_j^{(3)}, g_k^{(3)},\ j = 1, \ldots, 4,\ k = 1, \ldots, 4\}$ в виде сумм определителей вида

$$\begin{vmatrix} h_j^{(2)} & g_k^{(2)} \\ h_j^{(3)} & g_k^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Утверждение 2. *Характеристический определитель $\Delta(\rho)$ задачи на собственные значения (1), (2), (3) при $m = 2$ имеет вид (19), где коэффициенты $f_1, f_2, \ldots, f_7$ выражаются через миноры второго порядка матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}.$$

К примеру приведем формулу для коэффициента f_1:

$$f_1 = -\frac{3}{16}\begin{vmatrix} A_{45}^{(2)} & A_{46}^{(2)} \\ A_{45}^{(3)} & A_{56}^{(3)} \end{vmatrix} + \frac{3}{16}\begin{vmatrix} A_{45}^{(2)} & A_{56}^{(2)} \\ A_{45}^{(3)} & A_{56}^{(3)} \end{vmatrix} + \frac{3}{16}\begin{vmatrix} A_{46}^{(2)} & A_{56}^{(2)} \\ A_{46}^{(3)} & A_{56}^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Следуя В.А. Марченко введем определение.

Определение 1. *Граничные условия (3) при $m = 2$ называются вырожденными, если $f_1 = \ldots = f_6 = 0$. В противном случае граничные условия (3) будем называть невырожденными.*

Пример 1. Пусть $m = 2$ и $U_1(y_1, y_2, y_3) = y_1(1)$, $U_2(y_1, y_2, y_3) = y_1'(1)$, $U_3(y_1, y_2, y_3) = y_2(1)$. В этом случае матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем все миноры второго порядка матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равны нулю, кроме $A_{15}^{(2)} \neq 0$, $A_{12}^{(3)} \neq 0$.

В этом случае $\Delta(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}$, $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$, $y_2(x_2, \rho) = \beta_2 \frac{\sin\rho(x_2+1)}{\rho}$, $y_3(x_3, \rho) = \beta_2 \frac{\sin\rho x_3}{\rho}$, где β_2 – произвольная постоянная.

Рассматриваемые в данном примере граничные условия являются невырожденными. Заметим, что спектр задачи – дискретный, $\{(n\pi)^2, n = 1, 2, \dots\}$, система собственных функций $\{y_1(x_1, n) \equiv 0$, $y_2(x_2, n) = (-1)^n \sin n\pi x_2$, $y_3(x_3, n) = \sin n\pi x_3$, $n = 1, 2, \dots\}$ не является полной системой в пространстве $L_2(\Im)$. Рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде в некотором смысле эквивалентна следующей задаче на собственные значения на отрезке $[0, 2]$:

$$-u^{''}(x) = \rho^2 u(x),\ 0 < x < 2,\ u(1) = 0,\ u(2) = 0. \tag{20}$$

Действительно, поскольку $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$, то достаточно обозначить $u(x, \rho) = y_3(x_3, \rho)$ при $0 < x < 1$, $u(x, \rho) = y_2(x_2 - 1, \rho)$ при $1 < x < 2$.

Задача (20) рассматривается на отрезке $[0, 2]$, а краевые условия заданы в точках $x = 1$ и $x = 2$. Поэтому ее спектр дискретен, однако, система собственных функций не является полной в пространстве $L_2(0, 2)$.

Пример 2. Пусть $m = 3$ и $U_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1(1)$, $U_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1'(1)$, $U_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_2(1)$, $U_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_2'(1)$. В этом случае матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном примере $\Delta(\rho) \equiv 0$, $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$, $y_2(x_2, \rho) \equiv 0$. Также можно заметить, что $y_3(0, \rho) = 0$, $y_4(1, \rho) = 0$. Следовательно, произвольное $\lambda = \rho^2$ является собственным значением рассматриваемой задачи. Собственные функции соответствующие $\lambda = \rho^2$, имеют вид $(0, 0, \beta \sin \rho(x_3 + 1), \beta \sin \rho x_4)$. Рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде эквивалентна следующей задаче на собственные значения на отрезке $[0, 2]$:

$$-u^{''}(x) = \rho^2 u(x),\ 0 < x < 2,\ u(1) = 0. \tag{21}$$

Действительно, поскольку $y_1(x_1, \rho) \equiv y_2(x_2, \rho) \equiv 0$, то достаточно положить $u(x, \rho) = y_4(x_4, \rho)$ при $0 < x < 1$, $u(x, \rho) = y_3(x_3 - 1, \rho)$ при $1 < x < 2$.

Замечание 1. *Изложение предыдущего материала проведено при $m = 2$. Предложенная схема распространяется на произвольное натуральное число m.*

Замечание 2. *Модифицируя Пример 2, можно получить задачу на собственные значения на графе-звезде с пустым спектром.*

Пример 3. Пусть $m = 5$ и $U_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_1(1)$, $U_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_1'(1)$, $U_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_2(1)$, $U_4(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_2'(1)$, $U_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_6(0)$, $U_6(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_3(1)$. Эта задача на собственные значения на графе-звезде эквивалентна задаче на собственные значения на отрезке:

$$-u''(x) = \rho^2 u(x),\ 0 < x < 2,\ u(0) = 0,\ u(2) = 0,\ u(1) = 0.$$

Понятно, что рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде невырождена, поскольку спектр дискретен.

Слегка модифицируя Пример 3, можно получить вырожденную задачу на собственные значения на графе-звезде, которая эквивалентна следующей задаче на собственные значения:

$$-u''(x) = \rho^2 u(x),\ 0 < x < 2,\ u(0) = 0,\ u(\sqrt{2}) = 0,\ u(2) = 0.$$

Спектр последней задачи – пустое множество. Следовательно, в этом случае характеристический определитель задачи на собственные значения на графе-звезде представляет постоянную функцию, то есть $\Delta(\rho) \equiv const$.

4 Регулярные по Биркгофу краевые условия вида (3)

В предыдущем пункте при $m = 2$ дано представление характеристического определителя задачи (1), (2), (3):

$$\Delta(\rho) = f_1\rho^2\cos 4\rho + f_2\rho\sin 4\rho + f_3\cos 4\rho +$$
$$+ f_4\rho\sin 2\rho + f_5\cos 2\rho + f_6\frac{\sin 2\rho}{\rho} + f_7,$$

где коэффициенты f_i зависят от миноров второго порядка матрицы A.

Следуя Биркгофу [6], дадим определение регулярных краевых условий.

Определение 2. *Граничные условия (3) при $m = 2$ называются регулярными по Биркгофу краевыми условиями, если выполняется хотя бы одно из следующих требований:*

$$1) f_1 \neq 0,$$
$$2) f_1 = 0,\ f_2 \neq 0,$$
$$3) f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 \neq 0.$$

Пример 4. Пусть $m = 2$, $U_1(y_1, y_2, y_3) = y_1(1)$, $U_2(y_1, y_2, y_3) = y_0(1)$, $U_3(y_1, y_2, y_3) = y_3(0)$. В этом случае $f_1 = ... \neq 0$, то есть рассматриваемые в этом примере граничные условия являются регулярными по Биркгофу.

В заключении приведем основной результат работы.

Теорема 1. *Задача (1), (2), (3) при $m = 2$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями имеет полную систему корневых функций в пространстве $L_2(\Im)$, более того собственные значения задачи (1), (2), (3), занумерованные в порядке неубывания их модулей, удовлетворяют предельному соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{(n\pi)^2} = \frac{1}{16}.$$

Приведенная теорема доказывается по той же схеме, по которой доказана Теорема 1.3.1 из монографии [5].

Литература

1 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 37-50.

2 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Конуркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального на графе // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 36-44.

3 Цой С., Цхай С.М. Прикладная теория графов. Алма-Ата: Наука, 1971. – 499 с.

4 Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУН и П.Т. – 2010. – 181 с.

5 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувиля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 329 с.

6 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М: Наука, 1969. – 526 с.

7 Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 446-456.

8 Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М:ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.

Жапсарбаева Л.Қ., Қангужин Б.Е., Сеитова А.А. БИРКГОФ БОЙЫНША РЕГУЛЯРЛЫ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ ГРАФ-ЖҰЛДЫЗДА БЕРІЛГЕН ЕКІ ЕСЕЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ

Жұмыста граф-жұлдызда анықталған екіеселі дифференциалдау операторы үшін В.А. Марченко бойынша азынбаған және Биркгоф бойынша регулярлы шекаралық шарттары бөліп алынады. Сонымен қатар граф-жұлдызда Биркгоф бойынша регулярлы шекаралық шарттары берілген екіеселі дифференциалдау операторының меншікті мәндерінің асимптотикасы тұрғызылады және қарастырылып отырған оператордың түбірлік функциялар жүйесінің $L_2(\Im)$ кеңістігінде толықтығы дәлелденді. Азынбаған шекаралық шарттармен берілген оператордың $L_2(\Im)$ кеңістігінде толық емес түбірлік функциялар жүйесі бар бола алады. Бірақ Биркгоф бойынша регулярлы шекаралық шарттарымен берілген оператор $L_2(\Im)$ кеңістігінде толық түбірлік функциялар жүйесіне ие болады. Жұмыста көрнекі мысалдар келтірілген.

Кілттік сөздер. Биркгоф бойынша регулярлы шекаралық шарттар, меншікті мәндер, Кирхгоф шарттары, граф-жұлдыз, асимптотика.

Zhapsarbayeva L.K., Kanguzhin B.E., Seitova A.A. ASYMPTOTICS OF EIGENVALUES OF DOUBLE DIFFERENTIATION OPERATOR WITH BIRKHOFF REGULAR BOUNDARY CONDITIONS ON GRAPH-STAR

In this paper nondegenerated by V.A. Marchenko and Birkhoff regular boundary conditions for double differentiation operator on a graph-star are highlighted. Moreover asymptotics of eigenvalues of double differentiation operator on graph-star with Birkhoff regular boundary conditions are constructed and the completeness of the system of root functions of considering operator in the space $L_2(\Im)$ is proved. An operator with nondegenerated boundary conditions may have non complete system of root functions in $L_2(\Im)$. At the same time an operator with Birkhoff regular boundary conditions has complete system of root functions in $L_2(\Im)$. Illustrative examples are presented.

Key words. Birkhoff regular boundary conditions, eigenvalues, Kirchhoff conditions, graph-star, asymptotics.

Жапсарбаева Л.К.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. ал-Фараби, 71
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: leylazhk67@gmail.com

Кангужин Б.Е.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. ал-Фараби, 71
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Сеитова А.А.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. ал-Фараби, 71
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: function05@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30.05.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 124–132.

МРНТИ 27.31.17

ON ZEROS OF A QUASI-POLYNOMIAL OF EXPONENTIAL TYPE CONNECTED WITH A REGULAR THIRD ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

N.S. Imanbaev

Annotation. In this paper we consider the spectral problem for a third-order differential operator with regular boundary conditions of periodic type. Adjoint operator and characteristic determinant of the spectral problem are constructed. The characteristic determinant will be an entire analytic function in the quasipolynomial form of exponential type. Zeros of the entire function that are adequately eigenvalues of the original operator are found.

Keywords. Spectral problem, third order differential operator, regular boundary value conditions, zeros of an entire function, quasi-polinomial.

1 Introduction

In the space $L_2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the ordinary differential equation

$$l(u) = u'''(x) + P_1(x)u''(x) + P_2(x)u'(x) + P_3(x)u(x) \tag{1}$$

and the boundary conditions

$$U_1(u) \equiv u(0) = 0,\ U_2(u) \equiv u(1) = 0,\ U_3(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0. \tag{2}$$

Let L_0 be an operator in $L_2(0,1)$, given by the expression (1) and the boundary conditions (2), where $U_1(u)$, $U_2(u)$, $U_3(u)$ are linear forms, that are regular by G.D. Birkhoff [1], [2]. The important result, established by Birkhoff, consisted in estimating the resolvent of a regular differential operator

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B09, 34B10, 34L05, 34L10.

Funding: The paper was supported by the state grant "The Best Teacher of the University-2017" of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

and in establishing the asymptotic behavior of spectrum. In the monograph of M.A. Naimark ([3], p. 67), a subclass of regular boundary conditions, so-called strongly regular boundary conditions, is distinguished, where it is noted that for an odd-order equation all regular conditions are strongly regular. Therefore, according to [3], the boundary conditions (2) are strongly regular boundary conditions.

2 Adjoint problem

We consider a case when $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = 0$, that is

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x). \tag{3}$$

Using integration by parts, we obtain the Lagrange formula:

$$\int_0^1 l(u)\overline{v(x)}dx + \int_0^1 u(x)\overline{l^*(v)}dx = u''(1)\overline{v(1)} - u''(0)\overline{v(0)} -$$

$$-\left[\overline{v'(0)} - \overline{v'(1)}\right] \cdot u'(0) + u(1)\overline{v''(1)} - u(0)\overline{v''(0)}.$$

Here $l^*(v)$ is the adjoint differential expression:

$$l^*(v) = -v'''(x), \; 0 < x < 1. \tag{4}$$

Consequently, the operator L_0^* which is adjoint to the operator L_0, is given by the differential expression (4) and boundary conditions

$$V_1(v) \equiv v(1) = 0, \; V_2(v) \equiv v(0) = 0, \; V_3(v) \equiv v'(0) - v'(1) = 0. \tag{5}$$

3 Statement of the problem and the main result

In this paper we consider a spectral problem close to the investigation [4]:

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x) = -\lambda u(x), \; 0 < x < 1 \tag{6}$$

with the boundary conditions (2).

In [4] stability questions of basis properties of root vectors of a n-th order differential operator under integral perturbation of boundary condition are investigated. And also in [5] these questions were studied for the Sturm-Liouville operator, with integral perturbation of one of boundary conditions of the antiperiodic type.

The adjoint problem has the following form:

$$L_0^* v \equiv l^* (v) = -v''' (x) = \overline{\lambda} v (x) \, , \, 0 < x < 1 \tag{7}$$

with the boundary conditions (5).

In the case when $\lambda = 0$, representing the general solution of (6) in the form $u(x) = ax^2 + bx + c$, and satisfying the boundary conditions (2), we have $u(x) \equiv 0$. That is, $\lambda = 0$ is not eigenvalues of the operator L_0. Consequently, $\lambda = 0$ is a regular point and belongs to the resolvent set of the operator L_0, that is $0 \in \rho(L_0)$. Then there exists an inverse operator $(L_0 - \lambda \mathrm{E})^{-1}$, where E is a unit operator.

In the case $\lambda \neq 0$, general solution of the equation (6) can be represented by the formula

$$u(x) = \sum_{j=1}^{3} C_j e^{k_j \sqrt[3]{\lambda} x},$$

where $\left(k_j \sqrt[3]{\lambda}\right)^3 = \lambda$.

Hence, it follows, that $k_j^3 = 1; j = \overline{1,3}$, i.e.

$$k_1 = 1, \; k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Satisfying the general solution of the equation (6) by the boundary conditions (2), we obtain a linear system with respect to the coefficients C_j:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + C_2 e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + C_3 e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} = 0, \\ C_1 k_1 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_2 k_2 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_3 k_3 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Its determinant will be the characteristic determinant of the problem (6), (2):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} \\ k_1 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_2 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_3 \sqrt[3]{\lambda} \left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) \end{vmatrix}.$$

Whence by standard computations and transformations the characteristic determinant of the problem (6), (2) reduces to the form:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\Big((k_2 - k_3)\, e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{(k_2+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + \tag{8}$$

$$+ (k_3 - k_1)\, e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1)\, e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_1 - k_2)\, e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_2 - k_3)\, e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}\Big).$$

Let us formulate the obtained result in the form of a theorem.

Theorem 1. *The characteristic determinant of the spectral problem (6), (2) can be represented in the form of the exponential quasipolynomial (8), where* $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *and is an entire analytic function of the variable* λ.

The connection between zeros of quasipolynomials with spectral problems is reflected in [6]–[10]. The papers [3] and [11]–[13] are devoted to the investigation of zeros of entire functions, having an integral representation and coinciding with quasipolynomials.

Consider a problem of zeros distribution of the entire function

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

on the complex plane λ. Thus, we consider the distribution of zeros of the quasipolynomial

$$\Delta_1(\lambda) = (k_2 - k_3)\, e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{(k_2+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_3 - k_1)\, e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1)\, e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_2 - k_3)\, e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}} = 0. \tag{9}$$

Conjugate indicator diagram of the function $\Delta_1(\lambda)$ will be a right hexagon on the complex plane λ. Sides of the hexagon consist of the following segments:

$$\left(\overline{k_1},\, \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_3},\, \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_2 + k_3},\, \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2},\, \overline{k_2+k_3}\right);\ \left(\overline{k_2},\, \overline{k_2+k_1}\right);\ \left(\overline{k_2+k_1},\, \overline{k_1}\right),$$

where the bar denotes complex conjugation, and are commensurable numbers, that is, they satisfy the conditions: there exists d such that

$$k_1-(k_2+k_3)=S_1d,\ (k_2+k_1)-(k_2+k_3)=S_2d,\ k_2-(k_2+k_3)=S_3d,$$

$$(k_3+k_1)-(k_2+k_3)=S_4d,\ k_3-(k_2+k_3)=S_5d,$$

S_j are some natural numbers.

Along the ray, perpendicular to the segment that passes through the points $\left(\overline{k_1},\, \overline{k_3+k_1}\right)$, there lie zeros of the quasipolynomial $e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}}+e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}}$, which are the majorizing exponents from (9).

Rays, which are perpendicular to the indicator diagram, are called critical. According to the result of the monograph [7], the critical rays on the plane λ are exactly six, that is, $\arg\sqrt[3]{\lambda}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n=0,1,2,4,5.$

Similarly, along the other rays, the corresponding exponential quasipolynomials in (9) will be majorized. We multiply both sides of the equation (9) by $e^{-(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$, according to the commensurability condition, $k_1-(k_2+k_3)=S_1d$, instead of $(k_2+k_1)-(k_2+k_3)$ we put $S_2d,...$, instead of $k_3-(k_2+k_3)$ we put S_5d. Then

$$(k_2-k_3)\,e^{S_1d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_1-k_2)\,e^{S_2d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_3-k_1)\,e^{S_3d\sqrt[3]{\lambda}}+$$

$$+(k_3-k_1)\,e^{S_4d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_1-k_2)\,e^{S_5d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_2-k_3)=0.$$

We denote $e^{d\sqrt[3]{\lambda}}$ by Z. Therefore:

$$i\sqrt{3}\cdot \mathrm{Z}^{S_1}+\frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_2}-\frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_3}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_4}+\frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_5}+i\sqrt{3}=0.$$

This is an algebraic equation, it has exactly as many solutions as the greatest degree of the equation. Denote this degree by $m=\max\left(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\right)$. Let $Z_1,Z_2,...,Z_m$ be a solution of the algebraic equation. Now we find $\sqrt[3]{\lambda}$ from the equation:

$$e^{d\sqrt[3]{\lambda}}=z_j, j=\overline{(1;m)},$$

$$L_n e^{d\sqrt[3]{\lambda}} = L_n z_j d\sqrt[3]{\lambda} = L_n z_j = \ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right),$$

$$\sqrt[3]{\lambda}_{jk} = \frac{\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)}{d},\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ j = \overline{(1,m)},$$

$$\lambda_{jk} = \frac{\left(\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)\right)^3}{d^3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ j = \overline{(1;m)}.$$

Thus, we have

Proposition. *1. Here infinitely many eigenvalues of the operator L_0 exist.*
2. Distance between two neighboring eigenvalues of one series (j is a constant) is exactly equal to $\frac{2\pi}{|d|}$.
3. Eigenvalues of each series lie on the rays, perpendicular to the segment that contain the numbers

$$\left(\overline{k_1},\ \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_3}, \overline{k_3 + k_1}\ \right);\ \left(\overline{k_2 + k_3},\ \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2}\,\overline{k_2 + k_3}\right);\ \left(\overline{k_2},\ \overline{k_2 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_2 + k_1},\ \overline{k_1}\right).$$

In particular, we consider in detail each case of finding zeros of the entire function (8):

$$e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}} + e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

that is

$$i\sqrt{3}\, e^{\sqrt[3]{\lambda}} + \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k} = \frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}\cdot i}{3+\sqrt{3}i}\right| + i\arg\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)}{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{2\pi k i}{-\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots.$$

They coincide with zeros $\left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} + i\sqrt{3}\, e^{-\sqrt[3]{\lambda}}$. Other terms from (8) do not contribute to these rays.

Similarly,

$$i\sqrt{3}\, e^{\sqrt[3]{\lambda}} + \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k}=\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\,i}\right|-iarg\left(\frac{2\sqrt{3}\,i}{3-\sqrt{3}\,i}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{2k\pi i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

where $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$, which adequately coincide with zeros $e^{k_3\sqrt[3]{\lambda}}+e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$.

Quasipolynomials, coinciding along the imaginary axis:

$$\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0$$

and

$$-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}+\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0,$$

have the same zeros $\sqrt[3]{\lambda_k}=\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi i$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,....$

In this case, representatives of the other series do not contribute. And $|d|=1, j=(\overline{1,6})$.

References

1 Birkhoff G.D. On the asymptotic chapacter of the solutions of certain linear differential equations containing a papameter // Transactions of the American Mathematical Society. – 1908. – V. 9, No. 2. – P. 219-231.

2 Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Transactios of the American Mathematical Society. – 1908. – V. 9, No. 4. – P. 373-395.

3 Naimark M.A. Linear Differential Operators. – M.: Science, 1969. – 496 p.

4 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. A Reqular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition // Mathematical Notes. – 2017. – V. 101, No. 5. – P. 878-887.

5 Imanbaev N.S. Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm-Liouville operators with integral boundary condition // Electron. J. Diff. Equ. – 2016. – V. 2016, No. 87. – P. 1-8.

6 Bellman R., Cook K. Differential-difference equations. – M., 1967. – 548 p.

7 Leont'ev A.F. Entire functions and series of exponentials. – M., 1983. – 176 p.

8 Hald O.H. Discontinuous Inverse Eigen Value Problems // Communications on Pure Applied Mathematics, 1984. – V. XXXVII. – P. 539-577.

9 Lidsky V.B., Sadovnichiy V.A. Regularized sums of roots of a class of entire functions // Functional Analysis. – 1967. – V. 1, No. 2. – P. 52-59.

10 Sedletskii A.M. A necessary condition for all the zeros of an entire function of exponential type to lie in a curvilinear half-plane // Sbornik: Mathematics, 1995. – V. 186, No. 9. – P. 1353-1362.

11 Shkalikov A.A. On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions // Vestnik MGU. Series Math. Mech. – 1982. – V. 6. – P. 12-21.

12 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.E. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations. – 2013. – doi: 10.1186/1687-1847-20113-110.

13 Malamud M.M., Oridoroga L.L. On completeness of root vectors of first order systems // Doklady Mathematics. – 2010. – V. 82, No. 3. – P. 809-905.

Иманбаев Н.С. ҮШІНШІ РЕТТІ РЕГУЛЯРЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРМЕН БАЙЛАНЫСҚАН ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ ТЕКТЕС КВАЗИПОЛИНОМНЫҢ НӨЛДЕРІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста периодтық тектес регулярлы шеттік шарттармен берілген үшінші ретті дифференциалдық оператор үшін спектралдық есеп қарастырылады. Спектралдық есептің түйіндес операторы мен характеристикалық анықтауышы құрылған. Характеристикалық анықтауыш экспоненциалды тектес квазиполином түріндегі бүтін функция болады. Бүтін функцияның нөлдері табылып, олардың қарастырылып отырған үшінші ретті дифференциалдық оператордың меншікті мәндері болатындығы сипатталған.

Кілттік сөздер. Спектралдық есеп, үшінші ретті дифференциалдық оператор, күшейтілген регулярлы шеттік шарттар, бүтін функциялардың нөлдері, квазиполином.

Иманбаев Н.С. О НУЛЯХ КВАЗИПОЛИНОМА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, СВЯЗАННОГО С РЕГУЛЯРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора третьего порядка с регулярными краевыми условиями периодического типа. Построен сопряженный оператор и характеристический определитель спектральной задачи. Характеристический определитель будет целой аналитической функцией в виде квазиполинома экспоненциального типа. Найдены нули целой функции, которые являются собственными значениями исходного оператора.

Ключевые слова. Спектральная задача, дифференциальный оператор третьего порядка, усиленно регулярные краевые условия, нули целых функций, квазиполином.

Imanbaev N.S.
South-Kazakhstan State Pedagogical University
160012, Shymkent, Kazakhstan, 13 Baitursynov str.
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Received 04.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 133–141.

МРНТИ 27.31.15

ON HARDY AND RELLICH TYPE INEQUALITIES FOR THE GRUSHIN OPERATOR

T.Sh. Kalmenov, B.M. Sabitbek

Annotation. In this paper we use the properties of the fundamental solution to prove versions of inequalities of Hardy and Rellich type for known two-tier operator Grushin.

Keywords. Hardy inequality, Grushin operator, Rellich inequality.

1 Introduction

In the recent paper [1] by Ruzhansky and Suragan it was proved that improved versions of Hardy's and Rellich's inequalities as well as of uncertainty principles for sums of squares of vector fields on bounded sets of smooth manifolds under certain assumptions on the vector fields, in particular, the obtained results were valid for sums of squares of vector fields on Euclidean spaces and for sub-Laplacians on stratified Lie groups. The main ingredient in their proof was to use properties of the fundamental solution of the differential operators. In this paper we follow their ideas, that is, by using properties of the fundamental solution, we prove versions of Hardy and Rellich type inequalities for the well-known two step Grushin operator. The obtained results remain unchanged for higher step Grushin operators since their fundamental solutions are known in an explicit form (see [2]).

Let us consider vector fields $\{X_1, X_2\}$ associated with the Grushin operator on R^2 by the formulae

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{and} \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35A23, 35H20.

Funding: The paper is financially supported by a grant No. AP05130981 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

so that we have the following well-known step two Grushin operator

$$\mathcal{L}_{\mathbb{G}} = -X_1^2 - X_2^2.$$

Then operator $L_{\mathbb{G}}$ has a fundamental solution

$$-L_{\mathbb{G}}\Gamma(x,y) = \delta(x-y),$$

where $\delta(x-y)$ is the Dirac distribution.

The fundamental solution of step two Grushin operator $L_{\mathbb{G}}$ was found in an explicit form by Biagi and Bonfiglioli [3] and Greiner [4]

$$\Gamma(x;y) = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(x_1^2+y_1^2)^2+4(x_2-y_2)^2}} \cdot K\left(\frac{1}{2} + \frac{x_1y_1}{\sqrt[4]{(x_1^2+y_1^2)^2+4(x_2-y_2)^2}}\right),$$

where K denotes the complete elliptic integral of the first kind, that is,

$$K(m) := \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2(t))^{-1/2} dt, \quad \text{for} -1 < m < 1.$$

This explicit formula plays a key role in our proofs (see, e.g. (4)). For simplicity, we may write the fundamental solution as $\Gamma(x,y) = \Gamma$. We will also use the notation of the gradient associated with the Grushin operator in the following form

$$\nabla_X = (X_1, X_2).$$

It is worth to mention that the two step Grushin operator is descended from a sub-Laplacian on the three dimensional Heisenberg group (see, e.g. [5] for Heisenberg group discussions). For further discussions on Grushin operators and their fundamental solutions we refer to [6], [7] and [2] as well as references therein. In addition, we refer recent papers [8] and [9] for analysis on Hardy and Rellich type inequalities.

In Section 2 Hardy type inequalities and uncertainty principles for the Grushin operator are analysed. In Section 3 Rellich type inequalities are given.

2 Hardy type inequalities and uncertainty principles

The proof of Theorem 1 relies on properties of the fundamental solution of $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$.

Theorem 1. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 2-\beta$, $\beta > 2$. Then the following version of the Hardy inequality is valid:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}} |\nabla_X u|^2 \, d\mu \geq \left(\frac{\beta+\alpha-2}{2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 \, d\mu, \tag{1}$$

for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, where $\nabla_X = (X_1, X_2)$.

Proof of Theorem 1. Let $(\widetilde{\nabla}_X f)g := X_1 f X_1 g + X_2 f X_2 g$ for any differentiable functions f and g. Setting $u = d^\gamma q$ for some (real-valued) functions $d > 0$, q, and a constant $\gamma \neq 0$ to be chosen later, we have

$$(\widetilde{\nabla}_X u)u = (\widetilde{\nabla}_X d^\gamma q) d^\gamma q = \sum_{k=1}^{2} X_k(d^\gamma q) X_k(d^\gamma q) =$$

$$= \gamma^2 d^{2\gamma-2} \sum_{k=1}^{2} (X_k d)^2 q^2 + 2\gamma d^{2\gamma-1} q \sum_{k=1}^{2} X_k d \, X_k q + d^{2\gamma} =$$

$$= \gamma^2 d^{2\gamma-2} ((\widetilde{\nabla}_X d)d) q^2 + 2\gamma d^{2\gamma-1} q (\widetilde{\nabla}_X d) q + d^{2\gamma} (\widetilde{\nabla}_X q) q \sum_{k=1}^{2} (X_k q)^2.$$

Integrating by parts, we observe that

$$2\gamma \int\limits_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma-1} q (\widetilde{\nabla}_X d) q d\mu = \frac{\gamma}{\alpha+2\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\widetilde{\nabla}_X d^{\alpha+2\gamma}) q^2 d\mu =$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha+2\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\widetilde{\nabla}_X q^2) d^{\alpha+2\gamma} d\mu = -\frac{\gamma}{\alpha+2\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^2} q^2 \mathcal{L}_{\mathbb{G}} d^{\alpha+2\gamma} d\mu,$$

where we note that later on we will choose γ so that $d^{\alpha+2\gamma} = \Gamma$. Consequently, we get

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^\alpha (\widetilde{\nabla}_X u) u d\mu = \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma-2} ((\widetilde{\nabla}_X d)d) \, q^2 d\mu + \frac{\gamma}{\alpha+2\gamma} \int_{\mathbb{R}^2} (\widetilde{\nabla}_X d^{\alpha+2\gamma}) q^2 d\mu +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma} (\widetilde{\nabla}_X q) q d\mu = \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma-2} ((\widetilde{\nabla}_X d)d) \, q^2 d\mu -$$

$$-\frac{\gamma}{\alpha+2\gamma}\int_{\mathbb{R}^2} q^2\mathcal{L}_{\mathbb{G}}d^{\alpha+2\gamma}d\mu+\int_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma}(\widetilde{\nabla}_X q)qd\mu\geq$$
$$\geq\gamma^2\int_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha+2\gamma-2}((\widetilde{\nabla}_X d)d)\,q^2d\mu-\frac{\gamma}{\alpha+2\gamma}\int_{\mathbb{R}^2} q^2\mathcal{L}_{\mathbb{G}}d^{\alpha+2\gamma}d\mu, \qquad (2)$$

since $d>0$ and $(\widetilde{\nabla}_X q)q=|\nabla_X q|^2\geq 0$. On the other hand, it can be readily checked that for a vector field X, we have

$$\frac{\gamma}{\alpha+2\gamma}X^2(d^{\alpha+2\gamma})=\gamma X(d^{\alpha+2\gamma-1}Xd)=\frac{\gamma}{2-\beta}X(d^{\alpha+2\gamma+\beta-2}X(d^{2-\beta}))=$$
$$=\frac{\gamma}{2-\beta}(\alpha+2\gamma+\beta-2)d^{\alpha+2\gamma+\beta-3}(Xd)X(d^{2-\beta})+$$
$$+\frac{\gamma}{2-\beta}d^{\alpha+2\gamma+\beta-2}X^2(d^{2-\beta})=$$
$$=\gamma(\alpha+2\gamma+\beta-2)d^{\alpha+2\gamma-2}(Xd)^2+$$
$$+\frac{\gamma}{2-\beta}d^{\alpha+2\gamma+\beta-2}X^2(d^{2-\beta}).$$

Consequently, we get the equality

$$-\frac{\gamma}{\alpha+2\gamma}\mathcal{L}_{\mathbb{G}}d^{\alpha+2\gamma}=$$
$$=-\gamma(\alpha+2\gamma+\beta-2)d^{\alpha+2\gamma-2}(\widetilde{\nabla}_X d)d-\frac{\gamma}{2-\beta}d^{\alpha+2\gamma+\beta-2}\mathcal{L}_{\mathbb{G}}d^{2-\beta}. \qquad (3)$$

Since $q^2=d^{-2\gamma}u^2$, substituting (3) into (2) we obtain

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha}(\widetilde{\nabla}_X u)ud\mu\geq(-\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta-2))\int\limits_{\mathbb{R}^2} d^{\alpha-2}((\widetilde{\nabla}_X d)d)u^2d\mu-$$
$$-\frac{\gamma}{2-\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{L}_{\mathbb{G}}d^{2-\beta})d^{\alpha+\beta-2}u^2dx.$$

Taking $d=\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}$, $\beta>2$, concerning the second term, we observe that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{L}_{\mathbb{G}}\Gamma)\Gamma^{\frac{\alpha+\beta-2}{2-\beta}}u^2dx=\left(\frac{1}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{\alpha+\beta-2}{\beta-2}}u^2(e)=0,\ \alpha>2-\beta,\ \beta>2, \qquad (4)$$

since Γ is the fundamental solution to $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$. Thus, with $d = \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}$, $\beta > 2$,, we obtain

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}} (\widetilde{\nabla}_X u) u \, d\mu \geq (-\gamma^2 - \gamma(\alpha+\beta-2)) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} (\widetilde{\nabla}_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}) \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} u^2 \, d\mu. \quad (5)$$

Now taking $\gamma = \frac{2-\beta-\alpha}{2}$, we obtain (1).

Theorem 1 implies the following uncertainty principles:

Corollary 1. *Let $\beta > 2$. Then for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ we have*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{2}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\nu \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla_X u|^2 d\nu \geq \left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\nu \right)^2, \quad (6)$$

and also

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{2}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |u|^2 d\nu \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla_X u|^2 d\nu \geq \left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 d\nu \right)^2. \quad (7)$$

Proof of Corollary 1. By taking $\alpha = 0$ in the inequality (1), we get

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{2}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\nu \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_X u|^2 d\nu$$

$$\geq \left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{2}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\nu \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2}{\Gamma^{\frac{2}{2-\beta}}} |u|^2 \, d\nu \geq$$

$$\geq \left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\nu \right)^2,$$

where we have used the Hölder inequality in the last line. This proves (6). The proof of (7) is similar.

3 Rellich type inequalities

In this section, we present a version of the Rellich inequality.

Theorem 2. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > \alpha > 4-\beta$ and $\beta > 2$. Then the following version of the Rellich inequality is valid:*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u|^2 d\mu \geq$$

$$\geq \frac{(\beta+\alpha-4)^2(\beta-\alpha)^2}{16} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 \, d\mu, \tag{8}$$

for any $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, where ∇_X is the gradient and $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ is the Grushin on $\mathbb{R}^2$ as defined in the introduction.

Proof of Theorem 2.

A direct calculation shows that

$$\mathcal{L}_{\mathbb{G}} \Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} = \sum_{k=1}^{2} X_k^2 \Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} = (\alpha-2) \sum_{k=1}^{2} X_k \left(\Gamma^{\frac{\alpha-3}{2-\beta}} X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right) =$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-3) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} \left| X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right|^2 + (\alpha-2) \Gamma^{\frac{\alpha-3}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} X_k \left(X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right) =$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-3) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} \left| X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right|^2 + \frac{\alpha-2}{2-\beta} \Gamma^{\frac{\alpha-3}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} X_k \left(\Gamma^{\frac{\beta-1}{2-\beta}} X_k \Gamma \right) =$$

$$= (\alpha-2)(\alpha-3) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} \left| X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right|^2 + \frac{(\alpha-2)(\beta-1)}{2-\beta} \Gamma^{\frac{\alpha-3}{2-\beta}} \Gamma^{-1} \sum_{k=1}^{2} (X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}})(X_k \Gamma) +$$

$$+ \frac{\alpha-2}{2-\beta} \Gamma^{\frac{\beta+\alpha-4}{2-\beta}} \mathcal{L}_{\mathbb{G}} \Gamma = (\alpha-2)(\alpha-3) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} \left| X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}} \right|^2 +$$

$$+ (\alpha-2)(\beta-1) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} \sum_{k=1}^{2} (X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}})(X_k \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}) + \frac{\alpha-2}{2-\beta} \Gamma^{\frac{\beta+\alpha-4}{2-\beta}} \mathcal{L}_{\mathbb{G}} \Gamma =$$

$$= (\beta+\alpha-4)(\alpha-2) \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 + \frac{\alpha-2}{2-\beta} \Gamma^{\frac{\beta+\alpha-4}{2-\beta}} \mathcal{L}_{\mathbb{G}} \Gamma.$$

That is,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{G}}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} = (\beta+\alpha-4)(\alpha-2)\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 + \frac{\alpha-2}{2-\beta}\Gamma^{\frac{\beta+\alpha-4}{2-\beta}}\mathcal{L}_{\mathbb{G}}\Gamma. \tag{9}$$

As before we can assume that u is real-valued. Multiplying both sides of (9) by u^2 and integrating over $\mathbb{R}^2$, since u is the fundamental solution of $\mathcal{L}_{\mathbb{G}}$ and $\beta+\alpha-4>0$, we get

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u^2\mathcal{L}_{\mathbb{G}}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}\,d\mu = (\beta+\alpha-4)(\alpha-2)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2u^2\,d\mu. \tag{10}$$

On the other hand, integrating by parts, we have

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u^2\mathcal{L}_{\mathbb{G}}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}\mathcal{L}_{\mathbb{G}}u^2\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}(2u\mathcal{L}_{\mathbb{G}}u+2|\nabla_Xu|^2)\,d\mu, \tag{11}$$

Combining (10) and (11), we obtain

$$-2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}u\mathcal{L}_{\mathbb{G}}ud\mu + (\beta+\alpha-4)(\alpha-2)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2\,u^2d\mu =$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}|\nabla_Xu|^2d\mu. \tag{12}$$

By using (1), we establish

$$-2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}u\mathcal{L}_{\mathbb{G}}ud\mu + (\beta+\alpha-4)(\alpha-2)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2\,|u|^2d\mu \geq$$

$$\geq 2\left(\frac{\beta+\alpha-4}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2|u|^2\,d\mu. \tag{13}$$

It follows that

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}}u\mathcal{L}_{\mathbb{G}}ud\mu \geq \left(\frac{\beta+\alpha-4}{2}\right)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}}|\nabla_X\Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2|u|^2\,d\mu. \tag{14}$$

On the other hand, for any $\epsilon > 0$ Hölder's and Young's inequalities give

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-2}{2-\beta}} u\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u d\mu \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 d\mu + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u|^2 d\mu. \tag{15}$$

Inequalities (15) and (14) imply that

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u|^2 d\mu \geq$$

$$\geq \left(-4\epsilon^2 + (\beta+\alpha-4)(\beta-\alpha)\epsilon\right) \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 \, d\mu.$$

Taking $\epsilon = \frac{(\beta+\alpha-4)(\beta-\alpha)}{8}$, we arrive at

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Gamma^{\frac{\alpha}{2-\beta}}}{|\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2} |\mathcal{L}_{\mathbb{G}} u|^2 d\mu \geq \frac{(\beta+\alpha-4)^2(\beta-\alpha)^2}{16} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma^{\frac{\alpha-4}{2-\beta}} |\nabla_X \Gamma^{\frac{1}{2-\beta}}|^2 |u|^2 \, d\mu.$$

References

1 Ruzhansky M., Suragan D. Local Hardy and Rellich inequalities for sums of squares of vector fields // Adv. Diff. Eq. – 2017. – V. 22. – P. 505-540.

2 Bauer W., Furutani K., Iwasaki C. Fundamental solution of a higher step Grushin type operator // Advances in Mathematics. – 2015. – V. 271. – P. 188-234.

3 Biagli S., Bonfiglioli A. The existence of a global fundamental solution for homogeneous Hormander operators via a global lifting method // arXiv:1604.02599 [math.AP].

4 Greiner P.C. A fundamental solution for a nonelliptic partial differential operator // Can. J. Math. – 1979. – V. 31. – P. 1107-1120.

5 Ruzhansky M. and Suragan D. On Kac principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // Proc. Amer. Math. Soc. – 2016. – V. 144. – P. 709-721.

6 Arcozzi N., Baldi A. From Grushin to Heisenberg via an isoperimetric problem // J. Math. Anal. Appl.– 2008. – No. 340. – P. 165-174.

7 Bauer W., Furutani K., Iwasaki C. Spectral analysis and geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operators // Trends in Partial Differential Equations and Spectral Theory in: Adv. Partial Differ. Equ. – 2010. – V. 211. – P. 183-290.

8 Ruzhansky M., Suragan D. On horizontal Hardy, Rellich, Caffarelli-Kohn-Nirenberg and p-sub-Laplacian inequalities on stratified groups // J. Differential Equations. – 2017. – V. 262. – P. 1799-1821.

9 Ruzhansky M., Suragan D. Anisotropic L^2-weighted Hardy and L^2-Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities // Commun. Contemp. Math. – 2017. – No. 6. – V. 19. – P. 12.

Кальменов Т.Ш., Сабитбек Б.М. ГРУШИН ОПЕРАТОРЛАРЫ ҮШІН ХАРДИ ЖӘНЕ РЭЛЛИХ ТЕКТЕС ТЕҢСІЗДІКТЕР

Осы жұмыста біз белгілі екі сатылы Грушин операторы үшін Харди және Рэллих тектес теңсіздіктердиң нұсқаларын іргелі шешімнің қасиеттерін пайдалана отырып дәлелдейміз.

Кілттік сөздер. Харди теңсіздігі, Грушин операторы, Реллих теңсіздігі.

Кальменов Т.Ш., Сабитбек Б.М. НЕРАВЕСТВА ТИПА ХАРДИ И РЭЛЛИХА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ГРУШИНА

В настоящей работе мы используем свойства фундаментального решения для доказательства версий неравенств типа Харди и Рэллиха для известного двухступенчатого оператора Грушина.

Ключевые слова. Неравенство Харди, оператор Грушина, неравенство Реллиха.

Kalmenov T.Sh.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: kalmenov.t@mail.ru

Sabitbek B.M.
Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: sabytbek.bolys@gmail.com

Received 04.06.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 142–153.

МРНТИ 27.29.19; 21.31.44; 27.29.25

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВИДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А.А. Сарсенби

Аннотация. В работе обсуждается некорректность смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией. Найдены достаточные условия на начальные данные, когда изучаемая задача имеет единственное решение. Используется метод Фурье.

Ключевые слова. Метод Фурье, смешанная задача, инволюция, собственные функции, базис.

1 Введение

В настоящей работе будет изучен вопрос разрешимости следующей задачи:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(-x,t), \quad -1 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

$$u\left(-1,t\right) = 0, \;\; u_x\left(-1,t\right) = u_x\left(1,t\right), \quad u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right). \tag{2}$$

Преобразование S функции $f\left(x\right)$ из класса $L_2\left(-1,1\right)$ называют инволюцией, если $\left(S^2 f\right)\left(x\right) = f\left(x\right)$. В частности, преобразование вида $\left(Sf\right)\left(x\right) = f\left(-x\right)$ является инволюцией. Уравнение (1) мы называем уравнением параболического вида с инволюцией. Данное название не имеет ничего общего с известной классификацией уравнений математической физики.

Необходимым условием существования решения задачи (1), (2) является согласованность начальных данных с уравнением (1) и краевыми

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35D35; 34K08, 34L10, 46B15.

Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № AP05131225.

условиями (2). Поэтому мы будем требовать, что $\varphi(x) \in C^2[-1,1]$ и $\varphi(-1)=0,\ \ \varphi'(-1)=\varphi'(1)$.

Будем говорить, что задача (1), (2) поставлена корректно, если 1) решение задачи существует, 2) решение задачи единственно, 3) решение задачи непрерывно зависит от начальных данных (устойчиво).

Применение метода Фурье к задаче (1), (2) приводит к несамосопряженной спектральной задаче с инволюцией

$$-X''(-x)=\lambda X(x)\,,\quad X(-1)=0,\ \ X'(-1)=X'(1)\,. \tag{3}$$

Сопряженная спектральная задача имеет вид

$$-Y''(-x)=\lambda Y(x)\,,\quad Y'(-1)=0,\ \ Y(-1)=Y(1)\,. \tag{3*}$$

Вопросам корректности смешанных задач для дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены работы [1]–[3]. В работах [4]–[5] рассмотрены обратные задачи для уравнений с инволюцией. Спектральные задачи с инволюцией исследованы в работах [6]–[15]. Смешанные задачи для уравнения вида (1) с несамосопряженными краевыми условиями, по-видимому, впервые рассматриваются в данной работе.

2 Некорректность смешанной задачи (1), (2)

Известно [6], что спектральная задача (3)– несамосопряженная, имеет две серии собственных значений $\lambda_{k1}=-k^2\pi^2$, $\lambda_{k2}=k^2\pi^2$. Им соответствуют собственные функции

$$\begin{gathered}X_0(x)=x+1,\ \ X_{k1}(x)=sink\pi x,\ \ k=1,2,...\,;\\ X_{k2}(x)=(-1)^k\frac{e^{k\pi x}-e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+cosk\pi x,\ k=1,2,..,\end{gathered} \tag{4}$$

которые образуют базис Рисса в классе $L_2(-1,1)$ [6]. Биортогонально сопряженная система состоит из собственных функций спектральной задачи (3*) и записывается в виде [6]

$$\begin{gathered}Y_{k1}(x)=(-1)^k\frac{e^{k\pi x}+e^{-k\pi x}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}+sink\pi x,\ \ k=1,2,...;\\ Y_0(x)=\frac{1}{2},\ \ Y_{k2}(x)=\cos k\pi x,\ \ k=1,2,\dots\,.\end{gathered} \tag{4*}$$

Собственные функции X_0, Y_0 соответствуют собственному значению $\lambda = 0$. Выписанные системы биортогональны в смысле скалярного произведения пространства $L_2\left(-1,1\right)$:

$$(X_0, Y_0) = 1, \ \ (X_{k1}, Y_{k1}) = 1, \ \ (X_{k2}, Y_{k2}) = 1,$$

а все остальные комбинации скалярных произведений элементов систем (4), (4*) равны нулю.

Здесь же хотим обратить внимание на то, что спектральная задача (3) имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, оператор двукратного дифференцирования в левой части дифференциального уравнения (3) (или оператор двукратного дифференцирования по x в правой части дифференциального уравнения (1)) не является полуограниченным. В этом принципиальная разница изучаемого уравнения от многих других уравнений.

Стандартным способом выписывается формальное решение смешанной задачи (1), (2) в виде ряда

$$u\left(x,t\right) = A_0\left(x+1\right) + \sum_{\lambda_{k1}\neq 0} A_k e^{-\lambda_{k1}t} sin k\pi x +$$

$$+\sum_{\lambda_{k2}} B_k e^{-\lambda_{k2}t}\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cos k\pi x\right), \tag{5}$$

где

$$A_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x)((-1)^k \frac{e^{k\pi x} + e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + sin k\pi x)dx,$$

$$B_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\cos k\pi x dx, \ \ A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx.$$

Если функция $\varphi\left(x\right)$ не является бесконечно дифференцируемой, т.е. если коэффициенты Фурье A_k функции $\varphi\left(x\right)$ не убывают с достаточной быстротой, то первое слагаемое в (5) расходится, т.к. $\lambda_{k1} < 0$. Поэтому, в случае общих начальных данных смешанная задача (1), (2) может не иметь решения. В случае существования решения оно не обладает свойством устойчивости, т.е. не зависит непрерывно от начальных данных. Например, возмущение

$$u_\delta (x,t) = \varepsilon e^{-\lambda_{k1} t} \sin k\pi x$$

не превосходит числа ε при $t=0$, но будет большим любого наперед заданного числа C_0 для $t=\delta$ при достаточно малых ε и δ и достаточно большом k. Таким образом, смешанная задача (2) для уравнения параболического вида с инволюцией (1) поставлена некорректно. Тем не менее, мы покажем, что решение изучаемой смешанной задачи существует и единственно.

3 Классы разрешимости смешанной задачи (1), (2)

Прежде всего покажем единственность решения смешанной задачи.

Теорема 1. *Если решение смешанной задачи (1), (2) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Любое решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), как функция от x, представимо в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = T_0 (x+1) + \sum_{\lambda_{k1}\neq 0} T_{k1}(t)\, sink\pi x +$$
$$+\sum_{\lambda_{k2}} T_{k2}(t) \left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cosk\pi x \right),$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k1}(t) \cos k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} T_{k2}(t) \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x$$

по базису Рисса

$$\{X_k(x)\} = \{X_0(x) = x+1,\ \ X_{k1}(x) = sink\pi x,\ \ k=1,2,...;$$
$$\left. X_{k2}(x) = (-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cosk\pi x,\ k = 1,2,.... \right\}.$$

Так как этот ряд сходится в смысле нормы пространства $L_2(-1,1)$, то он сходится и в смысле скалярного произведения. Поэтому

$$T_{k1}(t) = \left(u(x,t), (-1)^k \frac{e^{k\pi x} + e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + sink\pi x \right), T_{k2}(t) = (u(x,t), cosk\pi x).$$

Эти два равенства запишем вкратце в виде

$$T_k(t) = (u(x,t), Y_k(x)). \qquad (6)$$

Обе части уравнения (1) умножая скалярно на биортогонально сопряженную систему $Y_k(x)$, получаем равенство

$$(u_t,\, Y_k) = (u_{xx}(-x,t), Y_k).$$

Правую часть полученного равенства два раза интегрируем по частям, а в левой части используем правило дифференцирования по параметру t под знаком интеграла. Учитывая уравнение (3*), получим соотношение $\frac{\partial}{\partial t}(u, Y_k) = \lambda_{k1}(u(x,t), Y_k)$. В полученное равенство подставим (6). В результате получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$T'_k(t) = -\lambda_k T_k(t)\,,\;\; T_k(0) = (\varphi,\, Y_k)\,.$$

Начальное условие получено из (6) при $t = 0$. В силу единственности решения задачи Коши, $T_k(t)$ определяются единственным образом. Этим доказывается единственность решения задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Покажем классы допустимых начальных функций $\varphi(x)$, для которых задача (1), (2) имеет решение.

Теорема 2. *Если начальная функция $\varphi(x)$ является полиномом по системе $\{X_k(x)\}$ вида*

$$\varphi(x) = A_0(x+1) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k sink\pi x + \sum_{k=1}^{N_2} b_k \left((-1)^k \tfrac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cosk\pi x\right),$$

то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде

$$u(x,t) = A_0(x+1) + \sum_{k=1}^{N_1} A_k e^{-\lambda_{k1} t} sink\pi x +$$

$$+\sum_{k=1}^{N_2} B_k e^{-\lambda_{k2} t}\left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} - e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + cosk\pi x\right),$$

где

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) \left((-1)^k \frac{e^{k\pi x} + e^{-k\pi x}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} + sin k\pi x \right) dx, \;\; k = 1, 2, ..., N_1;$$

$$B_k = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) \cos k\pi x dx, \;\; k = 1, 2, ..., N_2; \;\; A_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx.$$

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из равенства нулю коэффициентов $A_k = 0, \quad k = N_1 + 1, \, ..., \quad B_k = 0, \quad k = N_2 + 1, \, ...,$ в силу биортогональности систем $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$. Теорема 2 доказана.

Так как множество полиномов по системе $\{X_k\}$, образующей базис Рисса, всюду плотно в $L_2(-1, 1)$, то из Теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Множество допустимых начальных функций в Теореме 2, для которых смешанная задача (1), (2) разрешима, всюду плотно в $L_2(-1, 1)$.

4 Базисность собственных функций

Рассмотрим смешанную задачу (2) для уравнения с непрерывным коэффициентом $q(x)$:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(-x,t) + q(x)\, u(x,t), \quad -1 \le x \le 1, \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Применение метода Фурье к задаче (7), (2) приводит к спектральной задаче с инволюцией:

$$-X''(-x) + q(x)\, X(x) = \lambda X(x), \;\; X(-1) = 0, \;\; X'(-1) = X'(1). \tag{8}$$

Функцией Грина краевой задачи (3) будем называть такую функцию $G(x, t, \lambda)$, что функция

$$u(x,t) = \int\limits_{-1}^{1} G(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt$$

является решением краевой задачи

$$-X''(-x) = \lambda X(x) + f(x), \quad X(-1) = 0, \ X'(-1) = X'(1)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция Грина краевой задачи (3) имеет вид

$$G(x,t,\lambda) = \frac{-4i(8\rho)^{-1}}{(e^{\rho}-e^{-\rho})(e^{i\rho}-e^{-i\rho})}\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)+$$

$$+(8\rho)^{-1}\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)-$$

$$-i(8\rho)^{-1}\frac{\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)}{\left(e^{i\rho}-e^{-i\rho}\right)}\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)+g(x,t,\lambda),$$

где

$$g(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\begin{cases}-i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t<-x;\\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right), -x<t<x;\\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right), t>x.\end{cases}$$

С помощью функции Грина мы можем написать, разложение произвольной функции из класса$L_1(-1,1)$ по собственным функциям спектральной задачи (3).

Полюсами функции Грина (5) служат нули функций $e^{\rho}-e^{-\rho}$ и $e^{i\rho}-e^{-i\rho}$:

$$e^{\rho}-e^{-\rho}=0 \Rightarrow e^{2\rho}=12\rho=2k\pi i, \quad \rho_{k1}=k\pi i, \quad k=0,1,2,...,$$

$$e^{i\rho}-e^{-i\rho}=0 \Rightarrow e^{2i\rho}=12i\rho=2k\pi i \Rightarrow \rho_{k2}=k\pi, \quad k=0,1,2,...,$$

В комплексной λ-плоскости рассмотрим окружности C_k, $k=0,1,2,...,$ с общим центром в начале координат: $C_k : |\rho| = k\pi + \frac{1}{4}$.

Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки ρ_{k1} и ρ_{k2}. При $\lambda=\rho^2$ окружности C_k соответственно переходят в окружности $\widetilde{C}_k$ в λ-плоскости. Внутри каждой окружности C_k, $k\neq 0$, содержится по два полюса функции Грина. Окружность C_0 содержит один полюс.

Для выписанной функции Грина краевой задачи (3) имеет место следующий факт, который легко вытекает из явного вида функции Грина.

Лемма. *Для функции Грина краевой задачи (3) справедлива оценка*

$$\left|G\left(x,t,\lambda\right)\right| \le \frac{C}{|\rho|}\left(e^{-\rho_0||x|-|t||}+e^{-\rho_0(2-||x|-|t||)}\right)$$

для достаточно больших $|\rho|$, *лежащих вне малых окрестностей точек* ρ_{k1} *и* ρ_{k2}, где

$$\rho=\rho_1+i\rho_2,$$

$$\rho_0=\begin{cases}|\rho_1|\,,\,if\ |\rho_1|<|\rho_2|\,,\\ |\rho_2|\,,\,if\ |\rho_2|<|\rho_1|\,,\end{cases}$$

C – *некоторая постоянная.*

Для любой функции $f\left(x\right)\in L_1\left(-1.1\right)$ частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) можно записать в виде

$$\sigma_m\left(f\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{C}_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G\left(x,t,\lambda\right)f\left(t\right)dt\right)d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m}\left(\int\limits_{-1}^{1}G\left(x,t,\lambda\right)f\left(t\right)dt\right)2\rho d\rho.$$

Далее меняем порядок интегрирования и для вычисления интеграла по окружности C_m используем теорему о вычетах. Тогда разложение по базису Рисса принимает вид

$$\sigma_m\left(f\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{C_m}G\left(x,t,\lambda\right)2\rho dp\right]f\left(t\right)dt.$$

Обозначим через $G_q\left(x,t,\lambda\right)$ функцию Грина задачи (8), а $G\left(x,t,\lambda\right)$ есть функция Грина задачи (3). Так как почти всюду на интервале (-1,1)

$$-\frac{\partial^2 G\left(-x,t,\lambda\right)}{\partial x^2}=\lambda G\left(x,t,\lambda\right),$$

$$-\frac{\partial^2 G_q\left(-x,t,\lambda\right)}{\partial x^2}+q\left(x\right)G\left(x,t,\lambda\right)=\lambda G\left(x,t,\lambda\right),$$

то

$$+\left(G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right)''_{x=-x}+\lambda\left(G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right)=-q(x)\,G(x,t,\lambda)\,.$$

Функция $G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)$ удовлетворяет несамосопряженным краевым условиям (8).

Поэтому вне полюсов функций $G(x,t,\lambda)$и $G_q(x,t,\lambda)$ имеет место представление

$$G_q(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)=-\int_{-1}^{1}G(x,s,\lambda)\,q(s)\,G_q(s,t,\lambda)\,ds. \tag{9}$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Для всех достаточно больших ρ, $\rho\neq\rho_{k1}$, $\rho\neq\rho_{k2}$, решение интегрального уравнения (9) существует.*

Обозначим через

$$S_m(f)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[\int_{C_m}G_q(x,t,\lambda)2\rho d\rho\right]f(t)dt$$

частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (8).

Последовательность $S_m(f)$ назовем равносходящей с последовательностью $\sigma_m(f)$ на промежутке $-1\leq x\leq 1$, если $S_m-\sigma_m\to 0$ равномерно на этом промежутке при $m\to\infty$.

Сформулируем Теорему о равносходимости.

Теорема 5. *Для любой функции $f(x)\in L_1(-1,1)$ последовательность $S_m(f)$ равносходится с последовательностью $\sigma_m(f)$.*

Доказательства Теорем 4 и 5 основаны на оценке функции Грина $G(x,t,\lambda)$, проводятся повторением доказательства аналогичных теорем из работы [15], так как оценки функции Грина в рассматриваемых случаях совпадают. Из Теоремы 5 следует базисность в $L_2(-1,1)$ системы собственных функций спектральной задачи (8).

Теорема 6. *Система собственных функций спектральной задачи (8) образует базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$ рассмотрим разность $\|f(x) - S_m(f)\|$ в смысле нормы пространства $L_2(-1,1)$. Так как

$$\|f(x) - S_m(f)\| \le \|f(x) - \sigma_m(f)\| + \|\sigma_m(f) - S_m(f)\|,$$

где в правой части первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу базисности Рисса системы собственных функций спектральной задачи (3), второе слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу Теоремы 5, то

$$\|f(x) - S_m(f)\| < \varepsilon.$$

В силу произвольности функции $f(x)$, последнее неравенство означает базисность собственных функций спектральной задачи (8). Теорема 6 доказана.

5 Смешанная задача для уравнения с переменным коэффициентом

Обозначим систему собственных функций спектральной задачи (8) через $\{y_k(x)\}$, а биортогонально сопряженную ей систему $\{z_k(x)\}$.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Если в уравнении (7) коэффициент* $q(x)$ *– непрерывная функция, начальная функция* $\varphi(x)$ *является полиномом вида*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k y_k(x),$$

то решение задачи (7), (2) существует, единственно и представимо в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} (\varphi, z_k)\, e^{-\lambda_k t} y_k(x).$$

Доказательство теоремы очевидно.

В силу плотности множества полиномов по системе, образующей базис в классе $L_2(-1,1)$, для смешанной задачи (7), (2) справедливо утверждение Теоремы 3.

Литература

1 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V. 284. – P. 1-8.

2 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – V. 38:10. – P. 1295-1304. – https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

3 Allaberen Ashyralyev, Sarsenbi A.M. Stability of a Hyperbolic Equation with the Involution // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Ed s.: Kalmenov T.S., Nursultanov E.D., Ruzhansky M.V., Sadybekov M.A. – Springer. – 2016. – P. 217-226.

4 Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – V. 9. – P. 1243-1251.

5 Sarsenbi A.A. On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1880. – P. 040021. – doi: 10.1063/1.5000637.

6 Сарсенби А.А. Полнота и базисность собственных функций спектральной задачи с инволюцией // Математический журнал. – 2017. – V. 17, № 2(64). – С. 175-183.

7 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral Properties of a Nonlocal Problem for Second Order Differential Equation with an Involution // Differential Equations. – 2015. – V. 51, No. 8. – P. 990-996.

8 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V. 278. – P. 1-9.

9 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – V. 53, No. 1. – P. 33-46.

10 Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution // Comput. Mathematics and Math. Physics. – 2011. – V. 51, No. 12. – P. 2102-2114.

11 Burlutskaya M. Sh. Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions // Comput. Mathematics and Math. Physics. – 2014. – V. 54, No. 1. – P. 1-10.

12 Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Y. Spectral analysis of a differential operator with an involution // Journal of Evolution Equations. – 2017. – V. 17, No. 2. – P. 669-684.

13 Sarsenbi A.M. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator // Differential Equations. – 2010. – V. 46, No. 4. – P. 509-514.

14 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunctions system of a multiple differentiation operator with an involution // Differential Equations. – 2012. – V. 48, No. 8. – P. 1112-1118.
15 Sarsenbi A.M. The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involution // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 050015. – doi: 0.1063/1.5000652.

Сәрсенбі Ә.Ә. ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ПАРАБОЛАЛЫҚ ТҮРДЕГІ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН АРАЛАС ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІК ШАРТТАРЫ

Инволюциясы бар параболалық түрдегі теңдеу үшін аралас есептердің қойылымы корректілі емес болатындығы талқыланады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз шешімі бар болуы үшін бастапқы берілімдерге қойылатын жеткілікті шарттар келтірілген. Фурье тәсілі қолданылған.

Кілттік сөздер. Фурье тәсілі, аралас есеп, инволюция, меншікті функциялар, базис.

Sarsenbi A.A. A SOLVABILITY CONDITIONS OF MIXED PROBLEMS FOR EQUATIONS OF PARABOLIC FORM WITH INVOLUTION

In the paper the ill-posedness of mixed problems for equations of parabolic form with involution is discussed. Sufficient conditions for the initial data for unique solvability of the mixed problem are found.

Keywords. Fourier method, mixed problem, involution, eigenfunctions, basis.

Сарсенби А.А.
Южно-Казахстанский Государственный Университет им. М. Ауэзова
160012, Шымкент, проспект Тауке хана, 5
E-mail: abdisalam@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.01.2018

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 154–164.

МРНТИ 27.23.23

О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО

Л.П. Фалалеев

Аннотация. Дается краткий обзор результатов автора по приближению функций средними Чезаро на класс $C_{2\pi}$. На классе дифференцируемых функций установлены асимптотически точные константы для высоких порядков приближения.

Ключевые слова. Ряды Фурье, линейные методы суммирования, тригонометрическая система, суммы Чезаро.

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{-\pi \le x \le \pi} |f(x)|$,

$$Lip_1\alpha = \{f(x) \in C_{2\pi};\ \ |f(x+h) - f(x)| \le |h|^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1\}. \tag{1}$$

Для сингулярного интеграла Фейера

$$\sigma_n^1(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_{n-1}(t)dt \tag{2}$$

с положительным ядром

$$F_{n-1}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\, n\frac{t}{2}}{\sin\, \frac{t}{2}}\right)^2$$

степень приближения относительно класса $Lip_1\alpha$ С.М. Никольским [1] определена следующим образом:

$$\Delta(\alpha;n) = \frac{2}{\pi}M(\alpha;n)$$

с алгебраическим моментом порядка α:

$$M(\alpha;n) \equiv \int_0^\pi t^\alpha F_{n-1}(t)dt. \tag{3}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10.

С.А. Теляковский [2], используя (3), указал полное асимптотическое разложение для (2). В случае $\alpha = 1$ оно имеет вид

$$\Delta(1;n) \approx \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n} + \frac{2}{\pi}(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{m}\{1+(-1)^n(1-2^{2m})\}B_{2m}\frac{1}{n^{2m+1}},\ n\to\infty, \tag{4}$$

при этом γ – постоянная Эйлера и $B_{2m} \approx (-1)^{m+1}2\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2m}}$, $m = 1,2,...$ – числа Бернулли [3], [4].

Заметим, что разложение (4) можно рассматривать как подлинное асимптотическое разложение сверх члена порядка $O(n^{-1})$ в зависимости от четности или нечетности параметра n. В [5], [6] Э.Л. Штарком было дано важное асимптотическое разложение для этой степени приближения. При этом константа, содержащаяся в остаточном члене R_n, принимает различные значения в зависимости от четности n:

$$\Delta(1;n) = \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n} + \frac{2}{\pi}(1+\gamma+\log 2)\frac{1}{n} + R_n,\ R_n = O(n^{-3}),\ n\to\infty.$$

Пусть $W(r)$, $r = 1,2,...$, – класс периодических функций f, у которых производная порядка $r-1$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка:

$$|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}y| \le |x-y|.$$

Класс функций, сопряженных с функциями из $W(r)$, обозначим через $\widetilde{W}(r)$. В работе [7] найдены асимптотические разложения при $n\to\infty$ величин $\sup\limits_{f\in W(r);\, f\in\widetilde{W}(r)}\|f(x)-\sigma_n'(f,x)\|_C$ при $n\to\infty$, $r\ge 2$, в зависимости от четности n, нечетности r и остатка при делении его на 4.

Автором [8], [9] исследуются апроксимативные свойства средних Чезаро (c,β – средних), как обобщения метода $(c,1)$-Фейера. Свойства чисел Чезаро $A_n^\beta = (\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n)\frac{1}{n!}$ можно найти в [10]. Уточняются результаты П.Л. Ульянова, находятся асимптотические постоянные более высокого порядка, чем в работах Р. Таберского ($\beta = 3,4,...$) [11].

Теорема 1 [8], [9].

$$E_1(\sigma_n^\beta) = \sup_{f\in Lip\,1}|f(x)-\sigma_n^\beta(f,x)| =$$

$$= \frac{2\beta}{\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{2\beta}{\pi n}(1+\gamma+\ln 2) - \frac{4}{\pi}\varphi(n,\beta) + o\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{5}$$

где

$$\frac{\beta-1}{3}\frac{1}{n} < \varphi(n,\beta) \le \frac{\beta}{2(\beta-1)}\frac{1}{n}, \ \ 1<\beta<2, \tag{6}$$

$$\frac{\beta-1}{3}\frac{1}{n} < \varphi(n,\beta) \le \frac{\beta(\beta-1)}{2}\frac{1}{n}, \ \ \beta \ge 2, \tag{7}$$

и для $\beta = 2, 3, ...$

$$\varphi(n,\beta) = \frac{\beta}{2n}\sum_{\mu=1}^{\beta-1}\frac{1}{\mu}. \tag{8}$$

Теорема 2. *С высокой точностью определяет поведение* $E_\alpha(\sigma_n^\beta)$, $0<\alpha<1$, *для произвольных (не обязательно целых)* $\beta>1$:

$$E_\alpha(\sigma_n^\beta) = \frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\frac{1}{n^\alpha} + \frac{\beta}{n}A_\alpha + O\Big(\frac{1}{n^\gamma}\Big),$$

$$\gamma = \min(\beta, 1+\alpha), \ \ A_\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\Big(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\Big)dt - \frac{2}{\pi^{2-\alpha}(1-\alpha)}.$$

В работах [12]–[14] рассматриваются вопросы оценок констант Лебега линейных средних сопряженных рядов Фурье.

Поскольку (c,β)-средние $(\beta>1)$ являются обобщением $(c,1)$-средних, то было бы естественным ожидать, что различие в асимптотических константах на классе *Lip* для чезаровских методов наступит "чуть раньше". Оказывается, это не так.

Теорема 3. *Для* $\beta = 1, 2...$ *при* $n\to\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$E_1(\sigma_n^\beta) = \frac{2}{\pi}\Big\{\frac{\beta\ln n}{n} + \frac{\beta}{n}\Big(1 + C + \ln 2 - \sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k}\Big) - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\cdot\frac{\ln n}{n^2} +$$

$$+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{2}\Big(\sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k} - \ln 2 - C\Big) + \frac{\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6}\cdot\frac{\ln n}{n^3} +$$

$$+\frac{1}{n^3}\varphi(\beta)\Big\} + \bar{\bar{o}}\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \tag{9}$$

где для $\beta = 2, 3, 4...$

$$\varphi(\beta) = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{36} + \frac{\beta(\beta-2)}{12}\Big\{(4\beta+2)\Big(\ln 2 + C - \sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k}\Big) - \frac{3\beta+2}{2}\Big\},$$

$$\varphi(1) = \begin{cases} \ln 2 + C - \frac{2}{3} & \textit{для нечётных} \;\; n, \\ \ln 2 + C - \frac{1}{6} & \textit{для чётных} \;\; n. \end{cases}$$

C *– постоянная Эйлера.*

Для доказательства теоремы нам необходимо привести одно вспомогательное асимптотическое равенство.

Введём следующие обозначения:

$$S_k = \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+2)^k} + ... + \frac{1}{(n+\beta)^k}, \quad k = 1, 2, ..., \beta,$$

$$\widetilde{C}_n^1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+\beta},$$

$$\widetilde{C}_n^2 = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+\beta} + ... + \frac{1}{n+\beta-1}\cdot\frac{1}{n+\beta},$$

....

$$\widetilde{C}_n^\beta = \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+\beta)}.$$

Из рекуррентного соотношения, связывающего степенные суммы с элементарными симметрическими многочленами

$$S_k - S_{k-1}\widetilde{C}_n^1 + S_{k-2}\widetilde{C}_n^2 + ... + (-1)^k \cdot k \cdot \widetilde{C}_n^k = 0,$$

методом математической индукции можно установить следующее асимптотическое равенство.

$$\widetilde{C}_n^k = \frac{C_\beta^k}{n^k}\left\{1 - \frac{k(\beta+1)}{2n} + (\beta+1)\frac{k\Big(\frac{3k+5}{2}\beta + k + 1\Big)}{12n^2}\right\} + O\Big(\frac{1}{n^{k+3}}\Big), \tag{10}$$

где, как обычно,
$$C_\beta^k=\frac{\beta(\beta-1)...(\beta-k+1)}{k!}.$$
Так как
$$S_i=\frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\tau_k A_k^{i-1}}{n^k},\quad i=1,2,...,\beta,$$
где $\tau_k=1^k+2^k+...+\beta^k$, а числа A_k^i – числа Чезаро, то из
$$\tau_0=\beta,\ \tau_1=\frac{\beta(\beta+1)}{2},\ \tau_2=\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{6},$$
в частности, следует
$$\widetilde{C}_n^1=S_1=\frac{C_\beta^1}{n}\left\{1-\frac{1\cdot(\beta+1)}{2n}+(\beta+1)\frac{1\cdot\left(\frac{3\cdot1+5}{2}\beta+2\right)}{12n^2}\right\}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$
Доказательство равенства (10) в общем виде довольно громоздко и поэтому не приводится.

Перейдём к доказательству Теоремы 3. Как видно из [7], ядро метода суммирования является положительным для $\beta\ge1$, поэтому
$$E_1(\sigma_n^\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\Big(\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^n\frac{A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta}cos\nu t\Big)dt.$$
Интегрируя по частям, получим
$$E_1(\sigma_n^\beta)=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{A_n^\beta}\Big(A_{n-1}^\beta\frac{1}{1^2}+A_{n-3}^\beta\frac{1}{3^2}+...+A_0^\beta\Big(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\Big)\Big)\right\}.\quad(11)$$
Доказательство теоремы будем вести отдельно для чётных и нечётных n. Пусть $n=2m-1,\ m=1,2,...$. Из определения A_n^β следует справедливость разложения
$$\frac{A_{2m-1-\nu}^\beta}{A_{2m-1}^\beta}=1-\nu\widetilde{C}_{2m-1}^1+\nu^2C_{2m-1}^2-...+(-1)^\beta\nu^\beta\widetilde{C}_{2m-1}^\beta,\ \nu=0,...,2m-1,$$

поэтому равенство (11) примет вид

$$E_1(\sigma_n^\beta)=\frac{4}{\pi}\Bigg\{\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2}+\widetilde{C}^1_{2m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\cdot m+$$

$$+\widetilde{C}^3_{2m-1}(1+3+...+(2m-1))-\widetilde{C}^4_{2m-1}(1^2+3^2+...+(2m-1)^2+...+$$

$$+\widetilde{C}^\beta_{2m-1}(-1)^{\beta-1}(1^{\beta-2}+3^{\beta-2})+...+(2m-1)^{\beta-2})\Bigg\}. \tag{12}$$

Из (4)

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4m}-\sum_{k=1}^{\infty}B_{2k}(2^{2k-1}-1)\frac{1}{(2m)^{2k+1}} \tag{13}$$

(см. [4]), путём элементарных преобразований получаем

$$\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2m-1)^2}+$$

$$+\frac{1}{(2m-1)^3}\Big(\frac{1}{2}-B_2\Big)+O(\frac{1}{m^4}), \tag{14}$$

$$\widetilde{C}^1_{2m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}\Bigg\{\frac{\beta\ln(2m-1)}{2m-1}+\frac{\beta}{2m-1}(\ln 2+C)-$$

$$-\frac{\beta(\beta+1)}{2}\cdot\frac{\ln(2m-1)}{(2m-1)^2}+\frac{1}{(2m-1)^2}\Big(\beta-\frac{\beta(\beta+1)}{2}(\ln 2+C)\Big)+$$

$$+\frac{\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6}\cdot\frac{\ln(2m-1)}{(2m-1)^3}+\frac{1}{(2m-1)^3}\Big(\frac{(\ln 2+C)\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6}-$$

$$-\frac{\beta(\beta+1)}{2}+\beta(B_2-\frac{1}{2})\Big)\Bigg\}+\bar{\bar{o}}\Big(\frac{1}{m^3}\Big). \tag{15}$$

Кроме того ([11], стр. 16), для целых $q>0$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^q=\frac{2^q}{q+1}n^{q+1}-\frac{1}{2}\binom{q}{1}2^{q-1}\cdot B_2\cdot n^{q-1}-..., \tag{16}$$

при использовании которого последним слагаемым в правой части необходимо брать n^2 или n^1.

Из (10) и (16) установим $k = 4, 5, ..., \beta$,

$$\widetilde{C}^2_{2m-1}\cdot m = \frac{C^2_\beta}{2}\Bigg\{\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{(2m-1)^2}\Big(1 - \frac{2(\beta+1)}{2\cdot 1}\Big) +$$

$$+\frac{1}{(2m-3)^2}\Big((\beta+1)\frac{2\big(\frac{3\cdot 2+5}{2}\big)\beta+3}{12\cdot 1} - \frac{2(\beta+1)}{2}\Big)\Bigg\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big), \qquad (17)$$

$$\widetilde{C}^3_{2m-1}(1+3+...+(2m-1)) = \frac{C^3_\beta}{2}\Bigg\{\frac{1}{2}\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{(2m-1)^2}\Big(1 - \frac{3(\beta+1)}{2\cdot 2}\Big) +$$

$$+\frac{1}{(2m-1)^3}\Big((\beta+1)\frac{3\Big(\frac{3\cdot 3+5}{2}\beta+4\Big)}{12\cdot 2} - \frac{3}{2}(\beta+1) + \frac{1}{2}\Big)\Bigg\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big), \qquad (18)$$

$$\widetilde{C}^k_{2m-1}(1^{k-2} + 3^{k-2} + ... + (2m-1)^{k-2}) =$$

$$= \frac{C^k_\beta}{2}\Bigg\{\frac{1}{k}\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{(2m-1)^2}\Big(1 - \frac{k(\beta+1)}{2(k-1)}\Big) +$$

$$+\frac{1}{(2m-1)^3}\Big(\beta+1)\frac{k(\frac{3k+5}{2}\beta+k+1)}{12(k-1)} - \frac{k(\beta+1)}{2} +$$

$$+\Big(\frac{k-2}{2} - (k-2)B_2\Big)\Big)\Bigg\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big). \qquad (19)$$

Учитывая соотношения (14), (15), (17)–(19), найдём значение константы при $\frac{1}{2m-1}$ в равенстве (12):

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2m-1}\Big\{1 + \beta(\ln 2 + C) - C^2_\beta + \frac{C^3_\beta}{2} - \frac{C^4_\beta}{3} + ... + (-1)^{\beta-1}\frac{C^\beta_\beta}{\beta-1}\Big\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\beta}{2m-1}\Big\{1 + C + \ln 2 - \sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k}\Big\}.$$

При этом, как и при доказательстве Теоремы 3, мы воспользовались формулой ([11], стр. 17)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

и очевидным соотношением $C^j_{\beta-1}+C^{j+1}_{\beta-1}=C^{j+1}_{\beta}$.

Учитывая ещё, что $kC^k_\beta=\beta C^{k-1}_{\beta-1}$, получим

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2m-1)^2}\Big\{-\frac{\beta(\beta+1)}{2}(\ln 2+C)-1+\beta+\sum_{k=2}^{\beta}(-1)^{k-1}C^k_\beta\Big(1-\frac{k(\beta+1)}{2(k-1)}\Big)\Big\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2m-1)^2}\frac{\beta(\beta+1)}{2}\Big\{\sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k}-(\ln 2+C)\Big\}.$$

Процесс нахождения константы при $\frac{1}{(2m-1)^3}$ разобьём на несколько частей. Прежде всего

$$\frac{\beta+1}{2}\sum_{k=1}^{\beta}(-1)^kC^k_\beta=\begin{cases}0, & \beta=2,3,...,\\ -1, & \beta=1.\end{cases}\tag{20}$$

Далее, так как $B_2=\frac{1}{6}$, то

$$1-2B_2+\beta\big(B_2-\frac{1}{2}\big)+C^3_\beta\frac{1}{2}+\sum_{k=4}^{\beta}(-1)^{k-1}C^k_\beta\Big(\frac{k-2}{2}+(k-2)B_2\Big)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \beta=1,\\ \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}, & \beta=2,3,\ldots\,.\end{cases}\tag{21}$$

Наконец, для $\beta=2,3,...$

$$\sum_{k=2}^{\beta}(-1)^{k-1}C^k_\beta\frac{k\Big(\frac{3k+5}{2}\beta+k+1\Big)}{k-1}=\frac{3\beta+2}{2}\sum_{k=2}^{\beta}(-1)^{k-1}C^k_\beta\cdot k+$$

$$+(4\beta+2)\sum_{k=2}^{\beta}(-1)^{k-1}C^k_\beta\frac{k}{k-1}=-\frac{\beta(3\beta+2)}{2}-\beta(4\beta+2)\sum_{k=1}^{\beta-1}\frac{1}{k}.\tag{22}$$

Из (20)–(22) видно, что константы при $\frac{1}{(2m-1)^3}$ имеют вид, указанный в формуле (11).

Пусть теперь $n = 2m,\ m = 1, 2, \dots$. В этом случае равенство (11) примет вид

$$E_1(\sigma^\beta_{2m}) = \frac{4}{\pi}\Big\{\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{A^\beta_{2m}}\Big(A^\beta_{2m-1}\frac{1}{1^2} + A^\beta_{2m-3}\frac{1}{3^2} + \dots + A^\beta_1\frac{1}{(2m-1)^2}\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\Big\{\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2} + \widetilde{C}^1_{2m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1} - \widetilde{C}^2_{2m} +$$

$$+\widetilde{C}^3_{2m}(1+3+\dots+(2m-1)-\dots+(-1)^{\beta-1})\widetilde{C}^\beta_{2m}(1^{\beta-2}+\dots+(2m-1)^{\beta-2}). \quad (23)$$

Из [11] (стр. 17) и (13) следует

$$\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m} - B_2\frac{1}{(2m)^3} + O\Big(\frac{1}{m^5}\Big), \quad (24)$$

$$\widetilde{C}^1_{2m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\beta\ln 2m}{2m} + \frac{\beta\ln 2 + C}{2m} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\cdot\frac{\ln 2m}{(2m)^2} -$$

$$-\frac{\beta(\beta+1)}{2}(\ln 2 + C)\frac{1}{(2m)^2} + \frac{\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6}\cdot\frac{\ln 2m}{(2m)^3} +$$

$$+\frac{1}{(2m)^3}\Big(\frac{(\ln 2 + C)\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6} + \beta B_2\Big)\Big\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big), \quad (25)$$

$$\widetilde{C}^2_{2m}\cdot m = \frac{C^2_\beta}{2}\Big\{\frac{1}{2m} - \frac{2(\beta+1)}{2(2m)^2} + (\beta+1)\frac{2\big(\frac{3\cdot 2+5}{2}\beta + 3\big)}{12(2m)^3}\Big\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big). \quad (26)$$

Из (16) следует

$$\widetilde{C}^k_{2m}(1 + \dots + (2m-1)) =$$

$$= \frac{C^3_\beta}{2}\Big\{\frac{1}{2}\frac{1}{2m} - \frac{3(\beta+1)}{2\cdot 2(2m)^2} + \frac{2\big(\frac{3\cdot 3+5}{2}\beta + 4\big)}{12\cdot 2(2m)^3}\Big\} + O\Big(\frac{1}{m^4}\Big), \quad (27)$$

$$\widetilde{C}^k_{2m}\Big(1^{k-2} + 3^{k-2} + \dots + (2m-1)^{k-2}\Big) = \frac{C^k_\beta}{2}\Big\{\frac{1}{k-1}\frac{1}{2m} - \frac{k(\beta+1)}{2(k-1)(2m)^2} +$$

$$+\frac{1}{(2m)^3}\Big((\beta+1)\frac{k\big(\frac{3\cdot k+5}{2}\beta+k+1\big)}{12(k-1)}-(k-2)B_2\Big)\Big\}+O\Big(\frac{1}{m^4}\Big), \qquad (28)$$

$k=4,5,...,\beta.$

Из разложений (14), (15), (17)–(19), (24)–(28) и равенства (23) заключаем, что константы при $\frac{1}{(2m)^i}$ и $\frac{1}{(2m-1)^i}$, $i=1,2$, совпадают для всех $\beta=1,2,...$. По аналогии с предыдущими рассуждениями найдём суммы

$$B_2\Big(\beta-2+\sum_{k=4}^{\beta}(-1)^kC_\beta^k(k-2)\Big)=\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{6}, \quad \beta=1, \\ \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{36}, \quad \beta=2,3,... . \end{array}\right.$$

Применяя для подсчёта оставшейся суммы равенство (22), заключаем, что в случае $\beta=1$ множитель при $\frac{1}{(2m)^3}$ равен $\ln 2+C-\frac{1}{6}$, а для $\beta=2,3,...$ множитель имеет вид, указанный в формуле (9). Теорема доказана полностью. Как видно из формулировки теоремы, для $\beta=2,3,...$ константа при $\frac{1}{n^3}$ принимает одни и те же значения независимо от того является ли n чётным или нечётным.

Литература

1 Никольский С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Известия АН СССР. Серия математика. – 1940. – Т. 4, № 4,5. – С. 17-25.

2 Теляковский С.А. Приближение суммами Фейера функций, удовлетворяющих условию Липшица // УМЖ. – 1969. – Т. 21, № 3. – С. 334-343.

3 Ryshik M.R., Gradstein S.G. Summer, Product and Integraltafeln. – Berlin, 1963. – 438 p.

4 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 108 с.

5 Stark E.L. Uber die Approximation special singular integral // Computing. – 1969. – P. 153-159.

6 Штарк Э.Л. О полном разложении степени приближения для фейеровских средних // УМЖ. – 1972. – Т. 24, № 4. – С. 562-565.

7 Баскаков В.А., Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, № 2. – С. 129-140.

8 Фалалеев Л.П. Приближение функций (c,α)-средними ряда Фурье // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. – 1972. – № 1. – С. 74-81.

9 Фалалеев Л.П. О точности представления сопряженных функций суммами Чезаро // Сиб. матем. журнал. – 1984. – Т. XXV, № 4. – С. 199-206.

10 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – 616 с.
11 Taberski R. Asymptotic formulae for Cesaro singular integrals // Bull. Acad. Polon. sci. Ser. scimath, astron. et phys. – 1962. – V. 10. – P. 637-640.
12 Фалалеев Л.П. Приближение сопряженных функций суммами Чезаро // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28, № 3. – С. 451-458.
13 Фалалеев Л.П. О приближении функций из класса Зигмунда сопряженными суммами Чезаро // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1987. – Т. 180. – С. 222-224.
14 Фалалеев Л.П. Неравенства для констант Ландау // Сиб. матем. журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 194-195.

Фалалеев Л.П. ЧЕЗАРО ӘДІСТЕРІНІҢ НАҚТЫ КОНСТАНТАЛАРЫ ТУРАЛЫ

$C_{2\pi}$ класына Чезаро орташалары арқылы функцияны жақындату бойынша автордың нәтижелерінің қысқаша шолуы келтірілді. Дифференциалданылатын функциялар класында жуықтаудың жоғары дәрежелері үшін асимптотикалық дәл константалар анықталды.

Кілттік сөздер. Фурье катарлары, қосындылаудың сызықты әдістері, тригонометриялык жүйе,Чезаро қосындылары

Falaleev L.P. ON EXACT CONSTANTS FOR CESARO METHODS

A brief review of the author's results on approximation of functions by means of Cesaro averages to the class $C_{2\pi}$ is given. On the class of differentiable functions asymptotically exact constants for high orders of approximation are established.

Keywords. Fourier series, linear methods of summation, trigonometric system, Cesaro sums.

Фалалеев Л.П.
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125
E-mail: v_gulmira@mail.ru

Статья поступила в редакцию 05.09.2017

Математический журнал ISSN 1682–0525

2018. — Том 18, № 2. — С. 165–177.

МРНТИ 27.25.17

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.Ж. Ыдырыс

Аннотация. Исследуются мультипликаторы рядов Фурье в пространствах Лоренца. Получены достаточные условия для последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, чтобы быть мультипликатором тригонометрического ряда Фурье из пространства $L_{p,r}[0;1]$ в $L_{q,r}[0;1]$. В этой статье представлена новая теорема о мультипликаторах, которая дополняет известные теоремы.

Ключевые слова. Мультипликатор, ряд Фурье, теорема Лизоркина, пространство Лоренца.

1 Введение

Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ − последовательность комплексных чисел.

Определение 1. *Будем говорить, что* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье из пространства* $L_p[0;1]$ *в пространство* $L_q[0;1]$, *если для любой функции* $f \in L_p[0;1]$ *с рядом Фурье* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ *найдется функция* $f_\lambda \in L_q[0;1]$ *с соответствующим рядом Фурье* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k\hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ *и если оператор* T_λ, $T_\lambda f = f_\lambda$, *является ограниченным оператором из* $L_p[0;1]$ *в* $L_q[0;1]$.

Будем искать условия на последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, при которых оператор T_λ будет ограниченным из $L_p[0;1]$ в $L_q[0;1]$, т.е. λ будет мультипликатором.

Keywords. *Multiplier, Fourier series, Lizorkin theorem, Lorentz space.*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A45.

Множество мультипликаторов из L_p в L_q обозначим через m_p^q , оно является линейным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{m_p^q} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}.$$

Одним из первых результатов, связанных с мультипликаторами рядов Фурье в пространствах Лебега, является теорема М. Рисса [1]. Он доказал ограниченность оператора частичной суммы S_n: если $1 < p < \infty$, $f \in L_p[0;1]$, тогда

$$\|S_n(f)\|_{L_p} \leq c\,\|f\|_{L_p}.$$

Следовательно, характеристические функции отрезка $A = [-n;n] \cap \mathbb{Z}$ являются мультипликаторами в пространстве $L_p[0;1]$. Здесь нормы мультипликаторов ограничены, а константа c зависит только от параметра p.

Известное неравенство для разных метрик в пространствах Лебега гласит: если $1 < p \leq q \leq \infty$, тогда

$$\|S_n(f)\|_{L_q} \leq cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|S_n(f)\|_{L_p}.$$

Применяя теорему М. Рисса к предыдущему неравенству при $1 < p \leq q \leq \infty$, $f \in L_p[0;1]$, получаем следующее:

$$\|S_n(f)\|_{L_q} \leq cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L_p}. \tag{1}$$

Дадим определение мультипликатора преобразования Фурье:

Определение 2. *Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Говорят, что функция φ является мультипликатором преобразований Фурье из L_p в L_q, если существует константа $c > 0$ такая, что для любой функции f из пространства Шварца S выполняется неравенство*

$$\|T_\varphi(f)\|_{L_q} \leq c\,\|f\|_{L_p},$$

где $T_\varphi(f) = F^{-1}\varphi F f$, F и F^{-1} соответственно прямое и обратное преобразования Фурье в $\mathbb{R}$:

$$(Ff)(\xi) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

$$(F^{-1}g)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Совокупность всех мультипликаторов преобразования Фурье из L_p в L_q обозначим через M_p^q, которая также представляет собой нормированное пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{M_p^q} = \|T_\varphi\|_{L_p \to L_q} .$$

Важным результатом теории рядов Фурье является теорема Марцинкевича о мультипликаторах [2]. Аналог теоремы Марцинкевича для мультипликаторов преобразования Фурье был доказан С.Г. Михлиным [3]. Условия теорем Марцинкевича и Михлина не зависят от параметра p. В статьях [4], [5], [6] Е.Д. Нурсултанов получил условия для мультипликаторов рядов Фурье, существенно зависящие от параметра p.

Для классов M_p^q, когда p и q разделены числом 2, известна теорема Л. Хёрмандера [7]. В этом случае в следующих статьях [4], [8] Е.Д. Нурсултанов и Н.Т. Тлеуханова получили нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов, где верхняя оценка улучшает теорему Хёрмандера.

Для преобразования Фурье известна теорема Лизоркина о мультипликаторах [9]:

Теорема А. *Пусть* $1 < p \le q \le \infty$, $A > 0$, $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *и функция* φ *непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}/\{0\}$. *Если выполняются следующие условия:*

$$\left|y^\beta \varphi(y)\right| \le A,$$

$$\left|y^{1+\beta} \varphi'(y)\right| \le A,$$

тогда φ *является мультипликатором преобразования Фурье из* L_p *в* L_q *и*

$$\|\varphi\|_{M_p^q} \le cA.$$

Аналог теоремы Лизоркина о мультипликаторах для рядов Фурье был получен в работе [10]:

Теорема Б. *Пусть* $1 < p < q \le \infty$, $A > 0$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_k k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |\lambda_k| \le A,$$

$$\sup_k k^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |\Delta\lambda_k| \le A,$$

тогда λ является мультипликатором рядов Фурье из L_p в L_q и $\|\lambda\|_{m_p^q} \le cA$.

Пусть f — измеримая по Лебегу функция на $\mathbb{R}$. Функция распределения определяется как

$$m(\sigma, f) = |\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \sigma\}|.$$

Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma \ge 0 : m(\sigma, f) \le t\}$$

является невозрастающей перестановкой f.

Следующий результат является усилением теоремы Лизоркина о мультипликаторах для рядов Фурье [11], [12]:

Теорема B. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\beta = \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Если последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_k k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |\lambda_k| \le A,$$

$$\sup_k k^{1-\alpha} \left(m^{\beta} \Delta\lambda_m\right)^* (k) \le A,$$

тогда λ является мультипликатором рядов Фурье из пространства Лоренца $L_{p,r}$ в $L_{q,r}$ и

$$\|\lambda\|_{m_{p,r}^{q,r}} \le c(p, q, r, \alpha)A.$$

2 Вспомогательные леммы

Пусть $S_Q(f) = \sum\limits_{k\in Q} \hat{f}_k e^{2\pi ikx}$ — частичная сумма функции f по множеству Q, где Q — интервал из $\mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $f \in L_{p,r}$, тогда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \sup_{\substack{|Q|\ge n \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \le c\|f\|_{L_{p,r}},$$

где M — множество интервалов из $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Используя неравенство (1), получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq c \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p}}{|Q|} = c\|f\|_{L_p}.$$

Таким образом, пусть $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q}$, $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q}$, тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{\alpha_0} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq c\|f\|_{L_{p_0}},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{\alpha_1} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq c\|f\|_{L_{p_1}}.$$

Представим функцию $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in L_{p_0}$, $f_1 \in L_{p_1}$, тогда

$$\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_0)\|_{L_q}}{|Q|} + \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_1)\|_{L_q}}{|Q|}.$$

Сделаем замену $v(t) = t^{\frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}}$, $t \in [1;+\infty)$, тогда получаем

$$\sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_1} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq$$

$$\leq \sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_1-\alpha_0} n^{\alpha_0} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_0)\|_{L_q}}{|Q|} + \sup_{n\geq 1} n^{\alpha_1} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_1)\|_{L_q}}{|Q|} \leq$$

$$\leq t \sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_0} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_0)\|_{L_q}}{|Q|} + \sup_{n\geq 1} n^{\alpha_1} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f_1)\|_{L_q}}{|Q|}.$$

Так как это неравенство верно для любого представления функции, то верно следующее неравенство:

$$\sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_1} \sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \leq$$

$$\leq \inf_{f=f_0+f_1}\left(t \sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_0}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f_0)\|_{L_q}}{|Q|}+\sup_{n\geq 1} n^{\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f_1)\|_{L_q}}{|Q|}\right).$$

Далее получим, что

$$\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{f=f_0+f_1}\left(t \sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_0}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f_0)\|_{L_q}}{|Q|}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sup_{n\geq 1} n^{\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f_1)\|_{L_q}}{|Q|}\right)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\geq$$

$$\geq\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\sup_{1\leq n\leq v(t)} n^{\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\geq$$

$$\geq C\left(\int_0^\infty\left(u^{-\theta(\alpha_1-\alpha_0)}\sup_{1\leq n\leq u} n^{\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{r}}\geq$$

$$\geq C\left(\sum_{r=0}^\infty\left(2^{-\theta r(\alpha_1-\alpha_0)}\sup_{1\leq n\leq 2^r} n^{\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq n\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{1}{2^r}\right)^{\frac{1}{r}}\geq$$

$$\geq C\left(\sum_{r=0}^\infty\left(2^{-\theta r(\alpha_1-\alpha_0)+r\alpha_1}\sup_{\substack{|Q|\geq 2^r\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{1}{2^r}\right)^{\frac{1}{r}}=$$

$$=C\left(\sum_{r=0}^\infty\left(2^{r\alpha}\sup_{\substack{|Q|\geq 2^r\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{1}{2^r}\right)^{\frac{1}{r}}=C\left(\sum_{k=1}^\infty\left(k^{\alpha}\sup_{\substack{|Q|\geq k\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $\alpha=\theta\alpha_0+(1-\theta)\alpha_1,\ 0<\theta<1,\ \frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_0}+\frac{1-\theta}{p_1}$. Используя интерполяционные свойства пространств Лебега, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^\infty\left(k^{\alpha}\sup_{\substack{|Q|\geq k\\ Q\in M}}\frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|}\right)^r\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{r}}\leq c\|f\|_{L_{p,r}},$$

где $\alpha=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $f \in L_{p,1}$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \left\| \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \hat{f}_m e^{2\pi imx} \right\|_{L_q} \leq C\|f\|_{L_{p,1}}.$$

Доказательство. Используя Лемму 1, получаем

$$c\|f\|_{L_{p,r}} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \sup_{\substack{|Q|\geq n \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \left(n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \sup_{\substack{|Q|\geq n \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)r} \left(\sup_{\substack{|Q|\geq 2^{k+1} \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)} \sup_{\substack{|Q|\geq 2^{k+1} \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \ln 2 \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= 2^{-\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)} (\ln 2)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{(k+1)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)} \sup_{\substack{|Q|\geq 2^{k+1} \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \frac{(\ln 2)^{\frac{1}{r}}}{2^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)} \sup_{\substack{|Q|\geq 2^{k} \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Следовательно, верно следующее неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)} \sup_{\substack{|Q|\geq 2^{k} \\ Q\in M}} \frac{\|S_Q(f)\|_{L_q}}{|Q|} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|f\|_{L_{p,r}}.$$

Далее, если возьмем $r=1$ и в качестве множество Q возьмем интервал $[2^k;2^{k+1}-1]$, то получим искомое неравенство.

3 Основной результат

Теорема 1. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $0<r\leq\infty$, $B>0$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\lambda_{2^{k+1}-1}|\leq B,$$

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}|\Delta\lambda_m|\leq B,$$

то λ *является мультипликатором рядов Фурье из* $L_{p,r}$ *в* $L_{q,r}$ *и*

$$\|\lambda\|_{m_{p,r}^{q,r}}\leq cB.$$

Доказательство. Рассмотрим норму суммы ряда

$$\left\|\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m a_m e^{2\pi imx}\right\|_{L_q}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\lambda_m a_m e^{2\pi imx}\right\|_{L_q}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}\Delta\lambda_m\sum_{r=2^k}^{m}a_r e^{2\pi irx}+\lambda_{2^{k+1}-1}\sum_{r=2^k}^{2^{k+1}-1}a_r e^{2\pi irx}\right\|_{L_q}\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{r=2^k}^{2^{k+1}-1}a_r e^{2\pi irx}\right\|_{L_q}\left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}|\Delta\lambda_m|+\left|\lambda_{2^{k+1}-1}\right|\right)\leq$$

$$\leq\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}|\Delta\lambda_m|+\left|\lambda_{2^{k+1}-1}\right|\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\left\|\sum_{r=2^k}^{2^{k+1}-1}a_r e^{2\pi irx}\right\|_{L_q}\leq cB\|f\|_{L_{p,1}}.$$

Пусть $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $1 < q_0 < q < q_1 < \infty$ такие, что $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$. Тогда

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m e^{2\pi imx} \right\|_{L_{q_0}} \leq cB \, \|f\|_{L_{p_0,1}},$$

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m e^{2\pi imx} \right\|_{L_{q_1}} \leq cB \, \|f\|_{L_{p_1,1}},$$

Возьмем $0 < \theta < 1$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Тогда

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{1}{q_0} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Далее, используя интерполяционную теорему для пространств Лоренца и Лебега [13], [14], получим

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m e^{2\pi imx} \right\|_{L_{q,r}} \leq c(p,q,r) B \|f\|_{L_{p,r}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_m e^{2\pi imx} \right\|_{L_{q,r}}}{\|f\|_{L_{p,r}}} \leq c(p,q,r) B.$$

Что и требовалось доказать.

Определение 3. *Последовательность комплексных чисел $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется обобщенно-монотонной [15], если следующее неравенство выполняется для всех целых чисел n:*

$$\sum_{\nu=n}^{2n-1} |a_\nu - a_{\nu+1}| \leq C \, |a_n|,$$

где константа C не зависит от n.

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ 0 < r \le \infty,\ B > 0$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *обобщенно-монотонна и удовлетворяет условию*

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\lambda_{2^k}| \le B,$$

то λ *является мультипликатором рядов Фурье из* $L_{p,r}$ *в* $L_{q,r}$ *и*

$$\|\lambda\|_{m_{p,r}^{q,r}} \le cB.$$

Замечание 1. *Существует последовательность* λ *такая, что*

$$|\Delta\lambda_m| = \begin{cases} 2^{-k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \text{если } \ m = 2^k, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям Теоремы 1, но не удовлетворяющая условиям Теорем Б и В, т.е. найдется последовательность λ *такая, что*

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\lambda_{2^{k+1}-1}| < \infty,$$

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}|\Delta\lambda_m| < \infty,$$

но

$$\sup_k k^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|\Delta\lambda_k| = +\infty,$$

$$\sup_k k^{1-\alpha}\left(m^{\beta}\Delta\lambda_m\right)^*(k) = +\infty,$$

где $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ \beta = \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Замечание 2. *Существует последовательность* λ *такая, что*

$$\Delta\lambda_m = \begin{cases} \frac{2^{-k\beta}}{2^{(k_0-k)(1-\alpha)}}, & \text{если } \ m \in [2^k, 2^{k+1}], \quad k \le k_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям Теоремы В, но не удовлетворяющая условиям Теорем 1 и Б, т.е. найдется последовательность λ такая, что

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}|\lambda_{2^{k+1}-1}| < \infty,$$
$$\sup_k k^{1-\alpha}\left(m^{\beta}\Delta\lambda_m\right)^*(k) < \infty,$$

где $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\beta = \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *но*

$$\sup_k 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-2}|\Delta\lambda_m| = +\infty,$$
$$\sup_k k^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|\Delta\lambda_k| = +\infty.$$

Литература

1 Reisz M. Sur Ies fonctions conjuguées // Mathematische Zeitschrift. – 1928. – V. 27. – P. 218-244.

2 Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier // Studia Math. – 1939. – V. 8. – P. 78-91.

3 Mikhlin S.G. Fourier integrals and multiple singular integrals // Vestn. Leningr. Univ., Mat. Mekh. Astron. – 1957. – V. 12, No. 2. – P. 143-155.

4 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Мультипликаторы кратных рядов Фурье // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 227. – С. 237-242.

5 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, № 2. – С. 235-247.

6 Нурсултанов Е.Д. О нижней оценке мультипликатора преобразования Фурье из $M(L_p \to L_q)$ // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62, № 6 – С. 945-949.

7 Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Math. – 1960. – V. 104. – P. 93-140.

8 Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. Lower and Upper Bounds for the Norm of Multipliers of Multpile Trigonometric Fourier Series in Lebesgue Spaces // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 2000. – V. 34, No. 2. – P. 86-88.

9 Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова. – 1967. – Т. 89. – С. 231–248.

10 Persson L.E., Sarybekova L., Tleukhanova N. Multidimensional generalization of the Lizorkin theorem on Fourier multipliers. // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2009. – V. 151. – P. 83-101.

11 Sarybekova L., Tararykova T., Tleukhanova N. On a generalization of the Lizorkin theorem on Fourier multipliers // Math. Inequal. Appl. – 2010. – V. 13, No. 3. – P. 613-624.

12 Persson L.E., Sarybekova L., Tleukhanova N. A Lizorkin theorem on Fourier series multipliers for strong regular systems // Analysis for science, engineering and beyond, Springer Proc. Math. – 2012. – V. 6. – P. 305-317.

13 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 1-4.

14 Нурсултанов Е.Д. Неравенства разных метрик С.М.Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространств Лоренца // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова. – 2006. – Т. 255. – С. 197-215.

15 Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 326, No. 1. – P. 721-735.

Ыдырыс А.Ж. ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ МУЛЬТИПЛИКАТОРЛАРЫ ЖАЙЛЫ БІР ТЕОРЕМА

Лоренц кеңістіктеріндегі Фурье қатарларының мультипликаторлары зерттелген. $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ комплекс сандар тізбегінің $L_{p,r}[0;1]$ кеңістігінен $L_{q,r}[0;1]$ еңістігіне тригонометриялық Фурье қатарының мультипликаторы болуы үшін қойылатын жеткілікті шарттар алынған. Бұл мақалада белгілі теоремаларды толықтыратын мультипликаторлар туралы жаңа теорема ұсынылған.

Кілттік сөздер. Мультипликатор, Фурье қатары, Лизоркин теоремасы, Лоренц кеңістігі.

Ydyrys A.Zh. ABOUT A THEOREM OF MULTIPLIERS OF FOURIER SERIES ON THE LORENZ SPACES

We study the multipliers of Fourier series on the Lorentz spaces. The sufficient conditions for the sequence of complex numbers $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in order to be the multiplier of the trigonometric Fourier series from the space $L_{p,r}[0;1]$ in $L_{q,r}[0;1]$ are obtained. In this paper we present a new theorem on multipliers, which completes the well-known theorems.

Keywords. Multiplier, Fourier series, Lizorkin theorem, Lorentz space.

Ыдырыс А.Ж.
Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, Сатпаева, 2
Институт математики и математического моделирования
050100, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: aizhanyd@gmail.com

Статья поступила в редакцию 24.05.2018

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования http://www. math. kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать классификатор МРНТИ. На следующих строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов. В конце указать место работы, почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, №2 (68), 2018

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования
29.06.2018 г.

Тираж 300 экз. Объем 180 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz