ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 13   № 3 (49)   2013

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, № 3 (49), 2013

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308),   факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13 **№ 3 (49)** **2013**

CONTENTS

Volume 13 **No. 3 (49)** **2013**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.51

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
470074, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

В данной статье рассматривается пространство Лоренца с анизотропной нормой периодических функций многих переменных. Установлены оценки сверху линейных поперечников классов Никольского-Бесова-Аманова в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.
Ключевые слова: *пространство Лоренца, класс Бесова, линейный поперечник.*

Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих 2π - период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\cdots \left[\int_0^{2\pi} \left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна , где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

Keywords: *Lorentz space, Besov class, the linear widths*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

В случае $q_1 = ... = q_m = \theta_1 = ... = \theta_m = q$ пространство $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(I^m)$ с нормой (см. [2], гл. I, п. 1.1)

$$\|f\|_q = \left[\int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} |f(x_1, ..., x_m)|^q dx_1 ... dx_m\right]^{\frac{1}{q}}.$$

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0, \ \ \forall j = 1, ..., m.$$

Функция $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ разлагается в ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, и $\mathbb{Z}^m$ – пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $s_j = 1, 2, ...,$

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}.$$

Пусть l_p^m обозначает пространство R^m с нормой

$$\|\bar{x}\|_{l_p^m} = (\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}, \ \ 1 \le p < +\infty,$$

$$\|\bar{x}\|_{l_p^m} = \max_{j=1,...,m} |x_j|, p = +\infty$$

и B_p^m – единичный шар в l_p^m.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m,} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\cdots \left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

$S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной соответственно определены С. М. Никольским [3] и Т.И. Амановым ([4], гл.I, п.17).

П. И. Лизоркиным и С. М. Никольским [5] исследовано декомпозиционное разложение элементов пространства $\overset{\circ}{S}{}_{p,\theta}^{\bar{r}}B$.

В анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ рассмотрим аналогичный класс

$$\overset{\circ}{S}{}^{\,\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\,\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B} = \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}} \right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 \le \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, ..., m$. Положим

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \bar{x}, \bar{\gamma} \rangle \ge n \right\}.$$

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \le B(y) \le C_2 \cdot A(y)$.

Приведем определение линейного поперечника, который был введен В. М. Тихомировым [6].

Определение 1. *Пусть W – множество в банаховом пространстве X. Тогда линейный поперечник множества W в пространстве X (обозначается $\lambda_M(W, X)$) определяется согласно формуле*

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{f\in W} \|f - Af\|_X,$$

где inf *берется по всем действующим в* X *линейным операторам* A, *размерность области значений которых не превышает* M.

В одномерном случае для класса Соболева W_p^r при условии $r > (1/p-1/q)_+$ известна следующая оценка

$$\lambda_M(W_p^r, L_q) \asymp M^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$. Это соотношение в случае $1 \le q \le p \le \infty$ установлено в работах В.М. Тихомирова [6], а в случаях $1 \le p \le q \le 2$, $2 \le p < q \le \infty$ — Р.С. Исмагилова [7], В.Е. Майорова [8].

В многомерном случае оценки линейных поперечников для классов Соболева W_p^r, Никольского H_p^r, Бесова $B_{p,\theta}^r$ получили В.Н. Темляков [9], Э. М. Галеев [10, 11], А.Д. Изаак [12], А.С. Романюк [13, 14], Д.Б. Базарханов [15].

Для класса Бесова $B_{p,\theta}^r$ А.С. Романюк [13] доказал следующую теорему.

Теорема 1. [13] *Пусть* $1 \le p \le 2 \le q < \frac{p}{p-1} = p'$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 1/p$. *Тогда*

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Здесь и в дальнейшем $\log M$ – логарифм с основанием 2 от числа $M > 0$.

Для других значений параметров p, q оценки получены также А.С. Романюком [14].

Цель настоящей статьи – найти оценки линейного поперечника выше определенного класса $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ в пространстве $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$.

Вспомогательные утверждения

Сначала приведем некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.

Пусть $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\Im(\rho(\bar{s}))$ – множество функций вида $f(\bar{x}) = \sum\limits_{\overline{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}} e^{i\langle \bar{n}, \bar{x}\rangle}$.

Лемма 1. Э.М. Галеев [10, 11]. *Пусть* $\bar{s} \in \mathbb{N}^m$, $f \in \Im(\rho(\bar{s}))$, $M_{\bar{s}} \in \mathbb{Z}_+$, $M_{\bar{s}} \le 2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle} = \prod_{j=1}^m 2^{s_j}$. *Тогда при* $1 < p, q < +\infty$ *существует линейный оператор* $\Lambda_{M_{\bar{s}}} : \Im(\rho(\bar{s})) \to \Im(\rho(\bar{s}))$, *размерность области значений которого не превышает* $M_{\bar{s}}$ *и такой, что*

$$\|f - \Lambda_{M_{\bar{s}}} f\|_q \asymp \lambda_{M_{\bar{s}}}\Big(B_p^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle}}\Big) 2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Теорема А. Е.Д. Глускин [16, 17]. *Пусть* $M < m$, $1 \le p < 2 \le q < +\infty$, $1/p + 1/q \ge 1$. *Тогда*

$$\lambda_M\Big(B_p^m, l_q^m\Big) \asymp \max\Big\{m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}},\ \min\Big\{1,\ m^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}}\Big\}\sqrt{1 - \frac{M}{m}}\Big\}.$$

В случае $p = 1, q > 2$ утверждение теоремы А следует из результата Б.С. Кашина [18].

Теорема Б. Э.М. Галеев [10]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида*

$$f(\bar{t}) = \sum_{\overline{k} \in \rho(\bar{s})} c_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

и пространством $R^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle}}$ *существует изоморфизм, сопоставляющий функции* f *вектор* $\delta_{\bar{s}} f^j = \big\{f_n(\bar{\tau}_j)\big\} \in R^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle}}$,

$$f_{\bar{n}}(\bar{t}) = \sum_{sign k_l = sign n_l} c_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}, ;\ l = 1, ..., m,$$

$\bar{\tau}_j = (\pi 2^{2 - s_1} j_1, ..., \pi 2^{2 - s_m} j_m)$, $j_i = 1, ..., 2^{s_i - 1}$ *и при этом имеет место соотношение*

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p \asymp \Big\{2^{-\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle} \sum_{j=1}^{2^{\langle \bar{s}, \bar{1}\rangle}} |\delta_{\bar{s}} f^j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}},\ \ p \in (1, +\infty).$$

Теорема B. ([19]). *Пусть* $1\le p_j<q_j<+\infty,\quad 1\le \theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}<+\infty$. *Если* $f\in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar p,\bar\theta^{(1)}}(I^m)$ *и величина*

$$\sigma(f)\equiv\left\{\sum_{s_m=1}^{\infty}2^{s_m\theta_m^{(2)}(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q_m})}\left[\cdots\left[\sum_{s_1=1}^{\infty}2^{s_1\theta_1^{(2)}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p,\bar\theta^{(1)}}\right)^{\theta_1^{(2)}}\right]^{\frac{\theta_2^{(2)}}{\theta_1^{(2)}}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m^{(2)}}{\theta_{m-1}^{(2)}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_m^{(2)}}}$$

конечна, то функция $f\in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\le C(\bar p,\bar q,\bar\theta)\cdot\sigma(f).$$

Лемма 2. (см. [20]). *Пусть даны число* $\alpha\in(0,+\infty)$ *и* $\overline{\gamma}=(\gamma_1,...,\gamma_m)$, $\overline{\gamma}'=\left(\gamma_1',...,\gamma_m'\right)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $\theta_j\in[1,+\infty)$, $j=1,...,m$, $1=\gamma_1=...=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\le...\le\gamma_m$, $1=\gamma_j'=\gamma_j$, $j=1,...,\nu$ *и* $1=\gamma_j'<\gamma_j$, $j=\nu+1,...,m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left\|\left\{2^{-\alpha\langle\bar s,\overline{\gamma}\rangle}\right\}_{\bar s\in Y^m\left(\overline{\gamma}',n\right)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}\asymp 2^{-n\alpha}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $\bar\theta^{(1)}=(\theta_1^{(1)},...,\theta_m^{(1)})$, $\bar\theta^{(2)}=(\theta_1^{(2)},...,\theta_m^{(2)})$, $1<p_j\le 2<q_j<+\infty$, $p_j'=\frac{p_j}{p_j-1}$, $1<\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}<+\infty$, $1\le\tau_j\le\infty$, $j=1,...m$ *и* $\max\limits_j q_j<\min\limits_j\frac{p_j}{p_j-1}$,

$$0<r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}=...=r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu}<r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}}\le...\le r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$$

и $(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j}\le(r_j-\frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}$, $j=1,...m$. *Тогда*

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\right)\le CM^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Доказательство. Введем обозначение $\gamma_j = \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}$, $j = 1, ..., m$. Тогда $\gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le ... \le \gamma_m$. Вектору $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ сопоставим вектор $\gamma' = (\gamma_1', ..., \gamma_m')$ таким образом: $\gamma_j' = \gamma_j$ для $j = 1, ..., \nu$ и $\gamma_j' < \gamma_j$ при $j = \nu + 1, ..., m$.

Пусть $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$. Положим $q_0 = \max\limits_j q_j$. Тогда $q_j \le q_0, j = 1, ..., m$. Поэтому $L_{q_0}(I^m) \subset L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m)$ и $\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le \|f\|_{q_0}$. Так как $p_j < q_0$, $r_j > \frac{1}{p_j} > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_0}$, $j = 1, ...m$, то $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B \subset L_{q_0}(I^m)$. Следовательно, для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ верно неравенство

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le \|f\|_{q_0}.$$

Для натурального числа M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и для каждого $\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+$ поставим в соответствие число

$$M_{\bar{s}} = \{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}, \text{ если} \langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle \le n,$$

$$2^{n+\alpha(n-\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle)}, \text{ если} \langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle > n, \},$$

где α – некоторое положительное число, которое будет выбрано в процессе доказательства и $[a]$ – целая часть числа a.

Применяя неравенство $\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le \|f\|_{q_0}$ к функции $f - \Lambda_M f \in L_{q_0}(I^m)$ и пользуясь теоремой Литтльвуда – Пэли в пространстве Лебега $L_{q_0}(I^m)$ (см. [2], гл. 1, п.1.5.2), будем иметь

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le \|f - \Lambda_M f\|_{q_0} \le$$

$$\le C \left\| \Big(\sum_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n} |\delta_{\bar{s}}(f) - \Lambda_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q_0}. \qquad (1)$$

Так как $2 < q_0$, то в силу неравенства Минковского и леммы 1 из (1) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le C \Big(\sum_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n} \|\delta_{\bar{s}}(f) - \Lambda_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|^2_{q_0} \Big)^{\frac{1}{2}} \le \qquad (2)$$

$$\leq C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\lambda^2_{M_{\bar{s}}}\Big(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_{q_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\Big)2^{2\langle\bar{s},\bar{1}\rangle(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^2_{p_0}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

где $p_0=\max\limits_j\{p_j\}$. Так как по условию теоремы $\max\limits_j q_j<\min\limits_j\{p_j'\}$, то $q_0<p_0'\Leftrightarrow \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}\geq 1$. Поэтому согласно теореме А имеем

$$\lambda_{M_{\bar{s}}}\Big(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_{q_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\Big)\leq C2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle\frac{1}{q_0}}M_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Теперь из неравенств (2), (3) получим

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\leq C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle\frac{2}{q_0}}M_{\bar{s}}^{-1}2^{2\langle\bar{s},\bar{1}\rangle(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^2_{p_0}\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle\frac{2}{p_0}}M_{\bar{s}}^{-1}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^2_{p_0}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Так как $p_j\leq p_0, j=1,...,m$, то применяя неравенство разных метрик (см. [21]) из (4) имеем

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\leq C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle\frac{2}{p_0}}M_{\bar{s}}^{-1}2^{2\sum\limits_{j=1}^{m}s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p_0})}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}M_{\bar{s}}^{-1}2^{2\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\leq C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}M_{\bar{s}}^{-1}2^{2\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}=J_1 \tag{5}$$

для любой функции $f\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$.

Учитывая значения чисел $M_{\bar{s}} = [2^{n+\alpha(n-\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle)}]$ для $\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle > n$ будем иметь

$$J_1 = C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} M_{\bar{s}}^{-1} 2^{2\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \tag{6}$$

$$\le C\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} 2^{-(n+\alpha(n-\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle))} 2^{2\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\alpha}{2}}\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} 2^{2(\frac{\alpha}{2}\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle+\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}-\sum\limits_{j=1}^{m}s_jr_j)} (2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем обозначение $\beta_j = \frac{r_j-\frac{1}{p_j}}{r_1-\frac{1}{p_1}}, j=1,...,m.$ Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} s_jr_j - \sum_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j} = (r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=1}^{m} s_j\beta_j.$$

Так как по условию теоремы $(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} \le (r_j-\frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1},\ \ j=1,...m,$ то $\gamma_j \le \beta_j,\ \ j=1,...,m.$ Значит $\sum\limits_{j=1}^{m} s_j\beta_j \ge \sum\limits_{j=1}^{m} s_j\gamma_j = \langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle$. Поэтому

$$J_2 = \Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} 2^{2(\frac{\alpha}{2}\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle+\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{s_j}{p_j}-\sum\limits_{j=1}^{m}s_jr_j)} (2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \tag{7}$$

$$\le \Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} 2^{-2(-\frac{\alpha}{2}\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle+(r_1-\frac{1}{p_1})\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle)} (2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $1 \le \tau_j \le 2, j=1,...,m.$ Выберем положительное число α, удовлетворяющее неравенству $r_1 - -\frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{2} > 0.$ Тогда, применяя неравенство Йенсена (см. [2], гл.3, п.3.3), из (7) получим

$$J_2 \le C2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})}\Big(\sum_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} (2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq C2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in Z^m_+}\right\|_{\bar{\tau}}.$$

Поэтому из неравенства (6) следует, что

$$J_1\leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in \mathbb{Z}^m_+}\right\|_{\bar{\tau}} \tag{8}$$

в случае $1\leq\tau_j\leq 2, j=1,...,m$.

Теперь из (5) и (8) имеем

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}$$

для любой функции $f\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ в случае $1\leq\tau_j\leq 2, j=1,...,m$. Следовательно,

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\right)\leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}\asymp CM^{-\left(r_1+\frac{1}{2}\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)} \tag{9}$$

в случае $1\leq\tau_j\leq 2, j=1,...,m$.

Пусть $2<\tau_j<+\infty, j=1,...,m$. Тогда, применяя неравенство Гельдера $(\beta_j=\frac{\tau_j}{2}>1, j=1,...,m)$, из (7) получим

$$J_2\leq\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in Z^m_+}\right\|_{\bar{\tau}}\left\|\left\{2^{-(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\right\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}, \tag{10}$$

где $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m)$, $\varepsilon_j=\frac{2\beta_j}{\beta_j-1}$, $j=1,...,m$. Так как по выбору числа α $r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2}>0$, то по лемме 2 имеем

$$\left\|\left\{2^{-(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\right\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}\leq C2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\varepsilon_j}}.$$

Поэтому учитывая, что $\frac{1}{\varepsilon_j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}, j=1,...,m$, из формулы (10) получим

$$J_2\leq C2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{\bar{\tau}}$$

в случае $2 < \tau_j < +, j = 1, ..., m$. Поэтому из (6) получим

$$J_1 \leq C2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\alpha}{2}} 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{\bar{\tau}}$$

в случае $2 < \tau_j < +\infty, j = 1, ..., m$. Следовательно, из (5) будем иметь

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{\bar{\tau}}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ в случае $2 < \tau_j < +, j = 1, ..., m$. Поэтому

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \leq 2^{-n(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \asymp$$

$$\asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \tag{11}$$

случае $2 < \tau_j < +\infty, j = 1, ..., m$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $r_1 = ...r_\nu < r_{\nu+1} \leq ... \leq r_m$, $1 < p_j \leq 2$, $p_j^{'} = \frac{p_j}{p_j-1}$, $\max\limits_j p_j^{'} < \min\limits_j q_j$, $1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}$, $1 \leq \tau_j \leq \infty$, $r_j > 1 - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ...m$ *. Тогда*

1. $\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \leq CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}$ *в случае* $\tau_j \leq \theta_j < +\infty,\ \ j = 1, ..., m,$ *и*

2. $\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \leq CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}$

в случае $\theta_j < \tau_j \leq +\infty,\ \ j = 1, ..., m$ *.*

Доказательство. Пусть $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. Так как $r_j > 1 - \frac{1}{q_j} > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ..., m$, то $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B \subset L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$. Положим $p_0 = \min\limits_j\{p_j\}$. Тогда $p_0^{'} =$

$\min\limits_{j}\{p_j^{'}\}$. По условию теоремы $\max\limits_{j}\{p_j^{'}\} < \min\limits_{j}\{q_j\}$. Поэтому $p_0^{'} < q_j$, $j = 1,...,m$. В силу того, что $p_0 \leq p_j$, $j = 1,...,m$, справедливо включение $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_{p_0}(I^m)$. По предположению $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$. Следовательно $f \in L_{p_0}(I^m)$. По условию теоремы $p_j^{'} < q_j$, $r_j > 1 - \frac{1}{q_j}$, $j = 1,...,m$. Поэтому $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_j^{'}} > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_0^{'}}$, $j = 1,...,m$. Следовательно, по теореме B справедливо включение $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B \subset L_{p_0^{'}}(I^m)$. Поэтому по теореме B

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0^{'}} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0^{'}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Это неравенство применяем к функции $f - \Lambda_M f \in L_{p_0^{'}}(I^m)$. Тогда

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0^{'}} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\overline{s}}(f) - \Lambda_{M_{\bar{s}}}\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0^{'}} \right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle\geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}. \tag{12}$$

Далее, пользуясь леммой 1 при $q = p_0^{'}$, имеем

$$\|\delta_{\overline{s}}(f) - \Lambda_{M_{\bar{s}}}\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0^{'}} \leq C\lambda_{M_{\bar{s}}}\left(B^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0^{'}}\right) \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0^{'}})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}.$$

Поэтому из неравенства (12) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq$$

$$\leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0^{'}} - \frac{1}{q_j}\right)} \lambda_{M_{\bar{s}}}\left(B^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0^{'}}\right) \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0^{'}})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0} \right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle\geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} =$$

$$= C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_j}\right)} \lambda_{M_{\bar{s}}}\left(B^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0}, l^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}_{p_0^{'}}\right) \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p_0} \right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle\geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Теперь применяя теорему А при $q = p_0^{'}$, получим

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_j}\right)} 2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle \frac{1}{p_0^{'}}} M_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} =$$

$$= C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} M_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}. \qquad (13)$$

Так как $p_0 \leq p_j, j = 1, ..., m,$ то

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \leq C \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}.$$

Поэтому из (13) следует, что

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} M_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}. \qquad (14)$$

Теперь подставляя значения $M_{\bar{s}}$, будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} M_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \leq \qquad (15)$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2} - \frac{n\alpha}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} 2^{-\frac{\alpha}{2}\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2} - \frac{n\alpha}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} 2^{-\frac{\alpha}{2}\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{-\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Так как по условию теоремы $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j=1,...,m,$ то $\gamma_j = \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-1)}{r_1+\frac{1}{q_1}-1}$. Тогда

$$\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)} 2^{-\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} = 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-1)\sum\limits_{j=1}^{m} s_j \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-1)}{r_1+\frac{1}{q_1}-1}} \leq 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-1)\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle}.$$

Поэтому, если $r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2} > 0,$ то учитывая $\gamma_j^{'} \leq \gamma_j, \quad j=1,...,m,$ получим

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)} 2^{\frac{\alpha}{2}\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{-\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \leq$$

$$\leq \left\| \left\{ 2^{\frac{\alpha}{2}\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-1)\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} =$$

$$= \left\| \left\{ 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \leq$$

$$\leq 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}. \qquad (16)$$

Из неравенств (14), (15), (16) следует, что

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\alpha}{2}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} = \qquad (17)$$

$$= C 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{1}{2})} \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}^{'}\rangle \geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ при условии $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j = 1,...,m.$

Пусть $\tau_j \le \theta_j, j = 1, ..., m$. Тогда, применяя неравенство Йенсена (см. [2], гл.3, п.3.3), получим

$$\left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \ge n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \le \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}.$$

Поэтому из (17) следует

$$\|f - \Lambda_M f\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \le C 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})}$$

для любой функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}^{(1)}, \overline{\tau}} B$ в случае $\tau_j \le \theta_j, j = 1, ..., m$ при условии $r_1(1 - \frac{1}{q_j}) < r_j(1 - \frac{1}{q_1}), j = 1, ..., m$. Следовательно,

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}^{(1)}, \overline{\tau}} B, \ \ L^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \right) \le$$

$$\le C 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})} \asymp M^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu - 1)(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})} \qquad (18)$$

в случае $\tau_j \le \theta_j, j = 1, ..., m$, при условии $r_1(1 - \frac{1}{q_j}) < r_j(1 - \frac{1}{q_1}), j = 1, ..., m$.

Если $\theta_j < \tau_j, j = 1, ..., m$, то, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\left\| \left\{ 2^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2}) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \ge n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \le$$

$$\le \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \ge n} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \left\| \left\{ 2^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2}) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \ge n} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}}}, \qquad (19)$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m), \qquad \frac{1}{\varepsilon_j} = \frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j} = 1, \ \ j = 1, ..., m.$

Так как $r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2} > 0$, то пользуясь леммой 2, будем иметь

$$\left\| \left\{ 2^{-(r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2}) \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \ge n} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}}} \le C 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\varepsilon_j}} =$$

$$= C 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - 1 - \frac{\alpha}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})} \qquad (20)$$

при условии $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j=1,...,m$. Из неравенств (19), (20) следует, что

$$\left\| \left\{ 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle} \left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \right\}_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle\geq n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \leq$$

$$\leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{21}$$

в случае $\theta_j^{(2)} \leq \tau_j, j=1,...,m$, при условии $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j=1,...,m$.

Теперь из неравенств (14), (15), (21) получим

$$\|f-\Lambda_M f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-\frac{n}{2}-\frac{n\alpha}{2}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-1-\frac{\alpha}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ в случае $\theta_j^{(2)} \leq \tau_j, j=1,...,m$ при условии $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j=1,...,m$. Следовательно,

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\right) \leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})} \asymp$$

$$\asymp M^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}$$

в случае $\theta_j^{(2)} \leq \tau_j, j=1,...,m$, при условии $r_1(1-\frac{1}{q_j}) < r_j(1-\frac{1}{q_1}), j=1,...,m$. Теорема доказана.

Замечание 1. *В случае $q_1 \leq q_j,\ \ j=2,...,m$, в первом пункте теоремы 2 оценка является точной.*

Действительно, так как $1 < p_j < 2, j=1,...,m$, то $S^{\bar{r}}_{2,\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B \subset S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. В силу условия $2 \leq \tau_j, \theta_j^{(1)} < +\infty,\ j=1,...,m$, справедливо включение $S^{\bar{r}}_{2,2,2}B \subset S^{\bar{r}}_{2,\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. Следовательно $S^{\bar{r}}_{2,2,2}B \subset S^{\bar{r}}_{2,\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B \subset S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$.

Поэтому

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\right) \geq \lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{2,2,2}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\right). \tag{22}$$

Если $q_1 \le q_j$, $j = 2, ..., m$, то $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_{q_1}(I^m)$ и $\|f\|_{q_1} \le \|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$. Тогда

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,2,2}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \ge \lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,2,2}B,\ \ L_{q_1} \right). \tag{23}$$

в случае $2 \le \tau_j, \theta_j^{(1)}, j = 1, ..., m$.

Для класса $S^{\overline{r}}_{2,2}B$ в пространстве $L_{q_1}(I^m)$ А.С. Романюк [14] доказал оценку

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,2}B,\ \ L_{q_1} \right) \ge CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}.$$

Поэтому из неравенств (22), (23) следует, что

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \ge CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}$$

в случае $q_1 \le q_j$, $j = 2, ..., m$, $2 \le \tau_j, \theta_j^{(1)}, j = 1, ..., m$.

Теорема 4. *Пусть* $2 < p_j < q_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, $r_1 = ...r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$ $\tau_j \le \theta_j^{(2)}$, $j = 1, ..., m$. *Тогда справедлива оценка*

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \le CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Доказательство. По заданному натуральному числу M выберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^\gamma(f, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s},\bar{\gamma} \rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}, j = 1, ..., m$.

Частичная сумма есть линейный оператор. Поэтому по определению линейного поперечника имеем

$$\lambda_M \left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \right) \le \sup_{f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B} \|f - S_n^\gamma(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}. \tag{24}$$

В [22] доказана оценка

$$\sup_{f\in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar\theta^{(1)},\overline{\tau}}B} \|f-S_n^{\gamma}(f)\|^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}} \leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}. \tag{25}$$

Учитывая соотношение $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, из неравенств (24), (25) получим

$$\lambda_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\leq C2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\asymp M^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. *В случае* $q_1\leq q_j$, $j=2,...,m$, *оценка, установленная в теореме 3, является точной.*

Действительно, так как $2\leq p_j, j=1,...,m$, то в силу неравенства разных метрик нетрудно убедиться, что $S_{2,\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}^{\bar{\bar r}}}B\subset S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$, где $\bar{\bar r}=(\tilde r_1,...,\tilde r_m)$, $\tilde r_j=r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j}, j=1,...,m$. Поэтому

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\right)\geq \lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{\bar r}}_{2,2,2}B,\ \ L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\right). \tag{26}$$

В силу замечания 1 при $p_j=2, r_j=\tilde r_j, j=1,...,m$ имеем

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{\bar r}}_{2,2,2}B,\ \ L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\right)\geq CM^{-(\tilde r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}(\log M)^{(\nu-1)(\tilde r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}=$$

$$=CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Поэтому из неравенства (26) получим

$$\lambda_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^{*}_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\right)\geq CM^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Замечание 3. *В случае* $p_j=\theta_j^{(1)}=p$, $\tau_j=\tau$, $q_j=\theta_j^{(2)}=q$, $j=1,...,m$ *из теорем 1 – 3 следуют результаты А.С. Романюка [13], [14].*

Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ МОН РК.

Литература

1 Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms // Transactions American mathematical society. – 1981. – Vol. 263, № 1. – P. 146-167.

2 Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.:Наука, 1977. – 456 с.

3 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4, № 6. – С. 1342-1364.

4 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-ата, 1976. – 224 с.

5 Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1989. – Т. 187. – С. 143-161.

6 Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, № 3. – С. 81-120.

7 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, № 3. – С. 161-178.

8 Майоров В.Е. О линейных поперечниках соболевских классов // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 243, № 5. – С. 1127-1130.

9 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 1-112.

10 Галеев Э.М. Линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ. Серия математика, механика. – 1987. – № 4. – С. 13-16.

11 Галеев Э.М. Линейные поперечники классов Гельдера-Никольского периодических функций многих переменных // Математичекие заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 189-199.

12 Изаак А.Д. Поперечники классов Гельдера-Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой // Математические заметки. – 1996. – Т. 59, № 3. – С. 459-461.

13 Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Украинский математический журнал. – 2001. – Т. 53, № 5. – С. 647-661.

14 Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Украинский математический журнал. – 2001. – Т. 53, № 6. – С. 965-977.

15 Базарханов Д.Б. Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского-Бесова обобщенной смешанной гладкости // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 11-14.

16 Глускин Е.Д. Об одной задаче о поперечниках // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 219, № 3. – С. 527-530.

17 Глускин Е.Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Математический сборник. – 1983. – Т. 120, № 2. – С. 180-189.

18 Кашин Б.С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Известия АН Армянской ССР. Математика. – 1980. – Т. 15, № 5. – С. 379-394.

19 Акишев Г. О порядках M-членного приближения классов периодических функций // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 4. – С. 5-11.

20 Акишев Г. О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой // Математические заметки. – 2007. – Т. 81, № 1. – С. 3-16.

21 Акишев Г. Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Матер. науч.-практ. конф. "Уалихановские чтения – 9". – Кокшетау, 2004. С. 3-6.

22 Акишев Г. О порядках приближения классов в пространствах со смешанной нормой // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: тез. докл. междунар. конф., посв. 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. – Новосибирск, 2007. – С. 416-417.

Статья поступила в редакцию 21.08.13

Ақышев Ғ. ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНДЕ КЛАСТАРДЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ҚИМАЛАРЫН БАҒАЛАУ

Мақалада көп айнымалылы периодты функциялардың аралас нормалы Лоренц кеңістігі қарастырылған. Аралас нормалы Лоренц кеңістігінде Никольский-Бесов-Аманов класының сызықтық қималарының жоғарыдан бағалаулары табылған.

Akishev G. THE ESTIMATES OF THE LINEAR WIDTHS OF CLASSES IN THE LORENTZ SPACE

In this paper there is considered Lorentz space with mixed norm of periodic functions of many variables. There are obtained the estimates from above of the linear widths of the Nikol'ski-Besov-Amanov classes in the Lorentz space with anisotropic norm.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517

Л.А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ. 5. УРАВНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

На основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций рассмотрено бикватернионное волновое (*биволновое*) уравнение общего вида при бикватернионном представлении его структурного коэффициента. Если записать это уравнение в матричном (тензорном) виде, оно относится к классу уравнений Янга-Милса, которые используются в теоретической физике для математического описания элементарных частиц. Построены его обобщенные решения, описывающие нестационарные, гармонические и статические элементарные твисторы и поляризованные и неполяризованные твисторные поля.

Ключевые слова: *бикватернионное волновое уравнение, бикватернионный структурный коэффициент, твистор, элементарный твистор*

Настоящая статья является продолжением статей [1-4], где дифференциальная алгебра бикватернионов используется для построения обобщенных решений биволнового уравнения

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \mathbb{M}. \tag{1}$$

Keywords: *biquaternionic wave equation, biquaternionic structural coefficient, twistor, elementary twistor*

2010 Mathematics Subject Classification: 46S10, 53C80

Здесь $\nabla^{\pm} = \partial_\tau \pm i\nabla$ – *взаимные биградиенты*, структурный коэффициент F- постоянный комплексный бикватернион, $\mathbb{M}$ – пространство Минковского.

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида

$$\mathbf{A} \circ \nabla^{\pm}\mathbf{B} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B} = \mathbf{H}(\tau, x), \qquad (2)$$

которые приводятся к (1), если существует $\mathbf{A}^{-1}$[1]. В этом случае, умножая (2) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получим уравнение (1), где $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{C},\ \ \mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{H}$.

В [1] рассмотрен случай, когда структурный коэффициент - скаляр: $\mathbf{F} = m,\ m \in \mathbb{Z}$, в [2] – $\mathbf{F} = F, \quad F \in \mathbb{Z}^3$– трехмерный комплексный вектор. Там же показано, что уравнение (1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла (при $\mathbf{F} = 0$) и Дирака (при $\mathbf{F} = i\rho,\ \rho \in \mathbb{R}$).

Уравнение (1) при $\mathbf{G} = 0$ имеет вид уравнения трансформации зарядов-токов электрогравимагнитного (ЭГМ) поля [5, 6], описываемого бикватернионом $\mathbf{B}(\tau, x)$ под действием внешнего постоянного ЭГМ-поля, описываемого заданным структурным коэффициентом $\mathbf{F}$. Поэтому назовем его *уравнением трансформации.*

Здесь исследуем общий случай для произвольного постоянного бикватерниона

$$\mathbf{F} = f + F, \quad f = f_H + i f_E, \quad F = -(E + iH)$$

Здесь f_H, f_E - действительные числа, $E \in \mathbb{R}^3$, $H \in \mathbb{R}^3$.

Построим обобщенные решения (1) при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского: $\mathbf{G} \in \mathbb{B}'(\mathbb{M})$ [2].

5.1 Неоднородное биволновое уравнение и его решения

Введем дифференциальные бикватернионные операторы:

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}} = \nabla^{+} + \mathbf{F} = \nabla^{+} + f + F, \quad \mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}} = \nabla^{-} + \mathbf{F}^{-} = \nabla^{-} + f - F,$$

которые обладают следующим полезным свойством.

Лемма 1.

$$\boldsymbol{D}^{+}_{\boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{D}^{-}_{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{D}^{-}_{\boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{D}^{+}_{\boldsymbol{F}} = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F, F) - 2i(F, \nabla). \qquad (3)$$

где справа стоит волновой оператор (даламбертиан*)*

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta,$$

$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$*-лаплассиан.*

Доказательство. Как легко проверить [1],

$$\nabla^+ \circ \nabla^- = \nabla^- \circ \nabla^+ = \Box, \tag{4}$$

простым вычислением получим требуемое

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^- = \left(\nabla^+ + f + F\right) \circ \left(\nabla^- + f - F\right) = \Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla).$$

То же самое получим, вычисляя $\mathbf{D}_\mathbf{F}^- \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^+$.

Далее значок кватернионного умножения между операторами будем убирать

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \mathbf{D}_\mathbf{F}^- \triangleq \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^-.$$

Построим решения уравнения (1) для верхнего знака биградиента

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \qquad \mathbf{G}(\tau, x) \in \mathbb{B}'(\mathbb{M}). \tag{5}$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже, либо просто с помощью операции комплексного сопряжения.

Используя свойство (3), из (5) получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^- \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \mathbf{B} = \left\{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\} \mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^- \mathbf{G} \triangleq \mathbf{Q}.$$

Т.е. каждая компонента $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F, \nabla u) + f^2 u + (F,F)u = q(\tau, x) \tag{6}$$

с соответствующей $\mathbf{Q}$ правой частью.

Заметим, что это уравнение, если положить $m^2 = f^2 + (F,F)$, содержит оператор Клейна-Гордона-Фока $\left(\Box + m^2\right)$, а также дополнительное слагаемое: $2f\partial_\tau + 2i(F,\nabla)$. Если $f{=}ik$ – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шредингера $(2ik\partial_\tau - \Delta)$. По этой причине будем называть уравнение (6) *КГФШ-уравнением*, как и в [4] при векторном представлении структурного коэффициента.

Теорема 1. *Решение биволнового уравнения (1) можно представить в виде*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}(\psi * \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}\psi * \boldsymbol{G} + \boldsymbol{B}^0 = \psi * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{B}^0, \tag{7}$$

где $\psi(\tau,x)$ – фундаментальное решение уравнения (6) (при $q=\delta(\tau)\delta(x)$), а $\boldsymbol{B}^0(\tau,x)$ – решение однородного уравнения (5) (при $\boldsymbol{G}\equiv 0$):

$$\boldsymbol{B}^0 = \sum_{\psi^0} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}\psi^0 * \boldsymbol{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}\boldsymbol{C}^0 = \sum_{\psi^0} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}}^{-}\left(\psi^0 * \boldsymbol{C}^0\right) \tag{8}$$

$\psi^0(\tau,x)$ – решения однородного уравнения (6) (при $q=0$), $\boldsymbol{C}^0 \in \mathbb{B}'(\mathbb{M})$ – произвольные бикватернионы, допускающие такую свертку.

Доказательство. В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (7).

Подставим первое слагаемое в уравнение (7) и, используя (3) и свойство дифференцирования свертки [7,2], получим

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}(\psi * \mathbf{G}) = \\ = \left\{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\}\psi * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.\end{gathered}$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\left(\psi^0 * \mathbf{C}^0\right) = \left\{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\}\psi^0 * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Очевидно в силу линейности уравнения (1) любое решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах теоремы (7) и (8) для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления сверток, что зависит от конкретного вида входящих в свертку функций.

Следовательно, класс решений биволнового уравнения (5) определяется скалярными функциями $\psi(\tau,\, x)$ и $\psi^0(\tau,\, x)$ – решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными потенциалами* биволнового уравнения (1).

5.2 Скалярные потенциалы неоднородного биволнового уравнения

Построим вначале решения неоднородного уравнения (6) для произвольных $q(x,\tau)$.

Теорема 2. *Фундаментальные решения уравнения (6) имеют вид*

$$\psi = (1-a)\frac{e^{-i(F,x)-\|x\| f}}{4\pi\,\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + a\frac{e^{-i(F,x)+\|x\| f}}{4\pi\,\|x\|}\delta(\tau + \|x\|) + \psi^0, \quad \forall a \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

где $\delta(\tau \mp \|x\|)$ *– простые слои на световых конусах* $\tau = \pm\|x\|$*;* $\psi^0(\tau, x)$ *– решение однородного уравнения (6) (при* $q = 0$*).*

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные Фурье,соответствующие (τ, x) обозначаем (ω, ξ)соответственно.

Уравнение для ψ имеет вид:

$$\Box\psi + 2f\partial_\tau\psi + 2i(F, \nabla\psi) + f^2\psi + (F,F)\psi = \delta(\tau)\delta(x). \tag{10}$$

Его преобразование Фурье

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F,\xi) + f^2 + (F,F)\right)\bar{\psi}(\omega,\xi) = 1$$

можно записать в виде

$$\left\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\right\}\bar{\psi} = 1.$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega,\xi) = \frac{1}{(\xi + F, \xi + F) - (\omega + if)^2} \tag{11}$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$$\Box\chi = \delta(x,t),$$

которое имеет вид

$$\chi(x,\tau) = \frac{1-a}{4\pi\,\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + \frac{a}{4\pi\,\|x\|}\delta(\tau + \|x\|), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Это сингулярные обобщенные функции – простые слои на световом конусе "будущего и прошедшего": $\tau = \pm\|x\|$. Их преобразование Фурье равно следующим регуляризациям функции $\left(\|\xi\|^2 - \omega^2\right)^{-1}$:

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau\mp\|x\|)\right]=\frac{1}{\|\xi\|^2-\omega^2\pm i0}. \qquad (12)$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [9], из (11) и (12) следует формула

$$\psi=\frac{e^{i(F,x)-\tau f}}{4\pi\|x\|}\left((1-a)\delta(\tau-\|x\|)+a\delta(\tau+\|x\|)\right)+\psi^0, \quad \forall a\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку на носителе первого слагаемого $\tau=\|x\|$, а у второго $\tau=-\|x\|$, в результате получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что ψ– сингулярная обобщенная функция, включающая две сферические расходящиеся и сходящиеся волны, распространяющиеся в R^3 с единичной скоростью (если τ- время). При $ReF=E\neq 0$ реальная и мнимая части плотности слоя на сфере $\|x\|=|\tau|$ колеблются с изменением x. $ImF=H$ дает экспоненциальное затухание или возрастание плотности в зависимости от направления x по отношению к H с ростом $\|x\|$. Ref дает экспоненциальное затухание плотности простого слоя на сфере с ростом времени, а влияние Imf рассмотрим несколько позже.

Теорема 3. *Если* $\sup_\tau q(x,\tau)=\{\tau:\tau\geq 0\}$ *и* $q(x,\tau)$ *– регулярная функция такая, что при малых* x *для* $\forall\tau>0 \quad \exists\varepsilon<1$*:* $|q(x,\tau)|\leq O\left(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}\right)$, *то обобщенное решение уравнения (6) имеет вид:*

$$u=\psi^0+\frac{e^{i(F,x)}}{4\pi}H(\tau)\int_{r<\tau}\frac{e^{-i(F,y)-rf}}{r}\,q(y,\tau-r)dV(y), \quad r=\|y-x\| \qquad (13)$$

Доказательство. Используя свойство фундаментального решения [7], получим обобщенное решение в виде свертки:

$$u=q(x,\tau)*\frac{e^{i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)=$$

$$=\frac{e^{i(F,x)}}{4\pi}H(\tau)\int_{\|y-x\|<\tau}\frac{e^{-i(F,y)-\|x-y\|f}}{\|y-x\|}q(y,\tau-\|y-x\|)dV(y),$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$. Что дает формулу теоремы. При этом интеграл существует в силу условий на $q(x,\tau)$.

5.3 Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения

Рассмотрим решения однородного уравнения (6)

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla u) + f^2 u + (F,F)u = 0. \qquad (14)$$

Его преобразование Фурье имеет вид:

$$\left\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\right\} \bar{\psi}^0 = 0$$

Следовательно [9],

$$\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega,\xi)\delta_S(\omega,\xi),$$

где $\delta_S(\omega,\xi)$ – простой слой на поверхности S в M, на которой выполняются условия

$$S = \left\{(\omega,\xi) : (\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2 = 0\right\},$$

плотность простого слоя $\varphi(\omega,\xi)$– произвольная интегрируемая на S функция.

Формальное решение уравнения (14) имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau,x) = \int_S \varphi(\omega,\xi)\exp(-i\omega\tau - i(x,\xi))dS(\omega,\xi), \forall\varphi(\omega,\xi) \in L_1(S) \qquad (15)$$

При каких $\mathbf{F}$ такая поверхность существует, и какой вид она имеет?

5.3.1. Рассмотрим вначале случай, когда

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = i\varepsilon - E,$$

где ε, E – действительные скаляр и вектор. Тогда S – это поверхность в $R^4 = \left\{(\omega,\xi) \triangleq (\omega,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right\}$, описываемая уравнением:

$$S = \left\{(\omega, \xi) : (\xi - E, \xi - E) - (\varepsilon - \omega)^2 = 0\right\}.$$

Это трехмерный конус в R^4 с вершиной в точке $(\omega, \xi) = (\varepsilon, E)$. Так как на его поверхности

$$\omega = \pm \|\xi - E\| + \varepsilon,$$

интеграл (15) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi^0(\tau, x) = e^{-i\varepsilon\tau} \int_{R^3} \phi(\xi) \exp\left(\pm i \|\xi - E\| \tau - i(x, \xi)\right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ = e^{-i(\varepsilon\tau + (x, E))} \int_{R^3} \varphi(\varsigma) \exp\left(\pm i \|\varsigma\| \tau - i(x, \varsigma)\right) d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\forall \varphi(\varsigma) \in L_1(R^3)$ - произвольная интегрируемая на R^3 функция.

5.3.2. Если же $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$ (h, H – действительные скаляр и вектор), тогда из (14) следует:

$$\|\xi\|^2 - \omega^2 + \left(h^2 - \|H\|^2\right) - 2i\left((H, \xi) + h\omega\right) = 0.$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух множеств в R^4, задаваемых равенствами

$$S = \left\{(\omega, \xi) : \|\xi\|^2 = \omega^2 + \|H\|^2 - h^2, \quad h\omega + (H, \xi) = 0\right\} \tag{17}$$

При $H = 0$

$$S = \left\{(\omega, \xi) : \|\xi\|^2 = -h^2, \quad \omega = 0\right\},$$

откуда следует, что такой поверхности не существует.

При $H \neq 0$ второе уравнение – это трехмерная гиперплоскость в R^4, проходящая через начало координат, с вектором нормали (h, H).

Если $h \neq 0$, то S – это пересечение трехмерного гиперболоида с трехмерной гиперплоскостью, на котором

$$\|\xi\|^2 = (h^{-1}H, \xi)^2 + \|H\|^2 - h, \quad \omega = -(h^{-1}H, \xi) \quad \Rightarrow$$

$$\|\xi\|^2 = \frac{\|H\|^2 - h^2}{1 - (e_\xi,\ h^{-1}H)^2}, \qquad e_\xi = \frac{\xi}{\|\xi\|}. \tag{18}$$

Условием существования такого пересечения является неравенство

$$\frac{\|H\|^2 - h^2}{h^2 - \ \|H\|^2 \cos^2\theta} > 0, \tag{19}$$

где θ – угол между ξ и H .

Неравенство выполняется при $|h| < \|H\|$, если $|\cos\theta| < \frac{|h|}{\|H\|} < 1$. При $|h| > \|H\|$ решений нет, так как $|\cos\theta| \leq 1$.

Легко видеть, что $S_{\bigcap}(\xi)$ – это однополостный гиперболоид вращения вокруг вектора H в R^3, полуоси которого определяются величинами

$$\left(\|H\|^2 - h^2\right)^{1/2}, \quad \left(\|H\|^2 - h^2\right)^{1/2}, \ h.$$

Решение (15) приводится к виду

$$\psi^0(\tau,x) = \int_{S_{\bigcap}(\xi)} \varphi(\xi) \exp\left(i(\tau h^{-1}H - x, \ \xi)\right) dS_{\bigcap}(\xi), \forall\varphi(\xi) \in L_1\left(S_{\bigcap}(\xi)\right), \tag{20}$$

где

$$S_{\bigcap}(\xi) = \left\{\xi : \|\xi\| = \sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2}{1 - \|h^{-1}H\|^2 \cos^2\theta}}, \ \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|h|}{\|H\|} < \theta < \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{|h|}{\|H\|}\right\}.$$

Этот интеграл можно упростить, если перейти к декартовой системе координат, связанной с вектором H,

$$\xi = \sum_{k=1}^{3} \zeta_k e^k, \quad e^3 = e_H = H/\|H\|.$$

Тогда

$$S_{\bigcap}(\xi) \to S_\varsigma = \left\{\zeta : \frac{\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2 - h^2} - \frac{1}{h^2}\zeta_3^2 = 1\right\}, \quad \|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_1^2$$

и интеграл (20) преобразуется к интегралу по плоскости $(\varsigma_1, \varsigma_2)$ с выколотым кругом радиуса $r = \|H\|^2 - h^2$, на которой $\zeta_3 = \pm\sqrt{\frac{h^2\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2 - h^2}}$.

Обозначим

$$\alpha(r) = \frac{|h|\, r}{\sqrt{\|H\|^2 - h^2}}$$

Действительно, в силу ортогональности H к e^1 и e^2 имеем

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{S_\zeta} \gamma(\varsigma) \exp\left(ih^{-1}(H, \varsigma)\tau - i \sum_{k=1}^{2} (x, e^k)\zeta_k - i(x, e_H)\zeta_3) \right) dS_\zeta \quad \Rightarrow$$

$$\psi^0(\tau, x) = \int\limits_{\|\varsigma\|_2^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\varsigma) \exp(\pm i\tau h^{-1} \|H\| \, \alpha(\|\varsigma\|) -$$

$$-i(\varsigma,\, x_{\perp H}) \ \mp i(x, e_H)\alpha(\|\varsigma\|)) d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$\forall \gamma(\varsigma) \in L_1(\varsigma \in R^2)$.

Остался случай $h = 0$. Тогда из (18) получим:

$$S = \left\{ \omega = \pm\sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2},\ \|\xi\| \geq \|H\|\,, \quad (H, \xi) = 0 \right\}$$

$$\psi^0(\tau, x) = \int\limits_{\{\xi \perp H\} \bigcap \{\|\xi\| \geq \|H\|\}} \varphi(\xi) \exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2} - (x, \xi)) \right) dV(\xi) \ \Rightarrow$$

$$\psi^0_{\mp}(\tau, x) = \iint\limits_{\|\varsigma\|_2 \geq \|H\|} \gamma(\varsigma) \exp\left(-i \left(\varsigma_1(x, e_H^1) + \varsigma_2(x, e_H^2) \mp \tau\sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2} \right) \right) d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$\forall \gamma(\varsigma) \in L_1 \left(\varsigma \in R^2, \quad \|\varsigma\| \geq \|H\| \right)$. Здесь область интегрирования тоже совпадает с плоскостью, перпендикулярной вектору H, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4. *Решения однородного биволнового уравнения (1) при* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$ *существуют , если* $\|H\| > |h|$, *и имеют вид: при* $|h| \neq 0$

$$\psi^0_{\pm}(\tau, x) = \iint\limits_{\|\varsigma\|^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\varsigma) \exp(\pm i\tau h^{-1} \|H\| \alpha(\|\varsigma\|) -$$

$$-i(\varsigma,\, x_{\perp H})\ \mp i(x, e_H)\alpha(\|\varsigma\|))d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{21}$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\left\{\varsigma\in R^2:\|\varsigma\|^2\geq\|H\|^2-h^2\right\}\right), x_{\perp H}=x-(x,e_H)\,e_H$, *при* $|h|=0$

$$\psi^0_{\mp}(\tau,x)=\iint\limits_{\|\varsigma\|\geq\|H\|}\gamma(\varsigma)\exp\left(-i\left(\ \varsigma_1(x,e^1_H)+\varsigma_2(x,e^2_H)\mp\tau\sqrt{\|\zeta\|^2-\|H\|^2}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{22}$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\varsigma\in R^2,\quad\|\varsigma\|\geq\|H\|\right)$, *либо представимы в виде линейной комбинации решений такого вида*

$$\psi^0(\tau,x)=a\psi^0_+(\tau,x)+b\psi^0_-(\tau,x),\quad a,b\in\mathbb{Z}.$$

5.3.3. В общем случае структурный коэффициент

$$\mathbf{F}=f+F=(f_1+if_2)+(F_1+iF_2) \tag{23}$$

разлагается на два бикватерниона:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=(h+i\varepsilon)-(E+iH), \tag{24}$$

$$\mathbf{F}_1=if_2+F_1=i\varepsilon-E,\quad \mathbf{F}_2=f_1+iF_2=h-iH.$$

Предполагаем здесь, что

$$F_1\neq 0,\quad F_2\neq 0. \tag{25}$$

Тогда гиперповерхность (14) описывается соотношениями

$$S=\left\{(\omega,\xi):((\xi-E)-iH,\ (\xi-E)-iH))+(h+i(\varepsilon-\omega))^2=0\right\}. \tag{26}$$

Выделим действительную и мнимую части

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-\|H\|^2-2i\,(H,(\xi-E))+(h^2-(\varepsilon-\omega)^2+2ih(\varepsilon-\omega))=0\right\},$$

приравнивая их нулю, получим S – пересечение двух гиперповерхностей в R^4

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-(\omega-\varepsilon)^2=\|H\|^2-h^2\bigcap(H,(\xi-E))+h(\omega-\varepsilon)=0\right\}. \tag{27}$$

Чтобы второе уравнение описывало гиперплоскость, необходимо, чтобы H и h не обращались одновременно в ноль в R^4. В противном имеем случай 3.1.

Если $\|H\| - |h| \neq 0$, то S – это пересечение в R^4 трехмерного однополостного (при $\|H\| - |h| > 0$) или двуполостного (при $\|H\| - |h| < 0$) гиперболоида, сдвинутого на вектор $(\omega^*, \xi^*) = (\varepsilon, E)$, с трехмерной гиперплоскостью с тем же сдвигом, которое в R^3 описывается множествами вида

$$S_{\bigcap}(\xi)=\left\{\omega = \varepsilon - h^{-1}(H, \xi - E),\ \xi{:}\left\{\|\xi - E\|^2 - \left(h^{-1}H, \xi - E\right)^2 = \|H\|^2 - h^2\right\}\right\} \tag{28}$$

Из формулы (14) и формулы (28) следует при $|h| \neq 0$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon} \int_{S_{\bigcap}(\xi)} \phi(\xi) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \xi) - (x, \xi)\right)\right) dS_{\bigcap}(\xi)$$

для $\forall \phi(\xi) \in L_1\left(S_{\bigcap}(\xi)\right)$.

Переходя к системе координат с началом в точке $\xi^* = E$ и ортами $e^1, e^2, e^3 = h^{-1}H / \left\|h^{-1}H\right\|$, получим

$$S_{\varsigma}(\varepsilon,\, E) = \left\{\varsigma \in R^3 : \|\varsigma\|^2 - \left(\left\|h^{-1}H\right\| \varsigma_3\right)^2 = \|H\|^2 - h^2\right\} =$$

$$= \left\{\varsigma \in R^3 : \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + (1 - \left\|h^{-1}H\right\|^2)\varsigma_3^2 = \|H\|^2 - h^2\right\}$$

Следовательно, такая поверхность существует, если $\|H\| > |h|$, и на ней

$$\varsigma_3(\|\varsigma\|) = \pm\sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2 - \|\zeta\|^2}{(1 - \|h^{-1}H\|^2)}}, \quad \|\zeta\|^2 > \|H\|^2 - h^2, \quad \varsigma \in R^2.$$

В этой системе координат решение (27) можно представить в виде

$$\psi^0(\tau, x) = \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i\,(x, E)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{S_{\bigcap}(\xi)} \phi(\xi) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \xi - E) - (x, \xi - E)\right)\right) dS_{\bigcap}(\xi) =$$

$$= \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i\,(x, E)\right) \times$$

$$\times \iint\limits_{\|\varsigma\| > \sqrt{\|H\|^2 - h^2}} \gamma(\varsigma) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \|\varsigma\|\, e_H) - (x_{\perp H}, \varsigma) \mp \varsigma_3(\|\varsigma\|) x_{\| H}\right)\right) d\varsigma_1 d\varsigma_1$$

$\forall \gamma(\varsigma) \in L_1 \left\{\varsigma : \|\varsigma\| \le \sqrt{\|H\|^2 - h^2}\right\}$, $x{=}x_{\|H} e^3 + x_{\perp H},\ x_{\|H} = (x, e^3),\ \ x_{\perp H} = x - (x, e^3)e^3$.

Если $|h| = 0$, тогда

$$S = \left\{(\omega, \xi) : \|\xi - E\|^2 - (\omega - \varepsilon)^2 = \|H\|^2 \bigcap (H, (\xi - E) = 0)\right\},$$

$$S_{\bigcap}(\xi) = \left\{(\omega, \xi) : \omega = \varepsilon \pm \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}\right.$$
$$\left.\xi : \left\{\ \|\xi - E\|^2 \ge \|H\|^2 \bigcap (H, (\xi - E) = 0)\ \right\}\right\},$$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon} \int\limits_{\xi - E \perp H\ \bigcap\ \|\xi - E\| \ge \|H\|} \varphi(\xi) \times$$
$$\times \exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - (x, \xi))\right) dS_{\bigcap}(\xi),$$

$\forall \varphi(\xi) \in L_1(S_{\bigcap}(\xi))$. Здесь $S_{\bigcap}(\xi)$– это часть плоскости, перпендикулярной вектору H, проходящей через точку $\xi^* = E$, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$, с центром в той же точке $\xi^* = E$. Интеграл тоже можно упростить, переходя к системе координат, связанной с осями соответствующего однополостного гиперболоида.

Сформулируем полученные результаты в следующей теореме.

Теорема 5. *Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения общего вида (1), удовлетворяющие уравнению (14), существуют при $\|H\| > |h|$ и представимы в виде линейной комбинаций решений вида: при $|h| \ne 0$*

$$\psi^0(\tau, x) = \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i\,(x, E)\right) \times$$
$$\times \iint_{\|\varsigma\| > \sqrt{\|H\|^2 - h^2}} \gamma(\varsigma) \exp\left(i\left(\tau h^{-1}\,\|H\|\,\|\varsigma\| - (x_{\perp H}, \varsigma) \mp \varsigma_3(\|\varsigma\|) x_{\| H}\right)\right) d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{29}$$

при $|h| = 0$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon - i(x,E)} \int_{\|\varsigma\| \geq \|H\|} \gamma(\varsigma)\times$$

$$\times \exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\varsigma\|^2 - \|H\|^2} - (x_{\perp H}, \varsigma) - \left(x, \frac{H}{\|H\|}\right)\right) d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$\forall\gamma(\varsigma) \in L_1\left\{\varsigma \in R^2 : \|\varsigma\| \geq \sqrt{\|H\|^2 - h^2}\right\}$, $x_{\|H} = (x, e^3)$, $x_{\perp H} = x - x_{\|H} e^3$, $e^3 = H/\|H\|$.

В силу произвольности $\gamma(\varsigma)$, можно строить множество скалярных потенциалов и соответственно решений исходного бикватернионного уравнения (1).

Рассмотрим далее класс элементарных решений твисторного уравнения (1), через которые можно выразить любые его решения.

5.4 Элементарные твисторы и твисторные поля

Назовем решения однородного биволнового уравнения (1) *твисторами.* Построим их бикватернионные представления.

5.4.1. Рассмотрим вначале случай, когда $F = F_1 = i\varepsilon + E$, и скалярные потенциалы имеют вид (16). Заметим, что входящие в них функции

$$\psi_\xi^\pm(\tau, x) = \exp\left((-i\varepsilon\tau \pm i\,\|\xi - E\|)\,\tau - i(x, \xi)\right), \quad \forall\xi \in R^3, \tag{30}$$

по построению являются решением однородного уравнения (14) и представляют собой две гармонические волны, движущиеся с фазовой скоростью $c = \frac{-\varepsilon \pm \|\xi - E\|}{\|\xi\|}$ в направлении волнового вектора ξ (или противоположном направлении в зависимости от знака c); длина волн $\lambda = 2\pi/\|\xi\|$, их частота $\varpi = |-\varepsilon \pm \|\xi - E\||$, период колебаний $T = \frac{2\pi}{|-\varepsilon \pm \|\xi - E\||}$.

При $\|\xi\| \to \infty \quad c \to \pm 1,\ \lambda \to 0,\ \varpi \to \pm\infty, \quad T \to 0$.

Рассмотрим порождаемый ими *элементарный ξ-твистор*

$$\begin{gathered} \Psi\mathrm{E}_\xi^\pm = \frac{1}{\sqrt{\|\xi\|^2 + \|E\|^2}} D_F^- \psi_\xi^\pm = \\ = \frac{1}{\sqrt{\|\xi\|^2 + \|E\|^2}} \left(\pm i\,\|\xi - E\| - (\xi + E)\right) \psi_\xi^\pm \end{gathered} \tag{31}$$

Интересно, что его амплитуда не зависит от ε. Его норма и псевдонорма равны

$$\left\|\Psi\mathrm{E}_{\xi}^{\pm}\right\| = \sqrt{\frac{\|\xi\|^2+\|E\|}{\|\xi\|^2+\|E\|^2}^2} = 1, \tag{32}$$

$\left\langle\left\langle\Psi\mathrm{E}_{\xi}^{\pm}\right\rangle\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{\|\xi\|^2+\|E\|^2}}\sqrt{2\,(\xi,\ E)}$. При $E\perp\xi \quad \left\langle\left\langle\Psi_{\xi}^{\pm}\right\rangle\right\rangle = 0$, при $E = \xi \quad \left\langle\left\langle\Psi_{\xi}^{\pm}\right\rangle\right\rangle = i$.

Бикватернионы – свертки вида

$$B\mathrm{E}^0(\tau,x,\xi) = \Psi\mathrm{E}_{\xi}^{\pm}(\tau,x) * C^0(\tau,x), \tag{33}$$

где $C^0(\tau,x)$ – произвольные функциональные бикватернионы, допускающие такую свертку, в силу свойств свертки, также являются твисторами, и описывают ξ – поляризованные нестационарные твисторные C^0 – поля

Используя $\Psi_{\xi}^{\pm}$, можно также строить неполяризованные твисторы $B\mathrm{E}^0(\tau,x)$ в виде

$$\begin{gathered} B\mathrm{E}^0(\tau,x) = \textstyle\sum_{C^0,\Psi^\phi} \Psi\mathrm{E}^{\phi}(\tau,x) * C^0(\tau,x), \\ \Psi\mathrm{E}^{\phi}(\tau,x) = \textstyle\int_{R^3} \phi(\xi)\Psi\mathrm{E}_{\xi}^{\pm}(\tau,x)dV(\xi), \quad \forall\phi(\xi):\phi(\xi)\,\|\xi\|^{-1}\in L_1(R^3) \end{gathered} \tag{34}$$

Бикватернионы $C^0(\tau,x)$ произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

5.4.2. При $F = F_2 = h - iH$, $h \neq 0$, как следует из (21), функции

$$\begin{gathered} \psi_{\pm}(\tau,\ x) = \exp\left(\pm i\tau h^{-1}\,\|H\|\,\alpha(\|\varsigma\|) - i(\varsigma,\ x_{\perp H})\ \mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\right) = \\ = \exp\left(i\left(\tau h^{-1}\,\|H\|\,\alpha(\|\varsigma\|) - \varsigma_1\,x_1^{'} - \varsigma_2\,x_2^{'}\ \mp x_3^{'}\,\alpha(\|\varsigma\|)\right)\right) \end{gathered} \tag{35}$$

являются скалярными потенциалами однородного биволнового уравнения. Для построения соответствующего ему твистора рассмотрим билинейное уравнение в системе координат $\left(x_1^{'},x_2^{'},x_3^{'}\right)$, связанной с вектором H (далее штрихи опускаем).

Скалярный потенциал $\psi_\xi(\tau, x)$ описывает гармонические волны в направлении волнового вектора $k_\varsigma = \{\varsigma_1\,, \varsigma_2\,, \pm h\alpha(\|\varsigma\|)\}$, частота колебаний которых $\varpi = \left|h^{-1}\,\|H\|\,\alpha(\|\varsigma\|)\right|$, период $T = 2\pi/\varpi$, длина волны $L = 2\pi/\,\|k_\varsigma\|\,.$

Вычислим порождаемые ими элементарные твисторы

$$\Psi H_\varsigma^{\pm}(\tau,\,x) = \tfrac{1}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}} D_F^{-}\psi_\varsigma^{\pm}(\tau,\,x) =$$
$$= \tfrac{\psi_\varsigma^{\pm}}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}}\left(h \pm ih^{-1}\,\|H\|\,\alpha(\|\varsigma\|) - \{\varsigma_1, \varsigma_2, \mp\alpha(\|\varsigma\|)\} + iH\right) \tag{36}$$

Их псевдонорма и норма имеют вид

$$\left\langle\left\langle \Psi H_\varsigma^{\pm}\right\rangle\right\rangle = 1$$

$$\left\|\Psi H_\varsigma^{\pm}\right\|^2 = \frac{\|H\|^2}{\|H\|^4 - h^4}\left(2\,\|\varsigma\| + sgn(h)\sqrt{\|H\|^2 - h^2}\right)^2.$$

Если $\|\varsigma\| = \sqrt{\|H\|^2 - h^2}$, то

$$\left\|\Psi H_\varsigma^{\pm}\right\|^2 = \tfrac{\|H\|^2}{\|H\|^4 - h^4}\left(2\sqrt{\|H\|^2 - h^2} + sgn(h)\sqrt{\|H\|^2 - h^2}\right)^2.$$

Тогда при h<0 $\left\|\Psi H_\varsigma^{\pm}\right\| = \frac{\|H\|}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}}$, при h>0 $\left\|\Psi H_\varsigma^{\pm}\right\| = \frac{\|H\|\sqrt{3}}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}}$.

5.4.3. В общем случае для удобства выкладок будем работать в системе координат, изначально связанной с вектором H ($H \parallel e_3$). Рассмотрим входящие в скалярные потенциалы $\psi^0(\tau, x)$ подынтегральные функции из теоремы 5, которые в выбранной системе координат имеют вид

$$\psi_\varsigma^{\pm}(\tau, x) = \exp\left(-i\left(\tau\left(\varepsilon + h^{-1}\,\|H\|\,(\|\varsigma\| - E_3)\right) + \left(x, E - \Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)\right)\right)\right) \tag{37}$$

Здесь

$$\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|) = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \pm\alpha(\|\varsigma\|)\}, \alpha(\|\varsigma\|) = \sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2 - \|\zeta\|^2}{(1 - \|h^{-1}H\|^2)}},$$

$$\|\zeta\|^2 > \|H\|^2 - h^2, \quad \varsigma \in R^2.$$

По построению они тоже являются решениями (14) и описывают соответственно знаку две гармонические волны, движущиеся с фазовыми скоростями $c^{\pm} = \frac{\varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\varsigma\| - E_3)}{\|\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|) - E\|}$ в направлении волновых векторов $\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|) - E$; длина волн $\lambda^{\pm} = 2\pi / \|\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|) - E\|$, их частота $\varpi = \varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\varsigma\| - E_3)$, период колебаний $T = \frac{2\pi}{\varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\varsigma\| - E_3)}$.

Вычислим порождаемый ими *элементарный ξ-твистор*

$$\Psi^{\pm}_{\varsigma}(\tau,\, x) = D^{-}_{F}\psi^{\pm}_{\varsigma}(\tau,\, x) =$$
$$= \left(h - i\left(h^{-1}\|H\|\left(\|\varsigma\| - E_3\right)\right) + \Pi^{\pm}(\|\varsigma\|) + iH\right)\psi^{\pm}_{\varsigma} \tag{38}$$

Его норма и псевдонорма равны

$$\left\|\Psi^{\pm}_{\xi}\right\| = \sqrt{h^2 + \|h^{-1}H\|^2\left(\|\varsigma\| - E_3\right)^2 + \|H\|^2 + \|\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)\|^2} =$$
$$= \sqrt{h^2 + \|h^{-1}H\|^2\left(\|\varsigma\| - E_3\right)^2 + \|H\|^2 + \|\varsigma\|^2 + \frac{\|H\|^2 - h^2 - \|\zeta\|^2}{(1 - \|h^{-1}H\|^2):}} \tag{39}$$

$$\left\langle\left\langle\Psi^{\pm}_{\xi}\right\rangle\right\rangle = \left\|h^{-1}H\right\|^2\left(\|\varsigma\| - E_3\right)^2 + h^2 - \|H\|^2 - \|\varsigma\|^2 - h^2\frac{\|\zeta\|^2 + \left(h^2 - \|H\|^2\right)}{(h^2 - \|H\|^2)} =$$
$$= \left\|h^{-1}H\right\|^2\left(\|\varsigma\| - E_3\right)^2 - \|H\|^2 - \|\varsigma\|^2\left(1 + \frac{h^2}{h^2 - \|H\|^2}\right) \tag{40}$$

Твисторы – свертки вида

$$B^0(\tau, x, \xi) = \Psi_{\xi}(\tau, x) * C^0(\tau, x), \tag{41}$$

$$B^0(\tau, x) = \sum_{C^0(\tau,x)} \Psi^{\chi}(\tau, x) * C^0(\tau, x),$$
$$\Psi^{\chi}(\tau, x) = \int_{\|\zeta\|^2 > \|H\|^2 - h^2} \chi(\varsigma)\Psi_{\zeta}(\tau, x)dV(\zeta), \tag{42}$$

$\forall\chi(\varsigma) \in L_1\left\{\varsigma \in R^2 : \|\zeta\|^2 > \|H\|^2 - h^2\right\}$, описывают ξ – поляризованные (41) и неполяризованные (42) нестационарные твисторные C^0 – поля, порождаемые потенциалом $\Psi^{\chi}(\tau, x)$, амплитуда которых в каждой точке поля определяется значением $C^0(\tau, x)$.

5.5 Стационарные решения уравнения трансформации

Рассмотрим также важный для приложений класс решений уравнения (1) вида $\mathbf{B}{=}\mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau}$, которые описывают гармонические колебания с частотой ω $(\omega > 0)$. Предполагается, что правая часть (1) имеет ту же структуру: $\mathbf{G} = i\mathbf{G}(x)e^{-i\omega\tau}$.

Тогда из уравнения (1) получим уравнение для комплексных амплитуд

$$\left(\nabla^{\mp}_{\omega} + i\mathbf{F}\right) \circ \mathbf{B} = i\mathbf{G}, \tag{43}$$

где $\nabla^{\pm}_{\omega} = \omega \pm \nabla$. Назовем уравнение вида

$$\left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \mathbf{F}\right) \circ \mathbf{B}(x) = \mathbf{G}(x) \tag{44}$$

стационарным биволновым уравнением общего вида. Решения соответствующего однородного уравнения назовем *ω-твисторами.*

Также прямым вычислением доказывается следующее свойство.

Лемма 2.

$$\begin{gathered}\left(\nabla^{-}_{\omega} + F^{-}\right) \circ \left(\nabla^{+}_{\omega} + F\right) = (\omega - \nabla + f - F) \circ (\omega + \nabla + f + F) = \\ = ((f + \omega) - (\nabla + F)) \circ ((\omega + f) + (\nabla + F)) = \\ = \Delta + 2(F, \nabla) + (\omega + f)^2 + (F, F).\end{gathered} \tag{45}$$

Используя его, получим

$$\begin{gathered}\left(\nabla^{-}_{\omega} + F^{-}\right)\left(\nabla^{+}_{\omega} + F\right) B = \\ = \left(\Delta + (F, \nabla) + (\omega + f)^2 + (F, F)\right) B = \left(\nabla^{-}_{\omega} + F^{-}\right) G = Q.\end{gathered}$$

Т.е. каждая компонента является решением уравнения

$$\Big(\Delta + 2(F, \nabla) + (\omega + f)^2 + (F, F)\Big)\, \psi_{\omega} = q(x) \tag{46}$$

с соответствующей Q правой частью. Построим фундаментальное решение этого уравнения, используя обобщенное преобразование Фурье по x. Аналогично (11) получим

$$\bar{\psi}_\omega = \frac{1}{(\omega+f)^2 - \|\xi\|^2 - 2i(F,\xi) + (F,F)} = \frac{1}{(\omega+f)^2 - (\xi+iF, \xi+iF)}\,.$$

Используя фундаментальное решение уравнения Гельмгольца [9]

$$\Delta\chi + (\omega+f)^2\,\chi = \delta(x),$$

$$\chi = -\frac{1}{4\pi\,\|x\|}(ae^{i(\omega+f)\|x\|} + (1-a)e^{-i(\omega+f)\|x\|}),\ \ \forall a \in \mathbb{Z},$$

$$\bar{\chi} = -\frac{a}{\|\xi\|^2 - (\omega+f)^2 + i0} - \frac{1-a}{\|\xi\|^2 - (\omega+f)^2 - i0}\,,$$

и свойства преобразования Фурье, получим

$$\psi_\omega(x) = \frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\,\|x\|}(ae^{i(\omega+f)\|x\|} + (1-a)e^{-i(\omega+f)\|x\|}). \tag{47}$$

На его основе аналогично, как в нестационарном случае, доказывается теорема.

Теорема 6. *Решения стационарного уравнения (44) можно представить в виде суммы бикватернионов*

$$\boldsymbol{B} = \left(\nabla^{\pm}_{\omega} + \boldsymbol{F}^{-}\right)(\psi_\omega *\ \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{T}_\omega \tag{48}$$

(соответственно верхнему или нижнему знаку), где

$$\psi_\omega(x) = \frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\,\|x\|}\left(ae^{i(\omega+f)\|x\|} + (1-a)e^{-i(\omega+f)\|x\|}\right),\ \forall a \in \mathbb{Z}, \tag{49}$$

а $\boldsymbol{T}_\omega$ *– решение однородного уравнения*

$$\left(\nabla^{\pm}_{\omega} + \boldsymbol{F}^{-}\right)\ \boldsymbol{T}^{\omega} = 0 \tag{50}$$

которое можно представить в виде

$$\boldsymbol{T}^{\omega} = \left(\nabla^{\pm}_{\omega} + \boldsymbol{F}^{-}\right)\left(\psi^{0}_{\omega} * \boldsymbol{C}(x)\right), \tag{51}$$

$\forall \boldsymbol{C}(x) \in \mathbb{B}'(M)$, *допускающее эту свертку,* ψ^0_ω *– решение однородного уравнения*

$$\left(\Delta + 2(F,\nabla) + (\omega + f)^2 + (F,F)\right)\psi^0_\omega = 0, \tag{52}$$

либо в виде суммы решений вида (5).

5.6 ω-твисторы $\mathbf{T}^{\omega}$

Построим ω-твисторы $\mathbf{T}^{\omega}$, используя преобразования Фурье обобщенных функций [9] . Из (52) для трансформант скалярных потенциалов получим уравнение

$$\left((\omega + f)^2 - (\xi + iF, \xi + iF)\right)\bar{\psi}_\omega = 0 \tag{53}$$

Следовательно, $\bar{\psi}^0_\omega = \varphi(\xi)\delta_{S^\omega}(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ – произвольная локально интегрируемая функция, а $\delta_{S^\omega}(\xi)$ – простой слой на поверхности

$$S^{\omega} = \left\{\xi \in R^3 : (\xi + iF, \xi + iF) = (\omega + f)^2\right\}$$

в R^3. И формальное решение однородного уравнения имеет вид интеграла

$$\psi^0(x) = \int_{S^\omega} \varphi(\xi)\exp(-i(x,\xi))dS^{\omega}(\xi), \forall\varphi(\xi) \in L_1(S^\omega) \tag{54}$$

Определим S^ω.

5.6.1. Если $\mathbf{F} = \varepsilon + iE$, тогда

$$S^{\omega} = \left\{\xi \in R^3 : \|\xi - E\|^2 = (\omega + \varepsilon)^2\right\}.$$

В R^3 это – сфера радиуса $r^* = |\omega + \varepsilon|$ с центром в точке $\xi = E$. В этом случае

$$\psi^0(x) = \int_{\{\|\xi - E\| = |\omega + \varepsilon|\}} \varphi(\xi)\exp\left(-i(x,\xi)\right)dS(\xi) =$$

$$= e^{-i(x,E)} \int_{\{\|e\|=1\}} \gamma(e) \exp\left(-i\left|\omega+\varepsilon\right|(x,e)\right) dS(e),$$

$\forall\gamma(e) \in L_1\{e \in R^3,\ \|e\| = 1\}$. Условием существования такого решения является неравенство

$$\omega \neq -\varepsilon.$$

Если $\omega = -\varepsilon$, то существует только решение при $\xi = E$ вида

$$\psi^0(x) = a \exp\left(-i(x,E)\right), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

5.6.2. Если $\mathbf{F} = ih + H$, тогда из (53) следует, что

$$S^\omega = \left\{\xi \in R^3 : \|\xi\|^2 = \omega^2 + \|H\|^2 - h^2 \bigcap (H,\xi) = \omega h\right\}. \tag{55}$$

Это окружность – пересечение сферы радиуса $r^* = \sqrt{\omega^2 + \|H\|^2 - h^2}$ с центром $\xi^* = 0$ с плоскостью с нормалью H, содержащей точку $\xi^{**} = \frac{\omega h}{\|H\|^2} H$. Необходимым условием существования такой поверхности являются условия

$$\omega^2 + \|H\|^2 > h^2, \quad \omega^2 + \|H\|^2 - h^2 \geq \frac{\omega^2 h^2}{\|H\|^2}. \tag{56}$$

Откуда следует $\omega^2 \frac{\|H\|^2 - h^2}{\|H\|^2} \geq h^2 - \|H\|^2$. Последнее возможно только при

$$\|H\| \geq |h| \tag{57}$$

Следовательно,

$$\psi^0(x) = \exp\left(-\frac{i\omega h}{\|H\|}(x, e_H)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\{\|\xi\|=r^*\} \bigcap \{(H,\xi)=h\omega\}} \alpha(\xi) \exp\left(-i\left(x, \xi - e_H \frac{\omega h}{\|H\|}\right)\right) dl(\xi) =$$

$$= \exp\left(-i\omega h\left\|H\right\|^{-1}x_{\|H}\right)\int\limits_{\{\|\varsigma\|=a_\omega(h,H)\}\bigcap\{\varsigma\perp H\}}\beta(\varsigma)\exp(-i(x,\varsigma))dl(\varsigma)\quad=$$

$$= a_\omega(h,H)\exp\left(-i\omega h\left\|H\right\|^{-1}x_{\|H}\right)\times \tag{58}$$

$$\times\int\limits_{\{\|e_{\perp H}\|=1\}}\gamma(e_{\perp H})\exp(-ia_\omega(h,H)(x,e_{\perp H}))dl(e_{\perp H}),$$

$$a_\omega(h,H)=\sqrt{\frac{\left(\left\|H\right\|^2-h^2\right)\left(\omega^2+\left\|H\right\|^2\right)}{\left\|H\right\|^2}}.$$

5.6.3. Если имеем комплексное $\mathbf{F}=f+F=(\varepsilon+ih)+(H+iE)$, тогда из (53) следует

$$S^\omega=\left\{\xi\in R^3:(\xi-E+iH,\xi-E+iH)=(\varepsilon+\omega+ih)^2\right\}\Rightarrow$$

$$S^\omega=\left\{\xi\in R^3:\left\|\xi-E\right\|^2=\left\|H\right\|^2-h^2+(\varepsilon+\omega)^2\bigcap(\xi-E,H)=h\left(\omega+\varepsilon\right)\right\}$$

В R^3 это окружность радиуса $r^*=\sqrt{\left\|H\right\|^2-h^2+(\varepsilon+\omega)^2}$– пересечение сферы радиуса r^* с центром в точке $\xi=E$ с плоскостью $(\xi-E,H)=h\left(\omega+\varepsilon\right)$, нормаль которой совпадает с вектором H и которая содержит точку $\xi^*=E+\frac{h(\omega+\varepsilon)}{\|H\|^2}H$. Легко вычислить радиус этой окружности, он равен

$$\rho(\omega)=\sqrt{\left(\left\|H\right\|^2-h^2\right)\left(1+\frac{(\omega+\varepsilon)^2}{\left\|H\right\|^2}\right)}. \tag{59}$$

Для того, чтобы существовало такое пересечение, необходимо и достаточно, чтобы $\|H\|\geq|h|$, так как

$$\frac{\left|h\left(\omega-\varepsilon\right)\right|}{\left\|H\right\|}\leq\sqrt{\left\|H\right\|^2-h^2+(\varepsilon+\omega)^2}\Rightarrow\left(\frac{h^2}{\left\|H\right\|^2}-1\right)(\omega+\varepsilon)^2\leq\left\|H\right\|^2-h^2\Rightarrow$$

$$\frac{h^2 - \|H\|^2}{\|H\|^2} (\omega + \varepsilon)^2 \le \|H\|^2 - h^2 \Rightarrow \|H\|^2 \ge h^2.$$

В этом случае:

$$\psi^0(x,\omega) = e^{-i(x,E)} \int_{\{e \perp H\} \cup \{\|e\|=1\}} \gamma(e) \exp\left(-i\rho(\omega)(x,e)\right) dl(e), \tag{60}$$

$\forall \gamma(e) \in L_1\{e : \|e\| = 1, e \perp H\}$. Выбор $\gamma(e)$ позволяет строить широкий класс ω-твисторов.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 7. *При $H \neq 0$ решение стационарного однородного КГФШ-уравнения (51) в классе обобщенных функций медленного роста существует, если $\|H\| \ge |h|$ и имеет вид*

$$\psi^0(x,\omega) = e^{-i(x,E)} \int\limits_{\{e \perp H\} \cup \{\|e\|=1\}} \gamma(e) \times$$

$$\times \exp\left(-i(x,e)\sqrt{\left(\|H\|^2 - h^2\right)\left(1 + \frac{(\omega+\varepsilon)^2}{\|H\|^2}\right)}\right) dl(e), \tag{61}$$

$$\forall \gamma(e) \in L_1\{e \in R^3 : \|e\| = 1, e \perp H\}.$$

При H=0 решение существует, если h=0 и при $\omega \neq -\varepsilon$ имеет вид

$$\psi^0(x,\omega) = e^{-i(x,E)} \int\limits_{\{\|e\|=1\}} \gamma(e) \exp\left(-i\left|\omega + \varepsilon\right|(x,e)\right) dS(e), \tag{62}$$

$$\forall \gamma(e) \in L_1\{e \in R^3 : \|e\| = 1\}.$$

При H=0, h=0 и $\omega = -\varepsilon$ решение существует только при $\xi = E$ вида

$$\psi^0(x) = a \exp\left(-i(x,E)\right), \quad \forall a \in \mathbb{Z}. \tag{63}$$

Отметим различное влияние векторов E и H на формирование решений уравнения трансформации. В отсутствии H нет избранных направлений кроме E, в направлении которого распространяется гармоническая волна $e^{-i((x,E)+\omega\tau)}$, модулируемая интегралом в формуле (60) (в котором e – произвольный единичный вектор) как по величине, так и по любому направлению.

При наличии H пространство становится как бы ориентированным относительно его направления. Вид решений упрощается, если один из координатных векторов совпадает с ним по направлению. Если представить E в виде $E = E_{\|H} + E_{\perp H}$ то, как следует из (59), сохраняется составляющая волны $\exp\left(-i\left((x, E_{\|H}) + \omega\tau\right)\right)$, в то время как у ее перпендикулярной составляющей $\exp\left(-i\left((x, E_{\perp H}) + \omega\tau\right)\right)$ фаза меняется от точки к точке в зависимости от выбора $\gamma(e)$ $(e\perp H)$ и величины $|\omega + \varepsilon|$.

5.7 Элементарные ω-твисторы

Для построения твисторов будем использовать систему координат, определяемую вектором H $(H \parallel e_3)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_H^0(x, \omega, e_{\perp H}) = e^{-i(x,E)} \times$$

$$\times \exp\left(-i(x, e_{\perp H})\sqrt{\left(\|H\|^2 - h^2\right)\left(1 + \frac{(\omega+\varepsilon)^2}{\|H\|^2}\right)}\right), \ \|e_{\perp H}\| = 1, \qquad (64)$$

которая является решением однородного уравнения (51) и представляет собой комплексную амплитуду гармонических волн (с учетом $e^{i\omega\tau}$), движущихся в направлении волнового вектора

$$K_F = E + e_{\perp H}\sqrt{\left(\|H\|^2 - h^2\right)\left(1 + \frac{(\omega+\varepsilon)^2}{\|H\|^2}\right)} \quad = E + e_{\perp H}\rho(\omega)$$

со скоростью $v = \omega / \|K_F\|$; длина волн $\lambda = 2\pi / \|K_F\|$, частота $\varpi = \omega$, период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Как видим, эта волна обладает дисперсией.

Рассмотрим порождаемый ψ_H^0 *элементарный ω-твистор.* Легко вычислить

$$\Psi_H^\omega(x, e_{\perp H}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nabla_\omega^- + F^-\right)\psi_H^\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon + \omega + ih - H + i\rho(\omega) e_{\perp H} \right) \psi_H^\omega \tag{65}$$

Его норма и псевдонорма не зависят от E и равны

$$\|\Psi_H^\omega\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon+\omega)^2 + h^2 + \|H\|^2 + \left(\|H\|^2 - h^2\right)\left(1 + \frac{(\omega+\varepsilon)^2}{\|H\|^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega+\varepsilon)^2 \left(2 - \frac{h^2}{\|H\|^2}\right)} = \frac{|\omega+\varepsilon|}{\|H\|} \sqrt{\|H\|^2 - 0.5h^2}\,, \tag{66}$$

$$\langle\langle \Psi_H^\omega \rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon+\omega)^2 + h^2 - \|H\|^2 - \rho^2(\omega)} =$$

$$= \sqrt{\left(0.5(\varepsilon+\omega)^2 + \|H\|^2\right) \frac{h^2}{\|H\|^2} - \|H\|^2} \tag{67}$$

В частных случаях при $\omega = -\varepsilon$ норма $\|\Psi_H^\omega\| = 0$, при этом $\langle\langle \Psi_H^\omega \rangle\rangle = i\sqrt{\left(\|H\|^2 - h^2\right)}$.

А при $\omega = \pm \|H\| \sqrt{2\left(\frac{\|H\|^2}{h^2} - 1\right)} - \varepsilon$ псевдонорма $\langle\langle \Psi_H^\omega \rangle\rangle = 0$, при этом

$$\|\Psi_H^\omega\| = \pm |h|^{-1} \sqrt{\left(2\|H\|^2 - h^2\right)\left(\|H\|^2 - h^2\right)}$$

Бикватернион его энергии-импульса равен

$$\Xi_\omega = W_\omega + iP_\omega = \Psi_H^\omega \circ (\Psi_H^\omega)^* = \|\Psi_H^\omega\|^2 + i\|P_\omega\| e_{\| P} =$$

$$= 0,5\,(\omega+\varepsilon)^2 \left(2 - \frac{h^2}{\|H\|^2}\right) + 0,5i\left(hH + \rho(\omega)\left((\varepsilon+\omega)e_{\perp H} + [e_{\perp H},\, H]\right)\right)$$

Норма вектора P_ω (аналог вектора Пойнтинга) равна

$$\|P_\omega\| = \sqrt{\|hH\|^2 + \left(1 - \frac{h^2}{\|H\|^2}\right)\left((\varepsilon+\omega)^2 + \|H\|^2\right)^2}.$$

При $h=0$ $W_\omega = 0.5\,(\omega+\varepsilon)^2$, $\|P_\omega\| = 0.5\left((\varepsilon+\omega)^2 + \|H\|^2\right)$.

При $H=0$ решением (51) является функция

$$\psi_E^0(x,\omega,e) = \exp\left(-i(x, |\omega+\varepsilon|\, e + E)\right), \quad K_F = |\omega+\varepsilon|\, e + E, \|e\| = 1. \tag{68}$$

Порождаемый ею твистор имеет вид

$$\Psi_E^\omega(x,e) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\omega+\varepsilon-\nabla - iE)\exp\left(-i(x, |\omega+\varepsilon|\, e + E)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon+\omega+i\,|\omega+\varepsilon|\, e)\,\psi_E^\omega.$$

Соответственно энергия и вектор Пойнтинга равны

$$\Xi_\omega^E = 0.5\,(\varepsilon+\omega+i\,|\omega+\varepsilon|\, e)\circ(\varepsilon+\omega+i\,|\omega+\varepsilon|\, e) = (\varepsilon+\omega)^2 +$$

$$+i\,|\omega+\varepsilon|\,(\varepsilon+\omega)\, e,\; W_\omega^E = (\varepsilon+\omega)^2, \quad P_\omega^E = sgn(\varepsilon+\omega)\,(\varepsilon+\omega)^2\, e.$$

Используя Ψ_ω, можно представить $T_\omega(x)$ в виде суммы твисторов типа

$$T_\omega(x) = \sum_C \Psi_\omega * C(x) \tag{69}$$

$$T_\omega(x) = \sum_{C,\phi} \Psi^\omega * C(x), \quad \Psi^\omega(x) = \int\limits_{e\perp H\bigcap\|e\|=1} \phi(e)\Psi^\omega(e,x)dl(e),$$

$$\forall\phi\in L_1\left\{e\perp H : \|e\| = 1\right\}. \tag{70}$$

Бикватернионные поля $C(x)$ тоже произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

Твисторы вида (69) описывают поляризованные колебания и волны скалярно-векторных полей, а (70) – неполяризованные поля.

5.8 Статические решения твисторных уравнения

Статические твисторы – это решения уравнения (1), не зависящие от времени ($\mathbf{G}=\mathbf{G}(x)$). Из (1) следует, что они удовлетворяют уравнению

$$\pm i\nabla\;\mathbf{B} + \mathbf{F}\circ\mathbf{B} = \mathbf{G}(x), \quad x\in R^3. \tag{71}$$

Его решения можно получить, следуя вышеизложенной методике, используя свойство операторов,

$$(f \pm i\nabla + F) \circ (f \mp i\nabla - F) = f^2 + (F,\ F) - \Delta. \tag{72}$$

Соответствующие скалярные потенциалы решений этого уравнения удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\left(f^2 + (F,\ F) - \Delta\right) \psi = q(x) \tag{73}$$

Здесь решения этого уравнения получим из построенных нами решений уравнения гармонических колебаний (34) при $\omega = 0$, которое в данном случае имеет вид

$$(\mp\nabla + i\mathbf{F}) \circ \mathbf{B} = i\mathbf{G}. \tag{74}$$

Начнем с решения однородного уравнения (71) при $\mathbf{G} \equiv 0 \Rightarrow q \equiv 0$, которые назовем *статонами.*

Элементарные статоны. Для построения статонов будем использовать систему координат, определяемую вектором H ($H \parallel e_3$). В этом случае элементарные скалярные потенциалы имеют вид

$$\psi_0^H(x, e_{\perp H}) = e^{-i(x,E)} \times$$
$$\times \exp\left(-i(x, e_{\perp H})\sqrt{\left(\|H\|^2 - h^2\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\|H\|^2}\right)}\right), \|e_{\perp H}\| = 1. \tag{75}$$

Порождаемый ψ_H^0 элементарный статон запишется, как

$$\Psi_0^H(x, e_{\perp H}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon + ih - H + i\rho e_{\perp H}\right)\psi_H^0,$$
$$\rho = \sqrt{\|H\|^2 + \varepsilon^2 - h^2\left(1 - \varepsilon^2\,\|H\|^{-2}\right)}. \tag{76}$$

Его норма и псевдонорма не зависят от E и равны

$$\left\|\Psi_0^H\right\| = \frac{|\varepsilon|}{\|H\|}\sqrt{\|H\|^2 - 0.5h^2}, \quad \left\langle\left\langle\Psi_0^H\right\rangle\right\rangle = \sqrt{\left(0.5\varepsilon^2 + \|H\|^2\right)\frac{h^2}{\|H\|^2} - \|H\|^2} \tag{77}$$

Энергия-импульса бикватерниона равна

$$\Xi_0 = W_0 + iP_0 = \Psi_0^H \circ \left(\Psi_0^H\right)^* =$$
$$= 0,5\varepsilon^2 \left(2 - \frac{h^2}{\|H\|^2}\right) + 0,5i \left(hH + \rho \left(\varepsilon e_{\perp H} + [e_{\perp H},\, H]\right)\right).$$

Норма вектора P_0 (аналог вектора Пойнтинга) равна

$$\|P_0\| = \sqrt{\|hH\|^2 + \left(1 - \frac{h^2}{\|H\|^2}\right)\left(\varepsilon^2 + \|H\|^2\right)^2}$$

При $h = 0$ $W_0 = 0.5\varepsilon^2$, $\|P_0\| = 0.5\left(\varepsilon^2 + \|H\|^2\right)$.

При $H = 0$ скалярный потенциал имеет вид

$$\psi_0^E(x, e) = \exp\left(-i(x, |\varepsilon|\, e + E)\right), \quad \|e\| = 1 \tag{78}$$

Порождаемый им статон имеет вид:

$$\Psi_0^E(x, e) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon + i\,|\varepsilon|\, e\right)\psi_E^0, \quad W_0^E = \varepsilon^2, \quad P_0^E = sgn(\varepsilon)\varepsilon^2 e.$$

Поляризованные и неполяризованные статонные поля. Используя Ψ_0 можно представить $\mathbf{T}_0(x)$ в виде суммы твисторов типа

при $H \neq 0$

$$\mathbf{T}_0^H(x) = \sum_{\mathbf{C}} \Psi_0^H * \mathbf{C}(x) \tag{79}$$

$$\mathbf{T}_0(x) = \sum_{\mathbf{C},\phi} \Psi_0 * \mathbf{C}(x), \tag{80}$$

$$\Psi_0(x) = \int\limits_{e \perp H \bigcap \|e\|=1} \phi(e)\Psi_0(e, x)dl(e), \quad \forall \phi \in L_1\left\{e \perp H : \|e\| = 1\right\}$$

при $H = 0$

$$\mathbf{T}_0^E(x) = \sum_C \Psi_0^E * \mathbf{C}(x). \qquad (81)$$

Бикватернионные поля $\mathbf{C}(x)$ тоже произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

Статоны вида (79), (81) описывают поляризованные статические скалярно-векторные поля, а (80) – неполяризованные.

Заключение

Рассмотренное здесь биволновое уравнение (1) в виде системы уравнений для скалярной и векторной частей $\mathbf{B}(\tau, x) = b(\tau, x) + B(\tau, x)$

$$\partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B + fb - (F, B) = g(\tau, x)$$

$$\pm i\nabla b + \partial_\tau B \pm i \operatorname{rot} B + fB + bF \pm i[F, B] = G(\tau, x). \qquad (82)$$

Система относится к классу уравнений Янга-Милса, используемых в квантовой механике для построения моделей элементарных частиц [10, 11]. По этой причине здесь сохранено название *"твисторы"*, которое принято в квантовой механике для решений системы уравнений Янга-Милса.

Здесь показано, что для твисторов существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые представляются в виде поверхностных и контурных интегралов от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат также достаточно произвольные подынтегральные функции типа $\phi(e)$. От этих представлений нетрудно перейти к представлению твисторов, $\omega-$твисторов и статонов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник, если выбирать подобные $\phi(e)$ функции соответственно интегральным разложениям специальных функций. В этом случае можно получить счетное число еще более элементарных твисторов, которые можно использовать в теории элементарных частиц.

Биволновое уравнение (1) имеет вид уравнения трансформации масс-зарядов, электрических и гравимагнитных токов электрогравимагнитного (ЭГМ) поля, описываемого бикватернионом $B(\tau, x)$, под действием постоянного внешнего ЭГМ-поля, описываемого бикватернионом **F,** ранее предложенного автором для одной бикватернионной модели ЭГМ-поля [7,8]. Если перейти на физический язык, полученные здесь твисторы для этой модели описывают трансформацию спиноров свободного поля (при $\mathbf{F}=0$), под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля $\mathbf{F} = (i\varepsilon + h) + (E + iH)$, вектор электрической напряженности которого равен E, а гравимагнитной напряженности H. Потенциальная часть H описывает напряженность внешнего гравитационного поля, а его вихревая часть соответствует магнитной напряженности внешнего поля. Скалярная часть $i\varepsilon + h$ в этой модели описывает свойства сопротивлении и поглощения (в зависимости от знака действительной и мнимой части) внешним ЭГМ-полем электрических зарядов и гравимагнитных токов. Используя полученные здесь решения, можно подробно исследовать ЭГМ процессы на этой модели.

Литература

1 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 1. Преобразования Лоренца // Математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 1. – С. 33-41.

2 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Обобщенные решения биволновых уравнений // Математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 3. – С. 5-13.

3 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 3. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // Математический журнал. – 2011. – Т. 11, № 1. – С. 30-38.

4 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 4. Твисторы и твисторные поля // Математический журнал. – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 17-35.

5 Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Jurnal Clifford Analysis, Clifford algebras and their applications. – 2012. – 7(1). – P. 19-39.

6 Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2004. – № 3. – С. 45-53.

7 Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро- гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 122-134.

8 Alexeyeva L.A. Newton's laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // Ashdin publishing. Journal of physical mathematics. – 2009. – V. 1.– Article ID S090604.

9 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

10 Yang C.N.,Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance // Jurnal physical review. – 1954. – V. 96(1). – P. 191-195.

11 Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980. – 320 с.

Статья поступила в редакцию 02.08.13

Алексеева Л.А. БИКВАТЕРНИОНДАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ АЛГЕБРАСЫ. 5. ТРАНСФОРМАЦИЯНЫҢ ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ШЕШІМДЕРІ

Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы және жалпыланған функциялардың теориясы негізінде оның құрылымдық коэффициентінің бикватерниондық көрсетілуінің жалпыланған түрдегі бикватерниондық толқындық (битолқындық) теңдеуі қарастырылған. Егер осы теңдеуді матрицалық (тензорлық) түрде жазсақ, онда ол элементар бөлшектерді математикалық сипаттау үшін теориялық физикада қолданылатын Янг - Милс теңдеуінің класына жатады. Стационарлық емес, гармониялық және статикалық элементарлық твисторлар және полярланған және полярланбаған твисторлық өрістерді суреттейтін оның жалпыланған шешімі құрылды.

Alexeyeva L.A. DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS. 5. EQUATION OF TRANSFORMATIONS AND ITS GENERALIZED SOLUTIONS

On base of the differential biquaternions algebra and theory of generalized functions the biquaternionic wave (*biwave*) equation of general type is considered under biquaternionic representation of its structural coefficient. If to write this equation in matrix (tensor) form, it pertains to class of the Young-Mills equations, which are used in theoretical physics for mathematical description of the elementary particles. Its generalized solutions describing nonstationary, harmonic and static elementary twistors and polarized and unpolarized twistor fields are built.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.956.3

А.Т. Асанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: anar@math.kz, anarasanova@list.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ СЕМЕЙСТВА МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Рассматривается семейство многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной, корректной разрешимости семейства многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлена взаимосвязь исследуемой задачи и нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений.

Ключевые слова: *семейство многоточечных краевых задач, гиперболическое уравнение, метод параметризации, нелокальная краевая задача.*

Введение

Как известно, одним из основных разделов теории краевых задач для дифференциальных уравнений являются дифференциальные уравнения с многоточечными условиями, к которым приводят математическое моделирование процессов физики, химии, биологии, механики и др. К наиболее изученным многоточечным краевым задачам относятся двухточечные

Keywords: *family of multi-point boundary value problems, hyperbolic equation, parametrization method, nonlocal boundary value problem*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B08, 35L51, 35L53

и периодические краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [1-5]. Несмотря на многочисленные работы, общие постановки многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений остаются малоисследованными. Вопросы разрешимости многоточечных краевых задач остаются важными в прикладном плане, так как имеют прямое отношение к теории сплайнов и интерполирования, а также используются в теории многоопорных балок [6, 7]. Основным аппаратом исследования и решения многоточечных краевых задач остается метод функций Грина, отражающий специфику краевой задачи, построение которой сопряжено с большими трудностями ввиду сложности объекта и недостаточной изученностью ее свойств. Одним из путей преодоления трудностей является разработка конструктивных методов исследования и решения многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, не использующих фундаментальную матрицу и функцию Грина. Для исследования и решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [8, 9] был предложен метод параметризации. Он позволил, наряду с установлением коэффициентных критериев однозначной разрешимости исследуемой задачи, построить алгоритмы нахождения его решения. В работе [10] метод параметризации был применен к многоточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. На его основе были получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи без использования фундаментальной матрицы и функции Грина, а также построены алгоритмы нахождения решений.

В настоящей работе метод параметризации распространяется на семейство многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Получены необходимые и достаточные условия однозначной и корректной разрешимости семейства многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Также предложен способ отыскания решения рассматриваемой задачи. Результаты применены к нелокальной многоточечной краевой задаче для системы гиперболических уравнений. Установлена взаимосвязь между корректной разрешимостью семейства многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и корректной разрешимостью нелокальной многоточечной краевой задачи для системы гиперболических уравнений.

1 Постановка задачи и схема метода параметризации

Рассматривается семейство многоточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega], \tag{1}$$

$$P_0(x)v(0,x) + \sum_{j=1}^{m} P_j(x)v(t_j,x) + P_{m+1}(x)v(T,x) = \Phi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

где $v = col(v_1, v_2, ..., v_n)$, $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $P_j(x)$, $j = \overline{0, m+1}$, и n - вектор-функции $F(t,x)$, $\Phi(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$, $[\mathbf{0},\omega]$ соответственно, $0 < t_1 < t_2 < .. < t_m < T$. Полагаем $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$.

Пусть $C(\bar{\Omega}, R^n)$ - пространство непрерывных на Ω вектор-функций $v(t,x)$ с нормой $||v||_0 = \max\limits_{(t,x)\in\bar{\Omega}} ||v(t,x)||$, $||v(t,x)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |v_i(t,x)|$.

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \to R^n$, имеющая непрерывную производную по t на Ω, называется решением семейства многоточечных краевых задач (1)–(2), если она удовлетворяет системе (1) и условию (2) для всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и $x \in [0,\omega]$ соответственно.

При фиксированном $x \in [0,\omega]$ задача (1)–(2) является линейной многоточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изменяя переменную x на $[0,\omega]$, получим семейство многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Необходимо отметить, что из существования только тривиального решения семейства однородных краевых задач, соответствующих (1)–(2), не следует существование единственного решения задачи (1)–(2). Убедимся в этом на примере.

Пример.[11] На $[0,1] \times [0,1]$ рассмотрим семейство периодических краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (x - 1/2)v + 1, \tag{1'}$$

$$v(0,x) = v(1,x), \quad x \in [0,1]. \tag{2'}$$

Общее решение соответствующего ($1'$) однородного уравнения записывается в виде $v(t,x) = e^{(x-1/2)t}C(x)$. Из условия ($2'$) получим $C(x) = e^{x-1/2}C(x)$. Отсюда следует, что $C(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, т.е. однородная краевая задача имеет только тривиальное решение $v(t,x) = 0$. Задача $(1') - (2')$ не имеет решения.

Определение 1. *Семейство многоточечных краевых задач (1)–(2) называется корректно разрешимым, если для произвольных функций* $F(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], R^n)$ *оно имеет единственное решение* $v(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ *и для него справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} ||v(t,x)|| \leq K \max\Big(\max_{t\in[0,T]} ||F(t,x)||, ||\Phi(x)||\Big),$$

где константа K *не зависит от* $F(t,x)$, $\Phi(x)$ *и* $x \in [0,\omega]$.

Схема метода. Возьмем линии $t = t_j$, $j = \overline{1, m+1}$ в качестве линий деления и произведем разбиение области $[0,T) \times [0,\omega] = \bigcup\limits_{r=1}^{m+1} \Omega_r$, где $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0,\omega]$. Пусть функция $v(t,x)$ – решение задачи (1)–(2), v_r – сужение функции v на Ω_r, т.е. $v_r : \Omega_r \to R^n$ и $v_r(t,x) = v(t,x)$ при $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, $\lim\limits_{t\to T-0} v_{m+1}(t,x) = v(T,x)$, $x \in [0,\omega]$. Тогда задача (1)–(2) будет эквивалентна семейству многоточечных краевых задач

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(t,x)v_r + F(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{3}$$

$$P_0(x)v_1(0,x) + \sum_{j=1}^{m+1} P_j(x)v_{j+1}(t_j,x) + P_{m+1}(x) \lim_{t\to T-0} v_{m+1}(t,x) = \varphi(x), \tag{4}$$

$x \in [0,\omega]$, с дополнительным условием

$$\lim_{t\to t_s-0} v_s(t,x) = v_{s+1}(t_s,x), \qquad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1, m}, \tag{5}$$

здесь (5) – условия склеивания решения во внутренних линиях разбиения.

Пусть $C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(m+1)})$ – пространство систем функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_{m+1}(t,x))'$, где функция $v_r : \Omega_r \longrightarrow R^n$ непрерывна и равномерно относительно $x \in [0,\omega]$ имеет конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to t_r-0} v_r(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, с нормой $||v||_1 = \max\limits_{r=\overline{1,m+1}} \sup\limits_{(t,x)\in\Omega_r} ||v_r(t,x)||$.

Решением семейства многоточечных краевых задач (3)–(5) является система функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), .., v_{m+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(m+1)})$, где $v_r(t,x)$ – сужение функции $v(t,x)$ на Ω_r, удовлетворяет (3)–(5), непрерывно дифференцируема по t на Ω_r, $r=\overline{1,m+1}$.

Эквивалентность задач (1)–(2) и (3)–(5) заключается в следующем. Функция $v(t,x)$, определяемая равенствами $v(t,x)=v_r(t,x)$ при $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m+1}$, $v(T,x) = \lim\limits_{t\to t_{m+1}-0} v_{m+1}(t,x)$ при $x\in[0,\omega]$ удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$ и условию (2) при всех $x\in[0,\omega]$. Если $v(t,x)$ - решение семейства многоточечных краевых задач (1) – (2), то система его сужений $\{v_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,m+1}$, является решением семейства многоточечных краевых задач с дополнительным условием (3)–(5). И, наоборот, если система функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), .., v_{m+1}(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(m+1)})$ – решение задачи (3)–(5), то функция $v(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{v_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,m+1}$, будет решением исходного семейства многоточечных краевых задач (1)–(2). Из непрерывности коэффициентов $A(t,x)$, правой части $F(t,x)$ и функции $v(t,x)$ вытекает непрерывность $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$.

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(t,x)$ при $t=t_{r-1}$ и в каждой области $(t,x)\in\Omega_r$ осуществим замену $\widetilde{v}_r(t,x) = v_r(t,x)-\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$. Тогда задача (3)–(5) сводится к эквивалентной краевой задаче с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$

$$\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r + A(t,x)\lambda_r(x) + F(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \tag{6}$$

$$\widetilde{v}_r(t_{r-1},x) = 0, \qquad r=\overline{1,m+1}, \tag{7}$$

$$P_0(x)\lambda_1(x) + \sum_{j=1}^{m} P_j(x)\lambda_{j+1}(x) + P_{m+1}(x)\lambda_{m+1}(x) +$$

$$+P_{m+1}(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{m+1}(t,x) = \varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t\to t_s-0}\widetilde{v}_s(t,x) = \lambda_{s+1}(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Решением задачи (6)–(9) является пара $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*([t], x))$, $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), .., \ \lambda_{m+1}^*(x))' \in C([0,\omega], R^{n(m+1)})$, $\widetilde{v}^*([t], x) = (\widetilde{v}_1^*(t,x), \widetilde{v}_2^*(t,x), .., \widetilde{v}_{m+1}^*(t,x))' \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{n(m+1)})$, где функции $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ непрерывно дифференцируемы на Ω_r и при $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$, $r = \overline{1, m+1}$, удовлетворяют задаче Коши (6), (7) при всех $(t,x) \in \Omega_r$ и условиям (8), (9) при всех $x \in [0,\omega]$, $r = \overline{1, m+1}$.

Задачи (1)–(2) и (6)–(9) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $v(t,x)$ является решением задачи (1)–(2), то пара $(\lambda(x), \widetilde{v}([t], x))$ с компонентами $\lambda_r(x) = v(t_{r-1}, x)$, $\widetilde{v}_r(t,x) = v(t,x) - v(t_{r-1}, x)$, $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, будет решением задачи (6)–(9). И наоборот, если пара $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*([t], x))$, где $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), .., \lambda_{m+1}^*(x))'$, $\widetilde{v}^*([t], x) = (\widetilde{v}_1^*(t,x), \widetilde{v}_2^*(t,x), .., \widetilde{v}_{m+1}^*(t,x))'$ – решение задачи (6) – (9), то функция $v^*(t,x)$, определяемая равенствами $v^*(t,x) = \lambda_r^*(x) + \widetilde{v}_r^*(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, m+1}$, $v^*(T,x) = \lambda_{m+1}^*(x) + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{v}_{m+1}^*(t,x)$, $x \in [0,\omega]$, является решением задачи (1) – (2). Из непрерывности и ограниченности функций $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ на Ω_r, $r = \overline{1, m+1}$, следует существование левосторонних пределов $\lim\limits_{t \to t_r - 0} \widetilde{v}_r^*(t,x)$, а значения $\lim\limits_{t \to t_r - 0} \widetilde{v}_r^*(t,x)$, $r = \overline{1, m}$, $\lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{v}_{m+1}^*(t,x)$ удовлетворяют условиям (8), (9) при всех $x \in [0,\omega]$.

В отличие от (3)–(5) в задаче (6)–(9) появились начальные условия $\widetilde{v}_r(t_{r-1}, x) = 0$. При фиксированных $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, m+1}$, функция $\widetilde{v}_r(t,x)$ является решением задачи Коши (6), (7), которая эквивалентна семейству систем интегральных уравнений на интервалах длины $t_r - t_{r-1}$

$$\widetilde{v}_r(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x) + A(\tau,x)\lambda_r(x) + F(\tau,x)\Big] d\tau, \tag{10}$$

$t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, $x \in [0,\omega]$.

Подставив вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ правую часть (10) и повторив этот процесс ν $(\nu \in \mathbb{N})$ раз, получим

$$\widetilde{v}_r(t,x) = D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r(x) + G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r) + F_{\nu,r}(t,x), \tag{11}$$

где

$$D_{\nu r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)d\tau_1 + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + ...+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_2 d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t} F(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_1} F(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1.$$

Из (11) найдем $\lim\limits_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,m+1}$, для всех $x\in[0,\omega]$. Подставляя их в (8), (9), предварительно умножив (8) на $t_{m+1}-t_m$, относительно функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, получим систему уравнений:

$$Q_\nu(x)\lambda(x)=-F_\nu(x)-G_\nu(x,\widetilde{v}), \tag{12}$$

где $\quad Q_\nu(x)=$

$$\left|\begin{array}{cccccc} hP_0(x) & hP_1(x) & hP_2(x) & .. & hP_m(x) & hP_{m+1}(x)[I+D_{\nu,m+1}(T,x)] \\ I+D_{\nu 1}(t_1,x) & -I & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(t_2,x) & -I & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & I+D_{\nu,m}(t_m,x) & -I \end{array}\right|,$$

$h=t_{m+1}-t_m$, I – единичная матрица размерности $(n\times n)$,
$G_\nu(x,\widetilde{v})=\big(hP_{m+1}(x)G_{\nu,m+1}(T,x,\widetilde{v}_{m+1}),G_{\nu,1}(t_1,x,\widetilde{v}_1),..,G_{\nu,m}(t_m,x,\widetilde{v}_m)\big)'$,
$F_\nu(x)=(-h\varphi(x)+hP_{m+1}(x)F_{\nu,m+1}(T,x),F_{\nu,1}(t_1,x),..,F_{\nu,m}(t_m,x))'$.

Матрица $Q_\nu(x)$ имеет специальную блочно-диагональную структуру, поэтому при любом $x\in[0,\omega]$ она переводит элементы $R^{n(m+1)}$ в $R^{n(m+1)}$ и

$$||Q_\nu(x)||\le 1+\tilde{h}\sum_{j=0}^{m}||P_j(x)||+\max(h||P_{m+1}(x)||,1)\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha(x)\tilde{h})^j}{j!},$$

где $\tilde{h} = \max\limits_{i=\overline{1,m+1}}(t_i - t_{i-1})$. Из непрерывности матриц $A(t,x)$, $P_j(x)$, $j=\overline{0,m+1}$, на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$, соответственно, вытекает, что она является непрерывной по $x \in [0,\omega]$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$.

Если известна $\widetilde{v}([t],x) \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$ с компонентами $\widetilde{v}_r(t,x)$, то из (12) можно найти $\lambda(x) \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$ с компонентами $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$. Наоборот, если известна $\lambda(x) \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$, то из (6), (7) можно найти $\widetilde{v}([t],x) \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$. Так как неизвестны как $\widetilde{v}([t],x)$, так и $\lambda(x)$, то применяется итерационный метод, и решение задачи (6)–(9) – пару $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x)) \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})\times C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$, с компонентами $(\lambda_r^*(x),\ \widetilde{v}_r^*(t,x))$, $r=\overline{1,m+1}$, находим как предел последовательности $(\lambda^{(k)}(x),\widetilde{v}^{(k)}([t],x)) \in C([0,\omega],R^{n(m+1)}) \times C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$ с компонентами $(\lambda_r^{(k)}(x),\ \widetilde{v}_r^{(k)}(t,x))$, $r=\overline{1,m+1}$, $k=0,1,2,..$, определяемой по следующему алгоритму:

0-шаг. Предположим, что при выбранном $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(x) : R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$. Нулевое приближение по функциональному параметру $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),...,\lambda_{m+1}^{(0)}(x))' \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$ определяем из системы линейных уравнений $Q_\nu(x)\lambda(x) = -F_\nu(x)$. Решая на Ω_r семейство задач Коши (6), (7) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, находим
$\widetilde{v}^{(0)}([t],x) = (\widetilde{v}_1^{(0)}(t,x),\widetilde{v}_2^{(0)}(t,x),..,\widetilde{v}_{m+1}^{(0)}(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$.

1-шаг. Подставив вместо $\widetilde{v}([t],x)$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(0)}([t],x)$, из систем уравнений (12), определяем $\lambda^{(1)}(x) = (\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),..,\lambda_{m+1}^{(1)}(x))' \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$. Решая на Ω_r семейство задач Коши (6), (7) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}^{(1)}([t],x) = (\widetilde{v}_1^{(1)}(t,x),\widetilde{v}_2^{(1)}(t,x),\ ..,\widetilde{v}_{m+1}^{(1)}(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$.

И т.д.

к-шаг. Подставив вместо $\widetilde{v}([t],x)$ найденную функцию $\widetilde{v}^{(k-1)}([t],x)$, из систем уравнений (12) определяем $\lambda^{(k)}(x) = (\lambda_1^{(k)}(x),\lambda_2^{(k)}(x),..,\lambda_{m+1}^{(k)}(x))' \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$. Решая на Ω_r семейство задач Коши (6), (7) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(k)}(x)$, находим $\widetilde{v}^{(k)}([t],x) = (\widetilde{v}_1^{(k)}(t,x),\widetilde{v}_2^{(k)}(t,x),..,\widetilde{v}_{m+1}^{(k)}(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{n(m+1)})$, $k=0,1,2,\ldots$.

Метод параметризации разбивает на две части процесс нахождения неизвестных функций: 1) нахождение введенных параметров $\lambda_r(x)$ из системы функциональных уравнений (12), 2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{v}_r(t,x)$ из семейства задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6), (7).

Справедливо следующее неравенство

$$||G_\nu(x,\widetilde{v})|| \le \max(h||P_{m+1}(x)||,1)\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,m+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}||\widetilde{v}_r(t,x)||.$$

Умножим обе части (12) на h^{-1}. Теперь, перейдя в этом уравнении к пределу при $\nu\to\infty$, получим следующее уравнение относительно параметра $\lambda(x)$:

$$\frac{1}{h}Q_*(x)\lambda(x) = -F_*(A,F,\Phi,x,h), \qquad (13)$$

здесь $\frac{1}{h}Q_*(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{h}Q_\nu(x)$, $F_*(A,F,\Phi,x,h) = \frac{1}{h}\lim\limits_{\nu\to\infty}F_\nu(x)$.

Решение $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\lambda_{m+1}^*(x))' \in C([0,\omega],R^{n(m+1)})$ системы функциональных уравнений (13) совпадает на линиях разбиения со значениями функции $v^*(t,x)$ – точного решения задачи (1) – (2) на линиях $t=t_{r-1}$, $r=\overline{1,m+1}$, т.е. справедлива

Лемма 1. *Если $v^*(t,x)$ – решение семейства многоточечных краевых задач (1) – (2), то $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),...,\ \lambda_{m+1}^*(x))'$ с компонентами $\lambda_r^*(x) = v^*(t_{r-1},x)$ удовлетворяет системе функциональных уравнений (13). И, наоборот, если $\widehat{\lambda}(x) = (\widehat{\lambda}_1(x),\widehat{\lambda}_2(x),...,\widehat{\lambda}_{m+1}(x))'$ - решение (13), то функция $v(t,x)$, определяемая равенствами $v(t,x) = \widehat{\lambda}_r(x) + \widehat{\widetilde{v}}_r(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,m+1}$, $v(T,x) = \widehat{\lambda}_{m+1}(x) + \lim\limits_{t\to T-0}\widehat{\widetilde{v}}_{m+1}(t,x)$, где $\widehat{\widetilde{v}}_r(t,x)$ – решение задачи Коши (6), (7) при $\lambda_r(x) = \widehat{\lambda}_r(x)$, $r=\overline{1,m+1}$, будет решением семейства многоточечных краевых задач (1)–(2).*

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного выше алгоритма, одновременно обеспечивающие однозначную разрешимость семейства многоточечных краевых задач (1)–(2), а также оценку решения дает следующая

Теорема 1. *Пусть при некотором $\nu\in\mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(x): R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и справедливы следующие неравенства:*

a) $||[Q_\nu(x)]^{-1}|| \le \gamma_\nu(x)$;

$\gamma_\nu(x)$ *– положительная непрерывная функция на* $x \in [0,\omega]$,

b) $q_\nu(x) = \gamma_\nu(x)\max\Big(h||P_{m+1}(x)||, 1\Big)\Big\{e^{\alpha(x)\tilde{h}} - \sum\limits_{j=0}^{\nu}\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^j}{j!}\Big\} \le \chi < 1$;

$\chi - const$.

Тогда семейство многоточечных краевых задач (1) – (2) имеет единственное решение $v^*(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}||v^*(t,x)|| \le [k_1(x,\nu)+k_2(x,\nu)]\max\Big(\max_{t\in[0,T]}||F(t,x)||, ||\Phi(x)||\Big), \quad (14)$$

где $$k_1(x,\nu) = \frac{\gamma_\nu(x)}{1-q_\nu(x)}\max(1, h||P_{m+1}(x)||)\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^\nu}{\nu!}\cdot k_0(x,\nu) +$$

$$+h\gamma_\nu(x)\max\Big\{1 + h||P_{m+1}(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^j}{j!}\Big\},$$

$$k_2(x,\nu) = \Big\{\Big[e^{\alpha(x)\tilde{h}} - 1\Big]\frac{\gamma_\nu(x)}{1-q_\nu(x)}\max(1, h||P_{m+1}(x)||)\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^\nu}{\nu!} + 1\Big\}k_0(x,\nu),$$

$$k_0(x,\nu) = \Big[e^{\alpha(x)\tilde{h}} - 1\Big]\gamma_\nu(x)\times$$

$$\times\max\Big\{1 + h||P_{m+1}(x)||\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)\tilde{h}]^j}{j!}\Big\}\tilde{h} + \tilde{h}e^{\alpha(x)\tilde{h}}.$$

Функция $k(x,\nu) = k_1(x,\nu) + k_2(x,\nu)$ в неравенстве (14) ограничена и непрерывна по x на $[0,\omega]$ при фиксированном $\nu \in \mathbb{N}$, не зависит от функций $F(t,x)$, $\Phi(x)$. Поэтому при условиях теоремы 1 краевая задача (1)–(2) корректно разрешима.

Имеет место

Теорема 2. *Если семейство многоточечных краевых задач (1) – (2) корректно разрешимо, то найдется* $\nu = \nu(t_0, t_1, .., t_m, t_{m+1})$, *при котором матрица* $Q_\nu(x) : R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ *будет обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполнены неравенства a), b) теоремы 1.*

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрица $Q_\nu(x)$ для всех $x \in [0,\omega]$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Так как $(n(m+1) \times n(m+1))$ - матрица $Q_\nu(x)$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедлива

Лемма 2. *$(n(m+1)\times n(m+1))$-матрица $Q_\nu(x)$ при $x\in[0,\omega]$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n\times n)$-матрица*

$$M_\nu(x)=P_0(x)+\sum_{i=1}^{m+1}P_i(x)\prod_{s=i}^{1}[I+D_{\nu,s}(t_s,x)].$$

Лемма 3. *Если матрица $M_\nu(x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, то $[Q_\nu(x)]^{-1}=\{d_{r,j}(x)\}$, $r=\overline{1,m+1}$, $j=\overline{1,m+1}$, где*

$d_{1,1}(x)=h^{-1}M_\nu^{-1}(x);$

$d_{1,l}(x)=M_\nu^{-1}(x)\Big\{P_{l-1}(x)+\sum_{i=l}^{m+1}P_i(x)\prod_{s=i}^{2}[I+D_{\nu,s}(t_s,x)]\Big\},\ 1<l\le m+1;$

$d_{r,r}(x)=\big[I+D_{\nu,r-1}(t_{r-1},x)\big]d_{r-1,r}(x)-I, \qquad r=2,3,...,m+1,$

$d_{r,j}(x)=\big[I+D_{\nu,r-1}(t_{r-1},x)\big]d_{r-1,j}(x), \qquad j\ne r.$

2 Нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений

Семейство многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений связано с нелокальной краевой задачей для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+C(t,x)u+f(t,x) \tag{15}$$

$$u(t,0)=\psi(t), \qquad t\in[0,T], \tag{16}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}P_j(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=t_j}+\sum_{j=0}^{m+1}L_j(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=t_j}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m+1}S_j(x)u(t,x)\Big|_{t=t_j}=\varphi(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{17}$$

где $u=col(u_1,u_2,...,u_n)$, $(n\times n)$ – матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_j(x)$, $L_j(x)$, $S_j(x)$, $j=\overline{0,m+1}$, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\bar\Omega$, $[0,\omega]$ соответственно, $0=t_0<t_1<t_2<..<t_m<t_{m+1}=T$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Функция $u(t,x)\in C(\bar\Omega,R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}\in C(\bar\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in C(\bar\Omega,R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega,R^n)$, называется *классическим решением* задачи (4)–(6), если удовлетворяет системе (15) для всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и краевым условиям (16), (17).

Нелокальные краевые задачи для системы (15) исследованы многими авторами, обзор и библиографию можно посмотреть в [12-15]. В [16] двухточечная краевая задача для квазилинейной системы гиперболических уравнений изучалась численно-аналитическим методом. В [17-21] исследовались некоторые виды нелокальных краевых задач для уравнений и систем гиперболического типа. В работе [22] исследована корректность начально-краевой задачи для линейного гиперболического уравнения высокого порядка с двумя независимыми переменными, которая может быть сведена к системе (15).

В работах [23, 24] рассматривалась нелокальная краевая задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений. Достаточные условия существования и единственности классического решения задачи (15) – (17), где $P_i(x) = 0$, $L_i(x) = 0$, $S_i(x) = 0$, $i = \overline{1,m}$, были даны в терминах исходных данных. В [11, 25-27] эта задача путем введения новых функций была сведена к семейству двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональным соотношениям. Доказана эквивалентность корректных разрешимостей рассматриваемой задачи и семейства краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получен коэффициентный критерий корректной разрешимости исследуемой проблемы.

Вводя новые неизвестные функции $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ и $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, сведем задачу (15) – (17) к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x,w(t,x),u(t,x)), \tag{18}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1} P_j(x)v(t_j,x) = \Phi(x,w,u), \qquad x \in [0,\omega], \tag{19}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \qquad w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi, \tag{20}$$

где $(t,x) \in \bar{\Omega}$, $\quad F(t,x,w(t,x),u(t,x)) = B(t,x)w(t,x) + C(t,x)u(t,x) +$

$f(t,x)$, $\Phi(x,w,u) = \varphi(x) - \sum\limits_{j=0}^{m+1}\Big\{L_j(x)w(t_j,x) + S_j(x)u(t_j,x)\Big\}$.

В задаче (18)–(20) условие $u(t,0)=\psi(t)$ учтено в соотношениях (20).

Тройка $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций называется решением задачи (18)–(20), если функция $v(t,x)$, принадлежащая $C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеет непрерывную производную относительно t на Ω и удовлетворяет одно-параметрическому семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (18) – (20), где функции $u(t,x)$ и $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$ и $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (20).

Обозначим через $\bar{\Omega}_\eta = [0,T]\times[0,\eta]$ и $||u||_{0,\eta} = \max\limits_{(t,x)\in\bar{\Omega}_\eta} ||u(t,x)||$.

Определение 2. *Нелокальная краевая задача (15)–(17) называется корректно разрешимой, если для произвольных $f(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\psi(t) \in C^1([0,T], R^n)$ и $\varphi(x) \in C([0,\omega], R^n)$ она имеет единственное классическое решение $u(t,x)$ и выполняется следующая оценка*

$$\max\Big(||u||_{0,\eta}, \Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\Big|_{0,\eta}, \Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\Big|_{0,\eta}\Big) \le \tilde{K}\max\Big(||f||_{0,\eta}, ||\psi||_{1,0}, \max_{x\in[0,\eta]}||\varphi(x)||\Big),$$

где константа $\tilde{K}$ не зависит от $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ и $\eta\in[0,\omega]$.

Теорема 3. *Нелокальная краевая задача (15)–(17) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешимо семейство многоточечных краевых задач (1)–(2).*

Из теоремы 3 и корректной разрешимости задачи (1)–(2) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Нелокальная краевая задача (15)–(17) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существует $\nu = \nu(t_0, t_1, .., t_m, t_{m+1})$, при котором матрица $Q_\nu(x) : R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ будет обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются неравенства a), b) теоремы 1.*

Литература

1 Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев.: Наукова думка, 1985. – 224 с.

2 Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М. : Наука, 1987. – Т. 30. – С. 3-103.

3 Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач // Труды Института математики НАН Украины. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1999. – Т. 29. – 220 с.

4 Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Нальчик: изд. центр "Эльфа", 2004. – 445 с.

5 Хасеинов К.А. Многоточечные и сопряженные краевые задачи, их приложения. – М.: Наука, 2006. – 272 с.

6 Ayda-zade K.R., Abdullaev V.M. Numerical Solution of Optimal Control Problems with Unseparated Conditions on Phase State // Appl. Comput. Math. An Internat. J. – 2005. – V. 4, №2. – P. 165-177.

7 Покорный Ю.В. О нулях функции Грина задачи Валле-Пуссена // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 6. – С. 105-135.

8 Джумабаев Д.С. Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник АН КазССР. – 1988. № 1. – С. 48-52.

9 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

10 Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 1(15). – С. 30-38.

11 Джумабаев Д.С., Асанова А.Т. Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доповіді НАН України. – 2010. № 4. – С. 7-11.

12 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.

13 Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наукова думка, 1991. – 232 с.

14 Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1992. – 208 с.

15 Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Memoires Differential Equations and Mathematical Physics. – 1994. – 1. – P. 1-144.

16 Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Украинский математический журнал. – 1990. – Т. 42, № 12. – С. 1657-1663.

17 Кигурадзе Т.И. О краевой задаче для квазилинейных гиперболических систем // Доклады РАН. – 1993. – Т. 328, №2. – С. 135-138.

18 Кигурадзе Т.И. О периодических краевых задачах для линейных гиперболических уравнений. I // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 281-297.

19 Кигурадзе Т.И. О некоторых нелокальных задачах для линейных гиперболических систем // Доклады РАН. – 1995. – Т. 345, № 3. – С. 300-302.

20 Kiguradze T. On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems // Archivum mathematicum. – 1997. – T. 33, № 4. – P. 253-272.

21 Kiguradze T., Lakshmikantham V. On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Analysis. – 2002. – Vol. 49, № 1. – P. 87-112.

22 Kiguradze T.I., Kusano T. Well-Posedness of Initial-Boundary Value Problems for Higher-order linear Hyperbolic Equations with Two Independent Variables // Differential equations. – 2003. – Vol. 39, № 4. – P. 553-563.

23 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 11. – С. 1673-1685.

24 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1343-1354.

25 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2002. № 3. – С. 20-26.

26 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 295-297.

27 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 337-346.

Статья поступила в редакцию 23.10.13

Асанова А.Т. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ ШЕШІЛІМДІГІ ТУРАЛЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРГЕ ҚОЛДАНЫСЫ.

Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептер әулеті қарастырылады. Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есептер әулетінің бірмәнді, корректілі шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Зерттеліп отырған есеп пен гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген бейлокал шеттік есептің өзара байланысы тағайындалған.

Asanova A.T. ON A SOLVABILITY OF A FAMILY OF MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION TO THE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

There is considered the family of the multi-point boundary value problems for the system of the ordinary differential equations. Necessary and sufficient conditions of unique, correct solvability of the family of the multi-point boundary value problems for the system of the ordinary differential equations are obtained. Interconnection of the studied problem and the nonlocal boundary value problem with the data on the characteristics for the system of hyperbolic equations is established.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.5

Ш.А. Балгимбаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: sc_s@mail.ru

НАИЛУЧШИЕ m–ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

В статье изучаются наилучшие m–членные приближения классов Никольского–Бесова $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина–Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций смешанной гладкости.
Ключевые слова: наилучшее m-членное приближение, жадный алгоритм, периодический всплеск, пространства Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля, смешанная гладкость.

Введение. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; X — действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — система элементов из X такая, что ее линейная оболочка $\operatorname{span}\Phi$ плотна в X.

Наилучшим m–членным приближением элемента $f \in X$ по системе Φ называется величина

$$\sigma_m(f,\Phi,X) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N},\sharp\Lambda=m}\left\{\|f-\sum_{i\in\Lambda}c_k\phi_k\|_X; c_k\in\mathbb{R}\right\},\ m\in\mathbb{N}; \qquad (1)$$

Keywords: *best m–term approximation, greedy algorithm, periodic wavelet, Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces, mixed smoothness*
2010 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

здесь и ниже $\sharp A$ — число элементов конечного множества A. Для множества F из X положим

$$\sigma_m(F,\Phi,X) = \sup\{\sigma_m(f,\Phi,X) | f \in F\}.$$

Наилучшие m-членные приближения и специальные нелинейные методы приближения на разных множествах (классах функций) с помощью разных систем Φ рассматриваются во многих работах; подробная библиография и история вопроса отражены в недавних фундаментальных обзорах [1, 2], которые показывают также растущий интерес к нелинейной проблематике. Это связано с важными приложениями нелинейных методов приближения в ряде разделов прикладной математики и численного анализа, в частности, в задачах цифровой обработки информации и адаптивных методах численного решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящей работе изучаются величины (1) в случае, когда $X = L_q(\mathbb{T}^d)$, F — классы $\mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций смешанной гладкости (определение см. в разделе 2), а Φ — известная ортонормированная системе U^d типа кратных периодических всплесков, образованной сдвигами кратных ядер Дирихле ([2, Ch.1], [3]).

Введем некоторые обозначения. Пусть $e_d = \{1,\ldots,d\}$; $d \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ — d–мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$. Для $x = (x_1,\ldots,x_d), y = (y_1,\ldots,y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$x < y (x \le y) \Leftrightarrow x_j < y_j (x_j \le y_j),\ j \in e_d;$$

$$(x,y) = x_1y_1 + ... + x_dy_d;$$

$|s| = \sum_{k=1}^d s_k$ — длина мультииндекса $s \in \mathbb{N}_0^d$.

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 2π—периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\|f\|_p$, где

$$\|f\|_p = \left\{(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \ (1 \le p < \infty);$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \ | x \in \mathbb{T}^d\}.$$

Приведем здесь определение системы U^d, следуя [3]. Одномерная система U определяется следующим образом:

$$U \equiv \{U_I(x) \,|\, I \in D\,\},\ x \in \mathbb{T},$$

где

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n^+ \cup D_n^-) \bigcup D_0,\ D_0 = \{[0,1)\},$$

$$D_n^+ := \{I = I_{n,k}^+ = [(k+\tfrac{1}{2})2^{-n}, (k+1)2^{-n}), k = 0,1,\ldots,2^n-1\},$$

$$D_n^- := \{I = I_{n,k}^- = [k2^{-n}, (k+\tfrac{1}{2})2^{-n}), k = 0,1,\ldots,2^n-1\}, n \in \mathbb{N};$$

$$U_{[0,1)} \equiv 1,\ U_{I_{n,k}^{\pm}}(x) = 2^{-n/2} e^{\pm i 2^n x} U_n(\pm(x - 2\pi k 2^{-n})),\ U_n(x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{ikx}.$$

В многомерном случае система U^d определяется как тензорное произведение одномерных систем U: если $I = I_1 \times \cdots \times I_d,\ \ I_j \in D_{s_j}^{\varepsilon_j},\ j \in e_d$ $(x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{T}^d)$, то

$$U_I(x) := \prod_{j=1}^{d} U_{I_j}(x_j).$$

Для $s = (s_1,\ldots,s_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d) \in \{-,+\}^d$ положим

$$D_s^\varepsilon := \{I:\ I = I_1 \times \cdots \times I_d,\ I_j \in D_{s_j}^{\varepsilon_j},\ j \in e_d\};\ D_d := \bigcup_{s,\varepsilon} D_s^\varepsilon.$$

Для $f \in L_1$ обозначим

$$f_I := (f, U_I) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \overline{U}_I(x)\, dx;$$

$$\widehat{f}_k(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(k,x)}\, dx,\ k \in \mathbb{Z}^d,$$

– тригонометрические коэффициенты Фурье и

$$\delta_s^\varepsilon(f) := \sum_{k\in\rho(s,\varepsilon)} \widehat{f}(x) e^{i(k,x)},\ s \in \mathbb{N}_0^d,\ \varepsilon \in \{-,+\}^d,$$

– соответствующие двоичные пачки ее ряда Фурье, где $\rho(s,\varepsilon):=\varepsilon_1[2^{s_1},2^{s_1+1}-1)\times\cdots\times\varepsilon_d[2^{s_d},2^{s_d+1}-1)$. Тогда легко видеть, что для любых $s\in\mathbb{N}_0^d$ и $\varepsilon\in\{-,+\}^d$ имеет место равенство

$$\delta_s^\varepsilon(f)=\sum_{I\in D_s^\varepsilon} f_I U_I.$$

Далее будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ и $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ пишем $\varphi(u)\ll\psi(u)$ при $u\to\infty$, если найдется такая константа $C=C(\varphi,\psi)>0$, что верно неравенство $\varphi(u)\le C\psi(u)$ для $u\ge u_0>0$; $\varphi(u)\asymp\psi(u)$, если одновременно $\varphi(u)\ll\psi(u)$ и $\psi(u)\ll\varphi(u)$.

Классы функций. Пусть ℓ_θ $(1\le\theta\le\infty)$ — пространство числовых последовательностей $\{a_s^\varepsilon\}_{s\in\mathbb{N}_0^d,\varepsilon\in\{-,+\}^d}$ с конечной нормой

$$\|\{a_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\theta}=\left\{\sum_{\varepsilon\in\{-,+\}^d}\sum_{s\in\mathbb{N}_0^d}|a_s^\varepsilon|^\theta\right\}^{1/\theta},\ 1\le\theta<\infty;\ \|\{a_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\infty}=\sup_{s\in\mathbb{N}_0^d,\varepsilon\in\{-,+\}^d}|a_s^\varepsilon|;$$

$\ell_\theta(L_p)\equiv\ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ $(L_p(\ell_\theta)\equiv L_p(\mathbb{T}^d;\ell_\theta))$ — пространство функциональных последовательностей $\{f_s^\varepsilon(x)\}_{s\in\mathbb{N}_0^d,\varepsilon\in\{-,+\}^d}, x\in\mathbb{T}^d$, с конечной нормой

$$\|\{f_s^\varepsilon\}\,|\,\ell_\theta(L_p)\|=\|\,\{\,\|f_s^\varepsilon\|_p\,\}\|_{\ell_\theta};$$

(соответственно,

$$\|\{f_s^\varepsilon\}\,|\,L_p(\ell_\theta)\|=\|\,\|\{f_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\theta}\,\|_p,$$

с обычной модификацией при $\theta=\infty$).

Для функции $f(x)$, заданной на $\mathbb{T}^d$, пусть

$$\Delta_{h,j}^k f(x)=\underbrace{\Delta_{h,j}\dots\Delta_{h,j}}_{k}f(x)$$

— её разность порядка $k\in\mathbb{N}_0$ в точке $x\in\mathbb{T}^d$ с шагом $h\in\mathbb{R}$ по переменной x_j, здесь

$$\Delta_{h,j}f(x)=f(\dots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\dots)-f(x),$$
$$\Delta_{h,j}^1 f(x):=\Delta_{h,j}f(x),\quad \Delta_{h,j}^0 f(x):=f(x).$$

Если теперь $k=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}_0^d$ и $h=(h_1,\ldots,h_d)\in\mathbb{R}^d$, то

$$\Delta_h^k f(x)=\Delta_{h_1,1}^{k_1}\Delta_{h_2,2}^{k_2}\ldots\Delta_{h_d,d}^{k_d}f(x)$$

— смешанная разность функции f порядка k в точке x с шагом h.

Приведем определение пространства Никольского–Бесова $\mathrm{SB}_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ через смешанные разности [4], [5].

Определение 1. *Пусть $1\le p,\theta\le\infty$, $r=(r_1,\ldots,r_d)\in\mathbb{R}_+^d$. Тогда пространство Никольского–Бесова $SB_{p\,\theta}^r=SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ есть совокупность всех функций $f\in L_p$, для которых*

$$\|\,f\,|\,SB_{p\,\theta}^r\,\|=\|f\|_p+\left\{\sum_{\varnothing\ne e\subset e_d}\int_{[0,2\pi]^{\sharp e}}\|\Delta_{h^e}^{k^e}f(\cdot)\|_p^\theta\prod_{j\in e}\frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}}\right\}^{1/\theta}<\infty,\quad(2)$$

где $k>r$.

Приведем теорему характеризации пространства Никольского–Бесова $SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ с сопутствующей эквивалентной нормировкой [4, теорема 5.4].

Теорема A. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$. Функция $f\in L_p$ принадлежит пространству $SB_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ тогда и только тогда, когда функциональная последовательность $\{2^{(r,s)}\delta_s^\varepsilon(f)\}$ принадлежит $\ell_\theta(L_p)$, при этом функционал*

$$\|f\,|\,SB_{p\theta}^r\|=\|\{2^{(r,s)}\delta_s^\varepsilon(f)\}\,|\,\ell_\theta(L_p)\|$$

является нормой пространства $SB_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$, эквивалентной норме (2).

Здесь с учетом теоремы A нам удобно определить пространства Лизоркина–Трибеля $SF_{p\,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ следующим образом.

Определение 2. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $r=(r_1,\ldots,r_d)\in\mathbb{R}_+^d$. Тогда пространство Лизоркина – Трибеля $SF_{p\theta}^r=SF_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ есть совокупность всех функций $f\in L_p$ с конечной нормой*

$$\|f\,|\,SF_{p\theta}^r\|=\|\{2^{(r,s)}\delta_s^\varepsilon(f)\}\,|\,L_p(\ell_\theta)\|.$$

Через $\mathrm{SB}_{p\theta}^r=\mathrm{SB}_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}_{p\theta}^r=\mathrm{SF}_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ обозначим единичные шары пространств $SB_{p\theta}^r$ и $SF_{p\theta}^r$ соответственно.

Отметим, что при $1 \le p \le \infty$ $SB^r_{p\infty}(\mathbb{T}^d) \equiv SH^r_p(\mathbb{T}^d)$ есть пространство функций с доминирующей смешанной разностью, удовлетворяющей кратному условию Гельдера, впервые введенное и исследованное С.М. Никольским [6], [7]; при $1 < p < \infty$ пространство $SF^r_{p2}(\mathbb{T}^d)$ совпадает с пространством $SW^r_p(\mathbb{T}^d)$ функций с ограниченной (доминирующей) смешанной производной (определение см. [8]). Теория пространств $SB^r_{p\theta}(\mathbb{I}^d), 1 \le \theta < \infty$ ($\mathbb{I} = \mathbb{T}$ или $\mathbb{R}$) достаточно подробно изложена в монографии [5]. Теория пространств $SB^r_{p\theta}(\mathbb{R}^d)$ и $SF^r_{p\theta}(\mathbb{R}^d)$ на основе их Фурье–аналитического определения построена в [9].

Основная теорема

Всюду ниже считаем, не ограничивая общности, что вектор $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$ такой, что $r_1 = \dots = r_\nu < r_j$, $j \in e_d \setminus e_\nu$, с некоторым $\nu \in e_d$. Таким образом, $r_1 = \min\{r_j, \, j \in e_d\}$ и ν —количество минимальных компонент вектора r. Также всюду ниже $\tau_* = \min\{2, \tau\}$, $u = \min\{p, \theta\}$, log — логарифм по основанию 2.

В работе [3] В.Н. Темляковым доказаны оценки наилучших m–членных приближений классов функций с ограниченной смешанной разностью SH^r_p и с ограниченной смешанной производной SW^r_p по системе U^d в пространстве L_q при $1 < p, q < \infty$ в случае $\nu = d$, т.е. $r = (r_1, \dots, r_1)$. Более точно, справедливы соотношения

$$\sigma_m(\mathrm{SH}^r_p, U^d, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(d-1)(r_1 + \frac{1}{2})}, \tag{3}$$

причем $r_1 > (1/p - 1/q)_+$, если $q \ge 2$, и $r_1 > (\max(2/p, 2/q) - 1)/q$, если $q < 2$;

$$\sigma_m(\mathrm{SW}^r_p, U^d, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(d-1) r_1}, \tag{4}$$

причем $r_1 > \max(1/p, 1/2) - 1/q$, если $q \ge 2$, и $r_1 > (\max(2/p, 2/q) - 1)/q$, если $q < 2$.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Пусть $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$; $r \in \mathbb{R}^d_+$ такой, что $r_1 > \frac{1}{\min\{u, q\}} \cdot \frac{2}{q_*} - \frac{1}{q}$. Тогда верны соотношения*

$$\sigma_m(\mathrm{F}, U^d, L_q) \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(\nu - 1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})},$$

где F – это класс $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ или класс $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$.

Таким образом, теорема 1 развивает оценки (3), (4) в двух направлениях; мы рассматриваем, во–первых, две шкалы функциональных классов $\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}$ и $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}$, которые включают в себя классы SH^r_p и SW^r_p соответственно (см. раздел 2); во–вторых, произвольный вектор смешанной гладкости $r = (r_1, \ldots, r_d)$ вместо вектора $r = (r_1, \ldots, r_1)$ с одинаковыми компонентами.

Отметим работы Динь Зунга, которые имеют прямое отношение к теореме 1. В частности, в [10] получены оценки наилучших m–членных приближений по системе V, аналогичной U^d, которая строится на основе ядер Валле–Пуссена: при $1 < p, q < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$,

$$\sigma_m(\mathrm{SB}^r_{p\,\theta}, V, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp (m/\log^{\nu-1} m)^{-r_1} (\log^{\nu-1} m)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}},$$

$$\sigma_m(\mathrm{SW}^r_p, V, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp (m/\log^{\nu-1} m)^{-r_1}.$$

Схема доказательства теоремы 1. Предположим, что система Φ — базис пространства X, т.е. для любого элемента $f \in X$ существует единственная последовательность скаляров $\{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\phi_k.$$

Определим "жадный" алгоритм, следуя [2]. Положим для $f \in X$

$$C_k(f, X, \Phi) := \|c_k(f)\phi_k\|_X, \ k \in \mathbb{N},$$

обозначим через Λ_m множество из m натуральных чисел такое, что

$$\min_{k\in\Lambda_m} C_k(f, X, \Phi) \ge \max_{j\in\mathbb{N}\setminus\Lambda_m} C_j(f, V, \Phi)$$

и определим "X–жадный" алгоритм (X–greedy algorithm) (по системе Φ) следующим образом

$$G^X_m(f, \Phi) := \sum_{k\in\Lambda_m} c_k(f)\phi_k, \ m \in \mathbb{N}.$$

Жадные алгоритмы относятся к классу нелинейных методов аппроксимации, важны для приложений и активно изучаются по настоящее время.

По поводу теории жадных алгоритмов и подробной истории вопроса см. фундаментальный обзор [2], где можно найти также исчерпывающую библиографию.

Для множества $F \subset X$ положим

$$G_m^X(F, \Phi) := \sup_{f \in F} \|f - G_m^X(f, \Phi)\|_X, \ m \in \mathbb{N}.$$

При получении оценок сверху в теореме 1 используется очевидное неравенство

$$\sigma_m(\mathrm{F}, U^d, L_q) \leq G_m^{L_q}(\mathrm{F}, U^d)$$

для любого $\mathrm{F} \subset L_p$ и фактически доказываются оценки сверху для жадных алгоритмов на соответствующих классах функций. Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r \in \mathbb{R}_+^d$ *такой, что* $r_1 > \frac{1}{\min\{u, q\}} \frac{2}{q_*} - \frac{1}{q}$. *Тогда справедливы оценки*

$$G_m^{L_q}(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^r, U^d) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})},$$

$$G_m^{L_q}(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^r, U^d) \ll m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

По поводу оценок снизу, не вдаваясь в подробности, отметим, что мы строим полиномы по системе U^d с $2m$ членами, которые плохо приближаются m–членными полиномами в соответствующей метрике и принадлежат соответствующим функциональным классам.

Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ МОН РК.

Литература

1 Temlyakov V.N. Nonlinear methods of approximation // Found. Comp. Math. – 2003. – V. 3. – P. 33-107.

2 Temlyakov V.N. Greedy approximation // Acta Numerica. – 2008. – V. 17. – P. 235-409.

3 Temlyakov V.N. Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. approx. – 2000. – V. 16, № 3. – P. 399-425.

4 Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИ АН СССР. – 1989. – Т. 187. – С. 143-161.

5 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 224 с.

6 Никольский С.М. Теорема о представлении одного класса дифференцируемых функций многих переменных посредством целых функций экспоненциального типа // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 3. С. 484-487.

7 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4, № 6. – С. 1342-1364.

8 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 3-113.

9 Schmeisser H.-J., Triebel H. Topics in Fourier analysis and function spaces. – Wiley, Chichester, 1987. – 308 p.

10 Dung D. Continuous algorithms in n-term approximation and non-linear widths // Jurnal approx. theory. – 2000. – V. 102, № 2. – P. 217-242.

Статья поступила в редакцию 09.10.13

Балғынбаева Ш.А. АРАЛАС ТЕГІСТІКТІ ФУНКЦИЯЛАР КЕҢІСТІКТЕРІНІҢ ЕҢ ЖАҚСЫ m–МҮШЕЛІК ЖУЫҚТАУЛАРЫ

Мақалада аралас тегістікті $\mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ Никольский–Бесов және $\mathrm{SF}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ Лизоркин–Трибель кластарының ең жақсы m–мүшелік жуықтаулары зерттелген.

Balgimbayeva Sh. THE BEST m–TERM APPROXIMATIONS OF FUNCTION SPACES OF MIXED SMOOTHNESS

In article the best m–term approximations of Nikol'slkii–Besov $\mathrm{SB}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ and Lizorkin–Triebel $\mathrm{SF}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ functions classes of mixed smoothness are investigated.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.5

А.М. Жантакбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
010010, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru

О СУММИРУЕМОСТИ СРЕДНИХ БЕЛЛМАНА КОЭФФИЦИЕНТОВ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

В статье получены неравенство типа Харди-Литтлвуда для усреднений типа Беллмана коэффициентов кратных рядов Фурье функций из изотропных пространств Лоренца. Т.е. доказаны оценки нормы снизу функции из изотропного пространства Лоренца, показывающие необходимые условия принадлежности функции в пространству $L_{p,q}$. Введено пространство $n_{p,q,\alpha}$, рассмотрены их интерполяционные свойства, которые используются для получения основных результатов данной работы.
Ключевые слова: *кратные ряды Фурье, коэффициенты Фурье, изотропное пространство Лоренца, неравенство Харди-Литтлвуд-Стейна.*

Введение

В работе изучается вопрос: если функция $f \in L_{p,q}[0;1]^n$, то какими свойствами обладают ее коэффициенты Фурье, т.е. сходится ли некоторый ряд, зависящий от коэффициентов Фурье?

Keywords: *multiple Fourier series, isotropic Lorentz space, Fourier coefficients, inequality of Hardy-Littlwood-Stein*
2010 Mathematics Subject Classification: 42B05, 42B08

Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < q \le \infty$. Пространством Лоренца $L_{p,q}[0,1]$ называется множество всех измеримых 1-периодических функций, определенных на $[0,1]$, для которых конечны величины

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad \text{при} \quad 0 < q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]} = \sup_{0 \le t \le 1} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty \quad \text{при} \quad q = \infty.$$

Здесь $f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x : |f(x)| > \sigma\} < t\}$ – невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Определим символ $A \hookrightarrow B$. Он означает вложение квазинормированного пространства A в квазинормированное пространство B. Через $\vec{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, \dots, a_n)$. Пусть также $\vec{a}^{\vec{b}} = a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}$, p' – сопряженный параметр к p, т.е. $p' = \frac{p}{p-1}$. Условимся обозначать через C постоянные, зависящие только от параметров p, q, p_i, q_i, α, где $i = 0, 1$. Эти постоянные могут быть различными в разных случаях.

Хорошо известно неравенство Харди-Литтлвуда-Стейна [1, с. 490], которое верно для пространства Лоренца. Если $1 < p < 2$, $0 < q \le \infty$ и $f \in L_{p,q}[0,1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} (a_k^*)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}, \tag{1}$$

где a_k^* – невозрастающая перестановка коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=1}^{\infty}$.

Отметим, что в случае $2 < p < \infty$ неравенство (1) не верно. В [2, с. 249] и [3, с. 154-158] можно найти соответствующий пример при $p = q$. Этим же примером не сложно показать данный факт для $p \ne q$. Тем не менее, если заменить коэффициенты a_k на некоторые средние, то оценка сохраняется. В работе [4] был установлен такой результат. Если $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ и $f \in L_{p,q}[0;1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} \, (\bar{a}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}, \tag{2}$$

где $\bar{a}_k = \frac{1}{k}\left|\sum\limits_{m=1}^{k} a_m\right|$.

Заметим, что здесь вместо коэффициентов Фурье в левой части стоят их средние типа Харди. В той же работе неравенство (2) было установлено и для функций многих переменных.

Настоящая работа посвящена получению аналога неравенства (2) для средних Беллмана коэффициентов Фурье функций многих переменных. Для одномерного случая этот результат был анонсирован в работе [5].

Определение 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha > 0$. Изотропным дискретным пространством $n_{p,q,\alpha}$ называется множество всех последовательностей $a = \{a_{k_1\dots k_n}\}_{k_i\in N}$, $i = 1,\dots,n$, для которых конечна величина*

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\dots\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(k_1^{\frac{1}{p}}\dots k_n^{\frac{1}{p}}\widetilde{a}_{k_1\dots k_n}(\alpha)\right)^q \frac{1}{k_1}\dots\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{q}},$$

если $q < \infty$, и при $q = \infty$

$$\|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} = \sup_{k_i\in N,\ i=1,..,n} k_1^{\frac{1}{p}}\dots k_n^{\frac{1}{p}}\widetilde{a}_{k_1\dots k_n}(\alpha) < \infty,$$

где

$$\widetilde{a}_{k_1\dots k_n}(\alpha) = \sup_{m_i\ge k_i,\ i=1,\dots,n}\frac{1}{m_1^{1-\alpha}\dots m_n^{1-\alpha}}\left|\sum_{s_n=m_n}^{\infty}\dots\sum_{s_1=m_1}^{\infty}\frac{a_{s_1\dots s_n}}{s_1^{\alpha}\dots s_n^{\alpha}}\right|.$$

Лемма 1. *Если $1 < p < \infty$ и $0 < q \le \infty$, то имеет место вложение $n_{p,q,\alpha} \hookrightarrow n_{p,\infty,\alpha}$.*

Доказательство. Заметим

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^{\frac{1}{p}} \le C\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m_i=1}^{k_i} m_i^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} = c\left(\sum_{m_n=1}^{k_n}\dots\sum_{m_1=1}^{k_1}\left(m_1^{\frac{1}{p}}\dots m_n^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{1}{m_1}\dots\frac{1}{m_n}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где константа C зависит только от p, q, n. Поскольку при $m_i \le k_i$ имеем $\widetilde{a}_{k_1\dots k_n}(\alpha) \le \widetilde{a}_{m_1\dots m_n}(\alpha)$, мы получаем, что

$$\|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} = \sup_{k_i\in N, i=1,\dots,n} k_1^{\frac{1}{p}}\dots k_n^{\frac{1}{p}}\widetilde{a}_{k_1\dots k_n}(\alpha) \le$$

$$\leq C \sup_{k_i \in N} \left(\sum_{m_n=1}^{k_n} \cdots \sum_{m_1=1}^{k_1} \left(m_1^{\frac{1}{p}} \dots m_n^{\frac{1}{p}} \widetilde{a}_{m_1 \dots m_n}(\alpha) \right)^q \frac{1}{m_1} \cdots \frac{1}{m_n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|a\|_{n_{p,q,\alpha}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$. *Тогда*

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \asymp \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{\frac{k_1}{p}} \dots 2^{\frac{k_n}{p}} \widetilde{a}_{2^{k_1} \dots 2^{k_n}}(\alpha) \right)^q \cdots \right)^{\frac{1}{q}},$$

т.е. имеют место двухсторонние оценки с константами, зависящими только от параметров p, q.

Доказательство. Так как для $\forall i = 1, \dots, n$ имеем

$$C 2^{q \frac{k_i+1}{p}} \leq \sum_{m_i=2^{k_i}}^{2^{k_i+1}-1} m_i^{\frac{q}{p}-1} \leq C 2^{\frac{q k_i}{p}} \tag{3}$$

и поскольку при $k_i \leq m_i$ выполняется неравенство

$$\widetilde{a}_{m_1 \dots m_n}(\alpha) \leq \widetilde{a}_{k_1 \dots k_n}(\alpha), \tag{4}$$

мы получим, что

$$C 2^{q \frac{k_1+1}{p}} \widetilde{a}^q_{2^{k_1+1} m_2 \dots m_n}(\alpha) \leq \sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} m_1^{\frac{q}{p}-1} \widetilde{a}^q_{m_1 \dots m_n}(\alpha) \leq C 2^{q \frac{k_1}{p}} \widetilde{a}^q_{2^{k_1} m_2 \dots m_n}(\alpha).$$

Просуммировав неравенства по k_1 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q}$, получим

$$C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{q \frac{k_1+1}{p}} \widetilde{a}^q_{2^{k_1+1} \dots m_n}(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\frac{q}{p}-1} \widetilde{a}^q_{m_1 \dots m_n}(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{q \frac{k_1}{p}} \widetilde{a}^q_{2^{k_1} \dots m_n}(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда, вновь использовав (3) и (4), получим

$$C2^{q\frac{k_2+1}{p}}\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q\frac{k_1+1}{p}}\widetilde{a}^q_{2^{k_1+1}2^{k_2+1}\dots m_n}(\alpha)\le\sum_{m_2=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}m_2^{\frac{q}{p}-1}\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q}{p}-1}\widetilde{a}^q_{m_1\dots m_n}(\alpha)\le$$

$$\le C2^{q\frac{k_2}{p}}\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q\frac{k_1}{p}}\widetilde{a}^q_{2^{k_1}2^{k_2}\dots m_n}(\alpha).$$

Просуммировав неравенства по k_2 от нуля до бесконечности и возведя в степень $\frac{1}{q}$, получим

$$C\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{q\frac{k_2+1}{p}}\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q\frac{k_1+1}{p}}\widetilde{a}^q_{2^{k_1+1}2^{k_2+1}\dots m_n}(\alpha)\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\left(\sum_{m_2=1}^{\infty}m_2^{\frac{q}{p}-1}\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\frac{q}{p}-1}\widetilde{a}^q_{m_1\dots m_n}(\alpha)\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{q\frac{k_2}{p}}\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{q\frac{k_1}{p}}\widetilde{a}^q_{2^{k_1}2^{k_2}\dots m_n}(\alpha)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, продолжая процесс n-раз, получим требуемое неравенство.

В работе [4] был введен интерполяционный метод для анизотропных пространств. В частности, его можно рассматривать для изотропных пространств.

Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых изотропных пространств [6] и $E=\{\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n):\varepsilon_i=0$ или $\varepsilon_i=1,\ i=1,\dots,n\}$. Пусть

$$K(\vec{t},a;A_0,A_1)=\inf\{\sum_{\vec{\varepsilon}\in E}\vec{t}^{\vec{\varepsilon}}\|a^{\vec{\varepsilon}}\|_{A_{\vec{\varepsilon}}}:\ \ a=\sum_{\vec{\varepsilon}\in E}a^{\vec{\varepsilon}},\ a^{\vec{\varepsilon}}\in A_{\vec{\varepsilon}}\}$$

– функционал Петре. При $0<q<\infty$, $0<\theta<1$ обозначим через $A_{\theta,q}=(A_0,A_1)_{\theta,q}$ линейное подмножество $\sum\limits_{\vec{\varepsilon}\in E}A_{\vec{\varepsilon}}$, состоящее из элементов, для которых

$$\|a\|_{A_{\theta,q}}=\left(\int\limits_0^{\infty}\dots\int\limits_0^{\infty}\left(t_1^{-\theta}\dots t_n^{-\theta}K(\vec{t},a)\right)^q\frac{dt_1}{t_1}\dots\frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\ \text{ при } q<\infty\ \text{ и}$$

$$\|a\|_{A_{\theta,\infty}} = \sup_{0<\vec{t}<\infty} \vec{t}^{-\theta} K(\vec{t}, a) < \infty \text{ при } q = \infty.$$

Лемма 3. *Если* $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и параметры* $0 < q \le \infty$, $0 < q_i \le \infty$, *где* $i = 0, 1$, $0 < \theta < 1$, *то*

$$(n_{p_0,q_0,\alpha},\ \ n_{p_1,q_1,\alpha})_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q,\alpha},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Доказательство. В силу вложения

$$n_{p_i,q_i,\alpha} \hookrightarrow n_{p_i,\infty,\alpha}, \ \ i = 0, 1,$$

достаточно доказать, что

$$(n_{p_0,\infty,\alpha},\ \ n_{p_1,\infty,\alpha})_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q,\alpha}.$$

Пусть $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i = t_i^{\gamma}$, $\gamma = \frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}$, $0 < t_i < \infty$. Для последовательности $a = \{a_{k_1 \ldots k_n}\}_{k_i \in N, i=1,..,n}$ рассмотрим представление

$$a_{k_1\ldots k_n} = \sum_{\vec{\varepsilon} \in E} a^{\vec{\varepsilon}}_{k_1\ldots k_n},$$

где последовательность $\{a^{\vec{\varepsilon}}_{k_1\ldots k_n}\}_{k_i \in N, i=1,..,n}$ соответственно принадлежит пространству $n_{p_{\vec{\varepsilon}},\infty,\alpha}$.

Учитывая, что при $i = 1, ..., n$

$$\widetilde{a}_{k_1\ldots k_n}(\alpha) = \sup_{m_i \ge k_i} \frac{1}{m_1^{1-\alpha} \ldots m_n^{1-\alpha}} \left| \sum_{s_n=m_n}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=m_1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{\vec{\varepsilon}\in E} a^{\vec{\varepsilon}}_{s_1\ldots s_n}}{s_1^{\alpha} \ldots s_n^{\alpha}} \right| \le$$

$$\le \sum_{\vec{\varepsilon}\in E} \sup_{m_i \ge k_i} \frac{1}{m_1^{1-\alpha} \ldots m_n^{1-\alpha}} \left| \sum_{s_n=m_n}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=m_1}^{\infty} \frac{a^{\vec{\varepsilon}}_{s_1\ldots s_n}}{s_1^{\alpha} \ldots s_n^{\alpha}} \right| = \sum_{\vec{\varepsilon}\in E} \widetilde{a}^{\vec{\varepsilon}}_{k_1\ldots k_n}(\alpha),$$

мы получим

$$\sup_{\vec{v} \ge \vec{s} \ge 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}} \le \sum_{\vec{\varepsilon}\in E} \sup_{\vec{v} \ge \vec{s} \ge 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}^{\vec{\varepsilon}}_{\vec{s}} = \sum_{\vec{\varepsilon}\in E} \sup_{\vec{v} \ge \vec{s} \ge 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_{\vec{\varepsilon}}} + \frac{1}{p_{\vec{\varepsilon}}}} \widetilde{a}^{\vec{\varepsilon}}_{\vec{s}}.$$

Так как для любых $i = 1, ..., n$ имеем

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_{\varepsilon_i}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon_i = 0; \\ \frac{1}{\gamma}, & \text{если } \varepsilon_i = 1. \end{cases} \quad \text{и} \quad \sup_{v_i \geq s_i \geq 1} s_i^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_{\varepsilon_i}}} = v_i^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_{\varepsilon_i}}} = t_i^{\varepsilon_i},$$

то

$$\sup_{\vec{v} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}} \leq \sum_{\vec{\varepsilon} \in E} \vec{t}^{\vec{\varepsilon}} \sup_{\vec{s} \in N} \vec{s}^{\frac{1}{p_{\vec{\varepsilon}}}} \widetilde{a}_{\vec{s}}^{\vec{\varepsilon}}.$$

Учитывая произвольность представления $a_{k_1 \ldots k_n} = \sum\limits_{\vec{\varepsilon} \in E} a_{k_1 \ldots k_n}^{\vec{\varepsilon}}$, имеем

$$\sup_{\vec{v} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}} \leq K\left(\vec{t}, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}\right).$$

Поэтому при $0 < q \leq \infty$ будет следовать

$$\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left(\vec{t}^{-\theta} K\left(\vec{t}, a; n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha}\right)\right)^q \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int_0^\infty \left(\vec{t}^{-\theta} \sup_{\vec{v} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\alpha)\right)^q \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сделаем замену $\vec{t} = \vec{u}^{\frac{p_1 - p_0}{p_0 p_1}}$. Тогда так как $1 < p_0 < p_1$, мы получаем, что

$$\left(\int_0^\infty \left(\vec{t}^{-\theta} \sup_{\vec{v} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\alpha)\right)^q \frac{d\vec{t}}{\vec{t}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\vec{u}^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{\vec{u} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\alpha)\right)^q \frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\bar{r}=1}^\infty \int_{2^{\bar{r}-1}-1}^{2^{\bar{r}}-1} \left(\vec{u}^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{\vec{u} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\alpha)\right)^q \frac{d\vec{u}}{\vec{u}}\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq C\left(\sum_{\bar{r}=1}^\infty \left(2^{-\theta\bar{r}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{2^{\bar{r}} \geq \vec{s} \geq 1} \vec{s}^{\frac{1}{p_0}} \widetilde{a}_{\vec{s}}(\alpha)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq C\left(\sum_{\bar{r}=1}^{\infty}\left(2^{-\theta\bar{r}(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})}2^{\frac{\bar{r}}{p_0}}\widetilde{a}_{2^{\bar{r}}}(\alpha)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = C\|a\|_{n_{p,q,\alpha}}.$$

Итак

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \leq C\|a\|_{\left(n_{p_0,\infty,\alpha},\ n_{p_1,\infty,\alpha}\right)_{\theta,q}}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к выводу основного результата этой статьи.

Определение 2. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Множество всех измеримых функций, определенных на $[0,1]^n$, называется изотропным пространством Лоренца $L_{p,q}[0,1]^n$, если конечны величины*

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]^n} = \left(\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \left(x_1^{\frac{1}{p}} \dots x_n^{\frac{1}{p}} f^*(x_1,\dots,x_n)\right)^q \frac{dx_1}{x_1}\dots\frac{dx_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

при $0 < q < \infty$, и

$$\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]^n} = \sup_{(t_1,\dots,t_n)\in[0;1]^n} \vec{t}^{\frac{1}{p}} f^*(\vec{t}) < \infty$$

при $q = \infty$. Здесь $f^{*_1,\dots,*_n}(\vec{t}) = \inf\{\sigma : \mu\{\bar{x} \in R^n :\ |f(\bar{x})| > \sigma\} < \vec{t}\}$ – невозрастающая перестановка функции $f(\vec{t})$ по каждой переменной.

Теорема 1. *Пусть параметры $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, число $\alpha > \frac{1}{p}$, где $\alpha = (\alpha,\dots,\alpha)$. Пусть 1-периодическая по каждой переменной функция $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет ряд Фурье по тригонометрической системе вида*

$$\sum_{k_n=1}^{\infty}\dots\sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1\dots k_n} e^{2\pi i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)},$$

где

$$a_{k_1\dots k_n} = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_n)e^{-2\pi i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}dx_1\dots dx_n.$$

Тогда, если $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_{pq}[0;1]^n$, *то справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left((k_1 \ldots k_n)^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m_n=k_n}^{\infty} \cdots \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1 \ldots m_n}}{m_1^{\alpha} \ldots m_n^{\alpha}} \right| \right)^q \frac{1}{k_1} \cdots \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]^n}. \tag{5}$$

Доказательство. Оценим величину

$$A = \sup_{k_1, \ldots, k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m_n=k_n}^{\infty} \cdots \sum_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{a_{m_1 \ldots m_n}}{m_1^{\alpha} \ldots m_n^{\alpha}} \right|.$$

Подставляя значение коэффициента Фурье и поменяв местами интегралы и суммы, получим

$$A = \sup_{k_1, \ldots, k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) \Phi_{k_1 \ldots k_n}(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n \right|,$$

где $\Phi_{k_1 \ldots k_n}(\bar{x}) = \sum\limits_{m_n=k_n}^{\infty} \cdots \sum\limits_{m_1=k_1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)}}{m_1^{\alpha} \ldots m_n^{\alpha}} = \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{m_j=k_j}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m_j x_j}}{m_j^{\alpha}} = \prod\limits_{j=1}^{n} \Phi_{k_j}(x_j)$. Используя неравенство Гельдера при $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, для пространства Лоренца будем иметь

$$A \leq \sup_{k_1, \ldots, k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha - \frac{1}{p}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \|f(\cdot, x_2, \ldots, x_n)\|_{L_{p,1}} \|\Phi_{k_1}\|_{L_{p',\infty}} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{n} \Phi_{k_j}(x_j) dx_2 \ldots dx_n \leq \ldots \leq$$

$$\leq \left(\sup_{k_1, \ldots, k_n \in N} \prod_{j=1}^{n} k_j^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\Phi_{k_j}\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n} \right) \|f\|_{L_{p,1}[0;1]^n} \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_{k_j}(x_j) = \sum\limits_{m_j=k_j}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m_j x_j}}{m_j^{\alpha}}$. Коэффициенты Фурье этой функции при $m_j \geq k_j$ монотонно убывают.

Аналог классической теоремы Харди-Литтлвуда был доказан для симметричных пространств Семеновым Е.М. [8], для косинус и синус рядов функции из пространства Лоренца – Загером Ю. [9]. Тогда, в частности, при $q = \infty$ будет верно

$$\|\Phi_{k_j}\|_{L_{p',\infty}[0;1]^n} \asymp \left\| \frac{1}{m_j^{\alpha}} \right\|_{l_{p\infty}} = \sup_{1\leq r_j \leq \infty} r_j^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(k_j + r_j)^{\alpha}}$$

Заметим, что при $\alpha > \frac{1}{p}$ максимум функции $g(x) = \frac{x^{\frac{1}{p}}}{(k+x)^{\alpha}}$ конечен и достигается в точке $x = \frac{k}{\alpha p - 1}$, тогда из (6) получим $A \leq C\|f\|_{L_{p,1}[0;1]^n}$, следовательно,

$$\|a\|_{n_{p',\infty,\alpha}} \leq C\|f\|_{L_{p,1}[0;1]^n}.$$

Используя лемму 3 и интерполяционную теорему 2 из [4], получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 1504/ГФ Комитета науки МОН РК.

Литература

1 Stein Elias M. Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83. – P. 482-492.

2 Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985. – Т.2 – 400 с.

3 Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998. – 160 с.

4 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье // Известия РАН. Серия математика. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 93-122.

5 Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестник МГУ. Серия математика, механика. – 2004. – Т. 1, № 2. – С. 64-66.

6 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. – М.: Мир, 1980. – 264 с

7 Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я. Функторы вещественной интерполяции // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 14-17.

8 Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 6. – С. 1251-1254.

9 Sagher Yo. An application of interpolation theory to Fourier series // Studia Mathematica. – 1972. – T. XLI. – P. 169-181.

Статья поступила в редакцию 15.11.13

Жантақбаева А.М. ИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНІҢ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ЕСЕЛІ ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ БЕЛЛМАН ОРТАЛАНДЫРУЫНЫҢ ҚОСЫНДЫЛАНУЫ ТУРАЛЫ

Мақалада изотропты Лоренц кеңістігіндегі функциялардың Фурье коэффициенттерінің Беллман тектес орталандыруының Харди-Литтлвуд-Стейн тектес теңсіздігі алынған. Яғни функцияның $L_{p,q}$ кеңістігіне тиісті болуының қажетті шартын көрсететін изотропты Лоренц кеңістігіне тиісті функцияның нормасының төменгі бағалауы дәлелденген. $n_{p,q,\alpha}$ кеңістігі енгізіліп, оның интерполяциялық қасиеттері қарастырылған. Олардың қолданылуы арқылы негізгі нәтижелер дәлелденеді.

Zhantakbayeva A.M. ON SUMMABILITY OF BELLMAN AVERAGES OF COEFFICIENTS OF MULTIPLE FOURIER SERIES OF FUNCTIONS FROM ISOTROPIC LORENTZ SPACE

The inequality of Hardy-Littlewood type for averages of the Bellman type of the coefficients of multiple Fourier series from the isotropic Lorentz spaces are obtained. I.e. there are proved estimates of the norm of function from below from isotropic Lorentz space showing the necessary conditions for a function to belong to the space $L_{p,q}$. There is introduced the space $n_{p,q,\alpha}$, their interpolation properties, which are used to obtain the main results of this work are considered.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.925.5:519.216

Г.Т. Ибраева, М.И. Тлеубергенов

Военный институт СВО им.Т. Бегельдинова
030000, Актобе, А. Молдагуловой, 16, e-mail: gulmira_ibraeva@mail.ru
Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, Пушкина, 125, e-mail: marat207@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕПРЯМЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматриваются две обратные задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, зависящим от части переменных, и с управлением по первой производной (*задача 1*) и с управлением по второй производной (*задача 2*). Методом разделения определяются множества уравнений регулятора, обеспечивающие в этих задачах достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

Ключевые слова: *обратные задачи, стохастическое дифференциальное уравнение, интегральное многообразие.*

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2, 3].

Keywords: *inverse problems, stochastic differential equation, integral manyfold*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

Постановка задач

Задача 1. *Стохастическая задача восстановления* с управлением по производным первого порядка. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \qquad x \in R^n, \\ \dot{y} = g_1(x,y,\ t) + \sigma_1\,(x,y,t)\,\dot{\xi}, \quad \xi \in R^k. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (1)), то есть определить коэффициенты $g_1(x,y,\ t)$ и $\sigma_1\,(x,y,t)$ так, чтобы множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \qquad \text{где} \quad \lambda \in C^{22}_{xt}, \quad \lambda \in R^m, \tag{2}$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).
Задача 2. *Стохастическая задача восстановления* с управлением по производным второго порядка. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \\ \ddot{y} = g_2(x,y,\ t) + \sigma_2\,(x,y,t)\,\dot{\xi}, \quad y \in R^r. \end{cases} \tag{3}$$

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (3)) по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \qquad \text{где} \quad \lambda \in C^{33}_{xt}. \tag{4}$$

Иначе говоря, по заданным вектор-функциям f, λ определим коэффициенты $g_2(x,y,t)$ и $\sigma_2(x,y,t)$ так, чтобы множество (4) было интегральным многообразием системы уравнений (3).

Здесь $x \in R^n, y \in R^r,\ \xi \in R^k$, а σ_1, σ_2- матрицы размерности $(r \times k)$.

Предположим, что $\{\xi_1(t,\omega), ..., \xi_k(t,\omega)\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [4], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(z)P^0(t,dz)$, ξ_0- винеровский процесс; P^0- пуассоновский процесс; $P^0(t,dz)-$ число скачков процесса P^0 в интервале [0, t], попадающих на множество dz; $c(z)-$ векторная функция, отображающая пространство R^{n+r} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t.

Вектор непрямого управления $y \in R^r$ изменяется в соответствии с уравнением динамики регулятора в виде стохастического уравнения Ито первого порядка в задаче 1 и второго порядка в задаче 2.

Предполагается, что вектор-функции $f(x, \dot{x}, t)$, $g_1(x, y, t)$, $g_2(x, y, t)$ и матрицы $\sigma_1(x, y, t)$, $\sigma_2(x, y, t)$ во всем пространстве $z = \left(x^T, y^T\right)^T \in R^{n+r}$ непрерывны по t и липшицевы по x и y

$$|f(z, t) - f(\tilde{z}, t)| \le l|z - \tilde{z}| \tag{5}$$

и удовлетворяет условию линейного роста по z

$$|f(z, t)| \le l(1 + |z|) \tag{6}$$

с некоторой постоянной l, что обеспечивает в пространстве $z \in R^{n+r}$ существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = (x_0^T, y_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [5,с.469].

Указанные задачи в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследованы в [2, 3], а в [6] решается стохастический случай ($\sigma_1 \ne 0, \sigma_2 \ne 0$) методом квазиобращения, при этом случайные возмущения предполагаются из класса независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями).

Для решения данных задач в работе [6] используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1. [1, с. 12-13] *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g,\ H = (h_{\mu k}),\ \vartheta = (\vartheta_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n},\ m \le n, \tag{7}$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s\,[H\,C] + H^+ g. \tag{8}$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[H\,C] = [h_1 \dots h_m\, c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$, $H^+ = H^T \left(HH^T\right)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

На основе леммы 1 в [6] доказаны следующие два утверждения.

Лемма 2. *Для того, чтобы система уравнений* (1) *имела заданное интегральное многообразие* (2), *необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций* $\{g_1\}$ *имело вид*

$$g_1 = s_1 [H_1 C] + (H_1)^+ (A_1 - G_1), \tag{9}$$

а стоблцы σ_{1i} *множества матриц диффузии* $\{\sigma_1\}$ – *вид*

$$\sigma_{1i} = s_2 [H_1 C] + (H_1)^+ (B_{1i}), \quad i = \overline{1,k}, \tag{10}$$

где s_1, s_2 – *произвольные скалярные величины.*

Лемма 3. *Для того, чтобы система уравнений* (3) *имела заданное интегральное многообразие* (4), *необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций* $\{g_2\}$ *имело вид*

$$g_2 = s_3 [H_2 C_1] + (H_2)^+ (A_2 - G_2), \tag{11}$$

а стоблцы σ_{2i} *множества матриц диффузий* $\{\sigma_2\}$ – *вид*

$$\sigma_{2i} = s_4 [H_2 C_1] + (H_2)^+ (B_{2i}), \quad i = \overline{1,k}. \tag{12}$$

где s_3, s_4 – *произвольные скалярные величины.*

В данной работе задачи 1 и 2 решаются методом разделения [3, с. 21]

Решение задачи 1. Следуя правилу стохастического дифференцирования сложной функции $\lambda = \lambda(x,t)$ в случае процессов с независимым приращениями [4,с.204], составим уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}, \tag{13}$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \cdot \left(g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}\right) + S_1 + S_2 + S_3 + f_t$, где $S_1 = \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma\sigma^T$, $S_2 = \int \{f_{yy}(x, y + \sigma c(z), t) - f_{yy}(x,y,t) - f_{yy}\sigma c(z)\} dz$, $S_3 = \int [f_{yy}(x, y + \sigma c(z), t) - f_{yy}(x,y,t)] P^0(t, dz)$, а под $f_{yy} : D$, следуя [4], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $f_\mu(x,y,t)$ вектора $f(x,y,t)$ по компонентам y на матрицу D

$$f_{yy} : D = \left[\begin{array}{c} tr\big(f_{1yy}D\big) \\ \vdots \\ tr\big(fmyyD\big) \end{array} \right].$$

С помощью обозначения

$$G_1 = \lambda_x \left[f_x f + S_1 + S_2 + S_3 + f_t \right] + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}$$

перепишем (13) в виде

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \lambda_x f_y g_1 + \lambda_x f_y \sigma_1 \dot{\xi}. \qquad (14)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольные функции: $m-$мерную вектор-функцию A_1 и $(m \times k)-$матрицу B_1, которые удовлетворяют условию $A_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, $B_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$ и такие, что

$$\ddot{\lambda} = A_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + B_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)\dot{\xi}. \qquad (15)$$

На основе уравнений (14) и (15) приходим к соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x f_y g_1 = A_1 - G_1, \\ \lambda_x f_y \sigma_1 = B_1, \end{array} \right. \qquad (16)$$

из которых нужно определить множество управляющих параметров $\{g_1\}$ и множество матриц диффузий $\{\sigma_1\}$.

Следуя методу разделения и в предположении $r > m$, представим матрицы $N_1 = \lambda_x f_y$, σ_1 и вектор-функцию g_1 в виде

$$N_1 = \left[N_1^{'}, N_1^{''} \right], \quad \sigma_1 = \left(\begin{array}{c} \sigma_1^{'}, \\ \sigma_1^{''} \end{array} \right), \quad g_1 = \left((g_1^{'})^T, (g_1^{''})^T \right)^T,$$

где $N_1^{'}$ есть квадратная матрица размерности $(m \times m)$, $N_1^{''}$ - матрица размерности $(m \times (r-m))$, $\sigma_1^{'} - (m \times r)$ - матрица, $\sigma_1^{''} - (m \times (r-k))$ - матрица, $g_1^{'} - m$ - вектор, $g_1^{''} - (r-m)$ - вектор.

Тогда соотношения (16) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1^{'} g_1^{'} + N_1^{''} g_1^{''} = A_1 - G_1, \\ N_1^{'} \sigma_1^{'} + N_1^{''} \sigma_1^{''} = B_1. \end{array} \right. \qquad (17)$$

Предположим, что $\det N_1^{'} \neq 0$, тогда подвектор $g_1^{'}$ вектора g_1 системы (17) можно записать в виде

$$g_1^{'} = \left(N_1^{'}\right)^{-1} \left(A_1 - G_1 - N_1^{''} g_1^{''}\right), \tag{18}$$

а подматрицу $\sigma_1^{'}$ диффузии $\{\sigma_1\}$ в виде

$$\sigma_1^{'} = \left(N_1^{'}\right)^{-1} \left(B_{1i} - N_1^{''} \sigma_1^{''}\right). \tag{19}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы множество (2) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений (1), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
1) квадратная подматрица $N_1^{'}$ матрицы N_1 была невырожденой: $detN_1^{'} \neq 0$;
2) при произвольно заданном подвекторе $g_1^{''} \in K$ первые m координат $g_1^{'}$ вектора g_1 имели вид (18);
3) при произвольно заданной подматрице $\sigma_1^{''} \in K$ подматрица $\sigma_1^{'}$ матрицы σ_1 имела вид вид (19).

Решение задачи 2. В силу стохастического дифференцирования сложной функции найдем последовательно вторую и третью производные функции $\lambda = \lambda(x,t)$

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt},$$

$$\dddot{\lambda} = \left(\lambda_{xx} + \lambda_{xt}\right) \dot{f} + \lambda_x \ddot{f} + \dot{f}^T \lambda_{xx} f + f^T \left(\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}\right) f + f^T \lambda_{xx} \dot{f} +$$

$$+2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt} \dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \tag{20}$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \dot{y} + f_t$, $\ddot{f} = \left(f_{xx} f + f_{xy} \dot{y} + f_{xt}\right) f + f_x \dot{f} + \left(f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + f_{yt}\right) \cdot \dot{y} + f_y \ddot{y} + f_{tx} f + f_{ty} \dot{y} + f_{tt}$.

Введем обозначение

$$G_2 = \left(\lambda_{xx} + \lambda_{xt}\right) \dot{f} + \lambda_x [\left(f_{xx} f + f_{xy} y + f_{xt}\right) f + f_x \dot{f} + \left(f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + \right.$$

$$+f_{yt})\dot{y} + f_{tx}f + f_{ty}\dot{y} + f_{tt}] + \dot{f}^T\lambda_{xx}f + f^T\left(\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}\right)f + f^T\lambda_{xx}\dot{f} +$$
$$+2\lambda_{xxt}f + 2\lambda_{xt}\dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt},$$

тогда уравнение возмущенного движения (20) запишется в виде

$$\dddot{\lambda} = G_2 + \lambda_x f_y g_2 + \lambda_x f_y \sigma_2 \dot{\xi}. \tag{21}$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем произвольную $m-$мерную вектор-функцию $A_2\left(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t\right)$ и матрицу $B_2\left(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t\right)$, которые удовлетворяют условиям

$$A_2(0,0,0,x,y,t) \equiv 0, \quad B_2(0,0,0,x,y,t) \equiv 0,$$

и такие, что имеет место соотношение

$$\dddot{\lambda} = A_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) + B_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)\dot{\xi}. \tag{22}$$

Сравнивая (21) и (22), получаем соотношения

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_2 = A_2 - G_2, \\ \lambda_x f_y \sigma_2 = B_2, \end{cases} \tag{23}$$

из которых нужно определить множества коэффициентов сноса $\{g_2\}$ и матриц диффузий $\{\sigma_2\}$.

Пусть $r > m$, тогда используя метод разделения [3, с. 21], обозначим

$$\lambda_x f_y = N_2 = \left[N_2', N_2''\right], \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2', \\ \sigma_2'' \end{pmatrix}, g_2 = \left((g_2')^T, (g_2'')^T\right)^T,$$

где N_2' есть квадратная матрица размерности $(m \times m)$, N_2'' – матрица размерности$(m \times (r-m))$, σ_2' – матрица размерности$(m \times r)$, σ_2'' – матрица размерности $(m \times (r-k))$, g_2' – $m-$вектор, g_2'' – $(r-m)-$вектор.

Предположим, что $det N_2' \neq 0$, тогда из соотношений (23) определим подвектор g_2' вектора g_2 в виде

$$g_2' = \left(N_2'\right)^{-1}\left(A_2 - G_2 - N_2'' g_2''\right), \tag{24}$$

а подматрицу σ_2' диффузий $\{\sigma_2\}$ – в виде

$$\sigma_2' = \left(N_2'\right)^{-1}\left(B_2 - N_2'' g_2''\right). \tag{25}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы множество (4) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений (3), достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
1) квадратная подматрица $N_2^{'}$ матрицы N_2 была невырожденой: $det\, N_2^{'} \neq 0$;
2) при произвольно заданном подвекторе $g_2^{''} \in K$ первые m координат $g_2^{'}$ вектора g_2 имели вид (24);
3) при произвольно заданной подматрице $\sigma_2^{''} \in K$ подматрица $\sigma_2^{'}$ матрицы σ_2 имела вид вид (25).

Полученные результаты обобщают на стохастический случай известные в классе ОДУ утверждения И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова [3].

Работа выполнена при поддержке гранта 1170/ГФ2 МОН РК.

Литература

1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, вып.6. – С. 659-670.

2 Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

3 Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во УДН, 1986. – 88 с.

4 Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

5 Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

6 Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче с непрямым управлением // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2006. – № 5. – С. 13-17.

Статья поступила в редакцию 16.08.13

Ыбраева Г.Т., Тілеубергенов М.Ы. ТІКЕЛЕЙ ЕМЕС БАСҚАРУМЕН КЕРІ СТОХАСТИКАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бірінші туындысымен (1 есеп) және екінші туындысымен (2 есеп) басқарылатын берілген қасиеттері бойынша айнымалы бөлігіне тәуелді Ито типтес стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бұл есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін регулятор теңдеулерінің басқару жиынын бөлу әдісімен анықталады.

Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. ON THE SOLVABILITY OF INVERSE STOCHASTIC PROBLEM WITH INDIRECT CONTROL

There are considered two inverse problems in the class of stochastic differential Ito equations by given properties of motion depending on the part of variables and with the control by the first derivative (problem 1) and with the control by the second derivative (problem 2). The sets of regulator equations, which provide the sufficient conditions of existence of the given integral manifold are defined in these problems by the separation method.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.51

Л.П. Фалалеев

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ СУММ ФУРЬЕ

На различных классах функций исследованы аппроксимативные свойства операторов, составленных на базе суммирования $(A, 1)$ Пуассона подпоследовательностей сумм Фурье степенного и экспоненциального типов.
Ключевые слова: *ряды Фурье, обобщенный метод Пуассона, линейные методы суммирования, тригонометрическая система.*

Для матричных операторов [1, 2]

$$u_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

$(a_\nu, b_\nu$ – коэффициенты Фурье функции $f(x))$, образованных ограниченными в совокупности множителями $\lambda_\nu^{(n)} = \lambda_\nu = r^\nu,\ 0 < r < 1,\ \nu = 0, 1, ...,$ и частичных сумм Фурье с лакунами степенного вида

$$S_{[1^\gamma]},\ S_{[2^\gamma]}, ..., S_{[N^\gamma]}, ...,\ \gamma \geq 1,\ [y] - \text{целая часть } y,$$

строим матричный оператор (метод $(A, 1)$)
$\lambda_0 = r^0 = 1$

Keywords: *Fourier series, generalized Poisson method, linear methods of summation, trigonometric system*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

$\lambda_1 = r^1$
$\lambda_2 = \lambda_{[1^\gamma]+1} = ... = \lambda_{[2^\gamma]} = r^2$
$\lambda_3 = \lambda_{[2^\gamma]+1} = ... = \lambda_{[3^\gamma]} = r^3$
$\lambda_4 = \lambda_{[3^\gamma]+1} = \lambda_{[3^\gamma]+2} ... = \lambda_{[4^\gamma]} = r^4$
....
$\lambda_N = \lambda_{[(N-1)^\gamma]+1} = \lambda_{[(N-1)^\gamma]+2} = ... = \lambda_{[N^\gamma]} = r^N$
....

Пусть

$$\Delta^1 \lambda_i = \begin{cases} r^k(1-r), \ i = [k^\gamma], 0, 1, ..., N, ..., \gamma \geq 1, \\ 0, \ i \neq [k^\gamma], \ i \leq n = [N^\gamma] - \text{степень полинома.} \end{cases}$$

Так как $\lambda_k(r) \to 1$ при $r \to 1-$, то по теореме Банаха-Штейнгауза для равномерной сходимости оператора $u_n(.)$ к $f(x)$ необходима и достаточна ограниченность $\|u_n(.)\|_{C_{2\pi}}$. В [1, 2] приведено достаточное условие ограниченности норм матричных операторов, построенных по суммам Фурье со степенным порядком роста

$$\|u_n(.)\|_{C_{2\pi} \to C_{2\pi}} \leq c\{n^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{k=0}^{N} (\Delta\lambda_k)^2 (1 + (N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}} k^{\frac{1}{\gamma}-1})\}^{\frac{1}{2}}, \ \gamma \geq 1, \ n = [N^\gamma]. \tag{2}$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{1-r}\right]$ (см. [3]), $n^\gamma = \left[\frac{1}{1-r}\right]$. В [4] было показано что, величина в правой части (2) ограничена для выбранных нами множителей $\lambda_k(r) = r^k, \ k = 0, 1, ...,$ и $\Delta^1 \lambda_i$.

Ключевым моментом при доказательстве является использование формул

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x^\nu, \ \ 0 < x < 1,$$

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^\alpha A_\nu^\beta, \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta > -1, \tag{3}$$

при этом числа k^ε заменены на числа Чезаро A_k^ε, суммы $\sum_{k=0}^N$ оценены сверху бесконечной суммой. Применением преобразования Абеля показано

$$c(1-r)^2\sum_{k=1}^{N}r^{2k}\sum_{\nu=1}^{k}N^0\le c,\ \ c>0,\ c=const,\ r\to 1-$$

(здесь использованы формулы (3) для $\alpha = 1-\frac{1}{\gamma}$, $\beta=\frac{1}{\gamma}-1$, $\alpha+\beta=0$, $A_n^0=A_0^\alpha=1$).

Пусть $u_r(f,x)$ – оператор, построенный по суммам Фурье со степенным порядком роста для метода $(A,1)$ Пуассона и $f(x)\in H_p^{(\alpha)}$, т.е. $\omega_p(t)\le ct^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $c>0$, $c=const$, $\omega_p(t)$ – модуль непрерывности $f(x)$ в $L_p^{2\pi}$, $p>1$.

Теорема 1. *Пусть $\gamma\ge 1$, $0<\alpha\le 1$. При $r\to 1-$ справедливы оценки*

$$\|f(x)-u_r(f,\Lambda,x)\|_{L_p}=\begin{cases} O((1-r)^\alpha),\ \ 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma},\\ O(\sqrt{(1-r)\ln\frac{1}{1-r}}),\ \ \alpha=\frac{1}{2\gamma},\\ O(\sqrt{1-r}),\ \ \frac{1}{2\gamma}<\alpha\le 1,\end{cases}$$

причем первая и третья оценки точны по порядку, а при $\gamma=1$ все оценки точны по порядку. Для равномерной метрики и класса Зигмунда Z_α, $0<\alpha\le 2$ третья оценка справедлива для $\alpha\in\left(\frac{1}{2\gamma},2\right]$, а первые две сохраняются. При $\gamma=1$ точна по порядку лишь первая оценка.

Доказательство. Для произвольной последовательности индексов

$$n_1<n_2<...$$

и $f(x)\in L_p^{2\pi}$, $\Lambda=\|\lambda_k^{(n)}\|$, $\lambda_k^{(n)}=0$, $k>n$, $\lambda_0^{(n)}\equiv 1$ (далее верхний индекс опускаем, полагая $\lambda_k^{(n)}=\lambda_k$), $u_n(f,\Lambda,x)$ – матричный оператор, $T_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\cos\nu t$ – ядро оператора, применим обобщенное неравенство Минковского. Тогда

$$\|u_n(f,\Lambda,x)-f(x)\|_{L_p}\le c\int_{-\pi}^{\pi}\|f(x+t)-f(x)\|_{L_p}|T_n(t)|dt.$$

Используя условия на модуль непрерывности в L_p и схему работ [3, 5], оценим разность

$$\|u_n(f,\Lambda,x)-f(x)\|_{L_p}\le c\int_0^{\frac{1}{n}}t^\alpha\left|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta\lambda_\nu\frac{\sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t}{t}\right|dt+$$

$$+c\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta\lambda_\nu\frac{\sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt=I_1+I_2. \tag{4}$$

При этом для ограниченных множителей суммирования $\lambda_\nu=r^\nu,\ 0<r<1,\ \nu=1,2,...,$

$$I_1\le c\sum_{\nu=1}^{N}|\Delta\lambda_\nu|(\nu^\gamma+\frac{1}{2})\int_0^{\frac{1}{n}}t^\alpha dt=\frac{c}{n^\alpha}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{N}|\Delta\lambda_\nu|(\nu^\gamma+\frac{1}{2})\le\frac{c}{n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{N}|\Delta\lambda_\nu|\le$$

$$\le\frac{c}{n^\alpha}\{N\sum_{\nu=1}^{N}(\Delta\lambda_\nu)^2\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\frac{c}{n^\alpha}\{n^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{\nu=1}^{N}(\Delta\lambda_\nu)^2(1+(N-\nu)^{1-\frac{1}{\gamma}}\nu^{\frac{1}{\gamma}-1})\}\le\frac{c}{n^\alpha}$$

для любых $0<\alpha\le 1$.

Заметим далее, что

$$A_n=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}}=\begin{cases}O(n^{\frac{1}{\gamma}-2\alpha}),\ \ 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma},\\ O(\ln\,n),\ \ \alpha=\frac{1}{2\gamma},\\ O(1),\ \ \frac{1}{2\gamma}<\alpha\le 1.\end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что для класса Зигмунда Z_α последняя оценка в (5) сохраняется для $\alpha\in(\frac{1}{2\gamma},2]$. Поэтому

$$I_2\le c\{\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta\lambda_\nu\sin\left(\nu^\gamma+\frac{1}{2}\right)t\right|^2\left(\sqrt{t^{\frac{1}{\gamma}-1}}\right)^2dt\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}}\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\frac{c\sqrt{A_n}}{\sqrt{n^{\frac{1}{\gamma}}}}\{n^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta\lambda_\nu\sin\left(\nu^\gamma+\frac{1}{2}\right)t\right|^2t^{\frac{1}{\gamma}-1}dt\}^{\frac{1}{2}}.$$

В [2] показано, что

$$\{n^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{N}\Delta\lambda_\nu\sin\left(\nu^\gamma+\frac{1}{2}\right)t\right|^2t^{\frac{1}{\gamma}-1}dt\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\leq c\{n^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{\nu=1}^{N}(\Delta\lambda_\nu)^2(1+(N-\nu)^{1-\frac{1}{\gamma}}\nu^{\frac{1}{\gamma}-1})\}^{\frac{1}{2}} \leq c.$$

Объединяя оценки интегралов I_1 и I_2 в (4) для операторов, множители суммирования которых образуют ограниченную правую часть неравенства (2), получим следующую оценку:

$$\|f(x)-u_n(f,\Lambda,x)\|_{L_p} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma}, \\ O(\sqrt{\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{\gamma}}}}), & \alpha=\frac{1}{2\gamma}, \\ O(\sqrt{n^{-\frac{1}{\gamma}}}), & \frac{1}{2\gamma}<\alpha\leq 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Возвращаясь к обозначениям $n=[N^\gamma]$, $N=[\frac{1}{1-r}]$, из (6) получим требуемые результаты.

Первая оценка в (6) не может быть улучшена согласно теореме Джексона. Покажем, что последняя оценка в (6) не может быть улучшена на всем классе матриц Λ_1, элементы которых удовлетворяют условию (2) на всем классе $H_p^{(\alpha)}$ для всех $\gamma>1$.

Рассмотрим матрицу

$\lambda_0 = 1$

$\lambda_1 = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)}r^1$

$\lambda_2=\lambda_3=...=\lambda_{[2^\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)}r^2$

$\lambda_3=\lambda_{[2^\gamma]+1}=\lambda_{[2^\gamma]+2}=...=\lambda_{[3^\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)}r^3$

....

$\lambda_N=\lambda_{[(N-1)^\gamma]+1}=\lambda_{[(N-1)^\gamma]+2}=...=\lambda_{[N^\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)}r^N$

....

(здесь $N=[\frac{1}{1-r}]$).

Для нее имеем

$$\Delta\lambda_0 = 1-\lambda_1 = 1-(1-\frac{1}{\sqrt{N}})r = \frac{r}{\sqrt{N}}+1-r, \ \ (\Delta\lambda_0)^2 = 1-r+o(1-r) \text{ при } r\to 1-.$$

Легко подсчитать, что

$$\Delta\lambda_i = (1-\frac{1}{\sqrt{N}})(1-r)r^k, \ i=[N^\gamma], \ \Delta\lambda_i=0, \ \ i\neq[N^\gamma], \ k=0,1,2,\ldots .$$

По аналогии с работой [3] показывается, что построенная матрица принадлежит классу матриц Λ_1, т.е. правая часть неравенства (2) ограничена:

$$N\{(\Delta\lambda_0)^2+\sum_{k=1}^{N}(\Delta\lambda_k)^2(1+(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}k^{\frac{1}{\gamma}-1})\}\le C.$$

Для функции $f(t)=\cos\,t$ легко проверить, что

$$u_r(\cos\,t,\Lambda_1,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x+t)\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N^\gamma}\lambda_k\cos\,kt\}dt=\cos\,x.$$

Поэтому

$$|u_N(\cos\,t,\Lambda_1,x)-f(x)|=|1-\lambda_1||\cos\,x|=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{N}}+O(1-r)=C\sqrt{n^{-\frac{1}{\gamma}}}=O(\sqrt{1-r}),\ r\to 1-\,.$$

При $\gamma=1$, как отмечено в [1, 2] условие (2) превращается в известное условие Стечкина-Фомина и точность всех трех оценок в (6) установлена в [6]. Теорема 1 доказана полностью. □

Хорошо известно, что многие, ставшие классическими, критерии и достаточные условия ограниченности норм линейных матричных операторов С.М. Никольского, А.В. Ефимова, С.А. Теляковского и др. не гарантируют скорости приближения для самых хороших функций (см. напр. [7]). Более информативно условие Стечкина-Фомина [8]: если матрица Λ такова, что
a) $\lambda_0^{(n)}=1,\ n=1,2,...,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0,\ n=0,\ n=1,2,...;$
b) для некоторого $p>1$ и $c>0,\ c=const$

$$n^{p-1}\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k^{(n)}|^p\le c,\ n=1,2,..., \tag{7}$$

то нормы соответствующих методов суммирования $\|u_n(f,\Lambda,x)\|$ ограничены в совокупности и $u_n(f,\Lambda,x)\rightrightarrows f(x),\ n\to\infty$. Более того, условие (7) не только гарантирует ограниченность норм операторов, но и скорость приближения на некоторых классах функций. Ряд точных оценок на классах непрерывных функций операторами, построенными по частным суммам ряда Фурье S_{n_k} с $n_k=k$, получен В.А. Баскаковым [7]. В [9] условие

Стечкина-Фомина (7) использовано для лакунарных рядов степенного типа: $n_k = k^2$, $k = 1,2,...$, $\lambda_k = \frac{1}{n+1}$ – средние Фейера $L_n(f,x)$. Для них установлено

$$\sup_{f\in Lip\,\alpha} \|f(x) - L_n(f,x)\|_{C_{2\pi}} = \begin{cases} O(\frac{1}{n^2}), & 0 < \alpha \le \frac{1}{6}, \\ O(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}), & \frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{2}, \\ O(\frac{1}{n}), & \frac{1}{2} < \alpha \le 1. \end{cases}$$

Так как степень полинома $m = n^2$, то наилучшее приближение средними Фейера достигается для $\alpha \in (0, \frac{1}{6})$. В [1] приведена оценка, в которой наилучший порядок приближения на этом же классе достигается для средних Чезаро, Рисса, Валле Пуссена при $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$. Аналогичный результат можно получить из разных оценок, приведенных в работах Я.С. Бугрова. Заметим, что в случае $n_k = O(k^\gamma)$, $\gamma > 1$, не обязательно натуральное, точность оценки (7) понижается (см. [9]). С использованием условия лакунарности примененного В.Н. Темляковым в [10] для широкого множества индексов n_k в [11] анонсирован результат: если $n_k = O(k^2)$, матрица Λ удовлетворяет условию (2), то оператор $u_n(f,\Lambda,x)$ приближает $f(x) \in Lip\,\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, с наилучшим порядком для $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Мы отметили, что классические методы суммирования, обеспечивающие равномерную сходимость к порождающей функции, могут не гарантировать никакой скорости сходимости для самых хороших функций. Как правило, они не эффективны в применении к частным суммам рядов Фурье со степенным и экспоненциальными порядками роста. В [6] анализируются некоторые классические методы. Добавим, что если величины $\Delta^1\lambda_i$ и $\Delta^2\lambda_i$ ведут себя одинаково ($\Delta^1\lambda_k = O(\Delta^2\lambda_k)$), то, как правило, для индексов указанного типа не будут эффективными условия А.В. Ефимова, Б. Надя, Караматы и Томича.

Напомним условия регулярности Р.М. Тригуба [12].

Если сумматорная функция $\lambda(u)$ такова, что $\lambda(n) = \lambda(\frac{k\pi}{n})$, $k = 0,1,...,n$, и для любых k_1, k_2 выполнено неравенство

$$|\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}| < c|\frac{k_1 - k_2}{n}|^\beta,\ \beta > \frac{1}{2}, \tag{8}$$

то $\|u_n(\cdot)\| < c$, т.е. условие (8) означает липшицевость порядка $\beta > \frac{1}{2}$.

Если же сумматорная функция имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет условию Липшица порядка $\beta > 0$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta\lambda_k| < c,\ |\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}| < c|\frac{k_1 - k_2}{n}|^{\beta},\ \beta > 0, \tag{9}$$

то $\|u(.)\| < c$.

Если множители суммирования имеют вид
$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \frac{A^{\alpha}_{N-1}}{A^{\alpha}_{N}},\ \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{2^{\gamma}} = \frac{A^{\alpha}_{N-2}}{A^{\alpha}_{N}}$
$\lambda_{2^{\gamma}+1} = \lambda_{2^{\gamma}+2} = ... = \lambda_{3^{\gamma}} = \frac{A^{\alpha}_{N-3}}{A^{\alpha}_{N}}$
$\lambda_{3^{\gamma}+1} = \lambda_{3^{\gamma}+2} = ... = \lambda_{4^{\gamma}} = \frac{A^{\alpha}_{N-4}}{A^{\alpha}_{N}}$
....
$\lambda_{(N-1)^{\gamma}+1} = \lambda_{(N-1)^{\gamma}+2} = ... = \lambda_{N^{\gamma}} = \frac{A^{\alpha}_{0}}{A^{\alpha}_{N}}$,
где A^{α}_{i} – числа Чезаро, то в этом случае правая часть оценки (2) имеет вид (см. [1]) $N\sum_{k=1}^{N}(\frac{A^{\alpha-1}_{N-k}}{A^{\alpha}_{N}})^2(1 + (N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}k^{\frac{1}{\gamma}-1}) \le c$ при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Проверим условие (7) Стечкина-Фомина, считая $\alpha > 0, p > 1, \gamma > 1,\ n = N^{\gamma}$,

$$N^{\gamma(p-1)}\sum_{n=0}^{N}(\frac{A^{\alpha-1}_{N-k}}{A^{\alpha}_{N}})^p > cN^{(\gamma-1)(p-1)} \to \infty,\ N \to \infty,$$

т.е. условие (7) не позволяет судить о равномерной сходимости оператора $u_n(.)$.

Покажем, что условие Р.М. Тригуба (8) также неэффективно даже для $(c, 1)$ – средних, составленных по подпоследовательностям $S_{[N^{\gamma}]}$ частных сумм ряда Фурье с лакунами степенного типа.

В этом случае множители суммирования имеют вид ($n = N^{\gamma}$)
$\lambda_0 = 1,\ \lambda_{1^{\gamma}} = 1 - \frac{1}{N+1},\ \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{2^{\gamma}} = 1 - \frac{2}{N+1}$
$\lambda_{2^{\gamma}+1} = ... = \lambda_{3^{\gamma}} = 1 - \frac{3}{N+1}$
$\lambda_{3^{\gamma}+1} = ... = \lambda_{4^{\gamma}} = 1 - \frac{4}{N+1}$
....
$\lambda_{[N-1]^{\gamma}+1} = ... = \lambda_{N^{\gamma}} = \frac{1}{N+1}$.
Так как $\lambda_0 - \lambda_1 = 1 - (1 - \frac{1}{N+1}) = \frac{1}{N+1}$, то по условию (8) должно выполняться неравенство $|\lambda_0 - \lambda_1| < c|\frac{1-0}{n}|^{\beta},\ \beta > \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{N+1} < \frac{c}{N^{\beta\gamma}}$, что возможно

при $\beta\gamma \leq 1$ (так как $\beta > \frac{1}{2}$, то при $\gamma \geq 2$ условие $\beta\gamma \leq 1$ не выполняется). Аналогично строятся отрицательные результаты для признаков (7), (8) с помощью суммирования методами Зигмунда и Валле Пуссена для операторов, построенных по лакунам экспоненциального вида.

Пусть оператор (1) построен по подпоследовательностям частных сумм Фурье с экспоненциальным порядком роста

$$S_{[2^{1^\varepsilon}]}, S_{[2^{2^\varepsilon}]}, ..., S_{[2^{N^\varepsilon}]}, ..., \ [y] - \text{целая часть } y, \ 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Легко проверить условие ограниченности норм операторов (1) (см. [1, 3]), которое дается формулой

$$\|u_n(.)\|_{C_{2\pi}} \leq c\{\ln n \sum_{k=0}^{n} (\Delta\lambda_k)^2 (k^\varepsilon + N^{1-\varepsilon})\}^{\frac{1}{2}}, \ \beta > 0, \tag{10}$$

При $\lambda_k = r^k, \ 0 < r < 1, \ k = 0, 1, 2, ...,$ (метод Пуассона $(A, 1)$) соответствующий оператор обозначим через $V_r(f, x)$. Условие (10), гарантирующее ограниченность норм соответствующих операторов, достаточно точно. С помощью него была установлена регулярность многих дискретных и непрерывных методов суммирования на классе $C_{2\pi}$ без дополнительных требований к структурным свойствам функций.

Теорема 2. *Пусть* $0 < r < 1, 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. *При* $r \to 1-$ *справедлива следующая оценка*

$$\sup_{f \in Lip\,\alpha} \|f(x) - V_r(f, x)\|_{C_{2\pi}} = O((1 - r)^{\frac{\varepsilon}{2}}), \ \frac{\varepsilon}{2} < \alpha \leq 1.$$

Доказательство теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Для ограниченных в совокупности множителей суммирования* $\{\lambda_k\}, \ k = 1, 2, ...$ *выполнено неравенство*

$$I = C\{\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k \sin(k+\frac{1}{2})t| \frac{dt}{t}\} \leq C\sqrt{\ln n}\{\int_0^{\pi} |\sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k \sin(k+\frac{1}{2})t|^2 \frac{dt}{t}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2. *Пусть* Λ_2 – *класс матриц* Λ, *для которых правая часть неравенства* (10) *ограничена и*

$$M_n = \sup_{\Lambda \subset \Lambda_2} \sup_{f \in Lip\,\alpha} \|f(x) - V_r(f,x)\|_{C_{2\pi}}.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$ *имеет место оценка*

$$M_n(\alpha) \leq \frac{c}{\sqrt{\ln\, n}}.$$

В доказательстве обеих лемм используются рассуждения работы [2] и лемм П.П. Коровкина [7]. Полагая $N = \left[\frac{1}{1-r}\right],\ 0 < r < 1,\ n = [2^{N^{\varepsilon}}],\ N = 1, 2, ...$, учитывая ограниченность множителей $\lambda_k = r^k$, из лемм 1, 2 получим утверждение теоремы 2.

Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ Комитета науки МОН РК.

Литература

1 Фалалеев Л.П. Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье: автореф. ... д.ф.-м.н. – Алматы, 1993. – 33 с.

2 Bliev N.K. and Falaleev L.P. Rate of convergence of linear mean subsequencies of Fourier sums // Topics in polynomials of one and several variables and their applications. – Singapure, World Scientific Publ., 1993. – P. 65-79.

3 Ульянов П.Л. О приближении функций // Сибирский математический журнал. – 1964. – Т. V, № 2. – С. 418-437.

4 Фалалеев Л.П. Скорость сходимости линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье // Математический журнал. – Алматы, 2012. – Т. 12, № 2. – С. 109-120.

5 Фалалеев Л.П. Скорость сходимости линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье // Ряды Фурье и их приложения: тез. докл. VI междунар. симпозиума. – Ростов-на-Дону, 2010. – С. 34-35.

6 Баскаков В.А. Приближения непрерывных функций линейными методами суммирования рядов Фурье // Труды междунар. конф. по конструктивной теории функций. – Варна, 1970. – С. 7-18.

7 Баскаков В.А. Линейные методы суммирования рядов Фурье и приближение непрерывных функций. – Калинин: Калининский гос. универ., 1980. – 78 с.

8 Фомин Г.А. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Математический сборник. – 1964. – № 1. – С. 144-152.

9 Баскаков А.В. Приближение функций линейными методами: автореф. ... к.ф.-м.н. – М., 1987. – 14 с.

10 Temljakov V.N. On absolute summation of Fourier series by subsequences // Analysis Math. – 1982. – T. 8. – P. 71-77.

11 Фалалеев Л.П. Аппроксимация функций рядами Фурье с пропусками // Современное состояние и перспективы развития математики в рамках Программы "Казахстан в третьем тысячелетии". – Алматы, 2001. – С. 121-124.

12 Тригуб Р.М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Известия АН СССР. Серия математика. – 1968. – Т. 32, № 1. – С. 24-49.

Статья поступила в редакцию 04.05.13

Фалалеев Л.П. ФУРЬЕ ҚОСЫНДЫЛАРЫНЫҢ СЫЗЫҚТЫ ОРТАЛАРЫНЫҢ ЖИНАҚТАЛУ ЖЫЛДАМДЫҒЫ

Функциялардың әртүрлі кластарында дәрежелік және экспоненциалды түрлердегі Фурье қосындыларының тізбекшелерінің Пуассон $(A, 1)$ қосындылауы негізінде құрылған операторлардың аппроксимациялық қасиеттері тағайындалды.

Falaleev L.P. RATE OF THE CONVERGENCE OF LINEAR MEANS OF FOURIER SUMS

On the different classes of functions there are studied the approximate properties of the operators constructing on the basis of Poisson $(A, 1)$ summation of the Fourier sums subsequences of power and exponential types.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 3 (49).*

УДК 517.51

Д.К. Чигамбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мирзояна 2, e-mail: d.darbaeva@yandex.kz

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБЩИХ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

В данной работе мы рассматриваем вещественный метод интерполяции и доказываем, что шкала общих локальных пространств типа Морри в случае, когда они имеют одинаковый параметр суммируемости, замкнута относительно процедуры интерполяции с надлежащим образом выбранными параметрами.

Ключевые слова: *пространства Морри, общие локальные пространства типа Морри, вещественный метод интерполяции, интерполяционная теорема.*

1 Введение

Пусть $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$. Пространства Морри были введены в 1938 г. Чарльзом Морри и определялись как пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$||f||_{M_p^\lambda} \equiv ||f||_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

Здесь $B_r(x)$ – шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$,

Keywords: *Morrey spaces, general local Morrey-type spaces, real interpolation method, interpolation theorem*

2010 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46E30, 47B38, 46B70

а если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентных нулю функций на $\mathbb{R}^n$ (см. [1]).

Данная работа посвящена изучению интерполяционных свойств общих локальных пространств типа Морри. Некоторые результаты для классических пространств Морри были получены Stampacchia, Campanato и Peetre [2, 3, 4]. В частности, в работе [4] было показано вложение интерполяционной пары классических пространств Морри для случая $q = \infty$

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \subset M_p^\lambda\,,$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$. Однако Blasco, Ruiz и Vega [5, 6] установили, что это включение строгое, т.е.

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \neq M_p^\lambda\,.$$

В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению общих пространств типа Морри и их интерполяционных свойств. Так, описание интерполяционных свойств локальных пространств типа Морри $LM_{p,q}^\lambda$ было получено Нурсултановым и Буренковым.

Локальные пространства типа Морри $LM_{p,q}^\lambda$ определяются для $\lambda \geq 0$ и $0 < p, q \leq \infty$ как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{LM_{p,q}^\lambda} = \left(\int_0^\infty \left(r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(0,r))} \right)^q \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty\,,$$

с обычной модификацией для $q = \infty$.

Заметим, что $LM_{p,q}^\lambda \neq \Theta$ тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ при $q < \infty$ и $\lambda \geq 0$ при $q = \infty$. Если $q = \infty$, тогда $LM_{p,\infty}^0 = L_p(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, при $p = q$, имеем

$$LM_{p,p}^\lambda = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

и

$$\|f\|_{LM_{p,p}^\lambda} = (\lambda p)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

где $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ – весовое пространство Лебега всех функций f, измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|f(y)|y|^{-\lambda}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

В работе [7] была доказана замкнутость шкалы пространств $LM_{p,q}^{\lambda}$ относительно вещественного метода при фиксированном параметре p, а именно, верна

Теорема. *Пусть* $0 < p, q_0, q_1, q \leq \infty$ *и* $0 < \theta < 1$. *Пусть, кроме того,* $0 < \lambda_0, \lambda_1 < \frac{n}{p}$, *если* $p < \infty$ *и хотя бы один из параметров* q_0, q_1 *и* q *конечен, и* $0 \leq \lambda_0, \lambda_1 \leq \frac{n}{p}$, *если* $q_0 = q_1 = q = \infty$. *Тогда*

$$(LM_{p,q_0}^{\lambda_0}, \ \ LM_{p,q_1}^{\lambda_1})_{\theta,q} = LM_{p,q}^{\lambda}, \tag{1}$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$.

Отметим, что в данной теореме есть дополнительные предположения на λ_0 и λ_1, а именно: $\lambda_0, \lambda_1 < \frac{n}{p}$, если $q < \infty$ и $\lambda_0, \lambda_1 \leq \frac{n}{p}$, если $q = \infty$. Они появились в [7] потому, что в доказательстве теоремы было использовано равенство $LM_{p,q}^{\lambda} = \widetilde{LM}_{p,q}^{\lambda}$, где $\widetilde{LM}_{p,q}^{\lambda}$ – пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{\widetilde{LM}_{p,q}^{\lambda}} = \left(\int_0^{\infty} \left(r^{-\lambda} \|f\|_{\widetilde{L}_p(B(0,r))} \right)^q \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \, ,$$

где

$$\|f\|_{\widetilde{L}_p(B(x,r))} = |B(x,r)|^{\frac{1}{p}} \sup_{\rho \geq r} \left(\frac{1}{|B(x,\rho)|} \int_{B(x,\rho)} |f|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

и $|B(x,t)|$ – лебегова мера шара $B(x,t)$, которое выполняется только при дополнительных предположениях на λ_0 и λ_1, упомянутых выше.

В данной работе было введено обобщение локальных пространств типа Морри $LM_{p,q}^{\lambda}(G,\mu)$, свойства которого мы изложили в разделе 2. Шкала данных пространств замкнута относительно процедуры интерполяции. Ответом послужило доказанное в некотором смысле обобщение интерполяционной теоремы для общих локальных пространств Морри, доказательство которого приведено в разделе 3.

2 Пространства $LM_{p,q}^{\lambda}(G,\mu)$ и их свойства

Пусть (Ω, μ) – пространство с σ-конечной борелевской мерой $\mu(\Omega) > 0$.

Пусть $G = \{G_t\}_{t>0}$ – семейство μ-измеримых подмножеств Ω, для которых

$G_t \neq \Omega$ для некоторого $t > 0$; $G_{t_1} \subset G_{t_2}$, если $0 < t_1 < t_2 < \infty$ и $\bigcup\limits_{t>0} G_t = \Omega$. (2)

Определение 1. *Пусть $0 < p, q \leq \infty$ и $0 < \lambda < \infty$, если $q < \infty$ и $0 \leq \lambda < \infty$, если $q = \infty$. Через $LM^{\lambda}_{p,q}(G, \mu)$ обозначим пространство всех функций f, μ-измеримых на Ω, с конечной квазинормой при $q < \infty$*

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(G_t,\mu)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,\infty}(G,\mu)} = \sup_{t>0} t^{-\lambda} \|f\|_{L_p(G_t,\mu)} < \infty,$$

где

$$\|f\|_{L_p(G_t,\mu)} = \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

если $p < \infty$, и

$$||f||_{L_\infty(G_t,\mu)} = \text{ess sup }_{x \in G_t} |f(x)| \equiv \inf_{g \subset G_t :\, \mu(g)=0} \sup_{x \in G_t \setminus g} |f(x)|,$$

если $p = \infty$.

Пространство $LM^{\lambda}_{p,q}(G, \mu)$ является одним из вариантов общего локального пространства типа Морри. Пространства $LM^{\lambda}_{p,q}$, очевидно, соответствуют случаю, при котором $G_t = B(0, t)$ и μ – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что для всякого семейства G подмножеств множества Ω, удовлетворяющих условию (2), и для всякой меры μ на Ω пространство $LM^{\lambda}_{p,q}(G, \mu)$ является нетривиальным, т.е. состоит не только из функций, μ-эквивалентных нулю на Ω.

Действительно, если $f \in L_p(G, \mu)$, f не является μ-эквивалентной нулю на Ω и $\tau > 0$, то функция $f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus G_\tau} \in LM^{\lambda}_{p,q}(G, \mu)$, потому что

$$||f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus G_\tau}||_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} \leq \begin{cases} (\lambda q)^{-\frac{1}{q}} \tau^{-\lambda} ||f||_{L_p(G,\mu)}, & \text{если } q < \infty, \\ \tau^{-\lambda} ||f||_{L_p(G,\mu)}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

Кроме того, для некоторого $\tau > 0$ функция $f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus G_\tau}$ не является μ-эквивалентной нулю на Ω. (В противном случае, f является μ-эквивалентной нулю на Ω.)

Пространства такого типа с немного различными определениями и разнообразные операторы, действующие в этих пространствах, интенсивно изучались в последние три десятилетия (см. недавние обзорные статьи [8, 9]).

Отметим следующие свойства введенных пространств.

Теорема 1. *(i) Пусть $0 < p_1 \le p_2 < \infty$ и $G = \{G_t\}_{t>0}$ – семейство μ-измеримых подмножеств, такое что неравенство $\mu(G_t) \le t^\beta$ верно для любого $\beta > 0$. Тогда*

$$LM^{\lambda_2}_{p_2,q}(G,\mu) \hookrightarrow LM^{\lambda_1}_{p_1,q}(G,\mu),$$

где $\lambda_2 = \lambda_1 - \beta(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})$.

(ii) Пусть $0 < q_0 < q_1 \le \infty$. Тогда существует постоянная $(\lambda q_0)^{\frac{1}{q_0}}$, такая что неравенство $||f||_{LM^\lambda_{p,q_1}(G,\mu)} \le (\lambda q_0)^{\frac{1}{q_0}} ||f||_{LM^\lambda_{p,q_0}(G,\mu)}$ выполняется для всех $f \in LM^\lambda_{p,q_0}(G,\mu)$, и

$$LM^\lambda_{p,q_0}(G,\mu) \hookrightarrow LM^\lambda_{p,q_1}(G,\mu). \tag{3}$$

Доказательство. i) Оценим норму $||f||_{L_{p_1}(G_t,\mu)}$, для этого воспользуемся неравенством Гёльдера при $q = \frac{p_2}{p_1} \ge 1$, тогда

$$||f||_{L_{p_1}(G_t,\mu)} \le \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^{p_1 q} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{G_t} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}\frac{1}{q'}} = ||f||_{L_{p_2}(G_t,\mu)} \big(\mu(G_t)\big)^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}}.$$

Используя условие $\mu(G_t) \le t^\beta$, получим требуемое вложение

$$||f||_{LM^{\lambda_1}_{p_1,q}(G,\mu)} \le \left(\int\limits_0^\infty t^{-\lambda_1} t^{\beta(\frac{p_2-p_1}{p_1p_2})} ||f||_{L_{p_2}(G_t,\mu)} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = ||f||_{LM^{\lambda_2}_{p_2,q}(G,\mu)}.$$

ii) Пусть сначала $q_1 = \infty$. Тогда, воспользовавшись свойством (2) при $t < \tau$, имеем $G_t \subset G_\tau$ и

$$||f||_{LM^\lambda_{p,\infty}(G,\mu)} = \sup_{t>0} t^{-\lambda} ||f||_{L_p(G_t,\mu)} = (\lambda q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \tau^{-\lambda q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} ||f||_{L_p(G_t,\mu)}$$

$$\leq (\lambda q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \left(\tau^{-\lambda}||f||_{L_p(G_\tau,\mu)}\right)^{q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} = (\lambda q_0)^{\frac{1}{q_0}} ||f||_{LM^\lambda_{p,q_0}(G,\mu)}. \quad (4)$$

Если $q_1 < \infty$, то достаточно воспользоваться интерполяционным неравенством

$$||f||_{LM^\lambda_{p,q_1}(G,\mu)} \leq (||f||_{LM^\lambda_{p,\infty}(G,\mu)})^{1-\frac{q_0}{q_1}} (||f||_{LM^\lambda_{p,q_0}(G,\mu)})^{\frac{q_0}{q_1}}$$

при $q_0 < q_1$ и неравенством (4), что тем самым дает нужное вложение. □

Следствие 1. *(i) Пусть* $0 < p_1 \leq p_2 < \infty$. *Тогда*

$$LM^{\lambda_2}_{p_2,q} \hookrightarrow LM^{\lambda_1}_{p_1,q},$$

где $\lambda_2 = \lambda_1 - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})$.

(ii) Пусть $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$. *Тогда*

$$LM^\lambda_{p,q_0} \hookrightarrow LM^\lambda_{p,q_1}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться заменой нормы $||f||_{L_p(G_t,\mu)}$ на $||f||_{L_p(B(0,t))}$, общей меры – на линейную меру Лебега и применить свойства шара $B(0,t)$.

3 Интерполяция пространств $LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)$

Доказано, что результат вещественного метода интерполяции пары общих локальных пространств типа Морри находится в шкале данных пространств с одинаковым параметром суммируемости, в том числе и в недиагональном случае, нежели классические пространства Морри, т.е. верна следующая интерполяционная

Теорема 2. *Пусть* $0 < p, q_0, q_1, q \leq \infty,\ \ 0 < \lambda_0, \lambda_1 < \infty,\ \lambda_0 \neq \lambda_1,\ 0 < \theta < 1,\ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \ \mu$ *–* σ*-конечная борелевская мера на* Ω *и* $G = \{G_t\}_{t>0}$ *– семейство* μ*-измеримых множеств* G_t*, удовлетворяющих условию* (2). *Тогда*

$$(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q} = LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$, *причем в сопутствующем неравенстве*

$$c_1||f||_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} \le ||f||_{(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q}} \le c_2||f||_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} \qquad (5)$$

постоянные $c_1, c_2 > 0$ *зависят только от численных параметров* $p, q, q_0, q_1, \lambda_0, \lambda_1, \theta$.

Замечание 1. *Важным обстоятельством является тот факт, что в неравенстве* (5) c_1 *и* c_2 *не зависят от семейства* G *и меры* μ, *что позволяет в дальнейшем в этом неравенстве выбирать* G *и* μ, *зависящими от* f.

Доказательство. 1. Докажем вложение в одну сторону

$$(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q} \hookrightarrow LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu).$$

Пусть $f \in (LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q}$ и $f = \varphi + \psi$, где $\varphi \in LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)$, $\psi \in LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)$. Применяя неравенство Минковского и взяв точную верхнюю грань, имеем

$$t^{-\lambda}\left(\int\limits_{G_t}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}t^{-\lambda}\left(\left(\int\limits_{G_t}|\varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{G_t}|\psi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) =$$

$$= 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}t^{\lambda_0-\lambda}\left(t^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_t}|\varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + t^{\lambda_1-\lambda_0}t^{-\lambda_1}\left(\int\limits_{G_t}|\psi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \le$$

$$\le 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}t^{\lambda_0-\lambda}\left(\sup_{s>0} s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + t^{\lambda_1-\lambda_0}\sup_{s>0} s^{-\lambda_1}\left(\int\limits_{G_s}|\psi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) =$$

$$= 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}t^{\lambda_0-\lambda}\left(||\varphi||_{LM^{\lambda_0}_{p,\infty}(G,\mu)} + t^{\lambda_1-\lambda_0}||\psi||_{LM^{\lambda_1}_{p,\infty}(G,\mu)}\right),$$

где $x_+ = \max\{0, x\}$.

Согласно (3) заключаем, что $LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu) \hookrightarrow LM^{\lambda}_{p,\infty}(G,\mu)$, откуда следует

$$t^{-\lambda}\left(\int\limits_{G_t}|f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \le 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}t^{\lambda_0-\lambda}\left(||\varphi||_{LM^{\lambda_0}_{p,\infty}(G,\mu)} + t^{\lambda_1-\lambda_0}||\psi||_{LM^{\lambda_1}_{p,\infty}(G,\mu)}\right) \le$$

$$\leq 2^{(\frac{1}{p}-1)_+} t^{\lambda_0-\lambda} \left((\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}} ||\varphi||_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} + (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{q_1}} t^{\lambda_1-\lambda_0} ||\psi||_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)} \right) \leq$$

$$\leq c_1 t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)} \left(||\varphi||_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} + t^{\lambda_1-\lambda_0} ||\psi||_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)} \right),$$

где $c_1 = 2^{(\frac{1}{p}-1)_+} \max\left\{ (\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}}, (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{q_1}} \right\}$. Поскольку $f = \varphi + \psi$, то мы получим

$$t^{-\lambda} \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq c_1 t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)} K(t^{\lambda_1-\lambda_0}, f)$$

и тем самым

$$||f||_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\lambda} \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)} K(t^{\lambda_1-\lambda_0}, f) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Делая замену переменной $t^{\lambda_1-\lambda_0}$, будем иметь

$$||f||_{LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)} \leq c_1 |\lambda_1 - \lambda_0|^{-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^\infty (s^{-\theta} K(s,f))^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1 |\lambda_1 - \lambda_0|^{-\frac{1}{q}} ||f||_{(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q}}.$$

2. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1$. Докажем обратное вложение

$$LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu) \hookrightarrow (LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q}.$$

Пусть $f \in LM^{\lambda}_{p,q}(G,\mu)$ и $t > 0$. Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in G_t \\ 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus G_t \end{cases}$$

и

$$\psi_t(x) = f - \varphi_t(x).$$

Выполняя замену переменной $s = t^{\lambda_1-\lambda_0}$, приходим к следующему:

$$\|f\|_{\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)\right)} = \left(\int\limits_0^\infty (s^{-\theta}K(s,f))^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= |\lambda_1-\lambda_0|^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-(\lambda_1-\lambda_0)\theta}K(t^{\lambda_1-\lambda_0},f)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее, оценим норму функции $||\varphi_t||_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)}$ и воспользуемся неравенством Минковского. Поскольку $|\varphi_t(x)| = |f(x)|,\ x \in G_t$, и $|\varphi_t(x)| = 0,\ x \notin G_t$, имеем

$$||\varphi_t||_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}} \le$$

$$\le 2^{(\frac{1}{q_0}-1)_+}\left(\int\limits_0^t \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}} +$$

$$+\left(\int\limits_t^\infty \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}} =$$

$$= 2^{(\frac{1}{q_0}-1)_+}\left(\left(\int\limits_0^t \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}} +\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_t^\infty \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}}\right).$$

Рассмотрим второй интеграл и заметим, что согласно (2) G_t – расширяющиеся множества, тогда

$$\left(\int\limits_t^\infty\left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_s}|\varphi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}}=\left(\int\limits_t^\infty \left(s^{-\lambda_0}\left(\int\limits_{G_t}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}}=$$

$$= \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \frac{t^{-\lambda_0}}{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}}} = c_2 t^{-\lambda_0+\lambda_1} t^{-\lambda_1} \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c_2 t^{-\lambda_0+\lambda_1} \left(\lambda_1 q_1\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int\limits_t^{\infty} (s^{-\lambda_1})^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int\limits_{G_t} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c_3 t^{\lambda_1-\lambda_0} \left(\int\limits_t^{\infty} \left(s^{-\lambda_1} \left(\int\limits_{G_s} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

где $c_2 = \frac{1}{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{q_0}}}, c_3 = c_2 \left(\lambda_1 q_1\right)^{\frac{1}{q_1}}$. Таким образом,

$$||\varphi_t||_{LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)} \leq c_4 \left(J_1(t) + t^{\lambda_1-\lambda_0} J_2(t) \right),$$

где

$$J_1(t) = \left(\int\limits_0^{t} \left(s^{-\lambda_0} \left(\int\limits_{G_s} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}},$$

$$J_2(t) = \left(\int\limits_t^{\infty} \left(s^{-\lambda_1} \left(\int\limits_{G_s} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

$c_4 = 2^{(\frac{1}{q_0}-1)_+} \max\{c_3, 1\}$.

Далее, рассмотрим норму функции $||\psi_t||_{LM_p^{\lambda_1,q_1}(G,\mu)}$. Так как $\psi_t(x) = 0$ при $s < t$ и $x \in G_s$, а в остальных случаях $|\psi_t(x)| \leq |f(x)|$, поэтому

$$||\psi_t||_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(s^{-\lambda_1} \left(\int\limits_{G_s} |\psi_t(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq$$

$$\leq 2^{(\frac{1}{q_1}-1)_+} \left(\left(\int\limits_0^{t} \left(s^{-\lambda_1} \left(\int\limits_{G_s} |\psi_t(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} + \right.$$

$$+\left(\int\limits_t^\infty\left(s^{-\lambda_1}\left(\int\limits_{G_s}|\psi_t(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)\leq$$

$$\leq 2^{(\frac{1}{q_1}-1)_+}\left(\int\limits_t^\infty\left(s^{-\lambda_1}\left(\int\limits_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Поэтому $||\psi_t||_{LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)}\leq 2^{(\frac{1}{q_1}-1)_+}J_2(t)$.
Таким образом,

$$K(t^{\lambda_1-\lambda_0},f)\leq c_5(J_1(t)+t^{\lambda_1-\lambda_0}J_2(t)),$$

где $c_5=c_4+2^{(\frac{1}{q_1}-1)_+}$, и, следовательно,

$$||f||_{(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu),LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu))_{\theta,q}}\leq c_5|\lambda_1-\lambda_0|^{\frac{1}{q}}2^{(\frac{1}{q}-1)_+}(I_1+I_2),$$

где

$$I_1^{q_0}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{-\theta(\lambda_1-\lambda_0)q_0}\int\limits_0^t s^{-\lambda_0 q_0-1}\left(\int\limits_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{q_0}{p}}ds\right)^{\frac{q}{q_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_0}{q}}$$

и

$$I_2^{q_1}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{(1-\theta)(\lambda_1-\lambda_0)q_1}\int\limits_t^\infty s^{-\lambda_1 q_1-1}\left(\int\limits_{G_s}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{q_1}{p}}ds\right)^{\frac{q}{q_1}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_1}{q}}.$$

3. Применим неравенства Харди, записанные в виде

$$\left\|\int\limits_0^t g(\eta)d\eta\right\|_{LM^{\nu}_{p,\sigma}(G,\mu)}\leq\frac{1}{|\nu|}||g(t)||_{LM^{\nu-1}_{p,\sigma}(G,\mu)}\tag{6}$$

и

$$\left\|\int\limits_t^\infty g(\eta)d\eta\right\|_{LM^{\nu}_{p,\sigma}(G,\mu)}\leq\frac{1}{|\nu|}||g(t)||_{LM^{\nu-1}_{p,\sigma}(G,\mu)},\tag{7}$$

где $\sigma \geq 1, \mu > 0$ в первом неравенстве и $\mu < 0$ во втором, а g – неотрицательная измеримая на $(0, \infty)$ функция.

3.1. Предположим, что $q_0, q_1 \leq q$. Если $\lambda_0 < \lambda_1$, то, применяя неравенство (6) с $\nu = \theta(\lambda_1 - \lambda_0)q_0 > 0$, получим

$$I_1^{q_0} \leq (\theta(\lambda_1 - \lambda_0)q_0)^{-1}\left(\int_0^\infty \left(t^{-\lambda}\left(\int_{G_t} |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{q_0}{q}},$$

откуда имеем

$$I_1 \leq (\theta(\lambda_1 - \lambda_0)q_0)^{-\frac{1}{q_0}} ||f||_{LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)}.$$

Из аналогичных соображений, применяя неравенство (7) с $\nu = (1-\theta)(\lambda_0 - \lambda_1)q_1 < 0$, получим

$$I_2 \leq ((1-\theta)(\lambda_1 - \lambda_0)q_1)^{-\frac{1}{q_1}} ||f||_{LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)}.$$

Следовательно,

$$||f||_{\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)\right)_{\theta,q}} \leq c_7 ||f||_{LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)},$$

где константа c_7 зависит только от параметров $q_0, q_1, q, \lambda_0, \lambda_1, \theta$.

3.2. В общем случае при $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ положим $\tau_0 = \min\{q_0, q\}$, $\tau_1 = \min\{q_1, q\}$. Согласно теореме 1 и шагам 2 и 3.1

$$||f||_{\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)\right)_{\theta,q}} \leq \max\{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{q_0}}, (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}}\} \times$$

$$\times ||f||_{\left(LM^{\lambda_0}_{p,\tau_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,\tau_1}(G,\mu)\right)_{\theta,q}} \leq c_8 ||f||_{LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)},$$

где константа $c_8 = \max\{(\lambda_0 q_0)^{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{q_0}}, (\lambda_1 q_1)^{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}}\} \cdot \tilde{c_7}$ и $\tilde{c_7}$ получено из c_7 путем замены q_0, q_1 на τ_0, τ_1.

4. Если $\lambda_1 < \lambda_0$, то согласно шагам 2-3 будем иметь, что

$$||f||_{\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu), LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu)\right)_{\theta,q}} \leq ||f||_{\left(LM^{\lambda_1}_{p,q_1}(G,\mu), LM^{\lambda_0}_{p,q_0}(G,\mu)\right)_{1-\theta,q}}$$

$$\leq c_9 ||f||_{LM^\lambda_{p,q}(G,\mu)},$$

где c_9 получено путем замены в c_8 $\lambda_0, \lambda_1, q_0, q_1, \theta$ на $\lambda_1, \lambda_0 q_1, q_0, 1-\theta$, потому что $(1-(1-\theta))\lambda_1 + (1-\theta)\lambda_0 = \lambda$.

Таким образом, теорема доказана при $q < \infty$. Если $q = \infty$, то после замены интегралов на соответствующие супремумы рассуждения будут аналогичны. Теорема доказана полностью.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов 1834/ГФ и 0744/ГФ Комитета науки МОН РК.

Литература

1 Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – V. 43. – P. 126-166.

2 Stampacchia G. $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-spaces and interpolation // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – V. 17. – P. 293-306.

3 Campanato A., Murthy M.K.V. Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1965. – V. 19. – P. 87-100.

4 Peetre J. On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces // Jurnal Func. Anal. – 1969. – V. 4. – P. 71-87.

5 Ruiz A., Vega L. Corrigenda to "Unique continuation for Schrödinger operators"and a remark on interpolation on Morrey spaces // Publ. Mat., Barc. – 1995. – V. 39. – P. 405-411.

6 Blasco O., Ruiz A., Vega L. Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1999. – V. 28, № 1. – P. 31-40.

7 Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д. Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 46-56.

8 Burenkov V.I. Recent progress in studing the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 3, № 3. – P. 11-32.

9 Burenkov V.I. Recent progress in studing the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 4, № 1. – P. 21-45.

Статья поступила в редакцию 15.11.13

Чигамбаева Д.К. МОРРИ ТЕКТЕС ЖАЛПЫ ЛОКАЛЬДІ КЕҢІСТІКТЕР ҮШІН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ТЕОРЕМАНЫҢ БІР ЖАЛПЫЛАНУЫ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыста интерполяцияның нақты әдісі қарастырылады, әрі қосындылау параметрлері бірдей болған кезде Морри тектес жалпы локальді кеңістіктердің шкаласы арнайы таңдалған параметрлері бар интерполяция рәсіміне қатысты тұйық екендігі дәлелденеді.

Chigambayeva D.K. ON ONE GENERALIZATION OF THE INTERPOLATION THEOREM FOR GENERAL LOCAL MORREY-TYPE SPACES

In this paper we consider the real interpolation method and prove that the scale of general local Morrey-type spaces in the case, when they have the common integrability parameter, is closed under the procedure of interpolation with appropriately chosen parameters.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми ад-

ресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, №3 (49), 2013

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
20.11.2013 г.

Тираж 300 экз. Объем 130 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz