

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 18 № 1 (67) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682–0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

MATHEMATICAL JOURNAL

Том 18 № 1 (67) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, № 1 (67), 2018

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Главный редактор: член-корр. НАН РК, д.ф.-м.н., проф. М.А. Садыбеков

Заместитель главного редактора: д.ф.-м.н., проф. А.Т. Асанова

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. Л.А. Алексеева, к.ф.-м.н., проф. Д.Б. Базарханов,
член-корр. НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Б.С. Байжанов,
д.ф.-м.н., проф. Г.И. Бижанова, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Н.К. Блиев,
д.ф.-м.н., проф. В.Г. Воинов, д.ф.-м.н., проф. Н.С. Даирбеков,
д.ф.-м.н., проф. М.Т. Дженалиев, д.ф.-м.н., проф. Д.С. Джумабаев,
академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. А.С. Джумадильдаев,
академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Т.Ш. Кальменов, д.ф.-м.н., проф. К.Т. Мынбаев,
д.ф.-м.н., проф. А.Ж. Найманова, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. М. Отелбаев,
к.ф.-м.н. И.Н. Панкратова, д.ф.-м.н., проф. М.Г. Перетятыкин,
академик РАН, д.ф.-м.н., проф. И.А. Тайманов (Россия),
д.ф.-м.н., проф. М.И. Тлеубергенов, академик НАН РК, д.ф.-м.н., проф. С.Н. Харин.

Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

© Институт математики и математического моделирования, 2018 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18

№ 1 (67)

2018

<i>Алдашев С.А.</i> Критерий единственности решения пространственной задачи Геллерстедта для многомерного гипербола-параболического уравнения	5
<i>Алексеева Л.А.</i> Бикватернионное представление атомов. Простая гамма	11
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> О Разрешимости многоточечной задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка	27
<i>Baizhanov B.S., Baizhanov S., Mukankyzy A.</i> Dp-rank in different classes of theories ...	36
<i>Borikhanov M., Torebek B.T.</i> Maximum principle and its application for the sub-diffusion equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative	43
<i>Derbissaly B.O., Sadybekov M.A.</i> On an initial-boundary value problem for the wave potential in a domain with a curvilinear boundary	53
<i>Джумабаев Д.С., Сисекенов Н.Д.</i> Об одном алгоритме решения краевой задачи для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма	66
<i>Дукенбаева А.А.</i> Об одной обобщенной задаче типа Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге	78
<i>Кальменов Т.Ш., Кахарман Н.</i> Об одной задаче Бицадзе-Самарского для уравнения Штурма-Лиувилля	88
<i>Kassymov A., Suragan D.</i> An analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogenous Lie groups	99
<i>Латкин И.В., Мархабатов Н.Д.</i> Сложность изоляторов нижнего центрального ряда в вычислимых нильпотентных группах	111
<i>Макашева А.П., Найманова А.Ж.</i> Численное моделирование исследования влияния газовой фазы на динамику распространения твердых частиц	126
<i>Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А.</i> Приводимость линейных многопериодических уравнений с оператором дифференцирования по диагонали	139
<i>Турметов Б.Х., Тажиметова М.Ш.</i> Об одном методе построения функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона	151

CONTENTS

Volume 18

No. 1 (67)

2018

<i>Aldashev S.A.</i> The criterion of the uniqueness of the solution of the spatial Gellerstedt problem for a multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation	5
<i>Alexeyeva L.A.</i> Biquaternionic representation of atoms. A simple gamma	11
<i>Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M.</i> On the solvability of multi-point problem for the loaded third order partial differential equation	27
<i>Baizhanov B.S., Baizhanov S., Mukankyzy A.</i> Dp-rank in different classes of theories ...	36
<i>Borikhanov M., Torebek B.T.</i> Maximum principle and its application for the sub-diffusion equations with Caputo-Fabrizio fractional derivative	43
<i>Derbissaly B.O., Sadybekov M.A.</i> On an initial-boundary value problem for the wave potential in a domain with a curvilinear boundary	53
<i>Dzhumabaev D.S., Sissekenov N.D.</i> On one algorithm for solving quasilinear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation	66
<i>Dukenbayeva A.A.</i> On a generalised Samarskii-Ionkin type problem for the Poisson equation in the disk	78
<i>Kal'menov T.Sh., Kakharman N.</i> On a problem of Bitsadze-Samarskii for the Sturm-Liouville equation	88
<i>Kassymov A., Suragan D.</i> An analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogenous Lie groups.....	99
<i>Latkin I.V., Markhabatov N.D.</i> The complexity of the isolators of the lower central series in the computable nilpotent groups	111
<i>Makasheva A.P., Naimanova A.Zh.</i> Numerical simulation of investigation of the gas phase influence on the dynamics of the solid particles propagation	126
<i>Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A.</i> Reducibility of linear multiperiodic equations with differential operator on diagonal	139
<i>Turmetov B.Kh., Tazhymetova M.Sh.</i> A method for constructing the Green's function of the third boundary value problem for the Poisson equation	151

МРНТИ 27.31.21

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ
МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ**

С.А. Алдашев

Аннотация. В работе получен критерий единственности решения пространственной задачи Геллерстедта для многомерного гиперβολо-параболического уравнения.

Ключевые слова. Критерий, задача Геллерстедта, многомерное уравнение, функция Бесселя.

Теория краевых задач для гиперβολо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена (см. например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию). Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы недостаточно [2].

В особенности следует отметить, что пространственная задача Геллерстедта ранее не изучалась.

Пусть $\Omega_\alpha^\varepsilon$ – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = t + \varepsilon$, $K_1 : |x| = 1 - t$, $0 \leq t \leq \frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t < 0$ – цилиндрической поверхностью $\Gamma_\alpha = \{(x, t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = \alpha < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, а $0 \leq \varepsilon < 1$.

Обозначим через Ω_ε^+ и Ω_α^- части области $\Omega_\alpha^\varepsilon$, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Части конусов K_ε , K_1 , ограничивающих область Ω_ε^+ , обозначим через S^ε и S^1 соответственно; σ_α – нижнее основание области Ω_α^- .

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12.

Funding: Работа выполнена при поддержке гранта 3492/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© С.А. Алдашев, 2018.

Пусть далее S_ε – общая часть границ областей Ω_ε^+ , Ω_α^- представляющая множество $\{t = 0, \varepsilon < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_\alpha^\varepsilon$ рассмотрим многомерное смешанное гипербола-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Следуя [1, с. 144] в качестве пространственной задачи Геллерстедта рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_\alpha^\varepsilon$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_\alpha^\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\alpha^+ \cup \Omega_\alpha^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\varepsilon} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad u|_{\sigma_\alpha} = 0. \quad (3)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$.

Тогда справедлив следующий критерий единственности решения.

ТЕОРЕМА. Решение Задачи 1 $u(r, \theta, t) \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α^- имеет вид [3, с. 143]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0, \quad (4)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1,$$

$$g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [4, с. 239], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение Задачи 1 в области Ω_α^- принадлежит классу $C(\overline{\Omega_\alpha^-}) \cap C^2(\Omega_\alpha^-)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (5)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [4, с. 242], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

при этом краевое условие (3) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$, задачу (6), (7) приведем к следующей задаче:

$$Lu_n^k \equiv u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = 0, \quad (8)$$

$$u_n^k(r, \alpha) = 0, \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad (9)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Решение задачи (8), (9) рассмотрим в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), (9), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (11)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (12)$$

$$T_{st} + \mu T_s = 0, \quad \alpha < t < 0, \quad (13)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \quad (14)$$

Ограниченным решением задачи (11), (12) является [5, с. 401]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (15)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ – положительные нули функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением уравнения (13) является функция $T_s(t) = c_s e^{-\mu_{s,n}^2 t}$, c_s – произвольная постоянная, при удовлетворении которой условию (14), получим $T_s(t) \equiv 0$, $s = 1, 2, \dots$.

Отсюда и из (15), (10) следует, что $u_n^k(r, t) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Тогда из (5), в свою очередь, следует, что решением задачи (1), (3) в области Ω_α^- является функция

$$u(r, \theta, t) \equiv 0. \quad (16)$$

Далее из (16) при $t \rightarrow -0$ имеем

$$u(r, \theta, 0) = 0, \quad \varepsilon < r < 1. \quad (17)$$

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (17), мы получили в области Ω_ε^+ задачу Дарбу-Проттера для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad (18)$$

с данными

$$u|_{S_\varepsilon \cup S^\varepsilon} = 0. \quad (19)$$

При $\varepsilon > 0$ из результатов работ [6], [7] следует, что решение задачи (18), (19) $u(r, \theta, t) \equiv 0$.

Следовательно, и решение Задачи 1 тривиально.

Пусть теперь решение Задачи 1 $u(r, \theta, t) \equiv 0$.

Покажем, что $\varepsilon > 0$. Предположим противное, т.е. $\varepsilon = 0$.

Если $\varepsilon = 0$, то, как ранее показано Задача 1 сводится к задаче Дарбу-Проттера для уравнения (18) с условием

$$u|_{S_0 \cup S^0} = 0. \quad (20)$$

В [7], [8] доказано, что задача (18), (20) имеет ненулевые решения. Приходим к противоречию. Теорема установлена.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
- 2 Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – НГУ, Новосибирск, 1983. – 84 с.
- 3 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физ-матгиз, 1962. – 254 с.
- 4 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.
- 5 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
- 6 Алдашев С.А. О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // ДАН СССР. – 1982. – Т. 265, № 6. – С. 1289-1292.
- 7 Алдашев С.А. О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 3-8.
- 8 Алдашев С.А. О критериях единственности решения задачи Дарбу-Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Математический журнал. – 2002. – Т. 2, № 4(6). – С. 26-29.

Алдашев С.А. КӨП ӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕҢІСТІКТІК ГЕЛЛЕРСТЕДТ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҚ КРИТЕРИЙІ

Жұмыста көп өлшемді гиперβολо-параболалық теңдеу үшін кеңістіктік Геллерстедт есебінің шешімінің жалғыздық критерийі алынған.

Кілттік сөздер. Критерий, Геллерстедт есебі, көп өлшемді теңдеу, Бессель функциясы.

Aldashev S.A. THE CRITERION OF THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE SPATIAL GELLERSTEDT PROBLEM FOR A MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

In this paper the criterion of the uniqueness of the solution of the spatial Gellerstedt problem for a multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation is obtained.

Keywords. Criteria, Gellerstedt problem, multi-dimensional equation, Bessel function.

Алдашев С.А.
Институт математики и математического моделирования
050100, Алматы, ул. Пушкина, 125
E-mail: aldash51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 02.09.2017

МРНТИ 27.35.57

**БИКВАТЕРНИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АТОМОВ.
ПРОСТАЯ ГАММА**

Л.А. АЛЕКСЕЕВА

Аннотация. Построены частные монохроматические решения уравнения свободного поля электро-гравимагнитных зарядов и токов в дифференциальной алгебре бикватернионов, которые описывают элементарные частицы как стоячие электро-гравимагнитные волны. Исследованы два класса решений этого биволнового уравнения, порождаемые скалярными потенциалами (пульсары) и векторными (спиноры). Рассмотрены их асимптотические свойства, на основе которых они классифицированы на тяжелые (бозоны) и легкие (лептоны) элементарные частицы. Дано бикватернионное представление атома водорода и советующая ему периодическая система элементов, построенная по принципу музыкального строя простой гармонической гаммы.

Ключевые слова. Бикватернион, элементарная частица, частота, стоячая ЭГМ-волна, пульсар, спинор, бозон, лептон, атом, водород, периодическая система, музыкальная гамма.

В работах [1]–[6] автором разработана бикватернионная модель электро-гравимагнитного поля (ЭГМ-поле) и электро-гравимагнитных взаимодействий. Ее основу составляют бикватернионные представления обобщенных уравнений Максвелла (ОУМ) и Дирака (ОУД). Бикватернионное представление ОУМ выражает бикватернион плотности масс-заряда и ЭГМ-тока через биградиент напряженности ЭГМ-поля. Бикватернионное представление ОУД определяет трансформацию плотности масс-зарядов и токов под воздействием внешних ЭГМ-полей. В частности, при отсутствии внешних полей на его основе построено бикватернионное волновое уравнение свободного поля масс-зарядов и токов, которое является полевым аналогом первого закона Ньютона – закона инерции.

2010 Mathematics Subject Classification: 81V45, 81V35.

© Л.А. Алексеева, 2018.

Здесь построены частные монохроматические решения этого уравнения, которые описывают элементарные частицы как стоячие ЭГМ-волны. Их можно разделить на два класса, порождаемые скалярными потенциалами (пульсары) и векторными (спиноры). Исследованы их асимптотические свойства, на основе которых они классифицированы на тяжелые (бозоны) и легкие (лептоны) элементарные частицы. Показано, что бозоны – это сферические гармонические пульсары, плотность масс-заряда которых определяется их частотой колебаний. Это позволяет строить периодические системы элементарных частиц на основе классической гармонической музыкальной гаммы.

В частности, дано бикватернионное представление атома водорода и советующая ему периодическая система, построенная по принципу музыкального строя простой гармонической гаммы.

1 Закон инерции. Монохроматические поля зарядов-токов

Уравнение свободного поля зарядов-токов имеет вид однородного биволнового уравнения

$$\nabla^- \Theta(\tau, x) \triangleq (\partial_\tau - i\nabla) \circ (i\rho(\tau, x) + J(\tau, x)) = 0, \quad (1)$$

здесь $\Theta(\tau, x)$ – бикватернион заряда-тока, скалярная часть которого $\rho(\tau, x)$ описывает плотность электрического и гравимагнитного зарядов (ЭГМ-зарядов или масс-зарядов), а векторная $J(\tau, x)$ – плотность электрического и гравимагнитного токов (ЭГМ-токов), а именно:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rho^E - \frac{i}{\sqrt{\mu}} \rho^H, \\ J &= \sqrt{\mu} j^E - i\sqrt{\varepsilon} j^H, \end{aligned}$$

где $\rho^E(x, t), j^E(x, t)$ – плотности электрического заряда и электрического тока, $\rho^H(x, t), j^H(x, t)$ – плотности гравимагнитных заряда и тока; ε, μ – константы электрической проводимости и магнитной проницаемости вакуума, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света, i – мнимая единица.

Действие бикватернионных дифференциальных операторов ∇^- и ∇^+ (взаимных биградиентов) определяется, согласно правилу кватернионного умножения, формулой

$$\nabla^\pm F(\tau, x) = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f(\tau, x) + F(\tau, x)) \triangleq$$

$$\triangleq (\partial_\tau f \mp i \operatorname{div} F) + \{\pm i \operatorname{grad} f + \partial_\tau F \pm i \operatorname{rot} F\}.$$

Бикватернион энергии-импульса F -поля определяется формулой

$$F(\tau, x) = W(\tau, x) + iP(\tau, x) \triangleq 0.5F \circ F^*,$$

где F^* – сопряженный бикватернион,

$$F^* \triangleq \bar{f}(\tau, x) - \bar{F}(\tau, x).$$

Здесь черта над символом означает комплексное сопряжение. Скалярная часть W – плотность энергии F -поля, а P – аналог обобщенного вектора Пойнтинга F -поля подобно тому, как строится обобщенный вектор Пойнтинга в бикватернионном представлении электро-магнитного поля (подробно о дифференциальной алгебре бикватернионов с приложением в электродинамике см. [7]).

Скалярная часть уравнения (1) – это закон сохранения ЭГМ-заряда:

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0,$$

а векторная описывает связь между зарядами и токами в отсутствии внешних ЭГМ-полей:

$$\partial_\tau J - i \operatorname{rot} J + \operatorname{grad} \rho = 0.$$

Для монохроматических полей частоты ω бикватернион заряда-тока можно представить в виде

$$\Theta(\tau, x) \triangleq \Theta(x, \omega) \exp(-i\omega\tau), \quad \omega > 0. \quad (2)$$

В этом случае из уравнения (1) получим уравнение для бикватернионов комплексных амплитуд (*биамплитуд*) $\Theta(x, \omega)$:

$$(\omega + \nabla) \circ (i\rho(x) + J(x)) = 0.$$

Поскольку

$$(\omega + \nabla) \circ (\omega - \nabla) = (\omega - \nabla) \circ (\omega + \nabla) = \omega^2 + \Delta,$$

отсюда следует, что биамплитуды удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Theta + \omega^2 \Theta = 0$$

и монохроматические решения имеют вид

$$\Theta(\tau, x) = \exp(-i\omega\tau) (\omega - \nabla) \circ \left(\psi^0(x, \omega) + \sum_{j=1}^3 \psi^j(x, \omega) e_j \right), \quad (3)$$

где *потенциалы* ψ^j – произвольные решения однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi + \omega^2\psi = 0,$$

которые имеют вид поверхностного интеграла:

$$\psi^j(x, \omega) = \int_{\|\xi\|=\omega} \varphi^j(\xi, \omega) e^{-i(\xi, x)} dS(\xi) \quad (4)$$

для любой функции φ^j , суммируемой на сфере радиуса ω .

2 ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И СТРУКТУРЫ

Мы рассмотрим частные решения уравнения Гельмгольца [8]

$$\psi_{nm}(x, \omega) = j_n(\omega r) Y_n^m(\vartheta, \phi), \quad (5)$$

где $j_n(\omega r)$ – сферические функции Бесселя порядка n ($n = 0, 1, 2, \dots$), $Y_n^m(\vartheta, \phi)$ – сферические гармоники порядка n, m ($m = 1, 2, \dots$):

$$Y_n^m(\vartheta, \phi) = P_n^m(\cos \vartheta) \exp(im\phi),$$

$P_n^m(\dots)$ – присоединенные полиномы Лежандра, (r, ϑ, ϕ) – сферические координаты.

Естественно эти решения взять для построения элементарных частиц, которые можно назвать *гармоническими*. Среди них выделим порождаемые скалярным потенциалом, которые назовем *пульсары*:

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}^0(x, \omega) &= (\omega + \nabla) \circ \psi_{nm}(x, \omega) = \\ &= \omega\psi_{nm}(x, \omega) + \text{grad}\psi_{nm}(x, \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

а порождаемые векторным потенциалом назовем *спиноры*:

$$\Theta_{nm}^j(x, \omega) = (\omega + \nabla) \circ \psi_{nm}(x, \omega) e_j =$$

$$= -\operatorname{div}(\psi_{nm}(x, \omega)e_j) + \{\omega\psi_{nm}(x, \omega)e_j + \operatorname{rot}(\psi_{nm}(x, \omega)e_j)\}. \quad (7)$$

Последние поляризованы в направлении осей координат соответственно индексу j ($j=1,2,3$).

Используя структурные бикватернионы произвольного вида $K(x)$, на их основе с помощью операции бикватернионной свертки

$$\begin{aligned} \Theta(x, \omega) * K(x) &= (i\rho + J) * (k + K) = \\ &= \{i\rho * k - \sum_{j=1}^3 (J_j * K_j)\} + \\ &+ \left\{ i\rho * K + J * k + \sum_{j,l,m=1}^3 \varepsilon_{jlm} (J_j * K_l) e_m \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ε_{jlm} – псевдо-тензор Леми-Чивита, можно строить разнообразные монохроматические поля зарядов-токов:

$$\Theta(x, \omega) = \sum_{j=0}^3 \Theta_{nm}^j(x, \omega) * K_j(x). \quad (9)$$

В (8) строят функциональные свертки, которые для регулярных функций имеют интегральный вид

$$\rho(x) * k(x) = \int_{R^3} \rho(y)k(x - y)dy_1dy_2dy_3.$$

Аналогично записываются покомпонентные свертки для векторов. В силу свойства дифференцирования свертки [8], свертки (9) также будут решениями уравнений (1), (2).

Формулы (9) позволяют строить различные кристаллические решетки из гармонических элементарных частиц, если в качестве структурного бикватерниона взять *решетки* – различные сдвиги δ -функции – из других обобщенных функций.

Приведем здесь простой пример неоднородной прямоугольной решетки с переменным шагом (h_l, h_m, h_n) и весом a^{lmn} :

$$K(x) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a^{lmn} \delta(x_1 - h_l) \delta(x_2 - h_m) \delta(x_3 - h_n).$$

Ей соответствует, например, такой кристаллический ω -пульсар:

$$\Theta(x, \omega) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a^{lmn} \theta^0(x_1 - lh_l, x_2 - mh_m, x_3 - nh_n, \omega).$$

Формулы (7)–(9) позволяют строить самые разнообразные монохроматические структуры типа тел, тканей и нитей (об их представлении см. подробнее в [4]). А их частотные суперпозиции вообще необозримы.

3 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПУЛЬСАРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Среди решений уравнений Гельмгольца (7) сферически симметричным является лишь одно:

$$\psi_{00}(x, \omega) = j_0(\omega r) = \frac{\sin \omega r}{\omega r}, \quad (10)$$

где $j_0(\omega r)$ – сферическая функция Бесселя, $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Биамплитуда соответствующего ему пульсара имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta^0(x, \omega) &= (\omega + \nabla) \circ \psi_{00}(x, \omega) = \omega \frac{\sin \omega r}{\omega r} + \text{grad} \frac{\sin \omega r}{\omega r} = \\ &= \frac{\sin \omega r}{r} + \left(\frac{\cos \omega r}{r} - \frac{\sin \omega r}{\omega r^2} \right) e_x, \quad e_x = \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{r} e_j. \end{aligned} \quad (11)$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} i\rho_1^0 + J_1^0 &= r^{-1} \left\{ \sin \omega r + \left(\cos \omega r - \frac{\sin \omega r}{\omega r} \right) e_x \right\} e^{-i\omega\tau}, \\ \rho^0 &= -\frac{i \sin \omega r}{r} e^{-i\omega\tau}, \quad J^0 = \left(\frac{\cos \omega r}{r} - \frac{\sin \omega r}{\omega r^2} \right) e^{-i\omega\tau} e_x \Rightarrow \\ &|\rho^0| = \frac{|\sin \omega r|}{r}, \quad \|J^0\| = \left| \frac{\cos \omega r}{r} - \frac{\sin \omega r}{\omega r^2} \right|. \end{aligned}$$

Обозначим $j(z) = \cos z - \frac{\sin z}{z}$. Вычисляя бикватернион его энергии-импульса:

$$\begin{aligned} \Xi^0(x, \omega) &= W^0 + iP^0 = 0.5\Theta^0 e^{-i\omega\tau} \circ (\Theta^0)^* e^{i\omega\tau} \triangleq \\ &= 0,5r^{-2}(\sin \omega r + j(\omega r)e_x) \circ (\sin \omega r - j(\omega r)e_x) = \\ &= 0,5r^{-2}\{(\sin^2 \omega r + j^2(\omega r)) + \sin \omega r j(\omega r)e_x - \sin \omega r j(\omega r)e_x - j^2(\omega r)[e_x, e_x]\}, \end{aligned}$$

получим

$$W^0 = 0,5r^{-2}(\sin^2 \omega r + j^2(\omega r)), \quad P \equiv 0. \quad (12)$$

Из (11)–(12) следует, что плотность масс-заряда с ростом r убывает, как r^{-1} , а энергия колебаний затухает еще быстрее, как r^{-2} .

Интересно исследовать асимптотику этих величин при $r \rightarrow 0$, $\omega = \text{const}$. Поскольку

$$\begin{aligned} j(\omega r) &= (\omega r)^2 j_1(\omega r) = \cos \omega r - \frac{\sin \omega r}{\omega r} = \\ &= 1 - \frac{(\omega r)^2}{2} - 1 + \frac{(\omega r)^3}{6\omega r} + \dots \sim -\frac{(\omega r)^2}{3} \quad \text{при } r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (13)$$

из (11), (12) получим при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |\rho^0| &= \omega + o(\omega r) \sim \omega, \\ \|\mathcal{J}^0\| &\approx \frac{\omega r + 0,5\omega^2 r^2}{r} - \frac{\omega r - \omega^3 r^3/6}{\omega r^2} \approx 0,5\omega^2 r + \omega^2 r/6 \sim \frac{2}{3}\omega^2, \\ W &\sim 0,5(\omega^2 + \omega^4 r^2/9) \sim 0,5\omega^2. \end{aligned}$$

Итак, перечислим.

Свойства сферических гармонических пульсаров. У сферических гармонических пульсаров в центре при $x = 0$ плотность масс-заряда равна частоте его колебаний ω , плотность ЭГМ-тока равна нулю, плотность энергии колебаний равна $0,5\omega^2$, а вектор Пойнтинга равен нулю всюду.

Исходя из этих свойств плотности масс-заряда, сферические гармонические пульсары являются тяжелыми элементарными частицами – *бозонами*.

Несферические гармонические пульсары (6) при $n > 0$ имеют нулевую плотность при $x = 0$, т.к.

$$j_n(z) = \frac{z^n}{(2n+1)!!} ((1+o(z)) \text{ при } z \rightarrow 0.$$

Они являются легкими элементарными частицами – лептонами.

4 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ СПИНОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим спинор, поляризованный в направлении оси X_1 :

$$\Theta_1^0(x, t) = i\rho_1^0 + J_1^0 = \Theta_1^0(x, \omega)e^{-i\omega\tau},$$

биамплитуда которого имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_1^0(x, \omega) &= (\omega + \nabla) \circ j_0(\omega r)e_1 = \\ &= -\operatorname{div}(j_0(\omega r)e_1) + \omega j_0(\omega r)e_1 + \operatorname{rot}(j_0(\omega r)e_1) = \\ &= -r_{,1} \left(\frac{\cos \omega r}{r} - \frac{\sin \omega r}{\omega r^2} \right) + \\ &+ \left\{ \frac{\sin \omega r}{r} e_1 + \left(\frac{\cos \omega r}{r} - \frac{\sin \omega r}{\omega r^2} \right) (r_{,3} e_2 - r_{,2} e_3) \right\}, \quad r_{,j} = \frac{x_j}{\|x\|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} \rho_1^0 &= -\frac{ix_1}{r^2} j(\omega r), \\ J_1^0 &= r^{-1}(e_1 \sin \omega r + j(\omega r)(r_{,3} e_2 - r_{,2} e_3)); \end{aligned}$$

$$|\rho_1^0| = \left| \frac{r_{,1}}{r} j(\omega r) \right|, \quad \|J\| = \sqrt{\frac{\sin^2 \omega r}{r^2} + j^2(\omega r) \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{r^4}}.$$

Вычислим бикватернион энергии-импульса и его асимптотики:

$$\begin{aligned} \Xi_1^0(x, \omega) &= W_1^0 + iP_1^0, \\ 2W_1^0 &= \frac{\sin^2 \omega r}{r^2} + \left(\frac{r_{,1}}{r} \right)^2 j^2(\omega r) + j^2(\omega r) \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{r^4} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^2 \omega r}{r^2} + j^2(\omega r) \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{r^4} = r^{-2} \{ \sin^2 \omega r + j^2(\omega r) \}, \quad (15)$$

$$P_1^0 \equiv 0.$$

Построим их асимптотики с учетом (13) при $r \rightarrow 0$:

$$|\rho_1^0| \sim \left| \frac{x_1}{r^2} \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{2} - 1 + \frac{\omega^3 r^3}{6\omega r} \right) \right| = \frac{1}{3} |x_1| \omega^2 \rightarrow 0,$$

$$\|J\| \sim \sqrt{\frac{(\omega r)^2}{r^2} + \frac{(\omega r)^4}{9} \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{r^4}} \sim \omega \rightarrow \omega.$$

$$W \sim \frac{1}{2r^2} \left(1 - \frac{2\omega r}{\omega r} + \frac{8(\omega r)^3}{6\omega r} + \frac{(\omega r - (\omega r)^3/6)^2}{\omega^2 r^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2r^2} \left(1 - 2 + \frac{4}{3}(\omega r)^2 + 1 - \frac{1}{3}(\omega r)^2 + \frac{1}{36}(\omega r)^4 \right) \sim 0.5\omega^2.$$

Следуя (14), легко получим бикватернионное представление сферического спинора, поляризованного вдоль вектора e , $|e| = 1$:

$$\Theta_e^0(x, \omega) = (\omega + \nabla) \circ j_0(\omega r) e = -\operatorname{div}(j_0(\omega r) e) + \omega j_0(\omega r) e + \operatorname{rot}(j_0(\omega r) e) = i\rho_e^0 + J_e^0,$$

где

$$\rho_e^0 = -\frac{e_x}{r} j(\omega r), \quad J_e^0 = r^{-1} (e \sin \omega r + j(\omega r) \varepsilon_{jkl} x_j x_k e_l)$$

с теми же асимптотическими свойствами.

Итак, имеем следующие свойства построенных спиноров.

Свойства гармонических сферических спиноров. У сферических гармонических спиноров в центре (при $x = 0$) плотность масс-заряда равна нулю, норма вектора плотности ЭГМ-тока равна ω , плотность энергии равна $\omega^2/2$, вектор Пойнтинга равен нулю.

Таким образом, сферические гармонические спиноры по плотности ЭГМ-заряда относятся к легким элементарным частицам – *лептонам*.

5 БИКВАТЕРНИОННАЯ МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА

Итак, мы показали, что среди монохроматических решений уравнений свободного поля зарядов-токов (1) только гармонические сферические

пульсары имеют ненулевую плотность в их центре, чего нет у гармонических спинов. Это позволяет предположить, что сферические гармонические пульсары можно использовать для построения бикватернионной модели атомов.

Простейшим атомом является водород Н. Простейшей гармонической элементарной частицей является вышеописанный сферический пульсар. Полагаю, их можно отождествить, а именно:

атом водорода является сферическим гармоническим пульсаром с фиксированной частотой колебаний ω_{H_0} , который имеет следующее бикватернионное представление:

$$H_0(\tau, x) = r^{-1} \left\{ \sin \omega_{H_0} r + \left(\cos \omega_{H_0} r - \frac{\sin \omega_{H_0} r}{\omega_{H_0} r} \right) e_x \right\} e^{-i\omega_{H_0} \tau}. \quad (16)$$

Асимптотические свойства его плотности в центре атома связаны с частотой колебаний:

$$|\rho_{H_0}(x, \tau)| \sim \omega_{H_0}, \quad \|J_{H_0}(x, \tau)\| \sim \frac{2}{3} \omega^2 r, \quad W_{H_0}(x) \sim 0.5\omega^2, \quad r \rightarrow 0. \quad (17)$$

Узлами этой *стоячей волны* по плотности массы $|\rho_{H_0}|$ являются сферы, радиус которых определяется простым тригонометрическим уравнением:

$$\sin \omega_{H_0} r_k = 0 \quad \Rightarrow \quad r_k = \frac{\pi k}{\omega_{H_0}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для определения узлов этой *стоячей волны* по плотности энергии W_{H_0} нужно найти нули более сложного уравнения

$$\omega_{H_0}^2 r_k^2 + \omega_{H_0} r_k \sin 2\omega_{H_0} r_k - \sin^2 \omega_{H_0} r_k = 0, \quad (18)$$

где $r_k = \frac{z_k}{\omega_{H_0}}$, z_k – корни трансцендентного уравнения

$$f(z) = z^2 + z \sin 2z - \sin^2 z = 0.$$

Однако, у этого уравнения нет действительных корней.

Используя представление комплексных зарядов и токов через электрические и гравимагнитные заряды и токи (1), получим для атома водорода

следующие выражения для его электрического и гравимагнитного зарядов, электрического и гравимагнитного токов:

$$\begin{aligned}\rho_{H_0}^E(t, x) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{r} \cos w_{H_0} t \sin \frac{w_{H_0} \|x\|}{c}, \\ \rho_{H_0}^H(t, x) &= \frac{\sqrt{\mu}}{r} \sin w_{H_0} t \sin \frac{w_{H_0} \|x\|}{c}, \\ J_{H_0}^E(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\mu} r} \cos w_{H_0} t \left(\cos \frac{w_{H_0} \|x\|}{c} - \frac{c}{w_{H_0} r} \sin \frac{w_{H_0} \|x\|}{c} \right) e_x, \\ J_{H_0}^H(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} r} \sin w_{H_0} t \left(\cos \frac{w_{H_0} \|x\|}{c} - \frac{c}{w_{H_0} r} \sin \frac{w_{H_0} \|x\|}{c} \right) e_x.\end{aligned}$$

Соответственно в исходном пространстве-времени бикватернион водорода имеет вид

$$H_0(t, x) = \frac{e^{-iw_{H_0}t}}{r} \left\{ \sin(w_{H_0} r/c) + \left(\cos(w_{H_0} r/c) - \frac{c \sin(w_{H_0} r/c)}{w_{H_0} r} \right) e_x \right\}.$$

Здесь $e_x = x/\|x\|$, частота колебаний атома водорода $w_{H_0} = c\omega_{H_0}$ (размерность рад/сек). Соответственно (17) при $r \rightarrow 0$:

$$|\rho_{H_0}(x, \tau)| \sim cw_{H_0}, \quad \|J_{H_0}(x, \tau)\| \sim \frac{2}{3}(cw_{H_0})^2 r, \quad W_{H_0}(x) \sim \frac{(cw_{H_0})^2}{2}.$$

Заметим, что плотность энергии содержит квадрат скорости света. А поскольку плотность масс-заряда определяется частотой колебаний, последняя формула коррелирует с известной формулой Эйнштейна для полной энергии тела с фиксированной массой.

6 БИКВАТЕРНИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АТОМОВ. ПРОСТАЯ ГАММА

Итак, в бикватернионном представлении атом водорода – это сферическая гармоническая стоячая волна с фиксированной частотой в поле ЭГМ-зарядов-токов.

Так как главной характеристикой атома водорода является частота колебаний, которая определяет его массу, на его основе можно построить периодическую систему для атомов веществ по принципу музыкальной гаммы. Ведь с ростом частоты колебаний масса атома увеличивается.

Музыкальная гамма представляет собой систему октав с удвоением частоты для каждой последующей октавы:

$$\omega_{H_0}, 2\omega_{H_0}, 4\omega_{H_0}, 8\omega_{H_0}, 16\omega_{H_0}, \dots$$

Отношение частот колебаний для атомов внутри n -ой октавы:

$$2^{n-1}\omega_{H_0}, \dots, 2^n\omega_{H_0}$$

подобно отношению частот тонов внутри музыкальной гаммы. Число нот в музыкальной гамме зависит от вида музыкального строя.

Существует много музыкальных строев, которые во многом связаны с национальными особенностями музыкального восприятия создавших их народов. Здесь в Таблице 1 приведены два музыкальных строя, которые можно взять за основу, в которых отношение частот тонов является числом рациональным [8]. Для таких тонов (нот) существует общий период колебаний, который определяется наименьшим общим кратным для периодов их колебаний, что позволяет гармонично звучать созвучиям из разных нот (аккордам).

Таблица 1 – Простая гамма

<i>Чистый строй. Гармонический звукоряд</i>							
Прима (до)	Большая секунда (ре)	Большая терция (ми)	Кварта (фа)	Квинта (соль)	Большая секста (ля)	Большая септима (си)	Октава До
ω	$9\omega/8$	$5\omega/4$	$4\omega/3$	$3\omega/2$	$5\omega/3$	$15\omega/8$	2ω
<i>Пентатоника</i>							
Прима	Секунда	Терция	-	Квинта	Секста	-	Октава
ω	$9\omega/8$	$5\omega/4$	-	$3\omega/2$	$5\omega/3$	-	2ω

Для каждой из них в природе существуют вещества, которые обладают вышеописанными свойствами. Какая из них соответствует периодической системе Менделеева? Это должно стать предметом специального исследования для специалистов по физической химии, спектральным свойствам веществ. Возможно среди указанных трех строев нет такового. Но похожий музыкальный строй должен быть, который будет содержать частоты указанных здесь строев. Число тонов внутри октавы может увеличиваться с ростом номера октавы, но все подобные тона предыдущей октавы

в ней должны присутствовать, что объясняет повторяемость химических свойств веществ в колонках периодической системы Менделеева подобно тому, как созвучны и гармоничны для восприятия звуки октав и аккорды, составленные из них.

Исходя из этого, атомы можно назвать *музыкальными элементарными частицами* с соответствующими названиями. Атом водорода – это "до" первой природной октавы. Соответственно бикватернион k -го атома в n -ой октаве имеет вид

$$Atom^{n,k}(t, x) = \frac{1}{r} e^{-i w_{n,k} t} \left\{ \sin\left(\frac{w_{nk}}{c} r\right) + \left(\cos\left(\frac{w_{nk}}{c} r\right) - \frac{c \sin(w_{nk} r / c)}{w_{nk} r} \right) e_x \right\}.$$

Здесь частота колебаний атома

$$w_{nk} = 2^n \gamma_k w_{H_0},$$

где γ_k – это k -ый коэффициент в таблице соответствующего музыкального строя. Для него верны все вышеприведенные формулы для сферического гармонического пульсара с указанием соответствующей ему частоты колебаний.

7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сколько существует таких природных октав? Очевидно, не меньше, чем число строк в периодической системе Менделеева.

Заметим, что ныне принятый в классической музыке двенадцатитемперированный музыкальный строй с 12-ю нотами внутри октавы брать нельзя, так как отношение частот последовательных тонов в нем является числом иррациональным $2^{1/12}$ и общего периода колебаний для любого набора тонов в октаве не существует. Полного гармонического звучания в этом строе добиться нельзя. Об этом хорошо знают оркестровые музыканты струнных и духовых инструментов, звучание которых определяется вышеописанными музыкальными строями. Как известно, при несообразных частотах колебаний возникают биения.

Подобные периодические системы можно строить для элементарных гармонических лептонов (спиноров и асимметричных пульсаров), добавление которых к атомам с той же частотой колебаний создает, по-видимому,

изотопы этих атомов. Причем добавление спиноров связано с намагничиванием вещества. Можно строить множество различных изотопов с той же асимптотической плотностью ЭГМ-заряда. Какие из них существуют в природе – это тоже вопрос специального экспериментального исследования.

Отметим также, что данное описание атомов основано на построении решений уравнений свободного поля зарядов-токов. При воздействии внешних полей заряды-токи трансформируются. Их трансформация описывается обобщенным уравнением Дирака (см. [5]). В частности, при воздействии стационарных ЭГМ-полей сдвигается спектр колебаний, что следует учитывать при экспериментальном обосновании рассмотренной здесь модели.

В настоящее время наиболее распространены и канонизированы представления легких и тяжелых элементарных частиц и атомов, построенные на основе решений уравнений квантовой теории поля. Библиография в этом направлении полувековая и весьма обширная. Здесь используем названия для тяжелых и легких частиц, принятые в этой теории. Однако, представленная бикватернионная модель совершенно иная, детерминистская, основана на определении реальных физических характеристик элементарных частиц и атомов, а не вероятностных.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Алексеева Л.А. Об одной модели электро-гравимагнитного поля. Уравнения взаимодействия полей и законы сохранения // Математический журнал. – 2004. – Т. 4, № 2. – С. 20-32.
- 2 Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия A -полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2004. – № 3. – С. 45-53.
- 3 Alexeyeva L.A. Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // Journal of Physical Mathematics. – 2009. – V.1, Issue 1. – Article ID S090604. – 15 p. <http://doi:10.4303/jpm/S090604>.
- 4 Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic field, charges and currents. Law of inertia // Journal of Modern Physics. – 2016. – V.7, No. 5. – P. 435-444. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.75045>.
- 5 Alexeyeva L.A. Biquaternionic Form of Laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents Interactions // Journal of Modern Physics. – 2016. – V. 7, No. 11. – P. 1351-1358. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.711121>.

6 Alexeyeva L.A. Relativistic formulae for the biquaternionic model of electro – gravimagnetic charges and currents // Journal of Modern Physics. – 2017. – V. 8, No. 7. – P. 1043-1052. <http://doi: 10.4236/jmp.2017.87066>.

7 Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis. Clifford Algebras and Their Applications. – 2012. – V. 7, No. 1. – P. 19-39.

8 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978. – 320 с.

9 Шилов Г.Е. Простая гамма. – Москва: Изд. МГУ, 1970. – 24 с.

Алексеева Л.А. АТОМДАРДЫҢ БИКВАТЕРНИОНДЫҚ КӨРІНІСІ. ҚАРАПАЙЫМ ГАММА.

Элементар бөлшектерді тұрақты электрогравимагниттік толқындар түрінде сипаттайтын бикватерниондардың дифференциалды алгебрасында электрогравимагнитті зарядтар мен токтардың еркін өрісі теңдеуінің дербес монохроматтық шешімдері тұрғызылды. Скалярлы потенциалдардан (пульсарлар) және векторлардан (спинорлар) туындайтын осы битолқынды теңдеулердің шешімдерінің екі класы зерттелді. Олардың асимптотикалық қасиеттері қарастырылды және солардың негізінде олар ауыр (бозондар) және жеңіл (лептондар) элементар бөлшектер болып жіктелген. Сутегі атомының бикватерниондық көрінісі және оған сәйкес қарапайым гармоникалық гамманың музыкалық қатары қағидаты бойынша тұрғызылған периодты жүйесі берілген.

Кілттік сөздер. Бикватернион, элементар бөлшек, жиілік, тұрақты ЭГМ-толқын, пульсар, спинор, бозон, лептон, атом, сутек, периодтық жүйе, музыкалық гамма.

Alexeyeva L.A. BIQUATERNIONIC REPRESENTATION OF ATOMS.
SIMPLE GAMMA

Particular monochromatic solutions of the free field of electrogravimagnetic charges and currents in differential biquaternion algebra have been constructed which describe elementary particles as standing electrogravimagnetic waves. Two classes of solutions of this biwave equation generated by scalar potentials (pulsars) and vector ones (spinors) are studied. Their asymptotic properties have been researched. On the basis of these properties, solutions are classified on the heavy and the light elementary particles (bosons and leptons). Biquaternionic representation of hydrogen atom and the corresponding periodic system which is built on the principle of the musical system of a simple harmonic scale, are given.

Keywords. Biquaternion, elementary particle, frequency, standing EGM wave, pulsar, spinor, boson, lepton, atom, hydrogen, periodic system, musical scale.

Алексеева Л.А.

Институт математики и математического моделирования

050100, Алматы, ул. Пушкина, 125

E-mail: alexeeva47@mail.ru, alexeeva@math.kz

Статья поступила в редакцию 23.01.2018

МРНТИ 27.31.17:27.33.19

**О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

А.Т. Асанова, А.Е. Иманчиев, Ж.М. Кадирбаева

Аннотация. Рассматривается многоточечная задача для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Исследуется вопрос существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и предлагаются методы построения ее приближенного решения. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка в терминах исходных данных.

Ключевые слова. Нагруженное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, многоточечная задача, нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимость, алгоритм.

1 ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается многоточечная задача для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка следующего вида:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^2 B_i(t, x) \frac{\partial^2 u(\theta_i, x)}{\partial x^2} + C(t, x)u + f(t, x), \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^m M_j(x) \frac{\partial^2 u(t_j, x)}{\partial x^2} + \sum_{j=0}^m K_j(x)u(t_j, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B10, 35G16, 35Q92.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант №АР05131220.

© А.Т. Асанова, А.Е. Иманчиев, Ж.М. Кадирбаева, 2018.

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где $u(t, x)$ – неизвестная функция, функции $A(t, x)$, $B_i(t, x)$, $i = \overline{1, 2}$, $C(t, x)$ и $f(t, x)$ непрерывны на Ω , $0 < \theta_1 < \theta_2 < T$, функции $M_j(x)$, $K_j(x)$, $j = \overline{0, m}$, и $\varphi(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$, функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$.

Функция $u(t, x) \in C(\Omega, R)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R)$, $\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R)$, называется *классическим решением* задачи (1)–(4), если она удовлетворяет нагруженному уравнению (1) для всех $(t, x) \in \Omega$, многоточечному условию (2) для всех $x \in [0, \omega]$ и краевым условиям (3), (4) для всех $t \in [0, T]$.

Математическое моделирование различных процессов экологии, физики, химии, биологии и др. приводит к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [1]–[5]. Особый класс дифференциальных уравнений составляют нагруженные дифференциальные уравнения в частных производных [2], [3], [6]–[9]. В зависимости от применяемого метода условия разрешимости локальных и нелокальных задач для нагруженных дифференциальных уравнений получены в различных терминах.

В настоящей работе исследуются вопросы существования классического решения многоточечной задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1)–(4) и предлагаются методы построения ее приближенного решения. Установлены достаточные условия существования и единственности классического решения многоточечной задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка в терминах исходных данных. С помощью дополнительных новых функций [10], [11] рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства многоточечных задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с функциональным параметром и интегрального соотношения. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения

исследуемой задачи и доказана его сходимость. При установлении условий разрешимости семейства многоточечных задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка использованы результаты работ [8], [11].

2 СХЕМА МЕТОДА И СВЕДЕНИЕ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ

Введем новую неизвестную функцию $v(t, x) = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$, $(t, x) \in \Omega$.

Тогда задача (1)–(4) перейдет к эквивалентной задаче следующего вида:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + \sum_{i=1}^2 B_i(t, x)v(\theta_i, x) + C(t, x)u + f(t, x), \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^m M_j(x)v(t_j, x) + \sum_{j=0}^m K_j(x)u(t_j, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (6)$$

$$u(t, x) = \psi_1(t) + x\psi_2(t) + \int_0^x \int_0^\xi v(t, \xi_1) d\xi_1 d\xi. \quad (7)$$

Условия (3) и (4) учтены в интегральном соотношении (7).

Решением задачи (5)–(7) называется пара функций $(v(t, x), u(t, x))$, где функция $v(t, x) \in C(\Omega, R)$ имеет производную $\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R)$, удовлетворяющая нагруженному уравнению (5) для всех $(t, x) \in \Omega$, многоточечному условию (6) для всех $x \in [0, \omega]$, а функция $u(t, x)$ связана с функцией $v(t, x)$ интегральным соотношением (7).

Задачи (1)–(4) и (4)–(7) эквивалентны. Если функция $u(t, x)$ является классическим решением задачи (1)–(4), то пара функций $(v(t, x), u(t, x))$, где $v(t, x) = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$, будет решением задачи (5)–(7). И наоборот, если пара функций $(v(t, x), u(t, x))$ является решением задачи (5)–(7), то функция $u(t, x)$ будет классическим решением задачи (1)–(4).

При фиксированном $u(t, x)$ задача (5), (6) является семейством многоточечных задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Переменная x играет роль параметра семейства многоточечных задач (5), (6) и непрерывно изменяется на промежутке $[0, \omega]$. При фиксированных $x \in [0, \omega]$ имеем многоточечную задачу для

нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

3 АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (5)–(7)

Если известна функция $u(t, x)$, то из семейства многоточечных задач для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (5), (6) находим функцию $v(t, x)$. Если известна функция $v(t, x)$, то из интегрального соотношения (7) определяем функцию $u(t, x)$. Так как неизвестными являются как функция $u(t, x)$, так и функция $v(t, x)$, применяется итерационный метод и решение задачи (5)–(7) – пара функций $(v^*(t, x), u^*(t, x))$ – определяется как предел последовательности пар функций $(v^{(k)}(t, x), u^{(k)}(t, x))$ по следующему алгоритму.

1-шаг. Используем значение функции $u(t, x)$ при $x = 0$. Полагая $u^{(0)}(t, x) = \psi_1(t)$ в правой части нагруженного уравнения (5), в многоточечном условии (6) и решая семейство многоточечных задач (5), (6), находим первое приближение $v^{(1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (7) при $v(t, x) = v^{(1)}(t, x)$ определяем $u^{(1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

2-шаг. Полагая $u(t, x) = u^{(1)}(t, x)$ в правой части нагруженного уравнения (5), в многоточечном условии (6) и решая семейство многоточечных задач (5), (6), находим второе приближение $v^{(2)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (7) при $v(t, x) = v^{(2)}(t, x)$ определяем $u^{(2)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

И так далее.

k-шаг. Полагая $u(t, x) = u^{(k-1)}(t, x)$ в правой части нагруженного уравнения (5), в многоточечном условии (6) и решая семейство многоточечных задач (5), (6), находим k -ое приближение $v^{(k)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$. Из интегрального соотношения (7) при $v(t, x) = v^{(k)}(t, x)$ определяем $u^{(k)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

$k = 1, 2, \dots$

Таким образом, итерационный процесс строится в следующем виде:

$$u^{(0)}(t, x) = \psi_1(t),$$

$$\frac{\partial v^{(k)}}{\partial t} = A(t, x)v^{(k)} + \sum_{i=1}^2 B_i(t, x)v^{(k)}(\theta_i, x) + C(t, x)u^{(k-1)} + f(t, x), \quad (8)$$

$$\sum_{j=0}^m M_j(x)v^{(k)}(t_j, x) = \varphi(x) - \sum_{j=0}^m K_j(x)u^{(k-1)}(t_j, x), \quad x \in [0, \omega], \quad (9)$$

$$u^{(k)}(t, x) = \psi_1(t) + x\psi_2(t) + \int_0^x \int_0^\xi v^{(k)}(t, \xi_1)d\xi_1d\xi. \quad (10)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

4 УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ (5)–(7)

Рассмотрим семейство многоточечных задач для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + \sum_{i=1}^2 B_i(t, x)v(\theta_i, x) + F(t, x), \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^m M_j(x)v(t_j, x) = \Phi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (12)$$

где функции $F(t, x) \in C(\Omega, R)$, $\Phi(x) \in C([0, \omega], R)$.

Функция $v(t, x) \in C(\Omega, R)$, имеющая частную производную $\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R)$, называется решением задачи (11), (12), если она удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению (11) для всех $(t, x) \in \Omega$, многоточечному условию (12) для всех $x \in [0, \omega]$.

Введем обозначения:

$$a(t, x) = \int_0^t A(\tau, x)d\tau,$$

$$b_1(t, x) = e^{a(t, x)} \int_0^t e^{-a(\tau, x)} B_1(\tau, x)d\tau,$$

$$b_2(t, x) = e^{a(t, x)} \int_0^t e^{-a(\tau, x)} B_2(\tau, x)d\tau.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

i) функции $A(t, x)$, $B_i(t, x)$, $i = \overline{1, 2}$, и $F(t, x)$ непрерывны на Ω ;

ii) функции $M_j(x)$, $j = \overline{0, m}$, и $\Phi(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$;

iii) функция

$$\Delta(x) = [1 - b_1(\theta_2, x)]b_2(\theta_1, x) - [1 - b_1(\theta_1, x)]b_2(\theta_2, x) \neq 0 \text{ для всех } x \in [0, \omega];$$

iv) функция

$$Q(x) = \sum_{j=0}^m M_j(x)e^{a(t_j, x)} + \sum_{j=1}^m M_j(x) \left\{ b_1(t_j, x) \frac{b_2(\theta_1, x)e^{a(\theta_2, x)} - b_2(\theta_2, x)e^{a(\theta_1, x)}}{\Delta(x)} + \right. \\ \left. + b_2(t_j, x) \frac{[1 - b_1(\theta_2, x)]e^{a(\theta_2, x)} - [1 - b_1(\theta_1, x)]e^{a(\theta_1, x)}}{\Delta(x)} \right\} \neq 0 \text{ для всех } x \in [0, \omega].$$

Тогда семейство многоточечных задач для нагруженного дифференциального уравнения (11), (12) имеет единственное решение.

Доказательство Теоремы аналогично схеме доказательства Теоремы 1 из [8] и [11].

Следующее утверждение дает условия сходимости построенного выше алгоритма, которые одновременно являются условиями существования единственного решения задачи (5)–(7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть

1) функции $A(t, x)$, $B_i(t, x)$, $i = \overline{1, 2}$, $C(t, x)$ и $f(t, x)$ непрерывны на Ω ;

2) функции $M_j(x)$, $K_j(x)$, $j = \overline{0, m}$, и $\varphi(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$;

3) функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$;

4) выполнены условия iii)–iv) Теоремы 1.

Тогда многоточечная задача для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных с функциональным параметром и интегральными условиями (5)–(7) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится на основе вышеприведенного алгоритма с учетом однозначной разрешимости семейства многоточечных задач для нагруженного дифференциального уравнения (11), (12).

5 ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ТЕОРЕМА 3. Пусть

(a) функции $A(t, x)$, $B_i(t, x)$, $i = \overline{1, 2}$, $C(t, x)$ и $f(t, x)$ непрерывны на Ω ;

(b) функции $M_j(x)$, $K_j(x)$, $j = \overline{0, m}$, и $\varphi(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$;

(c) функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$;

(d) справедливы неравенства iii)-iv) Теоремы 1.

Тогда многоточечная задача для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1)–(4) имеет единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 1-264.
- 2 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 1-301.
- 3 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – С. 1-287.
- 4 Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – V. 324, No. 8. – P. 1242-1261.
- 5 Assanova A.T., Imanchiev A.E. Solvability of multipoint-integral boundary value problem for a third-order differential equation and parametrization method // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. T.Sh. Kalmenov et al. (eds.). Cham: Springer International Publishing, 2017. – V. 216. – P. 113-122.
- 6 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Гылым, 2010. – С. 1-334.
- 7 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. – М.: Наука, 2012. – С. 1-232.
- 8 Assanova A.T., Imanchiev A.E. On the solvability of a nonlocal boundary value problem for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2016. – V. 81, No. 1. – P. 15-25 (in Russian).
- 9 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – V. 58, No. 4. – P. 508-516.
- 10 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – V. 402, No. 1. – P. 167-178.
- 11 Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2016. – V. 212, No. 3. – P. 213-233.

Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М. ҮШІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІГІ ТУРАЛЫ

Үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуы мәселесі зерттеледі және оның жуық шешімін тұрғызу әдістері ұсынылады. Үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін көпнүктелі есептің бірімәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған.

Кілттік сөздер. Үшінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу, көпнүктелі есеп, жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер, шешілімділік, алгоритм.

Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. ON THE SOLVABILITY OF MULTI-POINT PROBLEM FOR THE LOADED THIRD ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

A multi-point problem for the loaded the third-order partial differential equation is considered. The question of the existence unique classical solution of the considered problem is investigated and methods for the constructing its approximate solution are proposed. Sufficient conditions for the unique solvability of multi-point problem for the loaded third-order partial differential equation are established in the terms of the initial data.

Key words. Loaded third order partial differential equation, multi-point problem, loaded ordinary differential equations, solvability, algorithm.

Асанова А.Т.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Қазақстан, ул. Пушкина, 125

E-mail: anarasanova@list.ru; assanova@math.kz

Иманчиев А.Е.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Қазақстан, ул. Пушкина, 125

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,

030000, Актөбе, Қазақстан, пр. А.Молдагуловой, 34

E-mail: imanchiev_ae@mail.ru

Кадирбаева Ж.М.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Қазақстан, ул. Пушкина, 125

Казахский государственный женский педагогический университет

050012, Алматы, Қазақстан, ул. Айтеке би, 99

E-mail: apelman86pm@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.03.2018

МРНТИ 27.03.66

DP-RANK IN DIFFERENT CLASSES OF THEORIES

B.S. BAIZHANOV, S. BAIZHANOV, A. MUKANKYZY

Annotation. In the first part of the paper there are two notions: theory with dp-rank ω and theory with dp-rank infinity. We give the example of ω -stable theory with dp-rank ω and prove that any theory with dp-rank infinity is non-superstable. In the second part, we consider the family of relations of equivalences. We introduce the notion of family of relations of equivalences of depth n and prove that any family of relations of equivalences of depth n has dp-rank more or equal to n . Moreover we give the definition and example of uniformly definable family of relations of equivalences of depth ω and prove that such family determines Independent Property.

Keywords. Trees of formulas, dp-rank, independent property, superstable theory, relation of equivalence.

INTRODUCTION

In this article we will give a notion of a family of relations of equivalence of depth n and consider theories of dp-rank ω and infinity. We will use the properties of superstability and independence introduced by S. Shelah [1] and dp-rank, from P. Simon's article [2].

DEFINITION 1 [1]. A formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ has the independence property if for every $n < \omega$ there are sequences $\bar{a}_l (l < n)$ such that for every $\omega \subseteq n$,

$$\models (\exists \bar{x}) [\bigwedge_{l < n} \varphi(\bar{x}, \bar{a}_l)_{l \in \omega}].$$

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64.

Funding: Committee of Science of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan AP05134992.

Funding: Committee of Science of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan AP05132546.

© B.S. Baizhanov, S. Baizhanov, A. Mukankyzy, 2018.

T has Independence property (IP property) if some formula $\varphi(x, \bar{y})$ has independence Property.

THEOREM 1 [1]. The following are equivalent.

- (1) T is superstable, i.e. stable in every large enough λ (in fact $\lambda \geq 2^{|T|}$).
- (2) T is stable in some λ for which $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$.
- (3) $R^1[x = x, L, (2^{|T|})^{++}] < |T|^+$.
- (4) For some $m < \omega$, $R^m(\bar{x} = \bar{x}, L, \infty) < \infty$.
- (5) T is stable and $D^1(x = x, L, |T|^{++}) < |T|^+$.
- (6) T is stable and for some $m < \omega$, $D^m(\bar{x} = \bar{x}, L, \infty) < \infty$.

From this theorem it follows that, if the countable theory T is superstable, then in T does not exist infinitely branching tree of formulas with one formula in each level.

DEFINITION 2 [2]. A theory T has $dp\text{-rank} \geq n$, if there are formulas $\varphi_1(x, \bar{y}), \varphi_2(x, \bar{y}), \dots, \varphi_n(x, \bar{y})$ and mutually indiscernible sequences $(\bar{a}_i^1)_{i < \omega}, (\bar{a}_i^2)_{i < \omega}, \dots, (\bar{a}_i^n)_{i < \omega}$, such that for any function $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \omega$ the type

$$\{\varphi_k(x, \bar{a}_{\sigma(k)}^k) : k \leq n\} \cup \{\neg\varphi_k(x, \bar{a}_i^k) : i \neq \sigma(k), k \leq n\}$$

is consistent.

DEFINITION 3. A theory T has $dp\text{-rank} \omega$, if for any $n < \omega$ T has $dp\text{-rank} \geq n$.

PROPOSITION 1. There exists an ω -stable theory with $dp\text{-rank} \omega$.

PROOF. Consider the structure $\mathfrak{M} = \langle M; =, P_1^1, P_2^1, \dots, P_n^1, \dots, E_{n,j} | n < \omega, 1 \leq j \leq n \rangle$. The universum $M = \bigcup_{n < \omega} \mathbb{Q}^n$. $P_n^1(M) = \mathbb{Q}^n$ for any $n \geq 1$.

Let $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Q}^n \subset M$ then for any $1 \leq j \leq n$

$$\mathfrak{M} \models E_{n,j}((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \Leftrightarrow \mathbb{Q} \models a_j = b_j.$$

Rank Morley at each $P_n^1(x)$ is equal to n . So, rank Morley at $x = x$ is equal to ω and consequently, theory is ω -stable. \square

DEFINITION 4. A theory T has $dp\text{-rank} \text{ infinity}$, if there is countable set of formulas $\varphi_1(x, \bar{y}), \varphi_2(x, \bar{y}), \dots$ and mutually indiscernible sequences $(\bar{a}_i^1)_{i < \omega}, (\bar{a}_i^2)_{i < \omega}, \dots$ such that for any function $\sigma : \omega \rightarrow \omega$ the type

$$\{\varphi_k(x, \bar{a}_{\sigma(k)}^k) : k \leq \omega\} \cup \{\neg\varphi_k(x, \bar{a}_i^k) : i \neq \sigma(k), k \leq \omega\}$$

is consistent.

THEOREM 2. *If theory T has dp-rank infinity, then T is non-superstable.*

PROOF. Let λ be infinite cardinal. Then there is cardinal $\mu > \lambda$, such that $\mu^\omega > \mu$. Show that T is not μ -stable.

Let $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ be a model of theory T . Consider a formula $x = x$, from the definition of dp-rank infinity, we can divide it into countable number of definable sets by $\{\varphi_1(x, \bar{a}_i) \wedge \neg \varphi_1(x, \bar{a}_{j \neq i})\}_{1 \leq j < \omega}\}_{1 \leq i < \omega}$, each of this definable sets can be divided into countable number of definable sets by $\{\varphi_2(x, \bar{a}_i) \wedge \neg \varphi_2(x, \bar{a}_{j \neq i})\}_{1 \leq j < \omega}\}_{1 \leq i < \omega}$ and so on. Where $\{\varphi_i(x, \bar{y}^i)\}$ are formulas from the definition of dp-rank.

Now consider an extension of theory T by new constants defined as follows: $C = \{\bar{c}_\delta^n \mid \text{length } \bar{c}_\delta^n = \text{length } \bar{y}^n, \delta < \mu\}$. It follows from the definition that $|\bigcup C| = \mu$. Consider the following set of sentences $\Gamma(C)$ in the language $\Sigma(C) = \Sigma \cup C$:

$$\Gamma(C) = \left\{ \exists x \left[\bigwedge_{1 \leq j \leq k} \varphi_{n_j}(x, \bar{c}_{\delta_j}^{n_j}) \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq k; 1 \leq l_j \leq m_j} \neg \varphi_{n_j}(x, \bar{c}_{\delta_j}^{n_j}(l_j)) \right], \right. \\ \left. m_j < \omega, k < \omega, n_1 < \dots < n_k < \omega, \delta_1, \dots, \delta_k < \mu \right\}.$$

To prove that $T \cup \Gamma(C)$ is consistent set of sentences we can take in quality of interpretation of \bar{c}_δ^n elements \bar{a}_j . Consider a model $\mathfrak{M}(C)$ of theory $T(C)$. $\mathfrak{M}(C) \models \Gamma(C)$, thus $\mathfrak{M}(C)$ has μ^ω types. If we consider reduction of model $\mathfrak{M}(C)$ to the signature Σ : $\mathfrak{M}(C) \upharpoonright \Sigma$ we get a model (M) of theory T , which has μ^ω types for sufficiently large μ . T is not μ -stable. For any λ there exists $\mu > \lambda$, such that T has μ^ω types over set of cardinality μ , thus T is non-superstable theory. \square

DEFINITION 5. *We say, that a model \mathfrak{M} has a family of definable relations of equivalences $F = \{E_i^2 \mid i \in I\}$ of depth $\geq n$, if the following holds:*

1. *There exists a definable set such that for any $i \in I$, $E_i^2(x, y)$ is definable relation of equivalence that determines a partition of the definable set into infinite number of classes of equivalence.*
2. *Any two classes of different equivalence relations have non-empty intersection.*
3. *Conjunction of any number of different relations of equivalences less than n does not generate trivial relation of equivalence.*

We say, that a model \mathfrak{M} has a family of relations of equivalences of depth n , if it has a family of relations of equivalences of depth $\geq n$ and does not have family of relations of equivalences of depth $\geq n + 1$.

We say that a model \mathfrak{M} has a family of relations of equivalences of depth ω if (3) holds for any n .

EXAMPLE 1. We give the example for the family of relations of equivalences of depth 1 of model $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}; =, +, \cdot, E_1^2, E_2^2, E_3^2, E_4^2 \rangle$, where $\mathbb{R} = \langle \mathbb{R}; =, + \rangle$,
 $\mathfrak{M} \models E_1((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow \mathbb{R} \models a = c$,
 $\mathfrak{M} \models E_2((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow \mathbb{R} \models b = d$,
 $\mathfrak{M} \models E_3((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow \mathbb{R} \models \exists z(a = b + z) \wedge (c = d + z)$,
 $\mathfrak{M} \models E_4((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow \mathbb{R} \models \exists z(a = -b + z) \wedge (c = -d + z)$
 and conjunction of any 2 relations of equivalences is trivial and each of them is non-trivial.

PROPOSITION 2. Model of theory with a family of relations of equivalences of depth $\geq n$ has dp-rank $\geq n$.

PROOF. Consider a model \mathfrak{M} with a family of relations of equivalences of depth $\geq n$. By Ramsey theorem we can build an indiscernible sequence $\{\bar{a}_i^1\}$ such that for some $E_{i_1}(x, y)$ all elements of this indiscernible sequence lie in the same class of equivalence. Now using Ramsey theorem again, we can find an indiscernible sequence over $\mathfrak{M} \cup \{\bar{a}_i^1\}$ such that for some $E_{i_2}(x, y)$, where $i_2 \neq i_1$, all elements of this indiscernible sequence lie in the same class of equivalence. Continue this way we can build $\geq n$ mutually indiscernible sequences. From the definition of family of relations of equivalences follows that type in definition of dp-rank is consistent. Thus model \mathfrak{M} has dp-rank $\geq n$. \square

DEFINITION 6. We say that family of equivalence relations F of depth ω is uniformly if there is a formula $E(x, y, \bar{z})$ such that for any $i \in I$ there is $\bar{\alpha}_i$ and $E_i(x, y) = E(x, y, \bar{\alpha}_i)$.

COROLLARY 1. Model of theory with a family of relations of equivalences of depth ω is non-super stable.

THEOREM 3. Any of theory with uniform family of equivalences of depth ω has IP property.

PROOF. Consider a theory T with a uniform family of equivalences of depth

ω . Fix some element a and consider $E(x, a, \alpha_1)$ it splits our universe into two sets $E(x, a, \alpha_1)$ and $\neg E(x, a, \alpha_1)$.

Now consider $E(x, a, \alpha_2)$ from the (2) of definition it is consistent with $E(x, a, \alpha_1)$. Consider $\neg E(x, a, \alpha_2)$ it is all classes by this equivalence relation except $E(x, a, \alpha_2)$. From (2) it follows that for any b_j conjunction of equivalence relations is non-empty $\models \exists x E(x, b_1, \alpha_2) \wedge E(x, a, \alpha_1)$, thus $E(x, a, \alpha_1)$ and $\neg E(x, a, \alpha_2)$ is consistent.

Now consider $\neg E(x, a, \alpha_1)$ it is all classes by this equivalence relation except $E(x, a, \alpha_1)$, from the (2) of definition it is consistent with $E(x, a, \alpha_2)$. Consider $\neg E(x, a, \alpha_2)$ it is all classes by this equivalence relation except $E(x, a, \alpha_2)$. From (2) $\models \exists x E(x, b_1, \alpha_2) \wedge E(x, b_2, \alpha_1)$, thus $\neg E(x, a, \alpha_1)$ and $\neg E(x, a, \alpha_2)$ is consistent.

By (3) $E(x, a, \alpha_1) \wedge E(x, a, \alpha_2)$ is non-trivial relation of equivalence. It can be splitted as earlier. Thus we have infinite 2-branching tree with formula $E(x, a, y)$ and a constants $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ on each level. It means that T has IP property. \square

In the end of the paper we present natural example of theory T with at uniformly family of relations of equivalences of depth ω . E. Bouscaren [4] considered an expansion of a Model $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ by unary predicate P . $\mathfrak{M}^+ = \langle M; \Sigma^+ \rangle$, where $\Sigma^+ = \Sigma \cup \{P^1\}$. $P^1(\mathfrak{M}^+) = A \subset M$, such that A is not definable in \mathfrak{M} . She gave an example of expansion with three elements $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in M \setminus A$, such that $tp(\alpha_i|A) = tp(\alpha_j|A)$ and $tp^*(\alpha_i|A) \neq tp^*(\alpha_j|A)$, where $1 \leq i \neq j \leq 3$, where $1 \leq i \neq j \leq n$, where $tp^*(\alpha|A)$ is $tp(\alpha|A)$ in language Σ^+ .

Baizhanov-Baldwin-Shelah [5] constructed examples with finite number of elements $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M \setminus A$, such that $tp(\alpha_i|A) = tp(\alpha_j|A)$ and $tp^*(\alpha_i|A) \neq tp^*(\alpha_j|A)$.

The following example has infinite number of elements $\alpha_1, \dots, \alpha_n \dots \in M \setminus A$, such that $tp(\alpha_i|A) = tp(\alpha_j|A)$ and $tp^*(\alpha_i|A) \neq tp^*(\alpha_j|A)$, where $1 \leq i \neq j \leq \omega$.

EXAMPLE 2. Consider model $\mathfrak{M} = \langle N^\omega \cup N; =, S^1, E^3(x, y, z) \rangle$ where $E^3(x, y, z)$ is defined as follows: $\mathfrak{M} \models E^3(\bar{a}, \bar{b}, n) \Leftrightarrow N \models a_n = b_n$ and $S(\mathfrak{M}) = N^\omega$. From the definition it follows that $\{E^3(\bar{x}, \bar{y}, n)\}_{n \in \omega}$ is a uniformly family of equivalence relations of depth ω . And theory of this model has IP property.

Let $A = \{(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots), (2, 3, 4, \dots), (3, 4, 5, \dots), \dots, (n, n + 1, n + 2, \dots), \dots\} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \dots\}$. For any $n_1, n_2 \in N$ types $tp(n_1|A) = tp(n_2|A)$, i.e. $\mathfrak{M} \models^\neg E(\bar{a}_i, \bar{a}_j, n_1)$ and $\mathfrak{M} \models^\neg E(\bar{a}_i, \bar{a}_j, n_2)$ for all i, j . Now consider an expansion $P(\bar{x})$ such that $P(\mathfrak{M}) = A$. In this case $tp^*(n_1|A) \neq tp^*(n_2|A)$, because $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x}_1 \exists \bar{x}_2 \dots \exists \bar{x}_{n_1} (\neg E^3(\bar{x}_i, \bar{x}_j, t) \wedge \forall \bar{y} (E^3(\bar{x}_i, \bar{y}, t) \rightarrow \neg P(\bar{y}))) \wedge (\forall \bar{z} ((E^3(\bar{z}, \bar{y}, t) \rightarrow \neg P(\bar{y})) \rightarrow (\bigvee_i \bar{z} = \bar{x}_i)))$ denote this formula $\varphi_{n_1}(t)$ then $\varphi_{n_1}(t) \in tp^*(n_1|A)$ and $\varphi_{n_1}(t) \notin tp^*(n_2|A)$.

We can see that: $tp(\alpha|A) = tp(\beta|A)$ and $tp^*(\alpha|A) \neq tp^*(\beta|A)$.

There is still an open question: is there exists a model of stable theory with infinite number of elements $\alpha_1, \dots, \alpha_n \dots \in M \setminus A$, such that $tp(\alpha_i|A) = tp(\alpha_j|A)$ and $tp^*(\alpha_i|A) \neq tp^*(\alpha_j|A)$, where $1 \leq i \neq j \leq \omega$?

REFERENCES

- 1 Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphis models // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. – 1978. – V. 92. – 544 p.
- 2 Simon P. Dp-minimality: invariant types and dp-rank // Journal of Symbolic Logic. – 2014. – V. 79(4). – P. 1025-1045.
- 3 Tent K., Ziegler M. A course in Model Theory // Lecture notes in Logic. – 2012. – P. 67-70.
- 4 Bouscaren E. Dimensional order property and pairs of models // Annals of Pure and Applied Logic. – 1989. – V. 41. – P. 205-231.
- 5 Baizhanov B., Baldwin D., Shelah S. Subsets of Superstable Structures are weakly benign // The Journal of Symbolic Logic. – 2005. – V. 70, No. 1. – P. 142-150.

Байжанов Б.С., Байжанов С., Мұқанқызы А. ТЕОРИЯНЫҢ ӘРТҮРЛІ КЛАСТАРЫНДАҒЫ DP-РАНГ

Мақаланың бірінші бөлігінде екі ұғым бар: dp-рангы ω болатын теория және dp-рангы шексіз болатын теория. dp-рангы ω – тұрақты теорияның мысалын келтіреміз және dp-рангы шекіз болатын кез келген теорияның супертұрақты емес екендігін дәлелдейміз. Екінші бөлігінде пара-парлық қатынастарының әулетін қарастырамыз. Тереңдігі n болатын пара-парлық қатынастарының әулеті ұғымын енгіземіз және тереңдігі n болатын пара-парлық қатынастарының кез келген әулетінің dp-рангы n -нен үлкен немесе n -ге тең болатынын дәлелдейміз. Оған қоса, тереңдігі ω болатын пара-парлық қатынастары бірқалыпты анықталатын әулеттің анықтамасын бе-

реміз және осындай әулет тәуелсіздік қасиетін анықтайтынын дәлелдейміз.

Кілттік сөздер. Формулалар ағаштары, др-ранг, тәуелсіздік қасиеті, супертурақты теория, пара-парлық қатынасы.

Байжанов Б.С., Байжанов С., Муканкызы А. DR-РАНГ В РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ ТЕОРИИ

В первой части статьи приведены два понятия: теория с др-рангом ω и теория с др-рангом бесконечность. Дан пример ω – стабильной теории с др-рангом ω и доказано, что любая теория с др-рангом бесконечность не суперстабильна. Во второй части мы рассматриваем семейство отношений эквивалентности. Введено понятие семейства отношений эквивалентности глубины n и доказано, что любое семейство отношений эквивалентности глубины n имеет др-ранг, больший или равный n . Кроме того, мы даем определение равномерно определяемого семейства отношений эквивалентности глубины ω и доказываем, что такое семейство определяет свойство независимости.

Ключевые слова. Деревья формул, др ранг, свойство независимости, суперстабильные теории, отношение эквивалентности.

Baizhanov B.S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.

E-mail: baizhanov@math.kz

Baizhanov S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.

International IT University

050040, Almaty, Kazakhstan, Manas Str. 34/1

Al-Farabi Kazakh National University

050040, Almaty, 71 al-Farabi Ave.

E-mail: sayan-5225@mail.ru

Mukankyzy A.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.

Al-Farabi Kazakh National University

050040, Almaty, 71 al-Farabi Ave.

E-mail: amukankyzy@gmail.com

Received 26.03.2018

МРНТИ 27.31.19

**MAXIMUM PRINCIPLE AND ITS APPLICATION FOR THE
SUB-DIFFUSION EQUATIONS WITH CAPUTO-FABRIZIO
FRACTIONAL DERIVATIVE**

M. BORIKHANOV, B.T. TOREBEK

Annotation. A weak maximum principle is established for a sub-diffusion equation involving the Caputo-Fabrizio fractional derivative. As applications, it is used to prove the uniqueness and the continuous dependence of a solution on the initial data.

Keywords. Sub-diffusion equation, maximum principle, Caputo-Fabrizio derivative, fractional differential equation.

1 INTRODUCTION AND STATEMENT OF PROBLEM

Let a , α and T be positive real numbers with $0 < \alpha \leq 1$. Let us consider the following fractional diffusion equation:

$$u_t(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} u(x, t) + F(x, t), \quad (x, t) \in (0, a) \times (0, T], \quad (1)$$

subject to the initial and boundary conditions

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, a], \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

and $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, where the functions $F(x, t)$, $\varphi(x)$ are continuous and D_t^α is a Caputo-Fabrizio fractional derivative (see Section 2).

If $\alpha = 1$, we have $D_t^0 u = u$, then equation (1) coincides with the classical heat equation

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \tilde{F}(x, t), \quad (x, t) \in (0, a) \times (0, T].$$

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33.

Funding: The paper is financially supported by a grant No.AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

© M. Borikhanov, B.T. Torebek, 2018.

The heat equation also describes the diffusion process. So, the equation of the form (1) with fractional derivatives with respect to the time variable is called the sub-diffusion equation [1]. This equation describes the slow diffusion. When $\alpha = \frac{1}{2}$ the equation was interpreted by Nigmatullin [2] within a percolation (pectinate) model. The solution (in an unbounded domain in the space variable) was investigated by Mainardi [3] and others by means of integral transformations.

The problem (1)–(2) having a solution implies $u_t(x, t)$ exists. Thus for any $0 < \alpha < 1$. $D_t^{1-\alpha}u(x, t)$ exists for $t > 0$. Hence, a solution $u(x, t)$ of the problem (1) and (2) in the region $[0, a] \times [0, T]$ is a (classical) solution in $C([0, a] \times [0, T]) \cap C^{2,1}((0, a) \times (0, T))$.

Maximum principles were given in [4], [5], [6], [7], [8], [9] for the types of fractional diffusion equations different from (1). For the maximum principles given in [6] to hold, existence of a classical solution (with existence of a solutions u_t on the closed time interval $[0, T]$) is assumed. In [9], the assumption of a solution with existence of a continuous u_t in $(0, T]$ such that $u_t \in L^1[0, T]$ is made.

2 SOME DEFINITIONS AND PROPERTIES OF FRACTIONAL OPERATORS

In this section, we state compile some basic definitions and properties of the Caputo-Fabrizio fractional derivative.

DEFINITION 2.1 [10]. Let $0 < \alpha < 1$, and $f \in H^1(a, b)$. The Caputo-Fabrizio fractional derivative of order α is defined by

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right) f'(s) ds.$$

DEFINITION 2.2 [11]. Let $\alpha \geq 0$ and f be a real function defined on $[a, b]$. The Caputo-Fabrizio fractional integral of order α is defined by

$$I^\alpha f(t) = (1-\alpha) f(t) + \alpha \int_a^t f(s) ds, \quad s \geq a.$$

PROPERTY 2.1 [11]. Let $\alpha \in (0, 1)$, it holds

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = u(t) - u(a).$$

LEMMA 2.1. Let a function $f(t) \in H^1(0, T)$. Assume that $f'(t)$ exists and is continuous for $t \in [0; T]$.

a) If $f(t)$ attains its maximum value over $[0; T]$ at a point $t_0 \in [0, T]$, then for $0 < \alpha < 1$

$$D^\alpha f(t_0) \geq \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha} t_0} (f(t_0) - f(0)) \geq 0. \quad (3)$$

b) If $f(t)$ attains its minimum value over $[0; T]$ at a point $t_0 \in [0, T]$, then for $0 < \alpha < 1$

$$D^\alpha f(t_0) \leq \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha} t_0} (f(t_0) - f(0)) \leq 0. \quad (4)$$

PROOF. To prove Lemma 2.1, a) we define the auxiliary function

$$g(t) = f(t_0) - f(t), \quad t \in [0, T].$$

Then it follows that $g(t) \geq 0$, on $[0, T]$, $g(t_0) = g'(t_0) = 0$ and $D^\alpha g(t) = -D^\alpha f(t)$. Since $g \in H^1(0, T)$, then g' is integrable and integrating by parts we have

$$\begin{aligned} D^\alpha g(t_0) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{t_0} g'(\tau) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)} g(\tau) \Big|_0^{t_0} \right) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_0^{t_0} g(\tau) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(g(t_0) - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha} t_0} g(0) \right) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_0^{t_0} g(\tau) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_0-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Since $g(t) \geq 0$ on $[0, T]$, the integral in the last equation is nonnegative, and thus

$$\begin{aligned} D^\alpha g(t_0) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \left(g(t_0) - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0} g(0) \right) = -\frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0} g(0) \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0} (f(t_0) - f(0)). \end{aligned}$$

The last inequality yields

$$-D_0^\alpha f[t_0] \leq -\frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t_0} (f(t_0) - f(0)),$$

which proves the result.

By applying a similar argument to $-f(t)$, we obtain Lemma 2.1 b).

3 MAIN RESULTS

THEOREM 3.1. *If $u(x, t)$ satisfies (1), $u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0$, $u(0, t) = 0 = u(a, t)$, and $F(x, t) \geq 0$ for $(x, t) \in (0, a) \times (0, T]$, then $u(x, t) \geq 0$ for $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$.*

PROOF. For any $\varepsilon > 0$, let

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon t.$$

Then $v_t = u_t + \varepsilon$, $v(0, t) = v(a, t) = \varepsilon t > 0$ for $t > 0$ and $v(x, 0) = \varphi(x)$ for $x \in [0, a]$. Since

$$D_t^{1-\alpha} \varepsilon t = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-s)} \varepsilon ds = \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \left[1 - e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t} \right],$$

$$\begin{aligned} D_t^{1-\alpha} v(x, t) &= D_t^{1-\alpha} u(x, t) + D_t^{1-\alpha} \varepsilon t = \\ &= D_t^{1-\alpha} u(x, t) + \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \left[1 - e^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}t} \right], \end{aligned}$$

we get

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} u(x, t).$$

Hence, $v(x, t)$ satisfies the problem

$$\begin{cases} v_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} v(x, t) + F(x, t) + \varepsilon, \\ v(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, x \in [0, a], \\ v(0, t) = v(a, t) = \varepsilon t \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Suppose that there exists some $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$ such that $v(x, t) < 0$. Since

$$v(x, t) \geq 0, (x, t) \in \{0, a\} \times [0, T] \cup [0, a] \times \{0\},$$

there is $(x_0, t_0) \in (0, a) \times (0, T]$ such that $v(x_0, t_0)$ is the negative minimum of v over $[0, a] \times [0, T]$. It follows from Lemma 2.1 b) that

$$\begin{aligned} D_t^{1-\alpha} v(x_0, t_0) &\leq \frac{e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha} t_0}}{\alpha} (v(x_0, t_0) - v(x_0, 0)) = \\ &= \frac{e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha} t_0}}{\alpha} (v(x_0, t_0) - \varphi(x_0)) \leq \frac{e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha} t_0}}{\alpha} v(x_0, t_0) < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Let $w(x, t) = D_t^{1-\alpha} v(x, t)$. Since $v(x, t)$ is bounded in $[0, a] \times [0, T]$, we have

$$D_t^{1-\alpha} v(x, t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t v'(x, \tau) e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-\tau)} d\tau \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0. \quad (6)$$

From Property 2.1 we have that

$$\frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} D_t^{1-\alpha} v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t).$$

It follows from Definition 2.2

$$I_t^{1-\alpha} w(x, t) = \alpha \cdot w(x, t) + (1 - \alpha) \int_a^t w(x, s) ds.$$

Then, we get for any $t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} w(x, t) = \alpha \cdot w_t(x, t) + (1 - \alpha) w(x, t).$$

It follows from a direct computation that

$$D_t^{1-\alpha}u(x, t) = \frac{1}{1-\alpha} \left[u(x, t) - e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t} \varphi(x) \right] - \frac{1}{(1-\alpha)^2} \int_0^t e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (7)$$

As $t \rightarrow 0^+$, therefore, $D_t^{1-\alpha}u(x, t) \rightarrow 0$. Hence, we obtain

$$w(x, t) = D_t^{1-\alpha}v(x, t) = D_t^{1-\alpha}u(x, t) + \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \left[1 - e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t} \right] = 0 \text{ as } t \rightarrow 0^+.$$

Furthermore, it follows from the boundary condition of $v(x, t)$ that

$$D_t^{1-\alpha}v(0, t) = D_t^{1-\alpha}v(a, t) = \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \left[1 - e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}t} \right] \geq 0 \text{ for } t \geq 0.$$

Therefore, $w(x, t)$ satisfies the problem

$$\begin{cases} \alpha w_t(x, t) + (1-\alpha)w(x, t) = w_{xx}(x, t) + F(x, t), \\ w(0, t) = w(a, t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in [0, a]. \end{cases}$$

By using the maximum principle for the parabolic equation from [12] we have $w(x, t) \geq 0$ in $[0, a] \times [0, T]$. This contradiction shows that $v(x, t) \geq 0$ on $[0, a] \times [0, T]$, and this implies that $u(x, t) \geq -\varepsilon t$ on $[0, a] \times [0, T]$ for any $\varepsilon > 0$. Since ε is arbitrary, we have $u(x, t) \geq 0$ on $[0, a] \times [0, T]$.

THEOREM 3.2. *If $u(x, t)$ satisfies (1), $u(x, 0) = \varphi(x) \leq 0$, $u(0, t) = 0 = u(a, t)$ and $F(x, t) \leq 0$ for $(x, t) \in (0, a) \times (0, T]$, then $u(x, t) \leq 0$ for $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$.*

THEOREM 3.3. *Suppose $u(x, t)$ satisfies (1), $u(x, 0) = \varphi(x)$ on $[0, a]$, $u(0, t) = \xi_1$, and $u(a, t) = \xi_2$, where ξ_1 and ξ_2 are given real numbers. If $F(x, t) \geq 0$ for $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$, then*

$$u(x, t) \geq \min_{x \in [0, a]} \{ \xi_1, \xi_2, \varphi(x) \} \text{ for } (x, t) \in [0, a] \times [0, T].$$

PROOF. Let $m = \min_{[0,a]} \{\xi_1, \xi_2, \varphi(x)\}$ and $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - m$. Then,

$$\tilde{u}(0, t) = \xi_1 - m \geq 0, \quad \tilde{u}(a, t) = \xi_2 - m \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

and

$$\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x) - m \geq 0, \quad x \in [0, a].$$

Since

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} = \frac{\partial}{\partial t} u, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} \tilde{u}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} u(x, t),$$

it follows that $\tilde{u}(x, t)$ satisfies (1). Thus, it follows from an argument similar to the proof of Theorem 3.1 that $\tilde{u}(x, t) \geq 0$ on $[0, a] \times [0, T]$. That is,

$$u(x, t) \geq \min_{[0,a]} \{\xi_1, \xi_2, \varphi(x)\} \quad \text{for } (x, t) \in [0, a] \times [0, T].$$

By using $\tilde{u}(x, t) = -u(x, t)$, a proof similar to that Theorem 3.3 gives the following result.

THEOREM 3.4. *Suppose $u(x, t)$ satisfies (1), $u(x, 0) = \varphi(x)$ on $[0, a]$, $u(0, t) = \xi_1$, and $u(a, t) = \xi_2$, where ξ_1 and ξ_2 are given real numbers. If $F(x, t) \leq 0$ for $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$, then*

$$u(x, t) \leq \max_{[0,a]} \{\xi_1, \xi_2, \varphi(x)\}$$

for $(x, t) \in [0, a] \times [0, T]$.

Theorems 3.3 and 3.4 are similar to the weak maximum principle for the heat equation. Similar to the classical case, the fractional version of the weak maximum principle can be used to prove the uniqueness of a solution.

THEOREM 3.5. *The problem (1)–(2) has at most one solution.*

PROOF. Let $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ be two solutions of the problem (1)–(2). Then,

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1(x, t) - u_2(x, t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} (u_1(x, t) - u_2(x, t))$$

with zero initial condition and zero boundary conditions for $u_1(x, t) - u_2(x, t)$. It follows from Theorems 3.3 and 3.4 that

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0, \quad (x, t) \in [0, a] \times [0, T].$$

We have a contradiction. The result then follows.

Theorems 3.3 and 3.4 can be used to show that a solution $u(x, t)$ of the problem (1)–(2) depends continuously on the initial data $\varphi(x)$.

THEOREM 3.6. *Suppose $u(x, t)$ and $\tilde{u}(x, t)$ are the solutions of the problem (1)–(2) corresponding to the initial data $\varphi(x)$ and $\tilde{\varphi}(x)$ respectively. If*

$$\max_{[0, a]} \{|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|\} \leq \delta,$$

then

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \delta.$$

PROOF. The function $v(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$ satisfies the problem

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^{1-\alpha} v(x, t)$$

with initial condition $v(x, 0) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$ and boundary conditions. It follows from Theorems 3.3 and 3.4 that

$$|v(x, t)| \leq \max_{[0, a]} \{|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|\}.$$

The result then follows.

REFERENCES

- 1 Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. V. 1, Background and Theory; V. 2, Application. – Springer, 2013. – 385 p.
- 2 Nigmatullin R.R. The realization of the generalized equation in a medium with fractal geometry // *Phys. Stat. Sol.* –1986. – V. 133. – P. 299-318.
- 3 Mainardi F. In: *Waves and Stability in Continuous Media*. Ed. by Rionero S., Ruggeri T. – Singapore: World Scientific, 2000. – P. 296-301.
- 4 Luchko Y. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // *J. Math. An. And Appl.* – 2009. – V. 351, No. 1. – P. 218-223.
- 5 Luchko Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations // *Fract. Calc. Appl. Anal.* – 2014. – V. 14, No. 1. – P. 110-124.
- 6 Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications // *Fract. Calc. Appl. Anal.* – 2014. – V. 17, No. 2. – P. 483-498.
- 7 Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivatives // *Appl. Math. Comput.* – 2015. – V. 257. – P. 40-51.
- 8 Alsaedi A., Ahmad B., Kirane M. Maximum principle for certain generalized time and space fractional diffusion equations // *Quart. Appl. Math.* – 2015. – V. 73, No. 1. – P. 163-175.
- 9 Chan C.Y., Liu H.T. A maximum principle for diffusion equations // *Quarterly of App. Math.* – 2016. – V. 74, No. 3. – P. 421-427.
- 10 Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional without singular kernel // *Progr. Fract. Differ. Appl.* – 2015. – V. 1, No. 2. – P. 73-85.
- 11 Losada J., Nieto J.J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel // *Progr. Fract. Differ. Appl.* – 2015. – V. 1, No. 2. – P. 87-92.
- 12 Il'in A.M., Oleinik O.A., Kalashnikov A.S. Linear equations of the second order of parabolic type // *Russian Mathematical Surveys.* – 1962. – V. 17, No. 3. – P. 1-144.

Бөріханов М., Төребек Б.Т. МАКСИМУМ ҚАҒИДАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ КАПУТО-ФАБРИЦИО БӨЛШЕК РЕТТІ ТУЫНДЫСЫ БАР СУБДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІНЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Капуто-Фабрицио бөлшек ретті туындысын қамтыған субдиффузия теңдеуі үшін әлсіз максимум қағидасы тағайындалған. Максимум қағидасының қолданыстары ретінде ол шешімнің жалғыздығы және бастапқы берілімдерден үзіліссіз тәуелді болатындығын дәлелдеуге пайдаланылады.

Кілттік сөздер. Субдиффузия теңдеуі, максимум қағидасы, Капуто-Фабрицио туындысы, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу.

Бориханов М., Төребек Б.Т. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СУБДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО-ФАБРИЦИО

Установлен слабый принцип максимума для уравнения субдиффузии, включающего дробную производную Капуто-Фабрицио. В качестве приложений принцип максимума используется для доказательства единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Ключевые слова. Уравнение субдиффузии, принцип максимума, производная Капуто-Фабрицио, дифференциальное уравнение дробного порядка.

Borikhanov M.

Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: meeir0808@gmail.com

Torebek B.T.

Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: torebek@math.kz, btorebek@mail.kz

Received 09.11.2017

МРНТИ 27.31.17

**ON AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE
WAVE POTENTIAL IN A DOMAIN WITH A CURVILINEAR
BOUNDARY**

B.O. DERBISSALY, M.A. SADYBEKOV

Annotation. We study one-dimensional volume wave potential in a domain with curvilinear boundaries. As a kernel of the wave potential we have chosen the fundamental solution of the Cauchy problem. It is well-known that in this case the volume wave potential satisfies one-dimensional Cauchy initial conditions. We have constructed boundary conditions to which the wave potential satisfies at lateral boundaries of the domain. It is shown that the formulated initial-boundary value problem has the unique classical solution.

Keywords. Wave equation, initial-boundary value problem, equation hyperbolic type, boundary condition, wave potential

1 INTRODUCTION

Volume potentials for partial equations due to their theoretical and applied significance are one of important notions of the modern theory of differential equations. Key stages of this theory are the researches held by Newton for elliptic potentials, where a practical significance of the problem was also shown alongside with fundamental researches of a whole row of essential questions of this theory. Different applications of the volume potential in electrostatics, heat-conductivity, elasticity, diffusion and other fields of the science are well-known and were of interest to such scientists as Laplace, Gauss, Poisson, Green, Beltrami, Kirchhoff, lord Kelvin, Hobson, Lyapunov, Sobolev, Bitsadze and others, who made a great contribution to the development of this theory during several centuries.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20.

Funding: The authors were supported in parts by the MES RK grant AP05133271.

© B.O. Derbissaly, M.A. Sadybekov, 2018.

The volume elliptic potential is widely used in solving classical problems of Dirichlet, Neumann and other boundary value problems for domains of an arbitrary form. But, at the same time, boundary conditions and spectral problems of the volume potential have not been researched till recent time. That is, despite the deep research of the general theory of the volume potential, till the recent time the Newton volume potential

$$u_{NP}(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x-y)f(y)dy$$

has not been considered as an independent operator being a solution of some boundary value problem.

The works of T.Sh. Kal'menov, his disciples and followers [1]–[9] laid the foundations of the theory of boundary value problems for different kinds of the volume potentials. And in the world literature such scientists as Engquist B. and Majda A. [10], Givoli D. [11]–[13], Li J.R., Greengard L. [14], Hagstrom T. [15], Tsynkov S.V. [16], Saito N. [17], Wu X. and Zhang J. [18] also used analogous research results for solving various problems of the mathematical physics and numerical calculations.

New non-local boundary conditions which uniquely define the Newton volume potential, have the form

$$\frac{u(x)}{2} - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon(x-y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

In particular in the papers [1], [2], by using a new non-local boundary value problem, which is equivalent to the Newton potential, the authors founded explicitly all eigenvalues and eigenfunctions of the Newton potential in the 2-disk and the 3-ball.

The aim of this paper is to give an analogy of the boundary value problem for the wave potential. Unlike elliptic and parabolic cases, where the obtained boundary conditions for corresponding volume potentials are non-local, for the wave potential we get a local initial boundary value condition. Note that the case of the volume wave potential in the domain with rectilinear boundaries was considered in [6].

2 FORMULATION OF PROBLEM

We consider the following wave potential

$$u(x, t) = \iint_{\Omega} \varepsilon(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1)$$

where $\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|)$ is a fundamental solution of Cauchy problem for the wave equation:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a finite domain bounded at the sides by the curves $x = \alpha(t)$ and $x = \beta(t)$, and bounded above and below by the segments $t = 0, 0 < x < 1$ and $t = T, x_0 < x < x_1$. Here $T > 0, \alpha(0) = 0, \beta(0) = 1, \alpha(T) = x_0, \beta(T) = x_1, \alpha(t) < \beta(t)$. Additionally assume that

$$|\alpha'(t)| < 1, \quad |\beta'(t)| < 1. \quad (4)$$

It is known that for $T > 1/2$ the solution of the wave equation (2) in Ω is restored under the initial conditions (3) not uniquely. For the uniqueness it is necessary to use boundary conditions. We set a task to construct boundary conditions under which (together with the initial conditions (3)) the solution of Eq. (2) in Ω will be uniquely defined in the form (1). In the case when $\alpha(t) \equiv 0$ and $\beta(t) \equiv 1$, this problem was considered in [6].

3 CONSTRUCTION OF BOUNDARY CONDITIONS

By $\Omega_{x,t}$ we denote a part of Ω : $\Omega_{x,t} = \{(\xi, \tau) \in \Omega : |x - \xi| < t - \tau\}$. Then the volume potential (1) can be written in the form

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{x,t}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (5)$$

Evidently that for any $f(x, t) \in C^1(\overline{\Omega})$ the volume potential (5) gives a classical solution of the inhomogeneous wave equation (2) from the class $u(x, t) \in C^2(\overline{\Omega})$. Our task is to construct homogeneous boundary conditions to which the volume potential (5) satisfies for all $f(x, t)$.

We consider separately various cases of placing $\Omega_{x,t}$ inside Ω .

3.1 CASE I

Firstly we consider a case when $0 \leq x - t < x + t \leq 1$. In this case the domain $\Omega_{x,t}$ nowhere touches the side boundaries Ω (see Fig. 1).

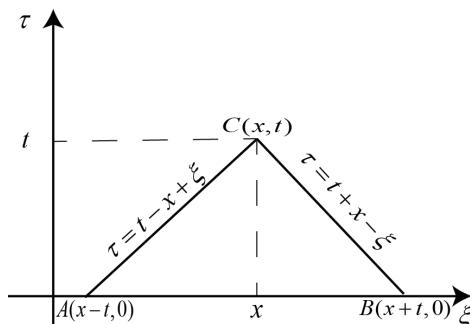


Figure 1 – the domain $\Omega_{x,t}$ in the case I

Therefore there is no need to construct the boundary conditions for the wave potential. By direct calculation it is easy to see that the volume potential (5) satisfies the homogeneous initial conditions (3).

3.2 CASE II

Now let $x = \alpha(t)$ and $t + \alpha(t) \leq 1$. By virtue of the condition (4) it is easy to see that $t + \alpha(t) > 0$ in Ω . In this case the domain $\Omega_{x,t}$ coincides with curvilinear triangle, in the foundation of which there lays a segment $0 < \xi < t + \alpha(t)$ of the axis $\tau = 0$. The left-hand side of the triangle is a curvilinear segment $\xi = \alpha(\tau)$ for $0 < \tau < t$. The right-hand side of the triangle is a segment of the straight line $\xi = t + \alpha(t) - \tau$ for $0 < \tau < t$ (see Fig. 2).

Hereinafter we will use the Green's theorem [19]: *Let C be a positively oriented, piecewise smooth, simple closed curve in a plane, and let D be a domain bounded by C . If L and M are functions of (ξ, τ) defined on an open*

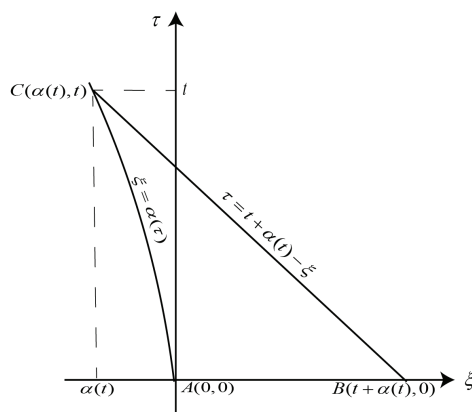


Figure 2 – the domain $\Omega_{x,t}$ in the case II

domain containing D and have continuous partial derivatives there, then

$$\oint_C (L d\xi + M d\tau) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \tau} \right) d\xi d\tau,$$

where the left-hand side is a line integral and the right-hand side is a surface integral, and the path of integration along C is anticlockwise.

Applying Green's theorem, we get the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} u(\alpha(t), t) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{\alpha(t),t}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{\alpha(t),t}} \left(\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial \Omega_{\alpha(t),t}} \left(\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi + \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau \right). \end{aligned}$$

Calculating the obtained line integrals, taking into account the initial conditions (3), we have

$$u(\alpha(t), t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\xi + \frac{1}{2} u(\alpha(t), t).$$

Hence

$$u(\alpha(t), t) = \int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\tau. \quad (6)$$

Differentiating (6), we obtain

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(t), t) - \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha(t), t) \right] [1 - \alpha'(t)] = 0.$$

Therefore, taking into account the conditions (4), we will have the boundary condition on a part of the left boundary

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\alpha(t), t) = 0, \quad \text{at } t + \alpha(t) \leq 1. \quad (7)$$

3.3 CASE III

Consider a case when $x = \beta(t)$ and $\beta(t) - t \geq 0$. By virtue of the condition (4) it is easy to see that $\beta(t) - t < 1$ in Ω . In this case the domain $\Omega_{x,t}$ coincides with curvilinear triangle, in the foundation of which there lays a segment $\beta(t) - t < \xi < 1$ of the axis $\tau = 0$. The right-hand side of the triangle is a curvilinear segment $\xi = \beta(\tau)$ for $0 < \tau < t$. And the left-hand side of the triangle is a segment of the straight line $\xi = \tau - t + \beta(t)$ for $0 < \tau < t$ (see Fig. 3).

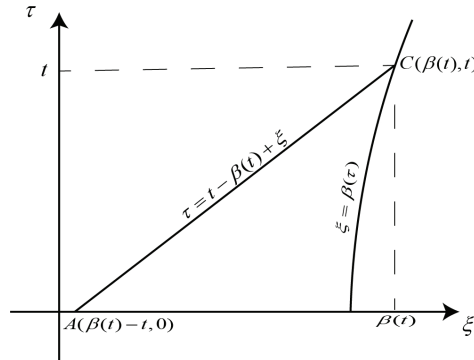


Figure 3 – the domain $\Omega_{x,t}$ in the case III

Analogously, as in Sec. 3.2, applying the Green's theorem, we obtain the boundary condition on a part of the right boundary

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta(t), t) = 0, \text{ at } \beta(t) - t \geq 0. \tag{8}$$

3.4 CASE IV

To consider this case is necessary if the domain Ω contains such points (x, t) , for which $t + \alpha(t) > 1$ or $\beta(t) - t < 0$. Consider the domain $\Omega_{x,t}$ being the curvilinear pentagon, in the foundation of which there lays a segment $0 < \xi < 1$ of the axis $\tau = 0$. The left-hand side of the pentagon is a curvilinear segment $\xi = \alpha(\tau)$, and the right-hand side is a curvilinear segment $\xi = \beta(\tau)$. The pentagon is bounded above by the segments of the straight line $\tau - \xi = t - x$ and $\tau + \xi = t + x$ (see Fig. 4).

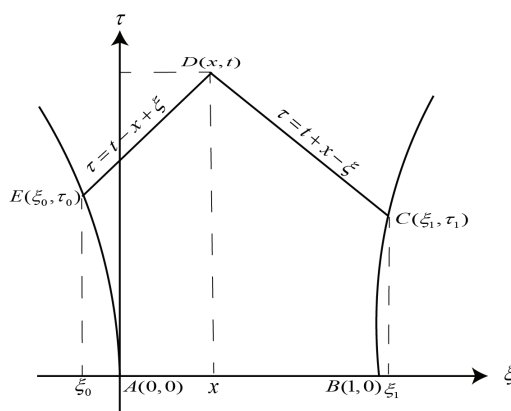


Figure 4 – the domain $\Omega_{x,t}$ in the case IV

We apply the Green's theorem for the volume wave potential

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{x,t}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{x,t}} \left(\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\tau.$$

Then we obtain the identity

$$\begin{aligned}
 u(\alpha(\tau_0), \tau_0) + u(\beta(\tau_1), \tau_1) - \int_0^{\tau_0} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\tau + \\
 + \int_0^{\tau_1} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\beta(\tau), \tau) \beta'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\beta(\tau), \tau) \right] d\tau = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

where $(\alpha(\tau_0), \tau_0)$ is a point of crossing of the boundary curve $\xi = \alpha(\tau)$ and of the characteristics $\xi = \tau - t + x$; $(\beta(\tau_1), \tau_1)$ is a point of crossing of the boundary curve $\xi = \beta(\tau)$ and of the characteristics $\xi = t + x - \tau$. The existence of such points is provided by the fulfillment of the condition (4).

In (9) equating firstly $x = \alpha(t)$, and then $x = \beta(t)$, we get two identities

$$\begin{aligned}
 u(\alpha(t), t) + u(\beta(\tau_1(t)), \tau_1(t)) - \int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\tau + \\
 + \int_0^{\tau_1(t)} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\beta(\tau), \tau) \beta'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\beta(\tau), \tau) \right] d\tau = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 u(\alpha(\tau_0(t)), \tau_0(t)) + u(\beta(t), t) - \int_0^{\tau_0(t)} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\tau + \\
 + \int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\beta(\tau), \tau) \beta'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\beta(\tau), \tau) \right] d\tau = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

where $(\alpha(\tau_0(t)), \tau_0(t))$ is a point of crossing of the boundary curve $\xi = \alpha(\tau)$ and of the characteristics $\xi = \tau - t + \beta(t)$; $(\beta(\tau_1(t)), \tau_1(t))$ is a point of crossing of the boundary curve $\xi = \beta(\tau)$ and of the characteristics $\xi = t + \alpha(t) - \tau$.

By direct calculation, taking into account the conditions (4), it is easy to see that

$$\tau_0'(t) = \frac{1 - \beta'(t)}{1 - \alpha'(\tau_0(t))} \quad \text{and} \quad \tau_1'(t) = \frac{1 + \alpha'(t)}{1 + \beta'(\tau_1(t))}. \tag{12}$$

After differentiating equations (10) and (11) with respect to the variable t , using (12) we obtain

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha(t), t) = \frac{1 + \alpha'(t)}{1 - \alpha'(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta(\tau_1(t)), \tau_1(t)), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta(t), t) = \frac{1 - \beta'(t)}{1 + \beta'(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha(\tau_0(t)), \tau_0(t)). \quad (14)$$

The identity (13) holds for $t + \alpha(t) > 1$, and the identity (14) holds for $\beta(t) - t < 0$.

Both obtained identities connect with each other traces of variables on the left-hand and right-hand boundaries of the domain. Herewith, since $t > \tau_1(t)$ and $t > \tau_0(t)$, then the points in which values are taken in the left-hand parts of this identities, are "above" than the points, in which values are taken in the right-hand parts of the identities. Therefore, taking into account the boundary conditions (7) and (8) calculated in Case II and Case III, from (13) and (14) we get the proof of the following lemma.

LEMMA 1. *The volume wave potential (1) satisfies the wave equation (2), the homogeneous initial conditions (3), the boundary condition on the left-hand boundary of the domain*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha(t), t) = 0, \quad \text{at } 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

and the boundary condition on the right-hand boundary of the domain

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\beta(t), t) = 0, \quad \text{at } 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

COROLLARY 1. *The volume wave potential (1) is the solution of the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16).*

4 UNIQUENESS OF SOLUTION OF PROBLEM (2), (3), (15), (16)

The constructed in Section 3 boundary conditions (15), (16) will uniquely define the volume wave potential (1), if the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16) has no other solutions except (1).

LEMMA 2. *The solution of the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16) is unique.*

PROOF. As usual, by $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ we denote two solutions of the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16). Then their difference $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ satisfies the homogeneous wave equation

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (17)$$

the homogeneous initial conditions (3) and the homogeneous boundary conditions (15), (16).

Generally speaking, the proof must be held separately for cases Case II–Case III, as in Section 3. Here we consider only Case III. The rest cases are considered analogously.

We apply the Green's theorem to the integral

$$0 = \iint_{\Omega_{x,t}} \left(\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\tau.$$

Then we obtain the identity

$$\begin{aligned} u(\alpha(\tau_0), \tau_0) + u(\beta(\tau_1), \tau_1) - \int_0^{\tau_0} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha(\tau), \tau) \alpha'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha(\tau), \tau) \right] d\tau + \\ + \int_0^{\tau_1} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(\beta(\tau), \tau) \beta'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial \xi}(\beta(\tau), \tau) \right] d\tau - 2u(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

where $(\alpha(\tau_0), \tau_0)$ and $(\beta(\tau_1), \tau_1)$ are defined in (9).

In (18) equating firstly $x = \alpha(t)$, and then $x = \beta(t)$, we get two identities. After differentiating these identities with respect to the variable t , we obtain

$$\begin{aligned} (u_x - u_t)(\alpha(t), t)(\alpha'(t) - 1) + (u_x + u_t)(\beta(\tau_1(t)), \tau_1(t))(\alpha'(t) + 1) = \\ = 2 \frac{d}{dt} u(\alpha(t), t), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (u_x + u_t)(\beta(t), t)(1 + \beta'(t) - (u_x - u_t)(\alpha(\tau_0(t)), \tau_0(t))(1 - \beta'(t) = \\ = 2 \frac{d}{dt} u(\beta(t), t). \end{aligned} \quad (20)$$

Taking into account the homogeneous boundary conditions (15), (16), from (19), (20) we obtain that $u(\alpha(t), t) = Const$ and $u(\beta(t), t) = Const$ for all values $0 \leq t \leq T$. Taking into account the homogeneous initial conditions (3), from here we find

$$u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0, \quad \text{at } 0 \leq t \leq T. \quad (21)$$

Thus, the function $u(x, t)$ satisfies the homogeneous wave equation (17), the homogeneous initial conditions (3) and the homogeneous boundary conditions (21), that is, it is the solution of the homogeneous first initial-boundary value problem. By virtue of the uniqueness of its solution we have $u(x, t) \equiv 0$ at $(x, t) \in \Omega$. Consequently, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. The Lemma is proved.

5 FORMULATION OF MAIN RESULT

DEFINITION 1. *By the classical solution of the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16) we will call a function $u(x, t)$ from the class $u(x, t) \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfying Eq. (2) and the conditions (3), (15), (16).*

Combining the results of Lemma 1 and Lemma 2, we get the main result of the paper.

THEOREM 1. *Let $f(x, t) \in C^1(\overline{\Omega})$. The volume wave potential (1) satisfies the wave equation (2), the homogeneous initial conditions (3), the boundary condition (15) on the left-hand boundary of the domain and the boundary condition (16) on the right-hand boundary of the domain.*

Inversely, for any $f(x, t) \in C^1(\overline{\Omega})$ the initial-boundary value problem (2), (3), (15), (16) has the unique classical solution $u(x, t) \in C^2(\overline{\Omega})$ and this solution is represented in the form of the wave potential (1).

COROLLARY 2. *The boundary conditions (15), (16) together with the initial conditions (3) uniquely define the volume wave potential (1), that is, they are the boundary conditions of the wave potential (1).*

REFERENCES

1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics. – 2009. – V. 80, No. 2. – P. 646-649.

2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. A boundary condition and Spectral Problems for the Newton Potentials // Operator Theory: Advances and Applications. – 2011. – V. 216. – P. 187-210.

- 3 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // *Differential Equations*. – 2012. – V. 48, No. 4. – P. 604-608.
- 4 Kal'menov T.Sh., Tokmagambetov N.E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain // *Siberian Mathematical Journal*. – 2013. – V. 54, No. 6. – P. 1023-1028.
- 5 Suragan D., Tokmagambetov N. On transparent boundary conditions for the high-order heat equation // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. – 2013. – V. 10. – P. 141-149.
- 6 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2014. – V. 2014. – P. 1-7.
- 7 Kal'menov T.Sh., Suragan D. On permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator // *Siberian Mathematical Journal*. – 2015. – V. 55, No. 6. – P. 1060-1064.
- 8 Ruzhansky M., Suragan D. On Kac's principle of not feeling the boundary for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group // *Proceedings of the American Mathematical Society*. – 2016. – V. 144. – P. 709-721.
- 9 Sadybekov M.A., Oralsyn G. Nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional diffusion equation // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2017. – V. 2017, No. 201. – P. 1-7.
- 10 Engquist B., Majda A. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1979. – V. 32. – P. 313-357.
- 11 Givoli D. Recent advances in the DtN finite element method for unbounded domains // *Arch. Comput. Methods Eng.* – 1999. – V. 6. – P. 71-116.
- 12 Givoli D. Numerical methods for problems in infinite domains. – Elsevier, 2013. – V. 33. – 299 p.
- 13 Givoli D. Non-reflecting boundary conditions: a review // *J. Comput. Phys.* – 1991. – V. 94. – P. 1-29.
- 14 Li J.R., Greengard L. On the numerical solution of the heat equation I: Fast solvers in free space // *J. Comput. Phys.* – 2007. – V. 226. – P. 1891-1901.
- 15 Hagstrom T. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Acta Numer.* – 1999. – V. 8. – P. 47-106.
- 16 Tsynkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains // *Appl. Numer. Math.* – 1998. – V. 27. – P. 465-532.
- 17 Saito N. Data analysis and representation on a general domain using eigenfunctions of Laplacian // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* – 2008. – V. 25. – P. 68-97.
- 18 Wu X. and Zhang J. High-order local absorbing boundary conditions for heat equation in unbounded domains // *Journal of Computational Mathematics*. – 2011. – V. 1(29). – P. 74-90.
- 19 Riley K.F., Hobson M.P. and Bence S.J. *Mathematical methods for physics and engineering*. – Cambridge University Press. – 2010. – 1333 p.

Дербисалы Б.О., Садыбеков М.А. ШЕКАРАСЫ ҚИСЫҚ СЫЗЫҚ БОЛАТЫН ОБЛЫСТА ТОЛҚЫНДЫҚ ПОТЕНЦИАЛ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕП

Бұл жұмыста біз бір өлшемді көлемдік толқындық потенциалды шекаралары қисық сызықтар болатын облыста қарастырдық. Толқындық потенциалдың өзегі ретінде Коши есебінің іргелі шешімі алынды. Бұл жағдайда көлемді толқындық потенциал біртекті бастапқы Коши шартын қанағаттандыратыны жақсы белгілі. Біз толқындық потенциалдың облыстың бүйір шекараларында қанағаттандыратын шеттік шарттарын тұрғыздық. Тұжырымдалған бастапқы-шеттік есептің жалғыз классикалық шешімі болатыны көрсетілді.

Кілттік сөздер. Толқындық теңдеу, бастапқы-шеттік есеп, гиперболалық тектес теңдеу, шекаралық шарт, толқындық потенциал.

Дербисалы Б.О., Садыбеков М.А. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе мы рассматриваем одномерный объемный волновой потенциал в области с криволинейными границами. В качестве ядра волнового потенциала выбрано фундаментальное решение задачи Коши. Хорошо известно, что в этом случае объемный волновой потенциал удовлетворяет однородным начальным условиям Коши. Мы построили краевые условия, которым удовлетворяет волновой потенциал на боковых границах области. Показано, что сформулированная начально-краевая задача имеет единственное классическое решение.

Ключевые слова. Волновое уравнение, начально-краевая задача, уравнение гиперболического типа, граничное условие, волновой потенциал.

Derbissaly B.O.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
Al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, Kazakhstan, 71 al-Farabi Ave.
E-mail: b.derbissaly@gmail.com

Sadybekov M.A.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.
E-mail: sadybekov@math.kz

Received 28.02.2018

МРНТИ 27.33.19

**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ФРЕДГОЛЬМА**

Д.С. ДЖУМАБАЕВ, Н.Д. СИСЕКЕНОВ

Аннотация. Двухточечная краевая задача для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма решается методом последовательных приближений.

Ключевые слова. Интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма, метод параметризации, метод Рунге-Кутты четвертого порядка, кубический сплайн.

1 ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма различными методами исследованы в работах многих авторов [1]–[8].

В настоящей статье рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x) + f_0(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$ и n -вектор $f_0(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $\varepsilon > 0$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$.

Через $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05.

Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № AP05132486.

© Д.С. Джумабаев, Н.Д. Сисекенов, 2018.

Решением задачи (1), (2) является непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ вектор-функция $x^*(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению (1) и краевому условию (2).

Возьмем $h > 0 : Nh = T, N \in \mathbb{N}$. Через Δ_N обозначим разбиение интервала $[0, T]$ на N подынтервалов:

$$[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh).$$

Решение краевой задачи (1), (2) найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение возьмем функции $x^{(0)}(t)$, решения задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Дальнейшее приближения определяются решением линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x^{(k-1)}(t)) + \\ + f_0(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

В [9] введено новое общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и установлены его свойства. Для регулярного разбиения интервала $[0, T]$ построено Δ_N -общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и предложены методы решения линейных краевых задач.

2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ Δ_N -ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ И КОНСТАНТА КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau + f_0(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

I. Возьмем разбиение Δ_N . Решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подынтервалах

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \varphi(t), \quad z[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (7)$$

получим $(n \times n)$ -матрицы $a_r(\varphi, t)$, $r = \overline{1, N}$, где $a_r(\varphi, t)$ – решение задачи Коши (7).

II. Умножаем каждую $(n \times n)$ -матрицу $a_r(\varphi, t)$ на $\psi(t)$ и интегрируем на подынтервалах

$$\hat{\psi}_r(\varphi) \hat{=} \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(t) a_r(\varphi, t) dt, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Суммируя (8) по r , составляем $(n \times n)$ -матрицу $G(\Delta_N)$, где

$$G(\Delta_N) = \sum_{r=1}^N \hat{\psi}_r(\varphi).$$

Проверяем обратимость $(n \times n)$ -матрицы $I - G(\Delta_N)$, где I – единичная матрица размерности n .

Если эта матрица обратима, то находим ее обратную и представляем в виде

$$[I - G(\Delta_N)]^{-1} = (M(\Delta_N)), \quad (9)$$

затем переходим к следующему шагу алгоритма.

Если $(n \times n)$ -матрица $I - G(\Delta_N)$ не имеет обратной, т.е. разбиение Δ_N не является регулярным, то мы берем новое разбиение интервала $[0, T]$ и начинаем алгоритм сначала. Простейшим способом выбора нового разбиения является выбор разбиения Δ_{2N} , где каждый интервал разбиения Δ_N делится на две части.

III. Снова решая задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + A(t), \quad z[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (10)$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z[(r-1)h] = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (11)$$

находим $a_r(A, t)$ и $a_r(f, t)$, $r = \overline{1, N}$.

IV. Вычисляем определенные интегралы на подынтервалах:

$$\hat{\psi}_r \hat{=} \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(t) dt, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$\hat{\psi}_r(A) \hat{=} \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(t) a_r(A, t) dt, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$\hat{\psi}_r(f) \hat{=} \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(t) a_r(f, t) dt, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \quad (14)$$

V. Используя равенства (12)–(14), составляем $(n \times n)$ -матрицы

$$V_r(\Delta_N) = \hat{\psi}_r(A) + \sum_{j=1}^N \hat{\psi}_j(\varphi) \hat{\psi}_r, \quad r = \overline{1, N}, \quad (15)$$

и n -вектор

$$g(f, \Delta_N) = \sum_{r=1}^N \hat{\psi}_r(f). \quad (16)$$

Δ_N -общее решение задачи (5)–(6) имеет вид

$$x(\Delta_N, t, \lambda) = \lambda_r + \sum_{j=1}^N D_{r,j}(\Delta_N, t) \lambda_j + F_r(\Delta_N, t),$$

$$t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N-1}, \quad (17)$$

$$x(\Delta_N, T, \lambda) = \lambda_N + \sum_{j=1}^N D_{N,j}(\Delta_N, T) \lambda_j + F_N(\Delta_N, T), \quad (18)$$

где коэффициенты и правые части Δ_N -общего решения определяются следующими формулами:

$$D_{r,j}(\Delta_N, t) = a_r(\varphi, t) \left[M(\Delta_N) V_j(\Delta_N) + \hat{\psi}_j \right],$$

$$t \in [(r-1)h, rh), r \neq j, r, j = \overline{1, N}, \quad (19)$$

$$D_{r,r}(\Delta_N, t) = a_r(\varphi, t) [M(\Delta_N) V_r(\Delta_N) + \hat{\psi}_r],$$

$$t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$F_r(\Delta_N, t) = a_r(\varphi, t) M(\Delta_N) g(f, \Delta_N) + a_r(f, t),$$

$$t \in [(r-1)h, rh), r = \overline{1, N}. \quad (21)$$

VI. Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_*(\Delta_N) \lambda = -F_*(\Delta_N), \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (22)$$

Элементы матрицы $Q_*(\Delta_N): \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ и вектор $F_*(\Delta_N) = (-d + CF_N(\Delta_N), F_1(\Delta_N), \dots, F_{N-1}(\Delta_N)) \in \mathbb{R}^{nN}$ определяются с помощью равенств (19)–(21). Решая систему (22), найдем λ_r^* , $r = \overline{1, N}$.

VII. По равенству

$$\mu^* = \sum_{j=1}^N M(\Delta_N) V_j(\Delta_N) \lambda_j^* + M(\Delta_N) g(f, \Delta_N) \quad (23)$$

найдем компоненты μ^* и построим функцию

$$F^*(t) = \varphi(t) \left[\mu^* + \sum_{r=1}^N \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(s) ds \lambda_r^* \right] + f(t). \quad (24)$$

Напомним, что $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, где $x^*(t)$ является решением краевой задачи (5), (6). Поэтому, решая систему (22), находим значения решения в левых концах подынтервалов.

Значения функции $x^*(t)$ в остальных точках интервала $[(r-1)h, rh]$ определяются решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^*(t), \quad x[(r-1)h] = \lambda_r^*, \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}. \quad (25)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет найти решение краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром (5), (6).

Предлагается следующая численная реализация вышеизложенного алгоритма, основанная на методе Рунге-Кутты четвертого порядка для решения задачи Коши и формуле Симпсона для вычисления определенных интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Линейная краевая задача (5), (6) называется корректно разрешимой, если для любой пары $(f_0(t), d)$, $f_0(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$, задача имеет единственное решение $x^*(t)$ и справедлива оценка*

$$\|x\|_1 \leq \gamma \max_{t \in [0, T]} (\|f\|_1, \|d\|), \quad (26)$$

где γ – постоянная, независящая от $f_0(t)$, d . Число γ называется константой корректной разрешимости задачи (5), (6).

Используя обратимость матрицы $Q_*(\Delta_N)$, найдем λ^* из систем алгебраических уравнений (22) и получаем оценку

$$\|\lambda^*\| \leq \left\| [Q_*(\Delta_N)]^{-1} F_*(\Delta_N) \right\| \leq \chi \cdot \|f\|_1, \quad (27)$$

где χ – константа, независящая от $f(t)$.

Оценивая коэффициенты и правые части Δ_N общего решения

$$\max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \sum_{j=1}^N \|D_{r,j}(\Delta_N, t)\| = \alpha, \quad \alpha > 0, \quad (28)$$

$$\|F_r(\Delta_N, t)\|_1 \leq \beta \cdot \|f\|_1, \quad \beta > 0, \quad (29)$$

и используя представление Δ_N -общего решения, найдем константу корректной разрешимости задачи (5), (6):

$$\gamma = \alpha \cdot \chi + \beta.$$

3 УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА И СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1), (2)

Взяв число $\rho > 0$, построим множества

$$G^0(\rho) = \left\{ (t, x), t \in [0, T] : \|x - x^{(0)}(t)\| < \rho \right\};$$

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| < \rho \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть краевая задача (5), (6) корректно разрешима с константой γ и выполняются следующие неравенства:

а) $\|f(t, x^*) - f(t, x^{(0)})\| \leq L \|x^* - x^{(0)}\|,$

б) $q = \gamma \cdot \varepsilon \cdot L < 1,$

в) $\frac{1}{1-q} \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \|f(t, x^{(0)}(t))\|_1 < \rho,$

где L – положительное число.

Тогда алгоритм сходится к $x^*(t)$ – единственному решению краевой задачи (1), (2) и справедлива оценка

$$\|x^* - x^{(0)}\|_1 < \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя корректную разрешимость линейной краевой задачи, методом последовательных приближений найдем решение задачи (1), (2).

Пусть функция $x^{(0)}(t)$ – решение задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$, тогда $x^{(1)}(t)$ определим, решая краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x^{(0)}(t)) + f_0(t),$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d.$$

Тогда функция $\Delta^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)$ будет решением задачи

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)\Delta(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x^{(0)}(t)), \quad (30)$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0 \quad (31)$$

и для нее справедлива оценка

$$\|\Delta^{(1)}\|_1 \leq \gamma \cdot \varepsilon \|f(t, x^{(0)}(t))\|_1. \quad (32)$$

Продолжая процесс, (k) -е приближение определим из краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x^{(k-1)}(t)) + f_0(t),$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)$ будет решением задачи (30), (31), где функция $x^{(0)}(t)$ заменена функцией $\Delta^{(k-1)}(t)$. При этом аналогично (32) имеет место оценка

$$\|\Delta^{(k)}\|_1 \leq [q]^{k-1} \|\Delta^{(1)}\|_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из условия а) следует, что последовательность функций $x^{(k)}(t)$ равномерно сходится на $[0, T]$ к $x^*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ и для разности функций $x^*(t)$ и $x^{(k)}(t)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{(k)}\|_1 &\leq \|\Delta^{(k)}\|_1 + \dots + \|\Delta^{(1)}\|_1 \leq \\ &\leq [q]^{k-1} \|\Delta^{(1)}\|_1 + \dots + \|\Delta^{(1)}\|_1 \leq ([q]^{k-1} + \dots + 1) \|\Delta^{(1)}\|_1, \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\|x^* - x^{(0)}\|_1 \leq \frac{1}{1-q} \cdot \gamma \cdot \varepsilon \cdot \|f(t, x^{(0)}(t))\|_1.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР.

На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим квазилинейную двухточечную краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) \int_0^1 \psi(\tau)x(\tau)d\tau + \varepsilon f(t, x) + f_0(t), \quad t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (33)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^2, \quad (34)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(\tau) = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = t \begin{pmatrix} [x_{(1)}(t)]^2 \\ [x_{(2)}(t)]^3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0, 1, \quad f_0(t) = \begin{pmatrix} 2t - \frac{t^5}{10} - \frac{16}{3} \\ -\frac{t}{10} - 1 \end{pmatrix}.$$

Точным решением (33), (34) является $x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для рассматриваемого примера $\chi = 0,2785$, $\alpha = 8.5714$, $\beta = 1.2675$, $\gamma = 3.6546$, $L = 0.3$.

Взяв число $\rho = 1.5$, построим множества

$$G^0(1.5) = \left\{ (t, x) : t \in [0, 1], \left\| x^* - x^{(0)}(t) \right\| < 1.5 \right\},$$

$$S(\lambda^{(0)}, 1.5) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^{nN} : \left\| \lambda - \lambda^{(0)} \right\| < 1.5 \right\}.$$

Проверяем обратимость $(n \times n)$ -матрицы $I - G^h(\Delta_2)$, где I – единичная матрица размерности n .

$(n \times n)$ -матрица $I - G^h(\Delta_2)$ имеет обратную:

$$\left[I - G^h(\Delta_2) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1.7142857143 & -1.7142857143 \end{pmatrix}.$$

Используя численные решения задач Коши и численные значения определенных интегралов, составим приближенную систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров λ^h :

$$Q_*^h(\Delta_2) \lambda^h = -F_*^h(\Delta_2), \quad \lambda^h \in \mathbb{R}^{nN},$$

где

$$Q_*^h(\Delta_2) = \begin{pmatrix} 3.1428571429 & 1.7142857143 & 2 & 1.7142857143 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1.1428571429 & -1.7142857143 & -4 & -1.7142857143 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$F_*^h(\Delta_2) = \begin{pmatrix} -3.9624049961 \\ -2.2378349655 \\ 4.4785508359 \\ 2.2628349655 \end{pmatrix}.$$

Применение первых четырёх шагов итерации дает следующие результаты:

в нулевом шаге $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$,

$$\lambda_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.01805557956 \\ 0.9718252272 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.2761287155 \\ 0.9843252272 \end{pmatrix},$$

в первом шаге $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)})$,

$$\lambda_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0018509484 \\ 0.9976283219 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.251301002 \\ 0.9984321289 \end{pmatrix},$$

во втором шаге $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)})$,

$$\lambda_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0010861441 \\ 0.998142451 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.2512270009 \\ 0.9990881409 \end{pmatrix},$$

в третьем шаге $\lambda^{(3)} = (\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)})$,

$$\lambda_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.0010605105 \\ 0.998183367 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.251191134 \\ 0.9991075171 \end{pmatrix}.$$

Точным значениям параметра λ^h является $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$,

$$\lambda_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2^* = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнения с точным решением показывает, что

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| &\leq 0,002817477, \quad \|\lambda^{(1)} - \lambda^*\| \leq 0,002371678, \\ \|\lambda^{(2)} - \lambda^*\| &\leq 0,001855754, \quad \|\lambda^{(3)} - \lambda^*\| \leq 0,001816633. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун., 1957. – 328 с.
- 2 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 550-564.
- 3 Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. – 1934. – Вып. 190. – С. 1-25.
- 4 Джумабаев Д.С. Об одном методе решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, № 7. – С. 1209-1221.
- 5 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 8. – С. 1074-1091.
- 6 Джумабаев Д.С., Темешова С.М. Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 39-63.
- 7 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – No. 294. – P. 342-357.
- 8 Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Численная реализация одного алгоритма нахождения решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 25-36.
- 9 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – No. 327. – P. 79-108.
- 10 Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – V. 41, No. 4. – P. 1439-1462.

Жұмабаев Д.С., Сисекенов Н.Д. КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР АЛГОРИТМІ ТУРАЛЫ

Квазисызықты Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін екі нүктелі шеттік есеп біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешілген.

Кілттік сөздер. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуі, параметрлеу әдісі, төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі, кубтық сплайн.

Dzhumabaev D.S., Sissekenov N.D. ON ONE ALGORITHM FOR SOLVING QUASILINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Two-point boundary value problem for quasilinear Fredholm integro-differential equation is solved by the method of successive approximations.

Keywords. Fredholm integro-differential equation, method parametrization, fourth order Runge-Kutta method, cubic spline.

Джумабаев Д.С.

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125
Международный университет информационных технологий
050040, Алматы, Казахстан, ул. Манаса 8
E-mail: dzhumabaev@list.ru

Сисекенов Н.Д.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, Казахстан, пр. аль-Фараби, 71
Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125
E-mail: nurbolat.94s@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2018

МРНТИ 27.31

**ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ
ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРУГЕ**

А.А. ДУКЕНБАЕВА

Аннотация. Рассматривается обобщенная краевая задача типа Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге. Доказана корректность задачи. Обоснована возможность применения метода разделения переменных. Построена в явном виде функция Грина задачи и получено интегральное представление решения.

Ключевые слова. Функция Грина, задача Самарского-Ионкина, уравнение Пуассона.

1 ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций [1]. В одномерном случае или при рассмотрении задачи в многомерном параллелепипеде, к основным задачам относят также и периодические краевые задачи. Ранее для случая шара аналогов периодической задачи построено не было. В [2], [3] впервые был введен новый класс краевых задач для уравнения Пуассона в многомерном шаре $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2$).

ЗАДАЧА P_k . Найти решение уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega_+,$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 35P10.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки министерства образования и науки РК, грант AP05133271 и BR05236656.

© А.А. Дукенбаева, 2018.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(x^*) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_+.$$

Здесь $\partial\Omega_+$ – та часть сферы $\partial\Omega$, для которой $x_1 \geq 0$; каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ сопоставляется "противоположная" ей точка $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \in \Omega$, где $\alpha_j, j = 2, \dots, n$, принимают одно из значений ± 1 . Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$.

Эти задачи являются аналогами классических периодических краевых задач. В [2], [3] исследована корректность рассматриваемых задач. Решение задачи P_1 существует и единственно. Решение задачи P_2 неединственно с точностью до постоянного слагаемого и существует, если выполнено необходимое условие корректности, напоминающее условие корректности задачи Неймана. Единственность решения задач обосновывается применением принципа экстремума. Существование решения доказано методом функции Грина. В двумерном случае [3] обоснована возможность применения метода разделения переменных. Задачи являются самосопряженными. Показана методика построения собственных функций задачи.

Если же обратиться к неклассическим задачам, то одной из наиболее известных является задача Самарского-Ионкина [4], возникшая в физике в 70-х годах прошлого века в связи с изучением процессов, происходящих в плазме [5], [6]. В [7], [8] рассмотрен аналог задачи Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге. А также в [9], [10] исследованы задачи, обобщающие задачи P_k .

В настоящей работе мы исследуем обобщенные задачи Самарского-Ионкина для уравнения Пуассона в круге.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega = \{z = (x, y) = x + iy \in C : |z| < 1\}$ – единичный круг, $r = |z|$ и $\varphi = \arctan(y/x)$. Рассмотрим следующие две задачи ($k = 1, 2$). Найти функцию $u(z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(z) = f(z), \quad |z| < 1, \quad (1)$$

а на его границе краевым условиям

$$u(1, \varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = \tau(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = \nu(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (3_k)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(z) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, $\tau(\varphi) \in C^{1+\gamma}[0, \pi]$, $\nu(\varphi) \in C^\gamma[0, \pi]$, $0 < \gamma < 1$.

Очевидно, что необходимым условием существования решения задачи (1), (2), (3₁) из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение условий согласования:

$$\nu(0) = \nu(\pi) = 0. \quad (4)$$

Антипериодическая краевая задача (1), (2), (3₁) при $\alpha = -1$ и периодическая краевая задача (1), (2), (3₂) при $\alpha = 1$ были исследованы в [2], [3]. В случае $\alpha = 0$ эти задачи рассмотрены в [7], [8].

Задачу (1), (2), (3₁) будем понимать ненетеровой, если однородная задача (1), (2), (3₁) имеет бесконечное число линейно независимых решений.

3 ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ, ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ЭКСТРЕМУМА

ТЕОРЕМА 1.

а) Пусть $\alpha \neq 1$. Решение краевой задачи (1), (2), (3₁) в классе функций, непрерывных в $\bar{\Omega}$, единственно.

б) Пусть $\alpha = 1$. Тогда задача (1), (2), (3₁) является ненетеровой, т.е. однородная задача (1), (2), (3₁) имеет бесконечное число линейно независимых решений и оно имеет вид

$$u_n(z) = r^n a_n \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < r \leq 1,$$

где a_n – произвольные комплексные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим, что существуют две функции $u_1(r, \varphi)$ и $u_2(r, \varphi)$, удовлетворяющие условиям задачи (1), (2), (3₁). Покажем, что функция $u(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) - u_2(r, \varphi)$ равна нулю. Очевидно, что функция $u(r, \varphi)$ – гармоническая и удовлетворяет однородным условиям (2), (3₁):

$$u(1, \varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) - \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (6)$$

Обозначим $\vartheta(r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(r, 2\pi - \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда получаем $\Delta\vartheta(r, \varphi) = 0$ и $\frac{\partial \vartheta}{\partial r}(1, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда $\vartheta = \text{Const}$. Поскольку

$\vartheta(r, \varphi) = -\vartheta(r, 2\pi - \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, из представления $\vartheta(r, \varphi)$ получим $u(r, \varphi) = u(r, 2\pi - \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тогда из этого и (5) следует

$$(1 - \alpha)u(1, \varphi) = 0 \text{ и } (1 - \alpha)u(1, 2\pi - \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Так как $\alpha \neq 1$, то $u(1, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Так как функция $u(r, \varphi)$ – гармоническая, отсюда получаем $u(r, \varphi) = 0$.

б) Теперь рассмотрим случай $\alpha = 1$. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$c(r, \varphi) = \frac{1}{2}(u(r, \varphi) + u(r, 2\pi - \varphi)), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

и

$$s(r, \varphi) = \frac{1}{2}(u(r, \varphi) - u(r, 2\pi - \varphi)), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Очевидно, что $u(r, \varphi) = c(r, \varphi) + s(r, \varphi)$. Непосредственным вычислением получаем, что $s(r, \varphi) = 0$, а $c(r, \varphi)$ – произвольная четная гармоническая функция. Тогда

$$c(z) = c_n(z) = r^n a_n \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < r \leq 1,$$

где a_n – произвольные комплексные числа. Доказательство Теоремы 1 закончено.

Следующая теорема доказывается аналогично доказательству части б) Теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha = -1$. Тогда задача (1), (2), (3₂) является ненетеровой, т.е. однородная задача (1), (2), (3₂) имеет бесконечное число линейно независимых решений и оно имеет вид

$$u_n(z) = r^n b_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < r \leq 1,$$

где b_n – произвольные комплексные числа.

4 СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом пункте обоснуем возможность применения метода разделения переменных для решения сформулированных задач. Для упрощения изложения положим сначала $f = 0$. В полярных координатах однородное

уравнение (1) примет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7)$$

Регулярные решения уравнения (7) естественно искать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (8)$$

Подставляя вспомогательные функции в (2) и (3₁), получаем

$$u(1, \varphi) - \alpha u(1, 2\pi - \varphi) = \tilde{\tau}(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) - \frac{\partial u}{\partial r}(1, 2\pi - \varphi) = \tilde{\nu}(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (10)$$

где обозначено

$$\tilde{\tau}(\varphi) = \begin{cases} \tau(\varphi) - (1 + \alpha)s(1, \varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \tau(2\pi - \varphi) - (1 + \alpha)s(1, 2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (11)$$

$$\tilde{\nu}(\varphi) = \begin{cases} \nu(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ -\nu(2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (12)$$

и $s(r, \varphi)$ является решением задачи Неймана

$$-\Delta s(z) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial r}(1, \varphi) = \frac{\tilde{\nu}(\varphi)}{2}.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\tau(\varphi) - (1 + \alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\varphi}{1 - \alpha}, \cos n\varphi \right)_{L_2(0, \pi)} \quad (13)$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi n} (\nu(\varphi), \sin n\varphi)_{L_2(0, \pi)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Подставляя найденное в (8), получаем формальное решение задачи (2), (3₁) для уравнения (7). В силу (4) и (11)–(12) очевидно, что $\tilde{\tau}(\varphi), \tilde{\nu}(\varphi) \in$

$C^\gamma(\partial\Omega)$. Поэтому обоснование сходимости полученных рядов (вплоть до границы) и возможность их почленного дифференцирования проводится аналогично, как и для случая классических задач Дирихле и Неймана.

Суммируя полученные ряды способом, аналогичным использованному в [1, стр. 314] при выводе интеграла Пуассона, находим явный вид решения:

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi(1-\alpha)} \times \\
 &\times \int_0^\pi \tau(\varphi_1) \left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi_1+\varphi)+r^2} + \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi_1-\varphi)+r^2} \right) d\varphi_1 + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \nu(\varphi_1) \ln \sqrt{\frac{1-2r\cos(\varphi_1+\varphi)+r^2}{1-2r\cos(\varphi_1-\varphi)+r^2}} d\varphi_1 - \frac{1+\alpha}{4\pi^2(1-\alpha)} \times \\
 &\times \int_0^\pi \nu(\varphi_2) \int_0^\pi \left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi_1+\varphi)+r^2} + \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi_1-\varphi)+r^2} \right) \times \\
 &\times \ln \sqrt{\frac{1-\cos(\varphi_2+\varphi_1)}{1-\cos(\varphi_2-\varphi_1)}} d\varphi_1 d\varphi_2. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть при $\alpha \neq 1$ $f(z) = 0$, $\tau(\varphi) \in C^{1+\gamma}[0, \pi]$, $\nu(\varphi) \in C^\gamma[0, \pi]$, $0 < \gamma < 1$ и выполнены условия согласования (4). Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), (3₁) и оно представимо в виде (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из представления (15) легко видеть, что при $\nu(\varphi) = 0$ решение задачи (1), (2), (3₁) будет обладать свойством: $u(r, \varphi) = u(r, 2\pi - \varphi)$.

5 СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ, ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Построим функцию Грина исследуемых задач и дадим интегральное представление решения.

Введем вспомогательные функции

$$\vartheta(z) = \frac{1}{2}(u(z) + u(\bar{z})), \quad \omega(z) = \frac{1}{2}(u(z) - u(\bar{z})), \quad \bar{z} = (x, -y). \tag{16}$$

Очевидно, что $u(z) = \vartheta(z) + \omega(z)$. Непосредственным вычислением находим задачи, которым удовлетворяют эти функции: функция $\vartheta(z)$ является решением задачи Дирихле

$$-\Delta\vartheta(z) = f_+(z), \quad z \in \Omega; \quad \vartheta(1, \varphi) = \frac{\tilde{\tau}(\varphi)}{1 - \alpha}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (17)$$

где $\alpha \neq 1$ и функция $\omega(z)$ – решением задачи Неймана

$$-\Delta\omega(z) = f_-(z), \quad z \in \Omega; \quad \frac{\partial\omega}{\partial r}(1, \varphi) = \frac{\tilde{\nu}(\varphi)}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (18)$$

Здесь $f_+(z) = 2^{-1}(f(z) + f(\bar{z}))$, $f_-(z) = 2^{-1}(f(z) - f(\bar{z}))$,

$$\tilde{\tau}(\varphi) = \begin{cases} \tau(\varphi) - (1 + \alpha)\omega(1, \varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \tau(2\pi - \varphi) - (1 + \alpha)\omega(1, 2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

и

$$\tilde{\nu}(\varphi) = \begin{cases} \nu(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ -\nu(2\pi - \varphi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Задача Дирихле (17) имеет единственное решение. Оно представимо равенством

$$\vartheta(z) = \int_{\Omega} \int G_D(z, \zeta) f_+(\zeta) d\zeta - \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial G_D(z, \zeta)}{\partial n_{\zeta}} \right]_{|\zeta|=1} \tilde{\tau}(\varphi_1) d\varphi_1, \quad (19)$$

где $G_D(z, \zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле. Нетрудно убедиться в том, что функция $\vartheta(z)$ обладает свойством симметрии: $\vartheta(z) = \vartheta(\bar{z})$.

Так как $\int_{\Omega} f_-(\zeta) d\zeta = 0$ и $\int_0^{2\pi} \tilde{\nu}(\varphi) d\varphi = 0$, то применим критерий существования решения задачи Неймана (18). Ее решение неединственно с точностью до произвольной постоянной и представимо в виде

$$\omega(z) = \int_{\Omega} \int G_N(z, \zeta) f_-(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [G_N(z, \zeta)]_{|\zeta|=1} \tilde{\nu}(\varphi_1) d\varphi_1 + C_1, \quad (20)$$

где $G_N(z, \zeta)$ – функция Грина задачи Неймана. Нетрудно убедиться в том, что функция $\omega(z)$ обладает свойством симметрии $\omega(z) = -\omega(\bar{z})$ только при $C_1 = 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Функции Грина задач Дирихле и Неймана хорошо известны. В единичном круге они имеют вид

$$G_D(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left[-\ln |z - \zeta| + \ln \left| z|\zeta| - \frac{\zeta}{|\zeta|} \right| \right],$$

$$G_N(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left[-\ln |z - \zeta| - \ln \left| z|\zeta| - \frac{\zeta}{|\zeta|} \right| \right] + C.$$

Подставляя их в равенства (19) и (20), после элементарных преобразований получаем представление решения (1), (2), (3₁), при этом константа C из представления функция Грина задачи Неймана исчезает.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha \neq 1$, $f(z) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, $\tau(\varphi) \in C^{1+\gamma}[0, \pi]$, $\nu(\varphi) \in C^\gamma[0, \pi]$, $0 < \gamma < 1$ и выполнены условия согласования (4). Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), (3₁) и оно представимо в виде

$$u(z) = \int \int_{\Omega} G(z, z_2) f(z_2) dz_2 - \frac{2}{1 - \alpha} \int_0^\pi \left[\frac{\partial G(z, z_2)}{\partial n_{z_2}} \right]_{|z_2|=1} \tau(\varphi_2) d\varphi_2 +$$

$$+ \int_0^\pi [G(z, z_2)]_{|z_2|=1} \nu(\varphi_2) d\varphi_2.$$

Здесь $G(z, z_2)$ – функция Грина задачи (1), (2), (3₁), которая имеет вид

$$G(z, z_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (G_D(z, z_2) + G_D(z, |z_2|, 2\pi - \varphi_2) + G_N(z, z_2) - G_N(z, |z_2|, 2\pi - \varphi_2)) +$$

$$+ \frac{1 + \alpha}{2(1 - \alpha)} \left(\int_0^\pi [(G_N(z_1, z_2) - G_N(z_1, |z_2|, 2\pi - \varphi_2))] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial G_D(z, z_1)}{\partial n_{z_1}} + \frac{\partial G_D(z, |z_1|, 2\pi - \varphi_1)}{\partial n_{z_1}} \right) \right]_{|z_1|=1} d\varphi_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
- 2 Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифф. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 264-268.
- 3 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – V. 3, No. 1. – P. 143-146.
- 4 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНТИ. – 2006. – Т. 96. – С. 5-105.
- 5 Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифф. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294-304.
- 6 Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двучечными краевыми условиями // Дифф. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1283-1295.
- 7 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Yessirkegenov N.A. On an analog of Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation in the disk // AIP Conference Proceedings. – 2015. – V. 1676. – 020035.
- 8 Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A. Spectral properties of a Laplace operator with Samarskii-Ionkin type boundary conditions in a disk // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1759. – 020139.
- 9 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – P. 1-14.
- 10 Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A. On a generalised Samarskii-Ionkin type problem for the Poisson equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2017. – V. 17, No. 1. – P. 115-116.

Дукенбаева А.А. ДӨҢГЕЛЕКТЕГІ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН
ЖАЛПЫЛАНҒАН БІР САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТЕКТЕС ЕСЕБІ
ЖАЙЛЫ

Дөңгелектегі Пуассон теңдеуі үшін жалпыланған Самарский-Ионкин тектес шеттік есеп қарастырылады. Есептің қисындылығы дәлелденді. Осы есепке айнымалыларды ажырату әдісін қолдану мүмкіндігі негізделді. Есептің Грин функциясы айқын түрде құрастырылды және шешімнің интегралдық кейіптемесі алынды.

Кілттік сөздер. Грин функциясы, Самарский-Ионкин есебі, Пуассон теңдеуі.

Dukenbayeva A.A. ON A GENERALISED SAMARSKII-IONKIN TYPE
PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN THE DISK

A generalised form of the Samarskii-Ionkin type boundary value problem for the Poisson equation in the disk is considered. The well-posedness of the problem is proved. The possibility of separation of variables is justified. An explicit form of the Green function for the problem is constructed, and an integral representation of the solution is obtained.

Keywords. Green's function, Samarskii-Ionkin problem, Poisson's equation.

Дукенбаева А.А.

Институт математики и математического моделирования

050100, Алматы, ул. Пушкина, 125

E-mail: dukenbayeva@math.kz

Статья поступила в редакцию 23.03.2018

МРНТИ 27.29.19

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ, Н. КАХАРМАН

Аннотация. В работе рассматривается одна задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказано существование и единственность регулярного и обобщенного решений задачи. Дана конструкция решения задачи. Построена задача, сопряженная к рассматриваемой задаче Бицадзе-Самарского, и установлен критерий гладкости ее решения.

Ключевые слова. Задача Бицадзе-Самарского, уравнение Штурма-Лиувилля, регулярные решения, сопряженная задача.

1 ВВЕДЕНИЕ

В 1969 году вышла работа А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], посвященная постановке и решению нового типа нелокальной задачи.

Задача была поставлена в общем виде, но её проще продемонстрировать для случая уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

в прямоугольной области $-l < x < l$, $0 < y < 1$ с краевыми условиями

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 1) = \varphi_1(x), \quad -l < x < l,$$

и нелокальными условиями

$$u(-l, y) = \phi_1(y), \quad u(0, y) = u(l, y), \quad 0 < y < 1.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B10, 47E05.

Funding: Работа выполнена по проекту AP05133239 грантового финансирования КН МОН РК.

© Т.Ш. Кальменов, Н. Кахарман, 2018.

Основное отличие задач такого типа от обычных граничных задач в том, что на линии $x = 0$, участвующей в условии, дифференциальное уравнение выполняется. В приведенном примере второе из этих условий не является граничным. Иногда такие условия называют внутренне-краевыми.

Дальнейшее развитие исследование задач такого типа получило в работах А.В. Бицадзе [2], Д.Г. Гордзениани, Я.А. Ройтберг и З.Г. Шефтель, М. Отелбаева и А.Н. Шыныбекова, А.Л. Скубачевского, и многих других. В работе Т.Ш. Кальменова и Е.И. Ерошенкова [3] для широкого класса эллиптических задач Бицадзе-Самарского доказана полнота системы корневых функций.

В настоящей работе мы сформулируем одну специальную задачу типа Бицадзе-Самарского для уравнения Штурма-Лиувилля. Будет дана конструкция регулярного и обобщенного решений задачи. А также будет построена задача, сопряженная к задаче Бицадзе-Самарского, и установлен критерий гладкости ее решения.

2 ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

Рассмотрим задачу Бицадзе-Самарского на интервале $x \in (-1, 1)$.

Найти решение уравнения Штурма-Лиувилля

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

удовлетворяющее внутренне-граничным условиям

$$u'(0) + u'(1) = 0, \quad (2)$$

$$u'(1) + u(0) + u(1) = 0. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Регулярным решением задачи Бицадзе-Самарского (1)–(3) назовем функцию $u \in C^2[-1, 1]$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенным решением задачи Бицадзе-Самарского (1)–(3) назовем функцию $u \in W_2^2(-1, 1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и условиям (2), (3).*

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Тогда для любой $f \in L_2(-1, 1)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^2(-1, 1)$ задачи Бицадзе-Самарского (1)–(3) и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^2(-1,1)} \leq C \|f\|_{L_2(-1,1)}, \quad (4)$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$.

В случае, когда $f \in C[-1, 1]$, обобщенное решение задачи Бицадзе-Самарского (1)–(3) является регулярным решением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала априорную оценку для задачи (1)–(3) при $0 < x < 1$. Интегрируя по частям выражение

$$(Lu, u) = \int_0^1 (-u''(x) + q(x)u(x)) \cdot u(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot u(x) dx \quad (5)$$

с учетом граничных условий (2) и используя неравенство Юнга, мы получаем

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 u''(x) \cdot u(x) dx + \int_0^1 q(x) \cdot u^2(x) dx = \\ & = u'(0) \cdot u(1) + u'(0) \cdot u(0) + \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 q(x) \cdot u^2(x) dx = \\ & = (u'(0))^2 + \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 q(x) \cdot u^2(x) dx \leq \\ & \leq \int_0^1 |f(x) \cdot u(x)| dx \leq \frac{1}{2\beta} \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 |u(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда из (6) мы получаем

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 \left(q(x) - \frac{\beta}{2} \right) \cdot |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\beta} \int_0^1 |f(x)|^2 dx. \quad (7)$$

Так как по условию теоремы $q(x) > 0$, то существует такая положительная константа $\beta > 0$, что $q(x) > \frac{\beta}{2} > 0$ для всех $0 < x < 1$. Поэтому из (7) находим

$$\|u\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 = \|u'\|_{L_2(0,1)}^2 + \|u\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C^2 \|f\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (8)$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$.

В силу априорной оценки (8) на интервале $0 < x < 1$ существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3). Это решение может быть представлено в интегральном виде. То есть существует функция $\varepsilon_q^+(x, \xi)$, которая является фундаментальным решением уравнения (1) (зависит от $q(x)$), удовлетворяющая уравнению

$$L\varepsilon_q^+(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad x > 0, \quad (9)$$

и условиям

$$\frac{d}{dx} \varepsilon_q^+ \Big|_{x=0} + \frac{d}{dx} \varepsilon_q^+ \Big|_{x=1} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \varepsilon_q^+ \Big|_{x=1} + \varepsilon_q^+ \Big|_{x=0} + \varepsilon_q^+ \Big|_{x=1} = 0. \quad (11)$$

Поэтому при $x > 0$ решение представляется в виде

$$u(x) = \int_0^1 \varepsilon_q^+(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (12)$$

При $x < 0$ решение будем искать в виде

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon_q^-(x, \xi) f^-(\xi) d\xi + c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x), \quad (13)$$

где $\varepsilon_q^-(x, \xi)$ – фундаментальное решение задачи Коши на интервале $-1 < x < 0$:

$$L\varepsilon_q^-(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (14)$$

$$\varepsilon_q^-(x, \xi) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_q^-}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (15)$$

функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ – произвольные линейно независимые решения однородного уравнения

$$Lu_0(x) = Lu_1(x) = 0, \quad x \in (-1, 0), \quad (16)$$

а c_0, c_1 – произвольные постоянные, выбираемые из условия гладкости решения при $x = 0$.

Из условий непрерывности решения и его первой производной в точке $x = 0$, получаем линейную систему относительно коэффициентов c_0, c_1 :

$$c_0 u_0(0) + c_1 u_1(0) = u(0) \equiv \int_0^1 \varepsilon_q^+(0, \xi) f^+(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$c_0 u_0'(0) + c_1 u_1'(0) = u'(0) \equiv \frac{d}{dx} \int_0^1 \varepsilon_q^+(x, \xi) f^+(\xi) d\xi \Big|_{x=0}. \quad (18)$$

Определитель этой линейной алгебраической системы совпадает с определителем Вронского, который отличен от нуля в силу линейной независимости решений $u_0(x)$ и $u_1(x)$:

$$W(u_0, u_1) = \begin{vmatrix} u_0(0) & u_1(0) \\ u_0'(0) & u_1'(0) \end{vmatrix} = \text{Const} \neq 0. \quad (19)$$

Следовательно, система уравнений (17), (18) однозначно разрешима:

$$c_0 = c_0(f^+), \quad c_1 = c_1(f^+). \quad (20)$$

Непосредственным вычислением из системы (17), (18) находим

$$c_0(f^+) = \frac{u_1^{(1)}(0) \int_0^1 \varepsilon_q^+(0, \xi) f^+(\xi) d\xi - u_1(0) \frac{d}{dx} \int_0^1 \varepsilon_q^+(x, \xi) f^+(\xi) d\xi \Big|_{x=0}}{W(u_0, u_1)}, \quad (21)$$

$$c_1(f^+) = \frac{u_0(0) \frac{d}{dx} \int_0^1 \varepsilon_q^+(x, \xi) f^+(\xi) d\xi \Big|_{x=0} - u_0^{(1)}(0) \int_0^1 \varepsilon_q^+(0, \xi) f^+(\xi) d\xi}{W(u_0, u_1)}. \quad (22)$$

Покажем, что c_0 и c_1 линейно непрерывно зависят от f^+ . Действительно, так как

$$\begin{aligned}
 |c_0(f^+)| &= \left| \frac{u_1^{(1)}(0) \int_0^1 \varepsilon_q^+(0, \xi) f^+(\xi) d\xi - u_1(0) \left. \frac{d}{dx} \int_0^1 \varepsilon_q^+(x, \xi) f^+(\xi) d\xi \right|_{x=0}}{W(u_0, u_1)} \right| \leq \\
 &\leq \frac{|u_1^{(1)}(0)| \int_0^1 |\varepsilon_q^+(0, \xi) f^+(\xi)| d\xi + |u_1(0)| \int_0^x \left| \frac{d}{dx} \varepsilon_q^+(x, \xi) \right|_{x=0} |f^+(\xi)| d\xi}{|W(u_0, u_1)|} + \\
 &+ \frac{|u_1(0)| \int_x^1 \left| \frac{d}{dx} \varepsilon_q^+(x, \xi) \right|_{x=0} |f^+(\xi)| d\xi}{|W(u_0, u_1)|} \leq A_0 \left(\int_0^1 |f^+(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = A_0 \|f\|_{L_2(0,1)}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 0 \leq A_0 &= \frac{|u_1^{(1)}(0)| \left(\int_0^1 |\varepsilon_q^+(0, \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}}{|W(u_0, u_1)|} + \\
 &+ \frac{|u_1(0)| \left(\left(\int_0^x \left| \frac{d}{dx} \varepsilon_q^+(x, \xi) \right|_{x=0}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_x^1 \left| \frac{d}{dx} \varepsilon_q^+(x, \xi) \right|_{x=0}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{|W(u_0, u_1)|} \quad (24)
 \end{aligned}$$

и

$$|c_0(f^+) - c_0(\tilde{f}^+)| \leq A_0 \|f^+ - \tilde{f}^+\|_{L_2(0,1)}. \quad (25)$$

Аналогично для c_1 получаем

$$|c_1(f^+)| \leq A_1 \|f\|_{L_2(0,1)}$$

и

$$|c_1(f^+) - c_1(\tilde{f}^+)| \leq A_1 \|f^+ - \tilde{f}^+\|_{L_2(0,1)}.$$

Однозначность нахождения констант c_0 и c_1 и полученные для них оценки доказывают Теорему 1. \square

3 СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА К ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

В этом разделе мы находим сопряженную задачу к задаче Бицадзе-Самарского. Для этого сначала коэффициенты $c_0(f^+)$ и $c_1(f^+)$ из (21)–(22) перепишем в более удобном нам виде. Пусть $\sigma_0(\xi)$ и $\sigma_1(\xi)$ определяются следующим образом:

$$\sigma_0(\xi) = \frac{u_1'(0)\varepsilon_q^+(0, \xi) - u_1(0)\frac{d}{dx}\varepsilon_q^+(x, \xi)|_{x=0}}{W(u_0, u_1)}, \quad (26)$$

$$\sigma_1(\xi) = \frac{u_0(0)\frac{d}{dx}\varepsilon_q^+(x, \xi)|_{x=0} - u_0'(0)\varepsilon_q^+(0, \xi)}{W(u_0, u_1)}. \quad (27)$$

Тогда

$$c_0(f^+) = \int_0^1 \sigma_0(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (28)$$

$$c_1(f^+) = \int_0^1 \sigma_1(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (29)$$

Регулярное решение задачи Бицадзе-Самарского (1)–(3) перепишем через интегральный оператор

$$u(x) = L_B^{-1} f = \int_{-1}^1 K(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (30)$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \varepsilon_q^+(x, \xi) & \text{при } x > 0, \xi > 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, \xi < 0, \\ \varepsilon_q^-(x, \xi) & \text{при } x < 0, \xi < 0 \\ \sigma_0(\xi)u_0(x) + \sigma_1(\xi)u_1(x) & \text{при } x < 0, \xi > 0, \end{cases} \quad (31)$$

где $\sigma_0(\xi)$ и $\sigma_1(\xi)$ определяются из формул (26)–(27) соответственно.

Из (30) и (31) следует, что сопряженный оператор задается в виде

$$v(x) = L_B^*{}^{-1} g = \int_{-1}^1 K^*(x, \xi) g(\xi) d\xi, \quad (32)$$

где

$$K^*(x, \xi) = \begin{cases} \varepsilon_q^+(\xi, x) & \text{при } \xi > 0, x > 0, \\ \sigma_0(x)u_0(\xi) + \sigma_1(x)u_1(\xi) & \text{при } \xi < 0, x > 0, \\ 0 & \text{при } \xi > 0, x < 0, \\ \varepsilon_q^-(\xi, x) & \text{при } \xi < 0, x < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что действие сопряженного оператора имеет следующий вид:

$$L_B^*v(x) = -v''(x) + q(x)v(x) = g(x), \quad x \neq 0. \quad (34)$$

Теперь найдем граничные условия сопряженной задачи. При $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-1}^1 K^*(x, \xi)g^+(\xi) d\xi = \int_0^1 \varepsilon_q^+(\xi, x) (-v''(x) + q(x)v(x)) d\xi + \\ &+ \int_{-1}^0 (\sigma_0(x)u_0(\xi) + \sigma_1(x)u_1(\xi)) \cdot (-v''(\xi) + q(\xi)v(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда, используя интегрирование по частям, мы находим

$$\begin{aligned} &- [\varepsilon_q^+(\xi, x)v'(\xi)|_0^1 - \varepsilon_q^{+'}(\xi, x)v(\xi)|_0^1] + \sigma_0(x) [-u_0(\xi)v'(\xi)|_{-1}^0 + \\ &+ u_0'(\xi)v(\xi)|_{-1}^0] + \sigma_1(x) [-u_1(\xi)v'(\xi)|_{-1}^0 + u_1'(\xi)v(\xi)|_{-1}^0] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя явный вид $\sigma_0(x)$ и $\sigma_1(x)$ из (26), (27), легко вычисляется, что

$$\sigma_0(x) [-u_0(\xi)v'(\xi)|_{-1}^0 + u_0'(\xi)v(\xi)|_{-1}^0] = 0 \quad (37)$$

и

$$\sigma_1(x) [-u_1(\xi)v'(\xi)|_{-1}^0 + u_1'(\xi)v(\xi)|_{-1}^0] = 0. \quad (38)$$

Тогда

$$\varepsilon_q^+(\xi, x)v'(\xi)|_0^1 - \varepsilon_q^{+'}(\xi, x)v(\xi)|_0^1 = 0. \quad (39)$$

Отсюда, принимая во внимание потенциальные условия (10) и (11), получаем

$$v'(0) + v'(1) = 0, \quad (40)$$

$$v'(1) + v(0) + v(1) = 0. \quad (41)$$

При $x < 0$ имеем

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{-1}^1 K^*(x, \xi) g^-(\xi) d\xi = \int_{-1}^0 \varepsilon_q^-(\xi, x) g^-(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-1}^0 \varepsilon_q^-(\xi, x) \cdot (-v''(\xi) + q(\xi)v(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (42)$$

Используя интегрирование по частям, отсюда находим

$$\varepsilon_q^-(\xi, x) v'(\xi)|_{-1}^0 - \varepsilon_q^{-'}(\xi, x) v(\xi)|_{-1}^0 = 0. \quad (43)$$

Принимая во внимание потенциальные условия (15), получаем

$$v'(-1) = 0, \quad v(-1) = 0. \quad (44)$$

Таким образом, область определения $D(L_B^*)$ сопряженного оператора состоит из функций, принадлежащих классу $W_2^2(-1, 0) \cap W_2^2(0, 1)$ и удовлетворяющих краевым условиям (40), (41) и (44).

Легко заметить, что функции из области определения сопряженного оператора необязательно являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в точке $x = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Элемент из области определения сопряженного оператора $v = (L_B^*)^{-1} g$ является гладкой функцией (т.е. непрерывно дифференцируемой в точке $x = 0$) тогда и только тогда, когда функция $g(x) \equiv -v''(x) + q(x)v(x)$ удовлетворяет условиям*

$$\int_0^1 \varepsilon_q^+(\xi, 0^+) g^+(\xi) d\xi = \int_{-1}^0 \varepsilon_q^-(\xi, 0^-) g^-(\xi) d\xi, \quad (45)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_q^+(\xi, x) \Big|_{x=0} g^+(\xi) d\xi = \int_{-1}^0 \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_q^-(\xi, x) \Big|_{x=0} g^-(\xi) d\xi. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для непрерывности $v(x)$ на $(-1, 1)$ необходимо равенство: $v(0^+) = v(0^-)$. Тогда

$$\int_0^1 \varepsilon_q^+(\xi, x) g^+(\xi) d\xi \Big|_{x=0^+} = \int_{-1}^0 \varepsilon_q^-(\xi, x) g^-(\xi) d\xi \Big|_{x=0^-},$$

т.е. справедливо (45).

Для того, чтобы первые производные были непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{d}{dx} v(x) \Big|_{x=0^+} = \frac{d}{dx} v(x) \Big|_{x=0^-}.$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{dx} \int_0^1 \varepsilon_q^+(\xi, x) g^+(\xi) d\xi \right) \Big|_{x=0^+} = \left(\frac{d}{dx} \int_{-1}^0 \varepsilon_q^-(\xi, x) g^-(\xi) d\xi \right) \Big|_{x=0^-},$$

т.е. справедливо (46). Теорема 2 доказана. \square

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739-774.
- 2 Бицадзе А.В. К теории нелокальных краевых задач // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 277, № 1. – С. 17-19.
- 3 Кальменов Т.Ш., Ерошенков Е.П. О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 296, № 3. – С. 528-531.

Кальменов Т.Ш., Кахарман Н. ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ТЕҢДЕУІ
ҮШІН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙДІҢ БІР ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін Бицадзе-Самарский тектес бір есеп қарастырылған. Есептің регулярлы және жалпы шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденген. Есеп шешімінің құрылымы келтірілген. Қарастырылып отырған Бицадзе-Самарский есебіне түйіндес есеп құрылған және оның шешімінің тегістігі туралы критерий тағайындалған.

Кілттік сөздер. Бицадзе-Самарский есебі, Штурм-Лиувилль теңдеуі, регулярлы шешімдер, түйіндес есеп.

Kal'menov T. Sh., Kakharman N. ON A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKII FOR THE STURM-LIOUVILLE EQUATION

In this paper, we consider a problem of Bitsadze-Samarskii type for the Sturm-Liouville equation. We proved the existence and the uniqueness of a regular and generalized solutions for this problem. The construction of the solution of the problem is given. The problem conjugate to the considered Bitsadze-Samarskii problem is constructed and a criterion for the smoothness of its solution is established.

Keywords. Bitsadze-Samarskii problem, Sturm-Liouville equation, regular solutions, adjoint problem.

Кальменов Т.Ш.

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125

E-mail: kalmenov@math.kz

Кахарман Н.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

050040, Алматы, Казахстан, пр. аль-Фараби, 71

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, Казахстан, ул. Пушкина, 125

E-mail: n.kakharman@math.kz

Статья поступила в редакцию 20.03.2018

МРНТИ 27.23.15

**AN ANALOGUE OF THE FRACTIONAL SOBOLEV
INEQUALITY ON THE HOMOGENOUS LIE GROUPS**

A. KASSYMOV, D. SURAGAN

Annotation. In this paper we prove an analogue of the fractional Sobolev inequality for the fractional sub-Laplacian.

Keywords. Fractional sub-Laplacian, fractional Sobolev inequality, homogeneous Lie groups.

1 INTRODUCTION

1.1 HOMOGENOUS LIE GROUP

We recall that a family of dilations of a Lie algebra \mathfrak{g} is a family of linear mappings of the form

$$D_\lambda = \text{Exp}(A \ln \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(\lambda)A)^k, \quad (1)$$

where A is a diagonalisable linear operator on \mathfrak{g} with positive eigenvalues, and D_λ is a morphism of the Lie algebra \mathfrak{g} , that is, a linear mapping from \mathfrak{g} to itself which respects to the Lie bracket:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \lambda > 0, [D_\lambda X, D_\lambda Y] = D_\lambda[X, Y]. \quad (2)$$

A homogeneous group is a connected simply connected Lie group whose Lie algebra is equipped with dilations. We denote by

$$Q := \text{Tr}A, \quad (3)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80.

Funding: The authors were supported in parts by the MESRK grant AP05130981 and the target program BR05236656.

© A. Kassymov, D. Suragan, 2018.

the homogeneous dimension of a homogeneous group \mathbb{G} .

For any \mathbb{G} there exists homogeneous quasi-norm, which is a continuous non-negative function

$$\mathbb{G} \ni x \mapsto q(x) \in [0, \infty), \quad (4)$$

with the properties

- a) $q(x) = q(x^{-1})$ for all $x \in \mathbb{G}$,
- b) $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ for all $x \in \mathbb{G}$ and $\lambda > 0$,
- c) $q(x) = 0$ iff $x = 0$.

Note that for the simplicity of notation, here and after we assume that the origin 0 of \mathbb{R}^N is the identity of \mathbb{G} . This assumption is not restrictive due to properties of isomorphic Lie groups. We also use the following well-known polar decomposition on homogeneous Lie groups (see, e.g. [1, Section 3.1.7]): there is a (unique) positive Borel measure σ on the unit quasi-sphere

$$\omega_Q := \{x \in \mathbb{G} : q(x) = 1\}, \quad (5)$$

so that for every $f \in L^1(\mathbb{G})$ we have

$$\int_{\mathbb{G}} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{\omega_Q} f(r y) r^{Q-1} d\sigma(y) dr. \quad (6)$$

Let $s \in (0, 1)$ and \mathbb{G} be a homogeneous Lie group with homogeneous dimension Q . For a (Haar) measurable and compactly supported function u the fractional sub-Laplacian $(-\Delta_q)^s$ on \mathbb{G} can be defined as

$$(-\Delta_q)^s u(x) = 2 \lim_{\delta \searrow 0} \int_{\mathbb{G} \setminus B_q(x, \delta)} \frac{(u(x) - u(y))}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dy, \quad x \in \mathbb{G}, \quad (7)$$

where q is a quasi-norm on \mathbb{G} and $B_q(x, \delta)$ is a quasi-ball with respect to q , with radius δ centered at $x \in \mathbb{G}$.

For a measurable function $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ we define the Gagliardo seminorm by

$$[u]_{s,q} = \left(\int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \right)^{1/p}. \tag{8}$$

Now we recall the definition of the fractional Sobolev spaces on homogeneous Lie groups denoted by $W^{s,2,q}(\mathbb{G})$. For $s \in (0, 1)$, the functional space

$$W^{s,2,q}(\mathbb{G}) = \{u \in L^2(\mathbb{G}) : u \text{ is measurable, } [u]_{s,q} < +\infty\}, \tag{9}$$

endowed with the norm

$$\|u\|_{W^{s,2,q}(\mathbb{G})} = (\|u\|_{L^2(\mathbb{G})} + [u]_{s,q})^{1/2}, \quad u \in W^{s,2,q}(\mathbb{G}), \tag{10}$$

is called the fractional Sobolev spaces on \mathbb{G} .

1.2 FRACTIONAL SOBOLEV INEQUALITY

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a measurable set and $1 < p < N$, then the (classical) Sobolev inequality is formulated as

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{11}$$

where $C = C(N, p) > 0$ is a positive constant, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ and ∇ is a standard gradient in \mathbb{R}^N .

In [2] the authors obtained the fractional Sobolev inequality in the case $N > sp$, $1 < p < \infty$, and $s \in (0, 1)$, for any measurable and compactly supported function u one has

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C [u]_{s,p}^p, \tag{12}$$

where $C = C(N, p, s) > 0$ is a suitable constant, $[u]_{s,p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$

and $p^* = \frac{Np}{N-sp}$. There is a number of generalisations and extensions of above Sobolev's inequality. For example, in [3] the authors proved the following weighted fractional Sobolev inequality: Let $1 < p < \frac{N}{s}$ and $0 < \beta < \frac{N-ps}{2}$, then for all $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ one has

$$C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps} |x|^\beta |y|^\beta} dx dy \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*}}{|x|^{\frac{2\beta p^*}{p}}} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}, \tag{13}$$

where $C = C(N, p, s) > 0$ and $p^* = \frac{Np}{N-sp}$.

The Sobolev inequality is one of the most important tools in PDE and variational problems. In this paper one of our aims is to obtain an analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogeneous Lie groups. The result is stated in Theorem 2.1.

The paper is organized as follows. In Section we prove analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogenous Lie groups.

2 FRACTIONAL SOBOLEV INEQUALITY

In this section we prove fractional Sobolev inequality on the homogeneous Lie groups.

Let Q be a homogeneous dimension of a homogeneous Lie group \mathbb{G} . To prove an analogue of the fractional Sobolev inequality, first we present some preliminary results. Here we follow a similar scheme as in [2], but now on the homogeneous Lie groups.

LEMMA 2.1. *Let $s \in (0, 1)$ and $K \subset \mathbb{G}$ be Haar measurable set. Fix $x \in \mathbb{G}$ and a quasi-norm q on \mathbb{G} , then we have*

$$\int_{K^c} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} \geq C|K|^{-2s/Q}, \quad (14)$$

where $C = C(Q, s, q)$ is a positive constant, $K^c = \mathbb{G} \setminus K$ and $|K|$ is the Haar measure of K .

PROOF. Let $\delta := \left(\frac{|K|}{\omega_Q}\right)^{1/Q}$, where ω_Q is a surface measure of the unit quasi-ball on \mathbb{G} . Then, we have

$$\begin{aligned} |K^c \cap B_q(x, \delta)| &= |B_q(x, \delta)| - |K \cap B_q(x, \delta)| = \\ &= |K| - |K \cap B_q(x, \delta)| = |K \cap B_q^c(x, \delta)|, \end{aligned} \quad (15)$$

where $|\cdot|$ is the Haar measure on \mathbb{G} and $B_q(x, \delta)$ is a quasi-ball centered at x with radius δ . Then,

$$\int_{K^c} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} = \int_{K^c \cap B_q(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{K^c \cap B_q(x, \delta)} \frac{dy}{\delta^{Q+2s}} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} = \\
&= \frac{|K^c \cap B_q(x, \delta)|}{\delta^{Q+2s}} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)}.
\end{aligned}$$

By using (15) we establish

$$\begin{aligned}
\int_{K^c} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} &\geq \frac{|K^c \cap B_q(x, \delta)|}{\delta^{Q+2s}} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} = \\
&= \frac{|K \cap B_q^c(x, \delta)|}{\delta^{Q+2s}} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} \geq \\
&\geq \int_{K \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} + \int_{K^c \cap B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} = \\
&= \int_{B_q^c(x, \delta)} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)}.
\end{aligned}$$

Now using the polarization formula (6) we obtain that

$$\int_{K^c} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} \geq C|K|^{-2s/Q}. \quad (16)$$

LEMMA 2.2 [[2], Lemma 6.2]. Fix $T > 1$. Let $s \in (0, 1)$ be such that $Q > 2s$, $m \in \mathbb{Z}$ and a_k be a bounded, decreasing, nonnegative sequence with $a_k = 0$ for any $k \geq m$. Then

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(Q-2s)/Q} T^k \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} a_{k+1} a_k^{-2s/Q} T^k,$$

for a positive constant $C = C(Q, s, T) > 0$.

LEMMA 2.3. Let $s \in (0, 1)$, $Q > 2s$ and q be a quasi-norm on \mathbb{G} . Let $u \in L^\infty(\mathbb{G})$ be compactly supported and $a_k := |\{|u| > 2^k\}|$ for any $k \in \mathbb{Z}$. Then,

$$C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} a_{k+1} a_k^{-2s/Q} 2^{2k} \leq [u]_{s,q}^p, \quad (17)$$

where $C = C(Q, s, q)$ is a positive constant and $[u]_{s,q}$ is defined by (8).

PROOF. We define

$$A_k := \{|u| > 2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

and

$$D_k := A_k \setminus A_{k+1} = \{2^k < f \leq 2^{k+1}\} \text{ and } d_k = |D_k|. \quad (19)$$

Since $A_{k+1} \subseteq A_k$, it is easy to see

$$a_{k+1} \leq a_k. \quad (20)$$

By the assumption $u \in L^\infty(\mathbb{G})$ is compactly supported, a_k and d_k are bounded and vanish when k is large enough. Also, we notice that the D_k 's are disjoint, therefore,

$$\bigcup_{l \in \mathbb{Z}, l \leq k} D_l = A_{k+1}^c \quad (21)$$

and

$$\bigcup_{l \in \mathbb{Z}, l \geq k} D_l = A_k. \quad (22)$$

From (22) we obtain that

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq k} d_l = a_k \quad (23)$$

and

$$d_k = a_k - \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq k+1} d_l. \quad (24)$$

Since a_k and d_k are bounded and vanish when k is large enough, (23) and (24) are convergent. We define the convergent series

$$S := \sum_{l \in \mathbb{Z}, a_{l-1} \neq 0} 2^{2l} a_{l-1}^{-2s/Q} d_l. \quad (25)$$

We have that $D_k \subseteq A_k \subseteq A_{k-1}$, therefore, $a_{i-1}^{-2s/Q} d_l \leq a_{i-1}^{-2s/Q} a_{l-1}$. Thus,

$$\begin{aligned} & \{(i, l) \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a_{i-1} \neq 0 \text{ and } a_{i-1}^{-2s/Q} d_l \neq 0\} \subseteq \\ & \subseteq \{(i, l) \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a_{l-1} \neq 0\}. \end{aligned} \tag{26}$$

By using (26) and (20), we calculate that

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq i+1} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_l = \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq i+1, a^{2s/Q} d_l \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_l \leq \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq i+1, a_{l-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_l = \sum_{l \in \mathbb{Z}, a_{l-1} \neq 0} \sum_{i \in \mathbb{Z}, i \leq l-1} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_l \leq \\ & \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}, a_{l-1} \neq 0} \sum_{i \in \mathbb{Z}, i \leq l-1} 2^{2i} a_{l-1}^{-2s/Q} d_l = \\ & = \sum_{l \in \mathbb{Z}, a_{l-1} \neq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2(l-1-k)} a_{l-1}^{-2s/Q} d_l \leq S. \end{aligned} \tag{27}$$

Notice that

$$||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|$$

for any $x, y \in \mathbb{G}$. If we fix $i \in \mathbb{Z}$ and $x \in D_i$, then for any $j \in \mathbb{Z}$ with $j \leq i - 2$, for any $y \in D_j$ using the above inequality, we obtain that

$$|u(x) - u(y)| \geq 2^i - 2^{j+1} \geq 2^i - 2^{i-1} \geq 2^{i-1}$$

and using (21), we have

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dy \geq 2^{2(i-1)} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_j} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} = \\ & = 2^{2(i-1)} \int_{A_{i-1}^c} \frac{dy}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Now using (28) and Lemma 2.1, we obtain that

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dy \geq C 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q}$$

with a positive constant C . That is, for any $i \in \mathbb{Z}$, we have

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_j} \int_{D_i} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq C 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_i. \quad (29)$$

From (29) and (24) we get

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq C \left(2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i - \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq i+1} 2^{2l} a_{l-1}^{-2s/Q} d_l \right). \end{aligned} \quad (30)$$

By (29) and (25) we establish that

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} d_i \geq C S. \end{aligned} \quad (31)$$

Then, by using (27), (30) and (31), we obtain that

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i - \\ & - C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{l \in \mathbb{Z}, l \geq i+1} 2^{2l} a_{l-1}^{-2s/Q} d_l \geq C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i - C S \geq \\ & \geq C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i - \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy. \end{aligned}$$

This means

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq \frac{C}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i \end{aligned} \quad (32)$$

for a constant $C > 0$. By symmetry and using (32), we arrive at

$$\begin{aligned} [u]_{s,q}^2 &= \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq 2 \sum_{i,j \in \mathbb{Z}, j < i} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \leq i-2} \int_{D_i} \int_{D_j} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy \geq \\ & \geq C \sum_{i \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \neq 0} 2^{2i} a_{i-1}^{-2s/Q} a_i. \end{aligned}$$

□

LEMMA 2.4. Let $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ be a measurable function. For any $n \in \mathbb{N}$

$$u_n := \max\{\min\{u(x), n\}, -n\}, \quad \text{for any } x \in \mathbb{G}. \quad (33)$$

Then,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{G})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{G})}.$$

PROOF. The proof is the same as in [2, Lemma 6.4].

By using the above lemmas we prove the following analogue of the fractional Sobolev inequality on \mathbb{G} :

THEOREM 2.1. Let $s \in (0, 1)$, $Q > 2s$ and q be a quasi-norm on \mathbb{G} . For any measurable and compactly supported function $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ there exists a positive constant $C = C(Q, s, q) > 0$ such that

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{G})}^2 \leq C[u]_{s,q}^2. \quad (34)$$

PROOF. First of all, we suppose that Gagliardo's seminorm $[u]_{s,q}$ is bounded, i.e.

$$[u]_{s,q}^2 = \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy < +\infty \quad (35)$$

and we suppose that $u \in L^\infty(\mathbb{G})$.

If (35) is satisfied for bounded functions, it holds also for the function u_n , obtained by u cutting at levels $-n$ and n . Thus, by using Lemma 2.4 and (35) with the dominated convergence theorem, we obtain that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n]_{s,q}^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy = [u]_{s,q}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

As in Lemma 2.3 we define a_k and A_k , so we have

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{G})} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{A_k \setminus A_{k+1}} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{A_k \setminus A_{k+1}} 2^{(k+1)p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+1)p^*} a_k \right)^{1/p^*}. \end{aligned} \quad (37)$$

Then, with $2/p^* = 1 - 2s/Q < 1$ and $T = 2^2$, Lemma 2.2 yields

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{G})}^2 \leq 2^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp^*} a_k \right)^{2/p^*} \leq 2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2k} a_k^{(Q-2s)/Q} \leq$$

$$\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} 2^{2k} a_k^{-2s/Q} a_{k+1} \quad (38)$$

for a positive constant $C = C(Q, s, q) > 0$.

Finally, using Lemma 2.3 we arrive at

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{G})}^2 &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} 2^{2k} a_k^{-2s/Q} a_{k+1} \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{G}} \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{q^{Q+2s}(y^{-1} \circ x)} dx dy = C[u]_{s,q}^p. \end{aligned} \quad (39)$$

Theorem 2.1 is proved.

REFERENCES

- 1 Fischer V., Ruzhansky M. Quantization on nilpotent Lie groups // Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2016. – V. 314. – 557 p.
- 2 Nezza E.Di, Palatucci G., Valdinoci E.E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 2012. – V. 136, No. 5. – P. 521-573.
- 3 Abdellaoui B., Bentifour R. Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities of fractional order with applications // J. Funct. Anal. – 2017. – V. 272, No. 10. – P. 3998-4029.

Касымов А., Сураган Д. БІРТЕКТІ ЛИ ТОПТАРЫНДАҒЫ БӨЛШЕКТІ СОБОЛЕВ ТЕҢСІЗДІГІНІҢ АНАЛОГЫ

Осы мақалада, біз Соболев функционалдық (суб-эллиптикалық) теңсіздігінің аналогын біртекті Ли топтарында дәлелдейміз.

Кілттік сөздер. Бөлшекті суб-Лапласиан, бөлшекті Соболев теңсіздігі, біртекті Ли тобы.

Касымов А., Сураган Д. АНАЛОГ ДРОБНОГО НЕРАВЕНСТВА СОБОЛЕВА НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ ЛИ

В этой статье мы доказываем аналог (суб-эллиптического) функционального неравенства Соболева на однородных группах Ли.

Ключевые слова. Дробный суб-Лапласиан, дробное неравенство Соболева, однородное группа Ли.

Kassymov A.

Al-Farabi Kazakh National University

050040, Almaty, 71 Al-Farabi ave.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.

E-mail: kassymov@math.kz

Suragan D.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling

050010, Almaty, Kazakhstan, 125 Pushkin Str.

E-mail: suragan@math.kz

Received 16.03.2018

МРНТИ 27.17.17, 27.03.45

**СЛОЖНОСТЬ ИЗОЛЯТОРОВ НИЖНЕГО
ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДА В ВЫЧИСЛИМЫХ
НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ**

И.В. Латкин, Н.Д. Мархабатов

Аннотация. Изучается сложность вычисления изоляторов членов нижнего центрального ряда (централов) у вычислимых групп без кручения, а также вычислимость фактор групп по этим подгруппам. Эти вопросы тесно связаны с проблемой вхождения в члены верхнего и нижнего центральных рядов вычислимых групп. Последний вопрос интересен тем, что многие алгебраические свойства нильпотентных групп доказываются индукцией по степени нильпотентности; для этой цели часто рассматриваются члены верхнего и нижнего центральных рядов и фактор группы по ним. Естественно было ожидать, что этот метод применим и к вычислимым группам. Однако, эти надежды не оправдались: оказалось, что уже изоляторы централов и факторы по ним могут иметь сложное строение даже для вычислимых нильпотентных групп без кручения, в частности, фактор группы по этим изоляторам у таких групп могут быть невычислимыми.

Ключевые слова. Нильпотентная группа без кручения, вычислимость, конструктивизация, базисные коммутаторы, фактор группа, централ, изолятор, нумерация, разрешимость, тьюринговая степень.

1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все определения и понятия из теории групп, которые здесь используются без пояснений можно найти в [1]–[3], [4], а сведения из теории конструктивных (вычислимых) моделей – в [5]. Здесь мы напомним лишь основные из них.

1.1 НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Пусть G – группа, записанная мультипликативно. Для $x, y \in G$ (сама группа и её универсум обозначаются одинаково) коммутатор x и y – это

2010 Mathematics Subject Classification: 03C57, 03D40, 03D45, 06F15, 20F10, 20F18.

Funding: Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Комитетом науки МОН РК, гранты 3953/ГФ4 и ИРН: AP05132349, тема проекта: "Вычислимость, интерпретируемость и алгебраические структуры".

© И.В. Латкин, Н.Д. Мархабатов, 2018.

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Если H и K – подгруппы в G , то $[H, K]$ есть подгруппа, порождённая всеми коммутаторами вида $[h, k]$, где $h \in H$ и $k \in K$, т.е. $[H, K] = gr(\{[h, k] \mid h \in H, k \in K\})$. Как обычно, запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа в G .

Нижний центральный ряд группы G – это следующий ряд её подгрупп: $G = \gamma_1 G \supseteq \gamma_2 G \supseteq \gamma_3 G \supseteq \dots$, и он определяется по индукции: $\gamma_1 G = G$, а $\gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G]$ – его $(i+1)$ -й член (центр). Группа G называется *нильпотентной степени r* , если $\gamma_{r+1} G = 1$, но $\gamma_r G \neq 1$.

Простые коммутаторы определяются индуктивно: $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = [[x_1, x_2, \dots, x_n], x_{n+1}]$. Известно, что группа G – *нильпотентная* тогда и только тогда, когда существует $r \geq 1$ такое, что $[x_1, x_2, \dots, x_{r+1}] = 1$ для всех $x_1, \dots, x_{r+1} \in G$. Наименьшее такое r есть *степень* *нильпотентности* для G . Таким образом, все группы, у которых степень *нильпотентности* не выше r , составляют *многообразие \mathfrak{N}_r групп*, задаваемых тождеством $[x_1, x_2, \dots, x_{r+1}] = 1$ [1].

Для любой нормальной подгруппы H группы G имеется естественная проекция $\pi_H : G \rightarrow G/H$, задаваемая как $\pi_H(g) = gH$. *Центр группы G* , обозначаемый $C(G)$, – это множество тех $g \in C(G)$, для которых $gh = hg$ при всяком $h \in G$. Поскольку $C(G)$ – нормальная подгруппа, то взяв центр от $G/C(G)$ и вернувшись обратно к G посредством $\pi_{C(G)}^{-1}$, получаем другую нормальную подгруппу в G . Верхний центральный ряд $1 = \zeta_0 G \trianglelefteq \zeta_1 G \trianglelefteq \zeta_2 G \trianglelefteq \dots$ группы G определяется по индукции: $\zeta_0 G = 1$ и $\zeta_{i+1} G = \pi_{\zeta_i G}^{-1}(C(G/(\zeta_i G)))$; его i -й член $\zeta_i G$ иногда называют i -м *гиперцентром* группы G .

Группа G имеет *степень* *нильпотентности* r , если и только если $\zeta_r G = G$, и при этом r – наименьшее число с таким свойством. Хорошо известно, что если $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G$ есть некоторый центральный ряд группы G степени *нильпотентности* r , то имеет место следующая схема включений:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \zeta_0 G & \triangleleft & \zeta_1 G & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \zeta_{r-1} G & \triangleleft & \zeta_r G & & \\
 & \cong & \parallel & & \nabla \mid & & & & \nabla \mid & & \parallel & \cong & \\
 1 & = & G_0 & \triangleleft & G_1 & \triangleleft & \dots & \triangleleft & G_{r-1} & \triangleleft & G_r & = & G . \quad (1) \\
 & \cong & \parallel & & \nabla \mid & & & & \nabla \mid & & \parallel & \cong & \\
 & & \gamma_{r+1} G & \triangleleft & \gamma_r G & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \gamma_2 G & \triangleleft & \gamma_1 G & &
 \end{array}$$

Напомним, что *периодическая часть* τG группы G – это множество, состоящее из элементов $g \in G$, для которых найдётся целое число $n > 0$ такое, что $g^n = 1$; наименьшее такое n называется *порядком* элемента g . Если периодическая часть τG тривиальна, то группа G называется *неимеющей кручения*. Известно, что периодическая часть нильпотентной группы – нормальная подгруппа [1], [2].

1.2 КОНСТРУКТИВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Пусть $G = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ – счётная группа. Отображение $\nu : D \rightarrow G$ вычислимого подмножества D множества \mathbb{N} натуральных чисел в универсум G называется *нумерацией* группы G , а пара (G, ν) называется *нумерованной группой*.

Нумерованная группа (G, ν) называется *конструктивной* (или вычислимо нумерованной), если имеются вычисляемые функции f, g такие, что при любых $n, m \in D$ выполнены равенства $\nu(n) \cdot \nu(m) = \nu f(n, m)$ и $(\nu(n))^{-1} = \nu g(n)$, а множество $\nu^{-1}(1)$ – вычислимо. Если множество $\nu^{-1}(1)$ – вычислимо перечислимое, то нумерация ν будет *позитивной*. Нумерация ν группы G такая, что (G, ν) есть конструктивная группа, называется *конструктивизацией* (или вычислимой нумерацией) группы G . Группа, которая имеет конструктивизацию, называется *вычислимой*.

Пусть (G, ν) есть нумерованная группа, а M – подмножество в G . Это подмножество – *вычислимо* (или *вычислимо перечислимое* – в.п.), если таково его номерное множество $\nu^{-1}(M)$.

Если H – вычислимо перечислимая (в.п.) подгруппа нумерованной группы (G, ν) , то можно определить нумерацию μ подгруппы H с помощью вычислимой функции f , которая перечисляет номерное множество $\nu^{-1}(H)$: $\mu(x) = \nu f(x)$. Когда нумерация ν – конструктивная, тогда такой же будет μ [5]. Поскольку периодическая часть и все члены нижнего центрального ряда – вычислимо перечислимые во всякой конструктивной группе, согласно их определениям, то эти подгруппы вычислимой группы являются вычислимыми группами.

Если $H \trianglelefteq G$, то для каждой нумерации ν группы G можно определить *каноническую* (или *естественную*) нумерацию ν/H фактор группы G/H посредством $(\nu/H)(m) = \nu(m)/H$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Нумерация ν/H будет позитивной (вычислимой), если H есть вычислимо перечислимая (вычислимая) подгруппа в G при ν [5].

1.3 ИЗОЛЯТОРЫ И БАЗИСНЫЕ КОММУТАТОРЫ

Базисные коммутаторы в свободной нильпотентной группе F с порождающими $x_0, x_1, \dots, x_r, \dots$ определяются индукцией по весу [2], [3], [4], [6].

1) Каждый порождающий x_i – это базисный коммутатор веса 1. Считаем, что они естественно упорядочены между собой: $x_0 < x_1 < \dots < x_r < \dots$.

2) Предположим, что все базисные коммутаторы веса $\leq k$ уже определены и упорядочены между собой. Если a, b – базисные коммутаторы веса $t \leq k$ и $s = k - t + 1$ соответственно и при этом $a > b$, то коммутатор $[a, b]$ будет базисным веса $t + s = k + 1$ в том только том случае, если выполнено дополнительное условие: если $a = [a_1, a_2]$, то $b \geq a_2$.

3) Коммутаторы веса k следуют за коммутаторами весов меньших k и между собой упорядочены так, что по гёделевским номерам двух коммутаторов можно эффективно выяснить: какой из них больше.

Известно, что в свободной нильпотентной группе F ступени n базисные коммутаторы веса $k < n$ образуют свободный базис абелевой фактор группы $\gamma_k F / \gamma_{k+1} F$ [2], [3], [4], [6]. Кроме того, множество гёделевских номеров этих коммутаторов – вычислимое множество, будем называть такие номера *индексами* коммутаторов (при фиксированной гёделевской нумерации). Можно считать, что порядок на этих индексах задаётся упорядочением, упомянутым в пунктах 1)–3) выше.

Согласно определению, если $[a, b]$ – базисный коммутатор, то для любого j коммутатор вида $[\dots [a, b], b], \dots, b]$, где b входит j раз, тоже базисный веса $j + 1$. Удобно обозначить такие коммутаторы как $[a, b^{(j)}]$.

Пусть G – группа и $H \leq G$. *Изолятором* подгруппы H называется группа, порожденная всеми элементами g из G , для которых существует ненулевое число n , что $g^n \in H$, т.е. $IH = gr\{g \in G | (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(g^n \in H)\}$ – изолятор подгруппы H . В частности, $I\gamma_k G = gr\{g \in G | (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(g^n \in \gamma_k G)\}$ – изолятор k -го центра.

Интерес к изоляторам подгрупп объясняется следующими простыми и известными фактами [3], [6]: 1. если G – нильпотентная ступени r группа, то изолятор k -го центра $I\gamma_k G$ – нормальная подгруппа; 2. если G – группа без кручения, то $G/(I\gamma_k G)$ – нильпотентная группа без кручения ступени не более, чем $k - 1$.

2 ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Вопросы о сложности проблемы вхождения в члены верхнего и нижнего центральных рядов у вычислимых групп, а также о вычислимости фактор групп по этим подгруппам интересны тем, что многие алгебраические свойства нильпотентных групп доказываются индукцией по ступени нильпотентности; для этой цели часто рассматриваются члены верхнего или нижнего центральных рядов и фактор группы по ним. Естественно было ожидать, что этот метод применим и к вычислимым группам.

Эти надежды частично оправданы для R -групп, допускающих позитивную нумерацию, и размерность коммутанта которых конечна [7], а также для матричных групп. Кроме того, схема включений (1), приведённая выше, создает иллюзию того, что способность решать проблему вхождения для любого из членов этих центральных рядов позволит нам легко решить такие вопросы для других.

Для конечно порожденных групп это верно. Действительно, пусть $(G; \nu)$ – позитивно нумерованная группа. Тогда $\nu/(\gamma_n G)$ является позитивной нумерацией конечно порожденной нильпотентной группы $G/(\gamma_n G)$. Поскольку проблема равенства слов для конечно порождённых и позитивно нумерованных нильпотентных групп разрешима, группа $(G/(\gamma_n G), \nu/(\gamma_n G))$ – конструктивная. Кроме того, элемент g группы G принадлежит центру тогда и только тогда, когда равенство $[g, x] = 1$ верно для каждого образующего x из G . Поэтому индукцией по параметру i нетрудно доказать, что каждый член $\zeta_i G$ верхнего центрального ряда также может быть эффективно вычислен в вычислимой конечно порожденной группе G .

Таким образом, основное внимание мы уделяем бесконечно порожденным вычислимым нильпотентным группам. Если H и K – вычислимо перечислимые подгруппы конструктивной группы $(G; \nu)$, то коммутатор подгруппы $[H, K]$, как легко видеть, вычислимо перечислим. По индукции получаем, что члены нижнего центрального ряда (или центра) и их изоляторы в конструктивной группе должны быть вычислимо перечислимыми.

В [8], [9], [10] изучалась проблема вхождения в члены нижнего и верхнего центральных рядов для вычислимых групп и вопросы о вычислимости факторов по этим подгруппам. Оказалось, что в общем случае слож-

ность проблемы вхождения в любой нетривиальный член такого ряда может быть независимой от сложности этой проблемы для других членов этих рядов даже для нильпотентных групп без кручения, допускающих вычислимый порядок [8], [9], как показывают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 ([8]). Для любого натурального $n \geq 2$ существует n -ступенно нильпотентная группа $G(n)$ без кручения такая, что для любого набора вычислимо перечислимых (в.п.) тьюринговых степеней $\hat{a} = \langle a_2, \dots, a_n \rangle$ найдётся конструктивизация $\nu(\hat{a})$ группы $G(n)$, при которой сложность проблемы вхождения в i -й централ равна a_i .

ТЕОРЕМА 2 ([9]). Зафиксируем $n > 2$ и два набора в.п. тьюринговых степеней d_1, \dots, d_{n-1} и e_2, \dots, e_n . Существует конструктивная группа без кручения (G, α) степени нильпотентности n , у которой сложность проблемы вхождения в i -й гиперцентр равна d_i для $1 \leq i \leq n-1$, а в i -й централ — e_i для $2 \leq i \leq n$. Кроме того, (G, α) допускает вычислимый порядок, поэтому это вычислительное свойство независимости выполняется и для вычислимых упорядоченных нильпотентных групп.

В случае нильпотентных групп, имеющих кручение, сложность проблемы вхождения в централы и гиперцентры может не зависеть также и от вычислимой нумерации всей группы [8], [10]. Кроме того, подобная независимость наблюдается и в вопросе о вычислимости факторов по членам этих крайних центральных рядов [8], [10].

Прежде чем сформулировать следующий факт, заметим вначале, что при всякой конструктивизации группы G сложность проблемы вхождения в нормальную подгруппу H не может быть нулевой, если сама H или её фактор группа G/H — невычислимая. Это наблюдение вызывает необходимость следующего определения. Набор $\langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$ степеней называется *согласованным* с набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, состоящим из нулей и единиц, если для всех $1 \leq j \leq n-1$ выполняется условие $\alpha_j = \beta_j = 0 \leftrightarrow d_j = 0$.

ТЕОРЕМА 3 ([10]). Зафиксируем $n \geq 2$ и набор $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ из нулей и единиц. Пусть d_1, \dots, d_{n-1} и e_2, \dots, e_n — наборы в.п. тьюринговых степеней такие, что набор $\langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$ согласован с $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Тогда существует вычислимая группа $H(\hat{d}, \hat{e})$ степени нильпотентности n , обладающая следующими свойствами:

1) для каждой вычислимой нумерации ν группы $H(\hat{d}, \hat{e})$ верно, что а) сложность проблемы вхождения в централ $\gamma_i H(\hat{d}, \hat{e})$ равна e_i при $2 \leq i \leq n$ и фактор группа $H(\hat{d}, \hat{e})/\gamma_i H(\hat{d}, \hat{e})$ – вычислимая тогда и только тогда, когда $e_i = 0$; б) сложность проблемы вхождения в гиперцентр $\zeta_i H(\hat{d}, \hat{e})$ равна d_i для $1 \leq i \leq n-1$;

2) для всякой в.п. степени b найдётся конструктивизация μ группы $H(\hat{d}, \hat{e})$ такая, что сложность проблемы вхождения в периодическую часть $\tau H(\hat{d}, \hat{e})$ равна b ; таким образом, эта группа – не автоустойчивая;

3) если $\alpha_j = 1$, то гиперцентр $\zeta_j H(\hat{d}, \hat{e})$ – не вычислим; а когда $\beta_j = 1$, тогда фактор группа $H(\hat{d}, \hat{e})/\zeta_j H(\hat{d}, \hat{e})$ – невычислимая для $1 \leq j \leq n-1$.

3 СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ВХОЖДЕНИЯ В ИЗОЛЯТОРЫ ЦЕНТРАЛОВ

На основании выше приведенных теорем можно утверждать, что не существует необходимых и достаточных условий для вычислимости нильпотентных групп, использующих индукцию по ступени нильпотентности, в общем случае. Долгое время оставалась надежда, что подобные признаки верны для класса нильпотентных групп без кручения, если индукцию вести не по членам верхнего и нижнего центральных рядов, а по изоляторам централов. Однако, и в этом случае картина достаточно сложная и эта надежда не оправдана (см. Теоремы 4 и 5 ниже).

Если $\langle G, \mu \rangle$ – положительно нумерованная нильпотентная группа без кручения, то все фактор группы $\gamma_j G / (I(\gamma_{j+1} G) \cap \gamma_j G)$ и $I(\gamma_j G) / I(\gamma_{j+1} G)$ – положительно нумеруемые абелевы группы без кручения, а потому и вычислимые [11], здесь $I(\gamma_1 G) = \gamma_1 G = G$; в частности, фактор группа $G / I(\gamma_2 G)$ по изолятору второго централа – всегда вычислимая для вычислимой группы G . Вопрос о вычислимости факторов по изоляторам третьего и более централов существенно сложнее, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Для любой вычислимо перечислимой тьюринговой степени d и всякого натурального $n \geq 3$ существует конструктивная n -ступенно нильпотентная группа без кручения $\langle G(d), \mu \rangle$, у которой сложность проблемы вхождения в изолятор n -го централа равна d , т.е. номерное множество $\mu^{-1}(I(\gamma_n G(d)))$ имеет степень d . Фактор группа $G(d) / (I\gamma_n G(d))$ вычислимая тогда и только тогда, когда $d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – вычислимое бесконечное множество, а $A =$

$gr(a_i | i \in U)$ – свободная нильпотентная группа степени $n - 2$, $B = gr(b_j | j \in U)$ – свободная нильпотентная группа степени $n - 1$, $C = gr(c_l | l \in U)$ – свободная нильпотентная группа степени n .

Возьмем вычислимо перечислимое подмножество M во множестве U такое, что тьюрингова степень M равна d и, если $d = 0$, то множества M и $U \setminus M$ оба бесконечные и $0 \notin M$, но $0 \in U$. Следовательно, существует вычислимая функция $f : U \rightarrow M$ с областью определения $U \setminus \{0\}$ и с областью значения M , которая перечисляет множество M без повторов.

Определим группу $G(d)$, как фактор группу прямого произведения групп A , B и C по нормальной группе R , т.е. $G(d) = (A \times B \times C)/R$, где

$$R = gr(\{[a_i, a_0^{(n-3)}]^{-p_i} \cdot [b_i, b_0^{(n-2)}] | i \in U \setminus \{0\}\} \cup \{[b_k, b_0^{(n-2)}] \cdot [c_l, c_0^{(n-1)}]^{-1} | l \in U \setminus \{0\} \wedge k = f(l)\}),$$

здесь и далее p_i – $(i + 1)$ -е простое число.

Поскольку для всяких $i, l \in U$ имеют место следующие вхождения: $[a_i, a_0^{(n-3)}] \in \zeta_1 A = \gamma_{n-2} A$, $[b_i, b_0^{(n-2)}] \in \zeta_1 B = \gamma_{n-1} B$ и $[c_l, c_0^{(n-1)}] \in \zeta_1 C = \gamma_n C$, то несложно понять, что группа $G(d)$ – это прямое произведение групп A , B и C с объединёнными изоморфными центральными подгруппами (или амальгамированное произведение) [4]. Отсюда и из свойств амальгамированного произведения сразу получаем, что каждый из сомножителей A , B и C изоморфно вкладывается в группу $G(d)$. Кроме того, из этого и того, что каждая из групп A , B и C не имеет кручения, будучи свободной нильпотентной группой, вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Группа $G(d)$ не имеет кручения и её фактор группа по центру $G(d)/\zeta_1 G(d)$ – прямое произведение свободных нильпотентных групп $A/\gamma_{n-2} A$, $B/\gamma_{n-1} B$ и $C/\gamma_n C$ степеней нильпотентности $n - 3$, $n - 2$ и $n - 1$ соответственно.*

ЛЕММА 2. *Группа $G(d)$ в многообразии n -ступенно нильпотентных групп \mathfrak{N}_n имеет представление с образующими из множества $\{a_i | i \in U\} \cup \{b_j | j \in U\} \cup \{c_l | l \in U\}$ и определяющими соотношениями*

$$[a_i, b_j] = [a_i, c_l] = [b_k, c_l] = 1, \quad (2)$$

где $i, j, k, l \in U$;

$$[a_i, a_0^{(n-3)}]^{p_i} = [b_i, b_0^{(n-2)}], \quad [b_k, b_0^{n-2}] = [c_l, c_0^{n-1}], \quad (3)$$

если $l \in U \setminus \{0\}$ и $k = f(l)$; а также

$$\text{коммутаторы веса } n-1 \text{ из порождающих группы } A \text{ равны } 1 \quad (4)$$

$$\text{базисные коммутаторы веса } n \text{ из порождающих группы } B \text{ равны } 1. \quad (5)$$

2. Естественная геделевская нумерация μ группы $G(d)$, построенная по ее представлению, описанному выше, является вычислимой, то есть в этом представлении разрешима проблема равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G(d)$, определенное по правилу $\varphi(\tilde{a}_i) = a_i$; $\varphi(\tilde{b}_j) = b_j$, $\varphi(\tilde{c}_k) = c_k$, где \tilde{G} – группа, заданная в многообразии \mathfrak{N}_n представлением с порождающим множеством $\{\tilde{a}_i | i \in U\} \cup \{\tilde{b}_j | j \in U\} \cup \{\tilde{c}_l | l \in U\}$ и определяющими соотношениями вида (2)–(5), если в них везде заменить порождающие a_i на \tilde{a}_i , порождающие b_j на \tilde{b}_j и порождающие c_l на \tilde{c}_l .

Это отображение φ может быть продолжено до гомоморфизма группы \tilde{G} в $G(d)$, так как на соответствующих порождающих группы $G(d)$ выполняются все соотношения, которые есть в \tilde{G} [4]. Действительно, соотношения вида (2), (4) и (5) выполняются уже в прямом произведении $A \times B \times C$, а соотношения вида (3) появляются вследствие факторизации по группе R . Покажем, что ядро этого гомоморфизма – тривиальное, то есть, что это – изоморфизм.

Далее мы доказываем оба утверждения леммы параллельно друг другу. Рассмотрим любое слово от порождающих группы $G(d)$. Используя собирательный процесс [3], [4], [6], это слово можно преобразовать так, чтобы вначале шли по возрастанию (весов и индексов) базисные коммутаторы от порождающих группы A в каких-то целочисленных степенях, затем степени базисных коммутаторов от порождающих группы B (тоже по возрастанию весов и индексов (см. подраздел «Изоляторы и базисные коммутаторы»), а затем степени базисных коммутаторов от порождающих группы C . При этом мы используем только соотношения вида (2), (4) и (5), т.е. рассматриваем это слово, как элемент группы $A \times B \times C$.

Более точно любой элемент \widehat{g} из $G(d)$ можно эффективно представить в виде

$$\widehat{g} = \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_{n-3} \widehat{a}_{n-2} \cdot \widehat{b}_1 \dots \widehat{b}_{n-2} \widehat{b}_{n-1} \cdot \widehat{c}_1 \dots \widehat{c}_{n-1} \widehat{c}_n, \quad (6)$$

где $\widehat{a}_i, \widehat{b}_i, \widehat{c}_i$ – произведение целочисленных степеней базисных коммутаторов веса i . При этом $\widehat{g} = 1$ тогда и только тогда, когда $\widehat{a}_1 = \dots = \widehat{a}_{n-3} = 1$, $\widehat{b}_1 = \dots = \widehat{b}_{n-2} = 1$, $\widehat{c}_1 = \dots = \widehat{c}_{n-1} = 1$ и $\widehat{a}_{n-2} \cdot \widehat{b}_{n-1} \cdot \widehat{c}_n = 1$. При $1 \leq i \leq n-3$, $1 \leq j \leq n-2$ и $1 \leq l \leq n-1$ каждое слово $\widehat{a}_i = a_{i,1}^{\alpha_1} \dots a_{i,k}^{\alpha_k}$, $\widehat{b}_j = b_{j,1}^{\beta_1} \dots b_{j,m}^{\beta_m}$ и $\widehat{c}_l = c_{l,1}^{\gamma_1} \dots c_{l,t}^{\gamma_t}$ представляет единицу тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = \gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$, поскольку по Лемме 1 группы $A/\gamma_{n-2}A$, $B/\gamma_{n-1}B$ и $C/\gamma_n C$ – свободные нильпотентные ступеней нильпотентности $n-3$, $n-2$ и $n-1$.

Чтобы выяснить верно ли, что $\widehat{a}_{n-2} \cdot \widehat{b}_{n-1} \cdot \widehat{c}_n = 1$, рассмотрим базисные коммутаторы, входящие в запись элемента \widehat{c}_n . Если не все они имеют вид $[c_l, c_0^{(n-1)}]^\delta$, то $\widehat{a}_{n-2} \widehat{b}_{n-1} \widehat{c}_n \neq 1$. В противном случае, т.е. когда все они имеют вид $[c_l, c_0^{(n-1)}]^\delta$, переписываем их в виде $[b_k, b_0^{(n-2)}]^\delta$, где $k = f(l)$, используя соотношения вида (3) группы $G(d)$. Тем самым проверка равенства $\widehat{a}_{n-2} \widehat{b}_{n-1} \widehat{c}_n = 1$ сводится к проверке равенства вида $\widehat{a}_{n-2} \widehat{b}'_{n-1} = 1$.

Равенство $\widehat{a}_{n-2} \widehat{b}'_{n-1} = 1$ возможно тогда и только тогда, когда для всякого i , у которого $[a_i, a_0^{(n-3)}]^\gamma$ входит в запись \widehat{a}_{n-2} , в записи \widehat{b}'_{n-1} имеется коммутатор $[b_i, b_0^{(n-2)}]^\delta$ такой, что $p_i \delta = -\gamma$.

Рассмотрим слово

$$\widehat{g} = \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_{n-3} \widehat{a}_{n-2} \widehat{b}_1 \dots \widehat{b}_{n-2} \widehat{b}_{n-1} \widehat{c}_1 \dots \widehat{c}_{n-1} \widehat{c}_n,$$

где каждое слово $\widehat{a}_i, \widehat{b}_i, \widehat{c}_i$ – произведение базисных коммутаторов веса i от соответствующих порождающих с «волнами». Если к этому слову применим отображение φ , то получим элемент вида (6) от порождающих группы $G(d)$, который определяет единичный элемент тогда и только тогда, когда $\widehat{g} = 1$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Фактор группа $G(d)/I\gamma_n G(d)$ по изолятору n -го центра имеет следующее строение:

$$G(d)/I\gamma_n G(d) = (A \times B)/H \times C/\gamma_n C,$$

где $H = gr([a_i, a_0^{(n-3)}]^{p_i} \cdot [b_i, b_0^{(n-2)}]^{-1} \mid i \in U \setminus M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве Леммы 2 мы получили, что всякий элемент \widehat{g} из $G(d)$ представим в виде (6), где $\widehat{a}_i, \widehat{b}_i, \widehat{c}_i$ – произведения базисных коммутаторов веса i . При этом можно считать, что \widehat{c}_n не содержит коммутаторов вида $[c_i, c_0^{(n-1)}]$, а \widehat{b}_{n-1} – коммутаторов вида $[b_i, b_0^{(n-2)}]$. Отсюда несложно понять, что элемент \widehat{g} попадает в изолятор $I\gamma_n G(d)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{g} = \widehat{a}_{n-2}\widehat{c}_n$, причем в запись элемента \widehat{a}_{n-2} входят только базисные коммутаторы вида $[a_i, a_0^{(n-3)}]^\gamma$ с $i \in M$.

ЛЕММА 4. Фактор группа $G(d)/I\gamma_n G(d)$ по изолятору n -го центра не вычислима, если множество M вычислимо перечислимое, но не вычислимое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если G – вычислимая группа, то следующее множество

$$L(G) = \{n \in U \mid \exists y, u, x, z([y, u^{(n-3)}]^{p_n} = [x, z^{(n-2)}])\}$$

должно быть вычислимо перечислимым.

Пусть пара $\langle G, \alpha \rangle$ – вычислимо нумерованная группа. Тогда $G = \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$, где $\alpha(s) = g_s$.

Перечисляем множество $L(G)$ по шагам. Часть $L(G)$, построенную после шага t , обозначим как $L(G)^{(t)}$. Считаем, что $L(G)^{(0)} = \emptyset$.

Шаг 1. Рассмотрим элементы g_0, g_1, g_2, g_3 . Если какие-то два из них равны, то есть $g_i = g_j$ при $i \neq j$ или один из них равен единице, т.е. $g_i = 1$, то переходим к следующему шагу. Если нет, то исследуем 24 вопроса: $[g_i, g_j^{(n-3)}]^{p_0} = [g_k, g_l^{(n-2)}]?$

Если выполняется хотя бы одно из этих 24 равенств, то 0 добавляем к $L(G)^{(1)}$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$. Добавляем к рассмотренным несколько элементов группы, следующих за рассмотренными так, чтобы среди них, по крайней мере, было четыре хороших, т.е. попарно неравных и неединичных элемента (если нужно, добавляем 2, 3 или более элементов).

Затем из этих хороших элементов образуем все возможные упорядоченные четверки элементов g_i, g_j, g_k, g_l и для каждой такой четверки исследуем $t+1$ вопрос:

- 1) если $0 \notin L(G)^{(t)}$, то верно ли $[g_i, g_j^{(n-3)}]^{p_0} = [g_k, g_l^{(n-2)}]?$
- 2) если $1 \notin L(G)^{(t)}$, то верно ли $[g_i, g_j^{(n-3)}]^{p_1} = [g_k, g_l^{(n-2)}]?$

...

$t+1$) если $t \notin L(G)^{(t)}$, то верно ли $[g_i, g_j^{(n-3)}]^{p^t} = [g_k, g_l^{(n-2)}]$?

Таким образом, если число s принадлежит $L(G)$, то на каком-то шаге t оно попадет в $L(G)^{(t)}$, а именно на том шаге, на котором обнаружатся элементы $\alpha(i) = g_i, \alpha(j) = g_j, \alpha(k) = g_k, \alpha(l) = g_l$ такие, что $[g_i, g_j^{(n-3)}]^{p^s} = [g_k, g_l^{(n-2)}]$. Поэтому множество $L(G)$ – вычислимо перечислимое.

На основании Леммы 3 мы видим, что множество $L((G(d)/I\gamma_n G(d)))$ – дополнение множества U до вычислимо перечислимого множества M . Поэтому фактор группа $G(d)/I\gamma_n G(d)$ – невычислимая, если множество M вычислимо перечислимое, но невычислимо. Таким образом, мы завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что фактор группа $G(d)/I\gamma_n G(d)$ является позитивно нумерованной нильпотентной ступени $n - 1$ группой без кручения, которая не имеет вычислимых нумераций. Тем самым мы получаем новое, более простое доказательство следующего факта, ранее доказанного в [12].

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует позитивно нумерованная нильпотентная ступени 2 группа без кручения, которая не имеет вычислимых нумераций.

ТЕОРЕМА 5. Для каждого натурального $n \geq 3$ и произвольного множества $\hat{d} = \langle d_3, \dots, d_n \rangle$ вычислимо перечислимых тьюринговых степеней существует вычислимая нильпотентная ступени n группа без кручения $G(\hat{d})$, обладающая следующими свойствами:

- (i) сложность проблемы вхождения в изоляторы i -го центра не меньше d_i для любой конструктивизации группы $G(\hat{d})$;
- (ii) фактор группа $G(\hat{d})/\gamma_i G(\hat{d})$ вычислима тогда и только тогда, когда $d_i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при всяком натуральном $n \geq 3$ конструктивная группа $\langle G(d), \mu \rangle$, построенная при доказательстве Теоремы 4, обладает ещё и тем свойством, что изоляторы всех её централов $I\gamma_i G(d)$ при $i < n$ суть вычислимые. Действительно, при доказательстве Лемм 1–3 мы выяснили строение этой группы: её фактор группа по изолятору $(n-1)$ -го центра есть $G(d)/I\gamma_{n-1} G(d) = (A/H_1) \times (B/\gamma_{n-1} B) \times (C/\gamma_{n-1} C)$, где $H_1 = gr([a_i, a_0^{(n-3)}] \mid i \in U \setminus \{0\})$, в частности, $A/H_1 \cong gr(a_0) \cong \mathbb{Z}$ при $n=3$ и $G(d)/I\gamma_{n-j} G(d) = (A/\gamma_{n-j} A) \times (B/\gamma_{n-j} B) \times (C/\gamma_{n-j} C)$ – прямое произведение свободных нильпотентных групп ступени $n-j-1$ при $j \geq 2$. Кроме

того, учитывая Лемму 3 и немного изменив рассуждения в доказательстве Леммы 4, можно увидеть, что сложность проблемы вхождения в изолятор n -го централа не меньше d для любой конструктивизации группы $G(d)$.

На основании этого возьмём $n - 2$ бесконечных вычислимых попарно непересекающихся множества U_3, \dots, U_n ; в них выберем вычислимо перечислимые множества M_3, \dots, M_n степеней d_3, \dots, d_n , соответственно; по каждому из множеств M_j построим соответствующую группу $G(d_j)$ степени нильпотентности j , как это описано в доказательстве Теоремы 4 (вместо порождающих a_0, b_0 и c_0 берём элементы из соответствующих подгрупп с минимальными индексами). И, наконец, определяем $G(\hat{d}) = G(d_3) \times \dots \times G(d_n)$. Эту группу рассматриваем с естественной нумерацией прямого произведения, построенной по гёделевским нумерациям μ_j групп $G(d_j)$. Сразу из определения этой нумерации вытекает, что она – вычислимая и номерные множества у всех прямых $G(d_j)$ сомножителей – тоже вычислимые.

Поскольку $I(\gamma_i G(\hat{d})) = I\gamma_i G(d_3) \times \dots \times I\gamma_i G(d_n)$, то ввиду Теоремы 4 и отмеченных в первом абзаце этого доказательства фактов о группах $G(d_j)$ получаем, что группа $G(\hat{d})$ – искомая.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1996. – 287 с.
- 2 Холл М. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962. – 457 с.
- 3 Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. – 1968 – Т. 12, № 1. – С. 3-36.
- 4 Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
- 5 Ершов Ю.Л., Гончаров С.С. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга. Сибирская Школа Алгебры и Логики XII., 1999. – 360 с.
- 6 Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. Нильпотентные группы. – Усть-Каменогорск: изд. ВКГТУ им. Д.Серикбаева, 2012. – 48 с.
- 7 Хисамиев Н. Г. О позитивных и конструктивных группах // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 1133-1141.
- 8 Латкин И.В. Алгоритмическая сложность проблемы вхождения в коммутанты и члены нижнего центрального ряда // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 5. – С. 102-110.

9 Csima B. F., Solomon R. The complexity of central series in nilpotent computable groups // *Annals of Pure and Applied Logic*. – 2011. – No. 162. – P. 667-778.

10 Latkin I.V. On the computability of the terms and their quotient groups in the upper and lower central series of the computable groups // *Mathematical Journal*. – 2017 – V. 17, No. 2(64). – P. 150-174.

11 Хисамиев Н. Г. Иерархии абелевых групп без кручения // *Алгебра и логика*. – 1986. – Т. 25, № 2. – С. 205-226.

12 Латкин И.В., Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // *Алгебра и Логика*. – 1996. – Т. 35, № 3. – С. 308-313.

Латкин И.В., Мархабатов Н.Д. ЕСЕПТЕЛІМДІ НИЛЬПОТЕНТТІ ТОПТАРДЫҢ ТӨМЕНГІ ОРТАЛЫҚ ҚАТАРЫНЫҢ ОҚШАУЛАҒЫШТАРЫНЫҢ КҮРДЕЛІЛІГІ

Есептелімді бұралымсыз топтардың төменгі орталық қатарының мүшелерінің оқшаулағыштарын (централдарын) есептеудің күрделілігі, сондай-ақ осы ішкі топтар бойынша фактор топтардың есептелімділігі қарастырылады. Бұл сұрақтар есептелімді топтардың жоғарғы және төменгі орталық қатарларына мүше болып ену мәселесімен тығыз байланысты. Соңғы аталған сұрақтың қызықтылығы нильпотентті топтардың көптеген алгебралық қасиеттері нильпотенттік баспалдағы бойынша индукция арқылы дәлелденеді; осы мақсатта көбінесе жоғарғы және төменгі орталық қатарлардың мүшелері және олар бойынша фактор топтар қарастырылады. Әрине бұл әдістің есептелімді топтарға да қолдануға болатындығы күтүледі. Алайда, бұл үміт ақталмады - тіпті централ оқшаулағыштарының және олар бойынша факторлардың есептелімді бұралымсыз нильпотентті топтары үшін де құрылымы күрделі болатыны анықталды, атап айтқанда, осындай топтардың оқшаулағыштар бойынша фактор топтары есептелімді болмауы мүмкін.

Кілттік сөздер. Бұралымсыз нильпотентті топ, есептелімділік, конструктивтеу, базистік коммутаторлар, фактор топ, централ, оқшаулағыш, нөмірлеу, шешілімділік, тьюрингтік дәреже.

Latkin I.V., Markhabatov N.D. THE COMPLEXITY OF THE ISOLATORS OF THE LOWER CENTRAL SERIES IN THE COMPUTABLE NILPOTENT GROUPS

We study the complexity of calculating the isolators of the terms of the lower central series (centrals) for computable torsion-free groups, and also the computability of the factor groups by these subgroups. These questions are closely related to the occurrence problem in the terms of the upper and lower central series of computable groups. The last question is interesting because many algebraic properties of nilpotent groups are proved by induction on the nilpotent class; for this purpose, one often considers the terms of the upper and lower central series and their quotient groups. It was natural to expect that this method is applicable to computable groups. However, these hopes were not justified — it turned out that already the isolators of centrals and their factors can have a complex structure even for computable nilpotent torsion-free groups, in particular, these factor groups may be non-computable in such groups.

Keywords. Nilpotent torsion-free group, computability, constructivization, basic commutators, factor group, central, isolator, numbering, solvability, Turing degree.

Латкин И.В.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет

им. Д. Серикбаева

070010, Усть-Каменогорск, ул. Протозанова, 69

E-mail: lativan@yandex.kz

Мархабатов Н.Д.

Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева

010000, Астана, пр. Республики, 18а

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru

Статья поступила в редакцию 12.02.2018

МРНТИ 30.17.27

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ВЛИЯНИЯ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ НА ДИНАМИКУ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ**

А.П. МАКАШЕВА, А.Ж. НАЙМАНОВА

Аннотация. В работе предлагается математическая модель сверхзвукового плоского сдвигового течения газовых смесей с наличием вдува твердых частиц на границе раздела потоков. Предложен алгоритм решения системы уравнений Навье-Стокса для газовой фазы и системы обыкновенных дифференциальных уравнений для твердых частиц на основе эйлерово-лагранжевого представления с межфазным взаимодействием газов и твердых частиц. Проведено детальное изучение влияния газовой фазы, в частности, влияния входных чисел Маха на закономерности распределения частиц и их захват вихревыми структурами.

Ключевые слова. Слой смешения, вдув частиц, сверхзвуковой поток, многокомпонентная газовая смесь.

Исследование турбулентных течений двухфазных смесей, состоящих из газа и твердых частиц, является актуальным ввиду их широкого практического приложения, например, в камерах сгорания при сжигании твердого и жидкого топлива. Динамика течения таких систем осложнена нестационарным поведением слоя смешения с образованием больших вихревых структур. Турбулентная несущая фаза оказывает значительное влияние на характер дисперсий примеси. Обзор численных исследований влияния вихревых структур на распространение дисперсной фазы в пространственном сдвиговом слое смешения с малыми числами Маха приведен в [1]–[5], а их влияние на распространение дисперсной фазы для различных диаметров частиц представлено в [4]. К примеру, в работе [5] показано, что на движение частиц в турбулентном сдвиговом слое оказывают влияние, в основном, низкие, средние и высокие числа Стокса.

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40.

© А.П. Макашева, А.Ж. Найманова, 2018.

Однако, в этих работах, в основном, производится изучение течения однокомпонентных газов и практически отсутствует численное моделирование частиц в сдвиговом течении многокомпонентных газовых смесей. Это обусловлено, во-первых, со сложностью протекающих в таких системах процессов и большим количеством определяющих параметров, во-вторых, многообразием систем газ-твердые частицы.

Целью настоящей работы является численное моделирование турбулентного течения многокомпонентного газового слоя смешения с вдувом твердых частиц. Для моделирования квазидвумерного турбулентного слоя смешения используется 2D-DNS (Direct Numerical Simulation) метод. Изучено влияние газовой фазы на закономерности распределения частиц при различных входных скоростях потока.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается взаимодействие продольно параллельных двумерных потоков с наличием вдува твердых частиц (Рис. 1). Нижний поток состоит из водородно-азотной смеси, верхнее течение представляет собой воздушный поток.

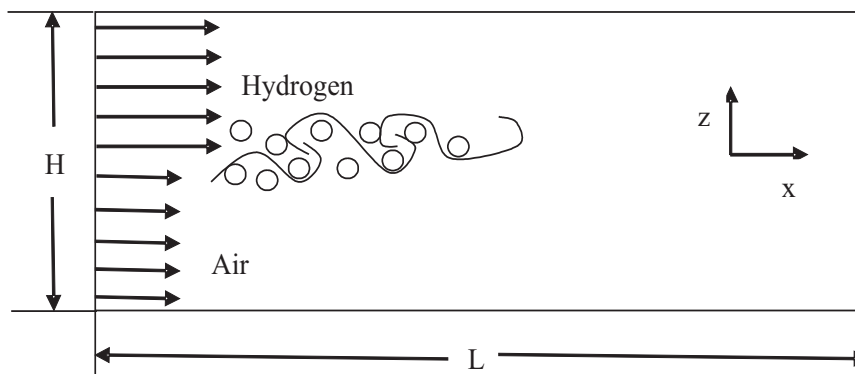


Рисунок 1 – Схема течения

2 МОДЕЛЬ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

Исходной является система двумерных Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, записанная в декартовой системе координат в

консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u w \\ (E_t + p) u \\ \rho u Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p) w \\ \rho w Y_k \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T,$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu_l}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_x) \right), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu_l}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_x) \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_l}{Re} (u_x + w_x),$$

$$q_z = \frac{\mu_l}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{zk}, \quad q_x = \frac{\mu_l}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{xk},$$

$$J_{kx} = -\frac{\mu_l}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{kz} = -\frac{\mu_l}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система уравнений (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих параметров приняты параметры потока $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$, давление p и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, удельная энтальпия h_k – к RT_∞/W_∞ , молярные удельные теплоемкости C_{pk} – к R , Y_k – массовая концентрация k -ой компоненты, W_k – молекулярный вес k -ой компоненты, Re, Pr, M, Sc – числа Рейнольдса, Прандтля, Маха и Шмидта соответственно, $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ – тензоры вязких напряжений, q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} – тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика), μ_l – коэффициент ламинарной вязкости, которая определяется по формуле Уилке [6].

Уравнение состояния смеси совершенных газов имеет вид

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W},$$

где $W = \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}$ – молярный вес смеси всех газов, причем $\sum_{k=1}^N Y_k = 1$.

Уравнения для полной энергии

$$E_t = \frac{\rho h}{\gamma_\infty M_\infty^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2),$$

где $h = \sum_{k=1}^N Y_k h_k$ – удельная энтальпия смеси, $h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT$ – удельная энтальпия k -ой компоненты.

3 НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На входе задаются параметры потока двух газов следующим образом: верхний поток:

$$u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R T_\infty}{W_\infty}}, \quad w = w_\infty, \quad p = p_\infty, \quad T = T_\infty, \quad Y_k = Y_{k\infty}$$

при $x = 0, 0 \leq z < H_1$,

нижний поток:

$$u = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R T_0}{W_0}}, \quad w = w_0, \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad Y_k = Y_{k0}$$

при $x = 0, H_1 + \delta \leq z < H_2$.

В качестве разделяющей этих потоков служит бесконечно тонкая пластина конечной толщины. В этой конфигурации область смешения двух потоков газа образуется вдоль сдвигового слоя на границе между двумя потоками. Переходный участок между двумя потоками задается функцией гиперболического тангенса

$$\phi(z) = 0.5(\phi_0 + \phi_\infty) + 0.5(\phi_0 - \phi_\infty) \tanh(0.5z/\delta_\theta),$$

где $\phi = (u, w, Y_k, T)$, $\delta_\theta(x) = \int_{-H/2}^{+H/2} (\bar{\rho}(\tilde{u} - u_\infty)(u_0 - \tilde{u})/(\rho_\infty \Delta u^2)) dz$ – толщина потери импульса.

Для получения пары закручивающихся вихрей, на входе задаются нестационарные граничные условия для компонент скорости в следующем виде:

$$v(y, t) = A \cdot \Delta U \cdot \text{Gaussian}(y) \cdot \sum_{m=0}^3 \sin(\omega \cdot t + \phi_m)$$

$$\text{Gaussian}(y) = \exp(-y^2/2\sigma^2),$$

где A – амплитуда пертурбации, которая определяется из соотношения $A \cdot \Delta U$, где данное произведение должно равняться 0.2 – 0.3 процентов от скорости воздушного потока на входе, $\Delta U = (u_\infty - u_0)$ – разность скоростей верхнего и нижнего потоков, $\text{Gaussian}(y)$ – функция Гаусса, максимальное значение которой равно единице при $y = 0$, ее ширина $\pm 2\sigma$ была подобрана равной толщине вихревого слоя на входном участке, $\omega = (a_0 + a_\infty)/(2\delta\theta)$ – частота возбуждения, ϕ_m – случайная величина.

4 МОДЕЛЬ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Исходными для частиц являются лагранжевые уравнения для траектории (x_p) и скорости (u_p) частиц:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_p = \vec{u}_p,$$

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_p = F',$$

$$F' = D_p(\vec{u} - \vec{u}_p) + \frac{1}{Fr}.$$

Сила сопротивления D_p , действующая со стороны газа на частицу радиусом r_p , описывается согласно работе [7].

Так как при движении частицы в слое смешения происходит ее теплообмен с окружающей средой, то этот процесс описывается уравнением энергии для частиц с учетом конвективного теплообмена:

$$m_p C_p \frac{dT_p}{dt} = 2\pi r_p K_{conv} (T - T_p) N u_p,$$

где m_p – масса частицы p -ой компоненты, $\rho_p = m_p / (\frac{4}{3}\pi r_p^3)$ – плотность твердой частицы p -ой компоненты, $K_{conv} = (\mu c_p) / Pr_p$ – коэффициент конвективного теплообмена между частицей и окружающей средой, T_p – температура частицы p -ой компоненты, Fr и Nu_p – числа Фруда и Нуссельта.

5 МЕТОД РЕШЕНИЯ

В настоящей работе конвективные члены аппроксимируются с использованием ENO-схемы третьего порядка точности, подробно изложенной в работе [8]. Предполагается, что турбулентное течение является квазидвумерным, а решение исходной системы производится 2D-DNS подходом без привлечения дополнительных замыкающих моделей турбулентности. Лагранжевые уравнения решаются явно методом Эйлера.

По известным значениям исходных переменных вычисляется поле температуры с помощью уравнения

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} (\tilde{H}(T) - RT) - \frac{1}{2}\rho (u^2 + w^2) = 0, \quad (2)$$

где \tilde{H} – молярная энтальпия смеси газов. Решение алгебраического уравнения (2) относительно температуры осуществляется итерационным методом Ньютона-Рафсона, обладающим квадратичной скоростью сходимости [9].

6 РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Результаты численного расчета турбулентного сдвигового течения многокомпонентных газов проводились со следующими параметрами: $M_0 = 2.1$, $T_0 = 2000 \text{ K}$, $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, $M_\infty = 2.0$, $T_\infty = 2000 \text{ K}$, $p_\infty = 101325 \text{ Pa}$. Давление на входе предполагается постоянным, $p_\infty = p_0$. На выходной, нижней и верхней границах задаются граничные условия неотражения, где потоки газов и пертурбации проходят границу, не отражаясь обратно [10]–[11]. Расчет производился на сетке размером 526×201 , которая была выбрана в ходе численного эксперимента по влиянию числа узлов сетки на сходимость задачи.

В качестве начальных данных для массовых концентрации компонент смеси газов было принято: нижний поток, состоящий из водородно-азотной смеси: $Y_{H_2} = 0.5$, $Y_{N_2} = 0.5$; верхний воздушный поток: $Y_{O_2} = 0.2$, $Y_{N_2} = 0.8$.

Для детального изучения распространения частиц в сдвиговом слое смешения был произведен вдув частиц алюминия одновременно с четырех входных точек $z = 20, 30, 40, 50$ с начальными условиями ($x = 0$): $u_{p0} = u_{g0}$, $\rho_{p0} = 2560$ кг/м³, давление и температура частиц на входе предполагались постоянными и равными значениям воздушного потока. Частицы вдувались в поток равномерно, по одной частице через промежуток времени $\Delta t = 5$. Размер частиц равен $d_p = 150$ мкм.

Из картины полей вектора скорости (Рис. 2) видно что, в тонком слое смешения струя, распространяющаяся с большей скоростью, расширяется в сторону спутного потока. Как следует из Рис. 2 а, процесс закручивания слоя смешения развивается в сторону потока с меньшей скоростью. Нижний воздушный поток обладает небольшой кинетической энергией, т.е. он не в состоянии продвинуться в область высокого давления. Видно, что с течением времени нижний воздушный поток стремится выравняться со скоростью струи.

Распределение изолинии водорода (Рис. 3) демонстрируют вихревую систему в слое смешения. Видно, что начальная неустойчивость приводит к появлению пары вихрей с обеих сторон слоя смешения, которые в дальнейшем разрываются. Вместо сорвавшейся пары вихрей образуются новые, более четко выраженные вихри (Рис. 3б). Начальные вихри индуцируют маленькое поперечное перемещение вниз для заново сгенерированной пары вихрей, которая может ускоряться, переносясь вниз по потоку. При этом соседние вихри вниз по потоку имеют более крупную структуру.

Из динамики распределения частиц (Рис. 4) следует, что с течением времени усиливается воздействие несущей газовой фазы на дисперсную фазу, которая проявляется в том, что частицы, увлекаясь газовым потоком и попадая в вихревую зону, двигаются по круговой траектории (Рис. 4б, в).

Увеличение входного числа Маха водородно-азотной смеси M_∞ (Рис. 5, $M_0 = 2$, $M_\infty = 3$) привело к тому, что скорости верхней струи и нижнего потока двигаются почти одинаково (Рис. 5а), что четко прослеживается из изолинии водорода (Рис. 5б). Из сравнения рисунков 4 и 5 следует, что вихревая структура развивается симметрично относительно входной поверхности раздела, которая в дальнейшем приводит к равномерному распространению частиц в нижнем и верхнем потоках (Рис. 5в).

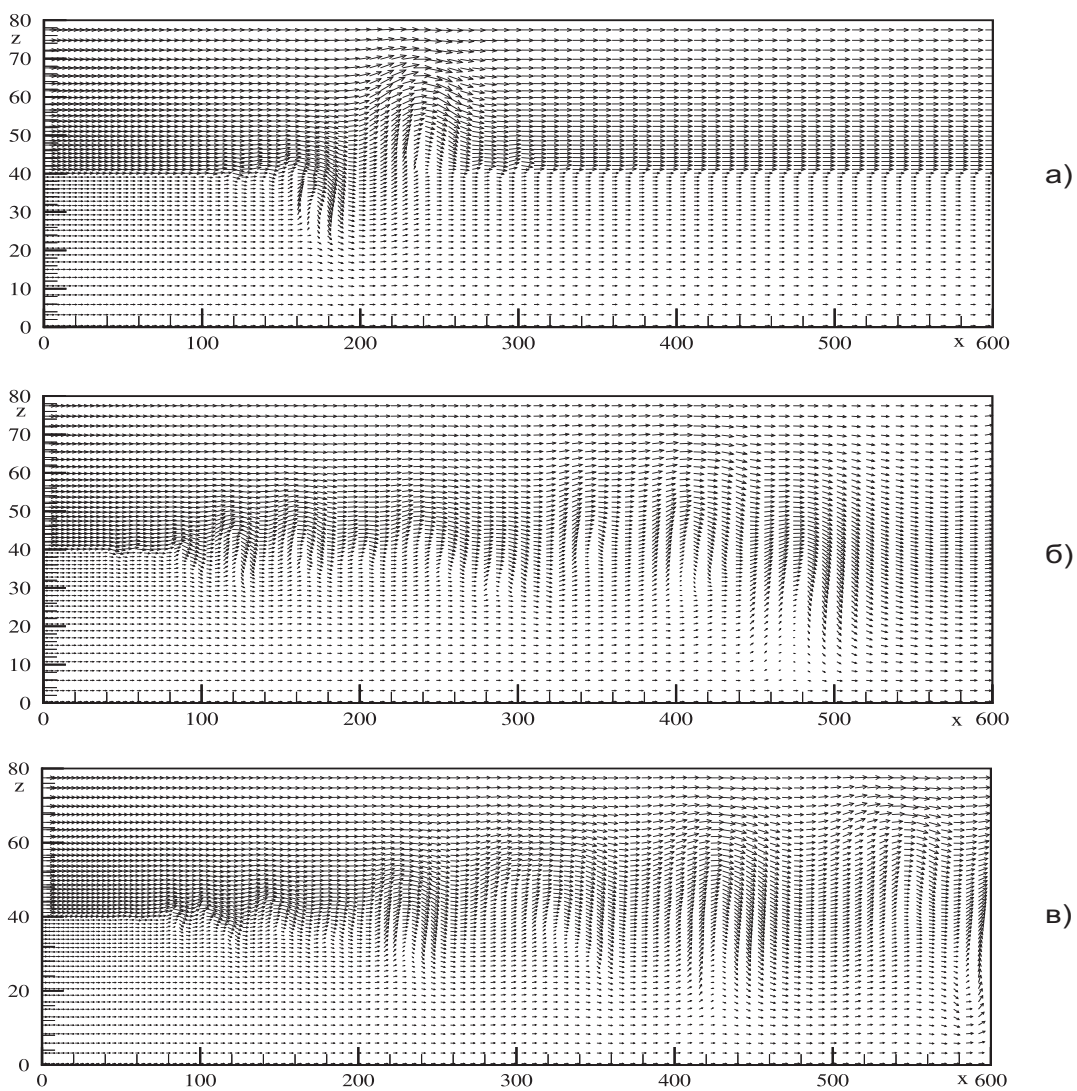


Рисунок 2 – Поле вектора скорости в момент времени:
а) $t = 150$, б) $t = 375$, в) $t = 1350$; $M_0 = 2.1$, $M_\infty = 2$

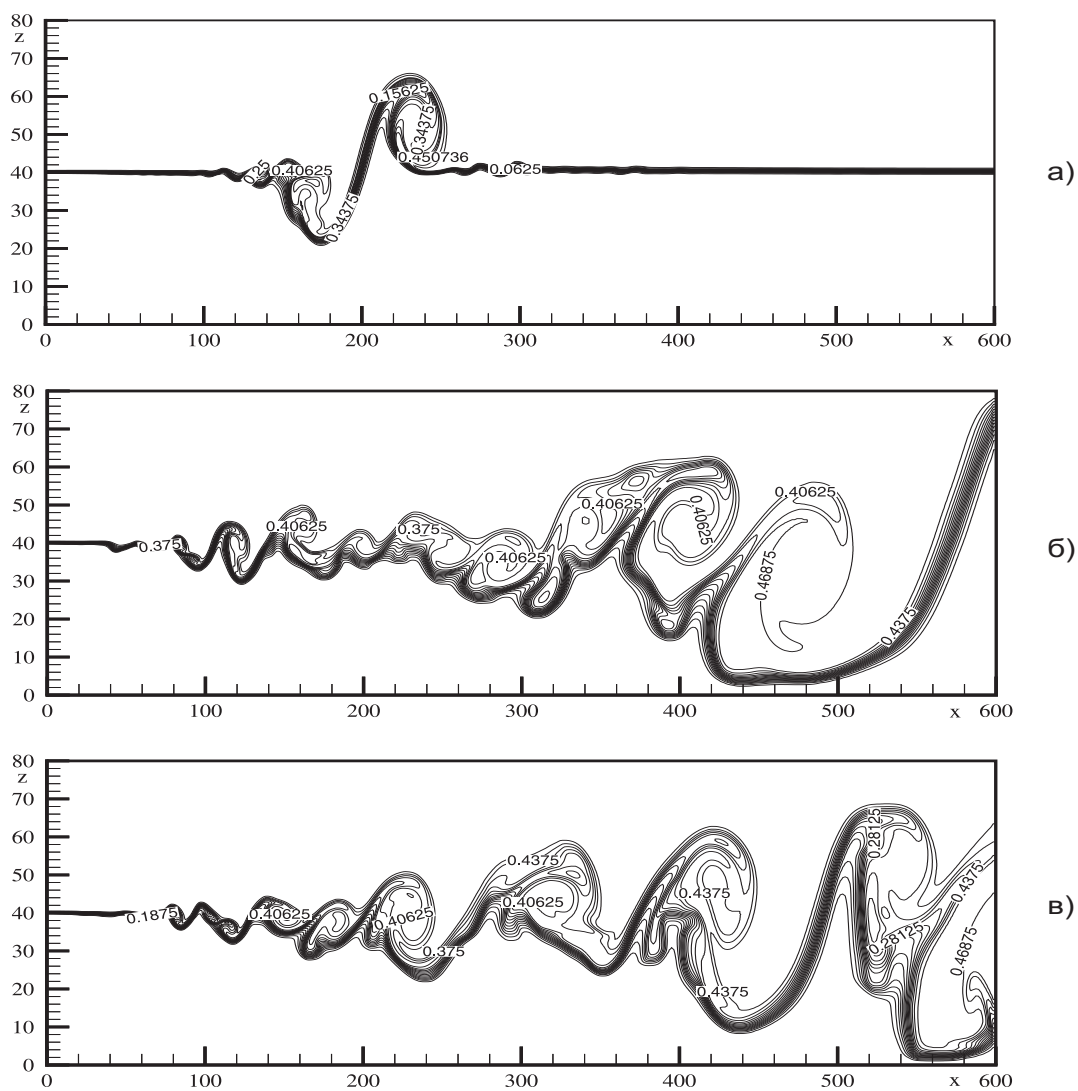


Рисунок 3 – Изолинии водорода в момент времени:

а) $t = 150$, б) $t = 375$, в) $t = 1350$; $M_0 = 2.1$, $M_\infty = 2$

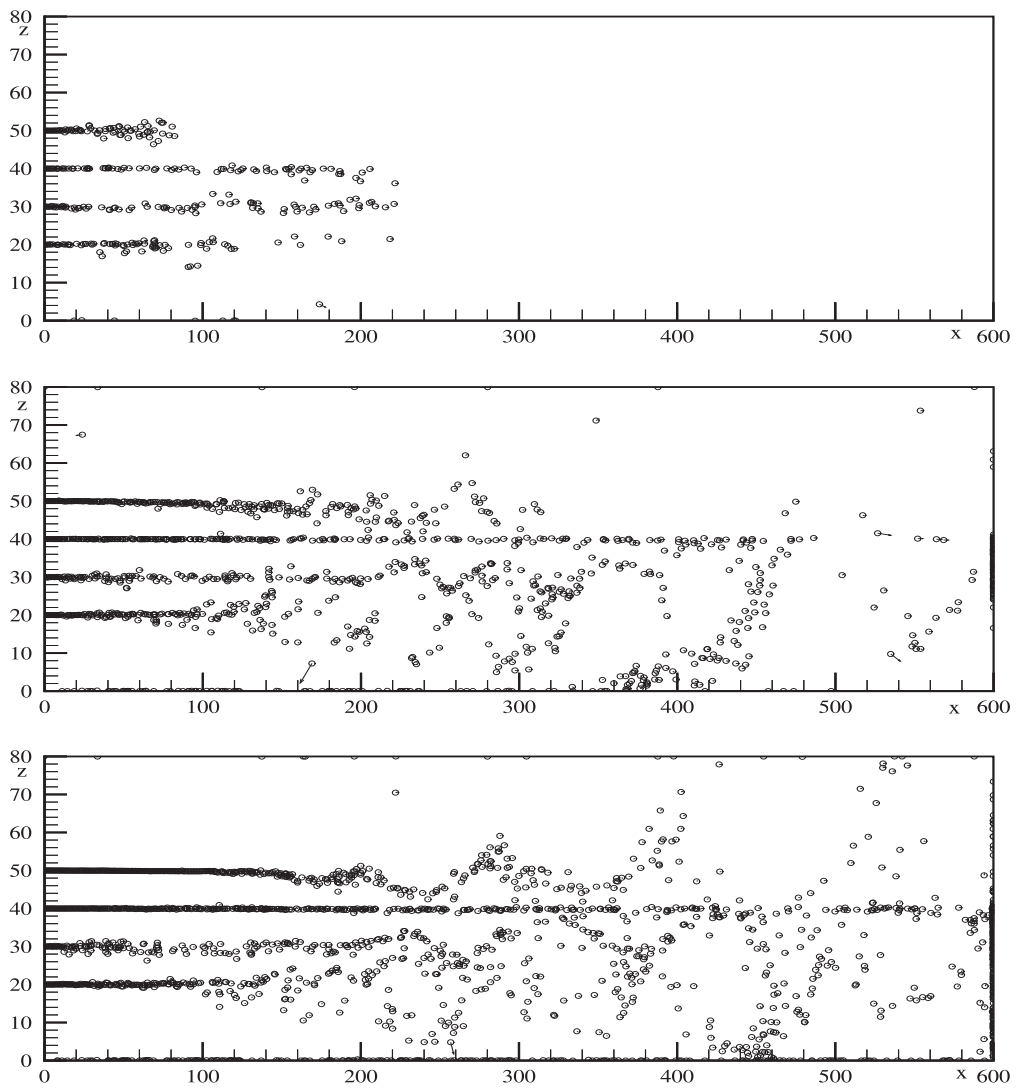


Рисунок 4 – Распределение частиц в момент времени:
а) $t = 150$, б) $t = 375$, в) $t = 1350$; $M_0 = 2.1$, $M_\infty = 2$

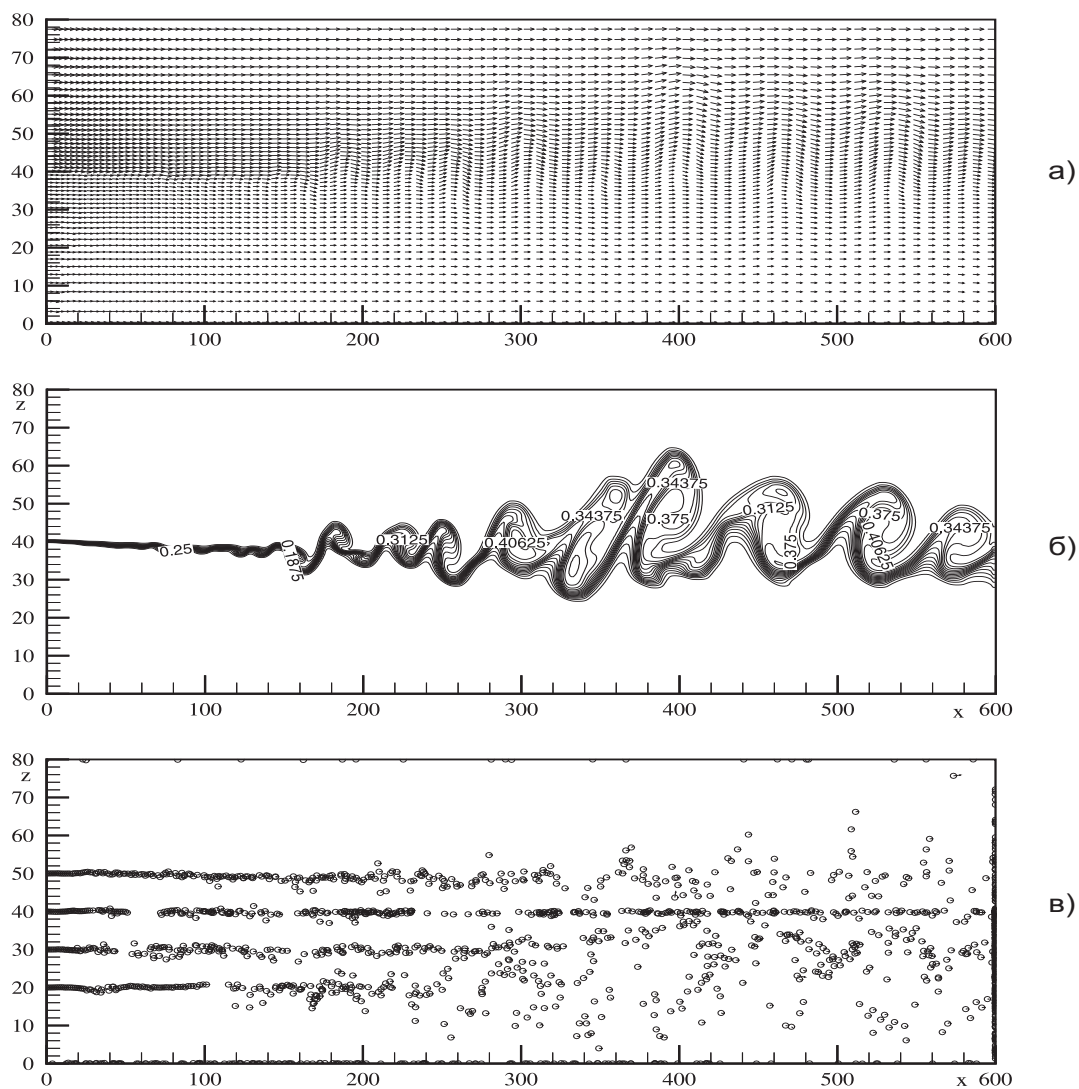


Рисунок 5 – Поле вектора скорости (а),
 концентрации водорода (б) и распределение частиц (в)
 в момент времени $t = 1350$ $M_0 = 3$, $M_\infty = 2$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Jacobs G., Don W. S. and Dittmann T. High-Order Resolution Eulerian-Lagrangian Simulations of Particle Dispersion in the Accelerated Flow behind a Moving Shock // *Theoretical and Computer Fluid Dynamics*. – 2010. – V. 5. – P. 1052-1069.
- 2 Moser R.D., Rogers M.M. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence // *Journal Fluid Mechanics*. – 1993. – V. 247. – P. 275-320.
- 3 Stanley S., Sarkar S. Simulation of spatially developing two-dimensional shear layer and jets // *Theoretical Computer Fluid Dynamics*. – 1997. – V. 9. – P. 121-147.
- 4 Aggarwal S.K., Yapo J.B., Grinstein F.F., Kailasanath K. Numerical simulation of particle transport in planar shear layers // *Computers and Fluids*. – 1996. – V. 25. – P. 39-59.
- 5 Zhiwei Hu, Xiaoyu Luo. Numerical Simulation of Particle Dispersion in a Spatially Developing Mixing Layer // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. – 2002. – V. 15. – pp. 403-420.
- 6 Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. – М.: Наука, 1989. – 366 с.
- 7 Chein R. and Chung J.N. Effects of vortex pairing on particle dispersion in turbulent shear flows // *Multiphase Flow*. – 1987. – V. 13. – P. 775-785.
- 8 Beketaeva A., Naimanova A. Numerical study of spatial supersonic flow of a perfect gas with transverse injection of jets // *Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2011. – V. 52. – P. 896-904.
- 9 Kee R. CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics. – SANDIA, 1989. – 165 p.
- 10 Thompson K.W. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems // *J. Comp. Phys*. – 1987. – V. 68. – P. 1-24.
- 11 Poinso T.J. and Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // *J. Comp. Phys*. – 1992. – V. 101. – P. 104-129.

Макашева А.П., Найманова А.Ж. ҚАТТЫ БӨЛШЕКТЕРДІҢ ТАРАЛУ ДИНАМИКАСЫНА ГАЗДЫҚ ФАЗАНЫҢ ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУДІ САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Жұмыста ағындардың бөліну шекарасында қатты бөлшектердің үрленуін қамтыған газ қоспаларының дыбыс жылдамдығынан жоғары жылдамдықтағы жазық жылжымалы ағынының математикалық моделі ұсынылады. Фаза аралық өзара әсерлесуі бар газдар мен қатты бөлшектердің

эйлерлік-лагранждық кейіптемесі негізінде газдық фаза үшін Навье-Стокс теңдеулер жүйесін және қатты бөлшектер үшін қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге арналған алгоритм ұсынылған. Газдық фазаның, оның ішінде Махтың кіру сандарының, бөлшектердің таралу заңдылықтарына әсері және олардың құйындық құрылымдармен қармалуы егжей-тегжейлі зерттелді.

Кілттік сөздер. Араласу қабаты, бөлшектерді үрлеу, дыбыс жылдамдығынан жоғары жылдамдықтағы ағын, көпкомпонентті газ қоспасы.

Makasheva A.P., Naimanova A.Zh. NUMERICAL SIMULATION OF INVESTIGATION OF THE GAS PHASE INFLUENCE ON THE DYNAMICS OF THE SOLID PARTICLES PROPAGATION

This work deals with a mathematical model of a supersonic plane mixing flow of gas mixtures with the presence of injection of solid particles at the interface of flows. An algorithm for solving the system of Navier-Stokes equations for the gas phase and for the system of ordinary differential equations for solid particles based on the Euler-Lagrangian representation with interphase interaction of gases and solid particles is proposed. A detailed study of the influence of the gas phase, in particular the influence of Mach numbers, on the regularities of particle distribution and their capture by vortex structures has been undertaken.

Keywords. Mixing layer, injection of particles, supersonic flow, multicomponent gas mixture.

Макашева А.П.

Институт математики и математического моделирования

050100, Алматы, ул. Пушкина, 125

E-mail: altyn-mak@mail.ru

Найманова А.Ж.

Институт математики и математического моделирования

050100, Алматы, ул. Пушкина, 125

E-mail: ked@math.kz

Статья поступила в редакцию 09.01.2018

МРНТИ 27.31.17

**ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ
МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ДИАГОНАЛИ**

Ж.А. САРТАБАНОВ, А.А. КУЛЬЖУМИЕВА

Аннотация. Исследован вопрос о приводимости линейного уравнения с квазипериодической матрицей к уравнению с постоянной на диагонали или постоянной матрицей. Получены достаточные условия приводимости к уравнению с постоянной на диагонали матрицами и необходимое и достаточное условие приводимости к уравнению с постоянной матрицей.

Ключевые слова. Линейное уравнение, дифференциальный оператор, приводимость, жорданова форма, матрица монодромии.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопрос о приводимости линейных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, \sigma_1 + \tau, \dots, \sigma_m + \tau)x \quad (1)$$

с искомой вектор-функцией $x = (x_1, \dots, x_n)$ и гладкой матрицей $A = A(\tau, t_1, \dots, t_m)$, определенной на торе T^{1+m} , образованном вектором частот $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m)$ с целочисленно независимыми компонентами, к уравнению

$$\frac{dz}{d\tau} = \Lambda z \quad (2)$$

с постоянной матрицей Λ возникает при исследовании окрестности инвариантного тора автономного уравнения, несущего многочастотные периодические движения с вектор-периодом $(\theta, \omega) = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m)$, где $\theta = \omega_0 = \nu_0^{-1}$, $\omega_1 = \nu_1^{-1}$, ..., $\omega_m = \nu_m^{-1}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ – постоянный вектор.

Проблема состоит в том, чтобы выяснить: приводимо ли линейное уравнение общего вида (1) к уравнению (2) линейным неособенным преобразованием

$$x = B(\tau, \sigma_1 + \tau, \dots, \sigma_m + \tau)z \quad (3)$$

с (θ, ω) -периодической гладкой матрицей $B(\tau, t_1, \dots, t_m)$, определенной на торе T^{1+m} .

Известно, что до сих пор не доказана приводимость уравнения вида (1) и нет примера неприводимого уравнения такого вида [1]. Эта проблема исследована многими авторами [2]–[4], где выделены классы приводимых квазипериодических уравнений.

Проблемами приводимости в приложениях дифференциальных уравнений продолжают заниматься многие исследователи. Отметим некоторые работы [5], [6].

Проблема приводимости с выходом в теорию уравнений в частных производных исследована в работах [7], [8], где обоснованы аналоги известной теоремы о приводимости линейных одночастотных периодических обыкновенных дифференциальных уравнений для случая линейных многопериодических уравнений в частных производных первого порядка [9].

В терминах уравнений в частных производных эту проблему можно перефразировать в нижеследующем виде [7], [8].

Является ли приводимым линейное гладкое (θ, ω) -периодическое уравнение

$$D_e x = P(\tau, t)x \quad (4)$$

к уравнению с постоянной на диагонали или постоянной матрицей C вида

$$D_e z = Cz \quad (5)$$

с неособенным гладким (θ, ω) -периодическим преобразованием

$$x = Q(\tau, t)z? \quad (6)$$

В связи с тем, что для уравнений с оператором D_e матрица монодромии $X(\theta, \sigma) = X(\theta, t - e\tau)$ является постоянной на диагонали $t = e\tau$, такая постановка задачи в виде (4)–(6), на наш взгляд, является несколько отличной.

Поэтому в данном исследовании поставлена задача о приведении уравнения (4) к уравнению с постоянной на диагонали гладкой ω -периодической матрицей $C(\sigma) = C(t - e\tau)$ вида

$$D_e z = C(t - e\tau)z \quad (7)$$

с неособенным гладким (θ, ω, ω) -периодическим по $(\tau, t, \sigma) = (\tau, t, t - e\tau)$ преобразованием

$$x = Q(\tau, t, \sigma)z, \quad (8)$$

причем исследование связано со свойствами матрицы монодромии. В заключении на основе приводимости уравнения (4) в смысле (7) и (8) исследован случай постоянных матриц C в уравнениях вида (7).

Заметим, что в данной постановке, по сравнению с результатами [7], [8], несколько ослаблено требование на преобразующую матрицу: заменили условие о (θ, ω) -периодичности матрицы $Q = Q(\tau, t)$ на условие о (θ, ω, ω) -периодичности преобразования $Q = Q(\tau, t, t - e\tau)$ по $(\tau, t, \sigma) = (\tau, t, t - e\tau)$.

Общеизвестно, что проблема приводимости связана с существованием логарифма переменной матрицы монодромии $X(\theta, \sigma)$. Это условие является ведущим стержнем и нашего исследования. Нами наряду с общим условием приводимости получены достаточные условия приводимости к уравнению с постоянной на диагонали матрицей и необходимое и достаточное условие приводимости к уравнению с постоянной матрицей. Результаты заметки важны в теоретическом плане и являются существенным развитием результатов [7], [8].

Данное исследование примыкает к исследованиям [10]–[13] и является их существенным дополнением. В заметке [10] исследована линейная система, которая приводима к каноническому виду в случае ее эквивалентности одному уравнению высшего порядка, а в [11] – в случае, когда линейная система распадается на r линейных уравнений. В [12] предложен метод исследования проблем многопериодических решений линейных систем на основе результатов изучения многопериодичности их полного интеграла. В [13] установлено условие существования и единственности периодического решения квазилинейной системы уравнений с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали.

2 ПРИВОДИМОСТЬ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
К УРАВНЕНИЮ С ПОСТОЯННОЙ НА ДИАГОНАЛИ МАТРИЦЕЙ

Рассмотрим векторно-матричное уравнение

$$D_e x = P(\tau, t)x \quad (9)$$

относительно искомой вектор-функции $x = (x_1, \dots, x_n)$, переменной $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ и вектор-переменной $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$, с оператором дифференцирования

$$D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$

где второе слагаемое есть скалярное произведение m -векторов $e = (1, \dots, 1)$ и $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$.

Матрица $P(\tau, t) = [p_{ij}(\tau, t)]_1^n$ обладает свойством $C_{\tau, t}^{(0, e)}(R \times R^m)$ – гладкости порядка $(0, e) = (0, 1, \dots, 1)$ по $(\tau, t) \in R \times R^m$ и свойством периодичности по τ с периодом θ и по t с вектор-периодом $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, причем компоненты $\omega_0 = \theta, \omega_1, \dots, \omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные. Эти свойства матрицы $P(\tau, t)$ представим в виде

$$P(\tau + \theta, t + q\omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0, e)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m, \quad (10)$$

где $q = (q_1, \dots, q_m) \in Z \times \dots \times Z = Z^m$, Z – множество целых чисел, $q\omega = (q_1\omega_1, \dots, q_m\omega_m)$ – кратный вектор-период.

При условии (10) уравнение (9) имеет матрицант $X = X(\tau, t)$:

$$D_e X = P(\tau, t)X, \quad X|_{\tau=0} = E \quad (11)$$

с единичной матрицей E .

В силу условия (10) матрицант $X(\tau, t)$ обладает свойствами периодичности вида

$$X(\tau, t + q\omega) = X(\tau, t), \quad q \in Z^m, \quad (12)$$

$$X(\tau + \theta, t) = X(\tau, t)X(\theta, t - e\tau). \quad (13)$$

Функция, зависящая от $\sigma = t - e\tau$ и не содержащая переменные (τ, t) , называется функцией, постоянной на диагонали $t = e\tau$ пространства $R \times R^m$ независимых переменных (τ, t) .

Постоянную на диагонали матрицу $X(\theta, \sigma) = X(\theta, t - e\tau)$ назовем матрицей монодромии уравнения (9).

В силу соотношений (11) и (12) матрица монодромии $X(\theta, \sigma)$ обладает свойствами периодичности и гладкости:

$$X(\theta, \sigma + q\omega) = X(\theta, \sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad q \in Z^m. \quad (14)$$

Предположим, что матрицант обладает логарифмом. Это означает, что существует матрица $C(\sigma)$, обладающая свойствами гладкости и периодичности

$$C(\sigma + q\omega) = C(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad q \in Z^m, \quad (15)$$

такая, что

$$X(\theta, \sigma) = e^{C(\sigma)}. \quad (16)$$

Следовательно, имеем

$$C(\sigma) = \ln X(\theta, \sigma). \quad (17)$$

Тогда из свойств (13) и (16) следует теорема о представлении матрицанта $X(\tau, t)$ уравнения (9), напоминающем представление Флоке в случае теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы матрицант $X(\tau, t)$ уравнения (9) при условии (10) допускал представление*

$$X(\tau, t) = Q(\tau, t, \sigma) e^{\frac{\tau}{\theta} C(\sigma)}, \quad (18)$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица монодромии $X(\theta, \sigma)$ имела логарифм, причем матрица $Q(\tau, t, \sigma)$ – неособенная и обладает свойством

$$Q(\tau + \theta, t + q\omega, \sigma + p\omega) = Q(\tau, t, \sigma) \in C_{\tau, t, \sigma}^{(1, e, e)}(R \times R^m \times R^m), \quad (19)$$

где $q \in Z^m$, $p \in Z^m$, а матрица $C(\sigma)$ удовлетворяет условию (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость существования логарифма следует из представления (18), где матрица $Q(\tau, t, \sigma)$ имеет вид

$$Q(\tau, t, \sigma) = X(\tau, t) e^{-\frac{\tau}{\theta} C(\sigma)} \quad (20)$$

и обладает свойством

$$Q(\tau + \theta, t, \sigma) = X(\tau, t)X(\theta, \sigma)e^{-C(\sigma)}e^{-\frac{\tau}{\theta}C(\sigma)}. \quad (21)$$

Периодичность $Q(\tau, t, \sigma)$ по (t, σ) с периодом (ω, ω) следует из соотношений (12) и (15). Чтобы обеспечить θ -периодичность матрицы $Q(\tau, t, \sigma)$ по τ , в силу (20) и (21) необходимо выполнение условия

$$X(\theta, \sigma)e^{-C(\sigma)} = E.$$

Необходимость условия (16) доказана.

Достаточность условия (16) для представлений (18)–(19) следует из (20)–(21) с учетом $C(\sigma) = \ln X(\theta, \sigma)$.

Пусть для матрицы $Z(\sigma)$ существует неособенная матрица $Y(\sigma)$, обладающая свойством

$$Y(\sigma + q\omega) = Y(\sigma) \in C_{\sigma}^{(e)}(R^m), \quad q \in Z^m, \quad (22)$$

и имеет место представление

$$Y^{-1}(\sigma)Z(\sigma)Y(\sigma) = J(\sigma) \quad (23)$$

с матрицей

$$J(\sigma) = \text{diag}[J_1(\sigma), \dots, J_k(\sigma)] \quad (24)$$

жордановых клеток $J_j(\sigma)$, $j = \overline{1, k}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_j = \lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, k}$, матрицы $Z(\sigma)$, удовлетворяющим условиям

$$\lambda_j(\sigma + q\omega) = \lambda_j(\sigma) \in C_{\sigma}^{(e)}(R^m), \quad q \in Z^m, \quad j = \overline{1, k}, \quad (25)$$

причем $\lambda_j(\sigma)$ и $\lambda_i(\sigma)$ при различных $i, j = \overline{1, k}$ либо различные при всех $\sigma \in R^m$, либо совпадают всюду в R^m :

$$(\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_i(\sigma), i \neq j, \sigma \in R^m) \vee (\lambda_j(\sigma) = \lambda_i(\sigma), i \neq j, \sigma \in R^m), \quad (26)$$

где \vee – знак "или".

Тогда матрицу $Z(\sigma)$ назовем приводимой к жордановой канонической нормальной форме.

ТЕОРЕМА 2. Всякая неособенная матрица $Z(\sigma)$, приводимая к жордановой нормальной форме, имеет логарифм.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы о существовании логарифма постоянной неособенной матрицы по нижеследующей схеме.

На основе скалярного логарифмического разложения

$$\ln(1+z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} z^p, \quad |z| < 1,$$

для одноклеточной жордановой матрицы

$$Z(\sigma) = \lambda(\sigma)E + I$$

с диагональной единичной матрицей E и наддиагональной единичной матрицей I имеем

$$\begin{aligned} \ln Z(\sigma) &= \ln(\lambda(\sigma)E + I) = \ln \left\{ \lambda(\sigma) \left(E + \frac{I}{\lambda(\sigma)} \right) \right\} = \\ &= E \ln \lambda(\sigma) + \ln \left(E + \frac{I}{\lambda(\sigma)} \right) = E \ln \lambda(\sigma) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{I}{\lambda(\sigma)} \right)^p = \\ &= E \ln \lambda(\sigma) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p} \left(\frac{I}{\lambda(\sigma)} \right)^p = E \ln \lambda(\sigma) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p \lambda^p(\sigma)} I^p. \end{aligned}$$

Тогда для матрицы

$$Z(\sigma) = Y(\sigma) \text{diag} [J_1(\sigma), \dots, J_k(\sigma)] Y^{-1}(\sigma)$$

с жордановыми клетками $J_1(\sigma), \dots, J_k(\sigma)$ получим

$$\ln Z(\sigma) = Y(\sigma) \text{diag} [\ln J_1(\sigma), \dots, \ln J_k(\sigma)] Y^{-1}(\sigma).$$

Свойство (13) матрицанта $X(\tau, t)$, связанное с матрицей монодромии $X(\theta, \sigma)$, наталкивает на мысль о приводимости линейного уравнения к уравнению с матрицей, постоянной на диагонали $t = e\tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейное уравнение (9) с многопериодической матрицей (10) приводимо, если существует неособенная многопериодическая гладкая матрица $Q(\tau, t, \sigma)$ такая, что замена*

$$x = Q(\tau, t, \sigma)z \quad (27)$$

превращает исходное уравнение в уравнение с постоянной на диагонали матрицей $C(\sigma)$ вида

$$D_e z = C(\sigma)z. \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть матрица монодромии $X(\theta, \sigma)$ уравнения (9) при условии (10) приводима к жордановой канонической нормальной форме матрицей $Y(\sigma)$ со свойствами (22). Тогда уравнение (9) преобразованием (27) со свойством (19) приводимо к уравнению (28) с постоянной на диагонали матрицей (15).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы матрица монодромии $X(\theta, \sigma)$, согласно Теореме 2, имеет логарифм

$$C(\sigma) = \frac{1}{\theta} \ln X(\theta, \sigma).$$

Тогда по Теореме 1 матрицант $X(\tau, t)$ представим в виде (18) с матрицей (19). Следовательно, замена (27) с неособенной многопериодической гладкой матрицей (20) со свойством (21) приводит уравнение (9) к уравнению (28).

В частности, когда матрица монодромии $X(\theta, \sigma)$ является постоянной: $X(\theta, \sigma) = K - const$, то уравнение (9) в силу Теоремы 1 приводимо, причем оно приводится к уравнению с постоянной матрицей $C = \frac{1}{\theta} \ln K$.

В связи с этим вопросом можно доказать нижеследующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы при условии (10) выполнялось тождество*

$$\int_0^\theta X^{-1}(s, \sigma + es) P_j(s, \sigma + es) X(s, \sigma + es) ds = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \sigma \in R^m, \quad (29)$$

где $P_j(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial t_j} P(\tau, t)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (9) было приводимо к уравнению с постоянной матрицей $C = \frac{1}{\theta} \ln K$, где K – матрица монодромии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя уравнение (9) по t_j , имеем

$$D_e X_j = P(\tau, t)X_j + P_j(\tau, t)X(\tau, t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (30)$$

где $X_j = \frac{\partial}{\partial t_j} X(\tau, t)$, причем $X_j|_{\tau=0} = 0$, $j = \overline{1, m}$.

Следовательно, интегрируя уравнение (30), получим

$$X_j(\tau, t) = \int_0^\tau X(\tau, t)X^{-1}(s, \sigma + es)P_j(s, \sigma + es)X(s, \sigma + es)ds. \quad (31)$$

Из представления (31) получим частные производные матрицы монодромии $\frac{\partial}{\partial t_j} X(\theta, \sigma)$ по $\sigma_j = t_j - \tau$, $j = \overline{1, m}$, в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \sigma_j} X(\theta, \sigma) = \\ & = \int_0^\theta X(\theta, \sigma)X^{-1}(s, \sigma + es)P_j(s, \sigma + es)X(s, \sigma + es)ds, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (32)$$

Приравнявая эти производные (32) к нулю, с учетом неособенности матрицы монодромии $X(\theta, \sigma)$ получим необходимое и достаточное условие (29) для того, чтобы $X(\theta, \sigma)$ была постоянной.

Теорема 4 доказана.

Отметим, что приводимость гладких многопериодических матриц к жордановой нормальной форме исследована в [14]. Также отметим, что в [14] приводится коэффициентное достаточное условие для выполнения условия (29) Теоремы 4, а в [8] вместо этого условия (29) ставится требование о постоянной матрице монодромии $X(\theta, \sigma) = C - const$.

В заключение, возвращаясь к уравнению (1) с квазипериодической матрицей $A = A(\tau, e\tau)$, приводим следствие Теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях Теоремы 3 уравнение (1) с квазипериодической матрицей $A = A(\tau, e\tau)$ приводимо к уравнению (2) с постоянным квазипериодическим преобразованием (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрицу $P(\tau, t)$ строим на основе исходной матрицы $A(\tau, e\tau)$ по известной теореме Бора с условием $P(\tau, e\tau) = A(\tau, e\tau)$. Тогда

с квазипериодической матрицей преобразования $B(\tau, e\tau)$, полученной на основе соотношений (3) и (28), удовлетворяющей условию

$$B(\tau, e\tau) = Q(\tau, e\tau, 0),$$

по Теореме 3 приводим к уравнению (2) с постоянной матрицей Λ , связанной с матрицей $C(\sigma)$ уравнения (28) соотношением $C(\sigma) = \Lambda$. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: НИЦ "Регулярная хаотическая динамика 2002. – 400 с.
- 2 Гельман А.Е. О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // ДАН СССР. – 1957. – Т. 116, № 4. – С. 535-537.
- 3 Блинов И.Н. Метод сверхбыстрой сходимости и приводимость почти периодических систем // Диф. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 187-199.
- 4 Самойленко А.М. О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1968. – Т. 20, № 2. – С. 279-281.
- 5 Kalenova V.I., Morozov V.M. A new class of reducible linear time-varying systems and its relation to the optimal control problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2016. – V. 80. – P. 105-112.
- 6 Быкова Т.С., Тонков Е.Л. О ляпуновской приводимости системы с последствием // Известия института математики и информатики. – 2002. – № 2(25). – С. 27-30.
- 7 Харасахал В.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.
- 8 Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 210 с.
- 9 Еругин Б.П. Приводимые системы // Труды физико-математического института им. В.А. Стеклова, XIII. – 1946. – 96 с.
- 10 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. О приводимости линейной D_e -системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e -системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка // Вестник Карагандинского университета. Серия математика. – 2016. – № 4(84). – С. 88-93.
- 11 Kulzhumiyeva A. A., Sartabanov Zh. A. Reduction of linear homogeneous D_e -systems to the jordan canonical form // Известия НАН РК. Серия физ-мат. – 2017. – No. 5(315). – P. 5-12.

12 Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. – V. 8, No. 1. – P. 67-75.

13 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Построение периодического решения квазилинейной системы // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – 2017. – Т. 1, № 6(121). – С.25-29.

14 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. – Уралск: РИЦ ЗКГУ, 2012. – 152 с.

Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А. ДИАГОНАЛ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ СЫЗЫҚТЫ КӨППЕРИОДТЫ ТЕҢДЕУДІҢ КЕЛТІРІЛУІ

Квазипериодты матрицалы сызықты теңдеудің диагоналда тұрақты немесе тұрақты матрицалы теңдеуге келтірілуі жөнінде мәселе зерттелген. Диагоналда тұрақты матрицалы теңдеуге келтірілудің жеткілікті шарттары және тұрақты матрицалы теңдеуге келтірілудің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Кілттік сөздер. Сызықтық теңдеу, дифференциалдық оператор, келтірімділік, жордан формасы, монодромия матрицасы.

Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A. REDUCIBILITY OF LINEAR MULTIPERIODIC EQUATIONS WITH DIFFERENTIAL OPERATOR ON DIAGONAL

The problem of the reducibility of linear equation with quasiperiodic matrix to an equation with constant on the diagonal or a constant matrices investigated. Sufficient conditions for reducibility to an equation with constant matrix on the diagonal and a necessary and sufficient condition for the equation with a constant matrix are obtained.

Keywords. Linear equation, differentiation operator, reducibility, Jordan form, monodromy matrix.

Сартабанов Ж.А.

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова
030000, Актюбе, пр. А. Молдагуловой, 34

E-mail: sartabanov42@mail.ru

Кульжумиева А.А.

Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова
090000, Уральск, пр. Достык, 162

E-mail: aiman-80@mail.ru

Статья поступила в редакцию 04.01.2018

МРНТИ 27.31.44

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА
ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА**

Б.Х. ТУРМЕТОВ, М.Ш. ТАЖИМЕТОВА

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию вопросов построения явного вида функции Грина задачи Робена для уравнения Пуассона в единичном шаре из R^n . При построении данной функции используется явный вид функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Получено интегральное представление функции Грина задачи Робена. Этот метод также используется для представления функции Грина задачи Неймана.

Ключевые слова. Уравнение Пуассона, функция Грина, задача Робена, задача Дирихле, задача Неймана, краевая задача, интегральное представление.

1 ВВЕДЕНИЕ

Известно (см., например, [1]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ имеет вид

$$G_D(x, y) = E(x, y) - E(x|y|, y/|y|), \quad E(x, y) = (n - 2)^{-1}|x - y|^{2-n}, \quad n \geq 3.$$

Исследования по вопросам построения явного вида функции Грина задач Неймана и Робена проводились различными авторами. Так, в работе [2] в явном виде построена функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве \mathbb{R}_+^n . В работах [3]–[5] методом разложения фундаментального решения оператора Лапласа в ряд построена функция Грина для задачи Робена в круге, а в работе [6] – в многомерном шаре. Отметим также работы [7], [8], которые посвящены построению функции

2010 Mathematics Subject Classification: 35J08, 31A30, 31A25.

Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № AP05131268.

© Б.Х. Турметов, М.Ш. Тажиметова, 2018.

Грина для задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. Кроме того, в работах [9], [10] дано представление функции Грина для классической внешней и внутренней задач Неймана для уравнения Пуассона в единичном шаре из \mathbb{R}^n .

В настоящей работе предлагается новый метод построения явного вида функции Грина классических задач Неймана и Робена. При построении функции Грина этих задач используется явный вид функции Грина задачи Дирихле. Получено интегральное представление функции Грина исследуемых задач.

2 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим в области Ω следующую задачу Дирихле:

$$-\Delta v(x) = F(x), \quad x \in \Omega; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1)$$

Если $F(x)$ – гладкая функция в области Ω , то решение задачи (1) представляется в виде

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_D(x, y) F(y) dy, \quad (2)$$

где ω_n – площадь единичной сферы.

Пусть $r = |x|$, $r \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Следующие утверждения доказаны в работе [11].

ЛЕММА 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ и в задаче (1) функция $F(x)$ представляется в виде

$$F(x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 2 + a \right) f(x). \quad (3)$$

Тогда решение задачи (1) можно записать в виде

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \left(2 + a - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) G_D(x, y) f(y) dy, \quad (4)$$

где $\rho = |y|$, $\rho \frac{\partial}{\partial \rho} = \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial}{\partial y_j}$.

ЛЕММА 2. Пусть $a = 0$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$ и в задаче (1)–(2) функция $F(x)$ представляется в виде (3). Тогда для выполнения условия $v(0) = 0$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\Omega} f(y) dy = 0. \quad (5)$$

Следующее утверждение доказывается непосредственным вычислением.

ЛЕММА 3. Для функции $E(x, y)$ справедливы следующие равенства:

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + s \frac{d}{ds} \right) E(sx, y) = -|sx - y|^{2-n}, \quad (6)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} E(sx, y) = s \frac{d}{ds} E(sx, y) = -\frac{s^2|x|^2 - s(x, y)}{|sx - y|^n}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right) &= r \frac{\partial}{\partial r} E\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right) = s \frac{d}{ds} E\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right) = \\ &= -\left[s^2|x|^2|y|^2 - s(x, y)\right] \left|sx|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{-n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, для любого $a \in R$ введем функцию

$$\hat{E}_a(x, y) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + a \right) E(x, y).$$

Легко показать, что в случае $a = 0$ имеет место равенство

$$\hat{E}_0(x, y) = -\frac{|y|^2 - (x, y)}{|x - y|^n}. \quad (9)$$

ЛЕММА 4. Для функции $\hat{E}_0\left(x|y|, \frac{y}{|y|}\right)$ справедливы равенства

$$\hat{E}_0\left(x|y|, \frac{y}{|y|}\right) = -\frac{1 - (x, y)}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^n}, \quad (10)$$

$$\hat{E}_0 \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) = \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (9), имеем

$$\hat{E}_0 \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) = - \frac{|y/|y||^2 - (x|y|, y/|y|)}{|x|y| - y/|y||^n} = - \frac{1 - (x, y)}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^n}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) &= \frac{2 - n |x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1}{n - 2} \frac{1}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{-n}} + \\ &+ \frac{|x|^2 |y|^2 - (x, y)}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^n} = - \frac{1 - (x, y)}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{-n}}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо и равенство (11). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $a \in \mathbb{R}$, то для функции $\hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right)$ справедливо равенство

$$\hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) = \left(a + 2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right). \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобятся свойства следующих функций:

$$E_a(x, y) = \int_0^1 s^{a-1} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right), a > 0, \quad (13)$$

$$E_0(x, y) = \int_0^1 \left[\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) + 1 \right] \frac{ds}{s}. \quad (14)$$

ЛЕММА 5. Для любого $a \geq 0$ функция $E_a(x, y)$ является гармонической в области Ω по x при $y \in \bar{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор $\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ сохраняет гармоничность функции. Поэтому функция

$$\hat{E}_a(x, y) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + a \right) E(x, y)$$

является гармонической по $x, y \in \Omega$ при $x \neq y$. Далее, функция $v(x, y) = |y|^{2-n} \hat{E}_0(x, y/|y|^2)$ также гармоническая при выполнении условия $y/|y|^2 \neq x$. Поскольку в нашем случае $x \in \Omega$, то при $y \in \bar{\Omega}$ имеем $y/|y|^2 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ и, значит, это условие выполнено. Преобразуем функцию $v(x, y)$. Поскольку для функции $\hat{E}_0(x, y)$ верно равенство (9), то

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{1}{|y|^{n-2}} \hat{E}_0 \left(x, \frac{y}{|y|^2} \right) = -\frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{\left| \frac{y}{|y|^2} \right|^2 - \left(x, \frac{y}{|y|^2} \right)}{\left| x - \frac{y}{|y|^2} \right|^n} = \\ &= -\frac{1 - (x, y)}{|y|^{n-2} |y|^2 \left| x - \frac{y}{|y|^2} \right|^n} = -\frac{1 - (x, y)}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^n} = \hat{E}_0 \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right). \end{aligned}$$

Значит, функция $\hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right)$, $a \geq 0$, является гармонической в области Ω по x при $y \in \bar{\Omega}$. Далее, нетрудно видеть, что $\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) \Big|_{s=0} = -1$, и значит, поскольку функция $\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right)$ дифференцируема по $s \in [0, 1]$, то подынтегральная функция в интеграле

$$E_0(x, y) = \int_0^1 \left(\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) + 1 \right) \frac{ds}{s}$$

не имеет особенности при $s = 0$. Поэтому функция $E_0(x, y)$ определена при $x \in \Omega$ и $y \in \bar{\Omega}$. Более того, так как функция $\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right)$ — гармоническая по $x, y \in \Omega$, то этим же свойством обладает и функция $E_0(x, y)$. Аналогично доказывается гармоничность функции $E_a(x, y)$ при $a > 0$. Лемма доказана.

3 ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Пусть $a \geq 0, n \geq 3$. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + au(x) \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (15)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $a > 0$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ и $a > 0$. Тогда решение задачи (15) можно представить в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_R(x, y) f(y) dy, \quad (16)$$

где функция Грина $G_R(x, y)$ имеет вид

$$G_R(x, y) = E(x, y) - E_a(x, y), \quad (17)$$

а функция $E_a(x, y)$ записывается в форме (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение задачи (15) при $a > 0$. Применим к этой функции оператор $r \frac{\partial}{\partial r} + a$ и обозначим $v(x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) u(x)$. Если применим к последней функции оператор $-\Delta$, то, используя равенство

$$\Delta \left[r \frac{\partial u(x)}{\partial r} \right] = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \right) \Delta u(x),$$

для функции $v(x)$ получаем задачу Дирихле (1) с функцией (3). Так как $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, то решение этой задачи существует и по утверждению Леммы 1 представляется в виде (4). Из равенства $v(x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) u(x)$ находим функцию $u(x)$ по формуле

$$u(x) = \int_0^1 s^{a-1} v(s) ds. \quad (18)$$

Представив функцию $v(x)$ в виде (4), подставим в равенство (18) и, меняя порядки интегрирования, для $u(x)$ получаем следующее выражение:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \left[\int_0^1 \left(2 + a - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) G_D(sx, y) \frac{ds}{s^{1-a}} \right] f(y) dy.$$

Обозначим

$$G_R(x, y) = \int_0^1 \left(2 + a - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) G_D(sx, y) \frac{ds}{s^{1-a}}.$$

Используя представление функции $G_D(sx, y)$, имеем

$$\begin{aligned} \left(2 + a - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) G_D(sx, y) &= aE(sx, y) + (2 - n)E(sx, y) - \\ &- \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E(sx, y) - \left(2 + a - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) E\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right). \end{aligned}$$

Далее, в силу равенства (6) получаем

$$\begin{aligned} aE(sx, y) + (2 - n)E(sx, y) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E(sx, y) &= aE(sx, y) + (2 - n)|sx - y| + \\ + s \frac{d}{ds} E(sx, y) - (2 - n)|sx - y| &= \left(s \frac{d}{ds} + a \right) E(sx, y). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\int_0^1 \left(s \frac{d}{ds} + a \right) E(sx, y) \frac{ds}{s^{1-a}} = \int_0^1 \frac{d}{ds} [s^a E(sx, y)] ds = E(x, y).$$

Тогда

$$G_R(x, y) = \int_0^1 \left(s \frac{d}{ds} + a \right) E(sx, y) \frac{ds}{s^{1-a}} -$$

$$-\int_0^1 \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) \frac{ds}{s^{1-a}} = E(x, y) - E_a(x, y).$$

Таким образом, для функции Грина задачи Робена получаем представление (17). Следовательно, решение задачи (15) представляется в виде (16). Покажем, что функция $u(x)$, представимая в виде (16), удовлетворяет условиям задачи. По утверждению Леммы 5 функция $E_a(x, y)$ является гармонической в области Ω по x при $y \in \bar{\Omega}$. Поэтому и функция

$$J_a(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E_a(x, y) f(y) dy$$

является гармонической в Ω . Следовательно, при $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ на основании свойств объемного потенциала с плотностью $f(x)$ функция из (16) удовлетворяет уравнению (15):

$$-\Delta u(x) = -\Delta \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E(x, y) f(y) dy \right) + \Delta J_a(x) = f(x).$$

Проверим граничные условия задачи (15). Легко показать, что

$$r \frac{\partial}{\partial r} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = s \left[\frac{d}{ds} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) \right].$$

Действительно, так как

$$\hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) = -\frac{1 - (x, y)}{\left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^n} + (2 + a - n) E \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right)$$

и

$$r \frac{\partial}{\partial r} [1 - s(x, y)] = s \frac{d}{ds} [1 - s(x, y)],$$

то, используя равенство (8), получаем

$$r \frac{\partial}{\partial r} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = -r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 - (sx, y)}{\left| sx|y| - \frac{y}{|y|} \right|^n} +$$

$$\begin{aligned}
& + (2 + a - n) r \frac{\partial}{\partial r} E \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = - \frac{r \frac{\partial}{\partial r} [1 - s(x, y)]}{|sx|y| - \frac{y}{|y|}|^n} - [1 - s(x, y)] \times \\
& \times r \frac{\partial}{\partial r} \left| sx|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{-n} + (2 + a - n) r \frac{\partial}{\partial r} E \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = \\
& = - \frac{s \frac{d}{ds} [1 - s(x, y)]}{|sx|y| - \frac{y}{|y|}|^n} - [1 - s(x, y)] s \frac{d}{ds} \left| sx|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{-n} + \\
& + (2 + a - n) s \frac{d}{ds} E \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = -s \frac{d}{ds} \frac{1 - (sx, y)}{|sx|y| - \frac{y}{|y|}|^n} + \\
& + (2 + a - n) s \frac{d}{ds} E \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = s \frac{d}{ds} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right).
\end{aligned}$$

Поэтому при $a > 0$ находим

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial E_a(x, y)}{\partial r} &= \int_0^1 r \frac{\partial}{\partial r} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) s^{a-1} ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) s^a ds = \\
&= s^a \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) \Big|_{s=0}^{s=1} - a \int_0^1 \hat{E}_a \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) s^{a-1} ds = \\
&= \hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) - a E_a(x, y),
\end{aligned}$$

а значит,

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) E_a(x, y) = \hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right).$$

Далее, так как $|x|y| - \frac{y}{|y|}| = |y|x| - \frac{x}{|x|}|$, то

$$\hat{E}_a \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) = \hat{E}_a \left(y|x|, \frac{x}{|x|} \right)$$

и поэтому при $|x| = 1$ имеет место равенство

$$\hat{E}_a \left(y|x|, \frac{x}{|x|} \right) = \hat{E}_a(y, x) = \hat{E}_a(x, y) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) E(x, y).$$

Тогда

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) G_R(x, y) \Big|_{x \in \partial\Omega} = \left(\left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) E(x, y) - \hat{E}_a(x, y) \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + au(x) \right) \Big|_{\partial\Omega} &= \left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) u(x) \Big|_{\partial S} = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + a \right) G_R(x, y) f(y) dy \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Внесение оператора $r \frac{\partial}{\partial r}$ под знак интеграла законно в силу свойств интегралов типа потенциала [12], поскольку особенность функции $r \frac{\partial}{\partial r} E(x, \xi)$ при $x = y$ имеет порядок n , значит, интегрируемая по $y \in \bar{\Omega}$. Предельный переход по $x \rightarrow \partial\Omega$ можно внести под знак интеграла, так как интеграл типа потенциала с особенностью $r \frac{\partial}{\partial r} E(x, y)$ является непрерывной функцией по $x \in \bar{\Omega}$. Условия задачи (15) выполнены. Теорема доказана.

Далее переходим, к методу построения функции Грина задачи Неймана. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a = 0$ и функция $f(x)$ такая, что выполняется условие (5). Тогда решение задачи Неймана (15) можно представить в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_N(x, y) f(y) dy, \quad (19)$$

где функция Грина $G_N(x, y)$ имеет вид

$$G_N(x, y) = E(x, y) - E_0(x, y), \quad (20)$$

а функция $E_0(x, y)$ записывается в форме (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение задачи (15) при $a = 0$. Применим к этой функции оператор $r \frac{\partial}{\partial r}$ и обозначим $v(x) = r \frac{\partial}{\partial r} u(x)$. В этом случае для функции $v(x)$ получаем задачу Дирихле (1) с функцией $F(x) = (r \frac{\partial}{\partial r} + 2) f(x)$ и дополнительным условием $v(0) = 0$. Так как $f(x) \in C^1(\Omega)$ и выполняется условие (5), то решение этой задачи существует и по утверждению Леммы 1 представляется в виде (4). Из равенства $v(x) = r \frac{\partial}{\partial r} u(x)$, учитывая условие $v(0) = 0$, находим функцию $u(x)$ по формуле $u(x) = \int_0^1 s^{-1} v(s) ds$.

По условию теоремы функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5). Кроме того, для функции $G_D(0, y)$ справедливы равенства

$$G_D(0, y) = E(0, y) + \frac{1}{n-2}, \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_D(0, y) = -1. \quad (21)$$

Поэтому в этом случае для функции $u(x)$ получаем следующее выражение:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \left[\int_0^1 \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) [G_D(sx, y) - G_D(0, y)] \frac{ds}{s} + G_D(0, y) \right] f(y) dy.$$

Обозначим

$$G_N(x, y) = \int_0^1 \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) [G_D(sx, y) - G_D(0, y)] \frac{ds}{s} + G_D(0, y).$$

Исследуем функцию $G_N(x, y)$. Используя представление функции $G_D(sx, y)$, имеем

$$\begin{aligned} \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) G_D(sx, y) &= (2 - n)E(sx, y) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} E(sx, y) - \\ - \left(2 - n - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) E\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right) &= -|sx - y|^{2-n} + s \frac{d}{ds} E(sx, y) + |sx - y|^{2-n} - \\ - \hat{E}_0\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right) &= s \frac{d}{ds} E(sx, y) - \hat{E}_0\left(sx|y|, \frac{y}{|y|}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_0^1 s \frac{d}{ds} E(sx, y) \frac{ds}{s} = E(x, y) - E(0, y).$$

Тогда учитывая равенства (21), для функции $G_N(x, y)$ получаем

$$\begin{aligned} G_N(x, y) &= E(x, y) + \frac{1}{n-2} + \int_0^1 \left[\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) + 1 \right] \frac{ds}{s} = \\ &= E(x, y) - E_0(x, y) + \frac{1}{n-2}. \end{aligned}$$

Так как функция Грина задачи Неймана существует с точностью до постоянного слагаемого, то свободный член можно отбросить. Итак, для $G_N(x, y)$ получили представление (20). Покажем, что функция (19) удовлетворяет условиям задачи (15) для случая $a = 0$. По утверждению Леммы 5 функция $E_0(x, y)$ является гармонической в области Ω по x при $y \in \bar{\Omega}$. Тогда функция

$$J_0(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E_0(x, y) f(y) dy$$

является гармонической в Ω . Поэтому при $f(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ на основании свойств объемного потенциала [1] функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (15):

$$-\Delta u(x) = -\Delta \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} E(x, \xi) f(\xi) d\xi \right) + \Delta J_0(x) = f(x).$$

Проверим граничные условия задачи Неймана. Так как

$$r \frac{\partial}{\partial r} \hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) = s \left[\frac{d}{ds} \hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) \right],$$

то

$$r \frac{\partial}{\partial r} E_0(x, y) = \int_0^1 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) + 1 \right) \frac{ds}{s} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{d}{ds} \hat{E}_0 \left(sx|y|, \frac{y}{|y|} \right) ds = \hat{E} \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) - \hat{E} \left(0, \frac{y}{|y|} \right) = \\
&= \hat{E} \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) + 1.
\end{aligned}$$

Используя эти вычисления, находим

$$r \frac{\partial}{\partial r} G_N(x, y) \Big|_{x \in \partial\Omega} = \left(r \frac{\partial}{\partial r} E(x, y) - \hat{E} \left(x|y|, \frac{y}{|y|} \right) - 1 \right) \Big|_{|x|=1} = -1.$$

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= r \frac{\partial}{\partial r} u(x) \Big|_{\partial S} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} G_N(x, y) f(y) dy \right) \Big|_{\partial\Omega} = \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_S r \frac{\partial}{\partial r} G_N(x, y) \Big|_{\partial\Omega} f(y) dy = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} f(y) dy = 0.
\end{aligned}$$

Внесение оператора $r \frac{\partial}{\partial r}$ под знак интеграла законно в силу свойств интегралов типа потенциала (см., например, [12], с. 25), поскольку особенность функции $r \frac{\partial}{\partial r} E(x, y)$ при $x = y$ имеет порядок $n - 1$ и, значит, интегрируемая по $y \in \Omega$. Предельный переход по $x \rightarrow \partial\Omega$ можно внести под знак интеграла, поскольку интеграл типа потенциала с особенностью типа $r \frac{\partial}{\partial r} E(x, y)$ является непрерывной функцией по $y \in \bar{\Omega}$. Условия Неймана выполнены. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бицадзе А.В. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1976. – 336 с.
- 2 Constantin E., Pavel N.H. Green function of the Laplacian for the Neumann problem in \mathbb{R}_+^n // Libertas Math. – 2010. – V. 30. – P. 57-69.
- 3 Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Variables Elliptic Equation. – 2013. – V. 58, No. 4. – P. 483-496.
- 4 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conf. Proc. – 2014. – V. 1611. – P. 255-260.

5 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // *Adv. Pure Appl. Math.* – 2015. – V. 6, No. 3. – P. 163-172.

6 Торбек Б.Т. Функция Грина третьей краевой задачи в шаре // *Математический журнал.* – 2015. – № 1. – С. 89-100.

7 Kal'menov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green Function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation // *Differ. Equ.* – 2012. – V. 48, No. 3. – P. 441-445 .

8 Карачик В.В. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* – 2014. – Т. 14, № 4:2. – С. 550-558.

9 Садыбеков М.А., Торбек Б.Т., Турметов Б.Х. Представление функции Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа // *Сибирский Математический Журнал.* – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 199-205.

10 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // *Complex Variables and Elliptic Equations.* – 2016. – V. 61, No. 1. – P. 104-123.

11 Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения с граничными операторами типа Адамара // *Дифференциальные уравнения.* – 2017. – Т. 53, № 3. – С. 343-354.

12 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Турметов Б.Х.,Тажиметова М.Ш. ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН
ҮШІНШІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫН ҚҰРУДЫҢ БІР
ӘДІСІ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыс \mathbb{R}^n кеңістігіндегі бірлік шарда Пуассон теңдеуі үшін Робен есебінің Грин функциясының айқын түрін құру мәселелерін зерттеуге арналған. Осы функцияны құру барысында Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебінің Грин функциясының айқын түрі қолданылады. Робен есебінің Грин функциясының интегралдық кейіптемесі алынған. Бұл әдіс Нейман есебінің Грин функциясын құруда да пайдаланылады.

Кілттік сөздер. Пуассон теңдеуі, Грин функциясы, Робен есебі, Дирихле есебі, Нейман есебі, шеттік есеп, интегралдық кейіптеме.

Turmetov B.Kh., Tazhymetova M.Sh. A METHOD FOR
CONSTRUCTING THE GREEN'S FUNCTION OF THE THIRD
BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

The paper is devoted to investigation of questions about constructing the explicit form of the Green's function of the Robin problem for the Poisson equation in the unit ball of \mathbb{R}^n . In constructing this function, we use the explicit form of the Green's function of the Dirichlet problem for the Poisson equation. An integral representation of the Green's function of the Robin problem is obtained. This method is also used to represent the Green's function of the Neumann problem.

Keywords. Poisson equation, Green's function, Robin problem, Dirichlet problem, Neumann problem, boundary value problem, integral representation.

Турметов Б.Х.

Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави
Туркестан, проспект Б. Саттарханова, 29

E-mail: turmetovbh@mail.ru

Тажиметова М.Ш.

Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави
Туркестан, проспект Б. Саттарханова, 29

E-mail: muhabbat2595@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13.03.2018

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе Л^AT_EX-2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf-файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать классификатор МРНТИ. На следующих строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов. В конце указать место работы, почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, №1 (67), 2018

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте <http://www.math.kz>
Института математики и математического моделирования
30.03.2018 г.

Тираж 300 экз. Объем 168 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: <http://www.math.kz>