ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Том 17 № 1 (63) 2017

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 17   № 1 (63)   2017

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, № 1 (63), 2017

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),   факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 17 **№ 1 (63)** **2017**

CONTENTS

Volume 17 **No. 1 (63)** **2017**

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 5–19.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ЛЮДМИЛА АЛЕКСЕЕВНА АЛЕКСЕЕВА
(К 70-летию со дня рождения)

Исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, профессору Алексеевой Людмиле Алексеевне, известному специалисту в области механики и математической физики, заведующей Отделом математической физики и моделирования Института математики и математического моделирования МОН РК.

Л.А. Алексеева родилась 12 января 1947 года в г. Калининграде (РСФСР) в семье врачей. Из трех дочерей Людмила – старшая. Детство прошло в частых переездах в связи с военной службой отца. В 1954 году поступила в советскую среднюю школу в г. Ютербоге (ГДР). Окончив школу с золотой медалью в 1965 году в г. Муроме Владимирской области, она в том же году поступила на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, отделение механики. Специализировалась на кафедре теоретической механики под руководством член-корр. АН СССР, д.ф.-м.н., проф. Д.Е. Охоцимского (заведующего кафедрой). Училась отлично, ленинский стипендиат. В марте 1970 года вышла замуж за Рахимбердиева Марата Исимгалиевича, тоже выпускника мех-мата МГУ, в это время он был аспирантом.

После окончания МГУ в 1970 году по рекомендации кафедры Людмила Алексеевна поступила в аспирантуру, где стала заниматься задачами моделирования динамики и управления шагающих систем. Это совершенно новое направление исследований под руководством Д.Е. Охоцимского проводилось на кафедре теоретической механики мех-мата и в Институте прикладной математики АН СССР (ныне ИПМ РАН им. М.В. Келдыша), где он заведовал отделом космических исследований. Эти исследования были связаны с разработкой различных моделей и макетов луноходов по проводимой в те годы космической программе полетов на Луну. Работа над диссертацией проходила в этом отделе в группе тогда еще кандидата, сейчас д.ф-м.н. Ю.Ф. Голубева.

После окончания аспирантуры Алексеева Л.А. направлена на работу в Алма-Ату в Институт математики и механики АН КазССР, где начала работать инженером лаборатории механики горных пород (зав. акад. АН Каз ССР Ж.С. Ержанов). Для завершения работы над диссертацией по ходатайству ей была предоставлена научная командировка в ИПМ АН СССР еще на полгода. В июне 1974 г. в их семье родилась дочь Марина.

Кандидатскую диссертацию на тему "Моделирование динамики и управления движением шагающего аппарата" по специальности 01.02.01. теоретическая механика – защитила на мех-мате МГУ в 1976 г. Научные руководители: Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. В теории шагающих систем эта была пионерская работа, вызвавшая большой интерес членов Совета при ее защите. Основные результаты диссертации опубликованы в виде препринта ИПМ АН СССР [4] и трех статей в Известиях АН СССР, серии "Техническая кибернетика" [6]–[8].

В 1976 году был организован Институт сейсмологии АН КазССР, куда были переведены три лаборатории отдела механики ИММ. В ИС АН КазССР Алексеева Л.А. работала в лаборатории теории сейсмостойкости подземных сооружений (ЛТСПС), которой заведовал д.т.н. Ш.М. Айталиев (в 1991 году он стал академиком НАН РК). В ней она проработала 15 лет, пройдя путь от младшего до ведущего научного сотрудника. В 1986 году эта лаборатория вернулась в ИММ АН КазССР.

В 1991 г. на Специализированном Совете по механике ИММ АН КазССР ею была защищена докторская диссертация на тему "Динамика протяженных подземных сооружений" по специальности 01.02.07 – механика горных пород, грунтов и сыпучих сред. Ее научные консультанты: академики НАН РК Ержанов Ж.С. и Айталиев Ш.М. Официальные оппоненты – известные ученые-механики СССР: д.ф.м.н. Перлин П.И.

(Москва, МФТИ), д.ф.м.н. Кубенко В.Д. (Киев, Институт механики АН УССР), д.ф.м.н. Аннин Б.Д. (Новосибирск, ИГД СО АН СССР), д.ф.м.н Мардонов Б.М. (Ташкент, ИССС АН УзССР); ведущая организация – МГУ им. М.В. Ломоносова. В 1992 году ВАК СССР присвоил ей звание профессора по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. Основные результаты диссертации вошли в монографии [2], [3].

После разделения Института математики и механики на четыре института в феврале 1992 г. в Институте теоретической и прикладной математики в отделе вычислительной математики по инициативе президента АН КазССР акад. У.М. Султангазина была образована лаборатория вычислительных методов волновой динамики. Л.А. Алексеева заведовала этой лабораторией 20 лет до реорганизации структуры института в 2012 году. С сентября 2012 года по настоящее время она – заведующий Отдела математической физики и моделирования Института математики и математического моделирования МОН РК.

Область ее научных исследований: механика, математическая физика, теория распространения и дифракции волн, электродинамика, теория поля, механика деформируемого твердого тела, механика горных пород и грунтов, динамика подземных сооружений, вычислительная математика.

Ее научные интересы во многом сложились под влиянием казахстанской школы механиков, сформировавшейся в шестидесятые-семидесятые годы прошлого столетия под руководством академика Ж.С. Ержанова для решения актуальных для страны задач динамики наземных и подземных сооружений и конструкций под действием сейсмических, транспортных источников возмущения на основе методов математического моделирования и вычислительных технологий. Активно занимается научно-исследовательской работой. Она – автор более 300 научных публикаций, основная часть которых посвящена разработке теории и методов решения краевых задач для гиперболических уравнений и систем математической физики, механики и электродинамики, систем уравнений смешанного типа и исследованию на их основе процессов распространения и дифракции волн в упругих, термоупругих, многокомпонентных и электромагнитных средах с концентраторами напряжений в виде полостей и включений различных форм, а также при действии подвижных нагрузок в до-, транс- и сверхзвуковом диапазоне скоростей и др.; разработке и исследованию математических моделей динамики подземных сооружений при дифракции сейсмических волн и действии транспортных нагрузок.

Основные научные работы Л.А. Алексеевой опубликованы в известных периодических международных научных журналах: Известия АН СССР, Техническая кибернетика; Известия АН СССР, Механика твердого тела; Прикладная математика и механика, Дифференциальные уравнения, Журнал вычислительной математики и математической физики, Computational Mechanics, Engineering Analysis in Boundary Elements, Clifford Analysis,Clifford Algebras and their Applications, Modern Physics и др., а также в республиканских изданиях: Известия АН КазССР и Известия НАН РК – серия физико-математическая, Доклады и Вестник АН КазССР и НАН РК, Математический журнал и др., и трех монографиях [1]–[3]. Она – участник многих международных съездов, симпозиумов, конференций. Из последних зарубежных : I-IV Конгрессы Тюрского математического общества, X-XI Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, VIII-X Конгрессы Ньютоновского математического общества ISAAC и др. [98]–[130].

Людмила Алексеевна активно занимается подготовкой научных кадров. Ею подготовлено 14 кандидатов наук, была научным консультантом 5 докторских диссертаций. На протяжении многих лет работает по совместительству профессором в КазНУ им. аль-Фараби на механико-математическом факультете, читает спецкурсы по математическому моделированию, динамике упругих сред, теории обобщенных функций, методу граничных интегральных уравнений и др. для студентов, магистрантов и докторантов. Руководит научным семинаром Отдела математической физики и моделирования.

Большое место в ее работе занимает научная экспертиза проектов, диссертаций, статей, отчетов и др. Она – является постоянным экспертом госэкспертизы РК, была членом различных Диссертационных Советов (по механике при Институте сейсмологии АН КазССР, при ИММ АН Каз ССР, при ИММаш НАН РК, при КазАТК, по математике при Институте матемтики МОН РК), в 1995-96 г.г. была членом Президиума ВАК РК. Она рецензент ряда международных и республиканских научных журналов, член редколлегии журналов "Математический журнал", "Журнал проблем эволюции открытых систем".

За активную научную работу и полученные результаты д.ф.-м.н., проф. Л.А. Алексеева неоднократно получала государственную научную стипендию для ученых и специалистов, внесших выдающийся вклад в развитие науки и техники (1997-2000, 2000-2002, 2004-2006, 2008-2010 г.г.). Награждена тремя Почетными грамотами МОН РК и Знаком отличия для работников науки и образования РК.

Редакционная коллегия поздравляет юбиляра, желает крепкого здоровья, благополучия и творческого долголетия.

Список основных публикаций

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: "Наука". – 1989. – 240 с.

2. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б., Дильдабаев Ш.А. Метод граничных интегральных уравнений в динамике упругих многосвязных тел. – Алма-Ата: "Наука". – 1991. – 228 с.

3. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Казахская домбра и ее акустические особенности. – Алматы. – 2003. – 188 с.

Препринты

4. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Управление динамической моделью шагающего аппарата. – Препринт № 20. – Институт прикладной математики АН СССР. Деп. ВИНИТИ. – 1974. – № 908. – 50 с.

5. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения краевых задач для класса стационарных бегущих решений волновых уравнений в цилиндрических областях. – Препринт ИТПМ МН-АН РК. – Алматы, 1997. – 72 с.

Статьи

6. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата // VI IFAC Symp. Control in Space. Papers. Session XI. Ереван. – 1974. – С. 63-80.

7. Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф. Модель динамики шагающего аппарата // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 3. – С. 50-58.

8. Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф. Адаптивный алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1976. – № 5. – С. 56-63.

9. Алексеева Л.А. Моделирование динамики и управления движением шагающего аппарата // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1976. – № 6. – С. 78-86.

10. Ержанов Ж.С., Алексеева Л.А. Задачи дифракции и преломления сейсмических волн на подкреплениях полостей цилиндрических и сферических форм // Труды IV Национального Конгресса по теоретической и прикладной механике. Болгария. Варна. – 1981. – С. 77-82.

11.Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Расчет бетонной крепи цилиндрической выработки в в водопроницаемых грунтах на сейсмическое воздействие // Проблемы механики подземных сооружений. Сб. научн. тр. Алма-Ата: "Наука". – 1982. – С. 82-91.

12. Алексеева Л.А., Шершнев В.В. О напряженно-деформированном состоянии окрестности круговой цилиндрической полости в упругих и многокомпонентных средах при рассеянии стационарных волн // Алма-Ата: "Наука". – Механика тектонических процессов. Сб. научн. тр. – 1983. – С. 122-132.

13. Алексеева Л.А. Стационарная дифракция волн на круговом отверстии в упругой полуплоскости // Прикладная математика и механика (ПММ). – 1985. – Т.49, №2. – С. 211-218.

14. Алексеева Л.А. Упругая перфорированная полоса на неподвижном основании при стационарных колебаниях // Изв. АН Каз ССР. Сер.физ.-мат. – 1985. – № 3. – С. 8-12.

15. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б. Граничные интегральные уравнения в динамических задачах теории упругости // Вестник АН Каз.ССР. – 1985. – № 9. – С. 46-51.

16. Айталиев Ш.М.,Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. – 1986. – № 5. – С. 75-80.

17. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 4. – С. 156-162.

18. Алексеева Л.А. Влияние угла падения и контактных условий на напряженное состояние бетонной крепи тоннеля при дифракции стационарных волн // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. – 1986. – № 3. – С. 59-63.

19. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения для упругой полуплоскости с отверстием при динамических нагрузках на его контуре // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. – 1987. – № 3. – С. 57-62.

20. Алексеева Л.А. Дифракция волн на системе протяженных подземных выработок неглубокого заложения // Вестник АН КазССР. – 1987. – № 2. – С. 46-52.

21. Алексеева Л.А. Дифракция волн в многосвязном полупространстве/ В сб. трудов "Динамика неоднородных сред и взаимодействие волн с элементами

конструкций". – Новосибирск. – 1987. – С. 6-12.

22. Алексеева Л.А. Коротковолновая асимптотика дальнего поля источника упругих волн в полуплоскости // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. – 1988. – № 5. – С. 74-80.

23. Алексеева Л.А. Стационарные колебания упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью при действии периодической нагрузки // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 5, № 5. – С. 836-843.

24. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Напряженное состояние двухслойной обделки тоннеля от действия внутренних движущихся нагрузок // Сб. тр. Механика подземных сооружений. Тула. – 1988. – С. 24-33.

25. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.,Суюнчева Т. Асимптотика дальнего поля стационарного источника волн в составной вязко-упругой плоскости // Известия АН Каз ССР. Сер.физ-мат. – 1989. – № 1. – С. 72-68.

26. Alexeyeva L.A. Analogues of Kirchhoff and Somigliana formulas in elastodynamics plane problems// Applied Mathematics and Mechanics. – 1991. – V. 55, No. 2. – P. 298-308.

27. Алексеева Л.А. Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // Прикладная математика и механика. – 1991. – Т. 55, № 5. – С. 854-862.

28. Алексеева Л.А., Украинец В.Н., Жанабаев Б.А.Реакция тоннеля мелкого заложения на движущуюся периодическую нагрузку // Сб. Механика подземных сооружений. – Тула. – 1991. – С. 96-107.

29. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения начально-краевой задачи для волнового уравнения в $R^2 \times t$ // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 8 – С. 1451-1453.

30. Алексеева Л.А. Формулы Сомильяны для решений уравнений эластодинамики в случае бегущих нагрузок // Прикладная математика и механика – 1994 – Т. 58, № 1 – С. 103-109.

31. Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Фундаментальные решения уравнений движения среды Био // Доклады НАН РК – 1994 – № 1. – С. 3-6.

32. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58, № 2. – С. 170-175.

33. Алексеева Л.А. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса для решений волнового уравнения в $R^N \times t$ // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1951-1953.

34. Alexeyeva L.A., Shershnev V.V. Somigliana's formula analogue in distribution space for dynamics of two-component mediums // Доклады НАН РК. – 1995. – No. 2. – С. 3-7.

35. Alexeyeva L.A., Dildabaev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakiryanova G.K. Boundary Integral Equation Method in two- and three dimensional problems of elastodynamics // Computational Mechanics. – 1996. – V. 18, No. 2. – P. 147-157.

36. Alekseyeva L.A., Dadaeva A.N. Boundary element method for transient problems of uncoupled thermoelastodynamics // Transactions on Modelling and Simulation. – 1997. – V. 18. – P. 119-126.

37. Alekseyeva L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads // Engineering Analysis with Boundary Element. – 1998. – No. 11. – P. 37-44.

38. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 125-127.

39. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, № 5. – С. 853-859.

40. Alekseyeva L.A. Generalized functions method in the boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // Proceedings of II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. 25-28 Sept. – 2000. – P. 231-243.

41. Alexeyeva L.A., Eskalieva A.Zh., Shershnev V.V. Stress – strain state in the neighbourhood of subways and pipe lines by the action of dynamic loads // Proc. Of II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. 25-28 Sept. – 2000. – P. 286-300 .

42. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 4. – С. 611-622.

43. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Музыкальный строй казахской домбры // Евразийское сообщество. – 2000. – № 3. – С. 120-129.

44. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Домбра и ее амплитудно-частотные характеристики // Доклады НАН РК. – 2001. – № 1. – С. 47-55.

45. Алексеева Л.А., Купесова Б.Н. Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65, № 2. – С. 334-345.

46. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач электродинамики // Математический журнал. – 2001. – Т. 1, № 1. – С. 3-13.

47. Алексеева Л.А. О единственности решений начально-краевых задач для уравнений Максвелла в случае ударных электромагнитных волн // Изв. НАН РК. Сер. физико-математическая. – 2001. – № 5. – С. 63-68.

48. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 4. – С. 488-494.

49. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для

уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 1. – С. 6-88.

50. Алексеева Л.А. Электромагнетизм и А-поле // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. – 2002. – Т. 10, № 2(34). – С. 126-136.

51. Алексеева Л.А. Фундаментальные решения уравнений движения упругого полупространства при дозвуковых бегущих нагрузках // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2002. – № 5. – С. 53-58.

52. Алексеева Л.А. О замыкании уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 5. – С. 759-766.

53. Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 6. – С. 769-776.

54. Алексеева Л.А. Действие стационарных бегущих нагрузок в упругом полупространстве // Математический журнал. – 2003. – Т. 3, № 1. – С. 18-25.

55. Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2004. – № 3. – С. 45-53.

56. Алексеева Л.А. Об одной модели электро-гравимагнитного поля. Уравнения взаимодействия полей и законы сохранения // Математический журнал. – 2004. – Т. 4, № 2. – С. 20-32.

57. Alexeyeva L.A., Kaishybaeva G.K. Mathematical model of array dynamics in the vicinity of extended underground structures at action of moving loadings // Mathematics and Computers in Simulation. – 2004. – V. 67, No. 4. – P. 441-450.

58. Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K. Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. – 2005. – No. 4-5. – P. 259-267

59. Alexeyeva L.A. Time-dependent boundary value problems for Maxwell equations and their generalized solutions // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications-I, Yokohama Publishers. – 2006. – P. 239-245.

60. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 1. – С. 16-32.

61. Алексеева Л.А. О Лоренц-инвариантности уравнений взаимодействия для одной модели ЭГМ-поля // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2007. – № 2. – С. 11-18.

62. Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш.Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с трещиной // Математический журнал. – 2007. – Т. 8, № 3. – С. 11-20.

63. Алексеева Л.А.Преобразования Лоренца для одной модели электро-гравимагнитного поля. Законы сохранения // Математический журнал. – 2007. – Т. 7, № 4. – С. 12-24.

64. Алексеева Л.А.Динамика упругого полупространства при действии бегущей нагрузки // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 4. – С. 561-569.

65. Алексеева Л.А. Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 2(30). – С. 1-19.

66. Lyudmila A. One biquaternion model of electro-gravimagnetic field // Journal of Applied Functional Analysis. – 2009. – V. 4, No. 3. – P. 536-544.

67. Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 122-134.

68. Alekseeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – V. 45, No. 9. – P. 981-990.

69. Алексеева Л.А. Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач эластодинамики в случае дозвуковых бегущих нагрузок // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 512-519.

70. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н.МГИУ в нестационарных краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // Известия НАН РК, сер.физ-мат. – 2010. – № 6(274).

71. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, №. 7. – С. 1280-1293.

72. Алексеева Л.А. Уравнение Дирака и его обобщенные решения. 1. Бикватернионная форма и КГФШ-уравнение // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2011. – № 1. – С. 33-41.

73. Алексеева Л.А. Уравнение Дирака и его обобщенные решения.2. Скалярные потенциалы и бикватернионы спинорных полей. // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2011. – № 2. – С. 30-38.

74. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов в уравнениях математической и теоретической физики // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2012. – Т. 9, № 2. – С. 316-341.

75. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. – 2012. – V. 7, issue 1. – P. 19-39.

76. Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions // Progress in analysis. Proc. of the 8th Congress of ISAAC, Moscow, Aug 22-27. – 2011. – P. 153-161.

77. Алексеева Л.А. Твисторное биволновое уравнение и его обобщенные решения // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2012. – № 4 (284). – С. 27-32.

78. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Дифракция нестационарных волн в упругой полуплоскости с поверхностным включением при сбросе напряжений на трещине // Математический журнал.. – 2012. – Т. 12, № 2(44). – С. 23-42.

79. Алексеева Л.А. Уравнение трансформации и его обобщенные решения в дифференциальной алгебре бикватернионов // Доклады НАН РК.-2013. - №4. - С.12-19

80. Alexeyeva L.A., Kanymgaziyeva I.A., Sautbekov S.S. Generalized solutions of Maxwell equations for crystals with electric and magnetic anisotropy // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2014. – P. 1-14.

81. Алексеева Л.А. Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2014. – № 3. – С. 144-152.

82. Алексеева Л.А. О единственности решений краевых задач теории упругости при действии сверхзвуковых транспортных нагрузок // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2014. – № 4. – С. 150-158.

83. Алексеева Л.А., Ахметжанова М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней // Материаловедение. Бишкек. – 2012. – № 2. – С. 46-50.

84. Алексеева Л.А.Биволновое уравнение с векторным структурным коэффициентом и его обобщенные решения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике//Т. 12.-№2(23).- 2015.- С. 127-134.

85. Алексеева Л.А. Обобщенные решения и сингулярные граничные интегральные уравнения первой краевой задачи теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2015. – № 3. – С. 232-242

86. Алексеева Л.А., Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Задача о действии подвижной периодической нагрузки на многослойную оболочку в упругом полупространстве // Известия НАН РК. Серия физ-мат. – 2015. – № 5. – С. 22-29.

87. Alexeyeva L.A., Kaishybaeva G.K. Transport Solutions of the Lame Equations and Shock Elastic Waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2016. – V. 56, No. 7. – P. 1343-1354.

88. Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic field, charges and currents. Law of inertia // Journal of modern physics. – 2016. – V. 7. – P. 435-444.

89. Alexeyeva L.A. Maxwell equations, their hamiltonian and biquaternionic forms and properties of their solutions // Mathematical journal. – 2016. – V. 2(16). – P. 25-39.

90. Alexeyeva L.A. Generalized Dirac Equation With Vector Structural Coefficient and Its Generalized Solutions in Biquaternions Algebra // Journal of Mathematics

and System Science. – 2015. – V. 5, No. 8. – P. 309-314.

91. Alexeeva L.A., Sarsenov B.T. Mathematical model of massif dynamics in the neighborhood of disturbance focus // Advancement in Mathematical Sciences. Proceedings of Int. Conf. on Advancement in Mathematical Science. Antalya, Turkey. – 2015. – 0200055-1-6.

92. Alexeyeva L.A. Biquaternionic Model of Electro-Gravimagnetic Field, Charges and Currents. Law of Inertia // Journal of Modern Physic. – 2016. – V. 7. – P. 435-444.

93. Alexeyeva L.A. Biquaternionic form of laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents interactions // Journal of Modern Physics. – 2016.. – V. 7. – P. 1351-1358.

94. Суйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р Моделирование динамики космического аппарата в гравимагнитном поле Земли в системе "Matlab Simulink" // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2016. – № 4. – С. 188-207.

95. Alexeyeva L.A., Sarsenov B.T. Dynamics of elastic half-plane when resetting the vertical stress at the crack // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – V. 107, No. 3. – P. 517-528.

96. Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N. Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // Citation: 1798, 020003. – 2017. – doi: 10.1063/1.4972595.

97. Алексеева Л.А. Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач теории упругости при сверхзвуковых транспортных нагрузках // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 3. – DOI:10.1134/S0374064117020.

Тезисы докладов

98. Alexeyeva L.A. Generalized functions method in the boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Abstracts. Islamabad. – 2000. – P. 43.

99. Alexeyeva L.A., Eskalieva A.Zh., Shershnev V.V. Stress – strain state in the neighborhood of subways and pipe lines by the action of dynamic loads // II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. Abstracts. – 2000. – P. 28-29.

100. Alexeyeva L.A. Boundary integral equations to time-dependent boundary value problems of diffraction of electromagnetic waves // Int. Seminar "Day on diffraction". Saint-Peterburg. – 2003. – P. 12-13.

101. Alexeyeva L.A. Time-dependent boundary value problems for Maxwell equations and their generalized solutions // Abstracts of X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications. Osaka, Japan. – 2004. – P. 42-43.

102. Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations // Int. Congress of Mathematicians. Madrid. – 2006. – 436 p.

103. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Нестационарные аналоги формул Грина и Гаусса для решений гиперболических систем // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященная И.Г. Петровскому (22-я сессия). – 2007. – С. 346.

104.Lyudmila A. One biquaternion model of electro-gravymagnetic field // 2-nd Int. Interdisciplinary Chaos Symposium "Chaos and Complex Systems". – 2008. – P. 25.

106.Alexeyeva L.A., Baegizova A.S. Boundary integral equations method for boundary value problems for Klein-Gordon-Fokk equations // Book of abstracts. IV Congress of the Tyrkic World Mathematical Society. – 2011. – P. 154.

107. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Математическое моделирование динамики тоннелей и трубопроводов мелкого заложения // X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Россия. Нижний Новгород. Вестник Нижнгородского университете им. ИМ. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-5. – С. 1954-1956.

108. Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. Динамика упругой среды при действии трансзвуковых транспортных нагрузок // Межд. конф. "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика посвященная 90-летию акад. Н.Н. Яненко, Новосибирск, Россия. – 2011, Новосибирск, ИВТ СО РАН. – 2011. – 0321101160.

109. Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equation and its generalized solutions // Abstracts 8-th International ISAAC Congress. Moscow. – 2011. – P. 121.

110. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. К модели сейсмического воздействия на наземные сооружения // Труды межд. науч. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды посвященной памяти акад. М.Я. Леонова (100-летие со дня рождения). Бишкек. – 2012. – С. 219-222.

111. Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N. Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations // ISAAC 9-th Congress: abstracts. Krakow. – 2013. – P. 19-20.

112. Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Twistors equation and its generalized solution // 9th International ISAAC Congress, Krakow, Poland. – 2013. – 18 p.

113. Alexeyeva L.A. Generalized Dirac equation in biquaternions algebra and its generalized solutions // V Congress of the Turkic Wordl Mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul. – 2014.

114. Alexeyeva L.A. Generalized Functions Method in transport problems of elastodynamics // Southapton, UK, Int. Conf. on generalized functions. – 2014. – 2 p.

115. Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. Краевые задачи динамики упругих

сред при действии транспортных нагрузок // Сборник трудов. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань. – 2015. – С. 120-123.

116. Alexeyeva L.A. Generalized Dirac equation in biquaternions algebra and its generalized solutions // V Congress of the Turkic Wordl Mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul. – 2014.

117. Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. Транспортные решения уравнений Ламе, ударные упругие волны. // Труды межд. научн. конф АМСА-2015 "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики посв.90-летию со дня рождения акад. Г.И. Марчука. Академгородок, Новосибирск, Россия. – 2015. – С. 43-49.

118. Алексеева Л.А. Математическое моделирование динамики породного массива при сейсмических воздействиях // Труды 2-ой межд.научно-практ. конф. Проблемы механики и строительства транспортных сооружений, посв.80-летию акад. НАН РК Ш.М. Айталиева. Алматы. – 2015. – С. 20-25.

119. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Метод обобщенных функций в задачах динамики анизотропных упругих сред // Межд. научн. конф. Актуальные проблемы математики и математического моделирования. Посв. 50-летию Института математики и механики АН КазССР. Тезисы докладов. Алматы. – 2015. – С. 331-332.

120. Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. Краевые задачи динамики упругих сред при действии транспортных нагрузок // Аннотации докладов. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань (Россия). – 2015. – С. 24.

121 Alexeyeva L.A. Generalized functions method in transport problems of elastodynamics // Abstracts . Int.Conf. Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education. CITech. Almaty. – 2015.

122. Alexeyeva L.A. Boundary value problems of elastodynamics at action of subsonic transport loads and their generalized solutions // Euromech-2015. Colloquium 574. Recent Trends in Modeling of Moving Loads on Elastic Structures. Eskisehir, Turkey. – 2015. – P. 1.

123. Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K., E.B. Kurmanov. Dynamics of two-component medium M.Biot for subsonic transport load-Euromech -2015. Colloquium 574. Recent Trends in Modeling of Moving Loads on Elastic Structures. Eskisehir, Turkey. – 2015.

124. Alexeyeva L.A., Aziz G.N. Modified Hamiltonian Biform of Maxwell Equations. Shock Electromagnetic Waves // 10th Int. ISAAC Congress. Macau, China. – 2015. – P. 134.

125. Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K. Boundary value problems for the hyperbolic system of mathematical physics equations and their generalized solutions

// X Int. ISAAC Congress. Macau, China. – 2015. – P. 134.

126. Alexeyeva L.A., Ahmetzhanova M.M., Kayshibayeva G.K. Dynamics of the massif in the vicinity of the tunnel any profile of section under action of transport loadings // ICAAM 2016: Abstract Book. Kazakhstan, Almaty. – 2016. – P. 226.

127. Alexeyeva L.A., Kurmanov E.B., ZakiryanovaG.K. . Generalized and fundamental solutions of M. Biot equations for subsonic transport load // ICAAM 2016: Abstract Book - Kazakhstan, Almaty. – 2016. – P. 251.

128. Алексеева Л. А., Алипова Б.Н. Тензор Грина для термоупругой полуплоскости со свободной границей // Тезисы докл. Межд. науч. конф. посв. 80-летию ак. У.М. Султангазина "Математические методы и современные космические технологии". Алматы, 2016 г., с. 19-21.

129.Алексеева Л.А., Суйменбаев Ж.Б., Сулеев Т. 3D-моднль наноспутника "ПОЛИТЕХ-1"и расчет его физико-механических параметров с использованием ПО "SOLIDWORKS" // Тезисы докл. Межд. науч. конф. посв. 80-летию ак. У.М. Султангазина "Математические методы и современные космические технологии". Алматы. – 2016. – С. 193.

130. Суйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р. Компьютерное моделирование управления движением космического аппарата в гравимагнитном поле Земли в системе MATLAB-Simulink // Тезисы докл. Межд. науч. конф. посв. 80-летию ак. У.М. Султангазина "Математические методы и современные космические технологии". Алматы. – 2016. – С. 165.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 20–25.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

МУВАШАРХАН ТАНАБАЕВИЧ ДЖЕНАЛИЕВ
(К 70-летию со дня рождения)

25 января 2017 года доктору физико-математических наук, профессору Дженалиеву Мувашархану Танабаевичу, известному специалисту в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложениям, главному научному сотруднику Института математики и математического моделирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан исполнилось 70 лет.

М.Т. Дженалиев родился в участке Актобе (ныне хозяйство Толе-би) Шуского района Жамбылской области в семье сельских тружеников. Отец Мувашархана Танабаевича, Жиеналиев Танабай (1894 г.р.), работал многие годы чабаном, мать, Жиеналиева Тенге (1922 г.р.), помогала мужу в этом нелегком чабанском деле вплоть до его смерти, наступившей в 1961 г. С 1961 г. до 1978 г. (до ухода на пенсию) она работала на различных рабочих должностях. Все четверо детей Жиеналиевых получили высшее образование благодаря самоотверженному труду матери. Тяжелый труд чабана не является чуждым и для Мувашархана, во время летних каникул он помогал родителям в их нелегком труде.

В 1953 году Мувашархан Танабаевич поступает в семилетнюю казахскую школу участка Актобе и заканчивает первый класс с похвальной грамотой. В связи с переездом родителей в пос. Михайловка (в последующем, пос. Чатыркуль) в 1954 году он поступает снова в первый класс семилетней русской школы из-за следующей аргументации руководства школы: Мувашархан не владеет русским языком(?!) Однако, он за год успевает овладеть русским языком так, что первый класс заканчивает также с похвальной грамотой. И дальше он продолжает обучение только на русском языке и в 1965 году он заканчивает 11-й класс средней школы им. М. Горького в селе Новотроицкое (ныне Толе-би). С 9-го класса Мувашархан увлекается математикой, в чем главную роль сыграл его учитель математики, завуч средней школы им. М. Горького, Кутузов Александр Яковлевич. В 1964 и 1965 годах в Алматы он участвует во 2-й и 3-й Казахстанских математических олимпиадах школьников, в последней из которых он удостаивается специального приза и диплома второй степени.

В 1965 году он поступает в Казахский политехнический институт им. В.И. Ленина на факультет Автоматики и вычислительной техники и в 1971 году заканчивает его по специальности "Автоматика и телемеханика" с квалификацией "Инженер-электрик".

В 1971-1976 годы М.Т. Дженалиев работает последовательно инженером, старшим инженером и руководителем группы проектирования в Казахском отделении ГПИ "Проектмонтажавтоматика" (Алматы). Здесь он занимается вопросами проектирования систем диспетчеризации для объектов энергоснабжения с использованием телемеханических устройств.

В 1976-1980 годы М.Т. Дженалиев проходит очную аспирантуру в КазГУ под научным руководством профессора С.А. Айсагалиева, защищает кандидатскую (1982 г.) и докторскую диссертации (1994 г.). В 1984 году ему присвоено ученое звание Старший научный сотрудник, а в 1996 – ученое звание Профессор.

С 1980 года М.Т. Дженалиев работает в Институте математики и механики АН КазССР (ныне Институт математики и математического моделирования КН МОН РК). М.Т. Дженалиев прошел все ступени должностей академического учреждения: МНС, СНС, ВНС, ГНС, заведующий лабораторией уравнений математической физики, заместитель директора по научной работе, с 1 января 2007 года исполняющий обязанности и затем с августа 2008 по 2011 годы – директор Института математики.

Его научные достижения опубликованы в журналах "Дифференциальные уравнения", "Сибирский математический журнал", "Boundary value problems", "Advances in difference equations", "Математический журнал" (Алматы), "Труды Института математики НАН Беларусь", "Доклады НАН РК", "Неклассические уравнения математической физики" (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН), "Доклады АМАН", "Известия НАН РК". Серия физико-математическая и другие. Перечислим основные его результаты.

Профессором М.Т. Дженалиевым доказана теорема о достаточных условиях оптимальности и на ее основе разработан алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления параболическим уравнением. Этот результат является развитием принципа оптимальности В.Ф. Кротова для уравнений в частных производных, учитывающего их разрешимость в соответствующих соболевских классах (в смысле интегрального тождества). Новым здесь явилось введение вспомогательного функционала и специальных конструкций, позволивших снять ограничение о приведении дифференциальных уравнений в частных производных к нормальной форме, что позволило свести исходную задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум в функциональных пространствах Соболева. Этот результат составил основу кандидатской диссертации М.Т. Дженалиева.

Для краевых задачах с производными по времени на границе для параболического и гиперболического уравнений М.Т. Дженалиевым обнаружен эффект "переопределенности" при задании начальных условий в области и на ее границе из класса квадратично суммируемых функций (которые не согласованы по теореме о следах). Установлена разрешимость краевых задач для линейных нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами. Построены симметризующий оператор для нагруженного параболического уравнения, гильбертово пространство типа пространства К. Фридрихса и квадратичный функционал, уравнение Эйлера для которого дает обобщенную постановку исходной граничной задачи. По этим результатам М.Т. Дженалиевым защищена докторская диссертация.

В терминах (комплексного) спектрального параметра, являющегося коэффициентом нагруженного слагаемого, найдено описание резольвентного множества и спектра для спектрально-нагруженного параболического оператора, дана характеристика кратности собственных функций в пространстве ограниченных и непрерывных функций в зависимости от значения спектрального параметра (совместно с М.И. Рамазановым).

В последние годы М.Т. Дженалиев вместе с сотрудниками ведет исследования по однородным краевым задачам теплопроводности в вырождающихся нецилиндрических областях. Установлено, что здесь наряду с тривиальным решением существуют и нетривиальные.

М.Т. Дженалиев активно занимается подготовкой научных кадров. Под его руководством защищены 3 докторских, 7 кандидатских диссертаций и 1 диссертация PhD. С 1980 г. по совместительству он работает и читает спец.курсы на механико-математическом факультете КазНУ им. аль-Фараби.

Мувашархана Танабаевича отличает деловое, принципиальное и творческое отношение, трудолюбие, профессионализм и высокое чувство ответственности. Он пользуется заслуженным уважением в коллективе Института математики и математического моделирования.

Редколлегия журнала поздравляет Мувашархана Танабаевича с 70-летним юбилеем и желает ему здоровья и творческого долголетия.

Список основных научных трудов М.Т. Дженалиева

1. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 4. – С. 641-651.

2. Дженалиев М.Т. О разрешимости граничных задач для линейных нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1585-1595.

3. Дженалиев М.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1825-1827.

4. Дженалиев М.Т. Краевые задачи и задачи оптимального управления для линейных нагруженных гиперболических уравнений// Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 232-241.

5. Дженалиев М.Т. Об одном классе нагруженных эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 3. – С. 522-524.

6. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для нагруженного параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 4. – С. 661-666.

7. Дженалиев М.Т. Неоднородные задачи для нагруженного эволюционного уравнения нечетного порядка с внутренне-краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 617-626.

8. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка и нагруженные уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 8. – С. 1380-1389.

9. Дженалиев М.Т. К обобщенной разрешимости нагруженного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 4. – С. 723-724.

10. Дженалиев М.Т. Краевые задачи для нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядков и их приложения // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 160-162.

11. Дженалиев М.Т. О нелокальных граничных задачах для нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1901-1905.

12. Дженалиев М.Т. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. I // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 12. – С. 2029-2037.

13. Дженалиев М.Т. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. II // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 4. – С. 518-522.

14. Jenaliyev M.T. On Loaded Equations with Periodic Boundary Conditions // Differential Equations. – 2001. – V. 37, No. 1. – P. 48-54.

15. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. On the Boundary Value Problem for the Spectrally Loaded Heat Conduction Operator // Siberian Mathematical Journal. – 2006. – V. 47, No. 3. – P. 433-451.

16. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. On a Boundary Value Problem for a Spectrally Loaded Heat Conduction Operator. I // Differential Equations. – 2007. – V. 43, No. 4. – P. 513-524.

17. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. On a Boundary Value Problem for a Spectrally Loaded Heat Conduction Operator. II // Differential Equations. – 2007. – V. 43, No. 6. – P. 806-812.

18. Jenaliyev M.T., Akhmanova D.M., Ramazanov M.I. On a particular second kind Volterra integral equation with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. – 2011. – V. 52, No. 1. – P. 1-10.

19. Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Ramazanov M.I. Boundary Value Problems for a Spectrally Loaded Heat Operator with Load Line Approaching the Time Axis at Zero or Infinity // Differential Equations. – 2011. – V. 47, No. 2. – P. 231-243.

20. Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova .T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 2014, No. 213. – P. 1-24.

21. Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in

Difference Equations. – 2015. – V. 2015, No. 71. – P. 1-14.

22. Jenaliyev M.T., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Boundary Value Problems for aWeakly Loaded Operator of a Second-Order Hyperbolic Equation in a Cylindrical Domain // Differential Equations. – 2015. – Vol. 51, No. 12. – P. 1595-1606.

23. Jenaliyev M.T., Amangalieva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 56, No. 6. – P. 982-995.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 26–31.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

РЫСКУЛ ОЙНАРОВ
(К 70-летию со дня рождения)

26 февраля 2017 года исполнилось 70 лет со дня рождения известного казахстанского математика, специалиста в области функционального анализа, доктора физико-математических наук, член-корреспондента НАН РК, профессора Рыскула Ойнарова.

В 1969 г. Р. Ойнаров окончил с отличием механико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова по специальности "Математика".

С 1973 г. до 1997 г. работал в Институте математики МОН РК в должности МНС, СНС, ВНС, ГНС и заведующим лабораториями (там же защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата, доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01. – математический анализ).

С 1997 г. по 1999 г. работал заведующим кафедрой в Южно-Казахстанском государственном университете им. М.О. Ауэзова.

С 2000 г. работает в Евразийским национальном университете им. Л.Н. Гумилева в должности профессора кафедры фундаментальной математики.

Рыскул Ойнаров является ученым-математиком, широко известным в странах ближнего и дальнего зарубежья, как специалист в области функционального анализа и его приложений. Р. Ойнаров – автор более 100 оригинальных научных работ (из них более 35-ти изданы в рейтинговых журналах).

В разные годы профессор Р. Ойнаров вел исследования в следующих направлениях: свойства нелинейных интегральных операторов типа Урысона в функциональных пространствах; вопросы корректности расширения и сужения замкнутых операторов в банаховом пространстве и их применения к дифференциальным уравнениям; весовая оценка промежуточных производных и теоремы вложения весовых классов; установление критериев дискретности сингулярных дифференциальных операторов; постановка корректных граничных условий в сингулярной части границы для вырождающихся дифференциальных уравнений; оценки норм и установление критериев ограниченности, компактности интегральных, дискретных операторов в весовых пространствах. качественные характеристики линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Полученные результаты известны широкому кругу математиков.

Профессор Р. Ойнаров придает большое значение исследованиям весовых оценок интегральных операторов. Эти задачи тесно связаны с открытой проблемой теории интегральных операторов. Здесь для широких классов интегральных операторов им получены необходимые и достаточные условия их ограниченности в весовых пространствах. Эти результаты высоко оценены в данной области научных исследований и на них имеются многочисленные ссылки под терминами "ядро Ойнарова" , "условие Ойнарова" , "класс Ойнарова" в работах математиков ближних и дальних зарубежных стран.

Р. Ойнаров является членом редакционных коллегий международных журналов "Journal of mathematical inequalities" , "Advances in Inequalities and Applications" , "Eurasian mathematical journal".

Профессор Р. Ойнаров уделяет огромное внимание подготовке высококвалифицированных научно-педагогических кадров. Под его руководством были защищены 1 докторская, 15 кандидатских диссертаций. Он являлся научным руководителем 9-ти PhD докторов, из них 7, наряду с казахстанской научной степенью, получили ученую степень "Doctor of Philosophy (PhD)" за рубежом: 5 защитили PhD диссертации в Лулео технологическом университете Швеции, а 2 – в Университете Падова Италии. Кроме того, в декабре 2017 года в Лулео технологическом университете

(Швеция) под его руководством планируется защита очередной PhD диссертации.

Профессор Р. Ойнаров в 2005 году был награжден нагрудным знаком "За заслуги в развитии науки Республики Казахстан", в 2007 году – знаком "Почетный работник образования Республики Казахстан" и признан лучшим преподавателем ВУЗа-2007, 2014. В 2008 году был награжден почетной грамотой Республики Казахстан. В 2016 году был удостоен ордена "Құрмет".

Редколлегия журнала поздравляет доктора физико-математических наук, член-корреспондента НАН РК, профессора Рыскула Ойнарова с 70-летним юбилеем и желает ему здоровья и творческого долголетия.

Список основных научных трудов Р. Ойнарова

1. Abylayeva A.M., Oinarov R., Persson Lars-Erik Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators // Journal of inequalities and applications. – 2016.

2. Oinarov R. Boundedness and compactness of a class of convolution integral operators of fractional integration type // Proceedings of the Steklov institute of mathematics. – 2016. – V. 293, No. 1. – P. 255-271.

3. Burenkov V.I., Nursultanov E.D., Kalmenov T.Sh., Oinarov R., Otelbaev M., Tararykova T.V., Temirkhanova A.M., and EMJ. EMJ: from Scopus Q4 to Scopus Q3 in two years?! // Eurasian mathematical journal. – 2016. – V. 7, No. 3:6.

4. Oinarov R., Kalybay A. Weighted Estimates of a Class of Integral Operators with Three Parameters // Journal of function spaces. – 2016.

5. Oinarov R., Ramazanova K., Tiryaki A. An extension of the weighted hardy inequalities and its application to half-linear equations // Taiwanese journal of mathematics. – 2015. – V. 19, No. 6. – P. 1693–1711.

6. Oinarov R., Ramazanova Kh., Tiryaki A. Sturm comparison theorems for half-linear equations with a damping term // Eurasian mathematical journal. – 2015. – V. 6, No. 1. – P. 85-95.

7. Oinarov R., Kalybay A. Weighted inequalities for a class of semiadditive operators // Annals of functional analysis. – 2015. – V. 6, 4. – P. 155-171.

8. Lech Maligranda, Oinarov R., Lars-Erik Persson. On Hardy q-inequalities // Czechoslovak mathematical journal. – 2014. – V. 64, No. 3. – P. 659-682.

9. Abylaeva A.M., Baiarystanov A.O., Oinarov R. A weighted differential hardy inequality on // Siberian mathematical journal. – 2014. – V. 55, No. 3. – P. 387-401.

10. Oinarov R. Boundedness of integral operators in weighted Sobolev spaces // Izvestiya mathematics. – 2014. – V. 78, No. 4. – P. 836-853.

11. Alois Kufner, Komil Kuliev, Oinarov R. Some criteria for boundedness and compactness of the Hardy operator with some special kernels // Journal of inequalities and applications. – 2013. – P. 1-15.

12. Kalybay A., Oinarov R., Temirkhanova A. Boundedness of n-Multiple Discrete Hardy Operators with Weights for $1 < q < p < infinity$ // Journal of function spaces and applications. – 2013.

13. Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // Mathematical inequalities & applications. – 2013. – V. 16, No. 1. – P. 1-19.

14. Oinarov R., Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // Journal of inequalities and applications. – 2012.

15. Oinarov R. Boundedness and compactness in weighted Lebesgue spaces of integral operators with variable integration limits // Siberian mathematical journal. – 2011. – V. 52, 6. – P. 1042-1055.

16. Abdikalikova Z., Baiarystanov A., Oinarov R. COmpactness of embedding between spaces with multiweighted derivatives – the case $p <= q$ // Mathematical inequalities & applications. – 2011. – V. 14, No. 4. – P. 793-810.

17. Abdikalikova Z., Oinarov R., Lars-Erik Persson Boundedness and compactness of the embedding between spaces with multiweighted derivatives when $1 <= q < p < infinity$ // Czechoslovak mathematical journal. – 2011. – V. 61, No. 1. – P. 7-26.

18. Oinarov R. Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space // Complex variables and elliptic equations. – 2011. – V. 56, No. 10-11. – P. 1021-1038.

19. Oinarov R., Rakhimova S.Y. Oscillation and nonoscillation of two term linear and half-liner equations of higher order // Electronic journal of qualitative theory of differential equations. – 2010. – V. 49. – P. 1-15.

20. Oinarov R., Lars-Erik Persson, Temirkhanova A. Weighted inequalities for a class of matrix operators: The case $p <= q$ // Mathematical inequalities & applications. – 2009. – V. 12, No. 4. – P. 891-903.

21. Oinarov R., Kalybay A. Three-parameter weighted Hardy type

inequalities // Banach journal of mathematical analysis. – 2008. – V. 2, No. 2. – P. 85-93.

22. Oinarov R., Christopher A. Okpoti, Lars-Erik Persson Weighted inequalities of hardy type for matrix operators: The case $q < p$ // Mathematical inequalities & applications. – 2007. – V. 10, 4. – P. 843-861.

23. Oinarov R. Boundedness and compactness of Volterra type integral operators // Siberian mathematical journal. – 2007. – V. 48, 5. – P. 884-896.

24. Oinarov R. Reversion of Holder type inequalities for sums of weighted norms and additive weighted estimates of integral operators // Mathematical inequalities & applications. – 2003. – V. 6, No. 3. – P. 421-436.

25. Kalybay A., Oinarov R. Some properties of spaces with multiweighted derivatives // In egehr, HGW and Gilbert, RP and Wong, MW, editor // PRogress in analysis, vols I and II. – 2003. – P. 1-13. DFG; German Res Fdn; City Berlin; Free Univ Berlin. – 2003. 3rd International ISAAC Congress, Berlin, germany. – 2001.

26. Oinarov R. A weighted estimate for an intermediate operator on the cone of nonnegative functions // Siberian mathematical journal. – 2002. – V. 43, No. 1. – P. 128-139.

27. Oinarov R. On weighted norm inequalities with 3 weights // Journal of the london mathematical society-second series. – 1993. – V. 48, No. 1. – P. 103-116.

28. Oinarov R. 3-Weight generalization of Hardy inequality // Mathematical notes. – 1993. – V. 54, No. 1-2. – P. 806-810.

29. Oinarov R., Stikharnyi A.P. Boundness and compactness criteria for a certain difference inclusion // Mathematical notes. – 1991. – V. 50, No. 5-6. – P. 1130-1135.

30. Oinarov R. Weight inequalities for one class of integral-operators // Doklady akademii nauk SSSR. – 1991. – V. 319, No. 5. – P. 1076-1078.

31. Oinarov R., Otelbaev M. A criterion for a general Sturm-Liouville operator to have a discrete spectrum, and a related imbedding theorem // Differential equations. – 1988. – V. 24, No. 4. – P. 402-408.

32. Oinarov R. On the density of finite functions with compact support in weight spaces and weight inequalities // Doklady akademii nauk SSSR. – 1988. – V. 303, No. 3. – P. 559-563.

33. Oinarov R. The schrodinger operator divisibility in the space of

summable-functions // Doklady akademii nauk SSSR. – 1985. – V. 285, No. 5. – P. 1062-1064.

34. Oinarov R., Otelbaev M. Lipschitz and contractiveness criteria for nonlinear integral-operators // Siberian mathematical journal. – 1984. – V. 25, No. 6. – P. 925-935.

35. Oinarov R. On properties of the uryson operator // Doklady akademii nauk SSSR. – 1981. – V. 256, No. 2. – P. 281-284.

36. Oinarov R., Otelbaev M. Compressibility criterion for the uryson operator // Doklady akademii nauk SSSR. – 1980. – V. 255, No. 6. – P. 1316-1318.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 32–42.

УДК 539.3

ТЕНЗОР ГРИНА ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Л.А. Алексеева[1], Б.Н. Алипова[2]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz

[2]Международный университет информационных технологий
050040, Алматы, ул. Манаса 8, e-mail: b.alipova@iitu.kz

Аннотация: Рассматривается динамика термоупругого полупространства при нестационарных силовых и тепловых воздействиях с использованием модели связанной термоупругости. В пространстве преобразований Лапласа по времени построен тензор Грина, описывающий перемещения среды при действии мгновенных сосредоточенных силовых и тепловых источников. Построено обобщенное решение задачи динамики термоупругого полупространства со свободной границей в условиях плоской деформации при действии произвольных массовых сил и тепловых источников.

Ключевые слова: Термоупругость, полуплоскость, динамика, тензор Грина, преобразование Лапласа.

1. Введение

При изучении сейсмических процессов в земной коре для учета реальных свойств породного массива используются различные математические модели механики деформируемых твердых тел. Наиболее изучены процессы распространения и дифракции волн в упругих средах при действии сосредоточенных и распределенных источников различного вида. Теоретические исследования в этом направлении на основе классических методов математической физики имеют довольно обширную библиографию (см. [1]–[4]).

Реальный породный массив, помимо упругих, обладает целым рядом других свойств, которые оказывают существенное влияние на процессы

Keywords: *Thermoelasticity, half-plane, dynamics, Green tensor, Laplace transformation.*

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05,74K25

распространения сейсмических волн и его напряженно-деформированное состояние. Поэтому усложнение математической модели для более полного учета действующих факторов при изучении сейсмических процессов является абсолютно необходимым. Одним из таковых является температура массива, которая существенно влияет на его напряженно-деформированное состояние при статических и динамических воздействиях. Исследование динамики термоупругих сред при действии нестационарных силовых и тепловых источников возмущений относится к числу мало изученных проблем механики и математической физики. Большой вклад в это направление исследований внесли Новацкий В. [5], Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. [6] и др.

В связи со сложностью построения решений системы уравнений движения термоупругой среды, которая относится к классу систем смешанного гиперболо-параболического типа, обычно уравнения упрощают, пренебрегая воздействием упругих деформаций на температурное поле среды. Для такой модели, которая получила название *несвязанной* термоупругости, вначале можно определить температурное поле, решая хорошо изученное параболическое уравнение теплопроводности, а затем определить перемещения или скорости точек среды, используя классические уравнения динамики упругого тела, в которые градиент температурного поля входит как массовая сила. Но даже для такой модели класс решенных задач, а тем более компьютерных программ очень ограничен.

Здесь рассматривается термоупругое полупространство при нестационарных силовых и тепловых воздействиях в условиях плоской деформации, для чего используется модель *связанной* термоупругости. В пространстве преобразований Лапласа построен тензор Грина для термоупругой полуплоскости, описывающий перемещения среды при действии мгновенных сосредоточенных силовых и тепловых источников. На его основе построено решение задачи при действии произвольных массовых сил и тепловых источников. Подобная задача при плоской деформации и в общем случае для упругой среды ранее была решена в [4].

2. Определяющие соотношения связанной термоупругости

Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом термодинамических параметров: массовой плотностью ρ , термоупругими и тепловыми константами γ, η, k и постоянными Ламе λ и μ. Все постоянные положительны.

Динамика термоупругой среды в декартовой системе координат описывается системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\, u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma\theta_{,i} + F_i = \rho\ddot{u}_i, \\ &\Delta\theta - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta\dot{u}_{j,j} + \frac{1}{\kappa}Q = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введены обозначения: $u_i(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ – компоненты вектора смещений и тензора напряжений термоупругой среды

$$\Pi = \{x \in R^N : x_1 < h\, (h > 0)\},$$

$u_3(x,t) = \theta$ – температура; $F = F_i e_i$ – массовая сила; Q – мощность теплового источника. При плоской деформации $N = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $i, j = 1, 2$. Всюду по одноименным индексам берутся тензорные свертки.

Тензор термоупругих напряжений σ_{ij} связан с компонентами смещений и температурой соотношением Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - \gamma\theta)\,\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,, \tag{2}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Всюду символом после запятой обозначены частные производные по соответствующим координатам: $u_{i,j} \equiv \partial u_i/\partial x_j$, а точкой над символом - дифференцирование по времени: $\dot{u} = \partial u/\partial t$.

3. Постановка краевой задачи для термоупругой полуплоскости

Рассмотрим термоупругую полуплоскость $x_1 < h\,(h > 0)$. Предположим, что известно ее начальное состояние:

$$\begin{aligned} &u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x), \\ &\dot{u}_i\,(x,0) = \dot{u}_i^0\,(x)\,, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагается, что $u_i^0(x)$, $\theta^0(x) \in C(\Pi) \bigcap L_1(\Pi)$, $\dot{u}^0(x) \in L_1(\Pi)$.

Краевые условия: граница полупространства свободна от нагрузок и тепловых потоков:

$$\sigma_{j1}(x,t) = 0, \;\; \partial\,\theta(x,t)/\partial x_1 = 0, \;\; j = 1, 2, \quad \text{при } \; x_1 = h. \tag{4}$$

Действующие массовая сила $F(x,t)$ и тепловой источник $Q(x,t)$ известны. Предполагается, что они интегрируемы по x в Π и допускают преобразование Лапласа по времени. Для регулярных функций они связаны соотношениями:

$$\bar{F}(x,p) = \int\limits_0^\infty F(x,t)\, e^{-pt}dt, \quad \mathrm{Re}p > 0,$$

$$F(x,t) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \bar{F}(x,p)e^{pt}dp, \quad p_0 > 0.$$

Действующие источники возмущений могут описываться сингулярными обобщенными силами. Тогда преобразование Лапласа следует брать согласно его определению в пространстве обобщенных функций (см.[7]).

Такими функциями можно описать ударные сейсмические воздействия на породный массив, характерные для землетрясений естественного и искусственного происхождения. В этом случае в среде возникают термоупругие ударные волны со скачком напряжений, скоростей и тепловых потоков на их фронтах. В работах [8], [9] получены условия на фронтах ударных волн и доказана единственность начально-краевых задач термоупругости с учетом ударных волн. Здесь предполагаем, что решения должны удовлетворять условиям на фронтах.

Требуется найти перемещения, температуру и термонапряженное состояние термоупругой полуплоскости.

4. Тензор Грина для термоупругой полуплоскости

Для решения задачи найдем матрицу фундаментальных решений $V_i^k(x,t)$ уравнений термоупругости (1). Она удовлетворяет уравнениям при действии импульсных сосредоточенных массовых сил и тепловых источников, описываемых сингулярными дельта-функциями:

$$\begin{aligned} &L_{ij}(\partial_1,\partial_2,\partial_t)\, V_j^k(x,t) = \delta_i^k \delta(x)\delta(t), \\ &L_{3j}(\partial_1,\partial_2,\partial_t)\, V_j^k(x,t) = \delta_i^3 \delta(x)\delta(t), \ i = 1,2, j,k = 1,2,3, \end{aligned} \tag{5}$$

где дифференциальные операторы имеют следующий вид:

$$L_{ij} = (\lambda + \mu)\ \partial_i \partial_j + (\mu \Delta - \rho \partial_t \partial_t)\delta_{ij} - \gamma \delta_{j3} \partial_i,$$
$$L_{3j} = (\Delta - \kappa^{-1} \partial_t)\delta_{j3} - \eta\,(1 - \delta_{j3})\partial_t \partial_j.$$

Граничные условия (4) на свободной поверхности вычисляем с использованием закона Дюамеля-Неймана:

$$\sum_{i1}^{m} = (\lambda\, V^m_{k,k} - \gamma V^m_3)\delta_{i1} + \mu\,(V^m_{i,1} + V^m_{1,i}) = 0, \quad x_1 = h, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V^m_3}{\partial x_1} = 0, \tag{7}$$

здесь $\sum\limits_{ij}^{m}$ – напряжения, порождаемые фундаментальными решениями V при фиксированном m:

$$\Sigma^m_{ij} = \lambda\, V^m_{k,k}\delta_{ij} - \gamma V^m_3 \delta_{ij} + \mu\,(V^m_{i,j} + V^m_{j,i}). \tag{8}$$

Условие (7) означает отсутствие теплового потока на границе.

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородной системы уравнений. Назовем *тензором Грина* матрицу фундаментальных решений, которая удовлетворяет краевым условиям (6),(7), следующим условиям излучения и затухания на бесконечности:

$$V^k_i\,(x,t) = 0 \quad \forall t < 0, \tag{9}$$

$$V^k_i\,(x,t) \to 0 \quad \forall t > 0,\ \|x\| \to \infty, \tag{10}$$

а также определенным условиям излучения, описывающим отраженные волны от границы полуплоскости, которые опишем далее.

Решение краевой задачи. При произвольных массовых силах и тепловых источниках, используя известное свойство фундаментальных решений, решение имеет вид свертки (тензорная свертка по повторяющимся индексам и свертка по координатам и времени согласно правилам свертки в пространстве обобщенных функций [6]):

$$\begin{gathered} u_i\,(x,t) = V^k_i\,(x,t) * \hat{F}_k\,(x,t) + V^3_i\,(x,t) * \hat{Q}\,(x,t)\,, i = 1,2, \\ \theta\,(x,t) = V^k_3\,(x,t) * \hat{F}_k\,(x,t) + V^3_3\,(x,t) * \hat{Q}\,(x,t)\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$\hat{F}_k = F_k(x,t)H(t) + \rho u_k^0(x)\dot{\delta}(t) + \rho \dot{u}_k^0(x)\delta(t),$$

$$\hat{Q}_k = Q_k(x,t)H(t) + (\kappa^{-1}\theta^0(x) + \eta \mathtt{div} u^0(x))\delta(t), \quad k = 1,2.$$

Если тензор Грина построен, то формулы (11) позволяют моделировать динамику турмоупругого полупространства для широкого класса силовых и тепловых воздействий, в том числе сейсмических. С их представлением в пространстве обобщенных функций можно ознакомиться в [10].

5. Тензор Грина и тензор фундаментальных напряжений

Представим $V_i^k(x,t)$ в виде суперпозиции двух тензоров:

$$V_i^k = U_i^k(x,t) + \Pi_i^k(x,t), \tag{12}$$

где тензор Грина U_i^k – фундаментальное решение для неограниченной термоупругой плоскости, удовлетворяет уравнению (5) и условиям (9), (10). Аналитические выражения для его компонент удается построить только в пространстве преобразований Лапласа по времени $\bar{U}_i^k$ (см. [7], [8]).

Из граничных условий (6)–(7) следует, что тензор Π_i^k удовлетворяет соответствующим однородным уравнениям и следующим граничным условиям на S:

$$\lambda \Pi_{k,k}^m \delta_{i1} + \mu (\Pi_{i,1}^m + \Pi_{1,i}^m) - \gamma \Pi_{3,i}^m = -\Gamma_{i1}^m, \;\; i = 1,2, \tag{13}$$

$$\Pi_{3,1}^m = -\partial_1 U_3^m \quad \text{при} \;\; x_1 = h. \tag{14}$$

Здесь Γ_{i1}^m – термоупругие напряжения, порождаемые фундаментальным тензором U на границе полуплоскости $x_1 = h$, где нормаль $n = (1,0)$:

$$\Gamma_i^m(x,t,n) = \left(\lambda U_{k,k}^m - \gamma U_3^m\right) n_i + \mu n_j \,(U_{i,j}^m + n_i U_{j,i}^m). \tag{15}$$

6. Построение тензора Π_j^m в пространстве преобразования Лапласа

Для определения Π_j^m перейдем в пространство преобразования Лапласа, где он должен удовлетворять однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} L_{ij}(\partial_1, \partial_2, p)\, \bar{\Pi}_j^k(x_1,x_2,p) = 0, \\ L_{3j}(\partial_1, \partial_2, p)\, \bar{\Pi}_j^k(x_1,x_2,p) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

и условиям (13)–(14) на границе. Для его построения используем прямое и обратное преобразования Фурье по горизонтальной координате x_2 в (16). Для регулярных функций $\bar{u}(x_1, x_2, p)$ они имеют вид

$$\bar{u}^*(x_1, \xi, p) = \int_{\infty}^{\infty} \bar{u}(x_1, x_2, p) e^{i\xi x_2} dx_2,$$

$$\bar{u}(x_1, x_2, p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^*(x_1, \xi, p) e^{-i\xi x_2} d\xi.$$

В пространстве преобразований Фурье-Лапласа получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\left[(\lambda + 2\mu)\frac{d^2}{dx_1^2} - \mu\xi^2 - \rho p^2\right]\bar{u}_i^* + i\xi(\lambda+\mu)\frac{d}{dx_1}\bar{u}_2^* - \gamma\frac{d}{dx_1}\bar{u}_3^* = 0, \\
i\xi(\lambda+\mu)\frac{d}{dx_1}\bar{u}_1^* + \left[-(\lambda+2\mu)\xi^2 + \mu\frac{d^2}{dx_1^2} - \rho p^2\right]\bar{u}_2^* - i\xi\gamma\bar{u}_3^* = 0, \\
-\eta p\frac{d}{dx_1}\bar{u}_1^* - i\xi\eta p\bar{u}_2^* + \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right)\bar{u}_3^* = 0
\end{gathered} \tag{17}$$

с граничными условиями при $x_1 = h$:

$$\lambda\,\bar{u}_{k,k}^*\delta_{i1} + \mu\,(\bar{u}_{i,1}^* + \bar{u}_{1,i}^*) - \gamma\bar{u}_{3,i}^* = -\bar{\Gamma}_{i1}^{m*}(x_1, -i\xi, p) \tag{18}$$

$$\bar{u}_{3,1}^* = -\partial_1\bar{U}_3^{m*}(x_1, -i\xi, p), \quad x_1 = h. \tag{19}$$

Здесь для упрощения записи обозначили через $\bar{u}_j^*$ трансформанту Фурье-Лапласа тензора Π_j^k при фиксированном верхнем индексе k.

Граничные условия (13)–(14) в пространстве преобразований Лапласа примут вид: при $x_1 = h$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{B}_{lj}(\partial_1, -i\xi, p)\bar{u}_j^*(x_1, \xi, p) + a_l^m(\xi, p))\exp(-ix_2\xi)d\xi = 0, \;\; l, j = 1, 2, 3, \tag{20}$$

где $B_{lj}(\partial_1, \partial_2, p)$ – соответствующий полиномиальный матричный дифференциальный оператор, a_j^m – преобразование Фурье граничных функций

$$a_l^m = \bar{\Gamma}_{l1}^{m*}(h, \xi, p). \tag{21}$$

Решение однородной системы (18) – это вектор-функция, которую можно представить в виде

$$\bar{u}^* = w(k(\xi, p))) \exp(k(\xi, p))x_1),$$

где $k(\xi, p)$ – корни характеристического уравнения.

Поскольку мы ищем решения, описывающие волны, отраженные плоской границей, затухающие при $x_1 \to -\infty$, необходимо, чтобы

$$\mathrm{Im}k(\xi, p)) \leq 0, \quad \mathrm{Re}k(\xi, p)) \geq 0. \tag{22}$$

Это – дополнительные *условия излучения*. Характеристическое уравнение системы(17) имеет вид

$$Det \left\{ \begin{array}{l} \left[(\lambda + 2\mu)\, k^2 - \mu\xi^2 - \rho p^2\right], i\,(\lambda + \mu)\, k\xi, -\gamma k \\ i\,(\lambda + \mu)\, k\xi, \left[-(\lambda + 2\mu)\, \xi^2 + \mu k^2 - \rho p^2\right], -i\gamma\xi \\ -\eta pk, -i\eta p\xi, \left(k^2 - \xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right) \end{array} \right\} = 0. \tag{23}$$

При фиксированных ξ, p оно имеет 6 корней:

$$k_j = k_j(\xi, p), \quad k_{j+3} = -k_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Можно показать,что в силу разделения корней на две группы всегда можно выбрать три корня уравнения (23), удовлетворяющие условиям (22).

Следовательно, решение, удовлетворяющее условиям излучения, можно представить в виде

$$\bar{u}^*(x_1, \xi, p) = \sum_{j=1}^{3} A_j w(k_j(\xi, p)) \exp(k_j(\xi, p)x_1), \tag{24}$$

где $A_j(\xi, p)$ – произвольные функции, $j = 1, 2, 3$. Компоненты вектор-функции $w(k_j(\xi, p))$ определяем, полагая $\omega_3\,(k_j) = 1$. Тогда для определения остальных двух можно взять любые два уравнения этой системы, перенося слагаемые с третьей компонентой в правую часть. Например,

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\,(\lambda + \mu)\, k_j\xi, & \left[-(\lambda + 2\mu)\, \xi^2 + \mu k_j^2 - \rho p^2\right] \\ -\eta pk_j, & -i\eta p\xi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w_1(k_j) \\ w_2(k_j) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} i\gamma\xi \\ -\left(k_j^2 - \xi^2 - \frac{p}{k}\right) \end{array} \right\}, \ \ \omega_3\left(k_j\right) = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для определения трех неизвестных функций $A_j(\xi, p)$ имеем три граничных условия на свободной поверхности (18)-(19). Подставляя в них (24), получим линейную систему трех уравнений для определения A_j:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j e^{k_j h} \sum_{n=1}^{3} \mathrm{B}_{ln}(k_j, -i\xi, p) w_n(k_j) + a_l^m(\xi, p) = 0, \ \ l = 1, 2, 3. \tag{25}$$

Ее решение есть

$$A_j = \Delta_j^m(\xi, p)/\Delta(\xi, p). \tag{26}$$

Здесь $\Delta(\xi, p)$ – определитель матрицы системы (25):

$$\{b_{jl}\}_{3\times 3} = \left\{ e^{k_j h} \sum_{n=1}^{3} \mathrm{B}_{ln}(k_j, -i\xi, p) w_l(k_j) \right\}_{3\times 3},$$

$\Delta_j^m(\xi, p)$ – соответствующие алгебраические дополнения согласно правилу Крамера.

Таким образом, все искомые функции для вычисления трансформант Фурье-Лапласа тензора $\Pi_j^k(x_1, x_2, p)$ найдены. В результате получим его оригинал:

$$\begin{gathered} \bar{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} A_j(\xi, p) w(k_j(\xi, p)) \exp(k_j x_1 - i\xi x_2) d\xi, \\ \Pi_j^k(x_1, x_2, p) = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) \exp(pt) dp. \end{gathered} \tag{27}$$

Подставляя его в (12), получим тензор Грина для поставленной краевой задачи. Для определения термонапряжений следует использовать закон Дюамеля-Неймана.

При действии произвольных массовых сил и тепловых источников в формуле (11), для вычислений, чтобы не брать свертки по трем переменным, удобнее перейти в них в пространство преобразований Фурье-Лапласа. При этом операция свертки по переменным x_2, t перейдет в произведение трансформант и останется только одна свертка по переменной x_1.

7. Заключение

На основе предложенной методики можно строить тензор Грина для всех классических четырех краевых задач для термоупругой полуплоскости, когда на границе задаются две из четырех характеристик процесса (перемещения, напряжения, температура, тепловой поток).

Построенный тензор можно использовать для решения краевых задач для многосвязной упругой полуплоскости с отверстиями произвольной формы на основе метода обобщенных функций, разработанного в [8], [11] для решения краевых задач термоэластодинамики. Этот класс задач является модельным для исследования динамики подземных сооружений мелкого заложения при дифракции сейсмических волн и действии динамических нагрузок в самих сооружениях.

Литература

1 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

2 Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова Думка, 1978. – 308 с.

3 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.

4 Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. – Алма-Ата: Наука, 1992. – 228 с.

5 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

6 Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

7 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

8 Алексеева Л.А., Купесова Б.Н. Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65, № 2. – С. 334-345.

9 Алексеева Л.А., Дадаева А.Н. О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн // Вестник КазНТУ, серия математика, механика и информатика. – 2013. – № 28. – С. 11-18.

10 Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.

11 Alipova B.N. Method of Boundary integral equations (BIEM) and generalized solutions of transient problems of thermoelastodynamics // AIP Conf. Proc. ICNPAA. – 2012. – V. 1493, 39. – doi: 10.1063/1.4765466.

Статья поступила в редакцию 29.11.2016

Алексеева Л.А., Алипова Б.Н. ЕРКІН ШЕКАРАЛЫ ТЕРМОСЕРПІМДІ ЖАРТЫЛАЙ ЖАЗЫҚТЫҚ ҮШІН ГРИН ТЕНЗОРЫ

Термосерпімді жартылай кеңістіктің динамикасы стационар емес күштік және жылулық әсерлер кезіндегі байланысқан термосерпімділік моделін пайдалана отырып қарастырылады. Уақыт бойынша Лаплас түрлендірулері кеңістігінде лездік шоғырланған күштік және жылулық көздер әсері кезіндегі ортаның орын ауыстыруын сипаттайтын Грин тензоры тұрғызылған. Еркін шекарасы бар термосерпімді жартылай кеңістік динамикасы есебінің жалпыланған шешімі ерікті массалық күштер мен жылулық көдердің әсері кезіндегі жазық деформация жағдайында тұрғызылған.

Alexeyeva L.A., Alipova B.N. GREEN'S TENSOR FOR THERMOELASTIC HALF-PLANE WITH FREE BOUNDARY

Dynamics of a thermoelastic half-space is considered at non-stationary power and thermal influences with use models of the connected thermoelasticity. In space of Laplace transformations on time Green's tensor is constructed which describes medium displacements at an action of instant concentrated power and thermal sources. The generalized solution of the problem of the dynamics of a thermoelastic half-space with free boundary at an action of arbitrary mass forces and thermal sources in the presence of plane deformation is constructed.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 43–59.

УДК 517.956

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

А.Т. Асанова[1], А.П. Сабалахова[2]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: assanova@math.kz; anarasanova@list.ru

[2]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова
160012, Шымкент, пр. Тауке хана, 5, e-mail: sabalahova@mail.ru

Аннотация: Рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для одного класса гибридных систем. Исследуемая задача сведена к эквивалентной задаче, состоящей из семейства краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральных соотношений. Установлены достаточные условия существования единственного решения семейства краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения эквивалентной задачи и доказана его сходимость. Получены условия однозначной разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями для гибридной системы в терминах исходных данных.

Ключевые слова: Нелокальная задача, гибридная система, интегральное условие, однозначная разрешимость, алгоритм.

1. Постановка задачи

Рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для гибридной системы в прямоугольной области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A_1(t,x)u + C_1(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial x} + D_1(t,x)v + f_1(t,x), \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = A_2(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial x} + B(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial t} + C_2(t,x)u + D_2(t,x)v + f_2(t,x), \end{cases} \qquad (1)$$

Keywords: *Nonlocal problem, hybrid systems, integral conditions, unique solvability, algorithm.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A38, 34B10, 34K34, 35G45, 35L50.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0822/ГФ4.

$$P_1(x)u(0,x)+S_1(x)u(a,x)+\int_0^{t_1} K_1(\tau,x)u(\tau,x)d\tau=\varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \quad (2)$$

$$P_2(x)v(0,x)+S_2(x)v(b,x)+\int_0^{t_2} K_2(\tau,x)v(\tau,x)d\tau=\varphi_2(x), \quad x\in[0,\omega], \quad (3)$$

$$v(t,0)=\psi(t), \qquad t\in[0,T], \quad (4)$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ – неизвестные функции, функции $A_1(t,x)$, $A_2(t,x)$, $B(t,x)$, $C_1(t,x)$, $C_2(t,x)$, $D_1(t,x)$, $D_2(t,x)$, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны на Ω, граничные функции $P_1(x)$, $S_1(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, $K_1(t,x)$ непрерывна на Ω, $P_2(x)$, $S_2(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, $K_2(t,x)$ непрерывно дифференцируема по x на Ω, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $0\le a,b\le T$, $0\le t_1,t_2\le T$, выполняется условие согласования данных задачи

$$P_2(0)\psi(0)+S_2(0)\psi(b)+\int_0^{t_2} K_2(\tau,0)\psi(\tau)d\tau=\varphi_2(0).$$

Решением нелокальной задачи с интегральным условием (1)–(4) называется пара функций $(u(t,x),v(t,x))$, где функция $u(t,x)$ непрерывна на Ω, имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ на Ω, а функция $v(t,x)$ непрерывна на Ω, имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}$ на Ω и удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1) при всех $(t,x)\in\Omega$, краевым условиям (2)–(4).

Теория систем составного типа или гибридных систем является одним из бурно развивающихся разделов современной математики. Это связано с многочисленными применениями гибридных систем в задачах автомобиле- и авиастроения, робототехники, электроэнергетики, экологии, финансовой математики и др. [1]–[4]. Гибридные системы могут сочетать непрерывные и дискретные уравнения различных типов в соответствии с описываемыми прикладными задачами. Кроме того, линеаризация нелинейных задач для дифференциальных уравнений и систем уравнений в частных производных часто приводит к аппроксимирующим линейным задачам для гибридных систем соответствующего вида [5]–[6].

Гибридная система (1), исследуемая в настоящей работе, состоит из двух уравнений: дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и гиперболического уравнения со смешанной производной второго порядка. Кроме того, каждое уравнение системы (1) включает искомое решение (или частные производные решения) другого уравнения, т.е. дифференциальные уравнения взаимосвязаны через неизвестные функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$. Для дифференциального уравнения первого порядка задается условие, являющееся суммой линейной комбинации значений искомой функции на линиях $t=0$, $t=a$ и интеграла от 0 до t_1 от искомой функции с некоторым ядром. Для гиперболического уравнения задаются два условия: первое – сумма линейной комбинации значений искомой функции на характеристиках $t=0$, $t=b$ и интеграла от 0 до t_2 от искомой функции с некоторым ядром, второе – значение искомой функции на характеристике $x=0$.

Гибридные системы вида (1) встречаются при исследовании волновых процессов в различных средах, в теории популяций, в теории адсорбируемых смесей, в технологии очистки металлов и др. [7]. Интерес к гибридным системам, состоящим из уравнений различных типов, связан как с их прикладной важностью, так и с неклассическим характером получаемых задач.

Изучаются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от исходных данных. Рассматриваемая задача путем введения новых неизвестных функций [8]–[16] сведена к эквивалентной задаче, содержащей семейство краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и интегральные соотношения. Отдельно исследовано семейство краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Приведены условия однозначной разрешимости указанной задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения полученной эквивалентной задачи. Установлены условия осуществимости и сходимости построенного алгоритма в терминах данных задачи. Получены достаточные условия существования и единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями для гибридной системы (1)–(4).

Задача (1)–(4) при $C_1(t,x)=0$, $a=b=T$, $t_1=t_2=T$ рассмотрена в [17]. Предложены алгоритмы нахождения приближенных решений и получены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах коэффициентов и граничных функций. Результаты настоящей статьи при $C_1(t,x)=0$, $t_1=a$, $t_2=b$ анонсированы в [18].

2. Сведение к эквивалентной задаче

Продифференцируем условие (3) по переменной x с учетом предположений относительно данных.

Введем новые функции $V(t,x)=\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $W(t,x)=\dfrac{\partial v}{\partial t}$. Тогда нелокальную задачу (1)–(4) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=A_1(t,x)u+C_1(t,x)V+D_1(t,x)v+f_1(t,x) \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}=A_2(t,x)V+B(t,x)W+C_2(t,x)u+D_2(t,x)v+f_2(t,x) \end{cases}, \tag{5}$$

$$P_1(x)u(0,x)+S_1(x)u(a,x)+\int_0^{t_1}K_1(\tau,x)u(\tau,x)d\tau=\varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{6}$$

$$P_2(x)V(0,x)+S_2(x)V(b,x)+\int_0^{t_2}K_2(\tau,x)V(\tau,x)d\tau+P_2'(x)v(0,x)+$$

$$+S_2'(x)v(b,x)+\int_0^{t_2}\frac{\partial K_2(\tau,x)}{\partial x}v(\tau,x)d\tau=\varphi_2'(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{7}$$

$$v(t,x)=\psi(t)+\int_0^x V(t,\xi)d\xi, \qquad W(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x\frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}d\xi. \tag{8}$$

Здесь условие (4) относительно значения функции $v(t,x)$ на линии $x=0$ учтено в интегральных соотношениях (8). Задача (5)–(8) состоит из системы дифференциальных уравнений (5), зависящих от параметра x с нелокальными интегральными условиями (6), (7), и интегральных соотношений (8). Задачи (1)–(4) и (5)–(8) эквивалентны.

Решением задачи (5)–(8) является четверка функций $(u(t,x),V(t,x),$ $v(t,x),W(t,x))$, где непрерывные на Ω функции $u(t,x)$, $V(t,x)$, $v(t,x)$, $W(t,x)$ удовлетворяют системе уравнений (5), нелокальным интегральным условиям (6), (7), а функции $V(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ связаны интегральными соотношениями (8) с функциями $v(t,x)$ и $W(t,x)$ соответственно.

Эквивалентность задач (1)–(4) и (5)–(8) понимается в следующем смысле. Если пара функций $(u^*(t,x), v^*(t,x))$ является решением задачи (1)–(4), то четверка функций $(u^*(t,x), V^*(t,x), v^*(t,x), W^*(t,x))$, где $V^*(t,x) = \dfrac{\partial v^*}{\partial x}$, $W^*(t,x) = \dfrac{\partial v^*}{\partial t}$, будет решением задачи (5)–(8). И, наоборот, если четверка функций $(\widetilde{u}(t,x), \widetilde{V}(t,x), \widetilde{v}(t,x), \widetilde{W}(t,x))$, является решением задачи (5)–(8), то пара функций $(\widetilde{u}(t,x), \widetilde{v}(t,x))$ будет решением исходной задачи (1)–(4).

При фиксированных $v(t,x)$, $W(t,x)$ задача (5)–(7) является семейством трехточечных краевых задач с интегральными условиями для системы уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $u(t,x)$, $V(t,x)$, где переменная x играет роль параметра семейства и непрерывно изменяется на отрезке $[0,\omega]$. При $D_1(t,x) = 0$, $B(t,x) = 0$, $D_1(t,x) = 0$, $a = b = T$, $t_1 = t_2 = T$, $P_2'(x) = S_2'(x) = 0$, $\dfrac{\partial K_2(\tau,x)}{\partial x} = 0$ задача (5)–(7) исследовалась в работе [16] методом параметризации [19]. Были построены алгоритмы нахождения решения и установлены условия однозначной корректной разрешимости в терминах исходных данных. Данный класс задач является более общим, чем указанное семейство краевых задач с интегральным условием: рассматривается трехточечная краевая задача с двумя интегральными слагаемыми от искомых функций с различными пределами интегрирования. Семейство трехточечных краевых задач с интегральными условиями для системы уравнений в частных производных первого порядка (5)–(7) при фиксированных $v(t,x)$, $W(t,x)$ требует специального изучения.

3. Семейство трехточечных краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Рассмотрим вспомогательное семейство трехточечных краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A_1(t,x)u + C_1(t,x)V + g_1(t,x) \\ \frac{\partial V}{\partial t} = A_2(t,x)V + C_2(t,x)u + g_2(t,x) \end{cases}, \tag{9}$$

$$P_1(x)u(0,x)+S_1(x)u(a,x)+\int_0^{t_1}K_1(\tau,x)u(\tau,x)d\tau=\vartheta_1(x),\ x\in[0,\omega], \quad (10)$$

$$P_2(x)V(0,x)+S_2(x)V(b,x)+\int_0^{t_2}K_2(\tau,x)V(\tau,x)d\tau=\vartheta_2(x),\ x\in[0,\omega]. \quad (11)$$

Для решения задачи (9)–(11) применим метод параметризации [19]. Обозначим через $\lambda_1(x)$ значение функции $u(t,x)$ на линии $t=0$, через $\lambda_2(x)$ – значение функции $V(t,x)$ на линии $t=0$, т.е. $\lambda_1(x)=u(0,x)$, $\lambda_2(x)=V(0,x)$. В задаче (9)–(11) осуществим замену функций $u(t,x)$, $V(t,x)$: $u(t,x)=\widetilde{u}(t,x)+\lambda_1(x)$, $V(t,x)=\widetilde{V}(t,x)+\lambda_2(x)$ и переходим к эквивалентной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=A_1(t,x)[\widetilde{u}+\lambda_1(x)]+C_1(t,x)[\widetilde{V}+\lambda_2(x)]+g_1(t,x) \\ \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial t}=A_2(t,x)[\widetilde{V}+\lambda_2(x)]+C_2(t,x)[\widetilde{u}+\lambda_1(x)]+g_2(t,x)\end{cases}, \quad (12)$$

$$\widetilde{u}(0,x)=0,\qquad \widetilde{V}(0,x)=0,\qquad x\in[0,\omega], \quad (13)$$

$$\left[P_1(x)+S_1(x)+\int_0^{t_1}K_1(\tau,x)d\tau\right]\lambda_1(x)+$$
$$+S_1(x)\widetilde{u}(a,x)+\int_0^{t_1}K_1(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)d\tau=\vartheta_1(x),\quad x\in[0,\omega], \quad (14)$$

$$\left[P_2(x)+S_2(x)+\int_0^{t_2}K_2(\tau,x)d\tau\right]\lambda_2(x)+$$
$$+S_2(x)\widetilde{V}(b,x)+\int_0^{t_2}K_2(\tau,x)\widetilde{V}(\tau,x)d\tau=\vartheta_2(x),\quad x\in[0,\omega]. \quad (15)$$

Решением задачи (12)–(15) является четверка функций $(\widetilde{u}(t,x),\widetilde{V}(t,x),$ $\lambda_1(x),\lambda_2(x))$, где функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{V}(t,x)$ непрерывны на Ω, имеют непрерывные производные по t на Ω, функции $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, удовлетворяюn семейству дифференциальных уравнений с функциональными параметрами (12), начальным условиям (13), условиям (14), (15).

Задачи (9)–(11) и (12)–(15) эквивалентны. Если пара функций $(u(t,x),V(t,x))$ – решение семейства трехточечных краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (9)–(11), то четверка функций

$(\widetilde{u}(t,x),\widetilde{V}(t,x),\ \lambda_1(x),\lambda_2(x))$, где $\lambda_1(x) = u(0,x)$, $\lambda_2(x) = V(0,x)$, будет решением задачи (12)–(15). И, наоборот, если четверка функций $(\widetilde{u}(t,x),\widetilde{V}(t,x),\ \lambda_1(x),\lambda_2(x))$ – решение задачи (12)–(15), то пара функций $(u(t,x),V(t,x)) = (\widetilde{u}(t,x)+\lambda_1(x),\widetilde{V}(t,x)+\lambda_2(x))$ будет решением исходного семейства трехточечных краевых задач с интегральными условиями (9)–(11).

Задача (12), (13) при фиксированных λ_1, λ_2 является семейством задач Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Решение семейства задач Коши эквивалентно системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\widetilde{u}(t,x) = \int_0^t [A_1(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) + C_1(\tau,x)\widetilde{V}(\tau,x)]d\tau +$$

$$+\int_0^t A_1(\tau,x)d\tau\lambda_1(x) + \int_0^t C_1(\tau,x)d\tau\lambda_2(x) + \int_0^t g_1(\tau,x)d\tau, \tag{16}$$

$$\widetilde{V}(t,x) = \int_0^t [A_2(\tau,x)\widetilde{V}(\tau,x) + C_2(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)]d\tau +$$

$$+\int_0^t A_2(\tau,x)d\tau\lambda_2(x) + \int_0^t C_2(\tau,x)d\tau\lambda_1(x) + \int_0^t g_2(\tau,x)d\tau. \tag{17}$$

Введем обозначения

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} A_1(t,x) & C_1(t,x) \\ C_2(t,x) & A_2(t,x) \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) & 0 \\ 0 & P_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{S}_1(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{S}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K}_1(t,x) = \begin{pmatrix} K_1(t,x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{K}_2(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_2(t,x) \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = P(x) + \widetilde{S}_1(x)\left[I + \int_0^a A(\tau,x)d\tau\right] + \widetilde{S}_2(x)\left[I + \int_0^b A(\tau,x)d\tau\right] +$$

$$+\int_0^{t_1} \widetilde{K}_1(\tau,x)\left[I + \int_0^\tau A(\tau_1,x)d\tau_1\right]d\tau + \int_0^{t_2} \widetilde{K}_2(\tau,x)\left[I + \int_0^\tau A(\tau_1,x)d\tau_1\right]d\tau,$$

$\alpha(x) = \max\limits_{t\in[0,T]} ||A(t,x)||$, $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))'$, I – единичная матрица размерности 2.

Определим из (16) значения функции $\widetilde{u}(t,x)$ при $t = a$, $t = \tau$, а из (17) – значения функции $\widetilde{V}(t,x)$ при $t = b$, $t = \tau$. Подставив найденные выражения в соответствующие части соотношений (14), (15), с учетом обозначений получим

$$Q(x)\lambda(x) = -U(x,\widetilde{u},\widetilde{V}) - \Theta(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{18}$$

где

$$U(x,\widetilde{u},\widetilde{V}) = \Bigg(S_1(x)\int_0^a [A_1(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) + C_1(\tau,x)\widetilde{V}(\tau,x)]d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1} K_1(\tau,x)\int_0^{\tau}[A_1(\tau_1,x)\widetilde{u}(\tau_1,x) + C_1(\tau_1,x)\widetilde{V}(\tau_1,x)]d\tau_1 d\tau,$$

$$S_2(x)\int_0^b [A_2(\tau,x)\widetilde{V}(\tau,x) + C_2(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)]d\tau +$$

$$+\int_0^{t_2} K_2(\tau,x)\int_0^{\tau}[A_2(\tau_1,x)\widetilde{V}(\tau_1,x) + C_2(\tau_1,x)\widetilde{u}(\tau_1,x)]d\tau_1 d\tau\Bigg)',$$

$$\Theta(x) = \Bigg(S_1(x)\int_0^a g_1(\tau,x)d\tau + \int_0^{t_1} K_1(\tau,x)\int_0^{\tau} g_1(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau - \vartheta_1,$$

$$S_2(x)\int_0^b g_2(\tau,x)d\tau + \int_0^{t_2} K_2(\tau,x)\int_0^{\tau} g_2(\tau_1,x)d\tau_1 d\tau - \vartheta_2\Bigg)'.$$

Решая замкнутую систему уравнений (16)–(18), находим четверку функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \widetilde{V}^*(t,x),\ \lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x))$ – решение задачи (12)–(15). Затем, используя эквивалентность задач (9)–(11) и (12)–(15) и определив пару функций $(u^*(t,x), V^*(t,x))$ равенствами

$$u^*(t,x) = (\widetilde{u}^*(t,x) + \lambda_1^*(x), \qquad V^*(t,x) = \widetilde{V}^*(t,x) + \lambda_2^*(x)),$$

находим решение задачи (9)–(11). Следующее утверждение дает достаточные условия существования единственного решения семейства задач (9)–(11)

Теорема 1. *Пусть* (2×2)*-матрица* $Q(x)$ *обратима для всех* $x \in [0, \omega]$ *и выполняются условия:*

1) $||[Q(x)]^{-1}|| \leq \gamma(x)$, *где* $\gamma(x)$ *– положительная, непрерывная на* $[0, \omega]$ *функция;*

2)
$$q(x) = \gamma(x)\Big\{||S_1(x)||\Big(e^{\alpha(x)a} - 1 - \alpha(x)a\Big) + $$
$$+||S_2(x)||\Big(e^{\alpha(x)b} - 1 - \alpha(x)b\Big) + t_1 \max_{t\in[0,t_1]} ||K_1(t,x)||\Big(e^{\alpha(x)t_1} - 1 - \alpha(x)t_1\Big) +$$
$$+t_2 \max_{t\in[0,t_2]} ||K_2(t,x)||\Big(e^{\alpha(x)t_2} - 1 - \alpha(x)t_2\Big)\Big\} \leq \chi < 1,$$
где χ *– const.*

Тогда семейство трехточечных краевых задач с интегральными условиями (9)–(11) имеет единственное решение – пару функций $(u^*(t,x), V^*(t,x))$*, для которой справедлива оценка*

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]} |u^*(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |V^*(t,x)|\Big) \leq$$

$$\leq L_1(x) \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |g_1(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |g_2(t,x)|, |\vartheta_1(x)|, |\vartheta_2(x)|\Big), \qquad (19)$$

где $L_1(x)$ *– положительная, непрерывная на* $[0, \omega]$ *функция, вычисляемая через* $\gamma(x)$, $\alpha(x)$, $q(x)$.

Доказательство Теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [16].

4. Алгоритм нахождения решения задачи (5)–(8) и условия его сходимости. Основной результат

Если известны функции $v(t,x)$, $W(t,x)$, из семейства краевых задач с интегральными условиями (5)–(7) можно определить решение – пару функций $(u(t,x), V(t,x))$. Если известно решение семейства краевых задач с интегральными условиями (5)–(7) – пара функций $(u(t,x),\ V(t,x))$ $\big($а также $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}\big)$, то из интегральных соотношений (8) можно определить функции $v(t,x)$, $W(t,x)$. Так как неизвестными являются и функции $v(t,x)$, $W(t,x)$ и функции $u(t,x)$, $V(t,x)$, применяется итерационный процесс. Для определения последовательных приближений решений задачи (5)–(8) – четверки функций $(u^{(k)}(t,x), V^{(k)}(t,x),\ v^{(k)}(t,x),\ W^{(k)}(t,x))$ предлагается следующий *алгоритм*:

Step-0. 1) Используем условие (4) или интегральные соотношения (8) при $x = 0$. Считая $v(t,x) = \psi(t)$, $W(t,x) = \dot{\psi}(t)$, из семейства краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (5)–(7) находим $u^{(0)}(t,x)$, $V^{(0)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$; 2) Из интегральных соотношений (8) при $V(t,x) = V^{(0)}(t,x)$, $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ находим $v^{(0)}(t,x)$, $W^{(0)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$.

Step-1. 1) Считая $v(t,x) = v^{(0)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(0)}(t,x)$, из семейства краевых задач с интегральными условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных (5)–(7) находим $u^{(1)}(t,x)$, $V^{(1)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$. 2) Из интегральных соотношений (8) при $V(t,x) = V^{(1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(1)}(t,x)}{\partial t}$, находим $v^{(1)}(t,x)$, $W^{(1)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$. И т.д.

Step-k. 1) Считая $v(t,x) = v^{(k-1)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(k-1)}(t,x)$, из семейства краевых задач с интегральным условием для системы дифференциальных уравнений (5)–(7) находим $u^{(k)}(t,x)$, $V^{(k)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$. 2) Из интегральных соотношений (8) при $V(t,x) = V^{(k)}(t,x)$, $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ находим $v^{(k)}(t,x)$, $W^{(k)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь важной проблемой становятся вопросы осуществимости и сходимости построенного алгоритма нахождения приближенного решения задачи (5)–(8).

Пусть

$$\widetilde{D}(t,x) = \begin{pmatrix} D_1(t,x) & 0 \\ D_2(t,x) & B(t,x) \end{pmatrix}, \; F(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix}, \; \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix},$$

$$H(x,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -P_2'(x)v(0,x) - S_2'(x)v(b,x) - \int_0^{t_2} \frac{\partial K_2(\tau,x)}{\partial x} v(\tau,x)d\tau \end{pmatrix}.$$

Следующее утверждение дает условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма в терминах данных задачи (5)–(8).

Теорема 2. *Пусть* (2×2)*-матрица* $Q(x)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются условия 1)-2) Теоремы 1.*

Тогда последовательность четверок $\{u^{(k)}(t,x), V^{(k)}(t,x),\ v^{(k)}(t,x), W^{(k)}(t,x)\}$*, построенная по вышеприведенному алгоритму, сходится к четверке функций* $\{u^*(t,x), V^*(t,x),\ v^*(t,x), W^*(t,x)\}$ *– решению задачи (5)–(8).*

Доказательство. Из нулевого шага алгоритма получим следующую трехточечную краевую задачу с интегральными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A_1(t,x)u + C_1(t,x)V + D_1(t,x)\psi(t) + f_1(t,x), \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = A_2(t,x)V + B(t,x)\dot{\psi}(t) + C_2(t,x)u + D_2(t,x)\psi(t) + f_2(t,x), \end{cases} \tag{20}$$

$$P_1(x)u(0,x)+S_1(x)u(a,x)+\int_0^{t_1} K_1(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi_1(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{21}$$

$$P_2(x)V(0,x) + S_2(x)V(b,x) + \int_0^{t_2} K_2(\tau,x)V(\tau,x)d\tau = \varphi_2'(x)-$$

$$- P_2'(x)\psi(0) - S_2'(x)\psi(b) - \int_0^{t_2} \frac{\partial K_2(\tau,x)}{\partial x}\psi(\tau)d\tau, \quad x\in[0,\omega]. \tag{22}$$

При выполнении условий 1)-2) Теоремы 1 задача (20)–(22) имеет единственное решение – пару функций $(u^{(0)}(t,x), V^{(0)}(t,x))$, для которой справедлива оценка

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|u^{(0)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]}|V^{(0)}(t,x)|\Big) \le$$

$$\le L_1(x)\max\Big(F^{(0)}(x), G^{(0)}(x)\Big), \tag{23}$$

где $F^{(0)}(x) = \max_{t\in[0,T]}||F(t,x)||+\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{D}(t,x)||\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|, \max_{t\in[0,T]}|\dot{\psi}(t)|\Big)$, $G^{(0)}(x) = ||\Phi(x)|| + \Big(|P_2'(x)| + |S_2'(x)| + t_2\max_{t\in[0,t_2]}\big|\frac{\partial K_2(t,x)}{\partial x}\big|\Big)\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$.

Тогда для производных функций $u^{(0)}(t,x), V^{(0)}(t,x)$ имеет место оценка

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial u^{(0)}(t,x)}{\partial t}\Big|, \max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}\Big|\Big) \le$$

$$\leq (\alpha(x)L_1(x)+1)\max\Big(F^{(0)}(x),G^{(0)}(x)\Big). \tag{24}$$

Нулевые приближения функций $v(t,x)$, $W(t,x)$ определяются из интегральных соотношений

$$v^{(0)}(t,x)=\psi(t)+\int_0^x V^{(0)}(t,\xi)d\xi, \quad W^{(0)}(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x \frac{\partial V^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}d\xi$$

и удовлетворяют неравенству

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|v^{(0)}(t,x)|,\max_{t\in[0,T]}|W^{(0)}(t,x)|\Big)\leq \max\Big(\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|,\max_{t\in[0,T]}|\dot{\psi}(t)|\Big)+$$

$$+\int_0^x \max\Big(\max_{t\in[0,T]}|V^{(0)}(t,\xi)|,\max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial V^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}\Big|\Big)d\xi. \tag{25}$$

С учетом оценок (23), (24) из неравенства (25) получим

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|v^{(0)}(t,x)|,\max_{t\in[0,T]}|W^{(0)}(t,x)|\Big)\leq \max\Big(\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|,\max_{t\in[0,T]}|\dot{\psi}(t)|\Big)+$$

$$+\int_0^x \max(L_1(\xi),\alpha(\xi)L_1(\xi)+1)\max\Big(F^{(0)}(\xi),G^{(0)}(\xi)\Big)d\xi. \tag{26}$$

Далее, продолжая по вышеприведенному алгоритму, на k-ом шаге установим следующие оценки:

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|u^{(k)}(t,x)|,\max_{t\in[0,T]}|V^{(k)}(t,x)|\Big)\leq L_1(x)\max\Big(F^{(k)}(x),G^{(k)}(x)\Big), \tag{27}$$

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\Big|,\max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}\Big|\Big)\leq$$

$$\leq (\alpha(x)L_1(x)+1)\max\Big(F^{(k)}(x),G^{(k)}(x)\Big), \tag{28}$$

где

$$F^{(k)}(x)=\max_{t\in[0,T]}||F(t,x)||+\max_{t\in[0,T]}|\widetilde{D}(t,x)||\times$$

$$\times\max\Big(\max_{t\in[0,T]}|v^{(k-1)}(t,x)|,\max_{t\in[0,T]}|W^{(k-1)}(t,x)|\Big),$$

$$G^{(k)}(x) = ||\Phi(x)|| + \Big(|P_2'(x)| + |S_2'(x)| + t_2 \max_{t\in[0,t_2]}\big|\tfrac{\partial K_2(t,x)}{\partial x}\big|\Big) \max_{t\in[0,T]} |v^{(k-1)}(t,x)|.$$

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]} |v^{(k)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |W^{(k)}(t,x)|\Big) \le \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\psi(t)|, \max_{t\in[0,T]} |\dot{\psi}(t)|\Big) +$$

$$+ \int_0^x \max(L_1(\xi), \alpha(\xi)L_1(\xi)+1) \max\Big(F^{(k)}(\xi), G^{(k)}(\xi)\Big) d\xi, \quad k = 1, 2, ... \tag{29}$$

Тогда для разностей последовательных приближений функций

$\Delta u^{(k)}(t,x) = u^{(k+1)}(t,x) - u^{(k)}(t,x)$, $\Delta V^{(k)}(t,x) = V^{(k+1)}(t,x) - V^{(k)}(t,x)$, $\Delta v^{(k)}(t,x) = v^{(k+1)}(t,x) - v^{(k)}(t,x)$, $\Delta W^{(k)}(t,x) = W^{(k+1)}(t,x) - W^{(k)}(t,x)$, $k = 1, 2, ...$, получим

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\Delta u^{(k)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |\Delta V^{(k)}(t,x)|\Big) \le$$

$$\le L_1(x)L_2(x) \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\Delta v^{(k-1)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |\Delta W^{(k-1)}(t,x)|\Big), \tag{30}$$

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]}\Big|\Delta \frac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\Big|, \max_{t\in[0,T]}\Big|\Delta \frac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}\Big|\Big) \le$$

$$\le (\alpha(x)L_1(x) + 1)L_2(x) \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\Delta v^{(k-1)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |\Delta W^{(k-1)}(t,x)\Big), \tag{31}$$

$$\max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\Delta v^{(k)}(t,x)|, \max_{t\in[0,T]} |\Delta W^{(k)}(t,x)|\Big) \le$$

$$\le \int_0^x L_3(\xi) \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\Delta v^{(k-1)}(t,\xi)|, \max_{t\in[0,T]} |\Delta W^{(k-1)}(t,\xi)|\Big) d\xi, \tag{32}$$

где

$$L_2(x) = \max\Big(\max_{t\in[0,T]} |\widetilde{D}(t,x)||, |P_2'(x)| + |S_2'(x)| + t_2 \max_{t\in[0,t_2]}\Big|\frac{\partial K_2(t,x)}{\partial x}\Big|\Big),$$

$$L_3(x) = \max(L_1(x), \alpha(x)L_1(x) + 1)L_2(x), \;\; k = 1, 2, ...$$

Из неравенства (32) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(t,x)\}$, $\{W^{(k)}(t,x)\}$ при $k \to \infty$ соответственно к функциям $v^*(t,x)$, $W^*(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. Отсюда и из неравенств (30), (31) следует равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(t,x)\}$, $\{V^{(k)}(t,x)\}$ и последовательностей их производных $\left\{\dfrac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ при $k \to \infty$ соответственно к функциям $u^*(t,x)$, $V^*(t,x)$ и их производным $\dfrac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V^*(t,x)}{\partial t}$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Таким образом, четверка функций $(u^*(t,x),\ V^*(t,x),\ v^*(t,x),\ W^*(t,x))$ является решением задачи (5)–(8). Единственность решения задачи (5)–(8) доказывается методом от противного. Теорема 2 доказана.

Из эквивалентности задач (1)–(4) и (5)–(8) вытекает, что пара функций $(u^*(t,x)\ v^*(t,x))$ будет решением нелокальной задачи с интегральными условиями для гибридной системы (1)–(4). Справедлива

Теорема 3. *Пусть*

i) функции $A_1(t,x)$, $A_2(t,x)$, $B(t,x)$, $C_1(t,x)$, $C_2(t,x)$, $D_1(t,x)$, $D_2(t,x)$, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны на Ω;

ii) граничные функции $P_1(x)$, $S_1(x)$, $\varphi_1(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, функция $K_1(t,x)$ непрерывна на Ω;

iii) граничные функции $P_2(x)$, $S_2(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, функция $K_2(t,x)$ непрерывно дифференцируема по x на Ω;

iv) функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и выполняется условие согласования данных задачи

$$P_2(0)\psi(0) + S_2(0)\psi(b) + \int\limits_0^{t_2} K_2(\tau,0)\psi(\tau)d\tau = \varphi_2(0);$$

v) (2×2)-матрица $Q(x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются условия 1)-2) Теоремы 1.

Тогда существует пара функций $(u^*(t,x), v^*(t,x))$ – единственное решение нелокальной задачи с интегральными условиями для гибридной системы (1)–(4).

Литература

1 Branicky M.S., Hebbar R. Fast marching for hybrid control // Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control. – 1999. – P. 75-85.

2 Lygeros J., Tomlin C., Sastry S. Controllers for reachability specifications for hybrid systems // Automatic. – 1999. – V. 35. – P. 349-370.

3 Santis E., Benedetto M.D., Pola G. Digital idle speed control of automotive engines: a safety problem for hybrid systems // Nonlinear Analysis. – 2006. – V. 65, No. 9. – P. 1705-1724.

4 Santis E., Benedetto M.D., Gennaro S., Innocenzo A., Pola G. Critical observability of a class of hybrid systems and application to air traffic management // Lecture Notes in Control and Information sciences. – 2006. – No 337. – P. 182-196.

5 Точилин П.А. Анализ гибридной системы второго порядка с линейной структурой // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2008. – №1. – P. 26-33.

6 Evans L. Partial Differential Equations. – American Mathematical Society, providence, RI. – 1998. – 204 p.

7 Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Логос, 2009. – 512 с.

8 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – V. 42, № 11. – P. 1609-1621.

9 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Criteria of well-posed solvability of boundary value problem for system of hyperbolic equations // Izvestia NAN RK. Ser. fiz.-matem. – 2002. – No. 3. – P. 20-26.

10 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. – 2003. – V. 39, No. 10. – P. 1414-1427.

11 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // Doklady Mathematics. – 2003. – V. 68, No. 1. – P. 46-49.

12 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations. – 2005. – V. 41, No. 3. – P. 352-363.

13 Асанова А.Т. О нелокальной задаче с интегральным смещением для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, No. 1. – С. 9-16.

14 Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // Differential equations. – 2009. – V. 45, No. 3. – P. 385-394.

15 Asanova A.T. On a boundary-value problem with data on non-characteristic intersecting lines for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2012. – V. 187, No. 4. – P. 375-386.

16 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – V. 402, No. 1. – P. 167-178.

17 Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Baigulova N.Z. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with integral condition for an one class of a hybrid systems // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Phys.-Math. Ser. – 2016. – No. 1(305). – P. 14-25.

18 Assanova A.T., Sabalakhova A.P. On the nonlocal problem with integral condition for an one class of a hybrid systems // Тез. докл. межд. научн. конф. "Матем. методы и совр. косм. технологии посв. 80-летию акад. У.М. Султангазина. – Алматы, 4-5 октября 2016. – С. 24-27.

19 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. – V. 29, No. 1. – P. 34-46.

Статья поступила в редакцию 29.11.2016

Асанова А.Т., Сабалахова А.П. ГИБРИДТІ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТАРЫ БАР БЕЙЛОКАЛ ЕСЕП ТУРАЛЫ

Гибридті жүйелердің бір класы үшін интегралдық шарттары бар бейлокал есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есеп бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шарттары бар шеттік есептер әулетінен және интегралдық қатынастардан тұратын пара-пар есепке келтірілген. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шарттары бар шеттік есептер әулетінің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары тағайындалған. Пара-пар есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған және оның жинақтылығы дәлелденген. Гибридті жүйе үшін интегралдық шарттары бар бейлокал есептің бірмәнді шешілімділігінің шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Assanova A.T., Sabalakhova A.P. ON NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR ONE CLASS OF HYBRID SYSTEMS

The nonlocal problem with integral conditions for one class of hybrid systems is considered. The problem is reduced to the equivalent one, consisting of a family of boundary value problems with integral conditions for a system of the first order partial differential equations and integral relations. Sufficient conditions for the existence of a unique solution of the family of boundary value problems with integral conditions for the system of the first order partial differential equations are established. The algorithm for finding approximate solutions of the equivalent problem is offered and its convergence is proved. The conditions of a unique solvability of nonlocal problem with integral conditions for the hybrid system are obtained in the terms of the initial data.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 60–68.

УДК 517.95

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ ДОБЕШИ

Ш.А. Балгимбаева[1], Б. Шаймерденов[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: sholpan.balgyn@gmail.com
[2]КазНУ им. аль-Фараби
050040, Алматы, прос. аль-Фараби, 71

Аннотация: В статье получены точные по порядку оценки приближения гиперболическими суммами Фурье по кратной системе всплесков Добеши на классах типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля в пространстве L_2 для ряда значений параметров классов.

Ключевые слова: Поперечники Фурье, пространства типа Никольского-Бесова, пространства типа Лизоркина-Трибеля.

1. Введение

Пусть, как обычно, $L_q = L_q([0,1]^d)$ $(1 \le q \le \infty, 2 \le d \in \mathbb{N})$ — пространство измеримых функций $f : [0,1]^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени q (при $q = \infty$ существенно ограниченных) на $[0,1]^d$, со стандартной нормой

$$\| f \mid L_q \| = \| f \mid L_q([0,1]^d) \| = \left(\int_{[0,1]^d} | f(x) |^q dx \right)^{1/q} (1 \le q < \infty),$$

$$\| f \mid L_\infty \| = \| f \mid L_\infty([0,1]^d) \| = \text{ess sup} \{ | f(x) | : x \in [0,1]^d \}.$$

Пусть $\Phi = \{\phi_\imath \,|\, \imath \in \mathrm{J}\}$ – счетное семейство функций в L_∞, ортонормальное в L_2, и пусть $\{J(u) \subset \mathrm{J} \,|\, u \in \mathbb{N}\}$ такое, что $J(u) \subset J(u+1)$ и $\# J(u) < \infty$ для всех $u \in \mathbb{N}$, $\cup_{u \in \mathbb{N}} J(u) = \mathrm{J}$.

Keywords: *Fourier width, the Nikol'skii-Besov type space, the Lizorkin-Triebel type space.*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10.

Для $f \in L_1$ мы рассмотрим сумму Фурье по системе Φ в виде

$$S_n^{\Phi}(f,x) = \sum_{\imath \in J(n)} \langle f, \phi_\imath \rangle \phi_\imath(x),$$

где $\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]^d} f(x)\overline{g}(x)dx$ ($\overline{z}$ – число, комлексно-сопряженное к $z \in \mathbb{C}$).

Для множества $\mathrm{F} \in L_q$ обозначим

$$E_n(\mathrm{F}, \Phi, L_q) = \sup\{\|f - S_n^{\Phi}(f,x) \,|\, L_q\| \mid f \in \mathrm{F}\}. \tag{1}$$

Основной результат настоящей статьи – (точные по порядку) оценки приближения гиперболическими крестами по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ классов типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, заданных по системе в пространстве $L_q([0,1]^3)$ для различных соотношений между параметрами классов и пространства.

Введем некоторые обозначения. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_d = \{1,\ldots,d\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}\colon\ k \leq d$. Фиксируем мультииндекс $\mathrm{d} = (d_1, ..., d_k) \in \mathbb{N}^k$так, что $d_1 + \cdots + d_k = d$, и представим $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^k)$, где $x^\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$, $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Обозначим

$$\mathrm{E}^d = \mathrm{E}^d(0) = \{\mathit{0}, \mathit{1}\}^d, \quad \mathrm{E}^d(1) = \mathrm{E}^d \setminus \{(\mathit{0}, \ldots, \mathit{0})\};$$

$$\Xi(d,j) = \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^j - 1]^d,\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $\psi^{(0)}$, масштабирующая функция, и соответствующий всплеск-функция $\psi^{(1)}$ имеют компактный носитель:

$$\mathrm{supp}\ \psi^{(0)} \cup \mathrm{supp}\ \psi^{(1)} \subset [0, 2N-1] \ \text{ for some } \ N > 0;$$

$\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)} \in C^r(\mathbb{R})$.

Далее, d-кратная всплеск-система, определяется как

$$\psi^{(\mathrm{d})} = \{\psi^{\iota}_{\alpha\sigma}(x) \ \mid \ \iota \in \mathrm{E}^{\mathrm{d}}(\alpha),\ \sigma \in \Xi(\mathrm{d}, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k\},$$

где

$$\psi^{\iota}_{\alpha\sigma}(x) = \prod_{\kappa=1}^{k} \psi^{\iota^\kappa}_{\alpha_\kappa \sigma^\kappa}(x^\kappa), \quad \psi^{\iota^\kappa}_{j\sigma^\kappa}(x^\kappa) = 2^{\frac{jd_\kappa}{2}} \psi^{\iota^\kappa}(2^j x^\kappa - \sigma^\kappa);$$

$$\psi^{\iota^\kappa}(x^\kappa) = \prod_{\nu\in\mathrm{K}_\kappa} \psi^{(\iota_\nu)}(x_\nu),$$

здесь

$$\mathrm{E}^{\mathrm{d}}(\alpha) = \mathrm{E}^{d_1}(\mathrm{sign}(\alpha_1)) \otimes \cdots \otimes \mathrm{E}^{d_k}(\mathrm{sign}(\alpha_k)),$$

$$\sigma(\mathrm{d},\alpha) = \sigma(d_1,\alpha_1) \times \cdots \times \sigma(d_k,\alpha_k).$$

Известно, что система $\psi^{(\mathrm{d})}$ – ортонормальная в $L_2([0,1]^d)$. Кроме того, система $\psi^{(\mathrm{d})}$ является безусловным базисом $L_q([0,1]^d)$ при $1 < q < \infty$: в случае $k = 1$; этот факт доказан в [4, гл. 8]. Случай $k > 1$ следует отсюда, т.к. система $\psi^{(\mathrm{d})}$ (по переменной x) есть тензорное произведение систем $\psi^{(d_\kappa)}$ (по переменным x^κ), $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Определим оператор Δ_α^ψ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^k$) следующим образом: для $f \in L_1$, пусть

$$\Delta_\alpha^\psi(f,x) = \sum_{\iota\in\mathrm{E}^{\mathrm{d}}(\alpha)} \sum_{\sigma\in\Xi(\mathrm{d},\alpha)} f_{\alpha\sigma}^\iota \psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)$$

– диадическая пачка, где

$$f_{\alpha\sigma}^\iota = \int_{[0,1]^d} f(x)\,\psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)\,dx.$$

Кроме того, для $f \in L_1$ определим ее суммы Фурье по гиперболическим крестам по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ (для фиксированного $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_k) \in \mathbb{R}_+^k$) по формуле

$$S_n^{\psi,\sigma}(f,x) = \sum_{\alpha\sigma\le n} \Delta_\alpha^\psi(f,x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

(здесь $\alpha\sigma := \alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_k\sigma_k$). В дальнейшем будем обозначать величину (1) с $S_n^{\psi,\sigma}$ вместо S_n^Φ, как $E_n^\sigma(\mathrm{F}, L_q)$.

2. Классы функций

Пусть $1 \le p,\ \theta \le \infty$ и пусть $\ell_\theta \equiv \ell_\theta(\mathbb{N}_0^k)$ – пространство последовательностей комплексных чисел $(c_\alpha) = (c_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ с конечной нормой

$$\|(c_\alpha)\,|\,\ell_\theta\| = \Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^k} |\,c_\alpha\,|^\theta\Big)^{1/\theta} \ (1 \le \theta < \infty), \quad \|(c_\alpha)\,|\,\ell_\infty\| = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^k} |\,c_\alpha\,|;$$

пусть $\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p([0,1]^d))$ (соответственно $L_p(\ell_\theta) \equiv L_p([0,1]^d;\ell_\theta)$)— пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x)\,|\,\alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ $(x \in [0,1]^d)$ с конечной нормой

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,\ell_\theta(L_p)\,\| = \|\,(\,\|\,g_\alpha\,|\,L_p\,\|)\,|\,\ell_\theta\,\|$$

(соответственно

$$\|\,(g_\alpha(x))\,|\,L_p(\ell_\theta)\,\| = \|\,\|\,(g_\alpha(\cdot))\,|\,\ell_\theta\,\|\,|\,L_p\,\|\,).$$

Введем функциональные пространства (и классы), которые будем исследовать в работе.

Определение 1. *Пусть $s = (s_1,\ldots,s_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $1 \le p,\theta \le \infty$. Тогда*

i) *пространство типа Никольского–Бесова $\psi B_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}} \equiv \psi B_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}([0,1]^d)$, связанное с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$, состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,\psi B_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}\,\| \;=\; \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^\psi(f,x))\,|\,\ell_\theta(L_p)\|; \tag{2}$$

ii) *пространство типа Лизоркина–Трибеля $\psi L_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}} \equiv \psi L_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}([0,1]^d)$, связанное с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$, состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,\psi L_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}\,\| \;=\; \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^\psi(f,x))\,|\,L_p(\,\ell_\theta)\|. \tag{3}$$

Единичные шары $\psi \mathrm{B}_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}} \equiv \psi \mathrm{B}_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}([0,1]^d)$ и $\psi \mathrm{L}_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}} \equiv \psi \mathrm{L}_{p\,\theta}^{s\,\mathrm{d}}([0,1]^d)$ этих пространств будем называть классами Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, связанными с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$ соответственно.

3. Основной результат

Пусть $d = 3$, $\mathrm{z}_d = \{1,2,3\}$. Пусть $k = 2$. Фиксируем мультииндекс $\mathrm{d} = (d_1,d_2) \in \mathbb{N}^2$ такой, что $d_1 = 1, d_2 = 2$, и представим $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^d$ в виде $x = (x^1,x^2)$

Положим $p_* = \min\{p,2\}$ без потери общности, мы будем считать $t_1 = \dfrac{s_1}{d_1} < t_2 = \dfrac{s_2}{d_2}$. Рассмотрим вектор $t' = (t'_1,t'_2)$ такой, что $t_1 = t'_1 < t'_2 < t_2$ и положим $s' = (s'_1,s'_2)$ с $s'_\kappa = t'_\kappa d_\kappa$ $(\kappa \in \mathrm{z}_2)$ и $\sigma = \frac{1}{t_1}s'$.

Ниже мы будем использовать символы $\ll$ и $\asymp$, чтобы показать отношения между порядками величин: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если существует постоянная $C = C(F,H) > 0$ такая, что неравенство $F(u) \le CH(u)$ имеет место для $u \ge u_0 > 0$, и $F(u) \asymp H(u)$, если $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$ одновременно.

Для числа $a \in \mathbb{R}$ положим $a_+ = \max\{a, 0\}$; ниже, log – логарифм по основанию 2.

Теорема 1. *Пусть* $2 \le p < \infty$ *и* $s \in \mathbb{R}^2_+, r \in \mathbb{N}^2, s < r$. *Тогда*

$$E_n^\sigma(\psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}, L_2) \asymp 2^{-s_1 n};$$

$$E_u^\sigma(\psi \mathrm{L}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}, L_2) \asymp 2^{-s_1 n}.$$

Замечание 1. *Эта теорема – аналог теоремы 4.1 из [1] и аналог теоремы 1 из [3] для классов Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля, связанных с системой* $\psi^{(\mathrm{d})}$.

4. Предварительные сведения

В этом разделе приведем известные факты, важные для дальнейших построений.

Сначала сформулируем теорему типа Литтлвуда-Пэли, связанную с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$, и ее следствие.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда существует постоянная* $C = C(\mathrm{d}, p) > 0$ *такая, что*

$$C^{-1} \| f \,|\, L_p \| \le \| \,(\Delta_\alpha^\psi(f,x))\,|\, L_p([0,1]^d; \ell_2) \| \le C \| f \,|\, L_p \|,$$

$$C^{-1} \| f \,|\, L_p \| \le \ \Big\| \Big(\sum_\alpha \sum_\iota \sum_\sigma |\langle f, \psi^\iota_{\alpha\sigma}\rangle \, \psi^\iota_{\alpha\sigma}|^2 \Big)^{1/2} \,|\, L_p([0,1]^d) \Big\| \le \ C \| f \,|\, L_p \|.$$

для всех функций $f \in L_p$.

Поскольку система $\psi^{(\mathrm{d})}$ – безусловный базис в L_p, Теорему 2 можно легко доказать рассуждениями, в которых используется классическое неравенство Хинчина для функций Радемахера (см., например, [4, гл. 8], где рассмотрен случай $k = 1$).

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p_* = \min(p,2)$. *Тогда для функций* $f \in L_p$

$$\| f \mid L_p \| \le C(v,m,p) \, \| \, (\Delta^{\psi}_{\alpha}(f,x)) \mid \ell_{p_*}(L_p([0,1]^d)) \, \|.$$

Ниже, при доказательстве верхних оценок из Теоремы 1 и оценки размеров соответствующих подпространств, мы будем систематически использовать следующую лемму из [1] (для доказательства см. [2]).

Лемма 1. *Пусть* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^d_+$ *такие, что* $\beta_\nu = \gamma_\nu$ *для* $\nu \in \mathrm{z}_\omega$ *и* $\beta_\nu > \gamma_\nu$ *для* $\nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$, *и пусть* $L > 0$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\mathrm{I}^{\beta,\gamma}_L(u) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d_0 : \alpha\gamma > u} 2^{-L\alpha\beta} \asymp 2^{-Lu} u^{\omega-1} \qquad \textit{при} \quad u \to +\infty; \tag{4}$$

$$\mathrm{J}^{\gamma,\beta}_L(u) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d_0 : \alpha\beta \le u} 2^{L\alpha\gamma} \asymp 2^{Lu} u^{\omega-1} \qquad \textit{при} \quad u \to +\infty. \tag{5}$$

5. Доказательство верхних оценок в теореме 1

B. Начнем с верхних оценок для классов $\psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}$.

a) Пусть $2 \le p < \infty$. По Следствию 1 для $f(x) \in \psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}$ имеем

$$\| f - S^{\psi,\sigma}_n(f) \mid L_2 \| = \| \sum_{\alpha s' > n s_1} \Delta^{\psi}_{\alpha}(f) \mid L_2 \| \le$$

$$\le \| \sum_{\alpha s' > n s_1} \Delta^{\psi}_{\alpha}(f) \mid L_p \| \le \| \, (\Delta^{\psi}_{\alpha}(f))_{\alpha s' > n s_1} \mid \ell_{p_*}(L_p) \, \| \equiv \Im_1(u).$$

Далее (4) и (2) дают

$$\Im_1(u) = \| \, (2^{-\alpha s} 2^{\alpha s} \Delta^{\psi}_{\alpha}(f))_{\alpha s' > n s_1} \mid \ell_{p_*}(L_p) \, \| \le$$

$$\le \left(\sum_{\alpha s' > n s_1} 2^{-\alpha s p_*} \right)^{1/p_*} \times \| \, (2^{\alpha s} \Delta^{\psi}_{\alpha}(f))_{\alpha s' > n s_1} \mid \ell_\infty(L_p) \, \| \ll$$

$$\ll 2^{-n s_1} \, \| \, f \mid \psi B^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty} \, \| \le 2^{-n s_1}.$$

Таким образом, верхняя оценка доказана.

b) Пусть $p=\infty$. В этом случае $p_*=2$. Т.к. $\|\cdot\,|\,L_2\,\|\le\|\cdot\,|\,L_\infty\,\|$, мы имеем элементарное вложение $\psi B^{s\,\mathrm{d}}_{\infty\,\infty}\subset\psi B^{s\,\mathrm{d}}_{2\,\infty}$ и неравенство

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{\infty\,\infty},L_2)\le E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,\infty},L_2).$$

Поэтому из того, что было доказано в a), следует что

$$E^\sigma_n(\psi \mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{\infty\,\infty},L_2)\ll 2^{-ns_1},$$

т.е. требуемые оценки сверху доказаны.

Таким образом, все верхние оценки теоремы для классов $\psi\mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}$ установлены.

L. Перейдем к получению оценок сверху для классов $\psi\mathrm{L}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}$.

Для $f\in\psi\mathrm{L}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}$, по Теореме 2 находим

$$\|\,f-S^{\psi,\,\sigma}_n(f)\,|\,L_2\,\|=\|\sum_{\alpha s'>ns_1}\Delta^\psi_\alpha(f)\,|\,L_2\,\|\asymp$$

$$\asymp\|\,(2^{-\alpha s}2^{\alpha s}\Delta^\psi_\alpha(f))_{\alpha s'>ns_1}\,|\,L_2(\ell_2)\,\|\equiv\Im_2(u).$$

Применяя неравенство Йенсена для рядов и учитывая (3), получим ($\alpha s\ge\alpha s'>ns_1$)

$$\Im_2(u)\le\|\,(2^{-\alpha s}2^{\alpha s}\Delta^\psi_\alpha(f))_{\alpha s'>ns_1}\,|\,L_2(\ell_2)\,\|\le$$

$$\le 2^{-ns_1}\|\,(2^{\alpha s}\Delta^\psi_\alpha(f))_{\alpha s'>ns_1}\,|\,L_2(\ell_2)\,\|\ll 2^{-ns_1}\|\,f\,|\,\psi L^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}\,\|\ \le 2^{-ns_1}.$$

Таким образом, верхние оценки теоремы для классов $\psi\mathrm{L}^{s\,m}_{2\,2}$ также установлены.

6. Доказательство нижних оценок в теореме 1

Для получения нижних оценок в Теореме 1 нам понадобится понятие поперечника Фурье. Напомним, что N- поперечником Фурье (или, что то же самое, ортопоперечником) множества $\mathrm{F}\subset L_q$ называется величина

$$\varphi_N(\mathrm{F},L_q)=\inf_{\{g_j\}_{j=1}^N}\sup_{f\in\mathrm{F}}\|f-\sum_{j=1}^N\langle f,g_j\rangle g_j\ |\ L_q\,\|,$$

где нижняя грань берется по всем ортонормальным (в L_2) системам $\{g_j\}_{j=1}^N\subset L_\infty$.

Поперечник Фурье был введен В.Н. Темляковым [5] в 1982 г. Отметим, что обширная литература была посвящена точным по порядку оценкам поперечников Фурье различных классов гладких функций одной и нескольких переменных; здесь приведем только монографии [6], [7] и статьи [2], [8], где также можно найти подробную историю вопроса и всесторонние ссылки.

На основании (5) (с $L = 1$) размерность $\psi(\gamma, u)$ линейной оболочки множества $\{\psi^{\iota}_{\alpha\sigma} \,|\, \iota \in \mathrm{E}^{\mathrm{d}}(\alpha),\ \sigma \in \Xi(\mathrm{d}, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k : \alpha\sigma \leq n\}$ есть по порядку 2^n. Следовательно, выбирая $N \geq \psi(\sigma, n)$, мы получим неравенство

$$E_n^{\sigma}(\mathrm{F}, L_q) \geq \varphi_N(\mathrm{F}, L_q). \qquad (6)$$

В условиях Теоремы 1 мы имеем

$$\varphi_N(\psi\mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}, L_2) \asymp N^{-s_1},$$

$$\varphi_N(\psi\mathrm{L}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}, L_2) \asymp N^{-s_1}.$$

Эта теорема является полным аналогом теоремы из [3] для классов типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, связанных с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$.

Эти оценки с $N \geq \psi(\gamma, u)$ таким, что $N \asymp \psi(\sigma, n)$ в сочетании с неравенством (6) легко дают нижние оценки для $E_n^{\sigma}(\psi\mathrm{B}^{s\,\mathrm{d}}_{p\,\infty}, L_2)$ и $E_n^{\sigma}(\psi\mathrm{L}^{s\,\mathrm{d}}_{2\,2}, L_2)$ в Теореме 1.

Литература

1 Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. I.// Proc. Steklov Inst. Math. – 2010. – V. 269, No. 1. – P. 2-24.

2 Bazarkhanov D.B. Wavelet approximation and Fourier widths of classes of periodic functions of several variables. II // Analysis mathematica. – 2012. – V. 38, No. 4. – P. 249-289.

3 Bazarkhanov D.B. Hyperbolic cross approximation of some function classes w.r.t. multiple Haar system on the unit cube // Proceedings Series. Springer. – 2017 (to appear).

4 Wojtaszczyk P. A mathematical introduction to wavelets. London Math. Soc. Student Texts. Cambridge: CUP. – 1997. – V. 37.

5 Temlyakov V.N. Widths of some classes of functions of several variables // Soviet Math Dokl. – 1982. – V. 26. – P. 619-622.

6 Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative // Proc. Steklov Inst. Math. – 1989. – V. 178. – P. 1-121.

7 Temlyakov V.N. Approximation of Periodic Functions // Comput. Math. Anal. Ser. – Commack, NY: Nova Science Publ., 1993.

8 Temlyakov V.N. Estimates for the asymptotic characteristics of classes of functions with bounded mixed derivative or difference // Proc. Steklov Inst. Math. – 1990. – V. 189. – P. 161-197.

Статья поступила в редакцию 31.03.2017

Балғынбаева Ш.А., Шаймерденов Б. ФУНКЦИЯЛАРДЫң КЕЙБIР КЛАСТАРЫН ЕСЕЛI ДОБЕШИ ТОЛҚЫНШАЛАРЫ ЖҮЙЕСI БОЙЫНША ФУРЬЕ ГИПЕРБОЛЫҚ ҚОСЫНДЫЛАРЫМЕН ЖУЫҚТАУ

Мақалада L_2 кеңiстiгiндегi Никольский-Бесов және Лизоркин-Трибель тектес кластарда еселi Добеши толқыншалары жүйесi бойынша Фурье гиперболық қосындыларымен жүықтаудың рет бойынша дәл бағалаулары бiрқатар кластар параметрлерiнiң мәндерi үшiн алынған.

Balgimbayeva Sh.A., Shaimerdenov B. HYPERBOLIC CROSS APPROXIMATION OF SOME MULTIVARIATE FUNCTION CLASSES W.R.T. DAUBECHIES WAVELET SYSTEM

In this paper we obtain estimates, sharp in the order of hyperbolic cross approximation w.r.t. multiple Daubechies wavelet system of classes of Nikol'skii-Besov and Lizorkin-Triebel type in the space L_2 for a number of values of parameters of these classes.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 69–76.

УДК 519.6

R-SOFTWARE FOR ADDITIVE PARTITIONING OF POSITIVE INTEGERS

V.G. Voinov[1], N.E. Pya[2]

[1]Institute for Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: voinovv@mail.ru

[2]Umeå University
SE 901 87 Umeå, Sweden, e-mail: natalya.pya@umu.se

Annotation: An algorithm for additive partitioning of natural numbers is considered. The approach is based on a generating function discussed in detail in 1994-1997 by Voinov and Nikulin. The approach is used for the enumeration of nonnegative integer solutions of a corresponding linear Diophantine equation. A new R-algorithm for solving the partitioning problems is presented.

Keywords: Generating functions, partitions, restricted partitions, R.

1. Introduction

Two approaches for additive partitioning of unipartite integers are known. The classical one is based on Hindenburg's method that uses the lexicographical algorithm. This approach was realized in R by Hankin (see [1]). Another approach is based on a generating function discussed in details in papers [2] and [3]. The same idea can also be used for the enumeration of multipartite partitions (see paper [4]).

Additive unipartite partitions of positive integers possess very many applications. Some of them are briefly discussed below. Partitions, e.g., permit to compute probabilities of many discrete distributions. For example distributions introduced in papers [5]–[9]. Based on the algorithm introduced in [2] the authors of paper [10] gave an example of obtaining a closed form expression for a particular discrete probability distribution. A useful

Keywords: *Generating functions, partitions, restricted partitions, R.*

2010 Mathematics Subject Classification: 62H10, 62H15.

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 3361/GF4).

simplification of the algorithm for partitions constructing suggested in [2] was presented in [10].

In Section 2 we provide some formulas that realize ideas of Voinov and Nikulin introduced in [2], [3], [10], [11].

Some R implementations are given in Section 3. The R-script of the software developed is presented in Appendix.

2. Background

The problem of additive partitioning of integers is equivalent to the problem of finding all nonnegative solutions of a linear equation $s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ls_l = n,\ l \le n$. The approach suggested in [2], [3], [10], [11] permits to enumerate all those solutions. For a reader convenience we reproduce some results from those publications. The partitions of n on at most $M \le n$ parts less than or equal l are presented as $\{0^{M-s_1-\cdots-s_l}, 1^{s_1}, 2^{s_2}, \ldots, l^{s_l}\}$, where $s_1 = n - 2s_2 - \cdots - ls_l,\ s_1 + s_2 + \cdots + s_l \le M$, and indices $s_2, s_3, \ldots, s_l$ are defined by the summation procedure

$$\sum_{s_l=0}^{\left[\frac{n}{l}\right]} \sum_{s_{l-1}=0}^{\left[\frac{n-ls_l}{l-1}\right]} \cdots \sum_{s_2=0}^{\left[\frac{n-ls_l-\cdots-3s_3}{2}\right]} . \tag{1}$$

An alternate way of summation procedure is

$$\sum_{l_1=n-M}^{\left[\frac{(l-1)n}{l}\right]} \sum_{l_2=(2l_1-n)_+}^{\left[\frac{(l-2)l_1}{l-1}\right]} \sum_{l_3=(2l_2-l_1)_+}^{\left[\frac{(l-3)l_2}{l-2}\right]} \cdots \sum_{l_{l-1}=(2l_{l-2}-l_{l-3})_+}^{\left[\frac{l_{l-2}}{2}\right]} , \tag{2}$$

where $a_+ = max\{0, a\}$ and partitions being

$$\{0^{M-n+l_1}, 1^{n-2l_1+l_2}, 2^{l_1-2l_2+l_3}, \ldots, (l-1)^{l_{l-2}-2l_{l-1}}, l^{l_{l-1}}\}.$$

The above notation means that in every particular partition there will be $M - n + l_1$ zeros, $n - 2l_1 + l_2$ ones, etc. The second way (2) is faster than the first one because it does not need checking the condition $s_1 + \cdots + s_l \le M$ (see [10]). Evidently that the number of partitions equals to the above multiple sum of ones.

The number of partitions of n on exactly M parts equals to [3]

$$\sum_{l_1=(n-2M)_+}^{n-M-1} \sum_{l_2=(2l_1-n+M)_+}^{(l_1-1)_+} \sum_{l_3=(2l_2-l_1)_+}^{(l_2-1)_+} \cdots \sum_{l_{n-M-1}=(2l_{n-M-2}-l_{n-M-3})_+}^{(l_{n-M-2}-1)_+} 1. \qquad (3)$$

The corresponding partitions are defined as

$$\{1^{2M-n+l_1}, 2^{n-M-2l_1+l_2}, 3^{l_1-2l_2+l_3}, \ldots, (n-M)^{l_{n-M-2}-2l_{n-M-1}}, (n-M+1)^{l_{n-M-1}}\}.$$

3. Examples in R

1) All 22 partitions of $n = 8$ can be get using our R-script as follows:

```
> get.partitions(8,8,at.most=TRUE)
p.1 p.2 p.3 p.4 p.5 p.6 p.7 p.8 p.9 p.10 p.11 p.12 p.13 p.14
a1   8   7   6   5   4   6   5   4   4    3    5    4    3    3
a2   0   1   2   3   4   1   2   3   2    3    1    2    3    2
a3   0   0   0   0   0   1   1   1   2    2    1    1    1    2
a4   0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    1    1    1    1
a5   0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
a6   0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
a7   0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
a8   0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
p.15 p.16 p.17 p.18 p.19 p.20 p.21 p.22
a1    2    4    3    2    3    2    2    1
a2    2    1    2    2    1    2    1    1
a3    2    1    1    2    1    1    1    1
a4    2    1    1    1    1    1    1    1
a5    0    1    1    1    1    1    1    1
a6    0    0    0    0    1    1    1    1
a7    0    0    0    0    0    0    1    1
a8    0    0    0    0    0    0    0    1
```

Each output column comprises a partition of $n = 8$. The twenty first column, e.g., gives $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$, which is in accordance with formula (1), $2 \cdot s_2 + 1 \cdot s_1 = 8$, where $s_2 = 1$, $s_1 = 6$ and the rest of s_j are zeros.

2) All partitions of $n = 8$ on at most 6 parts can be obtained as follows:

```
> get.partitions(8,6,at.most=TRUE)
p.1 p.2 p.3 p.4 p.5 p.6 p.7 p.8 p.9 p.10 p.11 p.12 p.13 p.14
a1    8   7   6   5   4   6   5   4   4    3    5    4    3    3
a2    0   1   2   3   4   1   2   3   2    3    1    2    3    2
a3    0   0   0   0   0   1   1   1   2    2    1    1    1    2
a4    0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    1    1    1    1
a5    0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
a6    0   0   0   0   0   0   0   0   0    0    0    0    0    0
p.15 p.16 p.17 p.18 p.19 p.20
a1     2    4    3    2    3    2
a2     2    1    2    2    1    2
a3     2    1    1    2    1    1
a4     2    1    1    1    1    1
a5     0    1    1    1    1    1
a6     0    0    0    0    1    1
```

3) All partitions of $n = 8$ on exactly 6 parts are obtained as follows:

```
> get.partitions(8,6,at.most=FALSE)
p.1 p.2
a1    3   2
a2    1   2
a3    1   1
a4    1   1
a5    1   1
a6    1   1
```

4. Appendix

Below is the R-script of our software.

```
######################################## ## partitioning...
########################################

get.partitions <- function(n, M, at.most=TRUE){ ## function to
enumerate additive partitions of integer 'n' on at most or exactly
'M' parts, M <= n ## 'n' is a positive integer ## 'M' is a
positive integer, M <= n ## 'at.most' is logical with TRUE
```

```
standing for partitioning of
 n into at most M parts and FALSE for exactly M parts
if (length(n) >1 || length(M) >1) {stop("'n' and 'M' have to be
 positive integers")}
if (!isTRUE(n == floor(n)) || !isTRUE(n > 0)) {stop("'n' has to be
a positive integer")} if (!isTRUE(M == floor(M)) || !isTRUE(M >
0)) {stop("'M' has
 to be a positive integer")}
if (M > n) {stop("'M' has
 to be less or equal to 'n'")}
if (!is.logical(at.most)) {stop("'at.most' must be TRUE
 or FALSE")}

fn1 <- function(l,n,M){ ## getting partitions for 'at most'
 case...
## 'l' is a (n-1)-vector res <- numeric(0) s <- rep(NA,n+1) ##
initialize repetitions ('powers' of
 the partition)
s[1] <- M-n+l[1] s[2] <- n-2*l[1] +l[2] ind <- c(3:(n-1)) s[ind]
<- l[ind-2]-2*l[ind-1]+l[ind] s[n] <- l[n-2]-2*l[n-1] s[n+1] <-
l[n-1] for (i in 1:(n+1)) if (s[i]!=0)  res <- c(res,
rep(i-1,s[i])) res }

## function to work through the loops (for 'at most' case)...
recursive.fn1 <- function(w,ll,lu,n,M){ S <- rep(0,0)
if(length(lu)) { for( i in seq(ll[1],lu[1]) ) { if (length(lu)
==(n-1)){ ll[2] <- max(0,2*i-n) lu[2] <- floor((n-2)*i/(n-1)) }
else if (length(lu) >2) { nw <- length(w) ll[2] <-
max(0,2*i-w[nw]) lu[2] <- floor((n-nw-2)*i/(n-nw-1)) } else if
(length(lu) == 2) { nw <- length(w) ll[2] <- max(0,2*i-w[nw])
lu[2] <- floor(i/2) } S <- c(S, Recall(c(w,i), ll[-1],lu[-1],n,M))
} } else return(fn1(w,n,M)) S }

##------------ fn2 <- function(l,n,M){ ## getting partitions for
'exactly'
```

```
 case...
## 'l' is a (n-M-1)-vector res <- numeric(0) s <- rep(NA,n-M+1) ##
initialize repetitions ('powers' of the
 partition)
s[1] <- 2*M-n+l[1] s[2] <- n-M-2*l[1] +l[2] ind <- c(3:(n-M-1))
s[ind] <- l[ind-2]-2*l[ind-1]+l[ind] s[n-M] <- l[n-M-2]-2*l[n-M-1]
s[n-M+1] <- l[n-M-1] for (i in 1:(n-M+1)) if (s[i]!=0)  res <-
c(res, rep(i,s[i])) res }

## function to work through the loops (for 'exactly' case)...
recursive.fn2 <- function(w,ll,lu,n,M){ S <- rep(0,0)
if(length(lu)) { for( i in seq(ll[1],lu[1]) ) { if (length(lu)
==(n-M-1)){ ll[2] <- max(0,2*i-n+M) lu[2] <- max(0,i-1) } else if
(length(lu) >1) { ll[2] <- max(0,2*i-w[length(w)]) lu[2] <-
max(0,i-1) } S <- c(S, Recall(c(w,i), ll[-1],lu[-1],n,M)) } } else
return(fn2(w,n,M)) S }

out <-numeric(0) if (at.most){ ## getting partitions of n into AT
MOST M parts... L <- n lu <- c(floor((L-1)*n/L),rep(NA,L-2)) ll <-
c(n-M,rep(NA,L-2)) out <- recursive.fn1(numeric(0), ll,lu,n,M) }
else { ## getting partitions of n into EXACTLY M parts... ll <-
c(max(0,n-2*M),rep(NA,n-M-2)) lu <- c(n-M-1,rep(NA,n-M-2)) if
(length(ll)==1){ l1 <- c(ll:lu) out <- numeric(0) for (i in l1)
out <- c(out, c(rep(1,2*M-n+i),rep(2,n-M-2*i),rep(3,i))) } else
out <- recursive.fn2(numeric(0), ll,lu,n,M) } if (length(out)==0)
{print("no solutions")} else { dim(out) <- c(M,length(out)/M)
rownames(out) <- paste("a", c(1:M), sep="") colnames(out) <-
paste(c("p."), seq(1:dim(out)[2]), sep="")
out[c(nrow(out):1),c(ncol(out):1)] } } ## end get.partitions
```

References

1 Hankin R.K.S. Additive integer partitions in R // Journal of Statistical Software, Code Snippets. – 2006. – V. 16. – P. 1-3.

2 Voinov V., Nikulin M. On power series, Bell polynomials, Hardy-Ramanujan-Rademacher problem and its statistical applications // Kybernetika. – 1994. – V. 30. – P. 343-358.

3 Voinov V., Nikulin M. Generating functions, problems of additive number theory, and some statistical applications // Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1995. – V. 40. – P. 107-148.

4 Voinov V., Kikkarin S. On an enumeration of multipartite partitions // Doklady AN of the Kazakhstan. – 1994. – No. 6. – P 40-46.

5 Antzoulakos D.L., Philippou A.L. A note on the multivariate negative binomial distributions of order k // Commun. Statist. Theory and Methods. – 1991. – V. 20. – P. 1389-1399.

6 Philippou A., Antzoulakos D. Generalized multivariate Fibonacci polynomials of order k and the multivariate negative binomial distributions of the same order // Fibonacci Quarterly. – 1991. – V. 29. – P. 322-328.

7 Tripsiannis G., Philippou A. Circular Polya distributions of order k // Int. J. of Math. and Math. Sciences. – 2003. – V. 25. – P. 1563-1575.

8 Makri F., Philippou A. On binomial and circular binomial distributions of order k for l-overlapping success runs of length k // Statistical Papers. – 2005. – V. 46. – P. 411-432.

9 Philippou A. A note on the models of the Poisson distribution of order k // Fibonacci Quarterly. – 2014. – V. 52. – P. 203-205.

10 Voinov V., Nikulin M. On a subset sum algorithm and its probabilistic and other applications // In: Advances in combinatorial methods and applications to probability and statistics. Ed. N. Balakrishnan, Springer, 1997. – P. 153-163.

11 Voinov V., Nikulin M. On some statistical and probability problems related to unipartite and multipartite partitions // Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1995. – V. 42. – P. 163-180.

Received 13.01.2017

Воинов В.Г., Пя Н.Е. R-ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ РАЗБИЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Рассматривается алгоритм для аддитивных разбиений натуральных чисел. Подход основан на производящей функции, который подробно обсуждался Воиновым и Никулиным в 1994-1997 г.г. Этот подход используется для перечисления неотрицательных целочисленных решений соответствующего Диофантового уравнения. Для решения проблем разбиений представлен новый R-алгоритм.

Воинов В.Г., Пя Н.Е. ОҢ БҮТІН САНДАРДЫ АДДИТИВТІ БӨЛІКТЕУЛЕРГЕ АРНАЛҒАН R-ПРОГРАММАЛЫҚ ҚАМСЫЗДАНДЫРУ

Натурал сандарды аддитивті бөліктеулерге арналған алгоритм қарастырылады. Тәсіл Воинов пен Никулин 1994-1997 ж.ж. егжей-тегжейлі талқылаған туындатушы функцияға негізделген. Бұл тәсіл сәйкес Диофант теңдеуінің теріс емес бүтінсанды шешімдерін санамалау үшін пайдаланылады. Бөліктеулер мәселесін шешу үшін жаңа R-алгоритм ұсынылған.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 77–90.

УДК 517.956.6

SPECTRAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

G. Dildabek[1,2], A.A. Tengaeva[1,3]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, Pushkin str., 125

[2]al-Farabi Kazakh National University
050040, Almaty, al-Farabi ave. 71, e-mail: dildabek@math.kz

[3]Kazakh National Agrarian University
050010 Almaty, Abay ave. 8, e-mail: tengaeva@math.kz

Annotation: We study a spectral problem for an operator of parabolic-hyperbolic type of the first kind with non-classical boundary conditions. The problem is considered in a standard domain. The parabolic part of the space is a rectangle. And the hyperbolic part of the space coincides with a characteristic triangle. We consider the problem with the local boundary condition in the domain of parabolicity and with the boundary condition with displacement in the domain of hyperbolicity. We prove the strong solvability of the considered problem. The main aim of the paper is to research spectral properties of the problem. The existence of eigenvalues of the problem is proved.

Keywords: Spectral problem, equation of parabolic-hyperbolic type, boundary condition with shift.

1. Introduction

The theory of equations of the mixed type is one of the central sections of the modern theory of partial differential equations. This fact is connected with appearance of many applied problems such that their mathematical modeling leads to studying various types of equations in the considered domain of changing of independent variables. Researching equations of a parabolic-hyperbolic type has gained a rapid development quite recently. These problems

Keywords: *Spectral problem, equation of parabolic-hyperbolic type, boundary condition with shift.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35P.

Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0825/GF4).

are of particular interest due to their application to various problems of mechanics and physics.

Numerous papers of the authors from near and far abroad are devoted to issues of the theory of boundary value problems for equations of the mixed type. Sufficiently full review of obtained results is contained in books of A.V. Bitsadze, L. Bers, M.M. Smirnov, M.S. Salakhitdinov, T.D. Dzhuraev, T.Sh. Kal'menov. Essential contribution to the development of the theory of boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations has been done by M.S. Salakhitdinov, T.D. Dzhuraev, A.M. Nakhushev, A.S. Berdyshev, M.A. Sadybekov. Issues of generalized solvability in the class L_2 on the basis of solution representation in the form of bilinear series are considered in papers of N.Yu. Kapustin [1], [2].

In [3], [4] by V.A. Il'yin's anti-a priori estimates it is shown that anti-a priori estimates without a positive exponent in the right-hand side of the inequality are necessary and sufficient conditions for the unconditional basis property in L_2 under an arbitrary choice of associated functions. And it is used in the proof of the well-posedness of boundary value problems [5]. In [6] the class of the well-posedness of the Dirichlet problem was constructed for one-dimensional wave equation.

In [7], [8], [9] a three-dimensional boundary value problem for equations of Keldysh type involving lower order terms was studied. In [10], [11], [12] some three-dimensional boundary value problems for mixed type equations of the first and second kind were studied.

Unlike the theory of solvability, spectral issues of problems for equations of the mixed type are less studied. The papers of T.Sh. Kal'menov [13], [14], E.I. Moiseev [15], S.M. Ponomarev [16] have made a significant contribution to this direction. The main bibliography on these issues is given in the monograph of E.I. Moiseev [17]. The existence and location of eigenvalues of problems for equations of the mixed elliptic-hyperbolic type, the construction and completeness of eigenfunctions of the problem are researched in these papers.

Spectral issues for equations of the parabolic-hyperbolic type are comparatively less researched. The basic bibliography on these issues is given in recently published monograph of A.S. Berdyshev [18].

2. Formulation of the problem

Let $\Omega \in R^2$ be a finite domain bounded for $y > 0$ by the segments AA_0, A_0B_0, B_0B, $A = (0,0)$, $A_0 = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$, and for $y < 0$ by the characteristics $AC: \ x + y = 0$ and $BC: \ x - y = 1$ of an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type

$$Lu = \left\{ \begin{array}{c} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y). \qquad (1)$$

By $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ we denote the Sobolev space with the scalar product $(\cdot, \ \cdot)_l$ and the norm $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \bigcap \{y < 0\}$.

In Ω we consider the following non-local boundary value problem being the generalization of an analogue of the Tricomi problem for the parabolic-hyperbolic equation (1).

Problem S. *Find a solution to Eq. (1) satisfying boundary conditions*

$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \qquad (2)$$

$$\alpha u\left(\theta_0\left(t\right)\right) = \beta u\left(\theta_1\left(t\right)\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \qquad (3)$$

where $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$.

Note that for $\beta = 0$ the problem S coincides with the Tricomi problem, and for $\alpha = 0$ coincides with the Tricomi problem with data on opposite characteristics.

The strong solvability of particular cases of the problem for $\alpha = 0$ and for $\beta = 0$ has been researched in paper of M.A. Sadybekov, G.D. Toizhanova [19]. It is shown that for $\beta = 0$ the problem is Volterra, and for $\alpha = 0$ the problem has an eigenvalue. But the case of arbitrary α and β has remained unstudied until now. The present paper is devoted to studying the problem namely in this case.

3. On strong solvability of the problem

Studying the problem in the operatorial form is closely related to the usage of generalized solutions of the problem. Let us give the definition.

Definition 1. *The function $u \in L_2(\Omega)$ we will call a strong solution of the problem if there exists a sequence of the functions $\{u_n\}$, $u_n \in W = C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{1,2}_{x,y}\left(\overline{\Omega}_1\right) \cap C^2\left(\overline{\Omega}_2\right)$ satisfying the boundary conditions such that the sequences u_n and Lu_n reduce in $L_2(\Omega)$ to the functions u and f, respectively.*

Theorem 1. *The solution of the problem S is unique if and only if $\alpha + \beta \neq 0$. Under this condition, for any function $f \in L_2(\Omega)$ there exists a unique strong solution $u(x,y)$ of the problem S. This solution belongs to the class $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfies the inequality*

$$\|u\|_1 \leq c\,\|f\|_0, \tag{4}$$

is represented in the form

$$u(x,y) = \iint_{\Omega} K(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1, \tag{5}$$

where $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Proof. By virtue of the unique solvability of the first boundary value problem for a heat equation and of the Cauchy problem for a wave equation, any solution of Eq. (1) is represented in the form

$$u(x,y) = \begin{cases} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x-x_1,y,y_1) f(x_1,y_1)\,dy_1 + \\ + \int_0^x G_{y_1}(x-x_1,y,0)\,\tau(x_1)\,dx_1, \quad y > 0, \\ \\ -\int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 + \\ + \frac{1}{2}\left[\tau(\xi) + \tau(\eta)\right] - \frac{1}{2}\int_\xi^\eta \nu(s)\,ds, \ \ y < 0, \end{cases} \tag{6}$$

where $\tau(x) = u(x,0)$, $\tau(0) = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\nu(x) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)$, $f_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right)$, and $G(x-x_1,y,y_1)$ is Green's function of the first initial-boundary value problem for a heat equation in a square AA_0B_0B that can be represented in the form [20]:

$$G(x,y,y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}} - e^{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}} \right]. \tag{7}$$

By calculating $\dfrac{\partial}{\partial y}u$ in (6) and by converging y to zero, inside Ω_1 we have relations between $\tau(x)$ and $\nu(x)$, obtained from the parabolic part:

$$\nu(x) = \int_0^x k(x-t)\,\tau'(t)\,dt + \Phi_0(x), \tag{8}$$

where

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{x}\right\},$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x-x_1, y_1)\, f(x_1, y_1)\, dy_1,$$

$$G_0(x, y_1) \equiv G_y(x, y_1, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y_1 + 2n)\, e^{-\frac{(y_1+2n)^2}{4x}}.$$

Analogously we find an integral-differential relation between $\tau(x)$ and $\nu(x)$ carried from the hyperbolic part Ω_2 onto the segment AB. This relation has the form:

$$\nu(x) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tau'\ (x) - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^x f_1(\xi, x)\, d\xi - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_x^1 f_1(x, \eta)\, d\eta, \tag{9}$$

where $0 < x < 1$.

Note that if $\alpha + \beta = 0$, then in derivation of relation (9) we immediately get non-uniqueness of the problem solution. This procedure is standard and we will not stop on it. Further everywhere we consider that $\alpha + \beta \neq 0$.

The case $\alpha - \beta = 0$ is the most simple. In this case from (9) the value $\nu(x)$ for all $0 < x < 1$ is found at once. Then the solution of the problem S is constructed in the explicit form and in the parabolic and hyperbolic parts of the domain. That is also a standard procedure and we will not stop on it in details.

Let $\alpha - \beta \neq 0$. Then by eliminating the function $\nu(x)$ from relations (8) and (9), for $\tau'(x)$ we get an integral Volterra equation of the second kind:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tau(x) - \int_0^x k(x-t)\,\tau'(t)\,dt = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{10}$$

where

$$\varphi(x) = 2\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^x f_1(\xi_1, x)\,d\xi_1 + 2\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_x^1 f_1(x, \eta_1)\,d\eta_1 -$$

$$-\int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x - x_1, y_1)\, f(x_1, y_1)\,dy_1.$$

Dividing Eq. (10) on $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, we have

$$\tau'(x) - \int_0^x K(x-t)\,\tau'(t)\,dt = \Phi(x)\,, \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

where $K(x-t) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right) k(x-t)$, $\Phi(x) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\varphi(x)$.

Thus, the problem S is equivalently reduced to the integral Volterra equation of the second kind (11). Since $\alpha - \beta \neq 0$, and the kernel $k(x)$ can be represented in the form

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \tilde{k}(x)\,,$$

where $\tilde{k}(x) \in C^\infty[0,1]$, then $k(x-t)$ is a kernel with weak peculiarity. Therefore there exists the unique strong solution to Eq. (11) and has the form

$$\tau'(x) = \Phi(x) + \int_0^x \Gamma(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{12}$$

where $\Gamma(x)$ is a resolvent of Eq. (11):

$$\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(x),\;\; K_1(x) = k(x)\,,$$

$$K_{j+1}(x) = \int_0^x K_1(x-t)\,K_j(t)\,dt,\;\; j \in N.$$

From (12), taking into account $\tau(0) = 0$, after simple transformations, we get

$$\tau(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{13}$$

where

$$\Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t)\, dt.$$

Substituting the value $\Phi(t)$ into (13), after evident transformations, we come to the form

$$\tau(x) = -\frac{2(\beta)}{(\alpha-\beta)} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \Gamma_1(x-\xi_1) f_1(\xi_1,\eta_1)\, d\eta_1 +$$

$$+\frac{2\alpha}{(\alpha-\beta)} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x \Gamma_1(x-\eta_1) f_1(\xi_1,\eta_1)\, d\eta_1 -$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)} \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_1(x-x_1,y_1) f(x_1,y_1)\, dy_1, \tag{14}$$

where

$$G_1(x,y) = \int_0^x G_0(t,y)\, \Gamma_1(x-t)\, dt.$$

Substituting (3) into (8) and into (6), we obtain formula (5), where the detailed form of the kernel $K(x,y;x_1,y_1)$ can be written in the explicit form. We will not show this form here due to its bulkiness.

We show only that $K(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega)$. From the analysis of the kernel representation it is easy to see that all the summands of the formula are limited except the first summand: $G_2(x-x_1,y,y_1)$, in which the summand $G(x-x_1,y,y_1)$ is not limited. Therefore it is enough to show that

$$\theta(y)\,\theta(y_1)\,\theta(x-x_1)\,G(x-x_1,y,y_1) \in L_2(\Omega\times\Omega).$$

From the representation (7) of the Green's function $G(x-x_1,y,y_1)$ it follows that it is enough to estimate the summand for $n=0$:

$$B(x-x_1,y,y_1) = \frac{\theta(y)\,\theta(y_1)\,\theta(x-x_1)}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}} \left[e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}} - e^{-\frac{(y+y_1)^2}{4(x-x_1)}} \right].$$

Note that $0 \le B(x-x_1,y,y_1) \le \frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}} \exp\left\{-\frac{(y-y_1)^2}{4(x-x_1)}\right\}$. Using this fact, we calculate

$$\|\mathrm{B}\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^x dx_1 \int_0^1 |B(x-x_1,y,y_1)|^2 dy_1 =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dx \int_0^x |B(x_1, y, y_1)|^2 dx_1 \leq$$

$$\leq \int_0^1 dy \int_0^1 dy_1 \int_0^1 |B(x, y, y_1)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 dy_1 \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}} dx =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^1 e^{-\frac{(y-y_1)^2}{4x}} dy_1.$$

Substituting $\frac{y - y_1}{2\sqrt{x}} = y_2$, further we have

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{\frac{y-1}{2\sqrt{x}}}^{\frac{y}{2\sqrt{x}}} e^{-y_2^2} 2\sqrt{x} dy_2 =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_2^2} dy_2 < \infty.$$

Consequently, $K(x, y; x_1, y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.
By direct calculation it is easy to check the validity of the estimate:

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c \|f\|_0.$$

Therefore from (12) we have

$$\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)} \leq c \left\|\Phi(x)\right\|_{L_2(0,1)} \leq c \|f\|_0.$$

Hence and from the solution properties of the first initial-boundary value problem for the heat equation it follows that the solution of the problem S belongs to the class $W = H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ and satisfies inequality (4).

Show that the obtained solution will be strong. Since $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ is dense in $L_2(\Omega)$, then for any function $f \in L_2(\Omega)$ there exists a sequence of the functions $f_n \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ such that $\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty$. We denote $u_n = L^{-1} f_n$.

For $f_n \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ it is easy to see that $\Phi_n(x) \in C^1[0, 1]$. Therefore Eq. (11) can be considered as an integral Volterra equation of the second kind in the space $C^1[0,1]$. Consequently, $\tau_n'(x) = u_x(x,0) \in C^1[0,1]$. From the solution properties of the first initial-boundary value problem for the heat equation and for the Darboux problem for the wave equation, taking into account the representation (6), we obtain that $u_n \in W$ for all $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

By virtue of inequality (4), we have $\|u_n - u\|_1 \leq c\|f_n - f\|_0 \to 0$. Consequently, $\{u_n\}$ is the sequence corresponding to the definition of the strong solution, the problem S is strongly solvable for any right-hand part f, and the strong solution belongs to the class $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$. The theorem is proved.

4. On spectrum of the problem

From Theorem 1 it follows that the operator L of the problem S is invertible, and the inverse operator L^{-1} is a Gilbert-Schmidt operator. Then a spectrum of the problem can consist of only eigenvalues of the operator L^{-1}. Naturally there arises a question on existence of the eigenvalues of the operator L^{-1}, consequently, and of the problem S.

Theorem 2. *Let L be an operator of the problem S and $(\alpha-\beta)\beta \neq 0$. Then there exists an eigenvalue of the problem S, that is, there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that the equation $Lu = \lambda u$ has a nontrivial solution.*

Proof. We present here only a brief scheme of the proof. By L we denote a closure of the differential operator in $L_2(\Omega)$ given on W by Eq.(1). From Theorem 2 it follows that the operator L is invertible and L^{-1} is the Gilbert-Schmidt operator defined by formula (5). Then the operator $L^{-2} \equiv \left(L^{-1}\right)^2$ is a nuclear (kernel) operator in $L_2(\Omega)$. Therefore we can use the result of V.B. Lidskii [21] on coincidences of matrix and spectral traces for the operator L^{-2}.

Lemma 1. *If an operator T is nuclear in the Gilbert space H, then, whatever the orthonormal basis $\varphi_i\,(i = 1, 2, \dots)$ in H, the equality holds*

$$Sp\ T \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi_k, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T), \tag{15}$$

where λ_k are eigenvalues of the operator T.

It is also well-known that if T is nuclear operator in the space $L_2(\Omega)$

represented as a product $T = KR$ of two Gilbert-Schmidt operators:

$$(Kf)(z) = \int_\Omega K(z, z_1) f(z_1)\, dz_1, \quad (Rf)(z) = \int_\Omega R(z, z_1) f(z_1)\, dz_1,$$

then the Gaal's formula of calculations of traces [22]

$$Sp\ T = \int_\Omega \left[\int_\Omega K(z, z_1)\, R(z_1, z) dz_1 \right] dz \tag{16}$$

holds.

From (15) and (16) we obtain that

$$Sp\ L^{-2} = \iint_\Omega dxdy \int_\Omega K(x, y; x_1, y_1)\, K(x_1, y_1; x, y)\, dx_1 dy_1.$$

Therefore, using the explicit form of the kernel $K(x, y; x_1, y_1)$, we can show that $Sp\ L^{-2} \neq 0$. Not stopping on detailed calculations, we indicate only that the proof of difference of the integral $\int_0^\xi G_0(t, y)\, dt$ from zero is more significant. We have

$$\int_0^\xi G_0(t, y)\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\xi \frac{y + 2n}{t^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(y + 2n)^2}{4t} \right\} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=\mp\infty}^{\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\pm\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{y+2n}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2n-y+2}{2\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2n+y}{2\sqrt{\pi}}}^{\frac{2n+2-y}{2\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt.$$

Hence we get that $\int_0^\xi G_0\,(t,y)\,dt \geq 0$. And besides, the equality is achieved only on $y = 1$, that is, $\int_0^\xi G_0\,(t,y)\,dt \not\equiv 0$.

The difference of the other summands from zero can be simpler shown and we do not stop on it. Thus, we have $Sp\ L^{-2} \neq 0$. Then, by virtue of (15), we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(L^{-2}\right) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} {\lambda_k}^2 \left(L^{-1}\right) \neq 0,$$

where $\lambda_k \left(L^{-2}\right)$ are eigenvalues of the operator L^{-2}.

It means that $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{\lambda_k}^2} \neq 0$, where λ_k are eigenvalues of problem (1)–(3). This implies the existence of the eigenvalues of the considered non-local boundary value problem. The theorem is proved.

Corollary 1. *Let $(\alpha - \beta)\beta \neq 0$. Then there exists an infinite number of eigenvalues of the problem S.*

Proof follows from Theorem 3 and from the result of T.Sh. Kalmenov [23]. In that paper he has proved that there is no differential operators with a finite number (except zero) of eigenvalues.

5. Acknowledgements

The authors express their gratitude to T.Sh. Kalmenov, B.E. Kanguzhin and M.A. Sadybekov, this paper has been prepared under their guidance.

References

1 Kapustin N.Yu. A generalized solvability of Tricomi problem for parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1984. – V. 274, No. 6. – P. 1294-1298.

2 Kapustin N.Yu. The existence and uniqueness of L_2-solutions of Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1986. – V. 291, No. 2. – P. 288-292.

3 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. The use of anti-A priori estimates in the theory of bases in the space L(2) // Differential Equations. – 2008. – V. 44, No. 5. – P. 685-691.

4 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. On the theory of antiprior estimates in the sense of VA Il'in // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 77, No. 3. – P. 398-400.

5 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Mixed Problem for a Differential Equation with Involution Under Boundary Conditions of General Form // AIP Conference Proceedings. – 2012. – V. 1470. – P. 225-227.

6 Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A. Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for the wave equation // Differential Equations. – 1990. – V. 26, No. 1. – P. 55-59.

7 Hristov T., Popivanov N., Schneider M. Protter problem for 3-D Keldysh type equations involving lower order terms // AIP Conference Proceedings. – 2015. – V. 1690. – P. 040020.

8 Hristov T., Popivanov N., Schneider M. Generalized solutions to Protter problems for 3-D Keldysh type equations // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1637. – P. 422-430.

9 Hristov T. Singular solutions to Protter problem for Keldysh type equations // AIP Conference Proceedings. – 2014. – V. 1631. – P. 255-262.

10 Hristov T., Popivanov N., Schneider M. On uniqueness of quasi-regular solutions to Protter problem for Keldish type equations // AIP Conference Proceedings. – 2013. – V. 1570. – P. 321-326.

11 Hristov T., Popivanov N., Schneider M. On Uniqueness of Generalized and Quasi-regular Solutions to Equations of Mixed Type in R^3 // Sib. Adv. Math. – 2011. – V. 21, No. 4. – P. 262-273.

12 Hristov T., Popivanov N., Schneider M. Quasi-regular Solutions for 3D Equations of Tricomi and Keldish Types // Proc. of the 41 Spring Conf. of the Union of Bulgarian Mathematicians. – Math. and Education in Math. – 2012. – V. 41. – P. 173-179.

13 Kal'menov T.Sh. The spectrum of Tricomi's problem for a Lavrent'ev-Bitsadze problem // Differential equations. – 1977. – V. 13, No. 8. – P. 984-989.

14 Kal'menov T.Sh. The spectrum of Tricom's problem for a mixed fourth - order equation // Differential equations. – 1979. – V. 15, No. 2. – P. 248-250.

15 Moiseev E.I. Properties of Solution of Lavrentev-Bitsadze Equation // Mathematical Notes. – 1979. – V. 26, No. 3-4. – P. 757-762.

16 Ponomarev S.M. Eigenvalue Problem for Lavrentiev-Bitsadze Equation // Doklady Akademii nauk SSSR. – 1977. – V. 233, No. 1. – P. 39-40.

17 Moiseev E.I. Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter. – M.: Moscow Univ., 1988 (in Russian).

18 Berdyshev A.S. Kraevye zadachi i ih spektral'nye svoistva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov. – Almaty, 2015 (in Russian).

19 Sadybekov M.A., Toizhanova G.D. Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation // Differential Equations. – 1992. – V. 28, No. 1. – P. 176-179.

20 Samarskii A.A., Tikhonov A.N. Equations of Mathematical Physics. – M.: Moscow Univ., 1999.

21 Lidskii V.B. Nonselfadjoint operators possessing a trace // Doklady Akademii nauk SSSR. – 1959. – V. 125, No. 3. – P. 485-488.

22 Brislawn C. Kernels of trace class operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 104, No. 4. – P. 1181-1190.

23 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Determination of the structure of the spectrum of regular boundary value problems for differential equations by VA Il'in's method of anti-a priori estimates // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 78, No. 3. – P. 913-915.

Received 31.03.2017

Дилдабек Г., Тенгаева А.А. ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТИПТІ ТЕҢДЕУІ ҮШІН СПЕКТРАЛДЫ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Бұл жұмыста классикалық емес шеттік шарттары бар I текті парабола-гиперболалық типті оператор үшін спектралды есеп қарастырылды. Есеп стандартты облыста берілген. Облыстың параболалық бөлігі – төртбұрыш, ал гиперболалық облыстың бөлігі сипаттаушы үшбұрышпен сәйкес келеді. Гиперболалану облысында ауыспалы шеттік шарттары бар және параболалану облысында локалды шеттік шарттары бар есепке зерттеу жүргізілген. Аталған есептің шешімділігі және меншікті мәндерінің бар болуы дәлелденген. Жұмыстың негізгі мақсаты спектралды есептің қасиеттерін зерттеу болып табылады.

Дилдабек Г., Тенгаева А.А. СПЕКТРАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В этой работе мы рассматриваем спектральную задачу для оператора параболо-гиперболического типа I рода с неклассическими краевыми условиями. Задача представлена в стандартной области. Параболическая часть области является прямоугольником, а гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Проведено исследование задачи с локальным краевым условием в области параболичности и с краевым условием со смещением в области гиперболичности. Доказана сильная разрешимость указанной задачи. Основной целью работы является исследование спектральных свойств задачи. Доказано существование собственных значений задачи.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 91–97.

УДК 517.925:62.50

ON INSTABILITY OF INDIRECT CONTROL SYSTEMS IN THE NEIGHBORHOOD OF PROGRAM MANIFOLD

S.S. Zhumatov

Institute of mathematics and mathematical modelling
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: sailau.math@mail.ru

Annotation: The conditions of instability of indirect control systems are investigated in the neighborhood of a program manifold. The sufficient conditions of instability of the program manifold are obtained in relation to given vector-function by means of construction of Lyapunov function.

Keywords: Instability, program manifold, indirect control systems.

We consider the problem of construction of stable automatic control systems by a given $(n-s)$-dimensional program manifold

$$\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0, \tag{1}$$

of the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi\,(\sigma)\,,\ \sigma = P^T\omega - \overline{R}\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{2}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of the existence and uniqueness of the solution $x(t) = 0$, $B \in R^{n\times r},\ P \in R^{s\times r},\ (\overline{R} > 0) \in R^{r\times r}$ are constant matrices, $\omega \in R^s (s \le n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function of control on deviation from the given program manifold, satisfying the conditions of local quadratic connection in the angle $[0,\ K]$

$$\varphi(0) = 0\ \wedge\ 0 < \sigma^T\varphi(\sigma) \le \sigma^T K\sigma\,;$$

Keywords: *Instability, program manifold, indirect control systems.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29.
Funding: This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant № 3357/GF4).

$$K = diag \, \| k_1, \ldots, k_r \| \ , \ K = K^T > 0, \tag{3}$$

Taking into account that $\Omega(t)$ is an integral manifold of the system (2), and assuming that Erugin function $F(t, x, \omega) = -A\omega, -A \in R^{s \times s}$ is Hurwitz matrix we have

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \ \xi = \dot{\varphi}(\sigma), \ \sigma = P^T\omega - \overline{R}\xi, \ H = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge \ 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) \leq \sigma^T K \sigma;$$

$$K = diag \, \| k_1, \ldots, k_r \| \ , \quad K = K^T > 0, \tag{5}$$

The program $\Omega(t)$ is exactly realized only if the initial values of the state vector satisfy the condition $\omega(t, x) = 0$. However, this condition cannot always be exactly satisfied.Therefore, in the construction of systems of program motion the requirement of the stability of the program manifold $\Omega(t)$ with respect to the vector function ω should also be taken into account.

1. Statement of the problem

To get the condition of instability of the program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control systems with respect to the given vector-function ω.

To the construction of the systems of equations on the given program manifold, possessing properties of stability and optimality and to the obtaining estimations of indexes' quality of transient in the neighborhood of a program manifold and to the solving of various inverse problems of the dynamics, a great number of works are devoted, for example [1]–[12]. The detailed reviews of these works are shown in [5], [6], [10], [11].

The system (4) has only a position of equilibrium if and only if

$$\det \begin{Vmatrix} A & HB \\ -P^T & \overline{R} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Definition 1. *A program manifold $\Omega(t)$ is called instable on the whole in relation to vector-function ω, if in phase space there is an unlimited open domain Ξ , including a neighborhood of the given program manifold and possessing that property, that all solutions in relation to a vector-function ω beginning in this domain, unlimited at $t \to \infty$.*

Definition 2. *A program manifold $\Omega(t)$ is called absolutely instable in relation to a vector-function ω, if it is instable on the whole at all functions $\varphi(\sigma)$ satisfying to the conditions (5).*

The frequency conditions of instability are received in [12], [13] for nonlinear control systems with respect to zero position of equilibrium. In this work the conditions of instability of the indirect control systems are investigated in the neighborhood of a program manifold.

The following theorem is valid.

Theorem 1 [12]. *If for the system (3) a positive function $V(t,\omega)$ admitting a positive upper limit in the domain Ξ derivative which is*

$$\dot{V}(t,\omega) \geq \gamma > 0 \quad \forall\, \omega \in \Xi \wedge t \in I,$$

is found then the program manifold $\Omega(t)$ is instable as a whole in relation to the vector-function ω.

Theorem 2. *Suppose that there exist matrices*

$$L = L^T > 0,\ \beta = diag\,(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$$

and non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (5).

Then, for the absolute instability of the program manifold $\Omega\,(t)$ in relation to the vector function ω it is sufficient performing of the following conditions

$$\lambda_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq V \leq \lambda_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \tag{6}$$

$$g_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \leq \dot{V} \leq g_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \tag{7}$$

where $\lambda_1, \lambda_2, g_1, g_2$ are positive constants.

Proof. We construct a Lyapunov function for the system (4):

$$V(\omega,\ \xi) = \omega^T L_0 \omega + 2\varpi^T L_1 \xi + \xi^T L_2 \xi + \int\limits_0^{\sigma} \varphi^T \beta d\sigma > 0, \tag{8}$$

where

$$L = \left\| \begin{array}{cc} L_0 & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{array} \right\| > 0, \quad \beta = diag\|\beta_1, \ldots, \beta_r\| > 0.$$

Derivative on time t of this function in view of the system (4) has the following form

$$\dot{V} = \omega^T G_0 \omega + 2\omega^T G_1 \xi + \xi^T g \xi +$$
$$+ 2\omega^T G_2 \varphi(\sigma) + 2\xi^T G_2 \varphi(\sigma) + \varphi^T \rho \varphi > 0. \quad (9)$$

Here

$$G_0 = -A^T L_0 - L_0 A; \quad G_1 = -L_0 B - A^T L_1; \quad g = -BL_1 - L_0 B^T;$$

$$G_2 = L_1 - \frac{1}{2} A^T P \beta; \quad G_3 = L_2 - B^T P \beta; \quad \rho = -\beta \overline{R};$$

$$G = \begin{Vmatrix} G_0 & G_1 & G_2 \\ G_1^T & g & G_3 \\ G_2^T & G_3^T & \rho \end{Vmatrix} > 0.$$

Based on the properties (5) and a structure of feedback σ, the following estimates are valid:

$$0 < \int\limits_0^\sigma \omega^T \beta d\sigma < \frac{\beta_1 k_1}{2} \|\sigma\|^2; \quad 0 < \|\varphi\|^2 < k_1 \|\sigma\|^2;$$

$$\rho_1 \|\omega\|^2 + \nu_1 \|\xi\|^2 \le \|\sigma\|^2 \le \rho_2 \|\omega\|^2 + \nu_2 \|\xi\|^2, \quad (10)$$

where $k_1 = \min\{k_i\}$, $\beta_1 = \{\beta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$; k_i are eigenvalues of matrix K, ρ_1, ρ_2 and ν_1, ν_2 are determined as following:

$$\rho_1 = \min_{\omega \neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega}; \quad \rho_2 = \max_{\omega \neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega};$$

$$\nu_1 = \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T R R^T \xi}{\xi^T \xi}; \quad \nu_2 = \max_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T R R^T \xi}{\xi^T \xi}.$$

Due to the positive definiteness of the V (7), $\dot{V}$ (8), taking into account estimates (7), we have the relations

$$\lambda_1 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \le V \le \lambda_2 (\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2), \quad (11)$$

$$g_1(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \le \dot{V} \le g_2(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2). \tag{12}$$

Here

$$\lambda_1 = \min\big\{l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_1; \quad l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_1\big\},$$

$$\lambda_2 = \max\big\{l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_2; \quad l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_2\big\},$$

$$g_1 = ming_0\{1 + k - 1\rho_1; \quad 1 + k_1\nu_1\},$$

$$g_2 = maxg_s\{1 + k - 1\rho_2; \quad 1 + k_1\nu_2\},$$

where l_1, l_2, g_0, g_s are the lowest and the highest values of eigenvalues of matrices L and G respectively.

Let $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$. Then, taking into account the relations (11) and (12), we receive the following estimates

$$V_0 \exp \alpha_1(t - t_0) \le V \le V_0 \exp \alpha_2(t - t_0), \tag{13}$$

$$\lambda_2^{-1} V_0 \exp \alpha_1(t - t_0) \le \|z\|^2 \le \lambda_1^{-1} V_0 \exp \alpha_2(t - t_0), \tag{14}$$

where

$$V_0 = z_0^T L z_0 + \int\limits_0^{\sigma_0} \varphi^T \beta d\sigma; \;\; z_0 = z(t_0); \;\; \sigma_0 = \sigma(t_0);$$

$$\alpha_1 = \frac{g_2}{\lambda_1}; \;\; \alpha_2 = \frac{g_1}{\lambda_2}.$$

According (11) we have

$$\|z(t)\|^2 \ge \lambda_1 \lambda_2^{-1} \|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t - t_0)$$

or

$$\|z(t)\| \ge N \|z(t_0)\| \exp \alpha(t - t_0) \quad t \ge t_0, \tag{15}$$

where $N = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^{-1}} \quad \alpha = \alpha_2/2$.

Therefore, from estimates (11) and (12) it follows that conditions of Theorem 1 are hold, then the program manifold $\Omega(t)$ is instable as a whole in relation to the vector function ω. Thus, when the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (5) and in view of the inequality (15) the program manifold $\Omega(t)$ is absolutely instable in relation to the vector functions ω and ξ.

References

1 Maygarin B.G. Stability and quality of process of nonlinear automatic control system. – Alma-Ata, 1981. – 316 p.

2 Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve // Prikl. Mat., Mech. – 1952. – V. 10, issue 6. – P. 659-670.

3 Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. and other. Conztruction program motion's system. – M., 1971. – 352 p.

4 Galiullin A.S. Methods of solving of dynamics inverse problems. – M.: Nauka, 1986. – 224 p.

5 Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions // Vestnik RUDN. – 1994. – No. 1. – P. 5-21.

6 Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion. – Almaty, 1999. – 228 p.

7 Mukharlyamov R. G. On the construction of systems of differential equations of motion of mechanics systems // Differ. uravneniya. – 2003. – V. 39, No. 3. – P. 343-353.

8 Mukharlyamov R.G. Differential-Algebraic Equations of Programmed Motions of Lagrangian Dynamical Systems // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 4. – P. 534-543.

9 Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints // J. of Comp. and Syst. Sci. Int. – 2015. – V. 54, No.1. – P. 13-26.

10 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. – Springer Int. Publ., Switzerland, 2016. – 266 p.

11 Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // Nelineinye kolebania. – Kiev, 2016. – V. 28, No. 3. – P. 367-375.

12 Yakubovich V.A. Absolute instability of nonlinear control systems. I. General frequency criteria // Avtomatika and Telemekh. – 1970. – No. 12. – P. 5-12.

13 Gelig A.Kh., Leonov G.A.,Yakubovich V.A. Stability of Nonlinear systems with nonunique equilibrium state. – M.: Nauka, 1981. – 400 p.

Received 30.11.2016

Жұматов С.С. ТУРА ЕМЕС БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ КӨПБЕЙНЕ МАҢАЙЫНДАҒЫ ОРНЫҚСЫЗДЫҒЫ ЖАЙЫНДА

Тура емес басқару жүйелерінің орнықсыздығы жағдайы бағдарламалық көпбейне маңайында зерттелді. Берілген вектор-функцияға қатысты бағдарламалық көпбейненің орнықсыздығының жеткілікті шарттары Ляпунов функциясын тұрғызу көмегімен алынды.

Жуматов С.С. О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Исследованы условия неустойчивости систем непрямого управления в окрестности программного многообразия. Достаточные условия неустойчивости программного многообразия относительно заданной вектор-функции получены с помощью построения функции Ляпунова.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2017. — Том 17, № 1. — С. 98–107.

УДК 531.31:519.21

ОБ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

М.И. Тлеубергенов[1], Г.Т. Ибраева[2]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]marat207@mail.ru

[2]Военный институт сил воздушной обороны им. Т. Бегельдинова
463000, Актобе, пр. А. Молдагуловой, 16, e-mail: gulmira_ibraeva@mail.ru

Аннотация: Методом квазиобращения получены необходимые и достаточные условия разрешимости основной обратной задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями, с вырождающейся относительно части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных.

Ключевые слова: Обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие.

1. Введение

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем достаточно полно разработаны в [1]–[4] и продолжают разрабатываться (см. [5]–[7]) для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ)). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2]–[7] изложены постановка и классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ – метод квазиобращения, предложенный в работе [3], позволяет получить необходимые и

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equations, integral manyfold.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3357/ГФ4.

достаточные условия разрешимости.

В работах [8]–[10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены 1) *основная обратная задача динамики*: построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) *задача восстановления уравнений движения*: построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) *задача замыкания уравнений движения*: построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

В работах [11], [12] рассматривается одна из обратных задач – задача построения множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка по заданному интегральному многообразию в предположении, что 1) строящееся уравнение является уравнением с вырождающейся диффузией, 2) заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных. В предположении, что случайные возмущения принадлежат классу независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями), в [11] поставленная задача решается методом квазиобращения [3, с. 12-13], а в [12] – методом разделения [3, с. 21].

В настоящей работе в отличие от [11], [12] предполагается, что, во-первых, заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных и, во-вторых, случайные возмущения предполагаются из более общего класса, а именно: из класса процессов с независимыми приращениями.

2. Постановка общей задачи построения стохастических дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных, и ее решение

Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(y,t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(y,z,t) \in C^{121}_{yzt}. \tag{1}$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y,z,t), \\ \dot{z} = f_2(y,z,t) + \sigma(y,z,t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{2}$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2).

Здесь $y \in R^l$, $z \in R^p$, $l+p=n$; $\xi \in R^k$, $\sigma(x,\dot{x},t)$ – матрица размерности $(p \times k)$; $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [13], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(x)P^0(t,dx)$, ξ_0 – винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t,dx)$ – число скачков процесса P^0 в интервале [0, t], попадающих на множество dx; $c(x)$ – векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t.

Будем говорить, что некоторая функция $g(y,z,t)$ из класса K, $g \in K$, если g непрерывна по t и липшицева по y и z во всем пространстве $R^n \ni x$, где $x = (y^T, z^T)^T$.

Предполагается, что вектор-функции f_1, f_2 и $(p \times k)$-матрица σ из класса K, что обеспечивает в R^n существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $\big(y(t)^T, z(t)^T\big)^T$ уравнения (2) с начальным условием $\big(y(t_0)^T, z(t_0)^T\big)^T = (y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [13].

Поставленная задача

1) в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2]–[7];

2) обобщает рассмотренную в [8] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{2'}$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t): \ \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \ \text{где } \lambda \in R^m, \ \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C^{121}_{x\dot{x}t}, \qquad (1')$$

так, чтобы множество $(1')$ было интегральным многообразием уравнения $(2')$ со случайными возмущениями из класса винеровских процессов;
3) со случайными возмущениями из класса винеровских процессов исследована методом квазиобращения в [11] и методом разделения – в [12]. При этом заданное интегральное многообразие в [11], [12] зависит от всех переменных.

В данной работе стохастическая основная обратная задача – задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения решается методом квазиобращения. В терминах коэффициентов получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия у построенного множества стохастических дифференциальных уравнений.

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1 [3, С. 12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g, \ H = (h_{\mu k}), \ v = (v_k), \ g = (g_\mu) \ \mu = \overline{1, m}; \ k = \overline{1, n}, \ m \le n, \qquad (3)$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu, \qquad (4)$$

здесь s – произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ *и произвольных векторов* $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = = \overline{m+1, n-1}$; e_k – *единичные орты пространства* R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$, *где*

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \ v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T – *матрица, транспонированная к* H.

Для решения поставленной задачи построения множества систем уравнений вида (2) по заданному интегральному многообразию (1) продифференцируем вектор-функцию $\lambda = \lambda(y,t)$ по правилу Ито дифференцирования сложной функции в случае процесса с независимыми приращениями [13, с. 201]:

$$\ddot{\lambda} = M_1 + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y \partial t} f_1 + f_1^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial y \partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma\dot{\xi}, \quad (5)$$

где $M_1 = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial t} + S_1 + S_2 + S_3$; $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : \sigma\sigma^T$,

$S_2 = \displaystyle\int \{\frac{\partial\lambda}{\partial y}[f_1(y, z+\sigma c(x), t) - f_1(y,z,t) + \frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma c(x)]\}dx$,

$S_3 = \displaystyle\int \frac{\partial\lambda}{\partial y}[f_1(y, z+\sigma c(x), t) - f_1(y,z,t)]P^0(t, dx)$,

а под $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : D$, следуя [13], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $f_{1\mu}(y,z,t)$ вектора $f_1(y,z,t)$ по компонентам z на матрицу D:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial z} : D = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2 f_{11}}{\partial z \partial z} D\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2 f_{1m}}{\partial z \partial z} D\big) \end{bmatrix}.$$

Далее вводятся произвольные типа Н.П. Еругина [1] m-мерная вектор-функция $A(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$ и $(m\times k)$ – матрица $B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$, обладающие свойством: $A(0,0,y,z,t)\equiv 0$, $B(0,0,y,z,t)\equiv 0$,

$$\ddot{\lambda}=A(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)+B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)\dot{\xi}. \tag{6}$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), приходим к соотношениям

$$\left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t}+f_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}f_2=$$

$$=A-\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t}+S_1+S_2+S_3\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma=B. \tag{8}$$

Перепишем выражения (7) и (8) в виде

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}f_2=A-M_1-\left(2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t}+f_1^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1,\\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\sigma=B.\end{cases} \tag{9}$$

Из соотношений (9) по формуле (4) Леммы 1 определим вектор-функцию f_2 и столбцы σ_i матрицы σ в виде

$$f_2=s_1\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\widetilde{C}\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^+A_1, \tag{10}$$

$$\sigma_i=s_2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\widetilde{\widetilde{C}}\right]+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^+B_i, \tag{11}$$

где $A_1=A-M_1-\left(2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t}+f_1^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1$,$\sigma_i=(\sigma_{1i},\sigma_{2i},...,\sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma=(\sigma_{\nu j})$ $(\nu=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,k})$; $B_i=$

$(B_{1i}, B_{2i}, ..., B_{mi})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k})$, а матрицы $\widetilde{C}$ и $\widetilde{\widetilde{C}}$ имеют соответственно вид

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{c}_{m+1,1} & \dots & \widetilde{c}_{m+1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{c}_{p-1,1} & \dots & \widetilde{c}_{p-1,p} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\widetilde{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\widetilde{c}}_{m+1,1} & \dots & \widetilde{\widetilde{c}}_{m+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{\widetilde{c}}_{k-1,1} & \dots & \widetilde{\widetilde{c}}_{k-1,k} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение типа Ито (2) имело заданное интегральное многообразие (1), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f_2 и столбцы σ_i матрицы σ уравнения (2) имели соответственно вид (10) и (11).*

3. Скалярный нелинейный случай общей задачи(*стохастическая задача Еругина на плоскости с вырождающейся диффузией)*

Пусть интегральная кривая задана в виде

$$\Lambda(t) : \eta(y,t) = 0, \text{где} \quad \eta \in R^1, \eta \in C^{22}_{yt}, \tag{12}$$

по которой требуется построить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y,z,t), \\ \dot{z} = g_2(y,z,t) + \gamma(y,z,t)\dot{\zeta}, \end{cases} \tag{13}$$

где $\zeta = \zeta(t,\omega)$ – скалярный процесс с независимыми приращениями [13].

Задача заключается в определении на плоскости (y,z) скалярных функций $g_1(y,z,t)$, $g_2(y,z,t)$ и $\gamma(y,z,t)$ по заданной скалярной функции $\eta = \eta(y,t)$ так, чтобы множество (12) было интегральным многообразием уравнения (13).

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(y,t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [13, с. 201], в случае процесса с независимыми приращениями имеем

$$\ddot{\eta} = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g_1 + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g_1^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}g_1 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}g_2+$$

$$+\widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma\dot{\zeta}, \tag{14}$$

где $\widetilde{S}_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\gamma^2$, $\widetilde{S}_2 = \displaystyle\int\{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}[g_1(y,z+\gamma c(x),t) - g_1(y,z,t) + \dfrac{\partial g_1}{\partial z}\gamma c(x)]\}dx$,
$\widetilde{S}_3 = \displaystyle\int \dfrac{\partial\eta}{\partial y}[g_1(y,z+\gamma c(x),t) - g_1(y,z,t)]P^0(t,dx)$.

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a = a(\eta,\dot\eta,y,z,t)$ и $b = b(\eta,\dot\eta,y,z,t)$ такие, что $a(0,0,y,z,t) \equiv b(0,0,y,z,t) \equiv 0$, и имеет место равенство

$$\ddot\eta = a + b\dot\zeta. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следуют соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}g_2 = a - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g_1 + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g_1^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}g_1 + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3\right), \\ \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma = b. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть $g_1 = g(y,z,t) \in C^{111}_{yzt}$, тогда (16) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}g_2 = a - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}g + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3\right), \\ \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\gamma = b. \end{cases} \tag{17}$$

Введем следующее обозначение:

$$\widetilde{a} = a - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}g + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3\right)$$

и предположим, что $\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} \neq 0$, тогда из (17) следует решение стохастической задачи Еругина с вырождающейся диффузией на плоскости в виде следующих соотношений:

$$\begin{cases} g_2 = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\widetilde{a}, \\ \gamma = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} b. \end{cases}$$

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в общем нелинейном, а также скалярном нелинейном случаях построены множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией и обладающих заданным интегральным многообразием, зависящим лишь от части переменных.

Литература

1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 10, вып. 6. – С. 659-670.

2 Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

3 Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 3. – С. 343-353.

4 Mukharlyamov R.G. Differential-Algebraic Equations of Programmed Motions of Lagrangian Dynamical Systems // Mechanics of Solids.– 2011. – Vol. 46, No 4. – P. 534-543.

5 Абрамов Н.В., Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К. Управление динамикой систем с программными связями. – Нижневартовск: Нижневарт. гос. ун-т, 2013. – 202 с.

6 Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints // Int. J. of Computer and Systems Sciences. – 2015. – V. 54, No 1. – P. 13-26.

7 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. – Springer International Publishing, Switzerland. – 2016. – 266 p.

8 Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Сер. физ.-матем. – Алматы, 1998. – № 3. – С. 55-61.

9 Tleubergenov M.I. An inverse problem for stochastic differential systems // Differential Equations. – 2001. – V. 37, No 5. – P. 751-753.

10 Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. – Алматы, 1999. – № 1. – С. 53-60.

11 Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией // Математический журнал. – Алматы, 2004. – Т. 4, № 4(14). – С. 86-92.

12 Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. Main inverse problem for differential systems with degenerate diffusion // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – V. 65, No 5. – P. 787-792.

13 Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

Статья поступила в редакцию 14.11.2016

Тілеубергенов М.Ы., Ыбраева Г.Т. КЕЗДЕЙСОҚ ТҮРТКІЛЕР БОЛҒАНДАҒЫ НЕГІЗГІ КЕРІ ЕСЕП ТУРАЛЫ

Тәуелсіз өсімшелі үрдістер класында, айнымалылардың бір бөлігіне қатысты азынған диффузиясы және айнымалылардың бір бөлігіне тәуелді берілген қасиеттері бар, кездейсоқ түрткілі бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық теңдеулері класындағы негізгі кері есептің шешімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары квазиайналым әдісі арқылы алынған.

Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. ON THE MAIN INVERSE PROBLEM IN THE PRESENCE OF RANDOM PERTURBATIONS

By quasi-inversion method we obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the main (according to A.S. Galiullin's classification) inverse problem in the class of first-order Ito stochastic differential systems with random perturbations from the class of processes with independent increments, with degenerate in the part of variables diffusion and with given properties, depending on the part of variables.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www. math. kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК. На следующих

строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов; место работы; почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 17, №1 (63), 2017

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
31.03.2017 г.

Тираж 300 экз. Объем 110 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz