ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

Том 14 № 4 (54) 2014

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, № 4 (54), 2014

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 14 **№ 4 (54)** **2014**

CONTENTS

Volume 14 **No. 4 (54)** **2014**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №4 (54). С.5–17*

УДК 517.51

А.М. Абылаева, А.О. Байарыстанов

Евразийский Национальный университет им Л.Н.Гумилева
010008, Астана, ул. Мирзояна 2, e-mail: abylayeva_b@mail.ru, oskar_62@mail.ru

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ, СОДЕРЖАЩИЕ СУПРЕМУМ

Найдено необходимое и достаточное условие выполнения трехвесового неравенства типа Харди, содержащего супремум.
Ключевые слова: *неравенства типа Харди, весовые функции.*

Введение

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 \le p, q \le \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, w — неотрицательная, непрерывная на I функция, а функции u^q, v^p — неотрицательные локально суммируемые на I, причем функция $v^{-p'}$ тоже локально суммируемая на I.

Пусть $L_{p,v} \equiv L_p(v, I)$ — пространство измеримых на I функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,v} \equiv \|vf\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |v(t)f(t)|^p dt\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty \ , \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{a<t<b} |v(t)f(t)| \, , & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Keywords: *Hardy type inequality, weighted functions*
2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47G10

Введем операторы

$$P_z^+ f(t) = \chi_{(a,z)}(t) \int\limits_t^z f(s)ds, \quad P_z^- f(t) = \chi_{(z,b)}(t) \int\limits_z^t f(s)ds, \ \ t \in I,$$

где $\chi_{(c,d)}(t)$ — характеристическая функция интервала $(c,d) \subset I$,

$$R_\infty^+ f(x) = \sup_{a<t<x} w(t)|P_x^+ f(t)|, \quad R_\infty^- f(x) = \sup_{x<t<b} w(t)|P_x^- f(t)|.$$

Рассмотрим неравенство

$$\left\| R_\infty^\pm f \right\|_{q,u} \leq C^\pm \left\| f \right\|_{p,v}. \tag{1}$$

Неравенства типа (1) исследованы в работах [1–4], где вместо операторов P_z^+, P_z^- рассмотрены операторы P_b^+, P_a^- соответственно. В работе [4] изучен более общий случай, когда вместо операторов P_b^+, P_a^- соответственно рассмотрены интегральные операторы вида

$$K^+ f(s) = \int\limits_s^b K(t,s) f(t)dt, \quad K^- f(s) = \int\limits_a^t K(t,s) f(s)ds \tag{2}$$

с ядром $K(t,s) \geq 0$, удовлетворяющим "условию Ойнарова", т.е. существует постоянная $D \geq 1$, такая, что

$$1/D\left(K(t,x) + K(x,s)\right) \leq K(t,s) \leq D\left(K(t,x) + K(x,s)\right) \tag{3}$$

при $b > t \geq x \geq s > a$.

Действие операторов P_z^+, P_z^- можно выразить в виде интегральных операторов (2), однако их ядра не удовлетворяют условию (3). Действительно, например, оператор P_z^+ имеет вид $P_z^+ f(s) = \int\limits_s^b K_z(t,s) f(t)dt$, но его ядро $K_z(t,s) \equiv \chi_{(s,z)}(t)$ не удовлетворяет условию (3). Из опеределения ядра $K_z(t,s)$ следует, что $K_z(t,s) = 0$ при $t > z$, однако $K_z(t,x) + K_z(x,s) = \chi_{(x,z)}(t) + \chi_{(s,z)}(x) = 1$ при $s \leq x < z < t$. Поэтому левая часть неравенства (3) не будет выполнена при $a < s \leq x < z < t < b$.

Обозначим через

$$\Delta_w^+ g(x) = \sup_{a<t<x} w(t)\,|g(x) - g(t)|\,, \quad \Delta_w^- g(x) = \sup_{x<t<b} w(t)\,|g(x) - g(t)|$$

оценки с весом w, отклонение значений функции g от $g(x)$ соответственно на интервалах (a,x), (x,b). Если g локально абсалютно непрерывная на I функция с производной $g' \in L_{p,v}$, то неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left\|\Delta_w^\pm g\right\|_{q,u} \le C^\pm \left\|g'\right\|_{p,v}. \tag{4}$$

Пусть $(t,z) \subset I$. Положим

$$U_q(z,t) = \begin{cases} \left(\int\limits_t^z u^q(x)dx\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \le q < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t<x<z} |u(x)|\,, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

$$V_p(z,t) = \begin{cases} \left(\int\limits_t^z v^{-p'}(s)ds\right)^{1/p'}, & \text{если } 1 < p \le \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t<s<z} v^{-1}(s), & \text{если } p = 1, \end{cases}$$

$$E^+ = \sup_{a<z<b} U_q(b,z)V_p(z,a), \qquad E^- = \sup_{a<z<b} U_q(z,a)V_p(b,z),$$

$$F^+ = \left(\int\limits_a^b \left[U_q(b,x)V_p(x,a)\right]^{\frac{pq}{p-q}} v^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$F^- = \left(\int\limits_a^b \left[U_q(x,a)V_p(b,x)\right]^{\frac{pq}{p-q}} v^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\gamma = p^{1/q}(p')^{1/p'}, \quad \gamma_1 = (p')^{1/p'} q^{1/p}\left(1 - \frac{q}{p}\right), \quad \gamma_2 = \left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$H^+ f(x) = \int\limits_a^x f(s)ds, \quad H^- f(x) = \int\limits_x^b f(s)ds.$$

Из результатов [5] в силу неравенства Харди следует
Лемма А. *Для наилучшей постоянной $C^{\pm}$ неравенства Харди*

$$\left\|H^{\pm}f\right\|_{q,u} \leq C^{\pm}\left\|f\right\|_{p,v}$$

имеют место следующие оценки:
а) если $1 \leq p \leq q < \infty$, тогда

$$E^{\pm} \leq C^{\pm} \leq \gamma E^{\pm};$$

б) если $1 \leq p \leq q = \infty$, тогда

$$C^{+} = \mathrm{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)V_p(x,a), \quad C^{-} = \mathrm{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)V_p(b,x);$$

в) если $0 < q < p, \quad 1 < p \leq \infty$, тогда

$$\gamma_1 F^{\pm} \leq C^{\pm} \leq \gamma_2 F^{\pm}.$$

2 Основные результаты

Положим

$$A^{+} = \sup_{a<z<b} U_q(b,z) \sup_{a<t<z} w(t)V_p(z,t),$$
$$A^{-} = \sup_{a<z<b} U_q(z,a) \sup_{z<t<b} w(t)V_p(t,z).$$

Теорема 1. *Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тогда неравенство (1) ((4)) выполнено тогда и только тогда, когда $A^{\pm} < \infty$. При этом $A^{\pm} \leq C^{\pm} \leq 8A^{\pm}$, где $C^{\pm}$ — наилучшая постоянная в (1) ((4)).*

Доказательство. Доказательство проведем для R^{+}_{∞} (Δ^{+}_{w}), а для R^{-}_{∞} (Δ^{-}_{∞}) доказательство аналогично.
Необходимость. Пусть выполнено неравенство (1) с наилучшей постоянной $C > 0$. Пусть $z \in I$. Для $f \in L_{p,v}$ положим $f_z(t) = \chi_{(a,z)}(t)f(t)$. Полагая в (1) $f = f_z$, имеем

$$U_q(b,z) \sup_{a<t<z} w(t) \left| \int\limits_t^z f(s)ds \right| \leq C^{+} \left(\int\limits_a^z |vf|^p \, dt \right)^{1/p}. \qquad (5)$$

Тогда на основании леммы А (в случае, когда $q = \infty$) получим

$$U_q(b,z) \sup_{a<t<z} w(t) V_p(z,t) \le C^+.$$

Откуда в силу произвольности $z \in I$ имеем

$$A^+ \le C^+. \tag{6}$$

Достаточность. Пусть $A^+ < \infty$. Не ограничивая общности, выполнение неравенства (1) можно доказать для неотрицательных функции. Пусть $f \ge 0$. Рассмотрим $R_\infty^+ f(x) = \sup\limits_{a<t<x} w(t) \int\limits_t^x f(s)ds$. Очевидно, что функция $R_\infty^+ f(x)$ неубывающая. Докажем, что функция $R^+ f(x)$ непрерывна слева в I. Отметим, что из неравенства $A^+ < \infty$ сразу следует $\sup\limits_{a<t<x} w(t) < \infty$ при каждом $x \in I$.

Пусть $x \in I$ и $2 \sup\limits_{a<t<x} w(t) = a_x$. Для $\epsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_y^x f(s)ds \le \frac{\epsilon}{a_x} \quad \text{при} \quad 0 < x - y < \delta.$$

Тогда для $0 < x - y < \delta$

$$R_\infty^+ f(x) - R_\infty^+ f(y) = \sup_{a<t<x} w(t) \int\limits_t^x f(s)ds - \sup_{a<t<y} w(t) \int\limits_t^y f(s)ds \le$$

$$\le \sup_{a<t<y} w(t) \int\limits_t^y f(s)ds + \sup_{a<t<y} w(t) \int\limits_y^x f(s)ds + \sup_{y<t<x} w(t) \int\limits_t^x f(s)ds -$$

$$- \sup_{a<t<y} w(t) \int\limits_t^y f(s)ds \le \left(\sup_{a<t<y} w(t) + \sup_{y<t<x} w(t) \right) \int\limits_y^x f(s)ds \le$$

$$\le a_x \int\limits_y^x f(s)ds \le \epsilon,$$

т.е. функция $R_\infty^+ f(x)$ непрерывна слева в точке $x \in I$. Легко видет, что $\lim\limits_{x\to a} R_\infty^+ f(x) = 0$. Пусть $k \in Z$, $T_k = \left\{x \in I : R_\infty^+ f(x) \le 2^k\right\}$. Очевидно, что если f ненулевая функция, то $T_k \ne \oslash$ для всех $k \in Z$. Положим $x_k = \sup T_k$. Если $x_k < b$, то в силу непрерывности функции $R_\infty^+ f(x)$ слева в I $R_\infty^+ f(x_k) = 2^k$. Пусть $n = \inf\{k \in Z : x_k = b\}$. Если $\{k \in Z : x_k = b\} = \emptyset$, то будем считать, что $n = \infty$. Если $n < \infty$, то $R_\infty^+ f(x_n) \le 2^n$.

По определению точек $x_k \in I$

$$I = \bigcup_{k \le n-1} [x_k, x_{k+1}) \,. \tag{7}$$

Для $k < n$ имеем $x_k < x_{k+1}$ и

$$2^k \le R_\infty^+ f(x) \le 2^{k+1} \quad \text{при} \quad x_k \le x \le x_{k+1}. \tag{8}$$

Пусть $k < n$. Тогда

$$2^{k-1} = 2^k - 2^{k-1} = R_\infty^+ f(x_k) - R_\infty^+ f(x_{k-1}) \le$$

$$\le R_\infty^+ f(x_{k-1}) + \sup_{a<t<x_{k-1}} w(t) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds + \sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t) \int\limits_{t}^{x_k} f(s)ds -$$

$$-R_\infty^+ f(x_{k-1}) = \sup_{a<t<x_{k-1}} w(t) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds + \sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t) \int\limits_{t}^{x_k} f(s)ds. \tag{9}$$

Пусть $1 \le p \le q < \infty$. Используя (7), (8), и (9), имеем

$$J = \int\limits_a^b u^q(x) \left(R_\infty^+ f(x)\right)^q dx = \sum_{k \le n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x) \left(R_\infty^+ f(x)\right)^q dx \le$$

$$\le 2^{2q} \sum_{k \le n-1} 2^{q(k-1)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx \le$$

$$\le 2^{2q} \sum_{k \le n-1} \left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds + \sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t) \int\limits_{t}^{x_k} f(s)ds \right)^q \times$$

$$\times \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx \le 2^{3q-1}\left(\sum_{k\le n-1}\left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds\right)^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{k\le n-1}\left(\sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t)\int\limits_t^{x_k} f(s)ds\right)^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx\right) = 2^{3q-1}\left(J_1+J_2\right). \quad (10)$$

Оценим J_1 и J_2 по отдельности. Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $q/p \ge 1$, будем иметь

$$J_1 = \sum_{k\le n-1}\left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds\right)^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx \le$$

$$\le \sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx\left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t)V_p\left(x_k,x_{k-1}\right)\right)^q\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|v(t)f(t)\right|^p dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx\left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t)V_p\left(x_k,t\right)\right)^q\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|v(t)f(t)\right|^p dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_k}^{b} u^q(x)dx\left(\sup_{a<t<x_k} w(t)V_p\left(x_k,t\right)\right)^q\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|v(t)f(t)\right|^p dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left(A^+\right)^q\sum_{k\le n-1}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|v(t)f(t)\right|^p dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left(A^+\right)^q\left(\sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left|v(t)f(t)\right|^p dt\right)^{q/p} \le \left(A^+\left\|f\right\|_p\right)^q. \quad (11)$$

Теперь, анологичном образом оценим J_2

$$J_2 = \sum_{k\le n-1}\left(\sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t)\left(\int\limits_t^{x_k} f(s)ds\right)\right)^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx \le$$

$$\le \sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u^q(x)dx\left(\sup_{x_{k-1}<t<x_{k-1}} V_p(x_k,t)\right)^q\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_k}^{b} u^q(x)dx\left(\sup_{a<t<x_k} V_p(x_k,t)\right)^q\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left(A^+\right)^q\sum_{k\le n-1}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \le$$

$$\le \left(A^+\right)^q\left(\sum_{k\le n-1}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \le \left(A^+\|f\|_{p,v}\right)^q. \qquad (12)$$

Из (10), (11) и (12) имеем

$$\left(\int\limits_a^b u^q(x)\left(R_\infty^+ f(x)\right)^q dx\right)^{1/q} \le 8A^+\left(\int\limits_a^b |vf|^p\,dt\right)^{1/p}$$

для всех $f\ge 0$. Следовательно, для наилучшей постоянной C в (1) имеем $C\le 8A^+$, что вместе с (6) дает $A^+\le C\le 8A^+$. Теорема 1 для случая $1\le p\le q<\infty$ доказана.

Пусть теперь $1\le p\le q=\infty$. Опять, используя (7), (8) и (9), будем иметь

$$\left\|R_\infty^+ f\right\|_{\infty,u} = \mathrm{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)R_\infty^+ f(x) = \sup_k \mathrm{vrai}\sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x)R_\infty^+ f(x) \le$$

$$\le \sup_k 2^{k+1} \operatorname{vrai} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x) \le 2^2 \sup_k 2^{k-1} \operatorname{vrai} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x) \le$$

$$\le 4 \sup_k \left(\sup_{a<t<x_{k-1}} w(t) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)ds + \right.$$

$$\left. + \sup_{x_{k-1}<t<x_k} w(t) \int\limits_t^{x_k} f(s)ds \right) \operatorname{vrai} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x) \le$$

$$\le 8 \sup_k \sup_{a<t<x_k} w(t) \int\limits_t^{x_k} f(s)ds \cdot \operatorname{vrai} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x) \le$$

$$\le 8 \sup_k \operatorname{vrai} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} u(x) \sup_{a<t<x_k} w(t) V_p(x_k, t) \|f\|_{p,v} \le$$

$$\le 8 \sup_k U_q(b, x_k) \sup_{a<t<x_k} w(t) V_p(x_k, t) \|f\|_{p,v} \le 8A^+ \|f\|_{p,v} .$$

Откуда и из (10) получим $A^+ \le C \le 8A^+$. Теорема 1 доказана полностью.□

3 Дополнение

Пусть

$$R_r^+ f(x) = \left(\int\limits_a^x w(t) \left| P^+ f(t) \right|^r dt \right)^{1/r}, \ R_r^- f(x) = \left(\int\limits_x^b w(t) \left| P^- f(t) \right|^r dt \right)^{1/r}.$$

В работе [6] получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства

$$\left\| R_r^{\pm} f \right\|_{q,u} \le C^{\pm} \|f\|_{p,v} \tag{13}$$

при $1 \le p \le q < \infty$, $0 < r < \infty$. Неравенство (1) является неравенством (13) при $r = \infty$. Теперь мы рассмотрим случаи $1 \le p \le q = \infty$, $0 < r < \infty$ и $1 \le p \le q = \infty$, $r = \infty$.

Пусть

$$B^+ = \operatorname{vrai} \sup_{a<x<b} u(x) \sup_{a<z<x} \left(\int\limits_a^z w(t)dt \right)^{1/r} V_p(x, z),$$

$$B^- = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x) \sup_{x<z<b} \left(\int_z^b w(t)dt \right)^{1/r} V_p(z,x),$$

$$D^+ = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x) \left(\int_a^x \left[\left(\int_a^z w(t)dt \right)^{1/r} V_p(x,z) \right]^{\frac{pr}{p-r}} v^{-p'}(z)dz \right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$D^- = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x) \left(\int_x^b \left[\left(\int_z^b w(t)dt \right)^{1/r} V_p(z,x) \right]^{\frac{pr}{p-r}} v^{-p'}(z)dz \right)^{\frac{p-r}{pr}},$$

$$G^+ = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x) \sup_{a<t<x} w(t)V_p(x,t),$$

$$G^- = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x) \sup_{x<t<b} w(t)V_p(t,x).$$

Теорема 2. *а) Если $1 \le p \le q = \infty$, $p \le r < \infty$, то неравенство* (13) *выполнено тогда и только тогда, когда $B^\pm < \infty$, причем $B^\pm \le C^\pm \le \gamma B^\pm$, где $C^\pm$ — наилучшая постоянная в* (13)*;*

б) если $1 \le p \le q = \infty$, $0 < r < p$, то неравенство (13) *выполнено тогда и только тогда, когда $D^\pm < \infty$, причем $\gamma_1 D^\pm \le C^\pm \le \gamma_2 D^\pm$, где $C^\pm$ — наилучшая постоянная в* (13)*;*

в) если $1 \le p \le q = \infty$, $r = \infty$, то неравенство (13) *выполнено тогда и только тогда, когда $G^\pm < \infty$, причем $G^\pm = C^\pm$, где $C^\pm$ — наилучшая постоянная в* (13).

Доказательство. Как в случае теоремы 1 теорему 2 докажем для R_r^+.

Пусть $1 \le p \le q = \infty$, $0 < r < \infty$ и неравенство (13) для R_r^+ выполнено с наилучшей постоянной $C^+ > 0$. Тогда для почти всех $x \in I$

$$u(x) \left(\int_a^x w(t) \left| \int_t^x f(s)ds \right|^r dt \right)^{1/r} \le C^+ \|f\|_{p,v}. \tag{14}$$

или

$$u(x)\left(\int\limits_a^b \chi_{(a,x)}(t)w(t)\left|\int\limits_t^b \chi_{(a,x)}(s)f(s)ds\right|^r dt\right)^{1/r} \le C^+\|f\|_{p,v}.$$

Откуда на основании леммы А получаем

в случае а) при $p \le r < \infty$

$$u(x)\sup_{a<z<x}\left(\int\limits_a^z w(t)dt\right)^{1/r} V_p(x,z) \le C^+,$$

в случае б) при $0 < r < p$

$$\gamma_1 u(x)\left(\int\limits_a^x \left[\left(\int\limits_a^z w(t)dt\right)^{1/r} V_p(x,z)\right]^{\frac{pr}{p-r}} v^{-p'}(z)dz\right)^{\frac{p-r}{pr}} \le C^+$$

для почти всех $x \in I$.

Следовательно, $B^+ \le C^+$ в случае а) и $\gamma_1 D^+ \le C$ в случае б).

Обратно, пусть $B^+ < \infty$ в случае а) и $D^+ < \infty$ в случае б). В силу леммы А имеем

$$\left\|R_r^+ f\right\|_{\infty,u} = \operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)\left(\int\limits_a^x w(t)dt\left|\int\limits_t^x f(s)ds\right|^r dt\right)^{1/r} \le$$

$$\le \gamma\cdot\operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)\sup_{a<z<x}\left(\int\limits_a^z w(t)dt\right)^{1/r} V_p(x,z)\,\|f\|_{L_p(v;(a,x))} \le \gamma B^+\|f\|_{p,v}$$

в случае а) и

$$\left\|R_r^+ f\right\|_{\infty,u} \le$$

$$\le \gamma_2\cdot\operatorname{vrai}\sup_{a<x<b} u(x)\left(\int\limits_a^x \left[\left(\int\limits_a^z w(t)dt\right)^{1/r} V_p(x,z)\right]^{\frac{pr}{p-r}} v^{-p'}(z)dz\right)^{\frac{p-r}{pr}} \times$$

$$\times \|f\|_{L_p(v;(a,x))} \le \gamma_2 D^+ \|f\|_{p,v}$$

в случае б), т.е. $C^+ \le \gamma B^+$ в случае а) и $C^+ \le \gamma_2 D^+$ в случае б). Эти оценки вместо с оценками, полученными в доказательстве необходимости дают $B^+ \le C^+ \le \gamma B^+$ в случае а) и $\gamma_1 D^+ \le C^+ \le \gamma_2 D^+$ в случае б).

Таким образом, случай а) и б) теоремы 2 доказана.

Теперь рассмотрим случай в). Пусть $1 \le p \le q = \infty$, $r = \infty$. Тогда для почти всех $x \in I$

$$u(x) \sup_{a<t<x} w(t) \left| \int_t^x f(s)ds \right| \le C^+ \|f\|_{p,v} .$$

Поступая, как выше, на основание леммы А имеем

$$u(x) \sup_{a<t<x} w(t) V_p(x,t) \le C^+ \|f\|_{p,v} \quad \text{для почти всех} \quad x \in I.$$

Следовательно, $G^+ \le C^+$. Обратно, пусть $G^+ < \infty$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\| R_\infty^+ f \right\|_{\infty,u} = \operatorname{vrai} \sup_{a<x<b} \sup_{a<t<x} w(t) \left| \int_t^x f(s)ds \right| \le$$

$$\le \operatorname{vrai} \sup_{a<x<b} \sup_{a<t<x} w(t) V_p(x,t) \|f\|_{L_p(V,(t,x))} \le G^+ \|f\|_{p,v} ,$$

т.е. $C^+ \le G^+$ Это вместе с оценкой $G^+ \le C^+$, полученной выше, дает $G^+ = C^+$. Теорема 2 полностью доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта №1529/ГФ Комитета Науки МОН РК.

Литература

1 Gogatishvili A., Opic B., Pick L. Weighted inequalities for Hardy - type operators involving suprema // Collect. Math. — 2006. — V 57, №3. — P.227 – 255.

2 Gogatishvili A., Pick L. A reduction theorem for supremum operators // S. Comput. and Appl. Math. — 2007. — V. 208. — P.270 – 279.

3 Prokhorov D.V. Lorentz norm inequalities for the Hardy operator involving suprema // Proc. Amer. Math. Soc. — 2012. — V. 140, № 5. — P.1585 – 1592.

4 Прохоров Д.В. Об ограниченности и компактности интегрального оператора, содержащего супремум. Препринт 2012/180. — Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2012. — 20 с.

5 Kutner A., Maligranda L., Persson L.- E. The Hardy inequality. About its History and some related persulrs. — Plzen, 2007. — 161 p.

6 Oinarov R., Kalybay A. Three-parameter weighted Hardy type inequalities // Banach J. Math. Anal. — 2008. — V. 2, № 2. — P.85 – 93.

Статья поступила в редакцию 07.05.14

Абылаева А.М., Байарыстанов А.О. СУПРЕМУМДЫ ҚАМТЫҒАН ХАРДИ ТӘРІЗДЕС ТЕҢСІЗДІК.

Супремумды қамтыған үш салмақты Харди тәріздес теңсіздіктің орындалуының қажетті және жеткілікті шарты алынған.

Abylayeva A.M., Baiarystanov A.O. HARDY TYPE INEQUALITIES CONTAINING SUPREMUM.

The necessary and sufficient condition for the three weighted Hardy type inequality containing supremum is found.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №4 (54). С.18–45*

УДК 517.938

С. А. Айсагалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предлагается метод решения краевых задач оптимального управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрен общий случай, когда имеются фазовые и интегральные ограничения, а также ограничения на значения управления для каждого момента времени. Решены следующие три задачи: существование решения краевой задачи оптимального управления, построение допустимого управления, построение оптимального решения путем сужения области допустимых управлений.
Ключевые слова: *оптимальное управление, принцип погружения, допустимое управление, оптимальное решение, минимизирующие последовательности.*

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t)dt \to \inf \tag{1}$$

Keywords: *optimal control, immersion principle, admissible control, optimal solution, minimizing sequences*
2010 Mathematics Subject Classification: 34C05, 34C07, 34C25

при условиях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,u,t), \ \ t \in I = [t_0, t_1], \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n} \tag{3}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \le F(x,t) \le \varphi(t), \ \ t \in I\}, \tag{4}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(\cdot), x_0, x_1) \le c_j, \ \ j = \overline{1, m_1}; \ \ g_j(u(\cdot), x_0, x_1) = c_j, \ \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}; \tag{5}$$

$$g_j(u(\cdot), x_0, x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), u(t), x_0, x_1, t)dt, \ \ j = \overline{1, m_2}, \tag{6}$$

ограничений на значение управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)| \ u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в.}, \ t \in I\} \tag{7}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times r$, вектор-функция $f(x,u,t) = (f_1(x,u,t), \ldots, f_r(x,u,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,u,t) \in R^n \times R^m \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x

$$|f(x,u,t) - f(y,u,t)| \le l(t)|x - y| \quad \forall (x,u,t), (y,u,t) \in R^n \times R^m \times I$$

и условию

$$|f(x,u,t)| \le c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t) \ \ \forall (x,u,t),$$

где $l(t) \ge 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = \text{const} > 0$, $c_1(t) \ge 0$, $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$.

Вектор-функция $F(x,t) = (F_1(x,t), \ldots, F_s(x,t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x,t) \in R^n \times I$. Функция $f_0(x,u,x_0,x_1,t) = (f_{01}(x,u,x_0,x_1,t), \ldots, f_{0m_2}(x,u,x_0,x_1,t))$ удовлетворяет условию

$$|f_0(x,u,x_0,x_1,t)| \le c_2(|x| + |u|^2 + |x_0| + |x_1|) + c_3(t)$$

$$\forall (x,u,x_0,x_1,t),(y,u,x_0,x_1,t) \in R^n \times R^m \times R^n \times R^n \times I,$$
$$c_2 = \text{const} \geq 0, \quad c_3(t) \geq 0, \quad c_3(t) \in L_1(I,R^1).$$

Скалярная функция $F_0(x,u,x_0,x_1,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным (x,u,x_0,x_1); $\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$, — заданные s-мерные непрерывные функции. S — заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n}, $U = U(t)$, $t \in I$, — заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из $L_2(I,R^m)$, моменты времени t_0, t_1 — фиксированы.

Следует отметить, что интегральные ограничения вида

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt \leq c_j, \quad j = \overline{1,m_1}, \tag{8}$$

путем введения дополнительных переменных $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$, могут быть записаны в виде

$$g_j(u(\cdot),x_0,x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt = c_j - d_j =: \overline{c}_j, \quad j = \overline{1,m_1}.$$

Пусть $\overline{c} = (\overline{c}_1,\ldots,\overline{c}_{m_2})$, где $\overline{c}_j = c_j - d_j$, $j = \overline{1,m_1}$, $\overline{c}_j = c_j$, $j = \overline{m_1+1,m_2}$, $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$. Пусть $Q = \{\overline{c} \in R^{m_2} | \overline{c}_j = c_j - d_j,\ d_j \geq 0,\ j = \overline{1,m_1},\ \overline{c}_j = c_j,\ j = \overline{m_1+1,m_2}\}$, где $d_j \geq 0$, $j = \overline{1,m_1}$, — неизвестные числа.

Определение 1. *Тройка* $(u_*(t),x_0^*,x_1^*) \in U \times S_0 \times S_1$ *называется допустимым управлением для задачи* (1) – (7), *если краевая задача* (2) – (7) *имеет решение. Множество всех допустимых управлений обозначим через* Σ, $\Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$.

Из данного определения следует, что для каждого элемента множества Σ 1) решение $x_*(t)$, $t \in I$ дифференциального уравнения (2), исходящее из точки $x_0^* \in S_0$, удовлетворяет условию $x_*(t_1) = x_1^* \in S_1$, причем $(x_0^*,x_1^*) \in S_0 \times S_1 = S$; 2) выполнено включение $x_*(t) \in G(t)$, $t \in I$; 3) для каждого элемента множества Σ имеет место равенство $g(u(\cdot)),(x_0,x_1) = \overline{c}$, где $g(u_*(\cdot),x_0^*,x_1^*) = (g_1(u_*(\cdot),x_0^*,x_1^*),\ldots,g_{m_2}(u_*(\cdot),x_0^*,x_1^*))$.

Ставятся следующие задачи.

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи* (2) – (7).

Для корректности постановки задачи оптимального управления (1) – (7) необходимо, чтобы краевая задача (2) – (7) имела решение. Если множество $\Sigma = \varnothing$, $\varnothing$ — пустое множество, то задача (1) – (7) не имеет решения.

Задача 2. *Найти допустимое управление* $(u_*(t), x_0^*, x_1{*}^*) \in \Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$.

Если задача 1 имеет решение, то существует допустимое управление.

Задача 3. *Найти оптимальное управление* $\overline{u}_*(t) {\in} U(t)$, *точку* $(\overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) \in S_0 \times S_1{=}S$ *и оптимальную траекторию* $\overline{x}_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$, *где* $\overline{x}_*(t) \in G(t)$, $t \in I$, $\overline{x}_*(t_1) = \overline{x}_1^* \in S_1$, $g_j(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) \leq c_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $g_j(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $J(\overline{u}_*(\cdot), \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = = \inf J(\overline{u}(\cdot), \overline{x}_0, \overline{x}_1)$ $\forall (\overline{u}(\cdot), \overline{x}_0, \overline{x}_1) \in U(t) \times S_0 \times S_1$.

Во второй половине XX века благодаря трудам Л.С. Понтрягина [1], Л.В. Канторовича [2], Н.Н. Красовского [3], Р. Беллмана [4], Р. Калмана [5], В.Ф. Кротова [6] и др. были созданы принцип максимума, метод динамического программирования, теория управляемости, метод моментов, финитное управление для решения проблем математической теории оптимальных процессов. Среди указанных работ наиболее близкой к данной работе является [1]. Следует отметить, что решение задачи оптимального управления (1) – (7) по методу из [1] основано на принципе Лагранжа, связанного с существованием седловой точки функционала Лагранжа. Имеются задачи вида (1) – (7), для которых функционал Лагранжа не имеет седловую точку, однако такие задачи имеют оптимальные решения. В данной работе предлагается один из методов устранения указанного недостатка путем построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с последующим применением численных методов решения экстремальных задач [7–9].

Цель данной работы — создание метода решения краевых задач оптимального управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с фазовыми и интегральными ограничениями, отличающегося от известных методов, основанных на принципе

Лагранжа, и связанный с существованием множителей Лагранжа. Работа является продолжением научных исследований, изложенных в [10–21].

Обзор научных исследований по оптимальному управлению содержится в монографиях [20, 21]. Существование и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода исследованы в [10, 18]. Оптимальное управление линейными системами с линейными ограничениями рассмотрены в [12, 17]. Частные случаи оптимального управления нелинейными системами приведены в [11, 13]. Управляемость и быстродействие процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными, а также в частных производных уравнениями, исследованы в [14–16, 19].

Принцип погружения

Пусть $f_0(x,u,x_0,x_1,t) = (f_{01}(x,u,x_0,x_1,t),\ldots,\ f_{0m_2}(x,u,x_0,x_1,t))$, определим вектор-функцию $\eta(t) = (\eta_1(t),\ldots,\eta_{m_2}(t))$, $t \in I$, следующим образом:

$$\eta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_0(x(\tau),u(\tau),x_0,x_1,\tau)d\tau,\ \ \dot\eta(t) = f_0(x(t),u(t),x_0,x_1,t),\ t \in I,$$

$$\eta(t_0) = 0,\ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q,\ (x_0,x_1) \in S,\ u(t) \in U(t),\ x(t) \in G(t).$$

Теперь задача оптимального управления (1) – (7) запишется в виде

$$J(u(\cdot),x_0,x_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(x(t),u(t),x_0,x_1,t)dt \to \inf \tag{9}$$

при условиях

$$\dot x = A(t)x + B(t)f(x,u,t),\ \ t \in I, \tag{10}$$

$$\dot\eta(t) = f_0(x(t),u(t),x_0,x_1,t),\ \ t \in I, \tag{11}$$

$$(x_0,x_1) \in S = S_0 \times S_1,\ \ \eta(t_0) = 0,\ \ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \tag{12}$$

$$x(t) \in G(t),\ \ u(t) \in U(t),\ \ t \in I. \tag{13}$$

Отметим, что задачи (1) – (7) и (9) – (13) равносильны.

Введем следующие векторы и матрицы:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,r} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},$$

$$\xi(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) = x_0 \\ \eta(t_0) = 0 \end{pmatrix} = \xi_0, \quad \xi(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) = x_1 \\ \eta(t_1) = \overline{c} \end{pmatrix}, \quad P_1 = (I_n, O_{n,m_2}),$$

где $O_{k,q}$ — прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, I_n — единичная матрица порядка $n \times n$. Тогда задача (9) – (13) примет вид

$$J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(P_1\xi(t), u(t), x_0, x_1, t)dt \to \inf \tag{14}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P_1\xi, u, t) + B_2 f_0(P_1\xi, u, x_0, x_1, t), \tag{15}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}, \quad \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times Q, \tag{16}$$

$$P_1\xi(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad \overline{c} \in Q. \tag{17}$$

Пусть

$$\Gamma = \{d \in R^{m_1} | \ d \geq 0\}. \tag{18}$$

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2 w_2(t), \quad t \in I, \tag{19}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^r), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{20}$$

$$y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}, \quad y(t_1) = \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times Q. \tag{21}$$

Основой принципа погружения являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \tag{22}$$

где $K : L_2(I, R^k) \to R^{n_1}$, $K(t_0, t)$ — заданная матрица порядка $n_1 \times k$ с кусочно-непрерывными элементами по t при каждом фиксированном t_0, $t_0 \in \Delta_0 \subset R^1$, $t_1 \in \Delta_1 \subset R^1$, $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \varnothing$, $\varnothing$ — пустое множество, $a \in R^{n_1}$ — любой заданный вектор, $u(\cdot) \in L_2(I, R^k)$ — искомая функция.

Теорема 1. *Интегральное уравнение* (22) *при любом фиксированном* $a \in R^{n_1}$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt, \tag{23}$$

порядка $n_1 \times n_1$ *является положительно определенной, где* $*$ *— знак транспонирования.*

Теорема 2. *Пусть матрица* $C(t_0, t_1)$ *положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения* (22) *имеет вид*

$$\begin{gathered} u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + v(t)- \\ -K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt, \ \ t \in I, \end{gathered} \tag{24}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^k)$ *— произвольная функция,* $a \in R^{n_1}$ *— любой вектор.*

Доказательства теорем 1, 2 приведены в работах [10, 18].

Пусть матрица $B_3(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + r)$, а $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{r+m_2})$. Легко убедиться в том, что управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{r+m_2})$, которое переводит траекторию системы (19) из любого начального состояния ξ_0 в любое желаемое конечное состояние ξ_1, является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_3(t)w(t)dt = a =: a(\xi_0, \xi_1) = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0, \tag{25}$$

где $\Phi(t, \tau) = \lambda(t)\lambda^{-1}(\tau)$, $\lambda(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\rho} = A_1(t)\rho$. Как следует из (22), (25), $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B_3(t)$ при $n_1 = n + m_2$, $k = r + m_2$. Для интегрального уравнения (25) справедливы теоремы 1, 2. По исходным данным системы (19) – (21) определим следующие матрицы и векторы:

$$T(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_3(t)B_3^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt = C(t_0, t_1),$$

$$\Lambda_1(t,\xi_0,\xi_1) = B_3^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a = K^*(t_0,t_1)C^{-1}(t_0,t_1)a =$$
$$= \begin{pmatrix} B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a \\ B_2^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a \end{pmatrix},$$
$$N_1(t) = -B_3^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1) =$$
$$= -K^*(t_0,t)C(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1) =$$
$$= \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1) \\ -B_2^*\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \end{pmatrix},$$
$$\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) = \Phi(t,t_0)T(t,t_1)T^{-1}(t_0,t_1)\xi_0 +$$
$$+\Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\xi_1,$$
$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), \quad t \in T,$$
$$T(t,t_1) = \int\limits_t^{t_1} \Phi(t_0,\tau)B_3(\tau)B_3^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)d\tau, \quad T(t_0,t) = T(t_0,t_1) - T(t,t_1),$$

$t \in I$, где вектор a определяется по формуле (25).

Теорема 3. *Пусть матрица $T(t_0,t_1) > 0$. Тогда управление $w(\cdot) = (w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{r+m_2})$ переводит траекторию системы (19) – (21) из начальной точки $\xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}$ в конечное состояние $\xi_1 \in S_1 \times Q$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} w_1(t) \in W_1 = \{w_1(\cdot) \in L_2(I,R^r) |\ w_1(t) = v_1(t) + B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)\times \\ \times T^{-1}(t_0,t_1)a + N_{11}(t)z(t_1,v),\ t \in I,\ \ \forall v_1(\cdot),\ \ v_1(\cdot) \in L_2(I,R^r)\}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} w_2(t) \in W_2 = \{w_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}) |\ w_2(t) = v_2(t) + B_2^*\Phi^*(t_0,t)\times \\ \times T^{-1}(t_0,t_1)a + N_{12}(t)z(t_1,v),\ t \in I,\ \ \forall v_2(\cdot),\ \ v_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2})\}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $v_1(\cdot) \in L_2(I,R^r)$, $v_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2})$ — произвольные функции. Функция $z(t,v) = z(t,v_1,v_2)$, $t \in I$, является решением дифференциального уравнения

$$\dot z = A_1 z + B_1(t)v_1(t) + B_2 v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \tag{28}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I,R^r), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2}. \tag{29}$$

Решение дифференциального уравнения (19), *соответствующее управлению* (26), (27), *имеет вид*

$$y(t) = z(t) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, v), \;\; z(t) = z(t_1, v), \; t \in I. \tag{30}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2. Как следует из вышеизложенного, решение задачи управляемости сводится к нахождению общего решения интегрального уравнения (25). Интегральное уравнение (25) является частным случаем (22), где $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B_3(t)$. Далее, путем замены $K(t_0, t)$ на $\Phi(t_0, t)B_3(t)$ получим $C(t_0, t_1) = T(t_0, t_1)$ (см. (23)). Из (24) следует (26), (27). Дифференциальное уравнение (28) с управлением (29) и соотношение (30) непосредственно следуют из формул

$$z(t, v) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B_3(\tau)v(\tau)d\tau, \;\; z(t_1, v) = \Phi(t_1, t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_3(t)v(t)dt.$$

Легко убедиться в том, что $y(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi_1$. □

Отметим, что 1) множества $W_1 = W_1(t) \subset L_2(I, R^r)$, $W_2 = W_2(t) \subset L_2(I, R^{m_2})$ содержат все множества функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in I$, для которых краевая задача (19) – (21) имеет решение; 2) если $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, то решение системы (19) – (21) определяется формулой (30); 3) вне множеств W_1, W_2 не существует управлений, для которых краевая задача (19) – (21) имеет решение; 4) теорема 3 позволяет заменить краевую задачу (19) – (21) на начальную задачу (28) – (30).

Лемма 1. *Пусть матрица* $T(t_0, t_1) > 0$. *Тогда краевая задача* (15) – (18) *равносильна следующей задаче:*

$$w_1(t) \in W_1, \;\; w_1(t) = f(P_1y(t), u(t), x_0, x_1, t), \;\; t \in I, \tag{31}$$

$$w_2(t) \in W_2, \;\; w_2(t) = f_0(P_1y(t), u(t), x_0, x_1, t), \;\; t \in I, \tag{32}$$

$$p(t) = F(P_1y(t), t) \in V =$$

$$= V(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^s) |\; \omega(t) \le p(t) \le \varphi(t), t \in I\}, \tag{33}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t), \;\; z(t_0) = 0, \;\; t \in I, \tag{34}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^r),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{35}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n},\ u(t) \in U(t),\ d \in \Gamma, \tag{36}$$

где функция $y(t)$, $t \in I$, определяется по формуле (30).

Доказательство. Если выполнены соотношения (31) – (36), то $y(t) = \xi(t)$, $t \in I$, причём $y(t_0) = \xi(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi(t_1) = \xi_1$ и выполнены включения (17), (18).

Пусть краевая задача (15) – (18) имеет решение. Это возможно тогда и только тогда, когда $f(P_1\xi(t), u(t), t) \in W_1$, $f_0(P_1\xi(t), u(t), x_0, x_1, t) \in W_2$ в силу теоремы 3. Эти включения равносильны равенствам (31), (32), где $z(t)$, $t \in I$, — решение дифференциального уравнения (34) с управлениями (35). Включение $P_1\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$, имеет вид (33), а включения (17), (18) запишутся в виде (36). □

Лемма 2. *Пусть матрица $T(t_0, t_1) > 0$. Тогда краевая задача оптимального управления с ограничениями* (1)–(7) *равносильна следующей задаче: минимизировать функционал* (*см.* (14))

$$I(u(\cdot), p(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t)dt \to \inf \tag{37}$$

при условиях

$$I_1(u(\cdot), p(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t)-$$

$$-f(P_1 y(t), u(t), t)|^2 + |w_2(t) - f_0(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 + \tag{38}$$

$$+ |p(t) - F(P_1 y(t), t)|^2]dt = 0,$$

$$\dot z = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2 v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{39}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^r),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{40}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \ p(t) \in V(t), \ u(t) \in U(t), \ d \in \Gamma, \qquad (41)$$

где $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, *функция* $y(t)$, $t \in I$, *определяется по формуле* (30).

Доказательство. Согласно лемме 1 $I_1 \geq 0$, причем $I_1 = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства (31) – (33), соотношения (34) – (36) совпадают с (39) – (41), функционал (1) запишется в виде (37). □

Отметим, что

1) поскольку исходная задача оптимального управления (1) – (7) равносильна задаче (37) – (41), то задача (1) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (38) – (41);

2) так как $I_1 \geq 0$, то для существования решения задачи (1) – (7) необходимо и достаточно, чтобы $\inf I_1(u, p, v_1, v_2, x_0, x_1, d) = 0$ при условиях (34) – (36);

3) переход от исходной краевой задачи (2) – (7) к начальной задаче оптимального управления $I_1(u, p, v_1, v_2, x_0, x_1, d) \to \inf$ при условиях (34) – (36) называется принципом погружения.

Существование допустимого управления. Быстродействие

Пусть

$$F_1(q(t), t) = |w_1(t) - f(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 +$$
$$+ |w_2(t) - f_0(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 + |p(t) - F(P_1 y(t), t)|^2,$$

где $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, $y(t) = z(t, v) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t) z(t_1, v)$, $q(t) = (z(t, v), z(t_1, v), u(t), p(t), v_1(t), v_2(t), x_0, x_1, d)$, $t \in I$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$I_1(u(\cdot), p(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot), x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t) \to \inf \qquad (42)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t) z + B_1(t) v_1(t) + B_2 v_2(t), \ z(t_0) = 0, \ t \in I \qquad (43)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^r),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{44}$$

$$p(t) \in V(t),\ u(t) \in U(t),\ (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S,\ d \in \Gamma. \tag{45}$$

Обозначив: $H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times R^n \times R^n \times R^{m_1}$, $X = U \times V \times L_2(I, R^r) \times L_2(I, R^{m_2}) \times S_0 \times S_1 \times \Gamma \subset H$, $\theta(t) = (u(t), p(t), v_1(t), v_2(t), x_0, x_1, d) \in X \subset H$, $q(t) = (z(t), z(t_1), \theta(t))$, задачу (42) – (45) можем представить в виде:

$$I_1(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t) \to \inf,\ \theta(\cdot) \in X \subset H.$$

Пусть $X_* = \{\theta_*(\cdot) \in X |\ I_1(\theta_*(\cdot)) = \inf I_1(\theta(\cdot)) = I_{1*}\}$

Лемма 3. *Пусть $T(t_0, t_1) > 0$. Для того чтобы задача* (2) – (7) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_{1*} = \inf\limits_{\theta \in X} I_1(\theta) = 0$, *где $\{\theta_n(\cdot)\} \subset X$ — минимизирующая последовательность в задаче* (42) – (45)

Доказательство леммы следует из теоремы 3 и лемм 1, 2.

Теорема 4. *Пусть $T(t_0, t_1) > 0$, функция $F_1(q, t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (q, t) вместе с частными производными по q и удовлетворяет условию Липшица*

$$|F_{1q}(q + \Delta q, t) - F_{1q}(q, t)| \le l|\Delta q|,\ t \in I, \tag{46}$$

где $F_{1q}(q, t) = (F_{1z}(q, t), F_{1z(t_1)}(q, t), F_{1u}(q, t), F_{1p}(q, t), F_{1v_1}(q, t), F_{1v_2}(q, t), F_{1x_0}(q, t), F_{1x_1}(q, t), F_{1d}(q, t))$, $q = (z, z(t_1), u, p, v_1, v_2, x_0, x_1, d) \in R^{n+m_2} \times R^{n+m_2} \times R^m \times R^s \times R^r \times R^{m_2} \times R^n \times R^n \times R^{m_1}$, $\Delta q = (\Delta z, \Delta z(t_1), \Delta u, \Delta p, \Delta v_1, \Delta v_2, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta d)$, $l = const > 0$.

Тогда функционал (42) *при условиях* (43) – (45) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент*

$$I_1'(\theta) = (I_{1u}'(\theta), I_{1p}'(\theta), I_{1v_1}'(\theta), I_{1v_2}'(\theta), I_{1x_0}'(\theta), I_{1x_1}'(\theta), I_{1d}'(\theta)) \in H$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$I_{1u}'(\theta) = F_{1u}(q(t), t),\ I_{1p}'(\theta) = F_{1p}(q(t), t),\ I_{1v_1}'(\theta) = F_{1v_1}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t),$$

$$I'_{1v_2}(\theta) = F_{1v_2}(q(t),t) - B_2^*\psi(t),\ \ I'_{1x_0}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1x_0}(q(t),t)dt, \qquad (47)$$

$$I'_{1x_1}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1x_1}(q(t),t)dt,\ \ I'_{1d}(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1d}(q(t),t)dt,$$

где $z(t),\ t \in I,$ *— решение дифференциального уравнения* (43), *а функция* $\psi(t),\ t \in I,$ *— решение сопряжённой системы*

$$\dot{\psi} = F_{1z}(q(t),t) - A_1^*(t)\psi,\ \ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}(q(t),t)dt. \qquad (48)$$

Кроме того, градиент $I'_1(\theta),\ \theta \in X$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|I'_1(\theta_1) - I'_1(\theta_2)\| \leq K\|\theta_1 - \theta_2\|,\ \ \forall \theta_1, \theta_2 \in X,\ \ K = const > 0. \qquad (49)$$

Доказательство. Пусть $\theta(t), \theta(t) + \Delta\theta(t) \in X$, $z(t, v_1, v_2)$, $z(t, v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2)$, $t \in I$, — решение системы (43) – (44). Пусть $z(t, v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2) = z(t, v_1, v_2) + \Delta z(t)$, $t \in I$. Тогда

$$|\Delta z(t)| \leq C_1\|\Delta v_1\| + C_2\|\Delta v_2\|. \qquad (50)$$

Приращение функционала имеет вид (см. (46))

$$\Delta I_1 = I_1(\theta + \Delta\theta) - I_1(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [F_1(q(t) + \Delta q(t), t) - F_1(q(t),t)]dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [\Delta u^*(t) F_{1u}(q(t),t) + \Delta p^*(t) F_{1p}(q(t),t) + \Delta v_1^*(t) F_{1v_1}(q(t),t) +$$

$$+ \Delta v_2^*(t) F_{1v_2}(q(t),t) + \Delta x_0^* F_{1x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^* F_{1x_1}(q(t),t) + \Delta d^* F_{1d}(q(t),t) +$$

$$+ \Delta z^*(t) F_{1z}(q(t),t) + \Delta z^*(t_1) F_{1z(t_1)}(q(t),t)]dt + \sum_{i=1}^{9} R_i, \qquad (51)$$

где $|R_1| \leq l_1\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta u(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_2| \leq l_2\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta p(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_3| \leq l_3\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta v_1(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_4| \leq l_4\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta v_2(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_5| \leq l_5\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta x_0||\Delta q(t)|dt$, $|R_6| \leq l_6\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta x_1||\Delta q(t)|dt$, $|R_7| \leq l_7\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta d||\Delta q(t)|dt$, $|R_8| \leq l_8\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta z(t)||\Delta q(t)|dt$, $|R_9| \leq l_9\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Delta z(t_1)||\Delta q(t)|dt$ в силу условия Липшица (46). Заметим, что (см. (48),(50))

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta z^*(t_1)F_{1z(t_1)}(q(t),t)dt =$$
$$= -\int\limits_{t_0}^{t_1}[\Delta v_1^*(t)B_1^*(t) + \Delta v_2^*(t)B_2^*]\psi(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta z^*(t)F_{1z}(q(t),t)dt. \tag{52}$$

Из (51), (52) имеем

$$\Delta I_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1}\{\Delta u^*(t)F_{1u}(q(t),t) + \Delta p^*(t)F_{1p}(q(t),t)+$$
$$+\Delta v_1^*(t)[F_{1v_1}(q(t),t) - B_1^*(t)\psi(t)]+$$
$$+\Delta v_2^*(t)[F_{1v_2}(q(t),t) - B_2^*\psi(t)] + \Delta x_0^*F_{1x_0}(q(t),t) + \Delta x_1^*F_{1x_1}(q(t),t)+$$
$$+\Delta d^*F_{1d}(q(t),t)\}dt + \sum_{i=1}^{9}R_i =< I_1'(\theta),\Delta\theta >_H +R,$$

где $R = \sum\limits_{i=1}^{9}R_i$, $|R| \leq C_3\|\Delta\theta\|^2$, $\dfrac{|R|}{\|\Delta\theta\|} \to 0$ при $\|\Delta\theta\| \to 0$.

Отсюда следуют соотношения (47). Пусть $\theta_1 = (u+\Delta u, p+\Delta p, v_1+\Delta v_1, v_2+\Delta v_2, x_0+\Delta x_0, x_1+\Delta x_1, d+\Delta d)$, $\theta_2 = (u,p,v_1,v_2,x_0,x_1,d) \in X$. Так как

$$|I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)|^2 \leq l_{10}|\Delta q(t)|^2 + l_{11}|\Delta\psi(t)|^2 + l_{12}|\Delta\theta|^2,$$

$$|\Delta q(t)| \leq l_{13}\|\Delta\theta\|, |\Delta\psi(t)| \leq l_{14}\|\Delta\theta\|,$$

то

$$\|I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |I_1'(\theta_1) - I_1'(\theta_2)|^2 dt \leq l_{15}\|\Delta\theta\|^2,$$

где $l_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{10, 15}$. Отсюда следует оценка (49) с $K = \sqrt{l_{15}}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $T(t_0, t_1) > 0$, функция $F_1(q, t)$ выпукла по переменной $q \in R^N$, $N = 4n + m + s + r + m_1$, т.е. $\forall q_1, q_2 \in R^N, \forall\alpha,\ \alpha \in [0, 1]$*

$$F_1(\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2) \leq \alpha F_1(q_1, t) + (1 - \alpha)F_1(q_2, t). \tag{53}$$

Тогда функционал (42) при условиях (43) – (45) является выпуклым.

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in X$, $\alpha \in [0, 1]$. Можно показать, что

$$z(t, \alpha v_1 + (1 - \alpha)\overline{v}_1, \alpha v_2 + (1 - \alpha)\overline{v}_2) = \alpha z(t, v_1, v_2) + (1 - \alpha)z(t, \overline{v}_1, \overline{v}_2)$$

$\forall(v_1, v_2),\ (\overline{v}_1, \overline{v}_2) \in L_2(I, R^{r+m_2})$. Тогда с учетом (53)

$$I_1(\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(\alpha q_1(t) + (1 - \alpha)q_2(t))dt \leq \alpha I_1(\theta_1) + (1 - \alpha)I_1(\theta_2),$$

$\forall\theta_1, \theta_2 \in X,\ \theta_1 = (u_1, p_1, v_1, v_2, x_0, x_1, d),\ \theta_2 = (\overline{u}_1, \overline{p}_1, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{d})$. $\square$

Отметим, что если U, V, S_0, S_1 — ограниченные выпуклые замкнутые множества, то X_1 — ограниченное выпуклое замкнутое множество. Так как H — рефлексивное банахово пространство, то множество X_1 — слабо бикомпактно, где $X_1 = U \times V \times V_1(I, R^r) \times V_2(I, R^{m_2}) \times S_0 \times S_1 \times \Gamma_1 \subset H$,

$$V_1(I, R^r) = \{v_1(\cdot) \in L_2(I, R^r)|\ \|v_1\| \leq \beta\},$$

$$V_2(I, R^{m_2}) = \{v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})|\ \|v_2\| \leq \beta\}),$$

$$\Gamma_1 = \{d \in R^{m_1}|\ 0 \leq d \leq \beta\},$$

$\beta > 0$ — достаточно большое число. Строим последовательности $\{\theta_n\}=\{u_n,p_n,v_1^n,v_2^n,x_0^n,x_1^n,d_n\}\subset X_1$, $n=0,1,2,\ldots$, по алгоритму

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}=P_U[u_n-\alpha_n I'_{1u}(\theta_n)],\ p_{n+1}=P_V[p_n-\alpha_n I'_{1p}(\theta_n)],\\
&v_1^{n+1}=P_{V_1}[v_1^n-\alpha_n I'_{1v_1}(\theta_n)],\ v_2^{n+1}=P_{V_2}[v_2^n-\alpha_n I'_{1v_2}(\theta_n)],\\
&x_0^{n+1}=P_{S_0}[x_0^n-\alpha_n I'_{1x_0}(\theta_n)],\ x_1^{n+1}=P_{S_1}[x_1^n-\alpha_n I'_{1x_1}(\theta_n)],\\
&d_{n+1}=P_{\Gamma_1}[d_n-\alpha_n I'_{1d}(\theta_n)],\ n=0,1,2,\ldots,\\
&\quad 0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{K+2\varepsilon},\ \varepsilon>0,
\end{aligned}\tag{54}$$

где $P_\Omega[\cdot]$ — проекция точки на множество Ω, $K=\mathrm{const}>0$ из (49).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и пусть, кроме того, функция $F_1(q,t)$ выпукла по переменной $q\in R^N$ и последовательность $\{\theta_n\}\subset X_1$ определяется по формуле (54). Тогда*

1) достигается нижняя грань функционала (42) при условиях (43) – (45)

$$\inf_{\theta\in X_1} I_1(\theta)=I_1(\theta_*)=\min_{\theta\in X_1} I_1(\theta),\ \theta_*\in X_1;$$

2) последовательность $\{\theta_n\}\subset X_1$ является минимизирующей, $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(\theta_n)=I_{1*}=\inf\limits_{\theta\in X_1} I_1(\theta)$;

3) последовательность $\{\theta_n\}\subset X_1$ слабо сходится к точке $\theta_*=(u_*,p_*,v_1^*,v_2^*,x_0^*,x_1^*,d_*)\in X_1$ при $n\to\infty$;

4) для того, чтобы задача (2) – (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(\theta_n)=I_{1*}=0$;

5) справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0\le I_1(\theta_n)-I_{1*}\le C_0/n,\ n=1,2,\ldots,\ C_0=const>0.\tag{55}$$

Доказательство. Так как функция $F_1(q,t)$, $t\in I$, выпукла, то по утверждению леммы 4, функционал $I_1(\theta)$, $\theta\in X_1$ является выпуклым на слабо бикомпактном множестве X_1. Следовательно, $I_1(\theta)\in C^1(X_1)$ слабо полунепрерывен снизу на слабо бикомпактном множестве X_1 и достигает нижней грани в X_1. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Используя свойства проекции точки на выпуклом замкнутом множестве X_1 и учитывая, что $I_1(\theta)\in C^{1,1}(X_1)$, можно показать, что $I_1(\theta_n)$ –

$I_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что 1) числовая последовательность $\{I_1(\theta_n)\}$ строго убывает; 2) $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как функционал является выпуклым и множество X_1 ограничено, то выполняется неравенство

$$0 \leq I_1(\theta_n) - I_1(\theta_*) \leq C_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|, \ C_1 = \text{const} > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (56)$$

Отсюда, учитывая, что $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, получим, что последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей: $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(\theta_n) = I_1(\theta_*) = \inf\limits_{\theta\in X_1} I_1(\theta)$.

Поскольку $\{\theta_n\} \subset X_1$, X_1 – слабо бикомпактно, то $\theta_n \xrightarrow{\text{сл}} \theta_*$ при $n \to \infty$.

Как видно из леммы 3, если $I_1(\theta_*) = 0$, то задача оптимального уравнения (1) – (7) имеет решение.

Оценка (55) непосредственно следует из неравенств (56), $I_1(\theta_n) - I_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$.

Выше были кратко изложены основные этапы доказательства теоремы. Подробное доказательство аналогичной теоремы приведено в [20]. □

Для случая, когда функция $F_1(q, t)$ не является выпуклой по переменной q, верна следующая теорема, которая вытекает из теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4, последовательность* $\{\theta_n\} \subset X_1$ *определяется по формуле* (54). *Тогда 1) значение функционала* $I_1(\theta_n)$ *строго убывает при* $n = 0, 1, 2, \ldots$; *2)* $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Из вышеприведенных результатов следует 1) если $\theta_* = (u_*, p_*, v_1^*, v_2^*, x_0^*, x_1^*, d_*) \in X_1$ — решение задачи оптимального управления (42) – (45), для которого $I_1(\theta_*) = 0$, то $(u_* = u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in \Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$ — допустимое управление; 2) решение $x_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$, дифференциального уравнения (2) удовлетворяет условиям: $x(t_1; t_0, x_0^*) = x_1^*$, $x_*(t; t_0, x_0^*) \in G(t)$, $t \in I$, $g_j(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) \leq c_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $g_j(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$; 3) необходимым и достаточным условием существования решения краевой задачи (2) – (7) является $I_1(\theta_*) = 0$ где $\theta_* \in X_1$ — решение задачи (42) –

(45); 4) для допустимого управления значение функционала (1) равно

$$I(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x_*(t), u_*(t), x_0^*, x_1^*, t)dt = \gamma_*, \qquad (57)$$

где $x_*(t) = x_*(t; t_0, x_0^*)$, $t \in I$. В общем случае, $I(u_*(\cdot), x_0^*, x_1^*) \neq I(\overline{u}_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = \inf I(u(\cdot), x_0, x_1)$, $(u(\cdot), x_0, x_1) \in U(t) \times S_0 \times S_1$.

Пусть t_0 — фиксировано, t_1 — не фиксировано. Рассмотрим алгоритм решения задачи быстродействия.

А. Строится какое-либо допустимое управление по методу, изложенному выше. Для этого достаточно выбрать некоторое значение $t_1 = t_1^0$, $t_1^0 > t_0$, найти решение оптимизационной задачи (44) – (47). Пусть найдена точка $\theta_* \in X_1$, $J_1(\theta_*) = \inf J_1(\theta)$, $\theta \in X_1$. Здесь возможны два случая: а) $J_1(\theta_*) = J_{1*} > 0$; б) $J_1(\theta_*) = J_{1*} = 0$. Пусть $J_1(\theta_*) = J_{1*} > 0$. В этом случае снова решаем задачу (44) – (47), полагая $t_1 = 2t_1^0$. В результате имеем точку $\theta_* = \theta_*(2t_1^0) \in X_1$. Здесь возможны также два случая: 1) $J_1(\theta_*(2t_1^0)) > 0$; 2) $J_1(\theta_*(2t_1^0)) = 0$. Если значение $J_1(\theta_*(2t_1^0)) > 0$, то продолжим процесс, взяв $t_1 = 4t_1^0$, и так далее. Если $J_1(\theta_*(2t_1^0)) = 0$, то переходим к пункту Б.

Б. Пусть для некоторого значения $t_1 = mt_1^0$ $J_1(\theta_*(mt_1^0)) = 0$, в частности, при $m = 1$, т.е. имеем случай б). В этом случае выбираем значение $t_1 = (m - 1/2)t_1^0$. Далее, решаем задачу (44) – (47) для значения $t_1 = (m - 1/2)t_1^0$. Повторяя данную процедуру, находим $t_1 = t_1^*$ — оптимальный момент времени, а также $\theta_*(t_1^*) \in X_1$ и решение задачи быстродействия.

Построение оптимального решения

Рассмотрим задачу оптимального управления (1) – (7). Определим скалярную функцию $\sigma(t)$, $t \in I$, следующим образом:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} F_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau)d\tau, \ t \in I.$$

Тогда $\dot{\sigma}(t) = F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t)$, $\sigma(t_0) = 0$, $\sigma(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \in \Omega = \{\gamma \in R^1 | \gamma \geq \gamma_0, \ \gamma_0 > -\infty\}$, где $\gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \geq \gamma_0$, значение γ ограничено снизу, в частности, $\gamma_0 = 0$, если $F_0 \geq 0$. И задача оптимального управления (1) – (7) запишется в виде (см. (42))

$$\sigma(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \to \inf \tag{58}$$

при условиях

$$\dot{\sigma}(t) = F_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t),\ \sigma(t_0) = 0,\ \sigma(t_1) = \gamma, \tag{59}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, t),\ (x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1, \tag{60}$$

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t),\ \eta(t_0) = 0,\ \eta(t_1) = \overline{c} \in Q, \tag{61}$$

$$x(t) \in G(t),\ u(t) \in U(t),\ t \in I. \tag{62}$$

Введём обозначения

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix},\ A_2(t) = \begin{pmatrix} O_{1,1} & O_{1,n} & O_{1,m_2} \\ O_{n,1} & A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,1} & O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ O_{n,1} \\ O_{m_2,1} \end{pmatrix},$$

$$C_0(t) = \begin{pmatrix} O_{1,r} \\ B(t) \\ O_{m_2,r} \end{pmatrix},\ D_0(t) = \begin{pmatrix} O_{1,m_2} \\ O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 1, & O_{1,n}, & O_{1,m_2} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} O_{n,1}, & I_n, & O_{n,m_2} \end{pmatrix},$$

где $\sigma(t) = P_0\mu(t)$, $x(t) = P_1\mu(t)$, $t \in I$.

Тогда задача оптимального управления (58) – (62) примет вид

$$P_0\mu(t_1) = \gamma = I(u(\cdot), x_0, x_1) \to \inf, \tag{63}$$

при условиях

$$\dot{\mu} = A_2(t)\mu + B_0F_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t) + C_0(t)f(P_1\mu, u, t) + D_0f_0(P_1\mu, u, x_0, x_1, t), \tag{64}$$

$$\mu(t_0) = \mu_0 = \begin{pmatrix} O_{1,1} \\ x_0 \\ O_{m_2,1} \end{pmatrix} \in O_{1,1} \times S_0 \times O_{m_2,1} = T_0, \tag{65}$$

$$\mu(t_1) = \mu_1 = \begin{pmatrix} \gamma \\ x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix} \in \Omega \times S_1 \times Q = T_1, \tag{66}$$

$$P_1\mu(t) \in G(t),\ u(t) \in U(t),\ d \in \Gamma, \tag{67}$$

где γ определяется по формуле (63).

Принцип погружения. Рассмотрим краевую задачу (64) – (67). Соответствующая линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{\zeta} = A_2(t)\zeta + B_0\overline{w}_1(t) + C_0(t)\overline{w}_2(t) + D_0\overline{w}_3(t), t \in I, \tag{68}$$

$$\overline{w}_1(\cdot) \in L_2(I, R^1),\ \ \overline{w}_2(\cdot) \in L_2(I, R^r),\ \ \overline{w}_3(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{69}$$

$$\zeta(t_0) = \mu_0 \in T_0, \quad \zeta(t_1) = \mu_1 \in T_1. \tag{70}$$

Введем следующие обозначения:

$$\overline{B}_0(t) = (B_0, C_0(t), D_0), \overline{w}(t) = (\overline{w}_1(t), \overline{w}_2(t), \overline{w}_3(t)), \Psi(t,\tau) = K(t)K^{-1}(\tau),$$

$$\overline{a} = \Psi(t_0,t_1)\mu_1 - \mu_0, R(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Psi(t_0,t)\overline{B}_0(t)\overline{B}_0^*(t)\Psi^*(t_0,t)dt,$$

$$R(t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(t_0,\tau)\overline{B}_0(\tau)\overline{B}_0^*(\tau)\Psi^*(t_0,\tau)d\tau, R(t_0,t_1) = R(t_0,t) + R(t,t_1),$$

$$\overline{\Lambda}_1(t,\mu_0,\mu_1) = \overline{B}_0^*(t)\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)a =$$

$$= \begin{pmatrix} B_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\overline{a} \\ C_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\overline{a} \\ D_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\Lambda}_{11}(t,\mu_0,\mu_1) \\ \overline{\Lambda}_{12}(t,\mu_0,\mu_1) \\ \overline{\Lambda}_{13}(t,\mu_0,\mu_1) \end{pmatrix},$$

$$K_1(t) = -\overline{B}_0^*\Psi^*(t)(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -B_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \\ -C_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \\ -D_0^*\Psi^*(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}(t) \\ K_{12}(t) \\ K_{13}(t) \end{pmatrix},$$

$$\overline{\Lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1) = \Psi(t,t_0)R(t,t_1)R^{-1}(t_0,t_1)\mu_0 +$$

$$+\Psi(t,t_0)R(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1)\mu_1,$$

$$K_2(t) = -\Psi(t,t_0)R(t_0,t)R^{-1}(t_0,t_1)\Psi(t_0,t_1), t \in I.$$

Теорема 7. *Пусть матрица* $R(t_0,t_1)>0$. *Тогда управление* $\overline{w}(t)=(\overline{w}_1(t),\overline{w}_2(t),\overline{w}_3(t))\in L_2(I,R^{1+r+m_2})$ *переводит траекторию системы* (68) – (70) *из любой начальной точки* $\mu_0\in R^{1+n+m_2}$ *в любое заданное конечное состояние* $\mu_1\in R^{1+n+m_2}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}\overline{w}_1(t)\in\overline{W}_1=\{\overline{w}_1(\cdot)\in L_2(I,R^1)/\overline{w}_1(t)=\overline{v}_1(t)+\overline{\Lambda}_{11}(t,\mu_0,\mu_1)+\\ +K_{11}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}),\quad\forall\overline{v}_1(\cdot)\in L_2(I,R^1),t\in I\},\end{gathered}\tag{71}$$

$$\begin{gathered}\overline{w}_2(t)\in\overline{W}_2=\{\overline{w}_{2(\cdot)}\in L_2(I,R^r)/\overline{w}_2(t)=\overline{v}_2(t)+\overline{\Lambda}_{12}(t,\mu_0,\mu_1)+\\ +K_{12}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}),\quad\forall\overline{v}_2(\cdot)\in L_2(I,R^r),t\in I\},\end{gathered}\tag{72}$$

$$\begin{gathered}\overline{w}_3(t)\in\overline{W}_3=\{\overline{w}_3(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2})/\overline{w}_3(t)=\overline{v}_3(t)+\\ +\overline{\Lambda}_{13}(t,\mu_0,\mu_1)+K_{13}(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}),\forall\overline{v}_3(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}),t\in I\},\end{gathered}\tag{73}$$

где $\overline{v}(t)=(\overline{v}_1(t),\overline{v}_2(t),\overline{v}_3(t))$, $\overline{z}(t)=\overline{z}(t,\overline{v}),t\in I$, *— решение дифференциального уравнения*

$$\dot{\overline{z}}=A_2(t)\overline{z}+B_0\overline{v}_1(t)+C_0(t)\overline{v}_2(t)+D_0\overline{v}_3(t),\overline{z}(t_0)=0,\tag{74}$$

$$\overline{v}_1(\cdot)\in L_2(I,R^1),\overline{v}_2(\cdot)\in L_2(I,R^r),\overline{v}_3(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}).\tag{75}$$

Решение системы (68) – (70) *имеет вид*

$$\zeta(t)=\overline{z}(t,\overline{v})+\overline{\Lambda}_2(t,\mu_0,\mu_1)+K_2(t)\overline{z}(t_1,\overline{v}),t\in I.\tag{76}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Лемма 5. *Пусть матрица* $R(t_0,t_1)>0$. *Тогда краевая задача* (64) – (67) *равносильна следующей задаче:*

$$\overline{w}_1(t)\in\overline{W}_1,\overline{w}_1(t)=F_0(P_1\zeta,u,x_0,x_1,t),t\in I,\tag{77}$$

$$\overline{w}_2(t)\in\overline{W}_2,\overline{w}_2(t)=f(P_1\zeta,u,t),t\in I,\tag{78}$$

$$\overline{w}_3(t)\in\overline{W}_3,\overline{w}_3(t)=f_0(P_1\zeta,u,x_0,x_1,t),t\in I,\tag{79}$$

$$p(t)\in V(t)=\{p(\cdot)\in L_2(I,R^s)|\ p(t)=F(P_1\zeta,t),\omega(t)\le p(t)\le\varphi(t),t\in I\},\tag{80}$$

$$\dot{\overline{z}}=A_2(t)\overline{z}+B_0\overline{v}_1(t)+C_0(t)\overline{v}_2(t)+D_0\overline{v}_3(t),\overline{z}(t_0)=0,t\in I,\tag{81}$$

$$\overline{v}_1(\cdot)\in L_2(I,R^1),\overline{v}_2(\cdot)\in L_2(I,R^r),\overline{v}_3(\cdot)\in L_2(I,R^{m_2}),\tag{82}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, u(t) \in U(t), \gamma \in \Omega, d \in \Gamma, \tag{83}$$

где $\zeta(t)$, $t \in I$, *определяется по формуле* (76), $\overline{z}(t, \overline{v})$ — *решение системы* (74), (75), *функции* $\overline{w}_1(t)$, $\overline{w}_2(t)$, $\overline{w}_3(t)$ *определяются формулами* (71) — (73) *соответственно.*

Утверждение леммы 5 следует из теоремы 7.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_2(\overline{v}, u, p, x_0, x_1, d, \gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_2(\overline{q}(t), t)dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [|\overline{w}_1(t) - F_0(P_1\zeta(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 + |\overline{w}_2(t) - f(P_1\zeta(t), u(t), t)|^2 +$$

$$+ |\overline{w}_3(t) - f_0(P_1\zeta(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 + |p(t) - F(P_1\zeta(t), t)|^2]dt \to \inf \tag{84}$$

при условиях (81) – (83), где $\overline{w}_1(t) \in \overline{W}_1$, $\overline{w}_2(t) \in \overline{W}_2$, $\overline{w}_3(t) \in \overline{W}_3$, $\overline{v} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, $\overline{q}(t) = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, u, p, x_0, x_1, d, \gamma, \overline{z}(t), \overline{z}(t_1))$. Отметим, что задача (84), (81) – (83) была получена на основе соотношений (77) – (83).

Теорема 8. *Пусть* $R(t_0, t_1) > 0$, *производная* $\frac{\partial F_2(\overline{q}, t)}{\partial q}$ *удовлетворяет условию Липшица. Тогда*

1. *функционал* (84) *при условиях* (81) – (83) *непрерывно дифференцируем по Фреше, его градиент*

$$J_2'(\overline{\theta}) = \big(J_{2\overline{v}_1}'(\overline{\theta}), J_{2\overline{v}_2}'(\overline{\theta}), J_{2\overline{v}_3}'(\overline{\theta}), J_{2u}'(\overline{\theta}), J_{2p}'(\overline{\theta}), J_{2x_0}'(\overline{\theta}), J_{2x_1}'(\overline{\theta}), J_{2d}'(\overline{\theta}), J_{2\gamma}'(\overline{\theta})\big),$$

$$\overline{\theta} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, u, p, x_0, x_1, d, \gamma) \in \overline{X}, \;\; J_2'(\overline{\theta}) \in H_1,$$

в любой точке $\overline{\theta} \in \overline{X}$ *вычисляется по формуле*

$$J_{2\overline{v}_1}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_1} - B_0^*\overline{\psi}(t), \quad J_{2\overline{v}_2}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_2} - C_0^*\overline{\psi}(t),$$

$$J_{2\overline{v}_3}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial \overline{v}_3} - D_0^*\overline{\psi}(t), \quad J_{2u}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t), t)}{\partial u},$$

$$J'_{2p}(\overline{\theta}) = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial p},$$

$$J'_{2x_0}(\overline{\theta}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial x_0}dt, \quad J'_{2x_1}(\overline{\theta}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial x_1}dt,$$

$$J'_{2d}(\overline{\theta}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial d}dt, \quad J'_{2\gamma}(\overline{\theta}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial \gamma}dt,$$

где $\overline{\psi}(t)$, $t \in I$ *— решение сопряженной системы*

$$\dot{\overline{\psi}} = \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial \overline{z}} - A_2^*(t)\overline{\psi}, \quad \overline{\psi}(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(\overline{q}(t),t)}{\partial \overline{z}(t_1)}dt,$$

$$\overline{X} = L_2(I,R^1) \times L_2(I,R^r) \times L_2(I,R^{m_2}) \times U \times V \times S_0 \times S_1 \times \Gamma \times \Omega$$
$$H_1 = L_2(I,R^1) \times L_2(I,R^r) \times L_2(I,R^{m_2}) \times L_2(I,R^m) \times L_2(I,R^s) \times R^n \times$$
$$\times R^n \times R^{m_1} \times R^1, \quad \overline{X} \subset H_1;$$

2. градиент $J'_2(\overline{\theta})$, $\overline{\theta} \in \overline{X}$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'_2(\overline{\theta}_1) - J'_2(\overline{\theta}_2)\| \le l\|\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2\|, \quad \forall \overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2 \in \overline{X}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

Построим следующие последовательности $\{\overline{\theta}_n\} = \{\overline{v}_1^n, \overline{v}_2^n, \overline{v}_3^n, u_n, p_n, x_0^n, x_1^n, d_n, \gamma_n\} \subset \overline{X}_2$:

$$\overline{v}_1^{n+1} = P_{\overline{V}_1}[\overline{v}_1^n - \alpha_n J'_{2\overline{v}_1}(\overline{\theta}_n)], \quad \overline{v}_2^{n+1} = P_{\overline{V}_2}[\overline{v}_2^n - \alpha_n J'_{2\overline{v}_2}(\overline{\theta}_n)],$$
$$\overline{v}_3^{n+1} = P_{\overline{V}_3}[\overline{v}_3^n - \alpha_n J'_{2\overline{v}_3}(\overline{\theta}_n)], \quad u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{2u}(\overline{\theta}_n)],$$
$$p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_{2p}(\overline{\theta}_n)], \quad x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J'_{2x_0}(\overline{\theta}_n)],$$
$$x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J'_{2x_1}(\overline{\theta}_n)], \quad d_{n+1} = P_{\overline{\Gamma}}[d_n - \alpha_n J'_{2d}(\overline{\theta}_n)],$$
$$\gamma_{n+1} = P_{\overline{\Omega}}[\gamma_n - \alpha_n J'_{2\gamma}(\overline{\theta}_n)], \quad 0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l+2\varepsilon}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (85)$$

$\varepsilon > 0, \quad l = \mathrm{const} > 0$, где $\overline{V}_1 = \{\overline{v}_1(\cdot) \in L_2(I, R^1)|\ \|\overline{v}_1\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{V}_2 = \{\overline{v}_2(\cdot) \in L_2(I, R^r)|\ \|\overline{v}_2\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{V}_3 = \{\overline{v}_3(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})|\ \|\overline{v}_3\| \leq \overline{\beta}\}$, $U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)|\ \|u\| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{\Gamma} = \{d \in R^{m_1}|\ d \geq 0,\ |d| \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{\Omega} = \{\gamma \in R^1|\ \gamma_* \leq \gamma \leq \overline{\beta}\}$, $\overline{X}_2 = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \times U \times V \times S_0 \times S_1 \times \overline{\Gamma} \times \overline{\Omega} \subset H_1$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы 8, $\overline{X}_1$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательность $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ определяется по формуле* (85). *Тогда*
1. числовая последовательность $\{J_2(\overline{\theta}_n)\}$ строго убывает, $\|\overline{\theta}_n - \overline{\theta}_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если, кроме того, $F_2(\overline{q}, t)$ выпуклая функция по переменной $\overline{q}$, то:
2. достигается нижняя грань функционала (84) *при условиях* (81) – (83)

$$J_2(\overline{\theta}_*) = \inf_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta}) = \min_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta}) = J_{2*};$$

3. последовательность $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ является минимизирующей:
$\lim\limits_{n\to\infty} J_2(\overline{\theta}_n) = J_{2*} = \inf\limits_{\overline{\theta} \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta})$;
4. последовательность $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_1$ слабо сходится к точке $\overline{\theta}_* = (\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*, \overline{v}_3^*, \overline{u}_*, p_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*, \overline{d}_*, \overline{\gamma}_*) \in \overline{X}_{1*}$ при $n \to \infty$, $\overline{X}_{2*} = \{\overline{\theta}_*|\ J_2(\overline{\theta}_*) = J_{2*} = \inf\limits_{\theta \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta}) = \min\limits_{\theta \in \overline{X}_2} J_2(\overline{\theta})\}$;
5. если $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$, то оптимальным управлением для задачи (1) – (7) *являются $\overline{u}_* \in U$, $\overline{x}_0^* \in S_0$, $\overline{x}_1^* \in S_1$, а оптимальной траекторией —*

$$\overline{x}_*(t) = P_1 \zeta_*(t) = P_1[\overline{z}(t, \overline{v}_*) + \overline{\Lambda}_2(t, \mu_0^*, \mu_1^*) + K_2(t)\overline{z}(t_1, \overline{v}_*)], t \in I,$$

где $\overline{v}_* = (\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*, \overline{v}_3^*), \mu_0^* = (O_{1,1}, \overline{x}_0^*, O_{m_2,1}), \mu_1^* = (\gamma_*, \overline{x}_1^*, \overline{c}_*), \overline{c}_* \in Q = \{\overline{c}_* \in R^{m_2}|\ \overline{c}_{j*} = c_j - \overline{d}_j^*, \overline{d}_j^* \geq 0,\ j = \overline{1, m_1};\ \overline{c}_{j*} = c_j,\ j = \overline{m_1 + 1, m_2}\}$, выполнено включение $\overline{x}_*(t) \in G(t)$ и ограничения (5) – (7), $J(\overline{u}_*, \overline{x}_0^*, \overline{x}_1^*) = \overline{\gamma}_*$;
6. справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J_2(\overline{\theta}_n) - J_{2*} \leq \overline{c}_0/n, n = 1, 2, \ldots, \overline{c}_0 = const > 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

Более наглядным методом решения задачи (1) – (7) является метод сужения области допустимых управлений.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 8,* $\overline{X}_3 = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \times \overline{V}_3 \times U \times V \times S_0 \times S_1 \times \overline{\Gamma}$ *— ограниченное выпуклое замкнутое множество, последовательность* $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_2$ *определяется по формуле* (85) *за исключением последовательности* $\{\gamma_n\} \subset \overline{\Omega}$. *Тогда*

1. числовая последовательность $\{J_2(\overline{\theta}_n)\}$, $\{\overline{\theta}_n\} \subset X_3$ *строго убывает;*

2. $\|\overline{\theta}_n - \overline{\theta}_{n+1}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$;

Если, кроме того, функция $F_2(\overline{q}, t)$ *выпуклая функция по переменной* $\overline{q}$ *при фиксированном* γ, *то*

3. последовательность $\{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$ *при фиксированном* $\gamma = \gamma_*$ *является минимизирующей;*

4. $\overline{\theta}_n \xrightarrow{сл} \overline{\theta}_* \in \overline{X}_3$ *при* $n \to \infty, \gamma = \gamma_*$;

5. $J_2(\overline{\theta}_*) = \inf\limits_{\overline{\theta}_n \in \overline{X}_3} J_2(\overline{\theta}_n) = \min\limits_{\overline{\theta}_n \in \overline{X}_3} J_2(\overline{\theta}_n)$;

6. справедлива оценка $0 \le J_2(\overline{\theta}_n) - J_2(\overline{\theta}_*) \le c_1/n$, $c_1 = const > 0, n = 1, 2, \ldots, \{\overline{\theta}_n\} \subset \overline{X}_3$.

Доказательство теоремы следует из теоремы 9 при фиксированном $\gamma \in \overline{\Omega}$, $\gamma = \gamma_*$, (см. (57)).

Пусть $\overline{\theta}_* \in \overline{X}_2$ — решение задачи (84), (81) – (83) при $\gamma = \gamma_* \in \overline{\Omega}$. Здесь возможны случаи: 1. $J_2(\overline{\theta}*) > 0$; 2. $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$.

Заметим, что $J_2(\overline{\theta}) \ge 0$, $\overline{\theta} \in \overline{X}_3$.

Если $J_2(\overline{\theta}_*) > 0$, то положим $\gamma = 2\gamma_*$, а если $J_2(\overline{\theta}_*) = 0$, то $\gamma = \gamma_*/2$. По такой схеме путем деления пополам отрезка неопределенности можно найти наименьшее значение функционала (1) при условиях (2) – (7).

Заключение

Основой предлагаемого метода решения краевой задачи оптимального управления является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача заменяется на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Существование решения краевой задачи сведено к построению минимизирующей последовательности и определению значения нижней грани функционала.

Построение допустимого управления связано с нахождением слабо предельной точки минимизирующей последовательности. Построение оптимального решения осуществляется путем последовательного сужения области допустимых управлений, зависящих от значения функционала.

Как следует из леммы 3, краевая задача (2) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $I_1(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (u_*, p_*, v_1^*, v_2^*, x_0^*, x_1^*, d_*) \in X$ — оптимальное управление для задачи (42) – (45).

В общем случае, оптимизационная задача (42) – (45) может иметь бесконечное множество решений $\{\theta_*\}$, для которых $J_1(\{\theta_*\}) = 0$. В зависимости от выбора начального приближения минимизирующие последовательности (54) (см. теорему 5) сходятся к какому-либо элементу множества $\{\theta_*\}$. Пусть $\theta_* \in X$ — некоторое решение задачи, $x_0^* = x(t_0)$, $x_1^* = x(t_1)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S$, $u_* \in U$. При этом $x(t; t_0, x_0^*) \in G(t)$, $g_j(u_*, x_0^*, x_1^*) \le c_j$, $j = \overline{1, m_1}$; $g_j(u_*, x_0^*, x_1^*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

В постановке задачи приведены требования, налагаемые на функцию $f(x, u, t)$, при выполнении которых начальная задача Коши для уравнения (2) имеет единственное решение при любом фиксированном $x(t_0) = x_0$ и при любом фиксированном $u(t) \in U$. Следовательно, дифференциальное уравнение (2) с начальным состоянием $x(t_0) = x_0^*$ и фиксированным управлением $u_*(t) \in U$ имеет единственное решение при $t \in [t_0, t_1]$. Более того, $x(t_1) = x_1^*$, $x(t; t_0, x_0^*) \in G(t)$, $g_j(u_*, x_0^*, x_1^*) \le c_j$, $j = \overline{1, m_1}$; $g_j(u_*, x_0^*, x_1^*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Таким образом, для каждого оптимального решения задачи (42) – (45) краевая задача (2) – (7) имеет единственное решение.

Литература

1 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

2 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 600 с.

3 Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.

4 Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. —

401 с.

5 Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды 1 Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Т.2. — 1961. — АН СССР. — С. 521–547.

6 Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 446 с.

7 Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 518 с.

8 Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 480 с.

9 Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М. Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 320 с.

10 Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т.27, № 9. — С. 1475–1486.

11 Айсагалиев С.А., Айсагалиев С.С. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т.29, № 4. — С. 555–567.

12 Айсагалиев С.А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т.32, №6. — С. 1–10.

13 Айсагалиев С.А. Управляемость и оптимальное управление нелинейных систем // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1993. — № 3. — С. 96–102.

14 Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2010. — №1. — С. 30–55.

15 Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т.53, №1. — С. 20–37.

16 Айсагалиев С.А. К теории управляемости линейных систем. АА СССР, Автоматика и телемеханика. — 1991. — №5. — С. 35–44.

17 Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т.48, №6. — С. 826–838.

18 Айсагалиев С.А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. — 2005. — Т.5, №4(18). — С. 17–23.

19 Айсагалиев С.А., Севрюгин И. Управляемость и быстродействие процесса. описываемого линейной системой обыкноенных дифференциальных уравнений // Математический журнал. — 2013. — Т.13, №2(48). — С. 5–30.

20 Айсагалиев С.А. Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. — Алматы: Қазақ университеті, 2007. – 328 с.

21 Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное управление динамических систем. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Германия). — 2012. — 288 с.

Статья поступила в редакцию 10.12.13

Айсағалиев С.А. ТИІМДІ ҮДЕРІСТЕРДІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНА

Қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістер үшін тиімді басқарудың шекаралық есептерін шешу әдістері ұсынылады. Фазалық және интегралдық шектеулері бар, сонымен қатар, уақыттың әрбір мезеті үшін басқару мәндері шектелген жалпы жағдай қарастырылған. Келесі үш есеп шешілген: тиімді басқраудың шекаралық есебінің шешімінің бар болуы, мүмкін болатын басқаруларды құру, мүмкін болатын басқарулардың аймағын тарылту арқылы тиімді шешімді құру.

Aisagaliev S.A. TO MATHEMATICAL THEORY OF OPTIMAL PROCESSES

A method for solving boundary value problems of optimal control for processes described by ordinary differential equations is offered. General case with phase and integral constraints and limitations on the control values for each time period is considered. The following three problems were solved: the existence of solutions for boundary value problems of optimal control, the construction of admissible control, construction of the optimal solutions by narrowing the field of admissible controls.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №4 (54). С.46–71*

УДК 517.518

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

О ПОРЯДКАХ M-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье рассмотрены симметричное пространство периодических функций многих переменных и класс Никольского-Бесова в этом пространстве. Доказаны неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов. Найден точный порядок наилучшего M-членного приближения класса Никольского-Бесова по норме пространства Лоренца.
Ключевые слова: *симметричное пространство, класс Никольского-Бесова, M-членное приближение.*

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; \quad 0 \leq x_j \leq 1; \quad j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^m функций называется симметричным,

1. если из того, что $|f(\bar{x})| \leq |g(\bar{x})|$ почти всюду на I^m и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$;

Keywords: *symmetrical space, Nikol'ski - Besov class, M-term approximation*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

2. из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см. [1], с. 123 и [2], с. 14).

Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset I^m$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега множества $e \subset I^m$. Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0,1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1], с.137). Такие функции называются Ф-функциями. Далее, $X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ.

К симметричному пространству $X(\varphi)$ ассоциированное пространство X^1 состоит из всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\|_{X^1} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \le 1}} \int\limits_{I^m} f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x}.$$

Известно, что сепарабельность симметричного пространства $X(\varphi)$ является необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства X^1 со всем сопряженным пространством $X'(\bar{\varphi})$ (см. [1], стр. 138) и при этом $\bar{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0,1]$ и $\bar{\varphi}(0) = 0$.

Далее будем рассматривать сепарабельные симметричные пространства 2π-периодических функций.

Примеры сепарабельных симметричных пространств.

1. $L_q(\mathbb{T}^m) = L_q$ — пространство Лебега с нормой ([3], С. 11–12)

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{I^m} |f(2\pi\bar{x})|^q d\bar{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < +\infty.$$

Здесь и дальнейшем $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

В случае $q = +\infty$ пространство $L_\infty(I^m) = L_\infty$ состоит из всех измеримых функций f для которых величина

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{\bar{x} \in I^m} |f(2\pi\bar{x})|$$

конечна.

2. Пространство Лоренца $L_{q,\theta}(\mathbb{T}^m)$ с нормой

$$\|f\|_{q,\theta}=\left\{\frac{\theta}{q}\int_0^1\left(\int_0^t f^*(\tau)d\tau\right)^{\theta}t^{\theta(1/q-1)-1}dt\right\}^{1/\theta}<+\infty,$$

$1\leq q<+\infty$, $1<\theta<+\infty$, где $f^*(\tau)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x}\in I^m$ (см. [1], с. 83).

3. Пусть задана квазивогнутая функция $\varphi(t)$ и $\varphi(0)=0$. Пространство Марцинкевича $L_{\varphi,\infty}(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. [1], с. 134)

$$\|f\|_{\varphi,\infty}=\sup_{t\in(0,1]}\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t f^*(\tau)d\tau.$$

Для данной функции $\psi(t)$, $t\in[0,1]$, положим

$$\alpha_\psi=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)},\qquad \beta_\psi=\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}.$$

Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1\leq\alpha_\varphi\leq\beta_\varphi\leq 2$.

Через $C(q,p,r,\ldots)$ будем обозначать положительные величины, зависящие от указанных параметров. Запись $A\asymp B$ означает, что существуют положительные постоянные c_1,c_2 такие, что $c_1A\leq B\leq c_2A$.

Функция $f\in L_1(\mathbb{T}^m)=L(\mathbb{T}^m)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(2\pi\bar{x})\sim\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle},\ \ \bar{x}\in I^m,$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, и $\mathbb{Z}^m$ — пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_s(f,\overline{x})=\sum_{\bar{k}\in\rho(s)}a_{\bar{k}}(f)e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^m y_jx_j$, $s=1,2,\ldots,$

$$\rho(s)=\left\{\bar{k}=(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m:\quad 2^{s-1}\leq|k_j|<2^s,\ \ j=1,\ldots,m\right\}.$$

Пусть $f \in X(\varphi)$ и $\left\{\bar{k}^{(j)}\right\}_{j=1}^{M}$ — система векторов $\bar{k}^{(j)} = (k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)})$ с целочисленными координатами. Наилучшим тригонометрическим M-членным приближением функции $f \in X(\varphi)$ называется величина

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^{(j)}, b_j} \Big\| f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, 2\pi\bar{x}\rangle} \Big\|_X,$$

где b_j — произвольные числа. Для заданного класса $F \subset X(\varphi)$ положим $e_M(F)_X = \sup\limits_{f \in F} e_M(f)_X$.

Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство и $1 < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r > 0$. Рассматриваются классы Никольского, Бесова ([3], [4])

$$B_{X,\theta}^r = \Big\{ f \in X(\varphi) : \Big(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \Big\| \delta_s(f) \Big\|_X^\theta \Big)^{1/\theta} \le 1 \Big\},$$

$$H_X^r = \Big\{ f \in X(\varphi) : \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|\delta_s(f)\|_X \le 1 \Big\}.$$

Классы Никольского-Бесова для непериодических функций в симметричном пространстве определены М.Л. Гольдманом [5].

Впервые наилучшее M-членное приближение определил С.Б. Стечкин [6]. Оценки M-членных приближений различных функциональных классов установили Р.С. Исмагилов, Э.С. Белинский , Е.В. Майоров, Б.С. Кашин, R. DeVore, В.Н. Темляков, А.С. Романюк, Динь Зунг, Д.Б. Базарханов, L. Duan, W.Sickel and M. Hansen, С.А. Стасюк, Н.Консевич , А.Ф. Конограй, О.С. Федоренко и другие (см. библиографии в [7], [8], [9]). В случае пространства Лебега L_p R.A. De Vore и В.Н. Темляков [7] доказали следующую теорему.

Теорема А. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *и* $r(p,q) = m\,(1/p - 1/q)_+$ *если* $1 \le p \le q \le 2$ *или* $1 \le q \le p < \infty$ *и* $r(p,q) = \max\{m/p, m/2\}$ *в других случаях. Тогда для* $r > r(p,q)$ *справедливо соотношение*

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r/m + (1/p - \max\{1/q, 1/2\})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

А в случае $m(1/p-1/q)<r<m/p,\quad 1<p\leq 2<q<\infty$ С.А. Стасюк [8] установил $e_M(B_{p,\theta})_q \asymp M^{-(\frac{r}{m}-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}$. Случай $r=m/p$ рассмотрен в [10].

Основная цель статьи — найти порядок величины $e_M\left(F\right)_Y$ для класса $F=B^r_{X,\theta}$.

1 Вспомогательные утверждения

Пусть

$$T_{\bar n}(\bar x)=\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\dots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{k_1,\dots,k_m}e^{i\langle \bar k,2\pi\bar x\rangle}=\sum_{|\bar k|\leq \bar n} a_{\bar k}e^{i\langle \bar k,2\pi\bar x\rangle},\ \ \bar x\in I^m,$$

— полином по кратной тригонометрической системе порядка $n_j\in\mathbb{N}$ по переменной $x_j,\ j=1,\dots,m$. Здесь неравенство $|\bar k|\leq\bar n$ понимается в том смысле, что $|k_j|\leq n_j$ для всех $j=1,\dots,m$.

Для любого тригонометрического полинома $T_{\bar n}$ известно следующее неравенство Бернштейна (см. [3], с. 98):

$$\left\|\frac{\partial T_{\bar n}}{\partial x_j}\right\|_\infty\leq n_j\|T_{\bar n}\|_\infty,\quad j=1,\dots,m. \tag{1}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями.

Пусть Ω_M — множество, содержащее не более чем M векторов $\bar k=(k_1,\dots,k_m)$ с целочисленными координатами, а $P(\Omega_M,\bar x)$ — произвольный тригонометрический полином, состоящий из гармоник с "номерами" из Ω_M.

Лемма 1. (*см.* [11]). *Пусть* $2<q<+\infty$. *Тогда для всякого тригонометрического полинома* $P(\Omega_N)$ *и для любого натурального числа* $M<N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_M)$, *для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Omega_N)-P(\Omega_M)\|_q\leq C_1(NM^{-1})^{1/2}\|P(\Omega_N)\|_2,$$

причем $\Omega_M\subset\Omega_N$.

Лемма 2. *(см.[12], лемма 4). Пусть даны Ф-функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$, $x \in (0,1]$, и $\beta_{\phi_1} < \alpha_{\phi_2}$. Тогда для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

существует Ф-функция $\theta_1(x)$, для которой $\alpha_{\theta_1} > 1$ и $\theta_1(x) \asymp \theta(x)$, $x \in [0,1]$.

Лемма 3. *([13], с. 184). Пусть функция $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in I^m$ имеет частные производные f'_{x_j}, $j = 1, \ldots, m$. Тогда в точке $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m$ справедливо равенство*

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} f'_{x_j}(\bar{x}_0 + \theta(\bar{x} - \bar{x}_0))(x_j - x_j^0),$$

где $\theta \in (0,1)$.

Лемма 4. *([14]). Пусть $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ и $a \in (0, \pi)$. Тогда*

$$\mu\{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m : \sum_{j=1}^{m} n_j |x_j| \leq a\} = \frac{(2a)^m}{m! \prod_{j=1}^{m} n_j}.$$

Теперь докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство $1 < \alpha_\varphi, \beta_\varphi \leq 2$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\bar{n}}$ имеет место неравенство*

$$\|T_{\bar{n}}\|_\infty \leq C(\varphi) \frac{1}{\varphi(\prod_{j=1}^{m} n_j^{-1})} \|T_{\bar{n}}\|_X.$$

Доказательство. Существует точка $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in I^m$ такая, что $\|T_{\bar{n}}\|_\infty = |T_{\bar{n}}(\bar{x}_0)|$. В силу периодичности $T_{\bar{n}}(\bar{x})$ можно считать, что $\bar{x}_0 = (0, \ldots, 0)$. Рассмотрим множество

$$\Delta = \left\{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m : \sum_{j=1}^{m} n_j |x_j| \leq 1/2\right\}.$$

Тогда согласно лемме 4 $\mu\Delta = \frac{1}{m!\prod_{j=1}^{m} n_j}$. В силу леммы 3 и неравенства Бернштейна (1) имеем

$$|T_{\bar{n}}(\bar{x}) - T_{\bar{n}}(\bar{0})| \leq \sum_{j=1}^{m} n_j |x_j| \|T_{\bar{n}}\|_\infty.$$

Если $\bar{x} \in \Delta$, то отсюда по свойству модуля следует, что

$$|T_{\bar{n}}(\bar{0})| - 1/2\|T_{\bar{n}}\|_\infty \leq |T_{\bar{n}}(\bar{0})| - \|T_{\bar{n}}\|_\infty \sum_{j=1}^{m} n_j |x_j| \leq |T_{\bar{n}}(\bar{x})|.$$

Так как $\|T_{\bar{n}}\|_\infty = |T_{\bar{n}}(\bar{0})|$, то

$$1/2\|T_{\bar{n}}\|_\infty \leq |T_{\bar{n}}(\bar{x})|, \quad \forall \bar{x} \in \Delta.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и к интегралу применяя неравенство Гельдера в симметричном пространстве, получим

$$\|T_{\bar{n}}\|_\infty \leq \frac{2}{\mu\Delta} \int_\Delta |T_{\bar{n}}(\bar{x})| d\bar{x} \leq \frac{2}{\varphi(\mu\Delta)} \|T_{\bar{n}}\|_X.$$

Далее, пользуясь леммой 4 и свойством фундаментальной функции, нетрудно убедиться в справедливости утверждения леммы. □

Лемма 6. *Пусть $X(\varphi), Y(\psi)$ — симмтеричные пространства и $1 < \alpha_\psi \leq \beta_\psi < \alpha_\varphi$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\bar{n}}$ выполняется неравенство*

$$\|T_{\bar{n}}\|_Y \leq C \frac{\psi(\prod_{j=1}^{m} n_j^{-1})}{\varphi(\prod_{j=1}^{m} n_j^{-1})} \|T_{\bar{n}}\|_X.$$

Доказательство. По определению симметричного пространства и свойству нормы имеем

$$\|T_{\bar{n}}\|_Y = \|T_{\bar{n}}^*\|_Y \leq \|T_{\bar{n}}^* \chi_{A_{\bar{n}}}\|_Y + \|T_{\bar{n}}^* \chi_{B_{\bar{n}}}\|_Y = J_1 + J_2, \tag{2}$$

где $A_{\bar{n}} = (0, \prod_{j=1}^{m} n_j^{-1})$, $\quad B_{\bar{n}} = [0,1] \setminus A_{\bar{n}}$. Пользуясь свойством невозрастающей перестановки и известной формулой (см. [1], с. 89)

$$\int_0^t f^*(t)dt = \sup_{\substack{A \subset I^m \\ \mu A = t}} \int_A |f(\bar{x})| d\bar{x},$$

получим

$$T_{\bar{n}}^*(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t T_{\bar{n}}^*(u)du = \frac{1}{t}\sup_{\substack{A\subset I^m\\ \mu A=t}}\int_A |T_{\bar{n}}(\bar{x})|d\bar{x} \le \|T_{\bar{n}}\|_\infty, \quad t\in(0,1].$$

Поэтому на основании леммы 5 имеем

$$T_{\bar{n}}^*(t) \le C(m)\frac{1}{\varphi(\frac{1}{m!\prod_{j=1}^m n_j})}\|T_{\bar{n}}\|_X, \quad t\in A_{\bar{n}}.$$

В силу этого неравенства будем иметь

$$J_1 \le \|T_{\bar{n}}\|_\infty \|\chi_{A_{\bar{n}}}\|_Y \le C\frac{\psi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}\|T_{\bar{n}}\|_X. \tag{3}$$

Для оценки J_2 по свойству фундаментальной функции получим

$$J_2 \le \|\frac{1}{\varphi(t)}\chi_{B_{\bar{n}}}\|_Y \sup_{t\in(0,1]}\varphi(t)T_{\bar{n}}^*(t) \le \frac{1}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}\|T_{\bar{n}}\|_{L_{\varphi,\infty}}\|\chi_{B_{\bar{n}}}\|_Y \le$$

$$\le \|\chi_{I^m}\|_Y\frac{1}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}\|T_{\bar{n}}\|_{L_{\varphi,\infty}}.$$

Так как $X(\varphi)\subset L_{\bar{\varphi},\infty}$, где $\bar{\varphi}(t)=\frac{t}{\varphi(t)}$, то

$$J_2 \le \frac{\|\chi_{I^m}\|_Y}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}\|T_{\bar{n}}\|_X. \tag{4}$$

Из неравенств (2)–(4) следует, что

$$\|T_{\bar{n}}\|_Y \le C\frac{\psi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}\|T_{\bar{n}}\|_X. \qquad \square$$

Замечание 1. *Для целых функций экспоненциального типа лемма 6 доказана в* [15]. *В одномерном случае лемма 5 доказана В.А. Родиным* [16], *а для полиномов по более общим ортонормированным системам — А.А. Комиссаровым* [17].

2 Оценки M-членных приближений класса Никольского-Бесова в симметричном пространстве

В этом разделе докажем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $L_{q,\tau}$ — пространство Лоренца и $0 < 1/q < 1/2 \le \log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.*

1. Если $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$, то

$$e_M \left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp \frac{M^{-q/2(r/m+1/q)}}{\varphi(M^{-q/2})}.$$

2. Если $r/m > \log_2 \beta_\varphi$, то

$$e_M \left(B_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Доказательство. Сначала оценки сверху докажем для класса H^r_X. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n такое, что $2^{nm} < M \le 2^{(n+1)m}$. Для функции $f \in H^r_X$ приближающий полином $P(\Omega_M, \bar{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{s=0}^{n-1} \delta_s(f, \bar{x}) + \sum_{n \le s < \alpha n} P(\Omega_{N_s}, \bar{x}), \tag{5}$$

где полиномы $P(\Omega_{N_s}, \bar{x})$ будут построены для каждого $\delta_s(f, \bar{x})$ согласно лемме 1, число $\alpha > 1$ будет выбрано в процессе построения. Тогда

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau} \le C \Big\| \sum_{n \le s < \alpha n} \big(\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})\big) \Big\|_{q,\tau} +$$

$$+ \Big\| \sum_{\alpha n \le s < +\infty} \delta_s(f) \Big\|_{q,\tau} = J_1(n) + J_2(n). \tag{6}$$

Пусть $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$. Положим

$$N_s = \left[2^{nm} \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})} \varphi(2^{-nm\alpha}) 2^{nr\alpha} \right] + 1,$$

где $[y]$ — целая часть числа y.

Теперь покажем, что полиномы (5) имеют не более M гармоник (в смысле порядка). По определению числа N_s имеем

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sharp\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) : 2^{s-1} \leq |k_j| < 2^s, j = 1, \ldots, m\} +$$

$$+ \sum_{n \leq s < \alpha n} N_s \leq C 2^{nm} + (\alpha - 1)n \leq C 2^{nm} \asymp M,$$

где $\sharp A$ означает количество элементов множества A.

По условию теоремы $\log_2 \beta_\varphi < 1/q + r/m$. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое,что $\log_2 \beta_\varphi < 1/q + r/m - \varepsilon < 1/q + r/m$. Следовательно, по лемме 2 для функции

$$g(t) = \frac{t^{1/q + r/m - \varepsilon}}{\varphi(t)},\ t \in (0, 1], \quad g(0) = 0$$

существует Φ — функция g_1 такая, что $g_1(t) \asymp g(t)$ и $\alpha_{g_1} > 1$. Поэтому

$$\sum_{\alpha n \leq s < +\infty} \frac{2^{-sm(r/m + 1/q)}}{\varphi(2^{-sm})} \leq C \sum_{\alpha n \leq s < +\infty} g_1(2^{-sm}) 2^{-sm\varepsilon} \leq$$

$$\leq C g_1(2^{-nm\alpha}) \sum_{\alpha n \leq s < +\infty} 2^{-sm\varepsilon} \leq C g_1(2^{-nm\alpha}) 2^{-nm\alpha\varepsilon} \leq C \frac{2^{-nm\alpha(r/m + 1/q)}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$. Отсюда следует, что

$$J_2(n) = \Big\| \sum_{\alpha n \leq s < +\infty} \delta_s(f) \Big\|_{q,\tau} \leq C \frac{2^{-nm\alpha(r/m + 1/q)}}{\varphi(2^{-nm\alpha})} \tag{7}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$.

Оценим $J_1(n)$. По свойству нормы и на основании лемм 1 и 6 имеем

$$J_1(n) = \Big\| \sum_{n \leq s < \alpha n} (\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})) \Big\|_{q,\tau} \leq C \sum_{n \leq s < \alpha n} \Big\| \delta_s(f) - P(\Omega_{N_s}) \Big\|_{q,\tau} \leq$$

$$\leq C\sum_{n\leq s<\alpha n}(N_s^{-1}2^{sm})^{1/2}\Big\|\delta_s(f)\Big\|_2\leq C\sum_{n\leq s<\alpha n}N_s^{-1/2}\frac{1}{\varphi(2^{-sm})}\Big\|\delta_s(f)\Big\|_X.$$

Учитывая, что $f\in H^r_X$, и в силу определения числа N_s получим

$$J_1(n)\leq C\sum_{n\leq s<\alpha n}N_s^{-1/2}\frac{1}{\varphi(2^{-sm})}2^{-sr}\leq$$

$$\leq C2^{-\frac{nm}{2}}\Big(\frac{2^{-nr\alpha}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}\Big)^{1/2}\sum_{n\leq s<\alpha n}\Big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{1/2}. \qquad (8)$$

Так как $r/m<\log_2\alpha_\varphi$, то существует число $\varepsilon>0$ такое, что $r/m<r/m+\varepsilon<\log_2\alpha_\varphi$. Рассмотрим функцию

$$\omega(t)=\frac{\varphi(t)}{t^{\frac{r}{m}+\varepsilon}},\quad t\in(0,1],\quad \omega(0)=0.$$

Тогда по лемме 2 существует $\Phi-$ функция ω_1 такая, что $\omega_1\asymp\omega$ и $\alpha_{\omega_1}>1$. Так как $\omega_1\uparrow$, то

$$\frac{1}{\omega_1(2^{-sm})}\leq\frac{1}{\omega_1(2^{-nm\alpha})}$$

для $s\leq n\alpha$. Следовательно,

$$\sum_{n\leq s<\alpha n}\Big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{1/2}\leq C\sum_{n\leq s<\alpha n}\Big(\frac{1}{\omega_1(2^{-sm})}\Big)^{1/2}2^{sm\frac{\varepsilon}{2}}\leq$$

$$\leq C\Big(\frac{1}{\omega_1(2^{-nm\alpha})}\Big)^{1/2}\sum_{n\leq s<\alpha n}2^{sm\frac{\varepsilon}{2}}\leq C\Big(\frac{2^{-nr\alpha}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}\Big)^{1/2}.$$

Поэтому из неравенства (8) получим

$$J_1(n)\leq C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr\alpha}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}$$

в случае $r/m<\log_2\alpha_\varphi$. Положим $\alpha=q/2$. Тогда

$$J_1(n)\leq C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr\frac{q}{2}}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}$$

в случае $r/m < \log_2 \alpha_\varphi$ и из (7) следует, что

$$J_2(n) \le C \frac{2^{-nm\frac{q}{2}(r/m+1/q)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$. В силу этих оценок из неравенства (6) следует, что

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau} \le C \frac{2^{-nm\frac{q}{2}(r/m+1/q)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}$$

для любой функции $f \in H_X^r$ в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$.

Теперь, учитывая, что $2^{nm} \le M < 2^{(n+1)m}$, и принимая во внимание свойство фундаментальной функции, получим

$$e_M(f)_{q,\tau} \le C \frac{M^{-q/2(r/m+1/q)}}{\varphi(M^{-q/2})}$$

для любой функции $f \in H_X^r$ в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$.

Так как $B_{X,\theta}^r \subset H_X^r$, то

$$e_M(B_{X,\theta}^r)_{q,\tau} \le C \frac{M^{-q/2(r/m+1/q)}}{\varphi(M^{-\frac{q}{2}})}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$. Оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу в случае $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m < \log_2 \alpha_\varphi$.

Будем пользоваться следующей известной формулой (см. [18], с. 25):

$$e_M(f)_{q,\tau} = \inf_{\Omega_M} \sup_{P \in L^\perp, \|P\|_{q',\tau'} \le 1} \left| \int_{I^m} f(\bar{x}) P(\bar{x}) d\bar{x} \right|, \tag{9}$$

где $1 < q, \tau < \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $\tau' = \frac{\tau}{\tau-1}$.

Рассмотрим функцию

$$F_{\bar{q},n}(\bar{x}) = \sum_{\max\limits_{j=1,\dots,m} |k_j| \le 2^{[n\frac{q}{2}]}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}.$$

Пусть Ω_M — набор M векторов с целыми координатами. Положим

$$g(\bar{x}) = F_{\bar{q},n}(\bar{x}) - \sum_{\bar{k} \in \Omega_M}^{*} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle},$$

где сумма $\sum\limits_{\bar{k}\in\Omega_M}^{*}$ содержит только те слагаемые функции $F_{\bar{q},n}(\bar{x})$, которые имеют номера из Ω_M.

Существует положительное число p_0 такое, что $0 < \log_2 \beta_\varphi < 1/p_0 < 1$. Поэтому на основании леммы 6 и оценки нормы ядра Дирихле в пространстве Лебега (см. [3]) получим

$$\Big\| \sum_{\max\limits_{j=1,\ldots,m} |k_j|\leq 2^l} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}\Big\|_X \leq C2^{\frac{lm}{p_0}}\varphi(2^{-lm})\Big\| \sum_{\max\limits_{j=1,\ldots,m} |k_j|\leq 2^l} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}\Big\|_{p_0} \leq$$

$$\leq C2^{\frac{lm}{p_0}}\varphi(2^{-lm})2^{lm(1-1/p_0)} = C2^{lm}\varphi(2^{-lm}). \tag{10}$$

В силу этого неравенства и равенства Парсеваля для $1 < q^{'} < 2$ получим

$$\|g\|_{q^{'},\tau^{'}} \leq \|F_{q,n}\|_{q^{'},\tau^{'}} + \| \sum_{\bar{k}\in\Omega_M}^{*} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}\|_2 \leq C(2^{\frac{nm}{2}} + M^{1/2}) \leq C2^{\frac{nm}{2}}. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию $P_1(\bar{x}) = C_2 2^{-\frac{nm}{2}} g(\bar{x})$. Из неравенства (11) следует, что функция P_1 с некоторой постоянной $C_2 > 0$ удовлетворяет формуле (9).

Теперь рассмотрим функцию

$$f_n(\bar{x}) = C_3 \frac{2^{-n\frac{q}{2}(r+m)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})} F_{\bar{q},n}(\bar{x}).$$

В силу неравенства (10) получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{sr}\|\delta_s(f_n)\|_X \leq C\frac{2^{-n\frac{q}{2}(r+m)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})} \sum_{s=0}^{[n\frac{q}{2}]} 2^{sr}\|\delta_s(F_{\bar{q},n})\|_X \leq$$

$$\leq C\frac{2^{-n\frac{q}{2}(r+m)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})} \sum_{s=0}^{[n\frac{q}{2}]} 2^{sr}2^{sm}\varphi(2^{-sm}).$$

Так как $\frac{\varphi(t)}{t} \downarrow$ и $s \leq \frac{nq}{2}$, то $\frac{\varphi(2^{-sm})}{2^{-sm}} \leq \frac{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}{2^{-nm\frac{q}{2}}}$. Поэтому

$$\sum_{s=1}^{[n\frac{q}{2}]} 2^{sr}2^{sm}\varphi(2^{-sm}) \leq C\frac{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}{2^{-nm\frac{q}{2}}} 2^{-nr\frac{q}{2}}.$$

Используя это неравенство, найдем

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{sr} \left\|\delta_s(f_n)\right\|_X \le C_0.$$

Следовательно, $C_3^{-1} f_n \in B^r_{X,1}$. Для функций f_n и P_1 по формуле (9) будем иметь

$$e_M(f_n)_{q,\tau} \ge \inf_{\Omega_M} \Big| \int_{I^m} f_n(\bar{x}) P_1(\bar{x}) d\bar{x} \Big| \ge$$

$$\ge C \frac{2^{-n\frac{q}{2}(r+m)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})} 2^{-\frac{nm}{2}} (\|F_{\bar{q},n}\|_2^2 - M) \ge C \frac{2^{-nm\frac{q}{2}(r/m+1/q)}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}. \qquad (12)$$

Учитывая свойство фундаментальной функции и неравенство $2^{nm} \le M < 2^{(n+1)m}$, из (12) получим

$$e_M(B^r_{X,1})_{q,\tau} \ge C \frac{M^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(M^{-q/2})}.$$

Теперь, учитывая включение $B^r_{X,1} \subset B^r_{X,\theta}$, будем иметь

$$e_M(B^r_{X,\theta})_{q,\tau} \ge C \frac{M^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(M^{-q/2})}.$$

Этим первое утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $r/m > \log_2 \beta_\varphi$. Положим

$$N_s = \left[2^{n(r+m)} \varphi(2^{-nm}) \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})} \right] + 1.$$

Тогда

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sharp\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) : 2^{s-1} \le |k_j| < 2^s, j = 1, \ldots, m\} + \sum_{n \le s < \alpha n} N_s \le$$

$$\le C 2^{nm} + (\alpha - 1)n + 2^{n(r+m)} \varphi(2^{-nm}) \sum_{n \le s < \alpha n} \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}. \qquad (15)$$

По условию теоремы $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое,что $\log_2 \beta_\varphi < \frac{r}{m} - \varepsilon < r/m$. Следовательно, по лемме 2 для функции

$$g_2(t) = \frac{t^{\frac{r}{m}-\varepsilon}}{\varphi(t)},\ t \in (0, (2\pi)^m], \quad g_2(0) = 0,$$

существует Ф-функция g_3 такая, что $g_3(t) \asymp g_2(t)$ и $\alpha_{g_3} > 1$. Поэтому учитывая, что $g_3 \uparrow$, получим

$$\sum_{n\le s<\alpha n} \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})} \le \sum_{n\le s<\alpha n} g_3(2^{-sm}) 2^{-sm\varepsilon} \le C 2^{-nm\varepsilon} g_3(2^{-nm}) \le C \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sharp\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) : 2^{s-1} \le |k_j| < 2^s, j = 1, \ldots, m\} + \sum_{n\le s<\alpha n} N_s \le$$

$$\le C 2^{nm} + (\alpha - 1)n \le C 2^{nm} \asymp M.$$

Оценим $J_1(n)$. По свойству нормы и в силу лемм 1 и 6 имеем

$$J_1(n) = \Big\| \sum_{n\le s<\alpha n} (\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})) \Big\|_{q,\tau} \le C \sum_{n\le s<\alpha n} \|\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})\|_{q,\tau} \le$$

$$\le C \sum_{n\le s<\alpha n} (N_s^{-1} 2^{sm})^{1/2} \|\delta_s(f)\|_2 \le C \sum_{n\le s<\alpha n} N_s^{-1/2} \frac{1}{\varphi(2^{-sm})} \|\delta_s(f)\|_X .$$

Учитывая, что $f \in H_X^r$, и в силу определения числа N_s, найдем

$$J_1(n) \le C \sum_{n\le s<\alpha n} N_s^{-1/2} \frac{1}{\varphi(2^{-sm})} 2^{-sr} \le$$

$$\le C \big(2^{n(r+m)} \varphi(2^{-nm})\big)^{-1/2} \sum_{n\le s<\alpha n} \big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^{-1/2} \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})} \le$$

$$\le C \big(2^{n(r+m)} \varphi(2^{-nm})\big)^{-1/2} \sum_{n\le s<\alpha n} g_2^{1/2}(2^{-sm}) 2^{-sm\frac{\varepsilon}{2}} \le$$

$$\leq C\big(2^{n(r+m)}\varphi(2^{-nm})\big)^{-1/2} g_3^{1/2}(2^{-nm}) \sum_{n\leq s<\alpha n} 2^{-sm\frac{\varepsilon}{2}} \leq C2^{-nr}\frac{2^{-nm\frac{1}{2}}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Таким образом,

$$J_1(n) \leq C\frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})} \tag{14}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$.

Так как $\alpha > 1$, то $2^{-nm\alpha} < 2^{-nm}$. Поэтому принимая во внимание, что $\frac{t}{\varphi(t)} \uparrow$, будем иметь

$$\frac{1}{\varphi(2^{-nm\alpha})} = \frac{2^{-nm\alpha}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}2^{nm\alpha} \leq \frac{2^{-nm(1-\alpha)}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Следовательно, оценку (7) можно продолжить следующим образом

$$J_2(n) \leq C\frac{2^{-nm(\alpha(r/m+1/q)+1-\alpha)}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Теперь число α выберем так, чтобы выполнялось равенство $\alpha(r/m+1/q)+1-\alpha = r/m+1/2$. Отсюда находим $\alpha = \frac{\frac{r}{m}-\frac{1}{2}}{\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-1}$ и оценку

$$J_2(n) \leq C\frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})} \tag{15}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Учитывая оценки (14), (15), получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau} \leq C\frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})}$$

для любой функции H_X^r в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Следовательно,

$$e_M(H_X^r)_{q,\tau} \leq C\frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})} \leq C\frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Отсюда следует, что

$$e_M(B_{X,\theta}^r)_{q,\tau} \leq C\frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})} \leq C\frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Так как $B^r_{X,1} \subset B^r_{X,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, то оценку снизу достаточно доказать для класса $B^r_{X,1}$.

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = n^{-1} \sum_{s=1}^{n} \frac{2^{-sm}}{\varphi(2^{-sm})} \sum_{\bar{k} \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r/m} \cos 2\pi k_j x_j.$$

где $n \in N$ такое, что $M \asymp 2^{nm}$.

Докажем, что $C_0 f_0 \in B^r_{X,1}$, где C_0 — некоторое положительное число. Выберем некоторое число $p_0 > 1$ такое, что $\log_2 \beta_\varphi < 1/p_0$. Тогда $X(\varphi) \subset L_{p_0}$. Так как

$$\delta_s(f_0, \bar{x}) = n^{-1} \frac{2^{-sm}}{\varphi(2^{-sm})} \sum_{\bar{k} \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r/m} \cos 2\pi k_j x_j$$

— тригонометрический полином, то пользуясь леммой 6 при $Y(\psi) = L_{p_0}$ имеем

$$\|\delta_s(f_0)\|_X \le C 2^{\frac{sm}{p_0}} \varphi(2^{-sm}) \|\delta_s(f_0)\|_{p_0} \le$$

$$\le C 2^{\frac{sm}{p_0}} \varphi(2^{-sm}) n^{-1} \frac{2^{-sm}}{\varphi(2^{-sm})} 2^{-sr} 2^{sm(1-1/p_0)} = C_0 2^{-sr} n^{-1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{sr} \|\delta_s(f_0)\|_X \le C_0 n^{-1} \sum_{s=1}^{n} 2^{sr} 2^{-sr} = C_0.$$

Поэтому функция $C_0^{-1} f_0 \in B^r_{X,1}$. Далее, рассмотрим функции

$$v_0(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\bar{k} \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{m} \cos 2\pi k_j x_j, \quad u_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos 2\pi k_j x_j.$$

Положим $w_0(\bar{x}) = v_0(\bar{x}) - u_0(\bar{x})$. В силу равенства Парсеваля

$$\|u_0\|_2 \le M^{1/2}, \quad \|v_0\|_2 \le C 2^{\frac{(n-1)m}{2}}.$$

Из этих соотношений по свойству нормы получим

$$\|w_0\|_2 \le \|v_0\|_2 + \|u_0\|_2 \le C_0 2^{nm/2}.$$

Значит функция $P_0(\bar{x}) = C_0^{-1} 2^{-nm/2} w_0(\bar{x})$ удовлетворяет условиям формулы (9). Так как $2 < q$, то $e_M(f_0)_2 \le C e_M(f_0)_{q,\tau}$. Согласно формуле (9) имеем

$$e_M\left(f_0\right)_{q,\tau} \ge C e_M\left(f_0\right)_2 \ge C n^{-1} 2^{-\frac{nm}{2}} \sum_{s=1}^{n} \frac{2^{-sm}}{\varphi(2^{-sm})} \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r/m} \ge$$

$$\ge C n^{-1} 2^{-\frac{nm}{2}} \sum_{s=1}^{n} \frac{2^{-sm}}{\varphi(2^{-sm})} 2^{s(m-r)}. \qquad (16)$$

Так как $\log_2 \beta_\varphi < r/m$, то для функции $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)}$ существует $\Phi-$ функция g_3 эквивалентная ей. Поэтому учитывая, что $g_3 \uparrow$, будем иметь

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})} \ge C \sum_{s=1}^{n} g_3(2^{-sm}) \ge C g_3(2^{-nm}) n \ge C \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} n.$$

Следовательно, из (16) получим

$$e_M\left(f_0\right)_{q,\tau} \ge C n^{-1} 2^{-\frac{nm}{2}} \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} n = C \frac{2^{-nm(r/m+1/2)}}{\varphi(2^{-nm})} \ge C \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Таким образом,

$$e_M(B^r_{X,1})_{q,\tau} \ge C \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Значит

$$e_M(B^r_{X,\theta})_{q,\tau} \ge C \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}$$

в случае $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Этим теорема 1 полностью доказана. $\square$

При $\log_2 \beta_\varphi = r/m$ фундаментальная функция φ будет подчиняться дополнительным условиям, поэтому рассмотрим также этот случай.

Теорема 2. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $L_{q,\tau}$ — пространство Лоренца и $0 < 1/q < 1/2 \le \log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.*

Если $r/m = \log_2 \beta_\varphi$, и $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)} \downarrow$, $\frac{\varphi(t)}{t^{r/m}} \log_2^\gamma 1/t \downarrow$, для некоторого $\gamma \in (0, 1/\theta)$ на $(0,1)$, то

$$e_M \left(B_{X,\theta}\right)_{q,\tau} \asymp \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}(\ln M)^{1-1/\theta}.$$

Доказательство. Пусть $f \in B^r_{X,\theta}$. Оценим $J_1(n)$. Положим

$$N_s = \left[2^{nm} n^{\frac{1}{\theta}-1} \|\delta_s(f)\|_X 2^{sr}\right] + 1.$$

Тогда по определению чисел N_s и в силу неравенства Гельдера будем иметь

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sharp\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) : 2^{s-1} \le |k_j| < 2^s, j = 1, \ldots, m\} + \sum_{n \le s < \alpha n} N_s \le$$

$$\le C 2^{nm} + (\alpha - 1)n + 2^{nm} n^{\frac{1}{\theta}-1} \Big(\sum_{n \le s < \alpha n} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|_X^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{n \le s < \alpha n} 1\Big)^{1-\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le (C+1)2^{nm} + (\alpha - 1)n \le C 2^{nm} \le CM.$$

Выберем число β такое, что $2 < q < \beta < +\infty$. Тогда $L_\beta(I^m) \subset L_{q,\tau}(I^m)$ и $\|g\|_{q,\tau} \le \|g\|_\beta$ для $g \in L_\beta(I^m)$. Пользуясь теоремой Литтлвуда-Пэли (см. [3], с.56), а также свойством нормы, будем иметь

$$J_1(n) = \Big\| \sum_{n \le s < \alpha n} (\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})) \Big\|_{q,\tau} \le C \Big\| \sum_{n \le s < \alpha n} (\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})) \Big\|_\beta \le$$

$$\le C \Big\| \Big(\sum_{n \le s < \alpha n} |\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_\beta \le C \Big(\sum_{n \le s < \alpha n} \|\delta_s(f) - P(\Omega_{N_s})\|_\beta^2 \Big)^{1/2}.$$

Далее, согласно лемме 2, лемме 6 и по определению чисел N_s имеем

$$J_1(n) \le C \Big(\sum_{n \le s < \alpha n} N_s^{-1} 2^{sm} \|\delta_s(f)\|_2^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\leq C\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n} N_s^{-1}2^{sm}\big(\frac{2^{-\frac{sm}{2}}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^2\|\delta_s(f)\|_X^2\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq C2^{-\frac{nm}{2}}n^{\frac{1}{2}(1-1/\tau)}\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}\frac{2^{-sr}}{\varphi^2(2^{-sm})}\|\delta_s(f)\|_X\Big)^{1/2}. \qquad (17)$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}\frac{2^{-sr}}{\varphi^2(2^{-sm})}\|\delta_s(f)\|_X\Big)^{1/2}\leq\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}2^{sr\theta}\|\delta_s(f)\|_X^\theta\Big)^{\frac{1}{2\theta}}\times$$

$$\times\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}\big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^{2\theta'}\Big)^{\frac{1}{2\theta'}} \qquad (18)$$

для любой функции $f\in B^r_{X,\theta}$, где $\theta'=\frac{\theta}{\theta-1}$. Из (17) и (18) будем иметь

$$J_1(n)\leq C2^{-\frac{nm}{2}}n^{1/2(1-1/\theta)}\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}\big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^{2\theta'}\Big)^{\frac{1}{2\theta'}}. \qquad (19)$$

Так как $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)}\downarrow$ на $(0,1)$, то

$$\Big(\sum_{n\leq s<\alpha n}\big(\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^{2\theta'}\Big)^{\frac{1}{2\theta'}}\leq(\alpha-1)^{\frac{1}{2\theta'}}n^{\frac{1}{2\theta'}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Следовательно,

$$J_1(n)\leq C\,2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}n^{1/\theta'} \qquad (20)$$

в случае $\log_2\beta_\varphi=r/m$.

Оценим $J_2(n)$, применяя неравенство разных метрик (лемма 6) и неравенство Гельдера,

$$J_2(n)\leq C\sum_{n\alpha\leq s<+\infty}\frac{2^{-sr}}{\varphi(2^{-sm})}\|\delta_s(f)\|_X\leq$$

$$\leq\Big(\sum_{n\alpha\leq s<+\infty}2^{sr\theta}\|\delta_s(f)\|_X^\theta\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{n\alpha\leq s<+\infty}\big(\frac{2^{-sm(r/m+1/q)}}{\varphi(2^{-sm})}\big)^{\theta'}\Big)^{1/\theta'}. \qquad (21)$$

Так как $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)} \downarrow$, то

$$\Big(\sum_{n\alpha\le s<+\infty}\Big(\frac{2^{-sm(r/m+1/q)}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{\theta'}\Big)^{1/\theta'} \le C\frac{2^{-nr\alpha}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}2^{-n\alpha m/q}. \qquad (22)$$

Полагая $\alpha = q/2$, из (21), (22) получим

$$J_2(n) \le C\frac{2^{-nr\frac{q}{2}}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}2^{-n\frac{m}{2}}. \qquad (23)$$

Из оценок (20), (23) следует, что

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{q,\tau} \le C\Big\{\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} + \frac{2^{-nr\frac{q}{2}}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}\Big\}2^{-\frac{nm}{2}}n^{1-1/\theta}$$

в случае $\log_2\beta_\varphi = r/m$ для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$ при условии $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)} \downarrow$. Следовательно,

$$e_M(B^r_{X,\theta})_{q,\tau} \le C\Big\{\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} + \frac{2^{-nr\frac{q}{2}}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})}\Big\}2^{-\frac{nm}{2}}n^{1-1/\theta} \qquad (24)$$

в случае $\log_2\beta_\varphi = r/m$ при условии $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)} \downarrow$.

По условию теоремы функция $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)}$ возрастает относительно функции $\log_2^{-\gamma}\frac{1}{t}$ на $(0,1)$ т.е. $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)}\log_2^{-\gamma}\frac{1}{t} \uparrow$. Тогда, так как $2^{-nm\frac{q}{2}} < 2^{-nm}$, то

$$\frac{2^{-nr\frac{q}{2}}}{\varphi(2^{-nm\frac{q}{2}})} \le \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}\log_2^{-\gamma}\frac{1}{2^{-nm}}\log_2^{\gamma}\frac{1}{2^{-nm\frac{q}{2}}} = (q/2)^{\gamma}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Поэтому, учитывая свойство фундаментальной функции и принимая во внимание , что $2^{nm} \le M < 2^{(n+1)m}$, из (24) получим

$$e_M(B^r_{X,\theta})_{q,\tau} \le C\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}2^{-\frac{nm}{2}}n^{1-1/\theta} \le C\frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}\log_2^{1-1/\theta} M$$

в случае $\log_2\beta_\varphi = r/m$ при условии $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)} \downarrow$ и $\frac{t^{r/m}}{\varphi(t)}\log_2^{-\gamma}\frac{1}{t} \uparrow$ для некоторого $\gamma > 0$. Оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу в случае $r/m = \log_2 \alpha_\varphi$. Для этого рассмотрим функцию

$$g_1(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \cos 2\pi k_j x_j,$$

тогда

$$\delta_s(g_1, \bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \cos 2\pi k_j x_j.$$

Известно, что для функции $d_s(\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod\limits_{j=1}^{m} \cos 2\pi k_j x_j$ справедливо соотношение

$$\|d_s\|_X \asymp 2^{sm}\varphi(2^{-sm}),\ \ 1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < 2.$$

Поэтому по теореме Марцинкевича о мультипликаторах имеем

$$\|\delta_s(g_1)\|_X \leq C2^{-sm}\|d_s\|_X \leq C\varphi(2^{-sm}).$$

Учитывая, что $\frac{\varphi(t)}{t^{r/m}} \log_2^\gamma \frac{1}{t} \downarrow$ на $(0,1)$ для некоторого $\gamma > 0$, нетрудно убедиться, что $f_1(\bar{x}) = C_1^{-1} \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} n^{-1/\theta} g_1(\bar{x}) \in B^r_{X,\theta}$.

Теперь построим функцию P_1, удовлетворяющую формуле (9). Пусть

$$v_1(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{m} \cos 2\pi k_j x_j \tag{25}$$

и Ω_M — произвольный набор из M векторов $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами. Оценим функцию

$$u_1(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos 2\pi k_j x_j,$$

содержащую только те слагаемые из (25), которые имеют “номера” из Ω_M. Положим $w_1(\bar{x}) = v_1(\bar{x}) - u_1(\bar{x})$. Тогда функция $P_1(\bar{x}) = C_2^{-1} 2^{-\frac{nm}{2}} w_1(\bar{x})$ удовлетворяет формуле (9). Подставим функции f_1, P_1 в (9) и, учитывая ортогональность тригонометрической системы, получим

$$e_M\left(f_1\right)_{q,\tau} \geq C \sum_{n_1\leq s<n} \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} 2^{-\frac{nm}{2}} n^{-1/\theta} \frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})} \geq$$

$$\geq \frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}(\ln M)^{1-1/\theta}.$$

Таким образом, для функции $f_1 \in B^r_{X,\theta}$ доказано

$$e_M\left(f_1\right)_{q,\tau} \geq C\frac{M^{-(r/m+1/2)}}{\varphi(M^{-1})}(\ln M)^{1-1/\theta}$$

в случае $r/m = \log_2 \alpha_\varphi$ при условии $\frac{\varphi(t)}{t^{r/m}} \log_2^\gamma 1/t \downarrow$ для некоторого $\gamma \in (0, 1/\theta)$. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $X(\varphi) = L_{\frac{m}{r},p}(I^m)$ *— пространство Лоренца,* $1 < m/r < q < +\infty$. *Тогда*

$$e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{q,\tau} \asymp M^{-1/2}(\ln M)^{1-1/\theta}.$$

Доказательство. Известно, что фундаментальная функция пространства Лоренца $L_{\frac{m}{r},p}(I^m)$ есть $\varphi_{L_{q_1,q_2}}(t) = t^{r/m}$ и $\alpha_\varphi = \beta_\varphi = 2^{r/m}$. Поэтому утверждение следствия 1 следует из теоремы 2. $\square$

Определение 1. (*см.* [19]). *Пусть даны числа* $q_1, q_2 \in (1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Пространством Лоренца-Зигмунда* $L_{q_1,q_2}\left(\log L\right)^\beta\left(I^m\right)$ *называется множество всех измеримых по Лебегу функций* f *для которых*

$$\|f\|_{q_1,q_2,\alpha} = \left\{\int_0^1 \left(f^*(t)\right)^{q_2}\left(1 + |\ln t|\right)^{\alpha q_2} t^{\frac{q_2}{q_1}-1}dt\right\}^{1/q_2} < +\infty.$$

Следствие 2. *Пусть* $X(\varphi) = L_{\frac{m}{r},\tau_1}(\log L)^\beta(I^m)$ *— пространство Лоренца-Зигмунда,* $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < q_2 < +\infty$, $1 < m/r < q < +\infty$. *Если* $r/m - 1/q < r$, *то*

$$e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{q,\tau} \asymp M^{-1/2}(\ln M)^{1-1/\theta-\beta}.$$

Доказательство. Известно (см. [19], с.143), что фундаментальная функция пространства Лоренца-Зигмунда $L_{\frac{m}{r},\tau_1}(\log L)^\beta(I^m)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_{L_{\frac{m}{r},q_2}\left(\log L\right)^\alpha}(t) \asymp (1 + |\ln t|)^\alpha t^{r/m} \quad \text{и} \quad \alpha_\varphi = \beta_\varphi = 2^{r/m}.$$

Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 2. $\square$

Замечание 2. *Одним из примеров симметричного пространства является многопараметрическое пространство Лоренца, определенное Е.Д. Нурсултановым* [20].

Следствие 3. *Пусть* $X(\varphi) = L_{\bar{q}_3}(I^m)$ *— трехпараметрическое пространство Лоренца,* $\bar{q}_3 = (q_1, q_2, q_3)$, $1 < q_3 \le q_2$, $1 < q_1 = m/r < q < +\infty$, *Тогда*

$$e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{q,\tau} \le CM^{-1/2}(\ln M)^{1-\frac{1}{\theta}+(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_3})}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта №0740/ГФ КН МОН РК.

Литература

1 Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

2 Новиков С.Я. Последовательность функций в симметричных пространствах. — Самара — 2008. — 252 с.

3 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

4 Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды математического института АН СССР. — 1961. — Т. 60. — С. 42–81.

5 Гольдман М.Л. О вложении конструктивных и структурных липшицевых пространств в симметричные // Труды математического института АН СССР. — 1986. — Т. 173. — С. 90–112.

6 Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Доклады АН СССР. — 1955. — Т.102, №1. — С. 37–40.

7 De Vore R.A., Temlyakov V.N. Nonlinear approximation by trigonometric sums // Jour. Fourier Analysis and applications. — 1995. — V. 2, № 1. — P. 29–48.

8 Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation for the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of low smoothness // Ukrain. Mathem. Journal. — 2010. — V. 62, № 1. — P. 114–122.

9 Акишев Г. О точности оценок наилучшего M-членного приближения класса Бесова // Сибирские электронные математические известия. — 2010. — Т. 7. — С. 255–274.

10 Акишев Г. Об M-членных приближениях класса Бесова // Тезисы докладов международной конференции, посвященной 70-летию А.И. Степанца "Теория приближения функции и ее применения" 28 мая — 3 июня, 2012, Каменец-Подольский, (Украина). — С. 12

11 Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исслед. по теории функц. многих веществ. переменных. — Ярославль, 1988. — С. 16–33.

12 Лапин С.В. Некоторые теоремы вложения для произведений функций // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 20 февраля , 1980. — №1036-80 Деп. — 31 с.

13 Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа — Т.2. — М.: Высшая школа, 1988. — 576 с.

14 Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

15 Берколайко М.З. Овчинников В.И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Труды математического института АН СССР. — 1983. — Т. 161 — С. 3–17.

16 Родин В.А. Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Труды 7-ой зимней школы. — Дрогобыч — 1974. — М., 1976. — С. 133 – 139.

17 Комиссаров А.А. О некоторых свойствах функциональных систем // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 25 октября 1983 г. — №5827 — 83. — 28 с.

18 Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

19 Sharpley R. Counterexample for classical operator on Lorentz – Zygmund spaces // Studia Math. — 1980. — V. LXVIII. — P. 141–158.

20 Нурсултанов Е.Д. Многопараметрический интерполяционный функтор и пространства Лоренца $L_{p,\bar{q}}$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ //Функ. анал. и его приложения. — 1997. — Т. 31, №2. — С. 79 – 82.

Статья поступила в редакцию 11.05.14

Акишев Г. СИММЕТРИЯЛЫҚ КЕҢІСТІКТЕГІ ФУНКЦИЯЛАР КЛАСЫНЫҢ $M-$ МҮШЕЛІ ЖУЫҚТАУЫНЫҢ РЕТІ ЖАЙЛЫ

Мақалада көпайнымалылы периодты функциялардың симметриялық кеңістігі және осы кеңістікте Никольский-Бесов класы қарастырылған. Тригонометриялық көпмүшелер үшін әртүрлі метрикадағы теңсіздіктер дәлелденген. Никольский-Бесов класын Лоренц кеңістігінің нормасы бойынша ең жақсы M-мүшелі жуықтауының дәл реті табылған.

Akishev G. ON THE ORDERS OF M-TERMS APPROXIMATIONS OF CLASSES OF FUNCTIONS OF THE SYMMETRICAL SPACE

In the paper there is considered symmetrical space of periodic functions of many variables and Nikol'ski-Besov classes in this space. The inequalities of the different metrics for the trigonometrical polynomials are proved. There is obtained the exact order of the best M-term approximation of Nikol'ski-Besov classes in the norm of the Lorentz space.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №4 (54). С.72–83*

УДК 517.984

Б. Н. Бияров

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: splinekz@mail.ru

КОРРЕКТНЫЕ СУЖЕНИЯ И РАСШИРЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОБРАТНЫМИ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИМИ КЛАССАМ ШАТТЕНА

Классические и неклассические корректные граничные задачи, изученные для оператора Лапласа, как правило, обладают обратными операторами, которые принадлежат некоторому классу Шаттена. В данной работе показано, что корректные сужения и расширения для оператора Лапласа могут обладать обратными, которые компактны, но не принадлежат ни одному из классов Шаттена.

Ключевые слова: *корректное расширение, корректное сужение, асимптотика s-чисел, класс Шаттена.*

1 Введение

В гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор L с областью определения $D(L)$, с областью значений $R(L)$. *Ядром оператора* L называют множество

$$\operatorname{Ker} L = \big\{f \in D(L): \ Lf = 0\big\}.$$

Определение 1. *Оператор L называется сужением оператора L_1, а L_1 называется расширением оператора L, если*
1) $D(L) \subset D(L_1)$, 2) $Lf = L_1 f$ для всех f из $D(L)$.
При этом пишут $L \subset L_1$.

Keywords: *correct extension, correct restriction, asymptotics of s-numbers, Schatten class*
2010 Mathematics Subject Classification: 35P05, 58J50

Определение 2. *Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется минимальным, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.*

Определение 3. *Линейный замкнутый оператор $\widehat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется максимальным, если $R(\widehat{L}) = H$ и $Ker\,\widehat{L} \neq \{0\}$.*

Определение 4. *Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется корректным, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1}, определенный на всем H.*

Определение 5. *Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем корректным расширением минимального оператора L_0 (корректным сужением максимального оператора $\widehat{L}$), если $L_0 \subset L$ $(L \subset \widehat{L})$.*

Определение 6. *Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем граничным корректным расширением минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\widehat{L}$, если L является одновременно корректным сужением максимального оператора $\widehat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$.*

В начале 1980-х годов М. Отелбаевым и его учениками были доказаны абстрактные теоремы (см. [1], [2]), которые позволяют описать все корректные расширения некоторого минимального оператора с помощью какого-либо одного известного корректного расширения в терминах обратного оператора. Аналогично описывались всевозможные корректные сужения некоторого максимального оператора. Для удобства приведём заключения этих теорем.

Пусть $\widehat{L}$ — максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, L — какое-либо известное корректное сужение оператора $\widehat{L}$ и K — произвольный линейный ограниченный оператор в H, удовлетворяющий следующему условию:

$$R(K) \subset \operatorname{Ker} \widehat{L}. \tag{1.1}$$

Тогда оператор L_K^{-1}, определяемый формулой

$$L_K^{-1} f = L^{-1} f + K f, \tag{1.2}$$

описывает обратные к всевозможным корректным сужениям L_K максимального оператора $\widehat{L}$, т.е. $L_K \subset \widehat{L}$.

Пусть L_0 — минимальный оператор в гильбертовом пространстве H, L — какое-либо известное корректное расширение минимального оператора L_0, K — линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

a) $R(L_0) \subset \operatorname{Ker} K$, b) $\operatorname{Ker}(L^{-1} + K) = \{0\}$.

Тогда оператор L_K^{-1}, определённый формулой (1.2), описывает обратные к всевозможным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0.

Пусть L — какое-либо известное граничное корректное расширение минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$. Существование хотя бы одного граничного корректного расширения L было доказано М. И. Вишиком [3]. Пусть K — линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

a) $R(L_0) \subset \operatorname{Ker} K$, b) $R(K) \subset \operatorname{Ker} \widehat{L}$.

Тогда оператор L_K^{-1}, определяемый формулой (1.2), описывает обратные к всевозможным граничным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0.

Обозначим через $\mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$ множество всех линейных компактных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1. Если $T \in \mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$, то T^*T является неотрицательным самосопряжённым оператором из $\mathfrak{S}_\infty(H) \equiv \mathfrak{S}_\infty(H, H)$. Более того, существует неотрицательный единственный самосопряжённый корень $|T| = (T^*T)^{1/2}$ из $\mathfrak{S}_\infty(H)$. Собственные числа $\lambda_n(|T|)$, пронумерованные с учётом их кратностей, образуют монотонно сходящуюся к нулю последовательность неотрицательных чисел. Их принято называть *s-числами* оператора T и обозначать через $s_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$. *Классом Шаттена* $\mathfrak{S}_p(H, H_1)$ называется множество всех компактных операторов $T \in \mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$, которые удовлетворяют условию

$$|T|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(T) < \infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Понятно, что если $\operatorname{rank}|T| = r < \infty$, то $s_n(T) = 0$, при $n = r + 1, r + 2, \ldots$. Операторы конечного ранга, конечно, принадлежат классам

$\mathfrak{S}_p(H, H_1)$ при всех $p > 0$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим минимальный L_0 и максимальный $\widehat{L}$ операторы, порожденные оператором Лапласа

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right). \qquad (1.3)$$

Замыкание L_0 в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора Лапласа (1.3) с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ называется *минимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа.*

Оператор $\widehat{L}$, сопряженный к минимальному оператору L_0, соответствующему оператору Лапласа, называется *максимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа* (см. [4]). Заметим, что

$$D(\widehat{L}) = \{u \in L_2(\Omega) : \ \widehat{L}u = -\Delta u \in L_2(\Omega)\}.$$

Обозначим через L_D оператор, соответствующий задаче Дирихле, с областью определения

$$D(L_D) = \{u \in W_2^2(\Omega) : \ u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Тогда в силу (1.2) обратные операторы L^{-1} к всевозможным корректным сужениям максимального оператора $\widehat{L}$, соответствующего оператору Лапласа (1.3), имеют следующий вид

$$u \equiv L^{-1}f = L_D^{-1}f + Kf, \qquad (1.4)$$

где K — произвольный ограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор и, в силу (1.1),

$$R(K) \subset \operatorname{Ker}\widehat{L} = \{u \in L_2(\Omega) : \ -\Delta u = 0\}.$$

Тогда прямой оператор L определяется из следующей задачи:

$$\widehat{L}u \equiv -\Delta u = f, \quad f \in L_2(\Omega), \qquad (1.5)$$

$$D(L) = \{u \in D(\widehat{L}) : \ (I - K\widehat{L})u|_{\partial\Omega} = 0\}, \qquad (1.6)$$

где I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$.

Операторы $(L^*)^{-1}$, соответствующие операторам L^*

$$v \equiv (L^*)^{-1}g = L_D^{-1}g + K^*g, \tag{1.7}$$

описывают обратные к всевозможным корректным расширениям минимального оператора L_0 тогда и только тогда, когда K удовлетворяет (см. [5]) условию

$$\mathrm{Ker}(L_D^{-1} + K^*) = \{0\}.$$

Заметим, что последнее условие эквивалентно следующему: $\overline{D(L)} = L_2(\Omega)$. Если от оператора K из (1.4) требовать дополнительное условие

$$KR(L_0) = \{0\},$$

то оператор L, соответствующий задаче (1.5) и (1.6), окажется граничным корректным оператором.

2 Основной результат

В работе Гехтмана (см. [6]) доказывается существования положительно определенного расширения S оператора Лапласа в единичном круге на плоскости, спектр которого дискретен и асимптотически

$$\lambda_n(S) \sim Cn^{1+\beta}, \quad -1 < \beta < 0, \quad \lambda_n(S) \sim Cn, \quad \beta > 0. \tag{2.1}$$

Из формулы (2.1) следует, что в случае $-1 < \beta < 0$ спектр оператора S является неклассическим. Легко заметить, что обратный оператор S^{-1} принадлежит некоторому классу Шаттена $\mathfrak{S}_p(L_2(D))$ при $p > 1/(1+\beta)$.

Возникает вопрос: существуют ли корректные расширения и сужения, у которых обратный оператор является компактным, но не принадлежит ни одному из классов Шаттена? Данная работа посвящена нахождению ответа на этот вопрос. В связи с этим сформулируем следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть L — известное корректное сужение максимального оператора $\widehat{L}$ в гильбертовом пространстве H. Если L^{-1} принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p(H)$ при некотором p $(0 < p < +\infty)$ и если занумерованные в порядке убывания с учетом кратностей s-числа $s_n(K)$ оператора K из представления* (1.2) *удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(K) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n}(K)/s_n(K) = 1, \tag{2.2}$$

то оператор L_K^{-1}, определенный формулой (1.2)*, компактен но не принадлежит ни одному из классов Шаттена.*

Доказательство. Обозначим через $\theta(n) = 1/s_n(K)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{\theta(n)\}_1^\infty$ — положительная монотонно возрастающая числовая последовательность. Поэтому существует такая монотонно возрастающая непрерывная функция $f(x)$, определенная на $[0, +\infty)$, что $f(n) = \theta(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Функцию $l(x)$ на $[a, +\infty)$, где $a > 0$, называют *медленно меняющейся* (см. [7]), если $l(x)$ — положительная измеримая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \{l(\lambda x)/l(x)\} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующие свойство медленно меняющихся функций $l(x)$, доказанное в работе [7, с. 16]:

если $l(x)$ медленно меняющаяся функция, то

$$x^\alpha l(x) \to \infty, \quad x^{-\alpha} l(x) \to 0, \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad \text{для любого} \quad \alpha > 0. \tag{2.3}$$

Приведем формулировку одного утверждения из монографии Сенета

Лемма. (Сенета [8, с. 41]) *Пусть функция $l(x)$ положительна и монотонна на $[A, \infty)$. Если при некотором фиксированном λ_0, таком, что $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \neq 1$, имеет место*

$$\lim_{x\to\infty} \{l(\lambda_0 x)/l(x)\} = 1,$$

то l — медленно меняющаяся функция.

Тогда из условий (2.2) в силу леммы Сенета следует, что функция $f(x)$ медленно меняющаяся. Используя следствие 2.2 из монографии Гохберга и Крейна [9, с. 49], из (1.2) получим

$$s_{n+m-1}(L_K^{-1}) \leq s_n(L^{-1}) + s_m(K), \quad m, n = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} f(n) s_n(L^{-1}) = 0,$$

в силу (2.3) и

$$\lim_{n\to\infty} f(n) s_n(K) = 1$$

по построению.

Далее, по схеме доказательства теоремы 2.3 (Фань Цюй) из монографии Гохберга и Крейна [9, с. 52] легко получить справедливость свойства

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}(L_K^{-1})/s_n(L_K^{-1}) = 1.$$

Тогда из (2.3) следует утверждение теоремы 1. $\square$

Пример 1. *Берём полную ортонормированную систему векторов* $\{\varphi_i\}_1^\infty$ *из пространства* H. *Пусть* $\{\psi_i\}_1^\infty$ — *ортонормированная система из бесконечномерного подпространства* $Ker\,\widehat{L}$ *пространства* H. *В качестве оператора* K *в представлении* (1.2) *берем (см. [10]) оператор*

$$Kf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(K)(\varphi_n, f)\psi_n,$$

где $s_n(K) = 1/ln(n+2)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда по теореме 1 корректное сужение* L_K *максимального оператора* $\widehat{L}$ *имеет обратный оператор* L_K^{-1}, *который является компактным, но не принадлежит ни одному из классов Шаттена.*

Пример 2. *Приведем один конструктивный подход построения оператора* K, *удовлетворяющего условию теоремы 1. Рассмотрим случай оператора Лапласа. Пусть оператор* K *в представлении* (1.4) *будет компактным и положительным. Тогда корректному сужению* L *соответствует задача* (1.5) *и* (1.6).

Для наглядности построим оператор K в случае, когда $m = 2$, а область Ω совпадает с единичным кругом $\mathbb{D}$ с центром в начале координат на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Гильбертово пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ состоит из аналитических на единичном круге $\mathbb{D}$ функций из $L_2(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2} \equiv \int_{\mathbb{D}} |f|^2 dm < +\infty,$$

где m — нормализованная мера Лебега, т.е.

$$dm = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrdu.$$

Аналитическую функцию φ, отображающую единичный круг $\mathbb{D}$ в себя, называют функцией Шур. Каждая функция Шур φ генерирует в пространстве Бергмана $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ ограниченный (см. [11, с. 12]) композиционный оператор

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi = f(\varphi(z)).$$

Сопряженный оператор C_φ^* имеет следующий вид:

$$C_\varphi^* f(\omega) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)(1 - \overline{\varphi(z)}\omega)^{-2} dm(z).$$

Определим положительный оператор в $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

$$C_\varphi^* C_\varphi f(\omega) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(\varphi(z))(1 - \overline{\varphi(z)}\omega)^{-2} dm(z).$$

Если определим положительную меру μ на $\mathbb{D}$ через

$$\mu(E) = m(\varphi^{-1}(E)), \tag{2.4}$$

то

$$C_\varphi^* C_\varphi f(\omega) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(\xi)(1 - \overline{\xi}\omega)^{-2} d\mu(\xi) = T_\mu f(\omega),$$

где через T_μ обозначен оператор Тёплица.

Всюду в дальнейшем символ $f \approx g$ означает, что существуют константы $0 < c < C < +\infty$ такие, что $cf(t) \leq g(t) \leq Cf(t)$, когда t находится достаточно близко к указанному значению. Тогда по теореме Лукинга (см. [12])

$$|T_\mu|_p^p \approx \sum_i \big[\mu(R_i) l(R_i)^{-2}\big]^p, \quad p > 0, \tag{2.5}$$

где R_i называют Хастинга-Лукинга окнами, а $l(R_i)$ — расстояние от центра этих окон до границы единичного круга $\mathbb{D}$. Другими словами,

$$T_\mu \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{A}^2(\mathbb{D})), \quad p > 0,$$

тогда и только тогда, когда ряд в правой части асимптотического равенства (2.5) сходится. Обозначим через $R_{n,j}$, $n \geq 0$, $0 \leq j \leq 2^n - 1$, окна Хастинга-Лукинга:

$$R_{n,j} = \Big\{z \in \mathbb{D}: \ 1 - 2^{-n} \leq |z| < 1 - 2^{-n-1} \quad \text{и} \quad \frac{2j\pi}{2^n} \leq \arg z < \frac{2(j+1)\pi}{2^n}\Big\}.$$

Когда функция Шур φ является аналитической однолистной функцией, формула (2.5) примет вид

$$|T_\mu|_p^p \approx \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \big[2^{2n}\mu(R_{n,j} \cap \Omega)\big]^p, \tag{2.6}$$

где μ — положительная мера, определённая в (2.4), а $\Omega = \varphi(\mathbb{D})$.

Пусть $\{\delta_n\}_1^\infty$, $0 < \delta_n < 1$, — последовательность вещественных чисел, монотонно сходящихся к нулю. Обозначим через J кривую Жордана, полученную как граница области, ограниченной снизу отрезком $[0, 1]$, сверху и справа ограниченную сторонами кривых четырёхугольников

$$\big\{1 - 2^{-n} \leq |z| < 1 - 2^{-n-1}\big\} \times \big\{0 \leq \arg z < 2^{-n}\delta_n\big\}.$$

Пусть G будет область, ограниченная кривой J, а

$$\Omega = G \cup D(0, 1/8), \quad \text{где} \quad D(0, 1/8) = \{z: \ |z| < 1/8\}.$$

Пусть φ — римановое преобразование единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω и $\varphi(0) = 0$. Следовательно, φ — однолистная аналитическая функция. Для фиксированного n окно Хастинга-Лукинга обладают свойствами

$$R_{n,0} \cap \Omega \neq \varnothing; \quad R_{n,j} \cap \Omega = \varnothing, \quad \text{для} \quad 1 \leq j < 2^n.$$

Следовательно,

$$\mu(R_{n,0} \cap \Omega) = \int\limits_{1-2^{-n}}^{1-2^{-n-1}} \int\limits_{0}^{\delta_n 2^{-n}} r dr d\theta \approx 2^{-2n}\delta_n.$$

Тогда из (2.6) получим

$$|T_\mu|_p^p \approx \sum_{n=0}^{\infty} \big[2^{2n}2^{-2n}\delta_n\big]^p = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^p.$$

Таким образом, собственные числа $\{\mu_n\}_1^\infty$ оператора $C_\varphi^* C_\varphi$, занумерованные в порядке убывания с учетом кратностей, обладают такой же асимптотикой, какой является асимптотика последовательности $\{\delta_n\}_1^\infty$. Это означает, что $C_\varphi^* C_\varphi \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{A}^2)$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n^p$ сходится. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $T_\mu \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{A}^2)$, $p > 0$. Ясно, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ равносильно компактности $C_\varphi^* C_\varphi$ и T_μ. Но если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n^p$ не сходится ни при каком $p > 0$, то $C_\varphi^* C_\varphi$ не принадлежит ни одному из классов Шаттена. Чтобы получить пример такого оператора $C_\varphi^* C_\varphi$, достаточно положить, для примера, $\delta_n = 1/ln(n+2)$. Отметим, что построению аналогичных примеров для оператора Тёплица посвящено множество работ (см. [13], [14], [15]).

В рассматриваемом частном случае на $\mathbb{R}^2$ берём в качестве оператора K из теоремы 1 оператор вида

$$K = PC_\varphi^* C_\varphi P = C_\varphi^* C_\varphi P,$$

где P – ортогональный проектор пространства $L_2(\mathbb{D})$ на пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$

$$Pf(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(\omega)}{(1 - z\overline{\omega})^2} d\omega.$$

Тогда собственные значения оператора K совпадают с собственными значениями $\{\mu_n\}_1^\infty$ оператора $C_\varphi^* C_\varphi$ и удовлетворяют условию (2.2). Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(2+2n)}{ln(2+n)} = 1.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \subset \mathrm{Ker}\widehat{L}, \quad \text{где} \quad \widehat{L} \equiv -\Delta.$$

Тем самым мы построили оператор K, который удовлетворяет всем условиям теоремы 1 в рассматриваемом двумерном случае. То есть мы построили положительно определенную граничную корректную задачу для оператора Лапласа с асимптотикой собственных чисел $\lambda_n(L) \sim ln(2+n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Следствие 1. *Из представления* (1.7) *следует, что теорема 1 верна и для корректного расширения* L^* *минимального оператора* L_0 .

Литература

1 Отелбаев М., Шыныбеков А. Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 265, №4. — С. 815–819.

2 Кокебаев Б. К., Отелбаев М., Шыныбеков А. Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 271, №6. — С. 1307–1310.

3 Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. ГИТТЛ. М.–Л., — С. 187–246.

4 Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М.: ИЛ, 1959. — 131 с.

5 Бияров Б. Н. О спектре корректных сужений и расширений для оператора Лапласа // Мат. заметки. — 2014. — Т. 95, №4. — С. 507–516.

6 Гехтман М. М. Изучение спектра некоторых неклассических самосопряженных расширений оператора Лапласа // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, №4. — С. 72.

7 Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. Regular variation. Encyclopaedia of mathematics and its applications. — Cambridge University press, 1987. — 494 p.

8 Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

9 Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

10 Schatten R. Norm ideals of completely continuous operators. — Berlin.: Springer-Verlag, 1960. — 81 p.

11 MacCluer B. D. and Shapiro J. H. Angular derivations and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces // Canad. J. Math. — 1986. — V. 38, №4. — P. 878–906.

12 Luecking D. H. Trace ideal criteria for Toeplitz operators // J. Funct. Anal. — 1987. — V. 73. — P. 345–368.

13 Carroll T. and Cowen C. C. Compact composition operators not in the Schatten classes // J. Operator Theory. — 1991. — V. 26, №1. — P. 109–120.

14 Lefĕvre P., Li D., Queffĕlec H. and Rodríguez-Piazza L. Compact composition operators on the Dirichlet space and capacity of sets of contact points //arXiv: 1207.1232, 5 Jul 2012. — V.1. — P. 1–23.

15 Jones M. M. Compact composition operators not in the Schatten classes // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — V. 134, №7. — P. 1947–1953.

Статья поступила в редакцию 24.10.14

Бияров Б. Н. ШАТТЕН КЛАСТАРЫНА ЖАТПАЙТЫН КОМПАКТЫЛЫ КЕРІ ОПЕРАТОРЛАРЫ БАР КОРРЕКТІЛІ ТАРЫЛУЛАР МЕН КЕҢЕЮЛЕР

Бұған дейінгі зерттелген Лаплас операторының классикалық және классикалық емес корректілі шекаралық есептерінің кері операторлары белгілі бір Шаттен класына тиесілі болатын. Бұл жұмыста Лаплас операторы үшін корректілі тарылулар мен кеңеюлердің кері операторлары компактылы, бірақ бірде бір Шаттен класына тиесілі емес болатыны көрсетілген.

Biyarov B. N. CORRECT RESTRICTIONS AND EXTENSIONS WITH THE COMPACT INVERSES NOT BELONGING TO THE SCHATTEN CLASSES

Classical and nonclassical correct boundary value problems studied for the Laplace operator usually has an inverse one, which belongs to a certain Schatten classes. In this paper there is shown that the correct restrictions and extensions for the Laplace operator may possess the inverse ones, which are compact, but do not belong to the Schatten classes.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №4 (54). С.84–96*

УДК 517.51

Г.К. Мусабаева

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова 5, e-mail: musabaevaguliya@mail.ru

СУММИРУЕМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА $L_{\bar{2},\bar{r}}$

В статье получена теорема типа Бочкарева для функции двух переменных.
Ключевые слова: *кратные ряды Фурье, коэффициенты Фурье, анизотропное пространство Лоренца, неравенство Харди-Литтлвуда-Стейна, неравенство Бочкарева.*

Изучению связи между интегрируемостью функции и суммируемостью ее коэффициентов Фурье посвящено множество работ. Здесь хорошо известны классические результаты Парсеваля, Бесселя, Рисса, Харди - Литтлвуда - Пэли, Стейна [1], [2], а также современных работ [3]–[11] и другие. Однако теорема Хаусдорфа - Юнга - Рисса не распространяется на пространства $L_{2,r}$ если $r \neq 2$. В 1997 году С.В.Бочкарев в работе [12] доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *ортонормированная на* $[0,1]$ *система комплекснозначных функций,*

$$\|\varphi_n\|_\infty \le M, \ n = 1, 2, \ldots$$

Keywords: *multiple Fourier series, Fourier coefficients, anisotropic Lorentz space, inequality of Hardy-Littlwood-Stein, inequality of Bochkarev*
2010 Mathematics Subject Classification: 42B05, 42B08

Тогда для любых $2 < r \leq \infty$ *и* $n = 2, 3, \ldots$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{n \in N} \frac{1}{|n|^{1/2}(\log(n+1))^{1/2-1/r}} \sum_{m=1}^{n} a_m^* \leq C\|f\|_{L_{2,r}}, \tag{1}$$

где a_m^* — *коэффициенты Фурье функции* f *по системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

А в статье [13] было получено усиление теоремы Бочкарева для тригонометрических систем.

Целью данной работы является доказательство теоремы типа Бочкарева для функции двух переменных.

Пусть $\bar{s} = (s_1, s_2)$. В дальнейшем символ $1 < \bar{s} < \infty$ будет означать $1 < s_1, s_2 < \infty$.

Определение. *Пусть* $0 < \bar{p} \leq \infty$, $0 < \bar{r} \leq \infty$. *Пространство Лоренца* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *определяется как множество всех измеримых функций, определенных на* $[0,1]^2$, *для которых конечны величины*

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_1^{1/p_1} t_2^{1/p_2} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)\right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{r_2/r_1} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{1/r_2}$$

при $0 < \bar{r} < \infty$,

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\infty}} = \sup_{t_1, t_2} t_1^{1/p_1} t_2^{1/p_2} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)$$

при $\bar{r} = \infty$.

Через $f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)$ *обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным* $x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [0,1]$, *считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию* $f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)$ *будем называть невозрастающей перестановкой функции* f.

Лемма 1. *Пусть* $1 < \bar{q} < 2$, $\Phi = \{\varphi_{m_1}(x_1)\}_{m_1=1}^{\infty}$, $\Psi = \{\psi_{m_2}(x_2)\}_{m_2=1}^{\infty}$ — *две ортонормированные на* $[0,1]$ *ограниченные в совокупности системы функции,*

$$\|\varphi_{m_1}\|_{\infty} \leq M_1, \ m_1 = 1, 2, \ldots,$$

$$\|\psi_{m_2}\|_{\infty} \leq M_2, \ m_2 = 1, 2, \ldots,$$

Пусть $f \sim \sum\limits_{m_1=1}^{\infty} \sum\limits_{m_2=1}^{\infty} \hat{f}(m_1, m_2)\varphi_{m_1}(x_1)\psi_{m_2}(x_2)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{A_1 \subset \mathbb{N}} \sup_{A_2 \subset \mathbb{N}} \frac{1}{|A_1|^{1/q_1}|A_2|^{1/q_2}} \sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \left|\hat{f}(k_1, k_2)\right| \leq$$
$$\leq M \left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{(1/q_1-1/2)} \left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{(1/q_2-1/2)} \|f\|_{L_{\bar{q},\bar{2}}}, \qquad (2)$$

где $M = (M_1+1)(M_2+1)$, $|A|$ — *количество элементов в* A.

Доказательство. Воспользуемся тем, что ортонормированные системы ограничены в совокупности,

$$\left|\sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \hat{f}(k_1, k_2)\right| = \left|\sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2)\varphi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq M_1M_2|A_1||A_2| \int_0^1 \int_0^1 |f(x_1, x_2)|dx_1dx_2 = M_1M_2|A_1||A_2|\|f\|_{L_{\bar{1}}}, \qquad (3)$$

а из неравенства Коши-Буняковского и равенства Парсеваля следует

$$\left|\sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \hat{f}(k_1, k_2)\right| \leq |A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2} \left(\sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \hat{f}^2(k_1, k_2)\right)^{1/2} =$$

$$= |A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\|f\|_{L_{\bar{2}}}. \qquad (4)$$

Рассмотрим представление $f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}$, строящееся следующим образом.

Пусть $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$, $\chi_{\Omega_{x_2}}(x_1)$ — характеристическая функция множества $\Omega_{x_2} = \{(x_1, x_2) : |f(x_1, x_2)| > f^{*_1}(\tau_1, x_2)\} \cup e_{x_2}$, где e_{x_2} — измеримое подмножество $\{(x_1, x_2) : |f(x_1, x_2)| = f^{*_1}(\tau_1, x_2)\}$ такое, что $\mu_1(\Omega_{x_2}) = \tau_1$. Такое множество всегда можно подобрать, так как при фиксированном x_2

$$\mu_1\{(x_1, x_2) : |f(x_1, x_2)| > f^{*_1}(\tau_1, x_2)\} \leq \tau_1 \leq$$

$$\le \mu_1\{(x_1,x_2) : |f(x_1,x_2)| \ge f^*(\tau_1,x_2)\}.$$

Через g_0 и g_1 обозначим функции

$$g_0(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)\chi_{\Omega_{x_2}}(x_1), \quad g_1(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - g_0(x_1,x_2).$$

В свою очередь, каждую функцию g_0, g_1 представим в виде

$$g_0 = f_{00} + f_{01}, \quad g_1 = f_{10} + f_{11}.$$

Пусть

$$W_0 = \{x_2 \in (0,1) : \|g_0(\cdot,x_2)\|_{L_1} > (\|g_0(\cdot,x_2)\|_{L_1})^{*_2}(\tau_2)\} \cup e_0,$$

где

$$e_0 \subset \{x_2 \in (0,1) : \|g_0(\cdot,x_2)\|_{L_1} = (\|g_0(\cdot,x_2)\|_{L_1})^{*_2}(\tau_2)\}, \ \mu_2(W_0) = \tau_2,$$

и

$$W_1 = \{x_2 \in (0,1) : \|g_1(\cdot,x_2)\|_{L_2} > (\|g_1(\cdot,x_2)\|_2)^{*_2}(\tau_2)\} \cup e_1,$$

где

$$e_1 \subset \{x_2 \in (0,1) : \|g_1(\cdot,x_2)\|_2 = (\|g_1(\cdot,x_2)\|_2)\}, \ \mu_2(W_1) = \tau_2.$$

Тогда

$$f_{00}(x_1,x_2) = g_0(x_1,x_2)\chi_{W_0}(x_2), \ f_{01}(x_1,x_2) = g_0(x_1,x_2) - f_{00}(x_1,x_2),$$

$$f_{10}(x_1,x_2) = g_1(x_1,x_2)\chi_{W_1}(x_1), \ f_{11}(x_1,x_2) = g_1(x_1,x_2) - f_{10}(x_1,x_2).$$

Таким образом, построено представление

$$f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}.$$

Тогда для произвольного $\tau = (\tau_1,\tau_2) \in (0,1)^2$, имеем

$$\left|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}(k_1,k_2)\right| \le \left|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}_{00}(k_1,k_2)\right| + \left|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}_{01}(k_1,k_2)\right| +$$

$$+\left|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}_{10}(k_1,k_2)\right| + \left|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}_{11}(k_1,k_2)\right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (5)$$

Для I_1 используем неравенство (3) и получим следующую оценку:

$$I_1 \leq |A_1||A_2|M_1M_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1|f_{00}(x_1,x_2)|dx_1dx_2.$$

$$I_2 \leq |A_2|^{1/2}\Big(\sum_{k_2\in A_2}\big(\sum_{k_1\in A_1}\hat{f}_{01}(k_1,k_2)\big)^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq |A_2|^{1/2}\Big(\sum_{k_2\in A_2}|\sum_{k_1\in A_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_{01}(x_1,x_2)\varphi_{m_1}(x_1)\psi_{m_2}(x_2)dx_1dx_2\big|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq |A_2|^{1/2}\Big(\sum_{k_2\in A_2}|\int\limits_0^1\big(\sum_{k_1\in A_1}\int\limits_0^1 f_{01}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\big)\psi_{k_2}(x_2)dx_2\big|^2\Big)^{1/2}.$$

Применяя равенство Парсеваля, получим

$$I_2 \leq |A_2|^{1/2}\Bigg(\sum_{k_2\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k_1\in A_1}\int\limits_0^1 \widehat{f_{01}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1}\Big)^2_{k_2}\Bigg)^{1/2} =$$

$$= |A_2|^{1/2}\Bigg(\int\limits_0^1\Big|\sum_{k_1\in A_1}\int\limits_0^1 f_{01}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\Big|^2dx_2\Bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Bigg(\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1|f_{01}(x_1,x_2)|dx_1\Big)^2dx_2\Bigg)^{1/2}.$$

Теперь оценим I_3

$$I_3 = \Big|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{m_1}(x_1)\psi_{m_2}(x_2)dx_1dx_2\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\psi_{k_2}(x_2)\Big|dx_2 \leq$$

$$\leq |A_2|M_2 \sum_{k_1\in A_1} \int\limits_0^1 \Big| \int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\Big| dx_2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$I_3 \leq M_2|A_2||A_1|^{1/2}\Big(\sum_{k_1\in A_1} \Big(\int\limits_0^1 \big| \int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\big| dx_2\Big)^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq M_2|A_2||A_1|^{1/2} \int\limits_0^1 \Big(\sum_{k_1\in A_1} \big| \int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\big|^2\Big)^{1/2} dx_2 \leq$$

$$\leq M_2|A_2||A_1|^{1/2} \int\limits_0^1 \Big(\sum_{k_1\in \mathbb{Z}} \Big| \int\limits_0^1 f_{10}(x_1,x_2)\varphi_{k_1}(x_1)dx_1\Big|^2\Big)^{1/2} dx_2.$$

С помощью равенства Парсеваля будем иметь

$$I_3 \leq M_2|A_2||A_1|^{1/2} \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \big|f_{10}(x_1,x_2)\big|^2 dx_1\Big)^{1/2} dx_2.$$

Применяя для I_4 неравенство Коши- Буняковского и равенство Парсеваля, получим следующую оценку:

$$I_4 = \Big| \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \hat{f}_{11}(k_1,k_2)\Big| \leq |A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\Big(\big| \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \hat{f}^2{}_{11}(k_1,k_2)\big|\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq |A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |f_{11}^2(x_1,x_2)| dx_1 dx_2\Big)^{1/2}.$$

Итак,

$$\Big| \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \hat{f}(k_1,k_2)\Big| \leq M_1M_2|A_1||A_2| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |f_{00}(x_1,x_2)| dx_1 dx_2 +$$

$$+M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^1\big(\int\limits_0^1 f_{01}(x_1,x_2)dx_1\big)^2dx_2\Big)^{1/2}+$$

$$+M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1(f_{10}(x_1,x_2))^2dx_1\Big)^{1/2}dx_2+$$

$$+|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1(f_{11}(x_1,x_2))^2dx_1dx_2\Big)^{1/2}.$$

Подставим полученные оценки в соотношение (5)

$$\Big|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}(k_1,k_2)\Big|\leq|A_1||A_2|M_1M_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1|f_{00}(x_1,x_2)|dx_1dx_2+$$

$$+M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^1\big(\int\limits_0^1|f_{01}(x_1,x_2)|dx_1\big)^2dx_2\Big)^{1/2}+$$

$$+M_2|A_2||A_1|^{1/2}\int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^1\Big|f_{10}(x_1,x_2)\Big|^2dx_1\Bigg)^{1/2}dx_2+$$

$$+|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\Bigg(\int\limits_0^1\int\limits_0^1|f_{11}^2(x_1,x_2)|dx_1dx_2\Bigg)^{1/2},$$

$$\Big|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat{f}(k_1,k_2)\Big|\leq M_1M_2|A_1||A_2|\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2+$$

$$+M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Bigg(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_{\tau_2}^1 f^{*_1*_2}(t_1,t_2)dt_1\Big)^2dt_2\Bigg)^{1/2}+$$

$$+M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\int\limits_{\tau_1}^1\Bigg(\int\limits_0^{\tau_2}(f^{*_1*_2}(t_1,t_2))^2dt_1\Bigg)^{1/2}dt_2+$$

$$+|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_{\tau_1}^{1}\int\limits_{\tau_2}^{1}(f^{*_1*_2}(t_1,t_2))^2dt_1dt_2\Big)^{1/2}=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Оценим каждое слагаемое. Для оценки интегралов $J_1,\ J_2,\ J_3$ используем неравенство Гельдера. Итак, имеем

$$J_1\le M_1M_2|A_1||A_2|\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}t_1^{1/q_1}t_1^{1/q_1'}t_2^{1/q_2}t_2^{1/q_2'}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\le$$

$$\le M_1M_2|A_1||A_2|\Big(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_0^{\tau_2}\big(t_1^{1/q_1}t_2^{1/q_2}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\big)^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_0^{\tau_2}(t_1^{1/q_1'}t_2^{1/q_2'})^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{1/2}=$$

$$=M_1M_2|A_1||A_2|\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{1/2}\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{1/2}\tau_1^{1-1/q_1}\tau_2^{1-1/q_2};$$

$$J_2=M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_{\tau_2}^{1}t_1^{1/q_1}t_1^{1/q_1'}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)t_2^{1/q_2}t_2^{-1/q_2}\frac{dt_1}{t_1}\Big)^2\frac{t_2dt_2}{t_2}\Big)^{1/2}\le$$

$$\le M_1|A_1||A_2|^{1/2}\Big(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_{\tau_2}^{1}\big(t_1^{1/q_1}t_2^{1/q_2}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\big)^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^{\tau_1}\Big(\int\limits_{\tau_2}^{1}(t_1^{1/q_1'}t_2^{1/2-1/q_2})^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{1/2},$$

отсюда получим

$$J_2\le M_1|A_1||A_2|^{1/2}\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{1/2}\tau_1^{1-1/q_1}\tau_2^{1/2-1/q_2}.$$

Далее,

$$J_3=M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\times$$

$$\times\int\limits_{\tau_1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\tau_2}(f^{*_1*_2}(t_1,t_2))^2 t_1^{2/q_1}t_1^{-2/q_1}t_2^{2/q_2}t_2^{-2/q_2}\frac{t_1dt_1}{t_1}\Big)^{1/2}\frac{t_2dt_2}{t_2}\le$$

$$\le M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\bigg(\int\limits_{\tau_1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\tau_2}\big(t_1^{1/q_1}t_2^{1/q_2}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\big)^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\bigg)^{1/2}\times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\tau_1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\tau_2}\big(t_1^{1/2-1/q_1}t_2^{1-1/q_2}\big)^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\bigg)^{1/2}=$$

$$=M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}\tau_1^{1/2-1/q_1}\tau_2^{1-1/q_2}\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим J_4, учитывая, что $1<q_2<2$,

$$J_4\le|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\times$$

$$\times\bigg(\int\limits_{\tau_1}^{1}\int\limits_{\tau_2}^{1}(f^{*_1*_2}(t_1,t_2))^2 t_1^{2/q_1-1}t_1^{1-2/q_1}t_2^{2/q_2-1}t_2^{1-2/q_2}dt_1dt_2\bigg)^{1/2}\le$$

$$\le|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\bigg(\int\limits_{\tau_1}^{1}\Big(\int\limits_{\tau_2}^{1}\big(t_1^{1/q_1}t_2^{1/q_2}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\big)^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\bigg)^{1/2}\times$$

$$\times\tau_1^{1/2-1/q_1}\tau_2^{1/2-1/q_2}\le|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}\tau_1^{1/2-1/q_1}\tau_2^{1/2-1/q_2}.$$

Таким образом, имеем

$$\Big|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat f(k_1,k_2)\Big|\le\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}\bigg(M_1M_2|A_1||A_2|\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{1/2}\tau_1^{1-1/q_1}\tau_2^{1-1/q_2}+M_1|A_1||A_2|^{1/2}\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\tau_1^{1-1/q_1}\tau_2^{1/2-1/q_2}+M_2|A_1|^{1/2}|A_2|\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{1/2}\tau_1^{1/2-1/q_1}\tau_2^{1-1/q_2}+$$

$$+|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}\tau_1^{1/2-1/q_1}\tau_2^{1/2-1/q_2}\Big).$$

Выбирая $\tau_1 = \left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{-1}/|A_1|$ и $\tau_2 = \left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{-1}/|A_2|$, мы получим

$$\Big|\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\hat f(k_1,k_2)\Big| \le$$

$$\le M|A_1|^{1/q_1}|A_2|^{1/q_2}\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{(1/q_1-1/2)}\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{(1/q_2-1/2)}\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}$$

или

$$\frac{1}{|A_1|^{1/q_1}|A_2|^{1/q_2}}\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\left|\hat f(k_1,k_2)\right| \le$$

$$\le M\left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{(1/q_1-1/2)}\left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{(1/q_2-1/2)}\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}}.$$

где $M = (M_1+1)(M_2+1)$. Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть $\Phi_{m_1,m_2}(x_1,x_2) = \varphi_{m_1}(x_1)\cdot\psi_{m_2}(x_2)$, $m_1, m_1 \in \mathbb{N}$ ортонормированная ограниченная в совокупности система функций.*

Тогда для любой функции $f \in L_{\bar 2,\bar r}[0,1]^2$, $2 < \bar r < \infty$, выполнено неравенство

$$\sup_{\substack{|A_1|\ge 8\\ A_1\subset\mathbb{N}}}\sup_{\substack{|A_2|\ge 8\\ A_2\subset\mathbb{N}}}\frac{1}{|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}(\log_2(|A_1|+1))^{1/2-1/r_1}(\log_2(|A_2|+1))^{1/2-1/r_2}}\times$$

$$\times\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\left|\hat f(k_1,k_2)\right| \le 9M\|f\|_{L_{\bar 2,\bar r}},$$

где $M = (M_1+1)(M_2+1)$.

Доказательство. Пусть $|A_1|, |A_2| \ge 8$. Тогда для произвольных $\bar q = (q_1,q_2) : 1 < \bar q < 2$ и $f \in L_{\bar q,\bar 2}$ верна оценка

$$\|f\|_{L_{\bar q,\bar 2}} \le \|f\|_{L_{\bar 2,\bar r}}\|1\|_{L_{\bar p,\bar r'}}, \tag{6}$$

где $1/\bar{q} = 1/\bar{2} + 1/\bar{p}$ и $1/\bar{r}' = 1/\bar{2} - 1/\bar{r}$, $\|1\|_{L_{\bar{p},\bar{r}'}} \leq \left(\frac{2q_1}{2-q_1}\right)^{1/r_1'} \left(\frac{2q_2}{2-q_2}\right)^{1/r_2'}$, $\|f\|_{L_{\bar{q},\bar{2}}} \leq \left(\frac{2q_1}{2-q_1}\right)^{1/r_1'} \left(\frac{2q_2}{2-q_2}\right)^{1/r_2'} \|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}$.

Воспользуемся леммой 1

$$\frac{1}{|A_1|^{1/q_1}|A_2|^{1/q_2}} \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \left|\hat{f}(k_1,k_2)\right| \leq$$

$$\leq M \left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{(1/q_1-1/2)} \left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{(1/q_2-1/2)} \|f\|_{L_{\bar{q},\bar{2}}}.$$

Принимая во внимание (6), получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{|A_1|^{1/q_1}|A_2|^{1/q_2}} \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \left|\hat{f}(k_1,k_2)\right| \leq M \left(\frac{q_1}{2(q_1-1)}\right)^{(1/q_1-1/2)} \times$$

$$\times \left(\frac{q_2}{2(q_2-1)}\right)^{(1/q_2-1/2)} \left(\frac{2q_1}{2-q_1}\right)^{1/r_1'} \left(\frac{2q_2}{2-q_2}\right)^{1/r_2'} \|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}.$$

Учитывая произвольность параметров q_1 и q_2, положим $q_1 = \frac{2\log_2|A_1|}{\log_2|A_1|+2} < 2$, $q_2 = \frac{2\log_2|A_2|}{\log_2|A_2|+2} < 2$, $1/\bar{q} - 1/\bar{2} = \frac{1}{\log_2 \bar{N}}$, $|A_1|^{1/q_1} = |A_1|^{\frac{1}{\log_2|A_1|}+1/2} = 2|A_1|^{1/2}$, $|A_2|^{1/q_2} = 2|A_2|^{1/2}$, тогда

$$\frac{1}{|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}} \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \left|\hat{f}(k_1,k_2)\right| \leq$$

$$\leq 4M\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_2|A_1|}\right)}\right)^{\frac{1}{\log_2|A_1|}} \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_2|A_2|}\right)}\right)^{\frac{1}{\log_2|A_2|}} \times$$

$$\times (\log_2|A_1|)^{1/r_1'} (\log_2|A_2|)^{1/r_2'} \|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}$$

и

$$\frac{1}{|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2} (\log_2|A_1|)^{1/2-1/r_1} (\log_2|A_2|)^{1/2-1/r_2}} \sum_{k_1\in A_1} \sum_{k_2\in A_2} \left|\hat{f}(k_1,k_2)\right| \leq$$

$$\le 9M\|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}.$$

Взяв верхние точные грани по всем A_1 и A_2 из $\mathbb{N}$, будем иметь

$$\sup_{\substack{|A_1|\ge 8\\ A_1\subset\mathbb{N},}} \sup_{\substack{|A_2|\ge 8\\ A_2\subset\mathbb{N},}} \frac{1}{|A_1|^{1/2}|A_2|^{1/2}(\log_2(|A_1|+1))^{1/2-1/r_1}(\log_2(|A_2|+1))^{1/2-1/r_2}}\times$$

$$\times\sum_{k_1\in A_1}\sum_{k_2\in A_2}\left|\hat{f}(k_1,k_2)\right| \le 9M\|f\|_{L_{\bar{2},\bar{r}}}.$$

□

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N 1504/ГФ Комитета Науки МОН РК.

Литература

1 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. — М.: Мир, 1980. — 264 с.

2 Stein Elias M. Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — V. 83, I. 2. — P. 482–492.

3 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т. 64, № 1. — С. 95–122.

4 Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литлвуда // Матем. сб. — 1998. — Т. 189, № 3. — С. 83–102.

5 Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. — V.4, № 2. —P. 277–290.

6 Kopezhanova A., Nursultanov E., Persson L.-E. Relations between summability of the Fourier coefficients in regular systems and functions from some Lorentz type spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2010. — V. 152. — P. 73–88.

7 Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Матем. журнал. — Алматы. — 2013. Т. 13, №1(47). — С. 73–89.

8 Zhantakbayeva A.M., Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Hardy-Littlewood type theorems // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — V. 4, № 2. — P. 140–143.

9 Kopezhanova A.N., PerssonL.-E. On summability of the Fourier coefficients in bounded orthonormal systems for functions from some Lorentz type spaces // Eurasian Mathematical Journal. — 2010. — V. 1. — P. 76–85.

10 Дьяченко М.И. Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 3. — С. 3–18.

11 Дьяченко М. И., Нурсултанов Е. Д. Теорема Харди- Литтлвуда для тригонометрических рядов с α - монотонными коэффициентами // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 11. — С. 45–60.

12 Бочкарев С.В. Теорема Хаусдорфа - Юнга - Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 1997. - Т. 219. — С. 103-114.

13 Тлеуханова Н.Т., Мусабаева Г.К. О коэффициентах рядов Фурье по тригонометрическим системам в пространстве $L_{2,r}$ // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 6. — С. 884–888.

Статья поступила в редакцию 15.04.14

Мусабаева Г.К. $L_{\bar{2},\bar{r}}$ АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ ҚОСЫНДЫЛАНУЫ

Мақалада екі айнымалылы функция үшін Бочкарев типті теорема алынған.

Musabaeva G.K. SUMMABILITY OF FOURIER COEFFICIENTS FROM ANISOTROPIC LORENTZ SPACE $L_{\bar{2},\bar{r}}$.

In the paper there is obtained Bochkarev type theorem for the function of two variables.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
"АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ", посвященная 50-летию создания Института математики и механики

1–5 июня 2015 года, Алматы, Казахстан

ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

Институт математики и математического моделирования организует международную конференцию "Актуальные проблемы математики и математического моделирования", посвященную 50-летию создания Института математики и механики. Конференция будет проходить в городе Алматы 1-5 июня 2015 года.

К участию в конференции приглашаются специалисты по дифференциальным уравнениям, анализу, алгебре, геометрии, математической логике, математической физике, математическому моделированию, вычислительной математике, механике, информационным технологиям.

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Академик НАН РК Т.Ш. Кальменов (председатель), профессор Л.А. Алексеева, член-корреспондент НАН РК Б.С. Байжанов (заместитель председателя), профессор Г.И. Бижанова, академик НАН РК Н.К. Блиев, профессор Н.С. Даирбеков, профессор М.Т. Дженалиев, академик НАН РК А.С. Джумадильдаев, академик НИА РК С.У. Джолдасбеков, член-корреспондент НАН РК М.Н. Калимолдаев, профессор А.Ж. Найманова, профессор Е.Д. Нурсултанов, академик НАН РК М.О. Отелбаев, член-корреспондент НАН РК М.А. Садыбеков, к.ф.-м.н. М.А. Сахауева (ученый секретарь), академик РАН И.А. Тайманов, академик НАН РК С.Н. Харин.

Программа конференции будет включать пленарные доклады (40 мин.) и секционные доклады (10 – 20 мин.).

Секции конференции:

1) дифференциальные уравнения,
2) теория функций и функциональный анализ,
3) алгебра, математическая логика и геометрия,
4) математическая физика и математическое моделирование,
5) информационные технологии и вычислительная математика,
6) механика и машиноведение.

Предварительное согласие на участие в работе конференции дали наши коллеги: академик РАН В.А. Левин, академик НАН Таджикистана Н.Р. Раджабов, академик НАН Украины А.М. Самойленко, академик НАН Узбекистана М.С. Салахитдинов, академик РАН И.А. Тайманов, академик РАН Л.Д. Фаддеев, академик РАН Б.Н.Четверушкин, член-корр. РАН С.С. Гончаров, член-корр. РАН С.И. Кабанихин, член-корр. НАН Беларуси В.И. Корзюк, член-корр. АН Туркмении М.М. Мередов, профессора Ф.А. Алиев, Г.В. Демиденко, Я. Краснов, А.И. Кожанов, Л. Макар-Лиманов, А.М. Нахушев, Феликс Ж. Садырбаев, Я.Т. Султанаев, С.С. Харибегашвили, А.А. Шкаликов.

Языки конференции: русский, казахский, английский.

Публикации: планируется издание сборника тезисов к началу конференции.

Приглашаем Вас принять участие в работе конференции. Просим присылать заявку на участие и тезисы Вашего доклада по прилагаемой форме на электронный адрес Оргкомитета конференции conf.almaty.2015@math.kz, conf.almaty.2015@mail.ru до 1 апреля 2015 г.

Заявка на участие

1. фамилия, имя, отчество;
2. ученая степень, ученое звание;
3. место работы / учебы;
4. адрес, электронная почта;
5. секция участия в конференции.
6. название доклада

Со всеми вопросами обращайтесь по тому же электронному адресу conf.almaty.2015@math.kz, conf.almaty.2015@mail.ru

Тезисы следует подготовить с использованием прилагаемого образца на русском языке (кодировка MS DOS (cp866)или Windows (cp1251)) или на английском языке и представить в LaTeX и PDF форматах. Имена высылаемых файлов (*.tex и *.pdf), касающихся Ваших тезисов, должны состоять из написанной латинскими буквами фамилии основного докладчика и его первого инициала (например, AkhmetovA.tex и AkhmetovA.pdf для тезисов А.Ахметова). В письме обязательно укажите название секции конференции, на которой Вы планируете выступить с докладом. Организационный комитет рассмотрит все поступившие тезисы. Организационный комитет оставляет за собой право отклонять тезисы, не соответствующие тематике конференции или оформленные с нарушением требований. Оформление тезисов Тезисы должны быть подготовлены в LaTeX'е. Объем не должен превышать 3-х страниц. Образец, согласно которому должны быть подготовлены тезисы доклада, приводится ниже. Перед публикацией все тезисы проходят рецензирование.

Образец для тезисов

```
\documentclass[11pt]{article} % Международная научная конференция
%"Актуальные проблемы математики и математического моделирования"
\usepackage{amssymb,amsmath,amsthm}
\usepackage[english,russian]{babel}
\usepackage[cp866]{inputenc}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{amscd}
\usepackage{epsfig}

\textwidth=130mm \oddsidemargin=-3mm \evensidemargin=-1mm
\textheight=170mm \topmargin=-7mm \headheight=0mm \hoffset=17.5mm
\voffset=37mm
\begin{document}
УДК
\begin{center}
{\bf Фамилия И.О.}\\
Полное название организации (страна, город)\\
```

```
e-mail: электронный адрес почты {\bf Название}
\end{center}

Текст материалов

\smallskip
\centerline{\bf Литература}
\begin{enumerate}
\item{\it Фамилия 1 И.О., Фамилия 2 И.О.} Название книги. - Город:
Изд-во, год. - Кол-во страниц~с.\\
\item {\it Фамилия1 И.О., Фамилия 2 И.О.} Название статьи //
Название журнала.
- Год. -Т.~Номер тома, \No~Номер журнала. -С.~...-...
\end{enumerate}
```

ХРОНИКА

Наргозы Турсынбаевич Данаев

Математическая общественность Казахстана понесла невосполнимую потерю — на шестьдесят седьмом году жизни скончался член - корреспондент НАН РК, академик НИА РК, Лауреат Государственной премии РК, доктор физико - математических наук, профессор Наргозы Турсынбаевич Данаев.

Мы знали Наргозы Турсынбаевича как крупного ученого в области вычислительной математики и информационных технологий. Его исследования по численным методам решения уравнений газовой динамики, уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, математическому обоснованию устойчивости и сходимости разностных схем внесли существенный вклад в развитие вычислительной математики, математического моделирования многих физических процессов. Н.Т. Данаевым создан метод построения криволинейных сеток, сгущающихся в областях с большим градиентом характеристик течений, с помощью которого успешно решены многие задачи газо- и гидродинамики в сложных областях.

Н.Т. Данаев был прекрасным организатором науки в Казахстане. При его непосредственном участии был создан Научно-исследовательский институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, директором которого он был на протяжении многих лет. Он являлся сокоординатором

Международного комплексного интеграционного проекта Сибирского отделения Российской Академии наук "Создание автоматизированных алгоритмов и компьютерных программ построения адаптивных разностных сеток для расчетов прикладных задач".

Он автор более 200 научных работ и методических разработок, в том числе нескольких монографий. Под руководством профессора Н.Т. Данаева защищено много кандидатских и докторских диссертаций по вычислительной математике и математическому моделированию.

Н.Т. Данаев являлся членом Президиума и председателем Отделения вычислительных и информационных технологий НИА РК, Национального комитета по теоретической и прикладной механике РК, членом редколлегии международного журнала "Вычислительные технологии"(Россия), председателем специализированного совета по защите докторских диссертаций при КазНУ им. аль-Фараби.

За выдающие заслуги в развитии математической науки Н.Т. Данаев был удостоен звания лауреата Государственной премии РК в области науки, техники и образования (совместно с Б.Т. Жумагуловым и Ш.С. Смагуловым), избран академиком Национальной инженерной академии РК, член-корреспондентом НАН РК, академиком Международной инженерной академии, удостоен почетного звания "Заслуженный деятель РК", награжден нагрудными знаками МОН РК "За заслуги в развитии науки РК", "Почетный работник образования РК", "За вклад в развитие инженерного дела в Казахстане". Имел Благодарственные письма Президента Республики Казахстан, был обладателем Республиканского гранта и звания "Лучший преподаватель вуза РК".

Светлая память о профессоре Наргозы Турсынбаевиче Данаеве — крупном ученом и педагоге, прекрасном организаторе и руководителе, навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег, учеников.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом от 10 до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, №4 (54), 2014

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
30.12.2014 г.

Тираж 300 экз. Объем 105 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz