ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 14   № 2 (52)   2014

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, № 2 (52), 2014

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 14 **№ 2 (52)** **2014**

CONTENTS

Volume 14 **No. 2 (52)** **2014**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52). С.5–20*

УДК 517.9+539.3

Л.А. Алексеева, М.М. Ахметжанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz, mariella89@mail.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ. 1 СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений связанной термоупругости в пространственно-одномерном случае, описывающие динамику стержней с учетом их термоупругих свойств при продольных колебаниях. Рассмотрен случай стационарных колебаний, для которых наряду с аналитическими формулами приведены графики расчетов матрицы фундаментальных решений, характеризующих термонапряженное состояние стержня при действии сосредоточенных силовых и тепловых источников колебаний.

Ключевые слова: *термоупругость, динамика, фундаментальное решение, стационарные колебания.*

Стержневые конструкции широко используются в строительстве и машиностроении в качестве опор зданий, соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термонапряженного состояния стержневых конструкций с учетом

Keywords: *thermoelasticity, dynamics, fundamental solution, stationary vibration*
2010 Mathematics Subject Classification: 74H05, 74F05

их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем. Последнее требует разработки эффективных методов решения уравнений и краевых задач динамики термоупругих стержней, которые описываются системами дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. Основные достижения в этом направлении связаны с построением класса частных решений уравнений термоупругости на основе методов разделения переменных и интегральных преобразований [1,2]. При этом чаще вначале определяется температурное поле без учета упругих деформаций, а затем определяется напряженное состояние на основе закона Дюамеля-Неймана. Это направление исследований получило название *несвязанной термоупругости*, которая достаточно хорошо описывает медленные деформационные процессы. Однако при больших скоростях деформаций происходит нагрев среды в отсутствии внешних тепловых источников, поэтому для таких процессов следует учитывать деформационные члены в уравнениях для температурного поля, то есть решать уравнения *связанной термоупругости*. Здесь строятся фундаментальные и обобщенные решения уравнений связанной термоупругости в пространственно-одномерном случае, описывающих динамику стержней с учетом их термоупругих свойств при продольных колебаниях. Рассмотрен случай стационарных колебаний, для которых наряду с аналитическими формулами приведены графики расчетов матрицы фундаментальных решений, характеризующих термонапряженное состояние стержня при действии сосредоточенных силовых и тепловых источников колебаний для разных значений термоупругих констант среды и частот.

1 Уравнения движения термоупругого стержня

Рассмотрим термоупругий стержень, который характеризуется линейной плотностью ρ, скоростью распространения упругих волн в стержне c и термоупругими константами γ, η и κ [1, 2].

Исследуем продольные перемещения сечений стержня $u(x,t)$ и температурное поле в стержне $\theta(x,t)$, которые описываются системой гиперболо-параболических уравнений вида

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x,t) = 0, \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2(x,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Термоупругое напряжение в стержне σ определяется соотношением Дюамеля-Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta. \tag{2}$$

Здесь F_1 — продольная компонента внешней силы на единицу длины; $F_2(x,t)$ — величина, характеризующая количество выделенного тепловыми источниками тепла на единицу длины за единицу времени. Всюду $u_{i,x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}$, $u_{i,t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \ldots$, $u_1 = u$, $u_2 = \theta$.

Требуется построить решение системы уравнений (1) при F_1, F_2 принадлежащих классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$ [3] с носителем $\{x \in R^1, t \geq 0\}$.

2 Матрица фундаментальных решений и ее преобразование Фурье

Матрица фундаментальных решений $U_i^j(x,t)$ — это решение системы уравнений (1) при $F_k = \delta(x)\delta(t)\delta_k^j$, $k = 1,2$, где δ_k^j — символ Кронекера.

Физический смысл ее компонент: $U_1^1(x,t)$ — это перемещение в стержне при действии импульсной сосредоточенной силы (в точке $x = 0$): $F_1 = \delta(x)\delta(t)$, $F_2 = 0$;

$U_1^2(x,t)$ — это перемещение в стержне при действии сосредоточенного импульсного температурного источника: $F_1 = 0$, $F_2 = \delta(x)\delta(t)$;

$U_2^1(x,t)$ — это температура стержня при действии импульсной сосредоточенной силы: $F_1 = \delta(x)\delta(t)$, $F_2 = 0$;

$U_2^2(x,t)$ — это температура стержня при действии сосредоточенного импульсного температурного источника: $F_1 = 0$, $F_2 = \delta(x)\delta(t)$.

Для ее построения используем прямое и обратное преобразование Фурье по x, t , которое для регулярных функций имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi,\omega) &= \iint\limits_{R^3} u(x,t)\, e^{i(\xi x + \omega t)} dx dt, \\ u(x,t) &= (2\pi)^{-2} \iint\limits_{R^3} \bar{u}(\xi,\omega)\, e^{-i(\xi x + \omega t)} dx dt. \end{aligned} \tag{3}$$

В пространстве преобразований Фурье, как следует из (1), трансформанта Фурье $\bar{U}_k^j(\xi,\omega)$ матрицы фундаментальных решений $U_k^j(x,t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\left(\omega^2 - c^2\xi^2\right)\bar{U}_1^j + \frac{i\gamma\xi}{\rho}\bar{U}_2^j + \delta_1^j = 0,\\
&\eta\xi\omega\bar{U}_1^j + \left(i\omega\kappa^{-1} - \xi^2\right)\bar{U}_2^j + \delta_2^j = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

разрешая которую, получим

$$
\begin{aligned}
&\bar{U}_1^j(\xi,\omega) = \frac{\delta_1^j(\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j}{\Delta(\xi,\omega)},\\
&\bar{U}_2^j(\xi,\omega) = \frac{\xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2c^2 - \omega^2)\delta_2^j}{\Delta(\xi,\omega)}, \quad j = 1,2,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где определитель системы равен

$$
\Delta(\xi,\omega) = (\xi^2 - ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2 - \omega^2) - i\gamma\eta\xi^2\omega. \tag{6}
$$

Графики действительной и мнимой части комплексной трансформанты матрицы фундаментальных решений представлены на рисунках 1, 2.

Численное восстановление обратного преобразования Фурье по второй формуле (3) невозможно, так как трансформанта Фурье (5) или (12) представляют собой целый класс фундаментальных решений, которые определяются с точностью до решения однородной системы (1) ($F_j(x,t) = 0,\ \ j = 1,2$). В вычислительном плане это проявляется в наличии неинтегрируемых особенностей при действительных (ξ,ω), что делает интегралы при обратном преобразовании расходящимися. Для построения оригинала следует выбрать определенные регуляризации формулы (5), которые определяются свойствами матрицы $U_i^j(x,t)$. В частности, необходимо, чтобы

$$
U_i^j(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{7}
$$

Для выбора регуляризации $\bar{U}_k^j(\xi,\omega)$ представим матрицу в более удобном для исследования виде. Для этого разложим $\Delta(\xi,\omega)$ на множители

$$
\begin{gathered}
\Delta(\xi,\omega) = c^2\xi^4 - \omega\left(\omega + ik^{-1}c^2 + i\gamma\eta\right)\xi^2 + ik^{-1}\omega^3 = c^2\left(\xi^2 - \lambda_1\right)\left(\xi^2 - \lambda_2\right),\\
\lambda_{1,2} = \frac{\omega}{2c^2}\left\{\omega + i\left(\gamma\eta + c^2k^{-1}\right) \pm \sqrt{\left(\omega + i\left(\gamma\eta + c^2k^{-1}\right)\right)^2 - 4i\omega c^2k^{-1}}\right\}
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Здесь λ_1, λ_2 (соответственно верхнему и нижнему знакам) — корни квадратного относительно ξ^2 уравнения

$$\Delta(\xi, \omega) = 0,$$

которые зависят только от трех параметров среды: $\alpha = \gamma\eta$ и $\beta = c^2 k^{-1}$ и c:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega}{2c^2}\left\{\omega + i\,(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\omega + i\,(\alpha-\beta))^2 - 4\alpha\beta}\right\}. \tag{9}$$

Их размерность $[\alpha] = [\beta] = [\omega]$. Их асимптотика
a) при $\omega \to \infty$:

$$\lambda_1 \sim \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega\,\beta}{c^2}, \tag{10}$$

b) при $\omega \to 0$:

$$\lambda_1 \sim \frac{3i\omega\ \,(\alpha+\beta)}{2c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega\ \,(\alpha+\beta)}{2c^2}, \tag{11}$$

Используя представление $\Delta(\xi, \omega)$ в (7), получим из (5) $\bar{U}_k^j$ в более удобном для восстановления оригинала виде

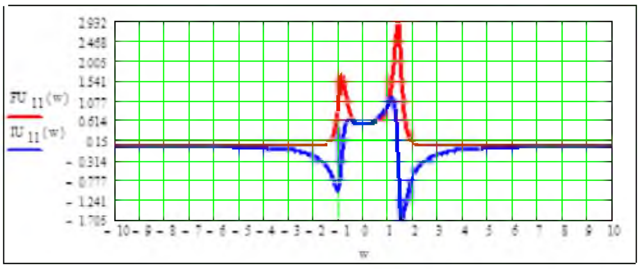
$$\begin{aligned} \bar{U}_1^j &= \frac{\delta_1^j(\xi^2 - i\omega\kappa^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{(\xi^2-\lambda_1)} - \frac{1}{(\xi^2-\lambda_2)}\right\}, \\ \bar{U}_2^j &= \frac{\xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{(\xi^2-\lambda_1)} - \frac{1}{(\xi^2-\lambda_2)}\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражениям, стоящим в числителях этих формул в пространстве оригиналов, соответствуют следующие дифференциальные операторы:

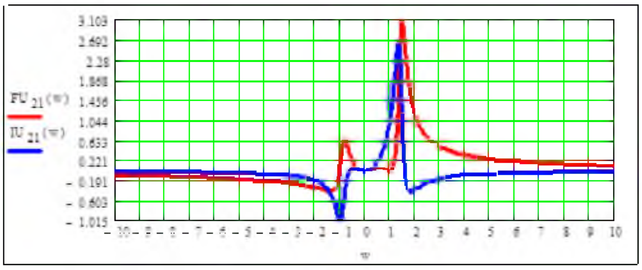
$$\begin{aligned} \delta_1^j(\xi^2 - i\omega\kappa^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j &\rightleftarrows \delta_1^j(\kappa^{-1}\partial_t - \partial_x\partial_x) - \gamma\delta_2^j\partial_x\,, \\ \xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2c^2-\omega^2)\delta_2^j &\rightleftarrows -\eta\delta_1^j\partial_x\partial_t - \delta_2^j(c^2\partial_x\partial_x - \partial_t\partial_t)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому для восстановления оригиналов следует построить оригиналы функций

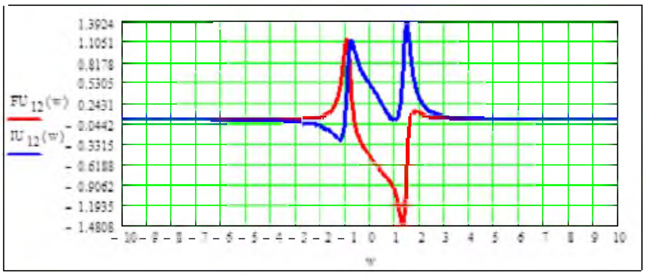
$$\frac{1}{(\xi^2 - \lambda_j(\omega))}\,, \quad j = 1, 2, \tag{14}$$



а

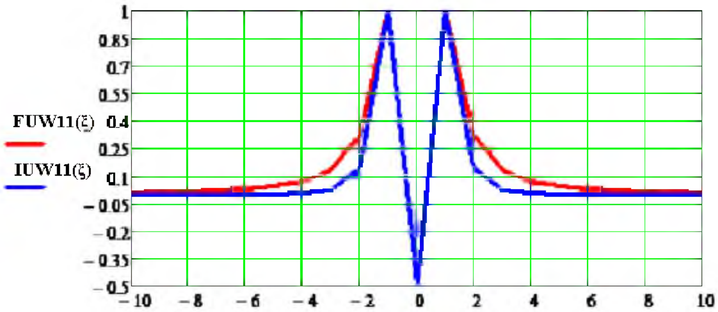


б

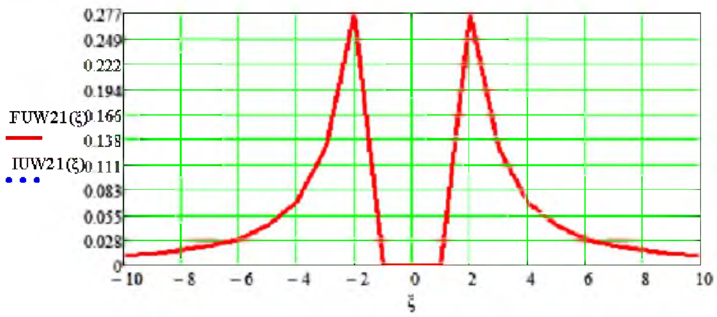


в

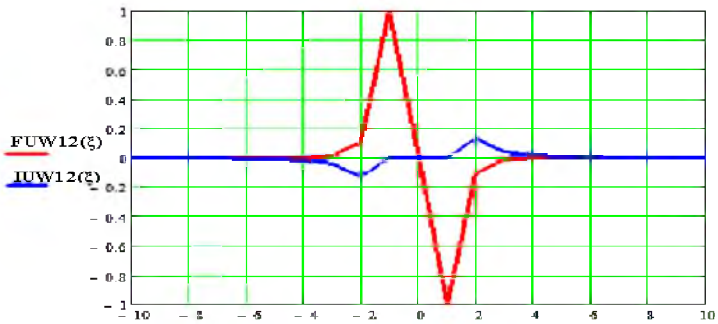
Рис. 1: Компоненты действительной (FU) и мнимой (IU) части $\bar{U}_k^j(\xi, w)$ ($\gamma = 1$, $c = 1$, $k = 1$, $\eta = 1$)



а



б



в

Рис. 2: Компоненты действительной (FUW) и мнимой (IUW) части $\bar{U}_k^j(\xi,\omega)$ при $\omega = 1$ (γ= 1, A = 1, k = 1, η= 1)

и
$$\frac{1}{\lambda_1(\omega)-\lambda_2(\omega)}=\frac{c^2}{\omega\sqrt{(\omega+i\,(\alpha-\beta))^2-4\alpha\beta}}\,. \tag{15}$$
Выбрав соответствующие регуляризации этих функций и восстановив их оригиналы, можно построить исходную матрицу на основе свойств преобразования Фурье производных и сверток обобщенных функций.

3 Матрица фундаментальных решений при стационарных гармонических колебаниях

Построим неполное преобразование Фурье по переменной ξ матрицы $\bar{U}_k^j(\xi,\omega)$
$$\tilde{U}_k^j(x,\omega)=F_\xi^{-1}\left[\bar{U}_k^j(\xi,\omega)\right],$$
которая описывает решения системы уравнений (1) при действии гармонических по времени сосредоточенных источников сил ($i=1$) и тепла ($i=2$) вида
$$F_k=\delta_k^{[j]}e^{-i\omega t}\delta(x),\qquad k,j=1,2. \tag{16}$$
Ее следует использовать при решении периодических по времени задач с частотой ω.

Обозначим
$$\psi^*(\xi,\lambda)=\left(\xi^2-\lambda\right)^{-1},\quad \psi^*(\xi,\lambda)=F_x\left[\psi(x,\lambda)\right].$$
Для восстановления этой функции и оригиналов компонент матрицы фундаментальных решений воспользуемся леммой.

Лемма 1. *Функция* $\frac{\sin k|x|}{k}$ *имеет обобщенное преобразование Фурье вида:*
$$F_x\left[\frac{\sin k\,|x|}{k}\right]=\left(\frac{1}{(\xi^2-(k+i0)^2)}+\frac{1}{(\xi^2-(k-i0)^2)}\right). \tag{17}$$
Доказательство. Заметим, что классического преобразования Фурье эта функция не имеет, поскольку не стремится к нулю при $x\to\pm\infty$. Для определения преобразования Фурье запишем ее в виде
$$\frac{\sin k\,|x|}{k}=\frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{sgn}(x).$$

Используя свойство непрерывности преобразования Фурье обобщенных функций [3], получим

$$F_x\left[sgn(x)\right] = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon x+i\xi x}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^0 e^{\varepsilon x+i\xi x}dx = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{i\xi-\varepsilon}+\frac{1}{i\xi+\varepsilon}\right) = -i\left(\frac{1}{\xi+i0}+\frac{1}{\xi-i0}\right). \tag{18}$$

Воспользуемся свойством преобразования Фурье при сдвиге аргумента [3], получим

$$F_x\left[\mathrm{sgn}(x)e^{\pm ikx}\right]dx = -i\left(\frac{1}{\xi\pm k+i0}+\frac{1}{\xi\pm k-i0}\right)$$

(берется соответственно либо верхний, либо нижний знак). Отсюда следует

$$F_x\left[\sin(k\left|x\right|)\right] = \\ = -0,5\left(\frac{1}{\xi+k+i0}+\frac{1}{\xi+k-i0}\right)+0,5\left(\frac{1}{\xi-k+i0}+\frac{1}{\xi-k-i0}\right) = \\ = k\left(\frac{1}{\xi^2-(k+i0)^2}+\frac{1}{\xi^2-(k-i0)^2}\right).$$

Лемма доказана. □

Далее, в смысле леммы 1, будем писать

$$\frac{\sin k\left|x\right|}{k} = F_\xi^{-1}\left[\frac{2}{(\xi^2-k^2)}\right] \quad \Rightarrow \quad \psi(x,\lambda) = \frac{\sin\left|x\right|\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\,. \tag{19}$$

Причем, в силу свойства синуса, риманова поверхность функции $\psi(x,\lambda)$ по λ однолистная, совпадает с комплексной плоскостью. То есть значение функции не зависит от выбора знака радикала.

Используя свойства преобразования Фурье производных, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(x)\cos k\left|x\right| &= F_\xi^{-1}\left[\frac{-2i\xi}{(\xi^2-k^2)}\right], \\ 2\delta(x) - k\sin kx &= F_\xi^{-1}\left[\frac{2\xi^2}{(\xi^2-k^2)}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Используем формулы (19), (20) при обратном преобразовании по ξ компонент матрицы $\bar{U}_1^j(\xi,\omega)$ (19). В результате получим

$$\tilde{U}_1^j(x,\omega) = \frac{\delta_1^j}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\times$$
$$\times\left\{i\omega\kappa^{-1}\left(\frac{\sin|x|\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin|x|\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right) + \left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\right\} -$$
$$-\frac{\gamma\delta_2^j \mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right),$$
$$\tilde{U}_2^j(x,\omega) = \frac{1}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\times$$
$$\times\left\{i\omega\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right)\mathrm{sgn}(x) - \omega^2\left(\frac{\sin|x|\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin|x|\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j +\right.$$
$$\left. +c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\}. \qquad (21)$$

В точке $x = 0$ компоненты фундаментальной матрицы U непрерывны:

$$\tilde{U}_k^j(\pm 0,\omega) = \tilde{U}_k^j(\omega) = 0, \quad k,j = 1,2, \qquad (22)$$

а ее производные

$$\partial_x\tilde{U}_1^j(x,\omega) =$$
$$= \left[\frac{(\lambda_1 - i\omega\kappa^{-1})}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) + \cos x\sqrt{\lambda_2}\right]\mathrm{sgn}(x)\delta_1^j -$$
$$-\frac{\gamma}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j,$$

$$\partial_x\tilde{U}_2^j(x,\omega) = -\delta_1^j\frac{i\omega\eta\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)}{2(\lambda_1-\lambda_2)} +$$
$$+\delta_2^j\mathrm{sgn}(x)\left\{\frac{\omega^2-\lambda_1c^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) - c^2\cos x\sqrt{\lambda_2}\right\}$$

терпят разрыв первого рода:

$$\tilde{U}_1^j,_x(\pm 0,\omega) = \pm\frac{1}{2}\delta_1^j, \quad \tilde{U}_2^j,_x(\pm 0,\omega) = \pm\frac{c^2}{2}\delta_2^j \tag{23}$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему — правый).

На рисунках 2 (а, б, в) представлены реальная и мнимая часть компонент $\tilde{U}_k^j(x,\omega)$ при $\omega = 1$ при условных расчетных параметрах термоупругой среды, указанных в надписях к рисунку. Для каждой компоненты один рисунок, который наглядно иллюстрирует доказанные выше аналитические свойства $\tilde{U}_k^j$. При этом параметры среды существенно влияют на характер колебаний стержня. Так, на рисунке 2 (а, б) показаны продольные колебания стержня при тех же термоупругих параметрах, за исключением увеличенного на порядок k. На рис. 2а графики иллюстрируют смещения стержня в начале периода колебаний и через четверть периода под действием сосредоточенной силы, а на рис. 2б — смещения при действии сосредоточенного теплового источника.

Увеличение частоты колебаний действующих источников возмущений формируют ярко выраженные колебательные процессы в стержнях (см. рис. 3а, б). Здесь левые рисунки описывают перемещения в стержне, а правые — изменение температуры. Как видим, увеличение частоты колебаний теплового источника генерирует упругие колебания стержня, в то время как сама температура в стержне этим колебаниям не подвержена (см. рис. 3г).

4 Стационарные колебания термоупругого стержня

Тензор $\tilde{U}_k^j(x,\omega)$ следует использовать для решения задач стационарных колебаний стержней с фиксированной частотой. В частности, если действующие массовые силы и тепловые источники представимы в виде

$$F_j(x,t) = F_j(x)\exp(-i\omega t), \quad j = 1,2, \tag{24}$$

где F_j — регулярные обобщенные функции, то перемещения и температура в стержне определяются формулой

$$u_j(x,t) = \exp(-i\omega t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_j^k(x-y,\omega)F_k(y)dy, \quad j = 1,2, \tag{25}$$

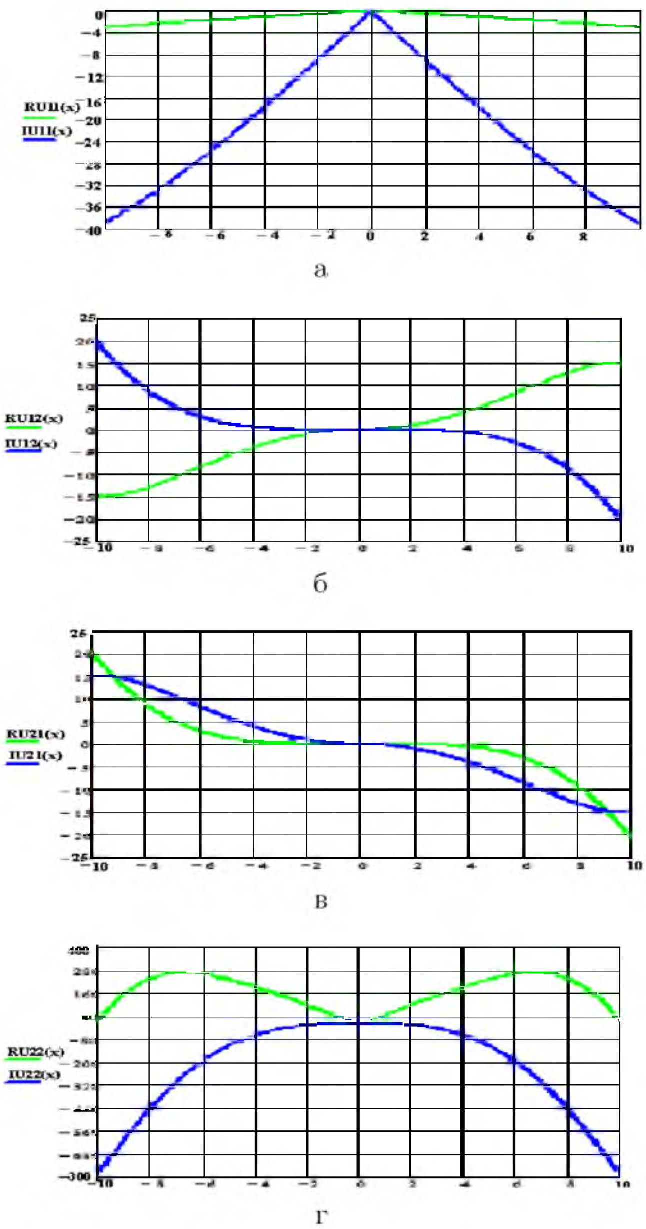
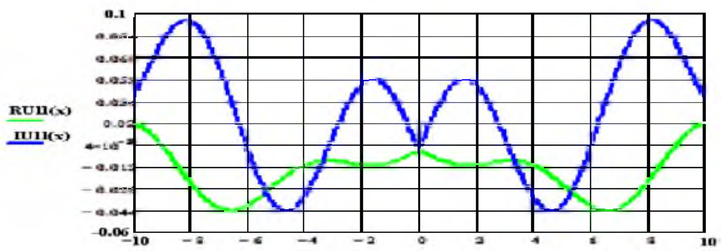
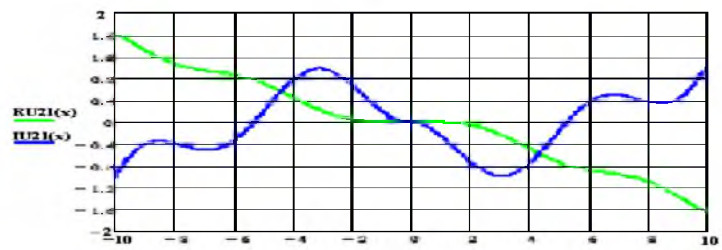


Рис. 3: Компоненты $\ddot{U}_k^j(x,\omega)$ при $\omega = 1$ (γ= 0.1, c = 1, k = 1, η= 1)

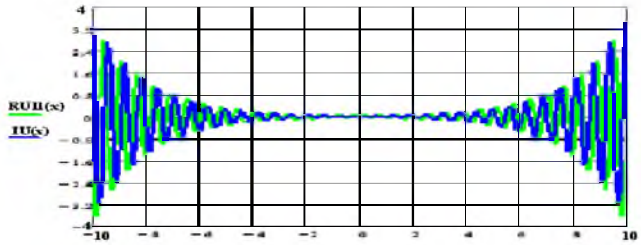


а

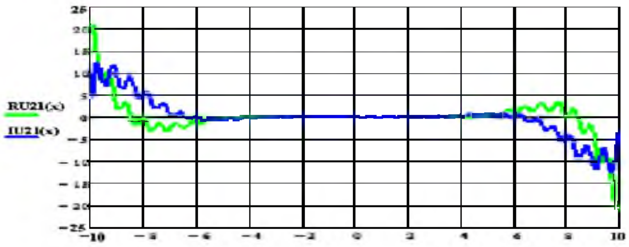


б

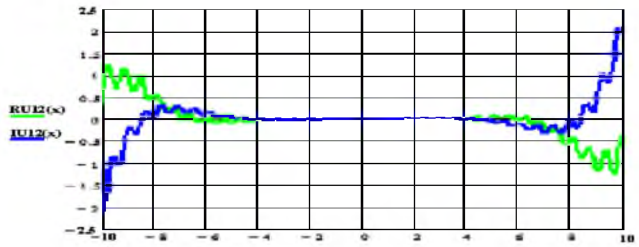
Рис. 4: Компоненты $\tilde{U}_k^j(x,\omega)$ при $\omega = 1$ ($\gamma = 0.1,\ \mathrm{c} = 1,\ \mathrm{k} = 10,\ \eta = 1$)



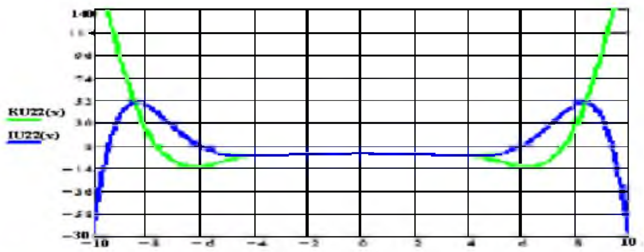
а



б



в



г

Рис. 5: Компоненты $\tilde{U}_k^j(x,\omega)$ при ω= 10 (γ= 0.1, c = 1, k = 10, η= 1)

Интегралы существуют, если $F_k(x)$ имеют ограниченный носитель, либо убывают при $x \to \pm\infty$ быстрее, чем $\exp(-a\,|x|)$, $a = \max\limits_{k=1,2}\{|\mathrm{Im}\lambda_k|\}$.

При периодических внешних воздействиях негармонического вида функции, описывающие действующие источники, можно разложить в ряд Фурье по времени вида $F_j(x,t) = \sum\limits_n F_j^n(x)\exp(i\omega_n t)$.
Перемещения, напряжения, температура и тепловой поток в стержне тоже разлагаются в аналогичный ряд

$$u(x,t) = \sum_n u^n(x)\exp(i\omega_n t), \quad \theta(x,t) = \sum_n \theta^n(x)\exp(i\omega_n t),$$

где $\{\omega_n\}$ — частотный спектр внешних воздействий, определяемый периодом колебаний действующих источников возмущений. В силу линейности для построения решения задачи следует построить решение для каждой гармоники $\exp(i\omega_n t)$ в виде (25).

Литература

1 Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир., 1975. — 872 с.

2 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. — М.: Мир., 1977. — 256 с.

3 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука., 1981. — 512 с.

Literatura

1 Novackiy V. Teoriya uprugosti. — M.: Mir., 1975. — 872 s.

2 Novackiy V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti. — M.: Mir., 1977. — 256 s.

3 Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoi fiziki. — M.: Nauka., 1981. — 512 s.

Статья поступила в редакцию 20.03.14

Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕКТЕРДІҢ ҚОЗҒАЛЫС ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ФУНДАМЕНТАЛДЫҚ ЖӘНЕ ЖАЛПЫЛАНҒАН ШЕШІМДЕРІ. 1 СТАЦИОНАРЛЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕР

Бойлық тербелістер кезіндегі өзектердің термосерпімді қасиеттерін ескере отырып қозғалуын суреттейтін кеңістіктік-бірөлшемді жағдайдағы байланысқан термосерпімділік теңдеулерінің фундаменталдық және жалпыланған шешімдері құрастырылған. Стационарлық тербелістер үшін аналитикалық формулалармен қатар, тербелістердің шоғырланған күштік және жылулық көздерінің әсері кезіндегі өзектің термокернеулік күйін сипаттайтын фундаменталдық шешімдер матрицасының есептемелік графиктері келтірілген жағдайы қарастырылған.

Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. FUNDAMENTAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF DYNAMICS OF THERMOELASTIC CORES. 1 STATIONARY FLUCTUATIONS

There are constructed the fundamental and generalized solutions of the equations of connected thermoelasticity in a spatial one-dimensional case describing dynamics of cores at longitudinal fluctuations and their thermoelastic properties. The case of stationary fluctuations is considered, for which the analytical formulas and the results of calculations of the fundamental matrix characterizing the thermo-stressed state of a core at action of concentrated power and thermal sources of fluctuations are given.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52). С.21–35*

УДК 517.956

А.Т. Асанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: anar@math.kz, anarasanova@list.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для системы уравнений в частных производных гиперболического типа в прямоугольной области. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения и доказана его сходимость к точному решению нелокальной задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений.
Ключевые слова: *система гиперболических уравнений, интегральное условие, классическое решение, однозначная разрешимость.*

Введение

Математическое моделирование различных физических явлений приводит к нелокальным задачам с интегральными условиями. Задачи с интегральными условиями возникают при изучении процессов распространения тепла [1–3], физики плазмы [4], технологии очистки кремниевых плат от примеси [5], влагопереноса в капиллярно-пористых средах [6–8]. Использование интегральных условий вместо краевых условий задачи

Keywords: *system of hyperbolic equations, integral condition, classical solution, unique solvability*
2010 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

для дифференциального уравнения оказалось весьма удобным аппаратом. Впервые систематическое изучение нелокальных задач, в которых вместо классических краевых условий задается связь между значениями искомой функции на границе области и внутри нее, проведено в [9]. Нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений стали изучать сравнительно недавно, некоторые классы задач и библиографию можно посмотреть в [10–18]. Получены условия классической, обобщенной разрешимости задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений. В работах [19, 20] рассматривалась нелокальная краевая задача с интегральным условием по одной из переменных для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы его нахождения.

Для преодоления ряда трудностей, связанных с исследованием задач с интегральными условиями, наиболее естественным является сведение их к обычным нелокальным условиям. Однако, это не всегда удается. В настоящей работе нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений на основе метода введения функциональных параметров сведена к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений с параметрами и функциональным соотношениям. Получены условия существования единственного классического решения изучаемой задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм построения приближенных решений и доказана его сходимость.

Постановка задачи и основной результат

Рассматривается система гиперболических уравнений со смешанной производной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \ (t,x) \in (0,T)\times(0,\omega), \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$\int\limits_0^a u(t,x)dx = \psi(t), \quad t \in [0,T], \quad (2)$$

$$\int\limits_0^b u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ — неизвестная функция, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$, n - вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, n - вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, $0 < a \leq \omega$, $0 < b \leq T$.

Предполагается, что функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_0^b \psi(t)dt = \int\limits_0^a \varphi(x)dx.$$

Пусть $||u||_0 = \max\limits_{(t,x)\in\bar{\Omega}} ||u(t,x)||$.

Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in$ $\in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе уравнений (1) и интегральным условиям (2), (3).

В предлагаемой работе исследуются вопросы существования и единственности классического решения задачи (1)–(3), способы построения приближенных решений. Для этого применяется метод введения дополнительных функциональных параметров, предложенный в работах [21–22] для решения нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. Нелокальная задача (1)–(3) в одномерном случае изучалась в работах [12, 15–16]. При предположениях непрерывной дифференцируемости коэффициентов уравнения были получены условия классической разрешимости рассматриваемой задачи [12]. В настоящей работе от коэффициентов системы гиперболических уравнений требуется только непрерывность в рассматриваемой области. Путем введения новых неизвестных функций задача (1)–(3) сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и интегральных соотношений относительно введенных параметров. Предлагается алгоритм нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказывается его сходимость. Установлены коэффициентные условия существования единственного классического решения задачи (1)–(3).

Пусть $\lambda(x) = u(0,x)$, $\mu(t) = u(t,0)$, $\sigma = u(0,0)$. В задаче (1)–(3) осуществим замену функции $u(t,x)$: $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \lambda(x) + \mu(t) - \sigma$ и переходим к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u} + A(t,x)\lambda'(x) + B(t,x)\dot{\mu}(t) +$$

$$+ C(t,x)\lambda(x) + C(t,x)\mu(t) - C(t,x)\sigma + f(t,x), \tag{4}$$

$$\widetilde{u}(t,0) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$\int\limits_0^a \widetilde{u}(t,x)dx + \int\limits_0^a \lambda(x)dx + a\mu(t) - a\sigma = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\int\limits_0^b \widetilde{u}(t,x)dt + b\lambda(x) + \int\limits_0^b \mu(t)dt - b\sigma = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{8}$$

Задача (4)–(6) при фиксированных $\lambda(x)$, $\mu(t)$, σ является задачей Гурса относительно функции $\widetilde{u}(t,x)$ в области $\bar{\Omega}$. А соотношения (7), (8) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda(x)$, $\mu(t)$, σ, где функции $\lambda(x)$, $\mu(t)$ удовлетворяют равенству $\lambda(0) = \mu(0) = \sigma$.

Введем новые неизвестные функции $\widetilde{v}(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$ и запишем ее решение в виде системы трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}(t,x) = \int\limits_0^t \Big\{ A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x) + B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x) + C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) + A(\tau,x)\lambda'(x) +$$

$$+ B(\tau,x)\dot{\mu}(\tau) + C(\tau,x)\lambda(x) + C(\tau,x)\mu(t) - C(\tau,x)\sigma + f(\tau,x) \Big\} d\tau, \tag{9}$$

$$\widetilde{w}(t,x) = \int\limits_0^x \Big\{ A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi) + A(t,\xi)\lambda'(\xi) +$$

$$+B(t,\xi)\dot{\mu}(t)+C(t,\xi)\lambda(\xi)+C(t,\xi)\mu(t)-C(t,\xi)\sigma+f(t,\xi)\Big\}d\xi, \qquad (10)$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\int\limits_0^t \widetilde{w}(\tau,x)d\tau. \qquad (11)$$

Из соотношений (7), (8) при $t=0$, $x=0$ с учетом условий (5), (6) и равенства $\sigma=\lambda(0)=\mu(0)$ получим

$$\int\limits_0^a \lambda(x)dx=\psi(0), \qquad \int\limits_0^b \mu(t)dt=\varphi(0). \qquad (12)$$

Из условий (7), (8) с учетом (12) соответственно находим

$$\mu(t)=-\frac{1}{a}\int\limits_0^a \widetilde{u}(t,x)dx+\frac{1}{a}[\psi(t)-\psi(0)]+\sigma, \qquad t\in[0,T], \qquad (13)$$

$$\lambda(x)=-\frac{1}{b}\int\limits_0^b \widetilde{u}(t,x)dt+\frac{1}{b}[\varphi(x)-\varphi(0)]+\sigma, \qquad x\in[0,\omega]. \qquad (14)$$

Продифференцировав соотношение (13) по t, соотношение (14) — по x, получим

$$\dot{\mu}(t)=-\frac{1}{a}\int\limits_0^a \widetilde{w}(t,x)dx+\frac{1}{a}\dot{\psi}(t), \qquad t\in[0,T], \qquad (15)$$

$$\lambda'(x)=-\frac{1}{b}\int\limits_0^b \widetilde{v}(t,x)dt+\frac{1}{b}\varphi'(x), \qquad x\in[0,\omega]. \qquad (16)$$

Проинтегрируем соотношение (7) по t от 0 до b (или (8) по x от 0 до a при выполнении условия согласования данных) и учитывая равенства (12), получим представление неизвестного параметра σ в виде

$$\sigma=\frac{1}{ab}\int\limits_0^b\int\limits_0^a \widetilde{u}(t,x)dxdt+\frac{1}{a}\psi(0)+\frac{1}{b}\varphi(0)-\frac{1}{ab}\int\limits_0^b \psi(t)dt. \qquad (17)$$

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (9)–(11), (13)–(17) для определения неизвестных $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, σ.

Если известны $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, σ, то из (9)–(11) находим функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$. Обратно, если известны функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, то из системы уравнений (13)–(17) можем найти $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, σ. Так как неизвестными являются как $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, так и $\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\lambda'(x)$, σ, для нахождения решения задачи (4)–(8) используем итерационный метод. Четверку $(\mu^*(t)$, $\lambda^*(x)$, σ^*, $\widetilde{u}^*(t,x))$ — решение задачи (4)–(8), определяем как предел последовательности $(\mu^{(k)}(t)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $\sigma^{(k)}, \widetilde{u}^{(k)}(t,x))$, $k = 0,1,2,\ldots$, по следующему **алгоритму**:

Шаг-0. a) Полагая в правой части системы (17) $\widetilde{u}(t,x) = 0$, находим начальное приближение $\sigma^{(0)}$. Затем из системы уравнений (13)–(14), полагая в правой части $\widetilde{u}(t,x) = 0$, $\sigma = \sigma^{(0)}$, находим $\mu^{(0)}(t)$, $\lambda^{(0)}(x)$, а из системы (15)–(16), полагая в правой части $\widetilde{w}(t,x) = 0$, $\widetilde{v}(t,x) = 0$, находим $\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\lambda'^{(0)}(x)$. b) из системы интегральных уравнений (9)–(11) при $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\lambda'(x) = \lambda'^{(0)}(x)$, $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\sigma = \sigma^{(0)}$, находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Шаг-1. a) Предполагая в правой части системы (17) $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, находим $\sigma^{(1)}$. Затем из системы уравнений (13)–(14), полагая в правой части $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\sigma = \sigma^{(1)}$, находим $\mu^{(1)}(t)$, $\lambda^{(1)}(x)$, а из системы (15)–(16) полагая в правой части $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, находим $\dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\lambda'^{(1)}(x)$. b) из системы интегральных уравнений (9)–(11) при $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\lambda'(x) = \lambda'^{(1)}(x)$, $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $\sigma = \sigma^{(1)}$, находим $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$.

И так далее на k-шаге находим функции $\sigma^{(k)}$, $\mu^{(k)}(t)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\lambda'^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $k = 1,2,\ldots$.

Условия следующего утверждения позволяют установить сходимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть*

i) матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$;

ii) вектор-функции $\psi(t)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$,

$[0,\omega]$, *соответственно, и удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_0^b \psi(t)dt = \int\limits_0^a \varphi(x)dx;$$

iii) выполняется неравенство

$$q(a,b) = \max(T,\omega)\big[\alpha+\beta+3\gamma\big]\Big\{\frac{1}{ab}\frac{1}{H^2}\big(e^{Ha}-1\big)\big(e^{Hb}-1\big)+$$

$$+\max\Big(\frac{1}{a}\frac{1}{H}e^{HT}\big[e^{Ha}-1\big],\frac{1}{b}\frac{1}{H}e^{H\omega}\big[e^{Hb}-1\big]\Big)\Big\}<1,$$

где $\alpha=||A||_0$, $\beta=||B||_0$, $\gamma=||C||_0$, $H=\max\big(1,\alpha+\beta+\gamma\big)$.

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Используя 0-шаг алгоритма, определим $\sigma^{(0)}$:

$$\sigma^{(0)} = \frac{1}{a}\psi(0)+\frac{1}{b}\varphi(0)-\frac{1}{ab}\int\limits_0^b\psi(t)dt.$$

Из систем (13), (15) и (14), (16) находим $\mu^{(0)}(t)$, $\dot\mu^{(0)}(t)$ и $\lambda^{(0)}(x)$, $\lambda'^{(0)}(x)$:

$$\mu^{(0)}(t)=\frac{1}{a}[\psi(t)-\psi(0)]+\sigma^{(0)},\qquad \dot\mu^{(0)}(t)=\frac{1}{a}\dot\psi(t),\qquad t\in[0,T],$$

$$\lambda^{(0)}(x)=\frac{1}{b}[\varphi(x)-\varphi(0)]+\sigma^{(0)},\qquad \lambda'^{(0)}(x)=\frac{1}{b}\varphi'(x),\qquad x\in[0,\omega].$$

Решая систему интегральных уравнений (9)–(11) при найденных значениях параметров, находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x),\widetilde{u}^{(0)}(t,x),\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Имеют место оценки

$$||\widetilde{v}^{(0)}(t,x)||\le\max(T,\omega)Me^{H(x+t)},$$

$$||\widetilde{w}^{(0)}(t,x)||\le\max(T,\omega)Me^{H(x+t)},$$

$$||\widetilde{u}^{(0)}(t,x)||\le\max(T,\omega)Me^{H(x+t)},$$

где $M=\alpha\max\limits_{x\in[0,\omega]}||\lambda'^{(0)}(x)||+\beta\max\limits_{t\in[0,T]}||\dot\mu^{(0)}(t)||+\gamma\max\limits_{x\in[0,\omega]}||\lambda^{(0)}(x)||+$

$$+\gamma \max_{t\in[0,T]}||\mu^{(0)}(t)||+\gamma||\sigma^{(0)}||+||f||_0.$$

Находя последующие приближения из k-го и $k+1$-го шагов и оценивая их разности, получим

$$||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||\leq \frac{1}{ab}\int\limits_0^b\int\limits_0^a||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||dxdt, \tag{18}$$

$$||\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)||\leq$$
$$\leq \frac{1}{a}\int\limits_0^a||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||dx+||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||, \tag{19}$$

$$||\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)||\leq \frac{1}{a}\int\limits_0^a||\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)||dx, \tag{20}$$

$$||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||\leq$$
$$\leq \frac{1}{b}\int\limits_0^b||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||dt+||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||, \tag{21}$$

$$||\lambda'^{(k+1)}(x)-\lambda'^{(k)}(x)||\leq \frac{1}{b}\int\limits_0^b||\widetilde{v}^{(k)}(t,x)-\widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)||dt, \tag{22}$$

$$||\widetilde{v}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{v}^{(k)}(t,x)||\leq \max(T,\omega)\Big\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda'^{(k+1)}(x)-\lambda'^{(k)}(x)||+$$
$$+\beta\max_{t\in[0,T]}||\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)||+\gamma\Big[\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||+$$
$$+\max_{t\in[0,T]}||\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)||+||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||\Big]\Big\}e^{H(x+t)}, \tag{23}$$

$$||\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k)}(t,x)||\leq \max(T,\omega)\Big\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda'^{(k+1)}(x)-\lambda'^{(k)}(x)||+$$
$$+\beta\max_{t\in[0,T]}||\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)||+\gamma\Big[\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}||\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)||+||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||\Big]\Big\}e^{H(x+t)}, \qquad (24)$$

$$||\widetilde{u}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k)}(t,x)||\le \max(T,\omega)\Big\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda'^{(k+1)}(x)-\lambda'^{(k)}(x)||+$$

$$+\beta\max_{t\in[0,T]}||\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)||+\gamma\Big[\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}||\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)||+||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||\Big]\Big\}e^{H(x+t)}. \qquad (25)$$

Пусть

$$\Delta_{k+1}=\max\Big(\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda'^{(k+1)}(x)-\lambda'^{(k)}(x)||,\max_{t\in[0,T]}||\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)||,$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)||,\max_{t\in[0,T]}||\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)||,||\sigma^{(k+1)}-\sigma^{(k)}||\Big).$$

Тогда из соотношений (18)–(22) с учетом оценок (23)–(25) получим основное неравенство

$$\Delta_{k+1}\le q(a,b)\Delta_k.$$

Из условия $q(a,b)<1$ вытекает сходимость последовательности Δ_k при $k\to\infty$ к Δ_*. Отсюда получаем равномерную сходимость последовательностей $\mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $\lambda'^{(k)}(x)$ и сходимость последовательности $\sigma^{(k)}$ при $k\to\infty$ соответственно к $\mu^*(t)$, $\dot{\mu}^*(t)$, $\lambda^*(x)$, $\lambda'^*(x)$ и σ^*. Функции $\mu^*(t)$, $\lambda^*(x)$ являются непрерывными на $[0,T]$, $[0,\omega]$, соответственно. На основе оценок (23), (24), (25) установим равномерную сходимость последовательностей $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, относительно $(t,x)\in\bar{\Omega}$ к функциям $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{u}^*(t,x)$, соответственно.

Оценим разности между точным и приближенным решениями задачи (4)–(8)

$$\max_{t\in[0,T]}||\mu^*(t)-\mu^{(k)}(t)||\le\frac{[q(a,b)]^k}{1-q(a,b)}M, \qquad (26)$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}||\lambda^*(x)-\lambda^{(k)}(x)||\le\frac{[q(a,b)]^k}{1-q(a,b)}M, \qquad (27)$$

$$||\sigma^*-\sigma^{(k)}||\le\frac{[q(a,b)]^k}{1-q(a,b)}M, \qquad (28)$$

$$||\widetilde{u}^*(t,x) - \widetilde{u}^{(k)}(t,x)|| \le \max(T,\omega)\big\{\alpha + \beta + 3\gamma\big\}e^{H(x+t)}\frac{[q(a,b)]^k}{1-q(a,b)}M. \quad (29)$$

Очевидно, что функция $\widetilde{u}^*(t,x)$ является непрерывной на $\bar{\Omega}$. Таким образом, четверка функций $(\mu^*(t), \lambda^*(x), \sigma^*, \widetilde{u}^*(t,x))$ является решением задачи (4)–(8).

Единственность решения задачи (4)–(8) доказывается от противного. Из эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(8) следует существование единственного классического решения задачи (1)–(4) $u^*(t,x) = \widetilde{u}^*(t,x) + \lambda^*(x) + \mu^*(t) + \sigma^*$.

Теорема доказана. □

Заключение

Таким образом, нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений (1)–(3) путем введения новых функциональных параметров $\lambda(x)$, $\mu(t)$, σ как значений искомой функции $u(t,x)$ на характеристиках $t = 0$, $x = 0$, в точке $(0,0)$, и осуществления замены $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) = \lambda(x) - \mu(t) + \sigma$ сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и интегральных соотношений относительно параметров. Построен алгоритм нахождения решения полученной задачи и доказана его сходимость. Получены условия существования единственного классического решения задачи (1)–(3) в терминах матриц A, B, C, чисел T, ω, a, b.

Литература

1 Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. — 1963. — V. 21. — P. 155–160.

2 Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1964. — Т. 4, №6. — С. 1006–1024.

3 Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, №2. — С. 294–304.

4 Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 11. — С. 1221–1228.

5 Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Матем. заметки. — 1993. — Т. 4, № 3. — С. 98–116.

6 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 1. — С. 96–105.

7 Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 72–81.

8 Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 280–285.

9 Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739–740.

10 Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 1. — С. 171–174.

11 Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Differential Equations and Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, — P. 1–144.

12 Голубева Н.Д., Пулькина Л.С. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, вып. 3. — С. 171–174.

13 Bouziani A. Solution forte d'un probleme mixte avec conditions non locales pour une classe d'equations hyperboliques // Bull. CI. Sci. Acad. Roy. Belg. — 1997. — V. 8, — P. 53–70.

14 Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. — 2000. — Т. 12, № 1. — С. 94–103.

15 Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 279–280.

16 Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. — 2002. — Т. 236, — С. 298–303.

17 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287с.

18 Ткач Б.П., Урманчева Л.Б. Численно-аналитический метод отыскания решений систем с распределенными параметрами с интегральным условием // Нелинейные колебания. — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 110–119.

19 Асанова А.Т. О нелокальной задаче с интегральным смещением для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Математический журнал. — 2008. — Т. 8, № 1. — С. 9–16.

20 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — V. 402, № 1. — P. 167–178.

21 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique Solvability of the Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations with Data on the Characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2002. — V. 42, № 11. — P. 1609–1621.

22 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations // Differential Equations. — 2003. — V. 39, № 10. — P. 1414–1427.

Literatura

1 Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. — 1963. — V. 21. — P. 155–160.

2 Kamynin L.I. Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1964. — T. 4, № 6. — S. 1006–1024.

3 Ionkin N.I. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem // Differentc. uravneniya. — 1977. — T. 13, № 2. — S. 294–304.

4 Samarskiy A.A. O nekotoryh problemah sovremennoi teorii differentcial'nyh uravneniy // Differentc. uravneniya. — 1980. — T. 16, № 11. — S. 1221–1228.

5 Muravei L.A., Filinovskiy A.V. Ob odnoi nelokal'noi kraevoi zadache dliya parabolicheskogo uravneniya // Matem. zametki. — 1993. — T. 4, № 3. — S. 98–116.

6 Nahushev A.M. Kraevye zadachi dliya nagruzhennyh integro-differentcial'nyh uravneniy giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoi vlagi // Differentc. uravneniya. — 1979. — T. 15, № 1. — S. 96–105.

7 Nahushev A.M. Ob odnom priblizhennom metode resheniya kraevyh zadach dliya differentcial'nyh uravneniy i ego prilozheniya k dinamike pochvennoi vlagi i gruntovyh vod // Differentc. uravneniya. — 1982. — T. 18, № 1. — S. 72–81.

8 Vodahova V.A. Kraevaiya zadacha s nelokal'nym usloviem A.M.Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa // Differentc. uravneniya. — 1982. — T. 18, № 2. — S. 280–285.

9 Bitcadze A.V., Samarskiy A.A. O nekotoryh prosteishih obobsheniyah lineinyh ellipticheskih zadach // Doklady AN SSSR. — 1969. — T. 185, № 4. — S. 739–740.

10 Nahusheva Z.A. Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya uravneniy v chastnyh prozvodnyh // Differentc. uravneniya. — 1986. — T. 22, № 1. — S. 171–174.

11 Kiguradze T. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Differential Equations and Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, — P. 1–144.

12 Golubeva N.D., Pul'kina L.S. Ob odnoi nelokal'noi zadache s integral'nymi usloviyami // Matem. zametki. — 1996. — T. 59, вып. 3. — S. 171–174.

13 Bouziani A. Solution forte d'un probleme mixte avec conditions non locales pour une classe d'equations hyperboliques // Bull. CI. Sci. Acad. Roy. Belg. — 1997. — V. 8, — P. 53–70.

14 Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Resheniya nelokal'nyh zadach dliya odnomernyh kolebaniy sredy // Matem. modelirovanie. — 2000. — T. 12, № 1. — S. 94–103.

15 Pul'kina L.S. O razreshimosti v L_2 nelokal'noi zadachi s integral'nym usloviem dlya giperbolicheskogo uravneniya // Differentc. uravneniya. — 2000. — T. 36, № 2. — S. 279–280.

16 Pul'kina L.S. Nelokal'naya zadacha dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya // Trudy MIAN im. V.A.Steklova. — 2002. — T. 236, — C. 298–303.

17 Nahushev A.M. Zadachi so smesheniem dlya uravneniy v chastnyh proizvodnyh. — M.: Nauka, 2006. — 287s.

18 Tkach B.P., Urmancheva L.B. Chislenno-analiticheskiy metod otyskaniya resheniy sistem s raspredelennymi parametrami s integral'nym usloviem // Nelineinye kolebaliya. — 2009. — T. 12, № 1. — C. 110–119.

19 Asanova A.T. O nelokal'noi zadache s integral'nym smesheniem dlya sistem giperbolicheskih uravneniy so smeshannoi proizvodnoi // Matematicheskiy zhurnal. — 2008. — T. 8, № 1. — S. 9–16.

20 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — V. 402, № 1. — P. 167–178.

21 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique Solvability of the Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations with Data on the Characteristics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2002. — V. 42, № 11. — P. 1609–1621.

22 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations // Differential Equations. — 2003. — V. 39, № 10. — P. 1414–1427.

Статья поступила в редакцию 12.06.14

Асанова А.Т. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕКТЕС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТАРЫ БАР БЕЙЛОКАЛ ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІГІ ТУРАЛЫ

Гиперболалық тектес дербес туындылы теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шарттары бар бейлокал есеп қарастырылады. Есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған. Жуық шешімді табу алгоритмі ұсынылған және оның гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін интегралдық шарттары бар бейлокал есептің дәл шешіміне жинақтылығы дәлелденген.

Asanova A.T. ON A SOLVABILITY OF THE NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE

The nonlocal problem with integral conditions for system of the equations in partial derivatives of hyperbolic type in the rectangular domain is considered. Sufficient conditions of the existence of unique classical solution of the problem in the terms of initial data are established. The algorithm of finding of the approximate solution is offered and it convergence to the exact solution of nonlocal problem with integral conditions for system of the hyperbolic equations is proved.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52). С.36–49*

УДК 517.75, 519.911

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: bakirova1974@mail.ru,
apelman86pm@mail.ru

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Предлагается численная реализация метода параметризации с использованием метода Рунге-Кутта 4-го порядка решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *нагруженное дифференциальное уравнение, импульсное воздействие, метод параметризации, фундаментальная матрица.*

Введение

В последние годы интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений неуклонно возрастает, и они находят многочисленные применения в задачах практики. Значительный вклад в развитие теории нагруженных уравнений внесли работы А. М. Нахушева [1, 2]. Работы

Keywords: *loaded differential equation, impulse effect, parameterization method, fundamental matrix*

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

А.М. Нахушева и его учеников способствовали интенсивному и систематическому изучению краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. В работе [3] предложен численный метод решения системы обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с начальными и неразделенными многоточечными условиями. В работе [4] при предположении существования и единственности решения предлагаются алгоритмы, основанные на идее переноса краевых условий. Перенос осуществляется решением матричных задач Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Математическое моделирование эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями, длительностью которых можно пренебречь, приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Различные задачи для таких уравнений, методы их решения и другие вопросы теории импульсных систем рассмотрены многими авторами (см. [5]–[9]). Известно, что наличие импульса существенно влияет на свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В статье [10] на основе метода параметризации [11] найдены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В настоящей работе рассматривается двухточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Точки нагружения являются также точками импульсного воздействия. Для ее исследования и решения применяется метод параметризации. Интервал разбивается на части и вводятся дополнительные параметры как значения решения в начальных точках полуинтервалов. По матрицам нагруженного члена, краевого условия и условия импульсного воздействия составлена система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Коэффициенты и правая часть системы определяются решениями задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Из системы находятся значения искомой функции в начальных точках полуинтервалов. Предлагается численная реализация алгоритма метода параметризации. Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервалах решаются методом Рунге-

Кутта 4-го порядка. Численная реализация метода параметризации иллюстрируется примерами.

1 Постановка задачи

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t) \lim_{t\to\theta_j+0} x(t) + f(t), \quad t \in (0,T)\backslash\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \tag{1}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \qquad d \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}^n, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $A_j(t)$ — матрицы $(n \times n)$- порядка, $j = \overline{0,m}$, и n-мерный вектор $f(t)$ кусочно-непрерывен на $[0,T]$ с возможными разрывами первого рода в точках $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$. B_j, C_j, $j = \overline{0,m}$, — постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, $||x|| = \max_i |x_i|$, $||A(t)|| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}(t)|$.

Через $PC([0,T], \theta_i, \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций с нормой $||x||_1 = \max_{i=\overline{0,m}} \sup_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} ||x(t)||$.

Решением задачи (1)–(3) является дифференцируемая на $[0,T]$, кусочно-непрерывная вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет нагруженному дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$ за исключением точек $t = \theta_i$, $i = \overline{1,m}$, граничному условию (2) и условиям импульсных воздействий в фиксированные моменты времени (3).

2 Схема метода параметризации

Отрезок $[0,T]$ разбивается на полуинтервалы точками нагружения: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$. Введем пространство $C([0,T], \theta_r, \mathbb{R}^{n(m+1)})$ систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{m+1}(t))$ таких, что функции $x_r(t)$, $r =$

$\overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и имеют конечный левосторонний предел
$\lim\limits_{t\to\theta_r-0} x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, с нормой $||x[\cdot]||_2 = \max\limits_{r=\overline{1,m+1}} \sup\limits_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)} ||x_r(t)||$.

Сужение функции $x(t)$ на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, обозначим через $x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Введя дополнительные параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$, и на каждом подуинтервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, произведя замену $u_r(t) = x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,m+1}$, получим краевую задачу с параметрами λ_r:

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)\big(u_r(t)+\lambda_r\big) + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1} + f(t), \quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r), \tag{4}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r=\overline{1,m+1}, \tag{5}$$

$$B_0\lambda_1 + C_0\lambda_{m+1} + C_0 \lim_{t\to T-0} u_{m+1}(t) = d, \tag{6}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} u_i(t) + B_i\lambda_i - C_i\lambda_{i+1} = \varphi_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{7}$$

Решением задачи (4)–(7) является пара $(\lambda, u[t])$ с элементами $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$, $u[t] = (u_1(t),u_2(t),\ldots,u_{m+1}(t)) \in C([0,T],\theta_r, \mathbb{R}^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$ и при $\lambda_r=\lambda_r^*$ удовлетворяют системе нагруженных дифференциальных уравнений (4) и условиям (5)–(7).

Задачи (1)–(3) и (4)–(7) эквивалентны. Если пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ldots,\widetilde{u}_{m+1}(t)) \in C([0,T], \theta_r,\mathbb{R}^{n(m+1)})$ — решение задачи (4)–(7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{u}_r(t)+\widetilde{\lambda}_r$, $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m+1} + \lim\limits_{t\to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t)$, будет решением исходной задачи (1)–(3). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $(\lambda,u[t])$, где $\lambda = (x(\theta_0),x(\theta_1),\ldots,x(\theta_{m+1}))$, $u[t] = (x(t)-x(\theta_0), x(t)-x(\theta_1),\ldots,x(t)-x(\theta_{m+1}))$, будет решением задачи (4)–(7).

Используя фундаментальную матрицу $X_r(t)$ дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, решение задачи Коши (4),

(5) запишем в следующем виде:

$$u_r(t) = X_r(t)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\Big(A_0(\tau)\lambda_r + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1} + f(\tau)\Big)d\tau, \qquad (8)$$

$$t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}.$$

Подставляя правую часть (8) в краевое условие (6) и условия импульса (7), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно параметров $\lambda_r, \quad r = \overline{1, m+1}$:

$$B_0\lambda_1 + C_0\left(I + X_{m+1}(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau\right)\lambda_{m+1} + C_0X_{m+1}(T)\times$$

$$\times\int\limits_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}d\tau = d - C_0X_{m+1}(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (9)$$

$$B_iX_i(\theta_i)\int\limits_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X_i^{-1}(\tau)\Big(A_0(\tau)\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\Big)d\tau + B_i\lambda_i - C_i\lambda_{i+1} =$$

$$= \varphi_i - B_iX_i(\theta_i)\int\limits_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X_i^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (10)$$

Обозначив через $Q_*(\theta)$ матрицу, соответствующую левой части системы (9), (10) и введя вектор

$F_*(\theta) = \big(d - C_0X_{m+1}(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X_r^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\ \ \varphi_1 - B_1X_1(\theta_1)\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$

$\ldots, \varphi_m - B_mX_m(\theta_m)\int\limits_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} X_m^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\big),$

запишем систему (9), (10) в виде

$$Q_*(\theta)\lambda = F_*(\theta). \qquad (11)$$

Нетрудно установить, что разрешимость краевой задачи (1)–(3) эквивалентна разрешимости системы (11).

Решение системы (11) $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+1}^*) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$ состоит из значений решений исходной задачи (1)–(3) в начальных точках полуинтервалов, то есть $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$. Если известно $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m+1}^*)$ — решение системы (11), то решение краевой задачи (1)–(3) определяется равенствами

$$x^*(t) = X_r(t) X_r^{-1}(\theta_{r-1})\lambda_r^* + X_r(t)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\Big[\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}^* + f(\tau)\Big]d\tau,$$

$$t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{12}$$

$$x^*(T) = X_{m+1}(T) X_{m+1}^{-1}(\theta_m)\lambda_{m+1}^* +$$

$$+ X_{m+1}(T)\int\limits_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)\Big[\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}^* + f(\tau)\Big]d\tau. \tag{13}$$

Таким образом, в этом случае получаем решение линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1)–(3) в аналитической форме (12), (13).

3 Численная реализация метода параметризации

Как видно из уравнений (9), (10), коэффициенты и правая часть системы (11) составляются с помощью решения задач Коши

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + A_j(t), \quad z(\theta_{r-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t), \quad z(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{15}$$

Предлагается следующая численная реализация метода параметризации, основанная на решении задач Коши (14), (15) методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

Пусть имеем разбиение $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$. Каждый полуинтервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1, m+1}$, делим на N_i частей, приближенные значения коэффициентов и правой части (11) найдем, решая матричные и векторные задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом $h_i = (\theta_i - \theta_{i-1})/N_i$, $i = \overline{1, m+1}$ на каждом i-ом интервале. Тогда получим следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров λ:

$$Q_*^{\widetilde{h}}(\theta)\lambda = -F_*^{\widetilde{h}}(\theta), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n(m+1)}, \quad \widetilde{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{m+1}). \tag{16}$$

Решая систему (16), найдем $\lambda^{\widetilde{h}} \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$. Как было отмечено выше, величины $\lambda^{\widetilde{h}} = (\lambda_1^{\widetilde{h}}, \lambda_2^{\widetilde{h}}, \dots, \lambda_{m+1}^{\widetilde{h}}) \in R^{n(m+1)}$ являются значениями приближенного решения задачи (1)–(3) в начальных точках полуинтервалов: $x^{\widetilde{h}_r}(\theta_0) = \lambda_1^{\widetilde{h}}$, $x^{\widetilde{h}_r}(\theta_1) = \lambda_2^{\widetilde{h}}, \dots, x^{\widetilde{h}_r}(\theta_m) = \lambda_{m+1}^{\widetilde{h}}$. Из формул (12), (13) следует, что приближенные значения решения в остальных точках полуинтервалов определяются решениями задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}^{\widetilde{h}} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{17}$$

$$x(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\widetilde{h}}, \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{18}$$

Используя метод Рунге-Кутта 4-го порядка при решении задач Коши (17), (18) мы найдем численное решение задачи (1)–(3).

В качестве иллюстрации предложенной численной реализации метода параметризации рассмотрим следующие примеры.

4 Примеры

На $[0, T]$ рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + A_1(t) \lim_{t \to \theta_1 + 0} x(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \backslash \{\theta_1\}, \tag{19}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \qquad d \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{20}$$

$$B_1 \lim_{t \to \theta_1 - 0} x(t) - C_1 \lim_{t \to \theta_1 + 0} x(t) = \varphi_1, \qquad \varphi_1 \in \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

Задача 1. Пусть

$$T=1,\quad \theta_1=\frac{1}{2},\quad A_0=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad A_1(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ t & 0\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C_0=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}0\\ -1/4\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}1-t-1/4\\ -3t/2\end{pmatrix}\ \text{при } t\in[0,1/2)\,,$$

$$f(t)=\begin{pmatrix}-t^2-t+3/4\\ -t^2+t/2\end{pmatrix}\ \text{при } t\in[1/2,1]\,.$$

В рассматриваемой задаче фундаментальной матрицей дифференциальной части уравнения (19) является матрица

$$X(t)=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ -1 & e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Дополнительные параметры λ_r, $r=\overline{1,2}$, обозначим $\lambda_1:=x(0)$, $\lambda_2:=x(1/2)$, в начальных точках полуинтервалов произведем замену $u_1(s)=x(s)-\lambda_1$, $s\in[0,1/2)$, $u_2(s)=x(s)-\lambda_2$, $s\in[1/2,1)$. Тогда получим

$$u_1(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}\end{pmatrix}\lambda_1+$$

$$+\begin{pmatrix}-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} & \frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}\\ \frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} & -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}\end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{t^2}{8}+t+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{2t}\\ -\frac{t^2}{8}+\frac{t}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}e^{2t}\end{pmatrix},\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),$$

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} & \dfrac{t}{2} - 1 + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} \\ \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{11}{16} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} & -\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} \end{pmatrix} \lambda_2 +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{8} + t + \dfrac{1}{32} - \dfrac{9}{16}e^{2t-1} \\ \dfrac{7t^2}{8} + \dfrac{t}{4} + \dfrac{7}{32} - \dfrac{9}{16}e^{2t-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Краевое условие и условия импульсного воздействия решения при $t = 1/2$ приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{16} - \frac{3}{4}e & \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e \\ 0 & 1 & \frac{11}{16} - \frac{3}{4}e & -\frac{3}{4}e \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e & -\frac{21}{16} + \frac{1}{8}e & \frac{1}{4}e \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e & -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}e & -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} - \frac{9}{16}e \\ \frac{11}{32} - \frac{9}{16}e \\ -\frac{21}{32} + \frac{1}{8}e \\ -\frac{15}{32} + \frac{1}{8}e \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем значения параметров, которые обозначим через λ^*_{ij}, $i, j = 1, 2$,

$$\lambda^*_{11} = 0, \quad \lambda^*_{12} = 0, \quad \lambda^*_{21} = 1/2, \quad \lambda^*_{22} = 1/4.$$

Единственным решением задачи (19)–(21) является вектор $x^*(t)$:

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 1/2 \\ (1-2\tau)e^{-2\tau}/2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}e^{2t-1} \\ -\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}e^{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 1/2 - \tau \\ (1-2\tau^2)e^{-2\tau}/2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

В первом примере нам удалось построить фундаментальную матрицу дифференциальной части рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения. Это в совокупности с вычисляемостью интегралов позвилило с помощью алгоритма метода параметризации построить решение задачи в явном виде.

Задача 2. Пусть

$T = 1,\ \theta_1 = \frac{1}{2},\ A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 1 \end{pmatrix},\ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 2t - t^2 - 5/4 \\ 1 - t^3 + t^2 - 3t/2 \end{pmatrix}$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$

$f(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3/4 \\ -2t^2 + 3t/2 \end{pmatrix}$ при $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$

Здесь марица дифференциальной части уравнения (19) является переменной и построить фундаментальную матрицу не удается. В этом случае используем численную реализацию алгоритма метода параметризации. Приведем результаты численной реализации алгоритма при разбиении интервала $[0, 1]$ с шагом $h = 0.5$ и разбиении $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ с шагом $h_1 = h_2 = 0.025$:

t	$\widetilde{x}_1(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$	t	$\widetilde{x}_1(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$
0	0.00000001	0	0.5	0.50000001	0.25
0.025	-0.02437499	0.02499999	0.525	0.525	0.275625
0.05	-0.04749999	0.04999999	0.55	0.55000001	0.3025
0.075	-0.06937499	0.07499999	0.575	0.57500001	0.330625
0.1	-0.08999999	0.09999999	0.6	0.60000001	0.36
0.125	-0.10937499	0.12499999	0.625	0.62500001	0.390625
0.15	-0.12749999	0.14999999	0.65	0.65000001	0.4225
0.175	-0.14437499	0.17499999	0.675	0.67500001	0.455625
0.2	-0.15999999	0.19999999	0.7	0.70000001	0.49
0.225	-0.17437499	0.22499999	0.725	0.72500001	0.525625
0.25	-0.18749999	0.24999999	0.75	0.75000001	0.5625
0.275	-0.19937499	0.27499999	0.775	0.77500001	0.600625
0.3	-0.20999999	0.29999999	0.8	0.80000001	0.64
0.325	-0.21937499	0.32499999	0.825	0.82500001	0.680625
0.35	-0.21937499	0.32499999	0.85	0.85	0.7225
0.375	-0.23437499	0.375	0.875	0.87500001	0.765625
0.4	-0.23999999	0.4	0.9	0.90000001	0.81
0.425	-0.24437499	0.425	0.925	0.92500001	0.85562499
0.45	-0.24749999	0.45	0.95	0.95000001	0.90249999
0.475	-0.24937499	0.475	0.975	0.97500001	0.95062499
0.5	-0.24999999	0.5	1	1.00000001	0.99999999

Решением второй задачи является вектор $x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t \end{pmatrix}$ при $t \in [0, 1/2)$, $x^*(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ при $t \in [1/2, 1]$ и справедлива оценка

$$\max_{j=\overline{1,40}} \|x^*(t_j) - \widetilde{x}(t_j)\| < 0.000000007.$$

Литература

1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 205 с.

2 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-диффе-

ренциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15, № 1. — С. 96–105.

3 Абдуллаев В.М., Айда-Заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, №9. — С. 1585–1595.

4 Абрамов А.А. Вариант метода прогонки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. — Т. 1, №2. — С. 349–351.

5 Bajo I., Liz E. Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times // Journal of mathematical analysis and applications. — 1996. — P. 65–73.

6 Paul W. Eloe, Henderson J. A Boundary value problem for a system of ordinary differential equations with impulse effects // Rocky Mountain J. Math. — 1997. — V. 27, №3. — P. 785–799.

7 Yansheng L. Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulse // Journal of computational and applied mathematics. — 2009. — V. 223, Issue 1. — P. 27–39.

8 Lakshmikantham V., Bainov D., Simonov P. Theory of impulsive differential equations. — World Scientific Publishers Singapore, 1989. — 273 p.

9 Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Украинский матем. журнал. — 1980. — Т. 34, № 1. — С. 66–73.

10 Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Математический журнал. — 2004. — Т. 4, № 4. — С. 93–102.

11 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 50–66.

Literatura

1 Nakhushev A.M. Uravneniya matematicheskoy biologii. — M.: Vysshaya shkola, 1995. — 205 s.

2 Nakhushev A.M. Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravneniy giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoi vlagi // Differentcial'nye uravneniya. — 1979. — T. 15, № 1. — S. 96–105.

3 Abdullaev V.M., Aida-Zade K.R. O chislennom reshenii nagruzhennyh differentcial'nyh uravneniy // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2004. — T. 44, №9. — S. 1585–1595.

4 Abramov A.A. Variant metoda progonki // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 1961. — T. 1, №2. — S. 349–351.

5 Bajo I., Liz E. Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times // Journal of mathematical analysis and applications. — 1996. — P. 65–73.

6 Paul W. Eloe, Henderson J. A Boundary value problem for a system of ordinary differential equations with impulse effects // Rocky Mountain J. Math. — 1997. — Vol. 27, №3. — P. 785–799.

7 Yansheng L. Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulse // Journal of computational and applied mathematics. — 2009. — V. 223, Issue 1. — P. 27–39.

8 Lakshmikantham V., Bainov D., Simonov P. Theory of impulsive differential equations. — World Scientific Publishers Singapore, 1989. — 273 p.

9 Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Periodicheskie i pochti periodicheskie resheniya differentcial'nyh uravneniy s impul'snym vozdeistviem // Ukrainskiy matem. zhurnal. — 1980. — T. 34, № 1. — S. 66–73.

10 Tleulesova A.B. Ob odnoznachnoi razreshimosti dvuhtochechnoi kraevoi zadachi s impul'snym vozdeistviem // Matematicheskiy zhurnal. — 2004. — T. 4, № 4. — S. 93–102.

11 Dzhumabaev D.S. Priznaki odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlya obyknovennogo differentcial'nogo uravneniya // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1989. — T. 29, № 1. — S. 50–66.

Статья поступила в редакцию 27.02.14

Бакирова Э.А., Қадырбаева Ж.М. ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРІ БАР ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІНІҢ ЕСЕПТІК ЖҮЗЕГЕ АСЫРЫЛУЫ

Импульстік әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін шешуге 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісі қолданылатын параметрлеу әдісінің есептік жүзеге асырылуы ұсынылады.

Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD OF SOLVING OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE EFFECT

A linear two-point boundary value problem for a system of the loaded differential equations with impulse effect is considered. With the help of the Runge-Kutta 4-th order method to solve the Cauchy problem for ordinary differential equation the numerical implementation of the parametrization method is proposed.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52). С.50–65*

УДК 517.977

К.Б. Бапаев

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСА

На основе метода непрерывной нормализации исследуются нелинейные разностно-динамические системы (РДС) в критическом случае, непрерывно зависящие от параметра. Ставится задача о сильной устойчивости, когда характер устойчивости РДС в окрестности изолированных значений параметра сохраняется. Для резонанса нечетного порядка получены условия сильно асимптотической устойчивости и неустойчивости.
Ключевые слова: *непрерывная нормализация, сильная устойчивость, резонанс четного порядка, прохождение через резонанс.*

Введение

Рассматриваются разностно-динамические системы (РДС), непрерывно зависящие от параметра, в случае, когда в рассматриваемой области значений параметра характеристические уравнения системы первого приближения имеют m-пар комплексно-сопряженных корней, по модулю равных единице.

При изменении параметра μ вблизи резонансного значения μ_0, при котором система обладает внутренним резонансом, возможны различные изменения свойства устойчивости. Ставится задача о сильной устойчивости,

Keywords: *continuous normalization, strong stability, even order resonance, the passage through resonance*
2010 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10

когда характер устойчивости системы в точке μ_0 сохраняется в некоторой окрестности этой точки.

Для резонанса нечетного порядка получены условия сильно асимптотической устойчивости и неустойчивости.

1 Основные определения и постановка задачи

Рассмотрим автономную РДС

$$x_{n+1} = A(\mu)\,x_n + f(\mu \cdot x_n), \quad n \in N, \;\; \mu \in G, \tag{1}$$

где $x_n \in R^m$, A — квадратная матрица размера $m \times m$, непрерывно зависящая от $\mu \in G$, $f(x_n)$ — аналитическая вектор-функция, представимая в виде

$$f(\mu, x_n) = \sum_{|k|=2}^{\infty} f^{(k)}(\mu, x_n),$$

где $f^{(k)}(\mu, x_n) = \sum\limits_{|j|=k} f_j(\mu) \cdot x_n^j$ — форма k - порядка с непрерывным $f_j(\mu)$ в G.

Будем говорить, что РДС (1) устойчива (неустойчива) в точке $\mu_0 \in G$, если тривиальное решение системы (1) при $\mu = \mu_0$ устойчиво (неустойчиво) по Ляпунову [1].

Определение 1. *Устойчивая (неустойчивая) РДС* (1) *в точке* $\mu_0 \in G$, *называется сильно устойчивой (неустойчивой) в этой точке, если существует такая* ε*-окрестность точки* $\mu_0 \in U_\varepsilon(\mu_0) \subset G$, *что система* (1) *устойчива (неустойчива) в каждой точке* $\mu \in U_\varepsilon(\mu_0)$.

Предполагается, что РДС (1) такова, что в области G матрица $A(\mu)$ имеет m-пар непрерывных по μ комплексных собственных чисел

$$\overline{\lambda}_k = \exp(-i\varphi_k(\mu)), \;\; k = \overline{1, m},$$

и приводима в G к непрерывной по μ диагональной матрице [2]. Через Z_+^m обозначим множество m-мерных векторов, компоненты которых — целые неотрицательные числа. Если $l \in Z_+^m$ то

$$l = (l_1, l_2, \ldots, l_m), \;\; s = \overline{1, m}; \qquad |l| = \sum_{j=1}^{m} l_j\,.$$

Определение 2. *Говорят, что РДС (1) в точке $\mu_0 \in G$ обладает внутренним резонансом L-го порядка, если существует вектор $l \in Z_+^m$, l_s — взаимно простые и такие, что при $\mu = \mu_0$*

$$\left(l, \varphi^0\right) = \sum_{j=1}^{m} l_j \varphi_j^0 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\,, \ |l| = L; \ \varphi^0 = \varphi\left(\mu_0\right) = \left(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_m^0\right). \quad (2)$$

В предлагаемой работе рассматриваемая задача связана с изучением влияния малой вариации значений параметра на свойство устойчивости РДС (1).

Как известно из [3–7], эффективным методом исследования устойчивости системы (1) при фиксированных значениях параметра (как резонансных, так и нерезонансных) служит предварительное преобразование ее к нормальной форме до нужного порядка. Когда μ_0 нерезонансная, то в ее малой окрестности нормализация будет непрерывной по μ. Это означает, что характер устойчивости системы сохраняется в окрестности μ_0.

Если значение μ_0 резонансное, то структура нормальной формы меняется при прохождении параметра μ через μ_0. Поэтому для рассматриваемого класса систем наибольший интерес представляет задача о сильной устойчивости в окрестности μ_0. В этом случае возникает вопрос о существовании для системы (1) непрерывной по μ нормальной формы.

2 Непрерывная по параметру нормальная форма

При предположениях, сделанных в п.1, РДС (1) можно записать в виде

$$z_{n+1} = \Lambda\left(\mu\right) z_n + f\left(z_n, \bar{z}_n, \mu\right), \quad (3)$$

где $\Lambda\left(\mu\right) = \left(\delta_{\nu\tau} \exp\left(i\varphi_\nu\right)\right)^m$, $\delta_{\nu\tau}$ — символ Кронекера. Здесь $z_n \in R^m$, черта сверху означает комплексную сопряженность.

Компоненты m-мерных вектор-форм $f^{(l)}\left(z_n, \bar{z}_n, \mu\right)$ представим в виде

$$f_s^{(l)}\left(z_n, \bar{z}_n, \mu\right) = \sum_{|p|+|q|=l} f_s^{p,q}\left(\mu\right) z_n^p \cdot \bar{z}_n^q; \quad p, q \in R_m^+, \quad z_n^p = z_{1n}^{p1} z_{2n}^{p2} \ldots z_{mn}^{pm},$$

функции $\varphi_s\left(\mu\right)$ и $f_s^{p,q}\left(\mu\right)$ непрерывны в G.

Нашей целью является преобразование РДС (3) к специальной простой (нормальной) форме, впервые предложенной в [4] для систем без параметра.

Для непрерывных РДС подобные преобразования применялись многими авторами, обзор работ которых содержится в [8]. Применим к (3) обратимую замену переменных:

$$z_n = y_n + h\left(y_n, \overline{y}_n, \mu\right) \equiv H\left(y_n, \overline{y}_n, \mu\right). \tag{4}$$

В результате РДС (3) перейдет в систему

$$y_{n+1} = H^{-1} \circ \left(\Lambda\left(\mu\right) + f\right) \circ H\left(z_n, \overline{z}_n, \mu\right) \tag{5}$$

(где знак "$\circ$" означает суперпозицию). Особый интерес для нас представляет случай, когда правую часть (5) можно представить в виде:

$$H^{-1} \circ \left(\Lambda\left(\mu\right) + f\right) \circ H\left(z_n, \overline{z}_n, \mu\right) = \Lambda\left(\mu\right) y_n + \psi\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right), \tag{6}$$

где ψ имеет структуру, аналогичную f в (3).

Лемма 1. *Если в окрестности $U \times G$, где $U = \{|y_n| < \varepsilon\}$, имеет место неравенство*

$$\left|h\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right)\right| < 1, \tag{7}$$

тогда правая часть (5) *представима в виде* (6), *где*

$$\begin{aligned} \psi\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-h\right)^k \circ \left[\Lambda\left(\mu\right) h\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right) - \right. \\ \left. - h\left(\mu, \Lambda\left(\mu\right) y_n, \overline{\lambda}\left(\mu\right) \cdot \overline{y}_n\right) + f\left(\mu, H, \overline{H}\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку для $\forall\left(y_n, \mu\right) \in U \times G$ выполняется условие (7), то имеет место разложение

$$H^{-1} = \left[1 + h\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-h\right)^k.$$

Используя его, получим соотношения

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ \left[\Lambda\left(\mu\right) + f\right] \circ H\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right) = \Lambda\left(\mu\right) y_n + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-h\right)^k \circ \left\{\Lambda\left(\mu\right) y_n + \right. \\ \left. + \Lambda\left(\mu\right) h\left(\mu, y_n, \overline{y}_n\right) - h\left(\mu, y_n, \Lambda\left(\mu\right) \overline{y}_n\right) + f\left(\mu, H, \overline{H}\right)\right\}, \end{aligned}$$

откуда следует (8). Лемма доказана. □

Таким образом, при выполнении условий леммы 1 рассматриваемое преобразование (4) является обратимым и связывает решения систем (3) и (5).

Рассмотрим условия, при которых преобразованное уравнение линейно, то есть в (6)

$$\psi = 0\ . \tag{9}$$

Из структуры ψ следует, что тождество (9) выполняется тогда и только тогда, когда разрешимо функциональное уравнение типа Шредера [9]

$$\Lambda(\mu)\, h(\mu, y_n, \overline{y}_n) - h\left(\mu, \Lambda(\mu)\, y_n, \overline{\Lambda}(\mu)\, \overline{y}_n\right) + f\left(\mu, H, \overline{H}\right) = 0 \tag{10}$$

для $\forall y_n \,| y_n \in U$. Как известно, разрешимость уравнений (10) зависит от структуры матрицы $\Lambda(\mu)$.

Положим

$$Tf = \sum_{k=0}^{\infty} (-h)^k \circ \left\{ f\left(\mu, H, \overline{H}\right) - f(\mu, y_n, \overline{y}_n) \right\}.$$

Тогда после последовательного проведения серии замен переменных $H_2, H_3, \ldots, H_k$, то есть

$$z_n = (1 + h_2) \circ (1 + h_3) \circ \ldots \circ (1 + h_k) \circ (\mu, y_n, \overline{y}_n) = \Pi_k(\mu, y_n, \overline{y}_n)\,, \tag{11}$$

где $h_q(\mu, y_n, \overline{y}_n) = \sum\limits_{|k+l|=q} h^{(k,l)}(\mu)\, y_n^k\, \overline{y}_n^l$, РДС (3) можно привести к виду

$$y_{n+1} = \Lambda(\mu)\, y_n + \sum_{\tau=1}^{k-1} [T^\nu f]^{l_\nu} \circ (\mu, y_n, \overline{y}_n) + T^k f, \tag{12}$$

где $[T^\nu f]^{l_\nu}$ — вектор-формы порядка $|l_\nu|$.

Определим структуру $[T^\tau f]^{l_\nu} \circ (\mu, y_n, \overline{y}_n)$ в зависимости от $\Lambda(\mu)$.

Применяя к (3) Π_τ преобразования для нахождения H_ν, получим

$$\begin{gathered} \Lambda(\mu)\, h_\nu(\mu, y_n, \overline{y}_n) - h_\nu\left(\mu, \Lambda y_n, \overline{\Lambda}\overline{y}_n\right) = \\ = \left[T^{\nu-1} f(\mu, y_n, \overline{y}_n)\right]^\nu \equiv F^{(\nu)}(\mu, y_n, \overline{y}_n)\,, \end{gathered} \tag{13}$$

где $F^{(\tau)}(\mu, y_n, \overline{y}_n) = \sum\limits_{|k+l|=\tau} F_{k,l} y_n^k \overline{y}_n^l$. В эквивалентном функциональном уравнении Шредера (13) уравнения для коэффициентов $h^{k,l}$ имеют вид

$$[\exp(i\varphi_s(\mu) - \exp i\varphi(\mu)(k-l))]\, h^{(k,l)} = F_{k,l}, \quad \varphi \in R^m, \quad k \cdot l \in Z_+^m. \quad (14)$$

Определение 3. *Пары векторов* $(k,l)\,, k \neq l + \delta_s$, *и соответствующие им коэффициенты* s *уравнений РДС* (3) *и преобразований* H_τ *называются резонансными, если существуют такие* $\mu \in G$, *что*

$$(k - l - \delta_s, \varphi(\mu)) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 2\pi)\,, \quad (15)$$

где δ_s *—* s*-й орт в* Z_+^m.

Множество всех резонансных пар векторов s-го уравнения обозначим через N_G^s. Для пары векторов (k,l) при $k = l + \delta_s$ всегда имеем $(k-l,\varphi) \equiv 2k\pi$ $(\forall \mu \in G)$, и они образуют множество N_0^s, которое определяет члены тождественного резонанса [5]. Обозначим $N^s = N_G^s \bigcup N_0^s$. Из (13) с учетом (14) имеет место

Лемма 2 (о разрешимости уравнения Шредера [10]). *Пусть в* (14) $F_{k,l}(\mu)$ *непрерывны в* G. *Тогда уравнение* (13) *разрешимо относительно форм* $h^{(\tau)}(\mu, y_n, \overline{y}_n)$, *если* $k,l \notin N^s$, *а при* $k,l \in N^s$ *уравнение* (13), *вообще говоря, не разрешимо.*

Это означает, что по отношению к H_τ преобразованные резонансные члены τ-го порядка правой части РДС (3) являются инвариантными, то есть справедлива

Теорема 1 (о нормализации). *При любых значениях непрерывных по* μ *нерезонансных коэффициентов в системе* (3) *непрерывные резонансные коэффициенты могут быть в ней подобраны такими, что будет существовать непрерывное в* G *преобразование* $\Pi = \lim\limits_{\tau\to\infty} \Pi_\tau$, *переводящее систему* (3) *в нормальную форму. Непрерывная нормальная форма будет получена, если положить в* (3) *все нерезонансные коэффициенты равными нулю, то есть она будет иметь следующую структуру*:

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = \Lambda(\mu)\, y_n + y_n \sum_{|q|\geq 1} \alpha_{q+\delta} \omega_n^q + \sum_{(k\cdot l)\in N_G^s} \alpha_{k\cdot l} y_n^k \overline{y}_n^l\,, \\ &\omega_n = (\omega_{1n}, \ldots, n\omega_{mn})\,,\ \omega_{sn} = y_{sn} \cdot \overline{y}_{sn}\,. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть точка μ_0 и порядок единственного младшего резонанса равен $2L+1$, причем μ_0 — изолированный корень сравнений (15). В качестве области G возьмем столь малую окрестность точки μ_0, что в проколотой окрестности G^* нет резонансов порядка $< 2L+3$.

При этих условиях младшие резонансные члены в G^* будут иметь порядок $2L$ [9], поэтому структуры обычной и нормальных форм будут совпадать до членов $2L-1$. И если решение задачи устойчивости в G не зависит от членов порядка выше $2L-1$, то наличие в точке μ_0 внутреннего резонанса не влияет на решение задачи о сильной устойчивости, связанной с наличием в системе резонанса порядка $2L+1$, и мы будем считать, что в (16) $|q| = L$.

При сделанных предположениях, ограничиваясь приведением к непрерывной нормальной форме до членов $(2N+1)$-го порядка включительно, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = \Lambda(\mu)\, y_n + \alpha(\mu)\, \overline{y}_n^{\,l-\delta_s} + y_n \sum_{|p|=s} \alpha_p(\mu)\, \omega_n^p + O_\mu\left(|y_n|^{2N+2}\right), \\ &|l| = 2N+1 \geq 3, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\alpha(\mu), \alpha_p(\mu), O_\mu$ — непрерывны в G.

РДС (17) охватывает точечное преобразование, изучавшееся в [3], и получается из (16) из соображений о структуре младших резонансных членов, аналогичных в [7].

3 Исследование устойчивости модельной (укороченной) системы

Рассмотрим модельную РДС

$$y_{n+1} = \Lambda(\mu)\, y_n + \alpha(\mu)\, \overline{y}_n^{\,l-\delta_s}, \tag{18}$$

$|l| = 2L+1$. Введем в рассмотрение $2 \times m$ - матрицу

$$M = \begin{pmatrix} r_1 \sin\tau_1 & r_2 \sin\tau_2 & \ldots & r_m \sin\tau_m \\ r_1 \cos\tau_1 & r_2 \cos\tau_2 & \ldots & r_m \cos\tau_m \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_s(\mu) = a_s(\mu) + i b_s(\mu) = r_s e^{i\tau_s(\mu)},$$

$$\alpha(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\mu) \\ \alpha_1(\mu) \\ \vdots \\ \alpha_m(\mu) \end{pmatrix} \tag{19}$$

и определители

$$\Delta_{k_i k_j} = \begin{vmatrix} a_{k_j}(\mu)\, a_{k_l}(\mu) \\ b_{k_j}(\mu)\, b_{k_l}(\mu) \end{vmatrix} = r_{k_j} \cdot r_{k_l} \cdot \sin\left(\tau_{k_l} - \tau_{k_j}\right). \tag{20}$$

Отождествим углы $\tau_k(\mu)$ с точками единичной окружности и введем разбиение всех модельных систем на непересекающиеся классы A, B, C, D со следующими геометрическими признаками:

A: Точки $\tau_s(\mu)$ не сливаются в одну, и существует диаметр круга такой, что все точки $\tau_s(\mu)$ расположены строго по одну сторону от него, не совпадая с концами диаметра при $\forall \mu \,|\mu \in G$.

B: Существует только такой диаметр круга, что часть точек $\tau_s(\mu)$ совпадает с концами диаметра, а остальные лежат по одну сторону от диаметра для $\forall \mu \in G$ (заметим, что на обоих концах диаметра должны быть точки $\tau_s(\mu)$, иначе имеем случай A).

C: Все точки $\tau_s(\mu)$ расположены на концах некоторого диаметра круга (для $\forall \mu \in G$).

D: Для любого диаметра круга существуют точки $\tau_s(\mu)$, лежащие по разные стороны от него (для $\forall \mu \in G$).

C_1: Все точки $\tau_s(\mu)$ совпадают.

C_2: На обоих концах диаметра имеются точки $\tau_s(\mu)$.

D_1: Существует тройка точек τ_{k_1}, τ_{k_2}, τ_{k_3} таких, что треугольник $\Delta_{k_1 k_2 k_3}$ — остроугольный.

D_2: Любая тройка различных точек τ_s образует прямоугольный треугольник.

В случае D подслучай D_2 фактически означает, что все $\tau_s(\mu)$ концентрируются на окружности в четырех точках, являющихся концами двух взаимно перпендикулярных диаметров. Добавление любой отличной от них точки τ_s переводит случай D_2 в D_1, так как образуется остроугольный треугольник. Случай D_1 возможен при $m \geq 4$. Если $m = 1$, то отнесем этот случай к C_1. При $m = 2$ возможен либо случай $A\,(\tau_2 \neq \tau_1\tau + \pi)$, либо случай C. Если при некотором s $l_s \neq 0$, но $\alpha_s = 0$, то угол τ_s не определен.

В указанной классификации участвует столько точек τ_s, сколько отличных от нуля коэффициентов α_s. Если некоторые $\alpha_s = 0$, то s-ое уравнение (18) имеет вид $\Delta\omega_{sn} = 0$ и $\omega_{sn} = C > 0$. Вводя эти значения в остальные уравнения системы (18), получим систему того же вида, с теми же значениями $\tau_s(\mu)$, что и в исходной, но меньшей размерности. Это позволяет при исследовании системы (18) считать, что все $\alpha_s \neq 0$. При исследовании полной системы от этого предположения откажемся. Возвращаясь к введенной классификации, нетрудно видеть, что существует такая нумерация компонент y_n в системе (18), что условия $A - D$ можно переписать в виде:

$A^*: \ \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_m < \tau_1 + \pi.$

$B^*: \ (\exists j / 2 \leq j \leq m)\,(\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_j \leq \tau_{j+1} \leq \ldots \leq \tau_m = \tau_1 + \pi)\,.$

$C_1^*: \ (\forall s)\,(\tau_s = \tau_1)\,.$

$C_2^*: \ (\exists j / 2 \leq j \leq m)\,(\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_j < \tau_{j+1} = \ldots = \tau_m = \tau_1 + \pi)\,.$

$D_1^*:$ а) $(\exists\, j / 2 \leq j \leq m)\,(\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots < \tau_1 + \pi \leq \tau_j \leq \ldots \leq \tau_m)\,;$
б) $(\exists\, k_1 < k_2 < k_3)\,(\Delta_{k_1k_2} = \Delta_{k_2k_3} = -\Delta_{k_1k_3})$

$D_2^*: \ (\exists\, i,\, j,\, k)\,(\tau_1 = \ldots = \tau_i, \ \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j = \tau_1 + \pi\,/2\ , \ \tau_{1+1} = \ldots = \tau_k = \tau_1 + \pi, \ \tau_{k+1} = \ldots = \tau_m = \tau_1 + \pi\,/3)\,.$

Считаем указанную нумерацию выполненной. Дополним проведенную геометрическую классификацию алгебраической характеристикой случаев C_i^* и D_j^*.

Лемма 3. *Условия* C_j^*, D_j^* *эквивалентны следующим условиям:*
$C_1^{**}:$ а) $\operatorname{rank} M = 1$, б) $(\forall\, i_j)\,(\operatorname{sign} a_i a_j = 1 \ \operatorname{sign} b_i b_j = 1)$.
$C_2^{**}:$ а) $\operatorname{rank} M = 1$, $(\exists\, i, j)\,(\operatorname{sign} a_i a_j = -1 \ \operatorname{sign} b_i b_j = -1)\,.$
$D_1^{**}: (\exists\, k_1 k_2 k_3)\,(\operatorname{sign} \Delta_{k_1k_2} = \operatorname{sign} \Delta_{k_2k_3} = -\operatorname{sign} \Delta_{k_2k_3})\,.$
$D_2^{**}:$ а) $(\exists\, s_1, s_2 s_3 s_4)\,(\operatorname{rank} M_{k_1k_2} = 1, \ \operatorname{rank} M_{k_3k_4} = 1, \ \operatorname{rank} M_{k_1k_2k_3} = 2)$
b) $\operatorname{sign} a_{k_1} a_{k_{i+1}} = -1$ или $\operatorname{sign} b_{k_1} b_{k_{i+1}} = -1, \ i = 1, 3.$

Доказательство. Докажем эквивалентность условий C_1^* и C_1^{**}. Для этого нужно показать, что $C_1^* \Rightarrow C_1^{**}$ и $C_1^{**} \Rightarrow C_1^*$.

1. $C_1^{**} \Rightarrow C_1^*$. Так как $\operatorname{rank} M = 1$, то $(\exists\, kj)\, \Delta_{kj} = 0$. Из (20) тогда следует, что $\tau_k(\mu) - \tau_j(\mu) = 0$ или π, учитывая, что $\operatorname{sign} a_k a_j = 1$ из с (19) получаем, что $\tau_k(\mu) = \tau_j(\mu)$.

2. $C_1^* \Rightarrow C_1^{**}$. Равенства $\tau_k(\mu) = \tau_j(\mu)$ позволяют с помощью (20) сделать вывод, что $\operatorname{rank} M = 1$. Из (19) следует, что $\operatorname{sign} a_k a_j = 1\, (\operatorname{sign} b_k b_j = 1)\, (\exists k_j)$.

Таким образом, $C_1^* \sim C_1^{**}$. Аналогичным образом доказывается, что $C_2^* \sim C_2^{**}, D_2^* \sim D_2^{**}$. Докажем теперь, что $D_1^* \sim D_1^{**}$.

$D_1^* \Rightarrow D_1^{**}$. При выполнении D^* существует остроугольный треугольник $\Delta\tau_{k_1}\tau_{k_2}\tau_{k_3}$, образованный тройкой точек τ_{k_j} на единичной тригонометрической окружности. Каждому треугольнику можно поставить в соответствие достаточно определенную упорядоченную тройку чисел $\sin(\tau_{k_1}, \tau_{k_2})$, $\sin(\tau_{k_2}, \tau_{k_3})$, $\sin(\tau_{k_3}, \tau_{k_1})$, с помощью которой составим "*схему знаков*": $\operatorname{sign}\sin(\tau_{k_1}, \tau_{k_2})$; $\operatorname{sign}\sin(\tau_{k_2}, \tau_{k_3})$; $\operatorname{sign}\sin(\tau_{k_1}, \tau_{k_3})$, где (τ_k, τ_j) — длина дуги круга, соответствующая движению точки τ_k к точке τ_j против часовой стрелки (так как $(\tau_k, \tau_j) = 2\pi - (\tau_j, \tau_k)$). Составим "*схему знаков*" для остроугольного треугольника. Проведем через вершину τ_{k_1} диаметр круга d_{k_1}. Так как треугольник остроугольный, то точки τ_{k_2} и τ_{k_3} лежат по разные стороны от диаметра, тогда будем иметь:

а) либо $0 < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < \pi$, и тогда $\pi < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < 2\pi$,

б) либо $\pi < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < 2\pi$, и тогда $0 < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < \pi$.

Проведем теперь диаметр d_{k_2} с учетом того, что τ_{k_2} и τ_{k_3} лежат по разные стороны от d_{k_2}. Если справедливо а), то $\pi < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < 2\pi$, и тогда $0 < (\tau_{k_1}, \tau_{k_2}) < \pi$. Следовательно, в случае а) "*схема знаков*" имеет вид $(+;+;-)$. Если справедливо б), то $\pi < (\tau_{k_2}, \tau_{k_3}) < 2\pi$, и "*схема знаков*" — $(-;-;+)$. В общих случаях "*схема знаков*" гарантирует выполнение D_1^{**}, что легко установить с помощью (20).

$D_1^{**} \Rightarrow D_1^*$. Если выполняется D_1^{**}, то треугольник $\Delta\tau_{k_1}\tau_{k_2}\tau_{k_3}$ имеет "*схему знаков*"$(+;+;-)$ или $(-;-;+)$ отсюда следует, что треугольник остроугольный, так как предположение о том, что он тупоугольный, дает "*схему знаков*" , отличную от указанных. Остается заметить, что свойство D_1^* и "*схема знаков*" остроугольного треугольника не изменятся при изменении нумерации чисел $\alpha_s(\mu)$ и связанных с ним определителей $\Delta_{k_1k_2}$ и точек τ_{k_j}. Это проверяется непосредственно.

Таким образом, из леммы П.1 [3] следует, что $D_1^* \sim D_1^{**}$. Лемма доказана. $\square$

Как следует из [5], при $\mu = \mu_0$ в большинстве случаев РДС (18) обладает семейством решений вида

$$V_0 = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s^0 \omega_{sn}, \quad \omega_{sn} = y_{sn}\bar{y}_{sn}, \quad \gamma_s^0 = \mathrm{const}. \tag{21}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости систем (18) при $\mu = \mu_0$ служит наличие среди решений (21) знакоопределенных. В случае неустойчивости все решения (21) знакоперемены. Лишь при $l = 2$ в случае B^* РДС неустойчива и не имеет решений вида (21). Для существования среди решений (21) знакоопределенных необходимо и достаточно выполнение условия $D(\mu_0)$ и $C_2^*(\mu_0)$. В случае неустойчивости B^* среди решений (21) имеются знакопостоянные.

Рассмотрим матрицу M. Из равенства $\Delta_{k_j k_l} = \left[\alpha_{k_j}\alpha_{k_l}\right] \sin\left(\tau_{k_l} - \tau_{k_j}\right)$ следует, что при выполнении условий $D, C_2^* B^*$ имеем $\operatorname{rank} M(\mu) = 2$, в остальных случаях $\operatorname{rank} M(\mu) = 1$.

Теорема 2. *Если в области G матрица C сохраняет ранг и число отличных от нуля компонент векторов $a(\mu) = (a_1(\mu), a_2(\mu), \ldots, a_n(\mu))$ или $b(\mu) = (b_1(\mu), b_2(\mu), \ldots, b_n(\mu))$, превосходит ранг матрицы M, то система* (18) *имеет семейство непрерывных по μ решений*

$$V(\mu, \omega_n) = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s(\mu)\, \omega_{sn}, \qquad \mu \in G, \qquad V(\mu_0, \omega_n) = V_0. \tag{22}$$

Для того, чтобы среди них имелись знакоопределенные в G, необходимо и достаточно выполнение условий $D^*(\mu)$ или $C_2^*(\mu)$.

Доказательство. Прежде всего, можно убедиться, что предположения о ранге матрицы выполняется, если выполнены условия $D(\mu_0), B^*(\mu_0)$. При выполнении условий $C_1^*(\mu_0), C_2^*(\mu_0)$ из этого предположения следует выполнение условий $C_1^*(\mu), C_2^*(\mu)$, поскольку возможный переход случаев C_1^*, C_2^* в D, B^* при $\mu = \mu_0$ связан с изменением ранга матрицы M. Вычислим первую разность ΔV_n в силу (18)

$$\Delta V_n = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s |\alpha_s| \sin(\omega - \psi_s)\, r_n^{1/2}.$$

Если $\Delta V_n = 0$, то V_n будем называть решением (18). Разыскивая решение (18) в виде (22), получим, что параметры γ_s должны удовлетворять системе уравнений

$$M \cdot \gamma = 0, \tag{23}$$

имеющей ненулевые решения, если $m > \operatorname{rank} M$. В связи с этим отметим, что $\operatorname{rank} M = 1$ в случае C и подслучае C_1^*, в остальных случаях $\operatorname{rank} M = 2$. Общее решение (23) можно записать в виде

$$\gamma_{s1} = \Delta_{s_1 s_2}^{-1} \left(\Delta_{s_2 s_3} \gamma_{s_3} + \Delta_{s_2} \gamma_3\right) \;\; \gamma_{s_2} = \Delta_{s_1 s_2}^{-1} \left(\gamma_{s_3} \Delta_{s_2 s_1} + \Delta_{s_2} \gamma_3\right), \tag{24}$$

где s_1, s_2 выбраны так, что выполнены условия в скобках, компоненты вектора $\gamma' \gamma_{s_3}$ — свободные параметры решения. Если выполняются условия $D(\mu_0)$, то существуют такие k_1, k_2, k_3, для которых в точке μ_0 справедливо соотношение D_1^*, сохраняющееся и в области G. Из (24) непосредственно следует, что положительные решения системы (23) существуют только при выполнении условия D_1^*. Значения свободных параметров, дающих строго положительные решения системы, должны удовлетворять условиям

$$\gamma_k > 0 \left(k \neq k_1, k_2, k_3\right), \; \gamma_{k_3} > \max \left\{ \frac{\Delta_{k_2 \rho}}{\Delta_{k_2 k_3}}, \frac{\Delta_{k_1 \rho}}{\Delta_{k_3 k_1}}, 0 \right\}. \tag{25}$$

При выполнении $C_2^*(\mu_0)$ соотношения D_1^* нарушаются при любом выборе k_1, k_2, k_3, и среди решений системы (23) нет строго положительных, а среди (22) — знакопеременных (при выполнении $C_2^*(\mu_0)$ все решения системы (22) знакопеременные). Пусть теперь $\operatorname{rank} M = 1$. Считая, для определенности, $\gamma(\mu) \neq 0$, вместо системы (23) рассмотрим уравнение

$$M \gamma^* = 0. \tag{26}$$

Если выполняется условие $C_2^*(\mu_0)$, то хотя бы для одной пары коэффициентов $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_1}$ в точке μ_0 выполняется равенство

$$\operatorname{sign} a_{k_1} b_{k_2} = -1, \tag{27}$$

сохраняющееся в G. Общее решение системы (26) при условии (27) имеет вид

$$\gamma_k^* = -(\gamma_{k_1}^*)^{-1} \Big(a_{k_2} \gamma_{k_2}^* + \sum_{k \neq k_1 k_2} \gamma_k^* a_k \Big). \tag{28}$$

Выбирая $\gamma_k^* \, (k \neq k_1)$ согласно условию

$$\gamma_k^* > 0 \, (k \neq k_1 k_2) \, , \; \gamma_{k_1}^* > \max \left\{ - \sum_{k \neq k_1 k_2} \gamma_k^* a_k, 0 \right\} ,$$

получим строго положительное решение уравнения (22). При выполнении условия C_1^*, условие (27) нарушается для k_1, k_2, и уравнение (26) не имеет положительного решения. Тем самым теорема доказана. $\square$

4 Сильная устойчивость. Бифуркация

Наряду с системой (17) будем рассматривать РДС вида

$$y_{n+1} = \Lambda \, (\mu) \, y_n + y_n \sum_{|p|=L} \alpha^{(p)} \omega_n^p + O_\mu \left(|y_n|^{2L+2} \right). \tag{29}$$

РДС (29) получается при обычной нормализации РДС (3) в области G^* и является эквивалентной системе (3) в области G^*. Как следует из п. 2 коэффициенты α^p в системах (16) и (29) при $L \geq 2$ совпадают. Следует отметить, что если в системе (17) O_μ непрерывны в G, то в системе (29) $O_\mu \to \infty$ при $\mu \to \mu_0$ за счет коэффициента при членах порядка $2L-1$. При $|l| = 2$ этим свойством обладают уже коэффициенты $\alpha^{(p)} \, (|p| = 1)$, в связи с чем (29) будет семейством вида (22). Вычисляя первую разность функции V_n в силу РДС (16) и учитывая, что V_n — решение РДС (18), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta V_n = 2 \sum_{|p|=L} \left(\gamma \, (\mu) \, , \mathrm{Re} \, \alpha^{(p)} \mathrm{Re} \, \Lambda \, (\mu) + \mathrm{Re} \, \alpha^{(p)} \mathrm{Re} \, \Lambda \, (\mu) \right) \omega_n^{p+\delta_s} + \\ + O \left(|y_n|^{2L+3} \right) = [\Delta V_n] + O. \end{aligned} \tag{30}$$

Если форма $[\Delta V_n]_{\mu=\mu_0}$ $(2L+2)$-го порядка в конусе $\omega_n \geq 0$ знакоопределенная, то в достаточно малой окрестности $\mu_0 \in G$, то есть в $G^*, \Delta V_n$ будет знакоопределенной. Обозначим через C_0 множества тех векторов $\gamma \, (\mu_0)$, для которых форма $[\Delta V_n]_{\mu=\mu_0}$ определенно-отрицательна (ясно, что C_0 может быть и $\emptyset$). Обозначим через W_0 множество решений системы (23) при $\mu = \mu_0$, а через W_0^+ — множество положительных решений. Заметим, что $W_0^+ \neq \emptyset$ при выполнении условий $D \, (\mu_0)$ и C_2^*.

Теорема 3. *Пусть система* (17) *такова, что*

1) *при* $\mu \in G^*$ $\operatorname{rank} M$ *сохраняется*;

2) $C_0 \neq \emptyset$.

Система (17) *сильно асимптотически устойчива в точке* μ_0, *если а) выполняются условия* $D(\mu_0)$ *или* $C_0^*(\mu_0)$ *и* $C_0 \bigcap W_0^+ \neq \emptyset$. *Система* (17) *сильно неустойчива в точке* μ, *если б) выполняется одно из условий* $D(\mu)$ *или* $C_2^*(\mu)$ *и* $C_0 \bigcap \left(W_0 \backslash W_0^+\right) = \emptyset$.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 1 и теорем второго метода Ляпунова [1]. Рассмотрим, например, случай а). Из условия 2) следует, что существует вектор γ^0, такой, что форма $[\Delta V_n]_{\mu=\mu_0}$ определенно отрицательная, условие а) гарантирует существование в семействе (22) знакоопределенного решения V_0 РДС (18), первая разность которого в силу (17) будет определенно-отрицательной (что определяется формой $[\Delta V_n]_{\mu=\mu_0}$). Условие 1) и теорема 1 позволяют утверждать существование непрерывной по μ функции Ляпунова, удовлетворяющей в каждой точке области G условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Аналогично рассматривается случай б), в котором используется знакопеременное решение $V(\mu, \omega_n)$ системы (18). □

Литература

1 Бромберг П.В. Устойчивость и автоколебания теории релейно-импульсного регулирования. — М.: Оборонгиз., 1953. — 323 с.

2 Арнольд В.И. О матрицах, зависящих от параметра // УМН. — 1974. — Т. 26, вып. 2. С. 101–114.

3 Гольцер Я.М. Об устойчивости нейтральной неподвижной точки автономных отображений при резонансе // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15, № 12. — С. 2130–2141.

4 Бопаев К.Б. Нормализация систем нелинейных разностных уравнений. — 1995. — Алматы-Новосибирск, Препринт № 1. — 67 с.

5 Бопаев К.Б. Устойчивость решения системы нелинейных разностных уравнений в одном критическом случае. — 1995. Препринт № 2. Алматы-Новосибирск, 1995. — 46 с.

6 Бопаев К.Б. Устойчивость дискретных систем в критическом случае

// Доклады РАН. — 1996. Т. 349, № 4. — С. 442–445.

7 Бопаев К.Б. Устойчивость систем разностных уравнений в критическом случае при наличии резонанса и в случаях, близких к критическим. — Препринт № 3, Алматы-Новосибирск, 1995. — 64 с.

8 Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 254 с.

9 Бопаев К.Б. Нысамбаев Ж.Н. О структуре разностных уравнений // Сборник научых статей Талдыкорганского научного центра ИА РК. Препринт № 14. — 1995. — С. 1–6.

10 Schroder E. Ueber iteri'rte Functionen // Math. Ann. — 1871. — V. 3. — P. 303.

Literatura

1 Bromberg P.V. Ustoychivost' i avtokolebaniya teorii releino-impul'snogo regulirovaniya. — M.: Oborongiz., 1953. — 323 s.

2 Arnol'd V.I. O matritcah, zavisyashih ot parametra // UMN. — 1974. — T. 26, vyp. 2. C. 101–114.

3 Gol'cer Ja.M. Ob ustoychivosti neitral'noy nepodvizhnoy tochki avtonomnyh otobrazheniy pri rezonanse // Differencial'nye uravneniya. — 1979. — T. 15, № 12. — S. 2130–2141.

4 Bopaev K.B. Normalizatciya sistem nelineinyh raznostnyh uravneniy. — 1995. — Almaty-Novosibirsk, Preprint № 1. — 67 s.

5 Bopaev K.B. Ustoychivost' resheniya sistemy nelineinyh raznostnyh uravneniy v odnom kriticheskom sluchae. — 1995. Preprint № 2. Almaty-Novosibirsk, 1995. — 46 s.

6 Bopaev K.B. Ustoychivost' diskretnyh sistem v kriticheskom sluchae // Doklady RAN. — 1996. T. 349, № 4. — S. 442–445.

7 Bopaev K.B. Ustoychivost' sistem raznostnyh uravneniy v kriticheskom sluchae pri nalichii rezonansa i v sluchayah, blizkih k kriticheskim. — Preprint № 3, Almaty-Novosibirsk, 1995. — 64 s.

8 Bryuno A.D. Lokal'nyi metod nelineinogo analiza differencial'nyh uravneniy. — M.: Nauka, 1979. — 254 s.

9 Bopaev K.B. Nysambaev Zh.N. O strukture raznostnyh uravneniy // Sbornik nauchyh statei Taldykorganskogo nauchnogo centra IA RK. Preprint № 14. — 1995. — S. 1–6.

10 Schroder E. Ueber iteri'rte Functionen // Math. Ann. — 1871. — V. 3. — P. 303.

Статья поступила в редакцию 25.11.13

Бапаев К.Б. ПАРАМЕТРЛІ АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕНІҢ РЕЗОНАНС ЖАҒДАЙДАҒЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Параметрден үздіксіз тәуелді болатын сызықты емес айырымдық-динамикалық жүйелер (АДЖ) дүдәмәл жағдайда үздіксіз нормалдау әдісі негізінде зерттеледі. АДЖ-дің орнықтылығының сипаты параметрдің оқшауланған мәндерінің аймағында сақталғанда күшті орнықтылық туралы есеп қойылады. Тақ ретті резонанс үшін күшті асимптоталық орнықтылық пен орнықсыздық шарттары алынған.

Bapaev K.B. ON THE STABILITY OF THE DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS WITH THE PARAMETER IN THE PRESENCE OF RESONANCE

On the basis of the method of continuous normalization the nonlinear difference dynamical systems (DDS) continuously depending on a parameter are studied in the critical case. There is set the problem of the strong stability, when the stability of DDS in isolated neighborhood of parameter values are preserved. For odd order resonance there are obtained the conditions of strong asymptotic stability and instability.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. №2 (52). С.66–75*

УДК 517.51

V.I. Burenkov, M. Lanza de Cristoforis, N.A. Kydyrmina

L.N. Gumilyov Eurasian National University
010008, Astana, Munaitpasov st., 5, e-mail: burenkov@cf.ac.uk

Dipartimento di Matematica, University of Padova
35121, Italy, Padova, via Trieste 63, e-mail: mldc@math.unipd.it

Institute of Applied Mathematics of CS of MES of RK
100028, Karaganda, Universitetskaya st., 28a, e-mail: nurgul-k@mail.ru

APPROXIMATION BY C^∞ FUNCTIONS IN MORREY SPACES

In this paper we consider a variant of Morrey space, which coincides with the classical Morrey space for bounded sets. Since we cannot approximate every element of this space by smooth functions, we define a specific subspace of the Morrey space, which we call the "little" Morrey space. Then functions in the "little" Morrey space can be approximated by smooth functions.
Keywords: *Morrey spaces, approximation.*

1 Morrey spaces

Morrey spaces were introduced by C. Morrey in [1]. Here we consider the following variant of Morrey spaces (coinciding with Morrey spaces for bounded sets.

Keywords: *Morrey spaces, approximation*
2010 Mathematics Subject Classification: 46E35

Definition 1. *Let Ω be a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^n$. Let $1 \le p \le +\infty$, $0 \le \lambda \le n/p$ and $w_\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{-\lambda}, & \rho \in]0,1] \\ 1, & \rho \ge 1 \end{cases}$. Denote by $M_p^\lambda(\Omega)$ the space of all real-valued measurable functions on Ω, for which*

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \|w_\lambda(\rho)\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)}\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty,$$

where $B(x,\rho)$ is the open ball of radius $\rho > 0$ centered at the point $x \in \mathbb{R}^n$.

Clearly, $M_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$. Also, $M_p^{n/p}(\Omega) = L_\infty(\Omega)$.

By results in [2], [3] it follows that for $\lambda < 0$ or $\lambda > n/p$ the space $M_p^\lambda(\Omega)$ is trivial, this is consists only of functions equivalent to 0 on Ω.

We find convenient to set

$$|f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} \equiv \sup_{x\in\Omega} \left\|w_\lambda(r)\|f\|_{L_p(B(x,r)\cap\Omega)}\right\|_{L_\infty(0,\rho)} \quad \forall \rho \in]0,+\infty[$$

for all measurable functions f from Ω to $]0,+\infty[$.

Definition 2. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in [1,+\infty]$, $\lambda \in [0,\frac{n}{p}[$. Then we define as the little Morrey space with the exponents λ, p is the subspace*

$$M_p^{\lambda,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^\lambda(\Omega) \, : \, \lim_{\rho\to 0} |f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} = 0 \right\}$$

of $M_p^\lambda(\Omega)$.

Example 1. *Let $0 < \lambda < n/p$. Then*

1) *the function $|x|^\alpha \in M_p^\lambda(B(0,1))$ if and only if $\alpha \ge \lambda - n/p$.*
2) *the function $|x|^\alpha \in M_p^{\lambda,0}(B(0,1))$ if and only if $\alpha > \lambda - n/p$.*

Lemma 1. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,+\infty]$. Let $\lambda \in [0,n/p]$. Then $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$ is a closed proper subspace of $M_p^\lambda(\Omega)$.*

Proof. Let $f \in M_p^\lambda(\Omega)$, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a sequence in $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$, which converges to f in $M_p^\lambda(\Omega)$. We want to prove that $f \in M_p^{\lambda,0}(\Omega)$.

Let $\varepsilon > 0$. Since $f_j \to f$ as $j \to \infty$, there exists $N_1 \in \mathbb{N}$, such that

$$|f - f_k|_{+\infty,\lambda,p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k \ge N_1.$$

By definition 2 there exists $\delta > 0$, such that if $\rho \in]0, \delta[$, then

$$|f_{N_1}|_{\rho,\lambda,p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Since $f = f - f_{N_1} + f_{N_1}$, we have

$$|f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} \leq |f - f_{N_1}|_{+\infty,\lambda,p,\Omega} + |f_{N_1}|_{\rho,\lambda,p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

for all $\rho \in]0, \delta[$. □

Lemma 2. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < \lambda < n/p$. Then $M_p^\lambda(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.*

Proof. Let $f \in M_p^\lambda(\Omega)$. We note that

$$w_\lambda(\rho)\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)} \leq \|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} < \infty \quad \text{for all } (x, \rho) \in \Omega \times]0, +\infty[.$$

Since $w_\lambda(\rho) = 1$ for $\rho \geq 1$, we obtain

$$\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)} \leq \|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} < \infty \quad \text{for all } (x, \rho) \in \Omega \times [1, +\infty[.$$

By taking supremum in $\rho \geq 1$ we get

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)}.$$ □

Corollary. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $1 \leq p \leq +\infty$, $0 < \lambda < n/p$. Then*

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} = \max\left\{ \sup_{x\in\Omega} \sup_{0<\rho<1} \rho^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)},\ \|f\|_{L_p(\Omega)} \right\}.$$

Denote by $C_c^\infty(\Omega)$ the space of infinitely continuously differentiable functions on Ω with compact support.

Definition 3. *If $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ and $t \in]0, +\infty[$, we denote by $\phi_t(\cdot)$ the function from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$ defined by*

$$\phi_t(x) \equiv t^{-n}\phi(x/t) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

LEMMA 3. *Let* $p \in [1, +\infty[$, $0 \leq \lambda < n/p$ *and* $f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$. *Then*

$$\lim_{k\to\infty} f\chi_{B(0,k)} = f \quad \textit{in} \;\; M_p^\lambda(\mathbb{R}^n).$$

Proof. Consider for $0 < \rho \leq 1$ the norm

$$\|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|w_\lambda(r)\|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{L_p(B(x,r))}\|_{L_\infty(0,\infty)} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|w_\lambda(r)\|f\|_{L_p(B(x,r)\setminus B(0,k))}\|_{L_\infty(0,\infty)} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|w_\lambda(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))}\|_{L_\infty(0,\rho)} + \max\{\rho^{-\lambda}, 1\}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B(0,k))} =$$

$$= |f|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n} + \rho^{-\lambda}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B(0,k))}.$$

Let $k \to \infty$, then since $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ (by Lemma 2) and $p < \infty$ we have

$$\lim_{k\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n\setminus B(0,k))} = 0.$$

Therefore, for all $0 < \rho \leq 1$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq |f|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n}.$$

By passing to the limit as $\rho \to 0$, since $f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$, we have

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

or equivalently

$$\lim_{k\to\infty} \|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = 0. \qquad \square$$

2 The main theorem

We denote by $C_{ub}(\Omega)$ the Banach space of uniformly continuous and bounded functions on Ω with the sup norm in Ω.

For an arbitrary nonempty set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we denote by $\mathrm{cl}(\Omega)$ the closure of Ω. Then we have the following result of approximation by convolution.

THEOREM 1. *Let $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Then the following statements hold.*

(i) Let $p \in [1, +\infty]$, $\lambda \in [0, n/p]$. If $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ and $\varepsilon > 0$, then the function $f * \phi_\varepsilon$ from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$ defined by

$$f * \phi_\varepsilon \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

belongs to $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|f * \phi_\varepsilon\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq \|\phi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Let $p \in [1, +\infty]$, $\lambda \in \left[0, \frac{n}{p}\right]$. If $f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$ and $\varepsilon > 0$, then $f * \phi_\varepsilon$ belongs to $M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Let $p \in [1, +\infty[$. If $f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$, then $f * \phi_\varepsilon$ belongs to $M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_{ub}(\mathbb{R}^n)$ for all $\varepsilon \in]0, +\infty[$ and

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \phi_\varepsilon = f \quad in \;\; M_p^\lambda(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

(iv) Let $p \in [1, +\infty[$. Then

$$\mathrm{cl}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Proof. (i) Let $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ and $\varepsilon > 0$, then

$$w_\lambda(\rho)\|f * \phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,\rho))} \leq w_\lambda(\rho) \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi - y)\phi_\varepsilon(y)dy \right\|_{L_{p,\xi}(B(x,\rho))} \leq$$

$$\leq w_\lambda(\rho) \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \|f(\xi - y)\|_{L_{p,\xi}(B(x,\rho))} |\phi_\varepsilon(y)|dy =$$

$$= w_\lambda(\rho) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi_\varepsilon(y)|dy \right) \sup_{y \in B(0,\varepsilon)} \|f(\xi - y)\|_{L_{p,\xi}(B(x,\rho))} =$$

$$= w_\lambda(\rho)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|dy\right)\sup_{y\in B(0,\varepsilon)}\|f(z)\|_{L_p(B(x-y,\rho))} =$$

$$= w_\lambda(\rho)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|dy\right)\sup_{z\in B(x,\varepsilon)}\|f\|_{L_p(B(z,\rho))} \le$$

$$\le w_\lambda(\rho)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(y)|dy\right)\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\|f\|_{L_p(B(z,\rho))} \quad \text{for all } \ \rho\in]0,+\infty[.$$

Thus, we have

$$\|f*\phi_\varepsilon\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi|dx\right)\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, f\in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Let $f\in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$ and $\varepsilon>0$. In the proof of statement (i) we have proved that

$$w_\lambda(r)\|f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \le$$
$$w_\lambda(r)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(x)|dx\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|f\|_{L_p(B(x,r))} \quad \text{for all } \ r\in]0,+\infty[.$$

Moreover,

$$w_\lambda(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))} \le |f|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\ r\in]0,\rho[,$$

and thus, by taking the supremum on $x\in\mathbb{R}^n$, we have

$$w_\lambda(r)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|f\|_{L_p(B(x,r))} \le |f|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n} \quad \forall\, r\in]0,\rho[.$$

Hence,

$$\sup_{r\in]0,\rho[} w_\lambda(r)\|f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(x)|dx\right)|f|_{\rho,w,p,\mathbb{R}^n},$$

and
$$\lim_{\rho\to 0} |f*\phi_\varepsilon|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall\, f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Let $\eta > 0$. Since $f \in M_p^{\lambda,0}$, there exists $\rho_\eta > 0$ such that
$$|f|_{\rho,\lambda,p,\mathbb{R}^n} \le \eta \left(1 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy\right)^{-1} \qquad \forall\, \rho \in]0,\rho_\eta].$$

Then we have
$$\sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times]0,\rho_\eta[} w_\lambda(r)\|f - f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \le$$
$$\le \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times]0,\rho_\eta[} w_\lambda(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))} + \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times]0,\rho_\eta[} w_\lambda(r)\|f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \le$$
$$\le |f|_{\rho_\eta,\lambda,p,\mathbb{R}^n} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy\right) |f|_{\rho_\eta,\lambda,p,\mathbb{R}^n} =$$
$$= |f|_{\rho_\eta,\lambda,p,\mathbb{R}^n}\left(1 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy\right) \le \eta, \tag{3}$$
for all $\varepsilon \in]0,+\infty[$.

Further, we have
$$\sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times[\rho_\eta,+\infty[} w_\lambda(r)\|f - f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \le$$
$$\le \left(\sup_{r\in[\rho_\eta,+\infty[} w_\lambda(r)\right) \|f - f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{for all } \varepsilon > 0.$$

Since $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ (by Lemma 2) and $p \in [1,+\infty[$ and $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy = 1$, standard properties of approximate identities of convolution imply that
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f - f*\phi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Thus, there exists $\varepsilon_\eta > 0$, such that

$$\left(\sup_{r\in[\rho_\eta,+\infty[} w_\lambda(r)\right) \|f - f * \phi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \eta \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_\eta].$$

So, we obtain

$$\sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times[\rho_\eta,+\infty[} w_\lambda(r)\|f - f * \phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \leq \eta \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_\eta]. \tag{4}$$

By combining inequalities (3) and (4) we have

$$\sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times[0,+\infty[} w_\lambda(r)\|f - f * \phi_\varepsilon\|_{L_p(B(x,r))} \leq \eta \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_\eta].$$

Hence,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = f \quad \text{in} \quad M_p^\lambda(\mathbb{R}^n).$$

(iv) Clearly, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ is contained in $M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$. Since $M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$ is closed in $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$ (by Lemma 1), we obtain

$$\mathrm{cl}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{cl}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n) = M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n).$$

Now let $f \in M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$. Then for all $k \in \mathbb{N}$

$$f\chi_{B(0,k)} * \phi_{\frac{1}{k}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Next, using (i) of Theorem 1, we obtain

$$\begin{aligned}
&\|f\chi_{B(0,k)} * \phi_{\frac{1}{k}} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\qquad \leq \|(f\chi_{B(0,k)} - f) * \phi_{\frac{1}{k}}\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} + \|f * \phi_{\frac{1}{k}} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\qquad\qquad \leq \|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}\|\phi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f * \phi_{\frac{1}{k}} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

By Lemma 3

$$\lim_{k\to\infty} \|f\chi_{B(0,k)} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

and by (iii) of Theorem 1

$$\lim_{k\to\infty} \|f * \phi_{\frac{1}{k}} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

So, we obtain that

$$\lim_{k\to\infty} \|f\chi_{B(0,k)} * \phi_{\frac{1}{k}} - f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Thus, $f \in \mathrm{cl}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and equality (2) holds. $\square$

Remark. *The limiting relation* (1) *does not hold for all* $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$. *For example,*

$$|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} * \phi_\varepsilon \nrightarrow |x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} \quad \text{in } M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$$

as $\varepsilon \to 0$.

Indeed, function $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} * \phi_\varepsilon$ *belongs to* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *If*

$$|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} * \phi_\varepsilon \to |x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} \quad \text{in } M_p^\lambda(\mathbb{R}^n),$$

then by (*iv*) *of Theorem* 1 $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}\chi_{B(0,1)} \in \mathrm{cl}_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = M_p^{\lambda,0}(\mathbb{R}^n)$, *which is not true* (*see Example* 1).

References

1 Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1938. — № 43(1). — P. 126–166.

2 Burenkov V.I., Guliyev H.V. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Math. — 2004. — № 163(2). — P. 157–176.

3 Burenkov V.I, Jain P., Tararykova T.V. On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. — 2011. — № 2(1). — P. 52–80.

Received 01.07.14

Буренков В.И., Ланца де Кристофорис М., Кыдырмина Н.А. МОРРИ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ШЕКСІЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАРМЕН ЖУЫҚТАУ

Бұл жұмыста шектелген жиындарда классикалық Морри кеңістігімен бірдей болатын Морри кеңістігінің бір нұсқасын қарастырамыз. Бұл

кеңістіктің әрбір элементін шексіз дифференциалданатын функциялармен жуықтауға болмайтындықтан, біз осы кеңістіктің ішкі кеңістігін анықтаймыз, оны Морридың "кіші" кеңістігі деп атаймыз. Онда Морридың "кіші" кеңістігінің функцияларын шексіз дифференциалданатын функциялармен жуықтауға болады.

Буренков В.И., Ланца де Кристофорис М., Кыдырмина Н.А. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

В данной работе мы рассматриваем вариант пространства Морри, который совпадает с классическим пространством Морри на ограниченных множествах. Поскольку не каждый элемент этого пространства можно приблизить бесконечно дифференцируемыми функциями, мы определяем подпространство этого пространства, которое назовем "малым" пространством Морри. Тогда функции из "малого" пространства Морри можно приблизить бесконечно дифференцируемыми функциями.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52). С.76–84*

УДК 517.977

С.С. Жуматов

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: sailau.math@mail.ru

КОНВЕРГЕНТНОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача построения устойчивой системы управления, подверженной внешним воздействиям. Найдены достаточные условия конвергентности нелинейных систем непрямого управления в окрестности программного многообразия.
Ключевые слова: *конвергентность, программное многообразие, системы непрямого управления.*

Введение

В работе [1] построено множество систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. Построение таких систем, получило дальнейшее развитие в работах [2–7], как задача построения систем дифференциальных уравнений, для которых гладкое многообразие $\Omega(t)$, определяемое пересечением гиперповерхностей $\omega(t,x) = 0$, где $\omega \in R^s$, $x \in R^n$ $(s \leq n)$ — векторы, является интегральным. Построению систем автоматического управления по заданному многообразию, когда нелинейность является скалярной, посвящены работы [3–7].

Заданная программа $\omega(t,x) = 0$ точно выполняется лишь при условии, если начальные значения вектора состояния системы удовлетворяют равенству $\omega(t_0, x_0) = 0$. Но эти равенства не всегда могут быть выполнены.

Keywords: *convergentnees, program manyfold, indirect control systems*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29

Поэтому при построении систем программного движения, на программное многообразие накладываются дополнительные условия, такие как устойчивость, оптимальность, конвергентность, а также другие требования на качество переходного процесса.

В работах [8–10] исследовались свойства конвергентности нелинейных систем дифференциальных уравнений и систем автоматического управления в окрестности нулевого положения равновесия. Конвергентность основных нелинейных систем управления в окрестности программного многообразия рассмотрена в [11].

В настоящей статье исследуются качественные свойства программного многообразия нелинейных систем непрямого управления. Строятся дифференциальные системы заданной структуры по заданному программному многообразию. Рассматривается задача построения устойчивой системы управления, подверженной внешним воздействиям. Найдены достаточные условия конвергентности нелинейных систем непрямого управления в окрестности программного многообразия.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу построения устойчивой системы управления следующей структуры, подверженной внешним воздействиям:

$$\dot{x} = f\left(t,x\right) - B_1\xi - g\left(t\right), \ \dot{\xi} = \varphi\left(\sigma\right), \ \sigma = P^T\omega - R_1\xi, \ t \in I = [0, \ \infty), \quad (1)$$

по заданному $(n-s)$-мерным гладким интегральным многообразием $\Omega\left(t\right)$, определяемым векторным уравнением

$$\omega\left(t, \ x\right) = 0, \quad (2)$$

где $B_1 \in R^{n\times r}, \ P \in R^{s\times r}, \ (R_1 > 0) \in R^{r\times r}$ — матрицы, $x \in R^n$ — вектор состояния объекта, $f \in R^n$ — вектор-функция, $g \in R^s$ — вектор внешних возмущений, $\omega \in R^s$ — вектор, $s \leq n$, $\xi \in R^r$ — вектор-функция управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющая условиям локальной квадратичной связи в угле $[0, \ K]$

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge \ 0 < \sigma^T\varphi(\sigma) \leq \sigma^T K\sigma\,;$$
$$K = \mathrm{diag}\left\|k_1,\ldots,k_r\right\|, \quad K = K^T > 0, \quad (3)$$

и дифференцируемая по σ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ удовлетворяет условию

$$N_1 \le \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} \le N_2, \quad N_i = \operatorname{diag}\|n_1, \dots, n_r\| \quad (i = 1, 2), \quad N_2 >> 0. \quad (4)$$

В пространстве R^n выделим область $G(R)$:

$$G(R) = \{(t, x) : t \in I \wedge \|\omega(t, x)\| \le \rho < \infty\}. \quad (5)$$

Учитывая необходимое и достаточное условия того, что многообразие Ω будет интегральным для системы (1), имеем

$$\dot\omega = F(t, x, \omega) - B\xi - Hg(t), \quad B = HB_1; \quad \dot\xi = \varphi(\sigma),$$
$$\sigma = P^T\omega - R_1\xi, \quad H = \frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Здесь $F(t, x, \omega)$ — вектор-функция Еругина, удовлетворяющая условию $F(t, x, 0) \equiv 0$. Полагая, что $F = -A\omega$, $-A \in R^{s\times s}$ — гурвицева матрица, получим

$$\dot\omega = -A\omega - HB\xi - Hg(t), \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R_1\xi. \quad (6)$$

Определение 1. *Будем говорить, что программное многообразие* $\Omega(t)$ *обладает свойством конвергенции относительно вектор-функции* ω, *если в области* (5) *определены все* $\omega(t, t_0, \omega_0)$ *при* $t \ge t_0$ *и существует единственное решение* $\eta(t)$ *начальной задачи для системы уравнений* (6), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t, t_0, \omega_0) - \eta(t) = 0.$$

Определение 2. *Будем говорить, что программное многообразие* $\Omega(t)$ *обладает свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функций* ω *и* ξ *при* $t \to \infty$, *если в области* (5) *существуют* $N > 0$, $\alpha > 0$ *такие, что выполняется неравенство*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \le N\|z_1(t_0) - z_2(t_0)\| \exp[-\alpha(t - t_0)] \quad (t \ge t_0), \quad (7)$$

для любой $\omega(t_0, x_0)$ *и* $\varphi(\sigma)$, *удовлетворяющей условиям* (3), (4), *где* $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$.

Ставится задача: установить условия конвергентности программного многообразия $\Omega\,(t)$ нелинейных систем непрямого управления относительно вектор-функции ω и ξ.

Теорема. *Пусть линеаризованная система* (6) *асимптотически устойчива при нелинейной функции* $\varphi(\sigma)$, *удовлетворяющей условию* (3), (4) *и для* $\varphi(\sigma)=\mu\sigma,\ \mu\in[0,\ K]$ *существует положительноопределенная функция* $V(\omega,\ \xi)>0$, *производная которой в силу системы* (6) *является отрицательноопределенной* $(-\dot V=W(\omega,\ \xi)>0)$ *и для произвольного* $t\ge t_0$ *выполняется соотношение* (7).

Тогда программное многообразие $\Omega\,(t)$ *обладает свойством экспоненциальной конвергентности относительно вектор-функций* ω *и* ξ.

Доказательство. Рассматриваются два произвольных решения системы (7) $\omega_1(t),\ \omega_2(t),\ \xi_1(t)$ и $\xi_2(t),\ \sigma_1(t),\ \sigma_2(t)$.

Введя следующие переменные:

$$\varpi=\omega_1\,(t)-\ \omega_2\,(t)\,,\ \ \zeta=\xi_1\,(t)-\xi_2\,(t)\,,\ \ \gamma=\sigma_1\,(t)-\sigma_2\,(t)\,, \tag{8}$$

систему (6) преобразуем к виду

$$\dot\varpi=-A\varpi-HB\zeta,\quad \dot\zeta=\psi(\gamma),\quad \gamma=P^T\varpi-R_1\zeta\,. \tag{9}$$

Система (9) рассматривается как линейная часть некоторой системы, когда отношение входа и выхода нелинейной части удовлетворяют условиям

$$N_1\le\frac{\zeta(t)}{\gamma(t)}\le N_2\quad \text{при}\quad \gamma(t)\ne0.$$

Возьмем две сферы

$$\|z(t_0)\|^2=\|\omega(t_0)\|^2+\|\xi(t_0)\|^2=R^2,$$

$$\|z(t_0^*)\|^2=\|\omega(t_0^*)\|^2+\|\xi(t_0^*)\|^2=\varepsilon^2,\quad R>>\varepsilon.$$

Для системы (9) $\forall\ z_0$ на сфере R существует момент времени $t=t_0^*$, при котором справедливы соотношения

$$\|z(t_0^*,t_0,z_0)\|=\varepsilon,\quad \|z(t_0,t_0,z_0)\|<\varepsilon\quad \forall\ t>t_0^*.$$

Пусть выполняется $t^* = \sup\limits_{z_0} t_0^*$.

Для системы (9) строим функцию Ляпунова

$$V(\varpi,\ \zeta) = \varpi^T L_0 \varpi + 2\varpi^T L_1 \zeta + \zeta^T L_2 \zeta + \int\limits_0^\gamma \varphi^T \beta d\gamma > 0, \tag{10}$$

где

$$L = \left\| \begin{array}{cc} L_0 & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{array} \right\| > 0, \quad \beta = \mathrm{diag}\|\beta_1, \ldots, \beta_r\| > 0.$$

Производная этой функции по времени t, в силу системы (9) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} -\dot{V} = \varpi^T G_0 \varpi + 2\varpi^T G_1 \zeta + \zeta^T g \zeta + \\ +2\varpi^T G_2 \psi(\gamma) + 2\zeta^T G_2 \psi(\gamma) + \psi^T \rho \psi > 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$G_0 = A^T L_0 + L_0 A; \quad G_1 = L_0 B + A^T L_1; \quad g = B L_1 + L_0 B^T;$$

$$G_2 = -L_1 + \frac{1}{2} A^T P \beta; \quad G_3 = -L_2 + B^T P \beta; \quad \rho = \beta R_1;$$

$$G = \left\| \begin{array}{ccc} G_0 & G_1 & G_2 \\ G_1^T & g & G_3 \\ G_2^T & G_3^T & \rho \end{array} \right\| > 0.$$

На основании свойств (3) и (4) и структуры обратной связи γ справедливы следующие оценки:

$$\begin{array}{l} 0 < \int\limits_0^\gamma \varphi^T \beta d\gamma < \dfrac{\beta_1 n_1}{2} \|\gamma\|^2; \quad 0 < \|\psi\|^2 < k_1 \|\gamma\|^2; \\ \rho_1 \|\varpi\|^2 + \nu_1 \|\zeta\|^2 \le \|\gamma\|^2 \rho_2 \|\varpi\|^2 + \nu_2 \|\zeta\|^2, \end{array} \tag{12}$$

где $k_1 = \min\{k_i\}$, $\beta_1 = \{\beta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$; k_i — собственные числа матрицы K, а ρ_1, ρ_2 и ν_1, ν_2 определяются так:

$$\rho_1 = \min_{\varpi \neq 0} \frac{\varpi^T P P^T \varpi}{\varpi^T \varpi}; \quad \rho_2 = \max_{\varpi \neq 0} \frac{\varpi^T P P^T \varpi}{\varpi^T \varpi};$$

$$\nu_1 = \min_{\varpi \neq 0} \frac{\zeta^T R R^T \zeta}{\zeta^T \zeta}; \quad \nu_2 = \max_{\varpi \neq 0} \frac{\zeta^T R R^T \zeta}{\zeta^T \zeta} \ .$$

В силу положительной определенности V (см. (10)) и $-\dot{V}$ (см. (11)) с учетом оценок (12) имеют место соотношения

$$\lambda_1(\|\varpi\|^2 + \|\zeta\|^2) \leq V \leq \lambda_2(\|\varpi\|^2 + \|\zeta\|^2), \tag{13}$$

$$g_1(\|\varpi\|^2 + \|\zeta\|^2) \leq -\dot{V} \leq g_2(\|\varpi\|^2 + \|\zeta\|^2). \tag{14}$$

Здесь

$$\lambda_1 = \min\left\{l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_1;\ l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_1\right\},$$

$$\lambda_2 = \max\left\{l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_2;\ l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_2\right\},$$

$$g_1 = \min\{1 + k - 1\rho_1;\ 1 + k_1\nu_1\},$$

$$g_2 = \max\{1 + k - 1\rho_2;\ 1 + k_1\nu_2\},$$

где l_1, l_2, и g_1, g_2 — наименьшие и наибольшие значения собственных чисел матриц L и G соответсвенно.

Пусть $\|z\|^2 = \|\varpi\|^2 + \|\zeta\|^2$. Тогда принимая во внимание соотношения (13) и (14), получим оценки

$$\eta_2^{-1} V_0 \exp \alpha_1(t - t_0) \leq \|z\|^2 \leq \eta_1^{-1} V_0 \exp \alpha_2(t - t_0), \tag{15}$$

где

$$V_0 = z_0^T L z_0 + \int\limits_0^{\gamma_0} \varphi^T \beta d\gamma; \quad z_0 = z(t_0); \quad \gamma_0 = \gamma(t_0);$$

$$\alpha_1 = -\frac{g_2}{\lambda_1}; \quad \alpha_2 = -\frac{g_1}{\lambda_2}.$$

Откуда учитывая соотношения (13), будем иметь

$$\|z(t)\|^2 \leq \eta_2 \eta_1^{-1} \|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t - t_0)$$

или

$$\|z(t)\| \leq N \|z(t_0)\| \exp \alpha(t - t_0) \quad t \geq t_0, \tag{15}$$

где $N = \sqrt{\eta_2 \eta_1^{-1}} \quad \alpha = \alpha_2/2$.

Следовательно, $\Omega(t)$ асимптотически устойчиво в целом относительно вектор-функции ω, когда нелинейность $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям (3), (4), и оно экспоненциально устойчиво. Система (9) имеет единственное решение в окрестности программного многообразия в силу неравенства (15). Таким образом программное многообразие $\Omega(t)$ автоматических систем непрямого управления экспоненциально конвергентна.

Заметим, что на основании оценок на сфере выполняется неравенство

$$\|z(t)\|^2 \leq \eta_2 \eta_1^{-1} \|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t - t_0). \tag{16}$$

При $t = t_0^*$ из (16) получаем

$$\eta_2 \eta_1^{-1} \|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t_0^* - t_0) = \varepsilon^2,$$

откуда следует условие быстродействия регулятора [7]

$$t_g = t_0^* - t_0 = -\alpha_2^{-1} \sup_R \ln \frac{R^2 \eta_2}{\varepsilon^2 \eta_1} \ ,$$

где t_g — заданное время.

Литература

1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — 1952. — Т.16, №6. — С. 653–670.

2 Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета дружбы народов. — 1994. — №1. — С. 5–21.

3 Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. I, №5. — С. 846–856.

4 Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. II, №6. — С. 1037–1048.

5 Мухаметзянов И.А., Саакян А.О. Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообразий // В кн: Проблемы механики управляемого движения. — Пермь. — 1979. — С. 137–144.

6 Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. — Алма-Ата: Наука, 1980. — 316 с.

7 Жуматов С.С., Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управление движением. – Алматы: Fылым, 1999. — 228 с.

8 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

9 Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 368 с.

10 Якубович В.А. Методы теории абсолютной устойчивости // В кн: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — С. 74–180.

11 Жуматов С.С. Конвергентность нелинейных систем управления в окрестности программного многообразия // Труды X Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление: Т.2, Секция 2. Устойчивость" , посв. 110-летию Н. Г. Четаева (Казань, 12 – 16 июня 2012). Казань: Из-во КГТУ, 2012. — С. 238–247.

Literatura

1 Erugin N.P. Postroenie vsego mnozhestva sistem differencial'nyh uravneniy, imejushhih zadannuju integral'nuyu krivuyu // PMM. — 1952. — T.16, № 6. — S. 653–670.

2 Galiullin A.S., Muhametzyanov I.A., Muharlyamov R.G. Obzor issledovaniy po analiticheskomu postroeniyu sistem programmnogo dvizheniya // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. — 1994. — № 1. — S. 5–21.

3 Muhametzyanov I.A. Ob ustoychivosti programmnogo mnogoobraziya // Differencial'nye uravneniya. — 1973. — T.I, № 5. — S. 846–856.

4 Muhametzyanov I.A. Ob ustoychivosti programmnogo mnogoobraziya // Differencial'nye uravneniya. — 1973. — T. II, № 6. — S. 1037–1048.

5 Muhametzyanov I.A., Saakyan A.O. Nekotorye dostatochnye usloviya absolyutnoi ustoychivosti nelineinyh integral'nyh mnogoobraziy // V kn:

Problemy mehaniki upravlyaemogo dvizheniya. — Perm'. — 1979. — S. 137–144.

6 Maigarin B.Zh. Ustoychivost' i kachestvo processov nelineinyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. — Alma-Ata: Nauka, 1980. — 316 s.

7 Zhumatov S.S., Krementulo V.V., Maigarin B.Zh. Vtoroy metod Lyapunova v zadachah ustoichivosti i upravlenie dvizheniem. – Almaty: Gylym, 1999. — 288 s.

8 Demidovich B.P. Lektcii po matematicheskoy teorii ustoychivosti. — M.: Nauka, 1967. — 472 s.

9 Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebaniy. — M.: Nauka, 1964. — 368 s.

10 Yakubovich V.A. Metody teorii absolyutnoy ustoychivosti // V kn: Metody issledovaniya nelineinyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. — M.: Nauka, 1975. — S. 74–180.

11 Zhumatov S.S. Konvergentnost' nelineinyh sistem upravleniya v okrestnosti programmnogo mnogoobraziya // Trudy H Mezhdunarodnoy Chetaevskoy konferentcii "Analiticheskaya mehanika, ustoychivost' i upravlenie: T.2, Sektciya 2. Ustoychivost'" , posv. 110-letiyu N. G. Chetaeva (Kazan', 12 – 16 iyunya 2012). Kazan': Iz-vo KGTU, 2012. — S. 238–247.

Статья поступила в редакцию 12.03.14

Жұматов С.С. ТУРА ЕМЕС БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ КӨПБЕЙНЕСІНІҢ КОНВЕРГЕНТТІГІ.

Сыртқы әсерге ұшыраған орнықты басқару жүйелерін тұрғызу есебі қарастырылады. Бағдарламалық көпбейне маңайында тура емес сызықсыз басқару жүйелерінің конвергенттігінің жеткілікті шарттары алынды.

Zhumatov S.S. CONVERGENTNESS OF PROGRAM MANYFOLD OF INDIRECT CONTROL SYSTEMS

The problem of construction of the stable control systems with extremal influences are considered. The sufficient conditions of the convergentness to nonlinear system of indirect control in the neighborhood of program manyfold are obtained.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и математическая физика", 11–12 апреля 2014 г.

11–12 апреля 2014 г. в Институте математики и математического моделирования была проведена Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и математическая физика", приуроченная ко Дню науки. Конференция была посвящена 75-летию со дня рождения академика НАН РК, доктора физико-математических наук, профессора Станислава Николаевича Харина и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Дулата Сыздыкбековича Джумабаева.

Научная программа конференции включала следующие направления: обыкновенные дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, уравнения математической физики, математическое моделирование, а также другие разделы, связанные с теорией дифференциальных уравнений.

Работа конференции проходила в двух секциях: секция 1 — дифференциальные уравнения, секция 2 — уравнения математической физики. Было представлено более 100 тезисов докладов из Казахстана, Узбекистана, Украины, США. Заслушано 6 пленарных и 57 секционных докладов. В рамках конференции 12 апреля был проведен круглый стол на тему: "Роль метода параметризации в решении краевых задач для дифференциальных уравнений и перспективы его развития".

Доктор физико-математических наук,
профессор *А.Т. Асанова*

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52).*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ДУЛАТ СЫЗДЫКБЕКОВИЧ ДЖУМАБАЕВ
(к 60-летию со дня рождения)

В апреле 2014 года исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Дулату Сыздыкбековичу Джумабаеву.

Джумабаев Дулат Сыздыкбекович родился 11 апреля 1954 года в пос. Кантаги Туркестанского района Южно-Казахстанской области. С 1961 по 1971 гг. учился в средней школе №386 г. Туркестан. В 1971 году поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова на отделение математики. В 1976 году с отличием окончил университет и поступил в аспирантуру Института математики и механики АН КазССР. После завершения аспирантуры в 1979 г. был принят на работу в лабораторию обыкновенных дифференциальных уравнений, которую возглавлял академик АН Казахской ССР, лауреат Государственной премии Казахской ССР Орымбек Ахметбекович Жаутыков.

Д.С. Джумабаев прошел свой трудовой и научный путь, начиная с должности младшего научного сотрудника до заведующего лаборатории дифференциальных уравнений (с 1996 г. по 2012 г.). После реорганизации института является главным научным сотрудником отдела дифференциальных уравнений.

В 1980 г. защитил под руководством академика О.А. Жаутыкова диссертацию на тему "Краевые задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве" на степень кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения в Диссертационном совете Института математики и механики АН КазССР.

Докторская диссертация на тему "Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и их аппроксимация" Джумабаева Д.С. в 1994 г. была защищена в специализированном совете Института математики НАН Украины по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Джумабаев Д.С. ввел определение линеаризатора, обобщающее производную Фреше на неограниченные негладкие операторы и предложил метод доказательства сходимости итерационных процессов для нелинейных уравнений с неограниченным оператором. Это позволило распространить известный метод Ньютона-Канторовича на неограниченные негладкие операторные уравнения и применить его на нелинейные краевые задачи для дифференциальных уравнений. Эти результаты были опубликованы в журнале "Известия АН КазССР. Серия физико-математическая" в 1984 году, №1, 3, и по просьбе Американского математического общества были переведены и опубликованы в журнале "American Mathematical Society Translations" , 1989. V. 142, p. 91–94, p.95–99.

Джумабаев Д.С. получил обобщение и усиление одной теоремы Адамара о разрешимости нелинейных уравнений, позволивший найти новые классы разрешимых нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных уравнений и построить приближенные методы нахождения их решений.

Он разработал метод параметризации исследования и решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью этого метода были установлены коэффициентный критерий однозначной разрешимости линейных краевых задач и разработаны эффективные алгоритмы нахождения их решений, критерий корректной разрешимости линейных нелокальных краевых задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными, критерии разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и предложены алгоритмы нахождения их решений. По исходным данным задач построены эффективные алгоритмы нахождения решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с параметрами и импульсными воздействиями, нагруженных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования изолированного решения рассматриваемых задач.

Им опубликовано более 200 работ, из них около 25 статей изданы в высокорейтинговых журналах с импакт-фактором.

В 1998 г. ему присуждено звание профессора по специальности 01.01.00 – математика.

Под его руководством были защищены 2 докторские и 18 кандидатских диссертаций. В настоящее время он является научным руководителем 2 докторантов в КазНПУ им. Абая и КазНУ им. аль-Фараби.

Он – трехкратный обладатель государственной научной стипендии МОН РК для ученых и специалистов, внесших выдающийся вклад в развитие науки и техники РК (2004-2008 гг.).

Джумабаев Д.С. ведет преподавательскую работу в Казахском национальном университете им. аль-Фараби, Казахском национальном педагогическом университете им. Абая, Международном казахско-турецком университете им. Х.А. Яссави, читает лекции докторантам и магистрантам на английском языке.

В 2004–2005 гг. Джумабаев Д.С. был председателем экспертной комиссии по математике и информатике Комитета по надзору и аттестации в сфере образования и науки МОН РК.

Он является руководителем научных тем по грантовому финансированию, был членом Организационных и Программных комитетов Международных, Республиканских конференций, является членом редакционной коллегии "Математического журнала" Института математики и математического моделирования МОН РК.

В 2005 г. Джумабаев Д.С. был награжден нагрудным знаком Министерства образования и науки РК "За заслуги в развитии науки Республики Казахстан", на Украинском математическом конгрессе в Киеве в 2009 г. за высокие достижения в области дифференциальных уравнений

— золотой медалью Н.Н. Боголюбова, в 2009 г. был награжден премией "Парасат" Национального центра научно-технической информации МОиН РК (диплом третьей степени) в номинации "Наиболее цитируемые авторы в области точных наук Республики Казахстан", в 2014 г. — Дипломом I степени Казахстанского математического общества "За лучшие научные публикации в 2013 году" и Почетной Грамотой Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Сердечно поздравляем Дулата Сыздыкбековича с 60-летием и желаем ему крепкого здоровья, огромного счастья и семейного благополучия, больших успехов в научно-педагогической деятельности.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Основные публикации Д.С. Джумабаева

1 Сходимость итерационных методов для неограниченных операторных уравнений // Математические заметки. — 1987. — Т.41, вып. 5. — С. 637–645. (English transl.: Mathematical Notes. — 1987. — V. 41, №5. — P. 356–361.)

2 On the solvability of Nonlinear Closed Operator Equations // American Mathematical Society Translations (2). — 1989. — V. 142. — P. 91–94.

3 On the Convergence of the Newton-Kantorovich Method for Closed Operator Equations // American Mathematical Society Translations (2). — 1989. — V.142. — P. 95–99.

4 Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29, №1. — С. 50–66. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 29, №1. — P. 34–46.)

5 Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, №3. — С. 388–404. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1990. — Vol.30, №2. — P. 34–45.)

6 Аппроксимация ограниченного решения и экспоненциальная дихотомия на оси // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, №11. — С. 1646–1660. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1990. — V.30, №6. — P. 32–43.)

7 Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики

и математической физики. — 1992. — Т. 32, №1. — С. 13–29. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1992. — V. 32, №1. — P. 10–24.)

8 Оценки аппроксимации сингулярных краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — Т. 38, №11. — С. 1814–1821. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — V. 38, №11. — P. 1739–1746.)

9 Однозначная разрешимость краевых задач с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2002. — Т.42, №11. — С. 1673–1685. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2002. — V. 42, №11. — P. 1609–1621) (соавтор А.Т. Асанова).

10 Ограниченные решения систем гиперболических уравнений и их аппроксимация // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, №8. — С. 1183–1200. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2003. — V. 42, №8. P. 1132–1148) (соавтор А.Т. Асанова).

11 О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. — 2003. — Т. 391, №3. — С. 295–297. (English transl.: Doklady Mathematics. — 2003. — V. 68, №1. — P. 46–49) (соавтор А.Т. Асанова).

12 Однозначная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т.39, №10. — С. 1543–1554. (English transl.: Differential Equations. — 2003. — V. 39, №10. — P. 1414–1427) (соавтор А.Т. Асанова).

13 Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений // Украинский математический журнал. — 2004. — Т. 56, №4. — С. 562–572. (English transl.: Ukrainian Mathematical Journal. — 2004. — V. 56, №4. — P. 682–694) (соавтор А.Т. Асанова).

14 Об ограниченности на полосе решения систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. — 2004. — Т. 395, №2. — С. 157–159. (English transl.: Doklady Mathematics. — 2004. — V. 69, №3. — P. 18–20).

15 Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, №3. — С. 337–346. (English transl.: Differential Equations. — 2005. — V.41, №3. P. 352–363) (соавтор А.Т. Асанова).

16 Ограниченные решения семейств систем дифференциальных уравнений и их аппроксимация // Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — Т. 12, №5. — С. 29–47. (English transl.: J. of Math. Sci. — 2008. — V. 150, №6. — P.

2473–2487).

17 Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, №1. — С. 39–63. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — V. 47, №1. P. 37–61) (соавтор С.М. Темешева).

18 Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, №4. — С. 550–564. (English transl.: Differential Equations. — 2010. — V. 46, №4. — P. 553–567 (соавтор Э.А. Бакирова).

19 Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доповiдi (доклады) НАН Украины. — 2010. — №4. — С. 7–11 (соавтор А.Т. Асанова).

20 Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, №7. С. 1209–1221. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — V. 50, №7. — P. 1150–1161).

21 Необходимые и достаточные условия существования "изолированного" решения нелинейной двухточечной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2012. — Т. 15, №4. — С. 513–528. (English transl.: J. of Math. Sci. — 2013. — V. 94, №4. — P. 341–353) (соавтор С.М. Темешева).

22 Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — V. 402, №1. — P. 167–178 (соавтор А.Т. Асанова).

23 Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, №6. — С. 914–937. (English transl.: Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — V. 53, №6. — P. 736–738.

24 О признаках однозначой разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, №9. — С. 1125–1140. (English transl.: Differential equations. — 2013. — V. 49, №9. — P. 1125–1140) (соавтор Э.А. Бакирова).

25 Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Украинский математический журнал. — 2014. — Т. 66, №8 (в печати).

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 2 (52).*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

СТАНИСЛАВ НИКОЛАЕВИЧ ХАРИН
(к 75-летию со дня рождения)

В декабре 2013 г. исполнилось 75 лет академику НАН РК, доктору физико-математических наук, профессору Станиславу Николаевичу Харину.

Станислав Николаевич родился 4 декабря 1938 года в г. Каскелен Алма-Атинской области. В 1956 г. окончил среднюю школу в г. Воронеж с золотой медалью и в этом же году поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова, который с отличием закончил в 1961 году. В 1961–1964 гг., будучи аспирантом кафедры уравнений математической физики КазГУ, он находился в г. Харькове, где стал заниматься под руководством член-корреспондента АН КазССР Е.И. Кима.

После окончания аспирантуры в 1964 году Станислав Николаевич был направлен на работу в Сектор математики и механики АН КазССР, преобразованный в 1965 году в Институт математики и механики АН КазССР. В 1968 году С.Н. Харин защитил кандидатскую диссертацию, которая была посвящена решению сингулярных интегральных уравнений, связанных с задачами, моделирующими тепловые процессы в электрических контактах. С 1969 г. по 1980 г. С.Н. Харин занимал должность старшего научного сотрудника лаборатории уравнений математической физики, а в 1980–1994 гг. — заместителя директора по научной работе Института математики АН КазССР. В 1990 г. Станислав Николаевич защитил докторскую диссертацию на тему "Математические модели теплофизических процессов в электрических контактах" в Институте теплофизики Сибирского Отделения АН СССР (г. Новосибирск). В 1994 году был избран член-корреспондентом Национальной Академии наук, а с 2005 г. — ее действительным членом. В 1994–1996 гг. он возглавлял Отделение физико-математических наук Академии наук НАН РК и являлся членом Президиума НАН РК, одновременно руководил лабораторией в Институте математики НАН РК.

В 1997 году С.Н. Харин был приглашен в университет Пакистана — GIK Institute of Engineering Sciences and Technology в качестве профессора, где проработал до 2001 года. За результаты, полученные в области математического моделирования тепловых и электрических явлений, он был избран Иностранным членом Национальной академии наук Пакистана и назначен куратором раздела по математике в центральном журнале "Известия Академии наук Пакистана".

В 2001 году С.Н. Харин приглашается в University of the West of England на должность профессора (Бристоль, Англия), где работает до 2003 года. Здесь создается творческий коллектив по исследованию таких явлений, как переход дугового разряда в тлеющий, вибрация контактов вакуумных выключателей под действием металлического пара дуги, стагнация дугового пятна и другие. Математические модели, разработанные С.Н. Хариным, проходят экспериментальную проверку в лабораториях проф. Д. Амфта (Хемниц, Германия), проф. Б. Меджинского (Вроцлав, Польша) и проф. Х. Ноури (Бристоль, Англия). Результатом этого сотрудничества явилась серия совместных оригинальных публикаций в ведущих зарубежных журналах.

Осенью 2003 г. Станислав Николаевич возвращается в Пакистан, где продолжает работать профессором в GIK институте до лета 2005 г. В 2005 г. он приезжает в Казахстан и приглашается на работу в Казахстанско-Британский технический университет профессором математики, где работает по настоящее время. В Казахско-турецком университете им. Демиреля и Казахском государственном университете им. аль-Фараби С.Н.Харина также проводит подготовку молодых специалистов.

С.Н. Хариным разработаны и изучены математические модели, описывающие нестационарные температурные и электромагнитные поля в электроконтактных системах, процессы в низкотемпературной плазме электрической дуги в коммутационных аппаратах и плазмотронах, явления мостиковой и дуговой эрозии и сваривания электродов. Эти модели базируются на краевых задачах для уравнений в частных производных с движущимися границами, основной особенностью которых является вырождение области в начальный момент времени. Это обстоятельство порождает сингулярность соответствующих интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, к которым редуцируются эти краевые задачи. С.Н. Хариным разработаны, в частности, эффективные методы решения подобных задач, аппарат специальных функций Хартри (повторных интегралов вероятности), с помощью которых найдены решения некоторых задач типа Стефана и Веригина в явном виде.

С.Н. Хариным изучены также новые типы краевых задач для параболических уравнений, описывающие процессы тепло- и массообмена в телах с переменным сечением. Для этих задач построены тепловые потенциалы, исследованы соответствующие сингулярные интегральные уравнения и разработаны эффективные методы их приближенного решения, в частности, метод мажорантных функций. Полученные результаты нашли применение в теории низкотемпературной электродуговой плазмы и коммутационных процессов в электрических аппаратах. Математическая модель электрической дуги, учитывающая взаимодействие приэлектродных, внутриэлектродных и дуговых явлений включена в учебник для втузов "Теория электрических аппаратов" под ред. проф. Г.Н. Александрова, Москва: "Высшая школа 1985 г. С.Н. Хариным предложена и теоретически обоснована новая гипотеза о возможности термокапиллярного механизма дуговой эрозии, развита тепловая теория мостиковой эрозии электрических контактов и математический аппарат, позволяющий определить условия, при которых возможен оптимальный выбор композиции контактных пар с минимальной или самоограничивающейся эрозией. На базе этой теории разработаны и внедрены в производство ряд новых контактных пар.

На основе решения пространственной задачи стефановского типа в новой постановке разработана математическая модель, описывающая процессы плавления и сваривания электрических контактов при сквозных токах, а также дано теоретическое обоснование обнаруженным ранее экспериментально трем различным зонам сваривания.

Результаты по математическому моделированию динамики перехода дугового разряда в тлеющий позволят резко сократить дуговую эрозию контактов.

Анализ математического моделирования температурных и электромагнитных полей в контактных системах позволил выяснить роль туннельного эффекта, оценить влияние на него пассивирующих и адгезионных пленок и разработать новые электроконтактные конструкции со специальными устройствами, нейтрализующими туннельный перегрев и обеспечивающими стабильное переходное сопротивление. Инженерная методика расчета температурных полей в контактных узлах и термобиметаллических элементах аппаратов защиты была существенно использована при разработке новых автоматических выключателей серий АЕ-1000 и АЕ-2000 и штепсельного соединителя SP-063, получившего Золотую медаль ВДНХ СССР и сданного в серийное производство. За эти разработки С.Н. Харин был награжден Почетным Знаком "Изобретатель СССР".

Результаты научных исследований Станислав Николаевич представляет на международных конференциях и конгрессах в США, Англии, Японии, Канаде, Германии, Франции, Швейцарии, Польше, Болгарии, Пакистане, а также на многих Всесоюзных и Республиканских конференциях. Им опубликовано свыше 300 научных работ в ведущих зарубежных и республиканских журналах, 3 монографии, получено 12 авторских свидетельств на изобретения. С.Н. Хариным были организованы и проведены I Всесоюзный семинар "Математические и теоретические проблемы в контактной технике" (Алма-Ата, 1970); II Всесоюзный семинар "Тепло- и массообмен в электрических контактах" (Алма-Ата, 1979); III Всесоюзный семинар "Нестационарные дуговые и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазмотронах" (Байкал, 1991); Международный симпозиум "Электрические контакты. Теория и применение — ISECTA-93" (Алма-Ата, 1993).

Под научным руководством Станислава Николаевича были защищены 10 кандидатских диссертаций и 3 диссертации на соискание ученой степени PhD. Он был Председателем Комитета по научно-техническому сотрудничеству между Республикой Казахстан и Исламской Республикой Пакистан (1996–2001 гг.) и президентом Малой Академии наук школьников.

Сердечно поздравляем Станислава Николаевича со славным юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, огромного счастья, больших успехов в научной и педагогической деятельности.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Основные публикации С.Н. Харина

1 Solution of Heat Equation with Discontinuous Coefficients and its Application to the Problem of Electrical Contacts // Journal of Engineering Physics. — 1965. — V. VIII, №6. — P.761– 767.

2 Models for Investigation of Heat and Mass Transfer in Electrical Contacts // Proc. 8-th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts, Tokyo, Japan. — 1976. — P. 553–558.

3 Mathematical Models of Heat Phenomena in Electrical Contacts. — Alma-Ata, 1977. — 236 p. (соавторы E.I. Kim, V.T. Omelchenko).

4. Mechanism of Thermo-elastic Erosion of Electrodes // Reports of the USSR Academy of Sciences, Siberian Branch ser. techn. — 1980. — V. 3. №13. — P. 42–45.

5 Thermo-physical Processes in Electrical Contacts with Short Arc // Proceedings of 11-th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, Berlin (West),VDE-Verlag GmbH. — 1982. — P. 82–93.

6 Mathematical Model of Welding of Electrical Contacts During Vibration // Electromechanics. — 1982. — №8. — P. 986–989.

7. Failure Mechanism of Metal Surface Layer in a Process of Impulse Electric Erosion Treatment // Numerical Methods of Solid State Mechanics. — 1982. — V. 13, №3. — P. 118–121.

8 Heat and Mass Transfer in Liquid Metal Bridges between Electrical Contacts // Electron Metal Treatment. — 1983. — V.2, №1. — P. 20–22.

9. Radiation of Gaseous Plasma Discharge. — Alma-Ata, 1984. — 304 p. (соавторы K.K. Namitokov, P.L. Pakhomov).

10 Thermo- gas-kinetic Model of Arc and Near-electrode Phenomena in Electrical Contacts // Proc. of 5-th Intern. Conf. Kontaktronika'85, Bydgoszcz, Poland. — 1985. — P. 22–31.

11 The Influence of Surface Films on the Heating of Closed and Opening Electrical Contacts // Proc. of Intern. Conf. IC – GEMCA, Nagoya, Japan. — 1986. — P. 362–268 (соавтор E.I. Kim).

12 Mathematical Models of Heat and Mass Transfer in Molten Metal Electrical Contact Bridges // Proc. of 6-th Intern. Conf. Kontaktronika'88, Bydgoszcz, Poland. — 1988. — P. 89–94.

13 Mathematical Modeling of Phenomena in Gaseous Plasma Discharge. — Alma-Ata, 1988. — 208 p. (соавторы K.K. Namitokov, P.L. Pakhomov).

14 The Influence of Near- and Intro-electrode Processes on the Dynamics of Electrical Arc and Contact Erosion // Proc. of Intern. Conf. IC – ECEMC, Bejing, China. — 1989. — P. 598–608.

15 The Influence of Electrical Parameters of Circuit on Arc Process at Low Current // Proc. of 6-th Intern. Conf. on Switching Arc Phenomena, Lodz, Poland. — 1989. — P. 263–267.

16 Thermocapillary Mechanism of Contact Erosion during Arcing // Proc. of 36-th IEEE Holm Conference and 15-th Int. Conf. on Electric Contacts, Montreal, Canada. — 1990. — P. 37–47.

17 Dynamic and Thermo-physical Processes in Low Current Sliding Contacts // Proc. of 36-th IEEE Holm Conference and 15-th Int. Conf. on Electric Contacts, Montreal, Canada. — 1990. — P. 301–305 (соавторы V.V. Mikhailov and A.S. Batalin).

18 Transient Thermophysical Phenomena at the Prearcing Period during Opening of Electrical Contacts // Proc. of 37-th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Chicago, USA. — 1991. — P. 53–65.

19 Mathematical Model of Arc Erosion in Electrical Contacts // Proc. of 16-th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts, Loughborough, England. — 1992. — P. 205–209.

20 Dynamic Processes in Aluminum-to-Copper Bolted Connections Under Current-Cycling Conditions // Proc. of 16-th IEEE Int. Conf. on Electrical Contacts, Loughborough, England. — 1992. — P. 241–247 (соавтор M. Braunovic).

21 Transient Phenomena in Capacitance Shunted Arcs // Proc. of Intern Symposium on Electrical Contacts, Theory and Applications (ISECTA'93), Almaty, Kazakstan. — 1993. — P. 48–52 (соавторы A.A. Kavokin, Y.R. Spadi).

22 Dynamics of the Transition of the Arc Metallic Phase into Gaseous Phase in Opening Electrical Contacts // Proc. of 17-th Int. Conf. on Electrical Contacts, Nagoya, Japan. — 1994. — P.816–826.

23 Free Boundary Problems in the Theory of Electrical Heat and Mass Transfer // International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland. — 1994. — P.73.

24 Mathematical Models of Transient Arc Erosion and Intraelectrode Phenomena // Thermal Plasma and New Materials Technology, Cambridge Interscience Publishing, England. — 1994. — V.1, — P.234–276.

25 Mathematical Models of Transient Arc Erosion and Intro-Electrode Phenomena // Proc. of 4-th Intern. Symposium on Advanced Materials, Islamabad, Pakistan. — 1995. — P. 678–683.

26 Mathematical Model Phenomena Preceding of the Arc Ignition in Electrical Contacts // Transactions of the National Academy of Sciences of Kazakstan. — 1995. — № 2. — P. 3–16.

27 Post Bridge Phenomena in Electrical Contacts at the Initial Stage // IEEE Transactions CPMT. — 1996. — Part A., V.19, № 3. — P.313–319.

28 Mathematical Modeling of Phase Transformations in Thermo-Chemical Cathodes During Arcing // Proc. of 1-st Intern. Symposium on Phase Transformations, Islamabad, Pakistan. — 1996. — P. 228–240 (соавтор Q.K. Ghori).

29 Mathematical Model of the Short Arc Phenomena at the Initial Stage // Proc. of 43-d IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, Philadelphia, USA. — 1996. — P. 289–305.

30 The Mechanism and Models of Interaction Between Electrical Arc and Contact Materials // Proc. of 6-th Intern. Symposium on Advanced Materials, Islamabad, Pakistan. — 1999. — P. 134–140.

31 Mathematical Model of Relay Contact Vibration With Electrical Arc // Proc. of 1-st International Symposium on Mechanical Vibrations, Islamabad, Pakistan. — 1999. — P. 284–295. (соавторы Q.K. Ghori, M. Usman).

32 Modelling of Transition Arc Phenomena in Opening Electrical Contacts // Proc. of International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications, Nagoya (ICECT' 99), Japan. — 1999. — P. 133–140.

33 Modelling of Various Type of Erosion in Electrical Contacts // Proc. of International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications, Nagoya (ICECT' 99), Japan. — 1999. Extra-Volume. — P. 1–8.

34 Electrochemical Mechanism of Electron Emission in Electrical Contacts // Proc. of 20-th International Conf. on Electrical Contacts (ICEC 2000), Sweden, Stockholm. 2000. — P. 141–146 (соавторы V.N. Mukazhanov, A.I. Mokryshev).

35 Mathematical Model of Arc Evolution From Metallic Phase to Gaseous Phase // Proc. of 20-th International Conf. on Electrical Contacts (ICEC 2000), Sweden, Stockholm. — 2000. — P.155–160.

36 Modeling of Vacuum Arc Evolution in Opening Electrical Contacts // Proc. of 19-th Intern. Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV-2000), Xi' An, China. — 2000. — V1, P. 199–205.

37 Influence of Pre-Arcing Bridging on the Duration of Vacuum Arc // Proc. of 19-th Intern. Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV-2000), Xi' An, China, — 2000. — V.1. — P.278–285 (соавтор Q.K. Ghori).

38 Spontaneous Break and Vibration of Electrical Contacts // Proc. of 2-d International Symposium on Mechanical Vibrations, Islamabad, Pakistan. — 2001. — P. 488–494 (соавторы Muneer Usman, V.N. Lobanova).

39 Mathematical Model of Electrical Arc Dynamics on the Base of Cylindrical Stefan Problem with Two Free Boundaries // Mathematical Journal, Almaty. — 2001. — V. 1, №1. — P. 14–26.

40 Temperature Displacement in Electrical Contacts due to Kohler and Thomson

Effects // Proc. of 9-th International Conference on Switching Arc Phenomena (SAP-2001), Lodz, Poland. — 2001. — P. 190–199.

41 Influence of Vapour Pressure on the Dynamics of Repulsion by Contact Blow-off // Proc. of 21-st International Conference on Electrical Contacts, Zurich, Switzerland. — 2002. — P. 268–275 (соавторы M. Bizjak, H. Nouri).

42 Transient Phenomena of Arc to Glow Discharge Transformation at Contact Opening // Proc. of 21-st International Conference on Electrical Contacts, Zurich, Switzerland. — 2002. — P. 425–431 (соавторы H. Nouri, B. Miedzinski, G. Wisniewski).

43 Influence of Inductance on the Arc Evolution in AgMeO Electrical Contacts // Proc. of 48-th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Orlando, USA. — 2002 — P. 108-119 (соавторы H. Nouri, T. Davies).

44 Dynamics of Electrical Contact Floating in Vacuum // Proc. of 48-th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Orlando, USA. — 2002. — P. 197–205 (соавторы H. Nouri, D. Amft).

45 Effect of Vapour Force at the Blow-Open Process in Double- Break Contacts // IEEE Transaction on CPMT. — 2003, Part A. — P. 214–219 (соавторы H. Nouri, M. Bizjak).

46 The Mathematical Models of Welding Dynamics in Closed and Switching Electrical Contacts // Proc. of 49-th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Washington, USA. — 2003. — P. 107–123 (соавторы H. Nouri, T. Davies).

47 Effect of Metallic Vapour Pressure on the Vibration of Electrical Contacts in Vacuum // Proc. of 5-th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Glasgow, UK. — 2003. — P. 505–512 (соавторы H. Nouri, T. Davies).

48 Analysis of an Arc to Glow Transition Using Fast Photography // Proc. of 52-th International Relay Conference, Oak Brook, Illinois, USA. — 2004. — P. 81–85 (соавторы B.Miedzinski, G. Wisniewski, W.Okraszewski, H. Nouri).

49 Modelling of Arc Duration and Erosion in Electrical Contacts of Circuit Breakers // Proc. of 39-th International Universities Power Engineering Conference (UPEC 2004), Bristol, UK. — 2004. — V. 1. — P. 103–108 (соавторы H. Nouri, S.I. Tirmizi, Siraj-ul-Islam).

50 The Experimental Investigation of the Effect of Circuit Parameters on Erosion Dynamics in Silver Contacts in Air // Proc. of 39-th International Universities Power Engineering Conference (UPEC 2004), Bristol, UK. — 2004. — V. 1. — P. 109–113 (соавторы S.M. Skachek, H. Nouri).

51 Dynamics of Arc Phenomena at Closure of Electrical Contacts in Vacuum Circuit Breakers // Proc. of 21-st International Symposium on Electrical Discharges and Insulation in Vacuum (ISDEIV-2004), Yalta, Ukraine. — 2004. — V. 2. — P. 301–306 (соавторы H. Nouri, D. Amft).

52 Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc // Trans. Tech. Publications, Switzerland, Key Engineering Materials Vols. — 2012. — P. 321–329 (соавтор M. Sarsengeldin).

53 Possibility of control of transition of switching arc DC into glowing // Proc. of the Pakistan Academy of Sciences. — 2012. — V.4, №11. — P. 48–60 (соавторы B. Miedzinski, G. Wisniewski, H. Nouri).

54 Role of Metallic Vapour Pressure in Contact Bouncing and Welding at Closure of Electrical Contacts in Vacuum // Proc. of the 58-th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, Portland, OR, USA. — 2012. — P. 235–241.

55 Phenomena of Arc Root Immobility in Electrical Contacts // Proc. of the 58-th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, Portland, OR, USA, 2012. P. 11–15 (соавторы H. Nouri, B. Miedzinski).

56 Detection of high resistive ground faults in MV mining networks basing on a phase relationship of selected current harmonics // Electrical Review. — 2012. — NR 11b. — P. 332–333 (соавторы Daniel Pyda, Bogdan MiedzinskiI, Witold Dzierzanowski, Hassan NouriI).

57 Electrochemical Mechanism of Electron Emission in Zirconium Cathodes // Journal of Materials and Chemical Engineering. — 2014. — V. 2, Iss. 2. — P. 57–65.

58 The analytical solution of the two-phase Stefan problem with boundary flux condition // Математический журнал, Алматы. — 2014. — Т. 14, №1(51). — P. 55–76.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, №2 (52), 2014

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
07.08.2014 г.

Тираж 300 экз. Объем 103 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz