

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 15 № 4 (58) 2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

MATHEMATICAL JOURNAL

Том 15 № 4 (58) 2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, № 4 (58), 2015

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Главный редактор:

М.А. Садыбеков

Заместитель главного редактора:

А.Т. Асанова

Редакционная коллегия:

Л.А. Алексева, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов, Г.И. Бижанова, Н.К. Б依ев,
В.Г. Воинов, Н.С. Даирбеков, М.Т. Дженалиев, Д.С. Джумабаев,
А.С. Джумадилаев, Т.Ш. Кальменов, К.Т. Мынбаев, А.Ж. Найманова,
М. Отелбаев, И.Н. Панкратова, М.Г. Перетяцкий, И.А. Тайманов (Россия),
М.И. Тлеубергенов, С.Н. Харин.

Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015г.

© Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2015г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 15

№ 4 (58)

2015

<i>Байжанов Б.С., Вербовский В.В.</i> Об определенности 1-типов в упорядоченно стабильных теориях	5
<i>Voinov Ye.</i> Two new Wald's type goodness-of-fit tests for binormality	16
<i>Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.</i> Стабилизация решения уравнения теплопроводности, нагруженного по нульмерным многообразиям, с помощью граничных управлений	33
<i>Джумабаев Д.С., Утешова Р.Е.</i> Ограниченные решения линейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с существенными особенностями на концах интервала	54
<i>Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И.</i> О решении методом квазиобращения стохастической задачи с непрямым управлением	66
<i>Моисеева Е.С., Бекетаева А.О.</i> Построение епо-схемы на неравномерной сетке для моделирования сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси	78
<i>Турметов Б.Х.</i> О разрешимости некоторых краевых задач для бигармонического уравнения с периодическими условиями	94

CONTENTS

Volume 15

No. 4 (58)

2015

<i>Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V.</i> On definability of 1-types on o-stable theories	5
<i>Voinov Ye.</i> Two new Wald's type goodness-of-fit tests for binormality	16
<i>Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.</i> Stabilization of solutions of loaded on zero-dimensional manifolds heat equation with using boundary controls	33
<i>Dzhumabaev D.S., Uteshova R.E.</i> Bounded solutions of loaded linear ordinary differential equations with singularities at endpoints of the interval	54
<i>Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I.</i> On solution of the inverse stochastic problem with indirect control by quasi-inversion method	66
<i>Moisseyeva Ye., Beketaeva A.</i> Development of eno scheme on non-uniform grid for simulation of supersonic flow of multispecies gas mixture	78
<i>Turmetov B.Kh.</i> On the solvability some boundary value problems for the biharmonic equation with periodic conditions	94

ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ 1-ТИПОВ В УПОРЯДОЧЕННО
СТАБИЛЬНЫХ ТЕОРИЯХБ. С. БАЙЖАНОВ¹, В. В. ВЕРБОВСКИЙ²¹Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: baizhanov@hotmail.com,²Университет имени Сулеймана Демиреля
040900, Каскелен, ул. им. Абылай хана, 1/1, e-mail: viktor.verbovski@sdu.edu.kz

Аннотация: Линейно упорядоченная структура называется упорядоченно λ -стабильной, если для любого дедекиндова сечения $\langle C, D \rangle$ данной структуры и любого подмножества A мощности не более, чем λ , существует самое большее λ 1-типов, совместных с сечением $\langle C, D \rangle$. Полная теория логики предикатов первого порядка называется упорядоченно λ -стабильной, если любая ее модель такова. В данной работе исследован вопрос определимости 1-типа над подмножеством модели упорядоченно λ -стабильной теории и дан критерий.

Ключевые слова: Теория моделей, ω -минимальна, упорядоченная структура, определимость типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ – линейно упорядоченная структура, a – элемент из M , а A и B – подмножества для M . Как обычно, будем писать $a < A$, если $a < b$ для любого $b \in A$, и будем писать $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Разбиение $\langle C, D \rangle$ множества M называется *сечением*, если $C < D$. Если дано сечение $\langle C, D \rangle$, то можно построить частичный тип $\{c < x < d : c \in C, d \in D\}$, который так же будем называть сечением и обозначать тем же символом $\langle C, D \rangle$. Если множество C формульно, то данное сечение назовем *квазирациональным*, а если в дополнение еще и $\sup C$ лежит в M , то сечение $\langle C, D \rangle$ назовем *рациональным*. Неопределимое сечение называется *иррациональным*. Если $C = (-\infty, c)$, то обозначим это сечение символом c^- , если же $C = (-\infty, c]$, то символом c^+ . Если

Keywords: *Model Theory, ω -minimal, ordered structure, definability of a type.*

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 5125/ГФ4.

© Б. С. Байжанов, В. В. Вербовский, 2015.

$C = M$, то обозначим это сечение символом $+\infty$. Обозначение $\sup A$ будем применять для такого сечения $\langle C, D \rangle$, что $C = \{c \in M : c < \sup A\}$. Если множество C формульно, то иногда будем различать сечения, определенные $\sup C$ и $\inf D$ следующим образом: $\sup C$ будет обозначать частичный тип $\langle C, D \rangle \cup \{C(x)\}$, а $\inf D = \langle C, D \rangle \cup \{\neg C(x)\}$.

Подмножество A линейно упорядоченного множества M называется *выпуклым*, если для любых a и $b \in A$ отрезок $[a, b]$ лежит в A . Определим *длину* выпуклого множества A , как $\sup\{a - b : a, b \in A\}$. *Выпуклым компонентом* множества A называется максимальное выпуклое подмножество для A . Определим *выпуклое замыкание* A^c множества A следующим образом: $A^c = \{b \in M : \exists a_1, a_2 \in A (a_1 \leq b \leq a_2)\}$, то есть это – наименьшее выпуклое множество, содержащее A .

Пусть A – некоторое подмножество линейно упорядоченной структуры \mathcal{M} . Будем писать $A^+ = (\sup A, +\infty) = \{b \in \mathcal{M} : A < b\}$ и $A^- = (-\infty, \inf A) = \{b \in \mathcal{M} : A > b\}$.

Упорядоченная структура называется *слабо o -минимальной*, если любое формульное подмножество состоит из конечного числа выпуклых компонент [1].

Формулу $\phi(x, \bar{b})$ будем называть *выпуклой*, если множество всех ее реализаций выпукло. Формулу $\phi(x, \bar{y})$ назовем *выпуклой по x* , если выпукла формула $\phi(x, \bar{b})$ для всех $\bar{b} \in M$.

Заметим, что если множество определимо, то и его выпуклое замыкание определимо, причем над теми же параметрами. Таким образом, будем писать $F^c(x)$ для выпуклого замыкания формулы $F(x)$. Очевидно, что

$$F^c(x) = \exists y \exists z (F(y) \wedge F(z) \wedge y \leq x \leq z).$$

Пусть p – некоторый тип над множеством A . *Выпуклым замыканием* типа p мы назовем следующий частичный тип p^c :

$$p^c = \{F^c(x) : F(x) \in p\}.$$

Множество реализаций в \mathcal{M} типа p^c будет выпуклым множеством, так как пересечение выпуклых множеств само выпукло. Его будем называть *выпуклым носителем* типа p и обозначать как $p^c(\mathcal{M})$.

С любой выпуклой формулой $\phi(x)$ связаны две выпуклые формулы, определимые с теми же параметрами:

$$\phi_l(x) \triangleq \forall y(\phi(y) \rightarrow x < y), \quad \phi_r(x) \triangleq \forall y(\phi(y) \rightarrow y < x).$$

Неалгебраический частичный тип q над A назовем *выпукло-полным 1-типом*, если для любой выпуклой A -формулы $F(x)$ либо $F(x) \in q$, либо $F_l(x) \in q$, либо $F_r(x) \in q$. Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 1. Пусть тип q будет выпукло-полным 1-типом над множеством A , а p – любым его пополнением в $S^1(A)$. Тогда $p^c = q$.

В соответствии с классификацией 1-типов в слабо o -минимальных теориях [2], [3], в которых, как известно из работы [1], множества реализаций всех неалгебраических 1-типов выпуклы, все выпукло-полные 1-типы разобъем на три вида: изолированные, квазирациональные и иррациональные.

Пусть A – выпуклое множество. Будем говорить, что левая граница множества A определима, если определимо множество $(-\infty, \inf A) \triangleq \{c \in M : c < A\}$. Аналогично будем говорить, что правая граница множества A определима, если определимо множество $(\sup A, \infty) \triangleq \{d \in M : d > A\}$.

Как обычно в теории моделей, назовем выпукло-полный 1-тип p^c над A *изолированным*, если существует выпуклая A -формула $F(x) \in p^c$ такая, что для любой A -формулы $\phi(x) \in p^c$ выполняется: $\mathcal{M} \models \forall x(F(x) \rightarrow \phi(x))$. Заметим, что в этом случае обе границы выпуклого носителя $p^c(\mathcal{M})$ определимы.

Выпукло-полный тип p^c будем называть *квазирациональным направо*, если правая граница его выпуклого носителя определима, то есть существует A -формула $H(x) \in p^c$ такая, что для любой A -формулы ϕ из p^c выполняется:

$$\mathcal{M} \models \forall x[(H(x) \wedge \phi(x)) \rightarrow \forall y((x < y \wedge H(y)) \rightarrow \phi(y))].$$

Аналогично определим *квазирациональным налево* выпукло-полный тип p^c : левая граница его выпуклого носителя определима.

Квазирациональный направо (налево) выпукло-полный тип p^c назовем *рациональным направо* (*рациональным налево*), если вышеупомянутая формула $H(x)$ имеет вид $x < a$ ($a < x$) для некоторого элемента $a \in \text{acl}(A)$.

Скажем, что выпукло-полный 1-тип *иррациональный*, если он не изолированный и неквазирациональный. Другими словами, если ни одна из границ его выпуклого носителя не является определимой.

Пусть s – частичный n -тип, A – множество. Тогда $S_s^n(A) \triangleq \{p \in S^n(A) : p \cup s \text{ совместно}\}$. Заметим, что s может и не быть частичным типом над множеством A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1. Линейно упорядоченная структура \mathcal{M} называется *упорядоченно стабильной в λ* , если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности не больше λ и для любого сечения $\langle C, D \rangle$ в \mathcal{M} существует самое большое λ 1-типов над A , которые совместны с сечением $\langle C, D \rangle$, то есть $|S_{\langle C, D \rangle}^1(A)| \leq \lambda$.

2. Теория T называется *упорядоченно стабильной в λ* , если каждая ее модель такова. Иногда будем писать, что T упорядоченно λ -стабильна.
3. Теория T называется *упорядоченно стабильной*, если существует бесконечный кардинал λ в котором теория T упорядоченно стабильна.
4. Теория T *упорядоченно суперстабильна*, если существует такой кардинал λ , что теория T упорядоченно стабильна во всех $\mu \geq \lambda$.
5. Теория T называется *сильно упорядоченно стабильной*, если, в дополнение, любое определимое сечение в любой модели \mathcal{M} теории T так же определимо в языке чистого порядка, или, что эквивалентно, если $\sup A \in M$ для любого формульного ограниченного подмножества A множества M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. 1. Линейно упорядоченная структура \mathcal{M} называется *упорядоченно стабильной в λ* , если для каждого подмножества $A \subseteq M$ мощности не более λ , для каждого полного типа p над A верно неравенство $|S_{p^c}(A)| \leq \lambda$.

2. Теория T *упорядоченно стабильна в λ* , если каждая ее модель такова. Иногда будем писать также, что T упорядоченно λ -стабильна.
3. Теория T *упорядоченно стабильна*, если T упорядоченно стабильна в некоторой бесконечной мощности.

4. Теория T упорядоченно суперстабильна, если существует кардинал λ такой, что T упорядоченно стабильна во всех $\mu \geq \lambda$.

ЛЕММА 2. [4] Пусть \mathcal{M} – некоторая линейно упорядоченная структура. Тогда \mathcal{M} упорядоченно λ – стабильна по второму определению тогда и только тогда, когда \mathcal{M} упорядоченно λ – стабильна по первому определению.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ будет моделью упорядоченно стабильной теории, а A – некоторым подмножеством ее носителя. Мы будем считать, что модель \mathcal{M} является $|A|^+$ – насыщенной.

Рассмотрим тип $p(x) \in S_1(A)$. Наша цель: найти критерий определенности типа p .

В качестве отправной точки мы воспользуемся критерием определенности 1-типа над множеством в модели слабо ω -минимальной теории, найденным Б.С. Байжановым в работе [3]. Для этого вспомним основные определения из той работы.

Говорим, что A -формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ слабо сходится к типу $q(\bar{x}) \in S(A)$ и обозначаем сию сходимость $WEC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если для любой формулы $\Theta \in q$ существует такой кортеж $\bar{a} \in A$, что $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ делит $\Theta(N)$.

Говорим, что A -формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ сильно сходится к типу $q(\bar{x})$ и обозначаем сию сходимость $STC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если для любой формулы $\Theta \in q$ существует такой $\bar{a} \in A$, что $\phi(N, \bar{a}) \subset \Theta(N)$. Почти всегда мы будем опускать \bar{x} при написании $q(\bar{x})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $q \in S(A)$. Тогда мы говорим, что тип q строго определим, если для любой A -формулы $H(\bar{y}, \bar{u})$ имеем $\neg WEC(H(\bar{y}, \bar{u}), q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $q \in S(A)$, а $\phi(\bar{y}, \bar{u})$ – A -формула. Будем говорить, что тип q является слабо $\phi(\bar{y}, \bar{u})$ – изолированным, если существует A -формула $\Theta^\phi(\bar{y})$ из типа q такая, что для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{u})}$ верно:

$$[\mathcal{M} \models \exists \bar{y}(\Theta^\phi(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{y}, \bar{a})) \rightarrow \forall \bar{y}(\Theta^\phi(\bar{y}) \rightarrow \phi(\bar{y}, \bar{a}))].$$

Мы говорим, что q является слабо изолированным, если q является слабо $\phi(\bar{y}, \bar{u})$ -изолированным для любой A -определимой формулы $\phi(\bar{y}, \bar{u})$.

ЛЕММА 3. [3] Пусть $q \in S(A)$. Следующее истинно:

- (i) если q изолированный, то q слабо изолированный;
- (ii) тип q слабо изолированный тогда и только тогда, когда q строго определимый.

Определим

$$\begin{aligned} L(q) &:= \{G(x) \mid G(\mathcal{M}) < q(\mathcal{M}), \text{ где } G(x) \text{ — } A\text{-формула}\}, \\ R(q) &:= \{D(x) \mid q(\mathcal{M}) < D(\mathcal{M}), \text{ где } D(x) \text{ — } A\text{-формула}\}. \end{aligned}$$

$$\text{Заметим, что } q(\mathcal{M})^+ = \bigcup_{D \in R(q)} D(\mathcal{M}), \quad q(\mathcal{M})^- = \bigcup_{G \in L(q)} G(\mathcal{M}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. [3] Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset \mathcal{M}$, $H(y, \bar{a})$ — A -формула.

Мы говорим, что выполняется условие *левой сходимости* $H(y, \bar{a})$ к q и обозначаем эту штуку через $LC(H(y, \bar{a}), q)$, если имеет место следующее: для любой формулы $G \in L(q)$ существует кортеж $\bar{a} \in A$ такой, что

$$G(\mathcal{M}) < H(\mathcal{M}, \bar{a})^+ \text{ and } H(\mathcal{M}, \bar{a}) < q(\mathcal{M}).$$

Мы говорим, что выполняется условие *правой сходимости* $H(y, \bar{a})$ к q и обозначаем эту вещь через $RC(H(y, \bar{a}), q)$, если имеет место следующее: для любой формулы $D \in R(q)$ существует кортеж $\bar{a} \in A$ такой, что

$$H(\mathcal{M}, \bar{a}) < D(\mathcal{M}) \text{ and } q(\mathcal{M}) < H(\mathcal{M}, \bar{a})^+.$$

Также мы говорим, что выполняется условие *двусторонней сходимости* формулы $H(x, \bar{y})$ на множествах X или $\theta(\bar{y})$ к типу q , и обозначаем это через $C(H(x, \bar{y}), X, q)$ или $C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q)$, если $LC(H, X, q)$ и $RC(H, X, q)$ имеют место одновременно.

ТЕОРЕМА 1. [3] Пусть $A \subset M \models T$, T — слабо o -минимальная теория, $q \in S_1(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. тип q неопределим;
2. существует A -формула $H(x, \bar{y})$ такая, что для любой A -формулы $\theta(\bar{y})$ выполняется

$$[C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q) \bigvee C(H(x, \bar{y}), \neg\theta(\bar{y}), q)].$$

Доказательство следующей теоремы повторяет доказательство теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \subset M \models T$, T – упорядоченно стабильная теория, $q \in S_1(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. частичный, выпукло-полный тип q^c неопределим;
2. существует A -формула $H(x, \bar{y})$ такая, что для любой A -формулы $\theta(\bar{y})$ выполняется

$$[C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q^c) \bigvee C(H(x, \bar{y}), \neg\theta(\bar{y}), q^c)].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\psi(x, \bar{z})$ и $\theta(\bar{z})$ – некоторые формулы. Определим (φ, ψ, θ) -ранг формулы $\rho(x)$.

1. $(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(\rho) = -1$, если $\exists \bar{z}(\theta(\bar{z}) \wedge \neg \exists x(\psi(x, \bar{z}) \wedge \rho(x)))$.
2. $(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(\rho) \geq 0$, если $\forall \bar{z}(\theta(\bar{z}) \rightarrow \exists x(\psi(x, \bar{z}) \wedge \rho(x)))$.
3. $(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(\rho) \geq 1$, если существует \bar{a} такой, что (φ, ψ, θ) -ранг каждой из формул $\rho(x) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ и $\rho(x) \wedge \neg\varphi(x, \bar{a})$ неотрицательный, то есть

$$\exists \bar{y} \forall \bar{z}(\theta(\bar{z}) \rightarrow \exists x_0, x_1(\varphi(x_0, \bar{y}) \wedge \neg\varphi(x_1, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i < 2} \psi(x_i, \bar{z}) \wedge \rho(x_i))).$$

4. $(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(\rho) \geq n + 1$, если существует \bar{a} такой, что (φ, ψ, θ) -ранг каждой из формул $\rho(x) \wedge \varphi(x, \bar{a})$ и $\rho(x) \wedge \neg\varphi(x, \bar{a})$ не меньше, чем n .

Как обычно, $(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(s) = \min\{(\varphi, \psi, \theta)\text{rank}(\rho) : \rho \in s\}$.

Заметим, что, как и в теории стабильности, существует формула, которая утверждает, что (φ, ψ, θ) – ранг формулы (или типа) равен n .

Кроме того, если $\psi(x, \bar{z}) \triangleq (x = x)$ и $\theta(\bar{z}) \triangleq (\bar{z} = \bar{z})$, то (φ, ψ, θ) – ранг совпадает с локальным φ -рангом Шелаха.

ТЕОРЕМА 3. Пусть T – упорядоченно стабильная теория, а \mathcal{M} – ее модель. Пусть A – формульное подмножество для \mathcal{M} . Тогда полный 1-тип p над A определим тогда и только тогда, когда его выпуклая часть p^c определима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если полный тип $p \in S_1(A)$ определим, то определима и его часть p^c . Поэтому мы предположим, что определима его часть p^c . Наша цель: доказать определимость типа p .

Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ – произвольная формула. Мы построим контроллер $d_\varphi(\bar{y})$ для этой формулы: для любого $\bar{a} \in A$ имеет место принадлежность формулы $\varphi(x, \bar{a})$ типу $p(x)$ тогда и только тогда, когда истинна формула $d_\varphi(\bar{y})$.

В силу упорядоченной стабильности полное два-ветвящееся φ -дерево конечно, что можно записать следующим образом. Пусть $\tau_i : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1\}$, где $i < 2^n$, – все функции из n – элементного множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$ в $\{0, 1\}$. Как обычно, $\varphi^1 = \varphi$ и $\varphi^0 = \neg\varphi$. Кроме того, пусть $\bar{a}_i \in A$, где $i < n$. Обозначим через $\Gamma_n(x_0, x_1, \dots, x_{2^n-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1})$ следующую формулу: $\bigwedge_{j < 2^n} \bigwedge_{i < n} \varphi^{\tau_j(i)}(x_j, \bar{a}_i)$.

ЛЕММА 4. Существует такое натуральное число n , что для любых $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n \in A$ тип $\Gamma_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2^{n+1}-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \cup \bigcup_{i < 2^{n+1}} p^c(x_i)$ несовместен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Иначе по компактности для каждого бесконечного кардинала λ будет существовать 2^λ типов над множеством мощности λ , которые будут совместны с некоторым частичным выпукло-полным типом p^c .

СЛУЧАЙ 1. Тип p^c изолирован, скажем, формулой $\Theta(x)$.

Тогда несовместность вышеопределенного типа $\Gamma_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2^{n+1}-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \cup \bigcup_{i < 2^{n+1}} p^c(x_i)$ выразима при помощи формулы: $\Gamma_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2^{n+1}-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \cup \bigcup_{i < 2^{n+1}} \Theta(x_i)$, что дает возможность применить для нахождения контроллера d_φ стандартную технику теории стабильности, основанную на локальном ранге Шелаха. Иначе говоря, мы получаем, что формула $\varphi(x; \bar{y}) \wedge \Theta(x)$ стабильна.

СЛУЧАЙ 2. Тип p^c неизолирован.

СЛУЧАЙ 2.1. Тип p^c строго определим. Этот случай похож на случай 1. Действительно, в этом случае получаем, что не существует такой формулы $\Psi(x, \bar{z})$, выпуклой по x при каждом \bar{z} , что $p^c(\mathcal{M}) = \bigcap_{i \in I} \Psi(\mathcal{M}, \bar{a}_i)$, где $\bar{a}_i \in A$ для всех $i \in I$. Тогда существует последовательность разных выпуклых формул $F_j(x)$, где $j \in J$, что $p^c(\mathcal{M}) = \bigcap_{j \in J} F_j(\mathcal{M})$. Не умаляя общности, можно считать, что множество индексов J линейно упорядочено и при любых $j_1 < j_2$ имеет место: $F_{j_1}(\mathcal{M}) \supseteq F_{j_2}(\mathcal{M})$. Тогда в силу компактности существует такая выпуклая формула $F(x)$ (то есть F_{j_0} для некоторого j_0), что формула $\Gamma_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2^{n+1}-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \cup \bigcup_{i < 2^{n+1}} F(x_i)$

несовместна, что вновь дает нам возможность применить для нахождения контроллера d_φ стандартную технику теории стабильности, основанную на локальном ранге Шелаха. Иначе говоря, мы получаем, что формула $\varphi(x; \bar{y}) \wedge F(x)$ стабильна.

СЛУЧАЙ 2.2. Тип p^c не является строго определимым (но при этом он определим). Можно считать, что для любой формулы $F(x)$ из типа p^c и для любого натурального числа n формула $\Gamma_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{2^{n+1}-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n) \cup \bigcup_{i < 2^{n+1}} F(x_i)$ совместна, иначе мы сможем закончить доказательство так же, как и в случае 2.1.

Поскольку тип p^c не является строго определимым, существует формула $\psi(x, \bar{z})$, выпуклая при каждом \bar{z} , что для любой формулы $F(x) \in p^c$ существует такой кортеж $\bar{a} \in A$, что $\mathcal{M} \models \forall x(\psi(x, \bar{a}) \rightarrow F(x))$.

Следовательно, пересечение всех множеств $\psi(\mathcal{M}, \bar{a})$, где $\bar{a} \in A$ и формула $\psi(\mathcal{M}, \bar{a})$ лежит в типе p^c , есть в точности $p^c(\mathcal{M})$.

Предположим, что множество A формульно над A , для простоты обозначим формулу, выделяющую множество A , символом $A(x)$.

Поскольку тип p^c определим, у формулы $\psi(x, \bar{z})$ есть контроллер $d_\psi(\bar{z})$. Тогда в модели \mathcal{M} верно следующее: множество $p^c(\mathcal{M})$ совпадает с множеством, определяемым формулой $\forall z_1 \dots \forall z_n (\bigwedge_{i=1}^n nA(z_i) \wedge d_\psi(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \psi(x, z_1, \dots, z_n))$, то есть выясняется, что тип p^c в модели \mathcal{M} изолирован. Следовательно, можно применить рассуждения из первого случая. Но здесь мы воспользовались тем фактом, что модель \mathcal{M} является достаточно насыщенной, в общем же случае тип p^c может быть опущен, поэтому такое рассуждение не проходит. Именно поэтому мы воспользуемся (φ, ψ, θ) -рангом, где формула $\theta(z_1, \dots, z_n) \triangleq \bigwedge_{i=1}^n nA(z_i) \wedge d_\psi(z_1, \dots, z_n)$.

Легко понять, что тип $\Gamma_n(x_0, x_1, \dots, x_{2^n-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}) \cup \bigcup_{i < 2^n} p^c(x_i)$ совместен тогда и только тогда, когда (φ, ψ, θ) -ранг формулы $x = x$ больше n либо равен ему.

Действительно, поскольку при каждом $\bar{a} \in \theta \cap A$ формула $\psi(x, \bar{a})$ совместна с типом p^c , получаем, что (φ, ψ, θ) -ранг формулы $x = x$ больше либо равен n , где n – максимальное натуральное число такое, что тип $\Gamma_n(x_0, x_1, \dots, x_{2^n-1}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}) \cup \bigcup_{i < 2^n} p^c(x_i)$ совместен.

Но если предположить, что (φ, ψ, θ) -ранг формулы $x = x$ строго больше n , то по компактности и в силу того, что множество $p^c(\mathcal{M})$ совпадает с множеством, определяемым формулой $\forall z_1 \dots \forall z_n (\bigwedge_{i=1}^n nA(z_i) \wedge$

$d_\psi(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \psi(x, z_1, \dots, z_n)$, можно реализовать в типе p^c полное дваветвящееся дерево высоты $n + 1$, что приводит к противоречию.

А теперь воспользуемся конечностью (φ, ψ, θ) -ранг формулы $x = x$. Отсюда сразу следует конечность (φ, ψ, θ) -ранга любой формулы. Далее мы применяем стандартную технику из теории стабильности для построения контроллера d_φ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \subset M \models T$, причем множество A формульное, T – упорядоченно стабильная теория, $p \in S_1(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. тип p неопределим;
2. частичный выпукло-полный тип p^c неопределим;
3. существует A -формула $H(x, \bar{y})$ такая, что для любой A -формулы $\theta(\bar{y})$

выполняется:

$$[C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), p^c) \bigvee C(H(x, \bar{y}), \neg\theta(\bar{y}), p^c)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидным образом следует из теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1 Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 5435-5483.

2 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. of Symbolic Logic. – 2001. – P. 1382-1414.

3 Байжанов Б.С. Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях // Математические труды. – 2005. – Т. 8, №2. – С. 3-38.

4 Байжанов Б.С., Вербовский В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, №3. – С. 303-325.

5 Neumann В.Н. Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – P. 76-79.

Статья поступила в редакцию 20.10.2015

Байжанов Б.С., Вербовский В.В. РЕТТЕЛГЕН ТҰРАҚТЫ ТЕОРИЯЛАРДАҒЫ 1-ТИПТЕРІНІҢ АНЫҚТАЛЫМДЫҒЫ ТУРАЛЫ

Сызықты реттелген құрылым λ -тұрақты реттелімді деп аталады, егер осы құрылымның кез келген $\langle C, D \rangle$ дедекинд қималары және қуаты λ -дан аспайтын кез келген A ішкі жиындары үшін $\langle C, D \rangle$ қимасымен үйлесімді ең үлкен λ 1-типтері бар болатын болса. Бірінші ретті предикаттар логикасының толық теориясы λ -тұрақты реттелімді деп аталады, егер оның кез келген моделі λ -тұрақты реттелімді болатын болса. Осы жұмыста λ -тұрақты реттелімді теорияның моделінің ішкі жиынындағы 1-типті анықталымдық мәселесі зерттелген және критерий берілген.

Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V. ON DEFINABILITY OF 1-TYPES ON O-STABLE THEORIES

A linearly ordered structure is called o - λ -stable if for any Dedekind cut $\langle C, D \rangle$ in this structure and any subset A of cardinality at most λ there exist at most λ 1-types which are consistent with the cut $\langle C, D \rangle$. A Complete first order theory is called o - λ -stable, if any its model is. In this article we investigate the question of definability of 1-type over a set of a model of an o - λ -stable theory and give a criteria.

**TWO NEW WALD'S TYPE GOODNESS-OF-FIT TESTS FOR
BINORMALITY**

VOINOV YE.

Institute for Mathematics and Mathematical Modeling
050010, Almaty, 125 Pushkin str., e-mail: v.yevgeniy@yahoo.com

Аннотация: New Wald's type chi-squared invariant goodness-of-fit tests for binormality are introduced. The tests are based on a linear transformation of a two-dimensional sample from a population that diagonalizes the sample covariance matrix, and a modification of Moore and Stubblebine technique for construction chi-squared type tests proposed in 1981. More precise formulation of the well-known Moore's 1977 theorem given by Voinov in 2013 permitted to get these new results. A comparison of simulated power of these tests with respect to numerous alternatives is presented. The simulated power of the proposed modified McCulloch's test with respect to nine different alternatives is comparable with the power of the well known Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Henze and Zirkler, Doornik and Hansen, and, modified by Royston in 1992 the Shapiro-Wilk's W tests. The overall conclusion of this research is that all seven tests considered can be used in practice.

Keywords: Modified chi-squared goodness-of-fit tests, new tests for binormality, power of tests.

1. INTRODUCTION

The assumption of multivariate normality (MVN), in particular of binormality, is of great importance for applied multivariate statistics, e.g., for analysis of variance, discriminant analysis, canonical correlation and factor analysis, analysis of regression residuals and residuals in time-series models, etc. To check that assumption the most powerful tests should be used, because tests with low power cannot discriminate for sure between the null hypothesis of binormality and supposed alternatives. Several examples of such a situation in

Keywords: *Modified chi-squared goodness-of-fit tests, new tests for binormality, power of tests.*

2010 Mathematics Subject Classification: 62H10, 62H15.

Funding: Science Committee of Ministry of Education and Science of Kazakhstan, Grant Number 3361/GF4.

© Voinov Ye., 2015.

the univariate case can be mentioned (see, e.g., Voinov et al. [1], Sec. 3.10.1, and Sec. 3.9). Henze [2, p.468] stated that those tests of MVN, and binormality must be invariant with respect to affine transformations of sample data.

Two nice surveys of the state of art are known: Henze [2], and Mecklin and Mundfrom [3]. Those surveys list tenth of publications devoted to testing of MVN, and binormality in particular. It is almost impossible to find out and cite all existing papers on tests for binormality. We would like to mention here the papers of Szkutnik [4], Versluis [5], Bogdan [6], Székely and Rizzo [7], Sürücü [8], Doornik and Hansen [9], Villasenor Alva and Estrada [10], and Hanusz and Tarasińska [11]. In this article we introduce new invariant chi-squared goodness-of-fit tests for binormality. Section 1 is devoted to the theoretical background. Closed form expressions for the tests proposed are derived in Section 2. In Section 3 a Monte-Carlo study of power comparison of different tests is presented. A conclusion and recommendations are given in Section 4.

2. THEORETICAL BACKGROUND

The theory of modified chi-squared Wald's type tests of fit (Moore and Spruill [12], Moore [13], and Nikulin [14]) is briefly described in [15]. Denote $V^{(n)}(\hat{\theta}_n)$ the r -vector of standardized frequencies with components $[N_i^{(n)} - np_i(\hat{\theta}_n)]/[np_i(\hat{\theta}_n)]^{1/2}$, $i=1, \dots, r$, where $N_i^{(n)}$ are observed frequencies and $\hat{\theta}_n$ is the maximum likelihood estimator of a parameter θ . The Wald's type statistic is then written as [16]

$$Y_n(\hat{\theta}_n) = V^{(n)T}(\hat{\theta}_n)\Sigma_n^-V^{(n)}(\hat{\theta}_n), \quad (1)$$

where Σ_n^- is an estimate of Σ^- that is any generalized matrix inverse of Σ , Σ being the limit covariance matrix of $V^{(n)}(\hat{\theta}_n)$. Let X_1, \dots, X_n be independent identically distributed two-dimensional normal random vectors with the following joint probability density function

$$f(x|\theta) = (2\pi)^{-1}|\Sigma_0|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma_0^{-1}(x - \mu) \right],$$

where μ is a two-dimensional vector of means and Σ_0 is a positive-definite covariance matrix. Let a given vector of unknown parameters be $\theta =$

$(\mu_{11}, \mu_{12}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})^T$. Given $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_r = \infty$, the r grouping cells can be defined as (Moore and Stubblebine [16])

$$E_{in}(\hat{\theta}_n) = \{X \in R^2 : c_{i-1} \leq (X - \bar{X})^T S^{-1} (X - \bar{X}) < c_i\}, \quad i = 1, \dots, r,$$

where \bar{X} and S are maximum likelihood estimators of μ and Σ_0 correspondingly. The estimated probability to fall into each cell is $p_{in}(\hat{\theta}_n) = \int_{E_{in}(\hat{\theta}_n)} f(x|\hat{\theta}_n) dx$. If c_i is the i/r point of the central chi-squared distribution with 2 degrees of freedom, then the cells are equiprobable under the estimated parameter value $\hat{\theta}_n$ and $p_{in}(\hat{\theta}_n) = 1/r$, $i = 1, \dots, r$. Denote by $V(\hat{\theta}_n)$ a vector of standardized cell frequencies with components $V_{in}(\hat{\theta}_n) = (N_i^{(n)} - n/r)/\sqrt{n/r}$, $i = 1, \dots, r$, where $N_i^{(n)}$ is the number of random vectors X_1, \dots, X_n falling in $E_{in}(\hat{\theta}_n)$. The (5×5) Fisher information matrix $J(\theta)$ for one observation can be presented as (see [16])

$$J(\theta) = \begin{pmatrix} \Sigma_0^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix},$$

where Q is the (3×3) covariance matrix of $r = (s_{11}, s_{12}, s_{22})^T$, a vector of the entries of $\sqrt{n}S$. The elements of Q can be written down as [17]

$$\text{Var}(s_{ij}) = \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ii}\sigma_{jj}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \leq j,$$

$$\text{Cov}(s_{ik}, s_{jl}) = \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad i \leq j, k \leq l,$$

where σ_{ij} , $i, j = 1, 2$, are elements of Σ_0 . In our case the matrix Q will be

$$Q = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^2 & 2\sigma_{11}\sigma_{12} & 2\sigma_{12}^2 \\ 2\sigma_{11}\sigma_{12} & \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}^2 & 2\sigma_{12}\sigma_{22} \\ 2\sigma_{12}^2 & 2\sigma_{12}\sigma_{22} & 2\sigma_{22}^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Following [16] for a specified θ_0 define $p_i(\theta, \theta_0) = \int_{E_i(\theta_0)} f(x|\theta) dx$, where $E_i(\theta_0) = \{X \in R^2 : c_{i-1} \leq (X - \mu)^T \Sigma_0^{-1} (X - \mu) < c_i\}$, $i = 1, \dots, r$.

Define $(r \times 5)$ -matrix $B = B(\theta, \theta_0)$ with its elements being

$$B_{ij} = \frac{1}{\sqrt{p_i(\theta, \theta_0)}} \frac{\partial p_i(\theta, \theta_0)}{\partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

From Lemma 1 of [16] it follows that for any c_i and θ_0

$$\left. \frac{\partial p_i(\theta, \theta_0)}{\partial \mu_j} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

$$\left. \frac{\partial p_i(\theta, \theta_0)}{\partial \sigma_{jk}} \right|_{\theta=\theta_0} = d_i \sigma^{jk}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq k \leq 2,$$

where σ^{jk} are the elements of Σ_0^{-1} and

$$d_i = \frac{1}{4} \left(c_{i-1} e^{-c_{i-1}/2} - c_i e^{-c_i/2} \right), \quad i = 1, \dots, r.$$

As per [16] the Wald's type Nikulin-Rao-Robson (NRR) statistic based on the MLEs (see [1]) can be presented as

$$Y_n^2(\hat{\theta}_n) = V^{(n)T}(\hat{\theta}_n) \Sigma_n^- V^{(n)}(\hat{\theta}_n), \quad (3)$$

where Σ_n is the estimate of the limiting covariance matrix $\Sigma = I - qq^T - BJ^{-1}B^T$ of standardized frequencies $V_n(\hat{\theta}_n)$, q being the r -vector with its entries as $1/\sqrt{r}$. The statistic (3) can be presented also as (see [12], p. 610)

$$Y_n^2(\hat{\theta}_n) = V^{(n)T}(\hat{\theta}_n) (I - B_n J_n^{-1} B_n^T)^{-1} V^{(n)}(\hat{\theta}_n), \quad (4)$$

where B_n and J_n are MLEs of matrices B and J respectively. Statistics (3) and (4) are known as NRR test (see e.g., [1]). The Fisher's information matrix for one observation is $J = \begin{pmatrix} \Sigma_0^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ and $J^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, where Q is defined by formula (2). The matrix B can be blocked as $(0 \tilde{B})$, where [15]

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} d_1 \frac{\sqrt{r}\sigma_{22}}{\delta} & -d_1 \frac{\sqrt{r}\sigma_{12}}{\delta} & d_1 \frac{\sqrt{r}\sigma_{11}}{\delta} \\ d_2 \frac{\sqrt{r}\sigma_{22}}{\delta} & -d_2 \frac{\sqrt{r}\sigma_{12}}{\delta} & d_2 \frac{\sqrt{r}\sigma_{11}}{\delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_r \frac{\sqrt{r}\sigma_{22}}{\delta} & -d_r \frac{\sqrt{r}\sigma_{12}}{\delta} & d_r \frac{\sqrt{r}\sigma_{11}}{\delta} \end{pmatrix},$$

σ_{ij} , $i, j=1,2$, being elements of Σ_0 , and $\delta = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$. After simple matrix algebra one gets $BJ^{-1}B^T = \tilde{B}Q\tilde{B}^T$, where [15]

$$\tilde{B}Q\tilde{B}^T = \frac{r[4\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - 3\sigma_{11}\sigma_{12}^2\sigma_{22} + \sigma_{12}^4]}{\delta^2} \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1 d_2 & \dots & d_1 d_r \\ d_1 d_2 & d_2^2 & \dots & d_2 d_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_M d_1 & d_M d_2 & \dots & d_r^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

and the statistic (4) becomes

$$Y_n^2(\hat{\theta}_n) = V_n^T(\hat{\theta}_n)(I_r - \tilde{B}_n Q_n \tilde{B}_n^T)^{-1} V_n(\hat{\theta}_n). \quad (6)$$

The limit covariance matrix $\Sigma = I - qq^T - BJ^{-1}B^T$ of the standardized frequencies $V_n(\hat{\theta}_n)$ can be written down as $\Sigma = I - qq^T - \tilde{B}Q\tilde{B}^T$. Because of (5) the matrix $\Sigma = I - qq^T - BJ^{-1}B^T$ depends on unknown parameters $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, and, in accordance with the Theorem 2 of [15], the limit distribution of the statistic $Y_n^2(\hat{\theta}_n)$ cannot be chi-squared and will depend on unknown parameters. From (5) we see that the limit covariance matrix $\Sigma = I - qq^T - \tilde{B}Q\tilde{B}^T$ will not depend on unknown parameters if $\sigma_{12}=0$ i.e., if Σ_0 is a diagonal matrix.

3. NEW TESTS SUGGESTED

We are now ready to construct chi-squared Wald's type goodness-of-fit tests for the two-dimensional normal distribution if Σ_0 is a diagonal matrix. Since

$Q = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{22}^2 \end{pmatrix}$, the Fisher information matrix for one observation $J(\theta) =$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_0^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \text{ is } J(\theta) = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2\sigma_{11}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sigma_{22}^2) \end{pmatrix}.$$

The matrix $\tilde{B} = \begin{pmatrix} d_1/\sigma_{11} & d_1/\sigma_{22} \\ d_2/\sigma_{11} & d_2/\sigma_{22} \\ \dots & \dots \\ d_r/\sigma_{11} & d_r/\sigma_{22} \end{pmatrix}$, and, correspondingly,

$$\tilde{B}^T \tilde{B} = r \sum d_i^2 \begin{pmatrix} 1/\sigma_{11}^2 & 1/(\sigma_{11}\sigma_{22}) \\ 1/(\sigma_{11}\sigma_{22}) & 1/\sigma_{22}^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

The matrix $D = Q^{-1} - \tilde{B}^T \tilde{B}$ equals

$$D = \begin{pmatrix} (1 - 2r \sum d_i^2)/(2\sigma_{11}^2) & -r \sum d_i^2/(\sigma_{11}\sigma_{22}) \\ -r \sum d_i^2/(\sigma_{11}\sigma_{22}) & (1 - 2r \sum d_i^2)/(2\sigma_{22}^2) \end{pmatrix},$$

and

$$D^{-1} = \frac{4}{1 - 4r \sum d_i^2} \begin{pmatrix} (1 - 2r \sum d_i^2)\sigma_{11}^2/2 & r \sum d_i^2 \sigma_{11}\sigma_{22} \\ r \sum d_i^2 \sigma_{11}\sigma_{22} & (1 - 2r \sum d_i^2)\sigma_{22}^2/2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Since $\tilde{B}D^{-1} = \frac{2\sqrt{r}}{1-4r\sum d_i^2} \begin{pmatrix} d_1\sigma_{11} & d_1\sigma_{22} \\ d_2\sigma_{11} & d_2\sigma_{22} \\ \dots & \dots \\ d_r\sigma_{11} & d_r\sigma_{22} \end{pmatrix}$, then

$$\tilde{B}D^{-1}\tilde{B}^T = \frac{4}{1-4r\sum d_i^2} \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & \dots & d_1d_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_rd_1 & d_rd_2 & \dots & d_r^2 \end{pmatrix}.$$

Denoting $V_i = (N_i^{(n)} - n/r)/\sqrt{n/r}$, $i = 1, \dots, r$, from all the above it follows that for any positive definite covariance matrix Σ_0 of the null hypothesis $f(x, \theta)$ the closed form of the NRR statistic (4) becomes

$$Y_n^2(\hat{\theta}_n) = \sum V_i^2 + \frac{4r(\sum V_i d_i)^2}{1-4r\sum d_i^2}. \quad (9)$$

In our case the limit covariance matrix $\Sigma = I - qq^T - BJ^{-1}B^T$ of standardized frequencies $V^{(n)}(\theta_n)$ does not depend on parameters, and the NRR statistic (9) will follow in the limit the chi-squared distribution with $r - 1$ degrees of freedom.

McCulloch [18] proposed a useful decomposition of $Y_n^2(\hat{\theta}_n)$, namely $Y_n^2(\hat{\theta}_n) = U_n^2(\hat{\theta}_n) + S_n^2(\hat{\theta}_n)$, where

$$U_n^2(\hat{\theta}_n) = V_n^T(\hat{\theta}_n)[I - B_n(B_n^T B_n)^{-1}B_n^T]V_n(\hat{\theta}_n) \quad (10)$$

is the Dzhaparidze-Nikulin (DN) [19] statistic, and

$$S_n^2(\hat{\theta}_n) = Y_n^2(\hat{\theta}_n) - U_n^2(\hat{\theta}_n) = V_n^T(\hat{\theta}_n)B_n[(J_n - B_n^T B_n)^{-1} + (B_n^T B_n)^{-1}]B_n^T V_n(\hat{\theta}_n). \quad (11)$$

McCulloch ([18], theorem 4.2) showed that if the rank of B is s , then $U_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $S_n^2(\hat{\theta}_n)$ are asymptotically independent and distributed in the limit as χ_{r-s-1}^2 and χ_s^2 respectively.

Since in our case the first two columns of B_n are columns of zeros and the rest columns are linearly dependent, the matrix B_n has rank 1. From this it follows that $(B_n^T B_n)^{-1}$ does not exist, but, using the well known facts from the theory of multivariate normal distribution (e.g., [13], p. 132), we may replace

$A_n^{-1} = (B_n^T B_n)^{-1}$ by $A_n^- = (B_n^T B_n)^-$, where A_n^- is any generalized matrix inverse of A_n . Thus, for testing binormality with cells $E_{in}(\hat{\theta}_n)$ we may use: the NRR test defined by (9), the DN statistic

$$U_n^2(\hat{\theta}_n) = V_n^T(\hat{\theta}_n)[I - B_n(B_n^T B_n)^- B_n^T]V_n(\hat{\theta}_n), \quad (12)$$

and the statistic $S_n^2(\hat{\theta}_n)$ (McCull test in the sequel)

$$V_n^T(\hat{\theta}_n)B_n[(J_n - B_n^T B_n)^{-1} + (B_n^T B_n)^-]B_n^T V_n(\hat{\theta}_n) \quad (13)$$

that have asymptotically χ_{r-1}^2 , χ_{r-2}^2 , and χ_1^2 distributions correspondingly.

It is easily verified that $(\tilde{B}^T \tilde{B})^- = \frac{1}{r \sum d_i^2} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ is a generalized matrix inverse for $\tilde{B}^T \tilde{B}$ defined by formula (7). After some matrix algebra from (12) and (13) one gets the following closed form expressions:

$$U_n^2(\hat{\theta}_n) = \sum V_i^2 - \frac{(\sum V_i d_i)^2}{\sum d_i^2}, \quad (14)$$

and

$$S_n^2(\hat{\theta}_n) = \frac{(\sum V_i d_i)^2}{(1 - 4r \sum d_i^2) \sum d_i^2}. \quad (15)$$

The above approach for a diagonal positive definite covariance matrix Σ_0 suggests the following procedure for developing tests for binormality for any positive definite matrix $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$. Let X_1, \dots, X_n be a set of two-dimensional random vectors, and S be a corresponding sample covariance matrix. Let e_1 and e_2 be orthogonal normalized eigen-vectors of S , then the Karhunen-Loév transform $Y = (e_1 \ e_2)^T X_i$, $i = 1, \dots, n$, will give a set Y_1, \dots, Y_n of two-dimensional random vectors with the diagonal sample covariance matrix S_y . Denote $\mathcal{V}_i = (\mathcal{N}_i^{(n)} - n/r)/\sqrt{n/r}$, $i = 1, \dots, n$, where $\mathcal{N}_i^{(n)}$ is the number of vectors Y_1, \dots, Y_n that fall into intervals $\tilde{E}_{in}(\hat{\theta}_n) = \{Y \in R^2 : c_{i-1} \leq (Y - \bar{Y})^T S_y^{-1} (Y - \bar{Y}) < c_i\}$, $i = 1, \dots, r$. Formulas (9), (14), and (15) for our new NRR, DN, and McCull tests become:

$$Y_n^2(\hat{\theta}_n) = \sum \mathcal{V}_i^2 + \frac{4r(\sum \mathcal{V}_i d_i)^2}{1 - 4r \sum d_i^2}, \quad (16)$$

$$U_n^2(\hat{\theta}_n) = \sum \mathcal{V}_i^2 - \frac{(\sum \mathcal{V}_i d_i)^2}{\sum d_i^2}, \quad (17)$$

and

$$S_n^2(\hat{\theta}_n) = \frac{(\sum \mathcal{V}_i d_i)^2}{(1 - 4r \sum d_i^2) \sum d_i^2}. \quad (18)$$

Note that \mathcal{V}_i based on Y_1, \dots, Y_n in formulas (16)–(18) are not the same as V_i based on X_1, \dots, X_n in formulas (9) and (14)–(15).

4. A SIMULATION STUDY OF PROPOSED TESTS

A simulation study was conducted to compare the power of the Doornik and Hansen (DH) [9], Henze and Zirkler (HZ) [20], Royston (R92) [21], Nikulin-Rao-Robson (NRR) test (9), McCulloch's (McCull) test (18), Anderson-Darling (AD), and Cramer von Mises (CM) tests. To simulate DH, HZ, and R92 tests the *R*-scripts provided by Matias Saliban-Barrera were used. AD and CM tests were simulated using corresponding formulas of Henze ([2], p. 483). We do not consider the Dzhaparidze-Nikulin (DN) and Chernoff-Lehmann (ChLeh) tests of Moore and Stubblebine ([16], p. 718), because of their low power (see Figures 1a-1d). From Fig. 1 one sees that the power of McCull test almost does not

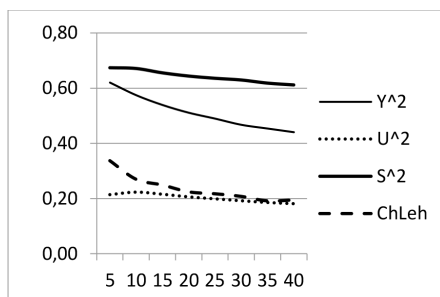


Figure 1a – Power w.r.t. two-dimensional logistic with independent standard logistic components ($n = 250$)

depend on the number of equiprobable grouping intervals and that power of DN (U^2) and ChLeh tests is noticeably less than that of NRR (Y^2) and McCull (S^2) tests. The same lack of power for the DN and Chernoff-Lehmann tests

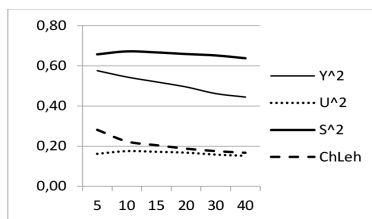


Figure 1b – Power w.r.t. two-dimensional Student t (10 d.f.) with independent components ($n = 250$)

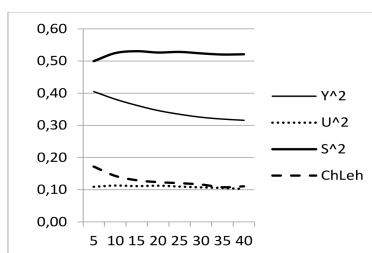


Figure 1c – Power w.r.t. two-dimensional Student t (10 d.f.) with dependent components for $n = 250$ (formula (5) of Farrell et al. [22] was used)

was observed in the univariate case (see Voinov et al. [22]). Because of this in the sequel we shall not consider the ChLeh and DN tests. Because of weak dependence of the power of McCull test on the number of grouping intervals, the powers of NRR and McCull tests in Tables 2-5 were simulated for $r = 5$ that seems to be optimal. We considered 9 alternatives. Namely: Pearson Type II ($m = 10$, and $m = 0$ (uniform)), two-dimensional Student t (10 and 5 d.f.), two-dimensional Khinchine distribution, and 4 different mixtures of normal distributions.

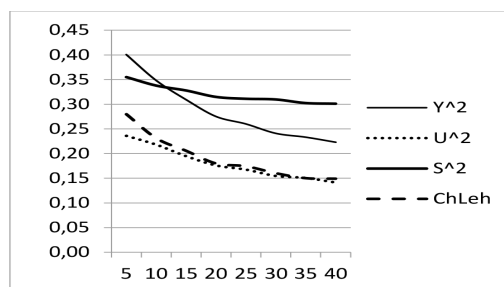


Figure 1d – Power w.r.t. two-dimensional Khinchine distribution for $n = 250$

To construct graphs in Fig. 1 and Tables 2-5 we used simulated critical values of level $\alpha=0.05$ that are given in Table 1.

It is not easy to compare different tests with respect to (w.r.t.) different alternatives. The simplest way is to compare average (w.r.t. 9 alternatives selected) power of all 7 tests under consideration. The results of our simulations are presented in Fig. 2.

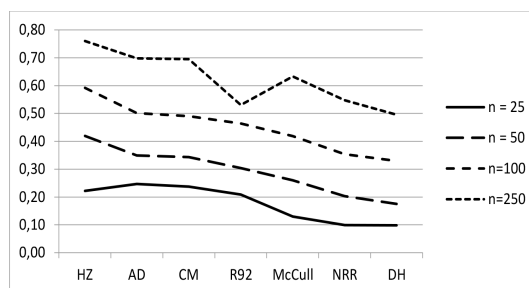


Figure 2 – Average powers of HZ, AD, CM, R92, McCull, NRR, and DH tests as functions of the sample size

From this Figure one sees that, evidently, HZ, AD, and CM tests seem to

Table 1 – Simulated critical values for the right-tailed rejection region of size $\alpha=0.05$

r	n	<i>McCull</i>	<i>NRR</i>	<i>ChLeh</i>
3	250	3.882	6.018	N/A
5	250	3.830	9.490	8.033
10	250	3.730	16.890	15.635
15	250	3.650	23.640	22.344
20	250	3.620	30.100	28.924
25	250	3.600	36.400	35.190
30	250	3.560	42.550	41.350
40	250	3.530	54.550	53.140
3	100	3.868	5.959	
5	100	3.780	9.400	
10	100	3.550	16.750	
15	100	3.430	23.510	
20	100	3.330	30.020	
3	50	3.887	6.133	
5	50	3.690	9.350	
10	50	3.300	16.640	
3	25	4.000	6.100	
5	25	3.570	9.240	

be the best. At the same time it can be concluded that all tests have a right to be used in practice. We see also that much depends on an alternative. From Tables 2 and 3, e.g., we see that AD, CM, and McCull tests are the best w.r.t. Pearson Type II ($m = 0$) alternative, and that HZ test is preferable w.r.t. Khinchine alternative and mixtures of normal distributions for small samples of size $n = 25$ and $n = 50$. From Table 5 we see that HZ, R92, AD, CM, and McCull tests are perfect w.r.t. the mixture of normal distributions $0.5N(0, I) + 0.5N(3, I)$ if $n=250$.

REMARK

It is of interest to compare simulated powers of AD, CM, HZ, and McCull tests with those for Z_2 , C_2 , R_2 , $b_{1,2}$, and W_2 tests of Sürücü [8], Table 1, p. 1325 for $n = 50$ (Table 6).

n	HZ	DH	$R92$	AD	CM
250	1.058	9.594	5.948	1.314	0.221
100	0.957	9.560	5.868	1.293	0.221
50	0.859	9.513	6.018	1.323	0.224
25	0.737	9.411	4.968	1.298	0.223

Table 2 – Simulated powers of tests with respect to alternatives considered for $n=25$, $N=20,000$ replications. In the sequel $\mu = 3$ denotes the mean vector $(3, 3)^T$, B denotes 1 on diagonal and 0.9 off diagonal, I is the identity matrix

<i>Alternative</i>	HZ	AD	CM	$R92$	$McCull$	NRR	DH
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 10$)	0.045	0.059	0.066	0.067	0.056	0.055	0.028
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 0$)	0.223	0.637	0.592	0.223	0.418	0.143	0.038
<i>MultivariateT</i> (10d.f.)	0.122	0.325	0.313	0.188	0.071	0.090	0.154
<i>MultivariateT</i> (5d.f.)	0.203	0.520	0.520	0.303	0.168	0.206	0.326
<i>Khinchine</i>	0.111	0.087	0.068	0.082	0.058	0.065	0.038
$0.5N(0, I) + 0.5N(3, I)$	0.311	0.274	0.294	0.309	0.173	0.055	0.027
$0.79N(0, I) + 0.21N(3, I)$	0.570	0.080	0.075	0.556	0.060	0.057	0.076
$0.5N(0, B) + 0.5N(0, I)$	0.189	0.110	0.089	0.087	0.066	0.072	0.068
$0.9N(0, B) + 0.1N(0, I)$	0.221	0.127	0.117	0.065	0.100	0.147	0.128
<i>Average</i>	0.22	0.25	0.24	0.21	0.13	0.10	0.10

From this Table we see that as Sürücü [8], p.1324 wrote "as an omnibus goodness-of-fit test the C_2 test is clearly most powerful overall". This is clear indeed, but we have to note that AD, CM, and McCull tests are quite comparable with the C_2 test.

4. CONCLUSION AND RECOMMENDATIONS

To conclude the research we have to note that no one of seven tests considered can be a panacea when testing for two-dimensional normality. Any of them can be used in practice. But, before selecting a proper test, it is highly desirable to have some imagination about possible alternative.

Table 3 – Simulated powers of tests with respect to specified alternatives for $n = 50$, $N=20,000$

<i>Alternative</i>	<i>HZ</i>	<i>AD</i>	<i>CM</i>	<i>R92</i>	<i>McCull</i>	<i>NRR</i>	<i>DH</i>
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 10$)	0.029	0.065	0.073	0.036	0.060	0.067	0.022
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 0$)	0.581	0.952	0.960	0.490	0.824	0.407	0.192
<i>MultivariateT</i> (10d.f.)	0.160	0.317	0.312	0.211	0.135	0.173	0.263
<i>MultivariateT</i> (5d.f.)	0.457	0.507	0.496	0.503	0.417	0.478	0.568
<i>Khinchine</i>	0.153	0.149	0.128	0.049	0.092	0.100	0.042
$0.5N(0, I) + 0.5N(3, I)$	0.805	0.585	0.587	0.535	0.369	0.072	0.020
$0.79N(0, I) + 0.21N(3, I)$	0.929	0.094	0.089	0.813	0.068	0.069	0.116
$0.5N(0, B) + 0.5N(0, I)$	0.335	0.219	0.195	0.056	0.131	0.134	0.090
$0.9N(0, B) + 0.1N(0, I)$	0.326	0.257	0.251	0.044	0.243	0.327	0.266
<i>Average</i>	0.42	0.35	0.34	0.30	0.26	0.20	0.18

Table 4 – Simulated powers of tests with respect to specified alternatives for $n = 100$, $N=20,000$

<i>Alternative</i>	<i>HZ</i>	<i>AD</i>	<i>CM</i>	<i>R92</i>	<i>McCull</i>	<i>NRR</i>	<i>DH</i>
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 10$)	0.058	0.090	0.100	0.036	0.073	0.087	0.016
<i>PearsonTypeII</i> ($m = 0$)	0.977	1.000	1.000	0.979	0.997	0.843	0.837
<i>MultivariateT</i> (10d.f.)	0.215	0.327	0.319	0.331	0.254	0.320	0.410
<i>MultivariateT</i> (5d.f.)	0.690	0.819	0.815	0.755	0.734	0.772	0.816
<i>Khinchine</i>	0.262	0.291	0.256	0.052	0.167	0.158	0.049
$0.5N(0, I) + 0.5N(3, I)$	0.998	0.924	0.911	0.932	0.728	0.109	0.025
$0.79N(0, I) + 0.21N(3, I)$	0.999	0.119	0.113	0.992	0.083	0.069	0.243
$0.5N(0, B) + 0.5N(0, I)$	0.634	0.448	0.418	0.055	0.269	0.246	0.106
$0.9N(0, B) + 0.1N(0, I)$	0.495	0.494	0.481	0.047	0.465	0.577	0.466
<i>Average</i>	0.59	0.50	0.49	0.46	0.42	0.35	0.33

ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to Matias Saliban-Barrera for providing an access to R-codes used in Farrell et al. [23].

Table 5 – Simulated powers of tests with respect to specified alternatives for $n = 250$, $N=20,000$

<i>Alternative</i>	<i>HZ</i>	<i>AD</i>	<i>CM</i>	<i>R92</i>	<i>McCull</i>	<i>NRR</i>	<i>DH</i>
<i>PearsonTypeII(m = 10)</i>	0.072	0.151	0.164	0.050	0.118	0.164	0.030
<i>PearsonTypeII(m = 0)</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
<i>MultivariateT(10d.f.)</i>	0.408	0.671	0.676	0.597	0.580	0.660	0.701
<i>MultivariateT(5d.f.)</i>	0.962	0.995	0.995	0.977	0.986	0.987	0.988
<i>Khinchine</i>	0.614	0.610	0.580	0.050	0.398	0.355	0.048
$0.5N(0, I) + 0.5N(3, I)$	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.219	0.075
$0.79N(0, I) + 0.21N(3, I)$	1.000	0.154	0.157	1.000	0.105	0.068	0.678
$0.5N(0, B) + 0.5N(0, I)$	0.980	0.848	0.833	0.055	0.670	0.562	0.148
$0.9N(0, B) + 0.1N(0, I)$	0.805	0.856	0.854	0.045	0.844	0.914	0.789
<i>Average</i>	0.76	0.70	0.70	0.53	0.63	0.55	0.50

Table 6 – Simulated powers of tests with respect to specified alternatives for $n = 50$, $N=20,000$

<i>Alternative</i>	Z_2	C_2	R_2	$b_{1,2}$	W_2	<i>AD</i>	<i>CM</i>	<i>HZ</i>	<i>McCull</i>
<i>St.t</i> (2 d.f.)	0.74	0.97	0.99	0.94	0.96	0.98	0.98	0.97	0.96
<i>St.t</i> (6 d.f.)	0.30	0.45	0.58	0.53	0.49	0.39	0.38	0.34	0.31
Uniform	0.07	0.97	0.41	0	0.07	0.95	0.96	0.58	0.83
<i>Average</i>	0.37	0.80	0.66	0.49	0.51	0.77	0.77	0.63	0.70

REFERENCES

- 1 Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N. Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications.–Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Academic Press, Elsevier. – 2013. – 229 p.
- 2 Henze N. Invariant tests for multivariate normality: a critical review // Statistical papers. – 2002.– V. 43. – P. 467-506.
- 3 Mecklin C.J., Mundfrom D.J. An appraisal and Bibliography of Tests for Multivariate Normality // International Statistical Review. – 2004. – V. 72. – P. 123-138.
- 4 Szkutnik Z. Most powerful invariant tests for binormality // The Annals of Statistics. – 1988. – V. 16. – P. 292-301.

- 5 Versluys C. Comparison of tests for bivariate normality with unknown parameters by transformation to a univariate statistic // *Communications in Statistics. – Theory and Methods.* – 1996. – V. 25.– P. 647-665.
- 6 Bogdan M. Data driven smooth tests for bivariate normality // *J. of Multivariate Analysis.* – 1999. – V. 68. – P. 26-53.
- 7 Székely G.J., Rizzo M.L. A new test for multivariate normality // *Journal of Multivariate Analysis.* – 2005. – V. 93. – P. 58-80.
- 8 Sürücü B. Goodness-of-fit tests for multivariate distributions // *Communications in Statistics-Theory and Methods.* – 2006. – V. 35. – P. 1319-1331.
- 9 Doornik J.A., Hansen H. Supplement 0305-9049 // *Oxford Bulletin in Economics and Statistics.* – 2008. – P. 927-939.
- 10 Villasenor Alva J.A., González Estrada E. A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality // *Communications in Statistics. – Theory and Methods.* – 2009. – V. 38. – P. 1870-1883.
- 11 Hanusz Z., Tarasińska J. New tests for multivariate normality based on Small's and Srivastava's graphical methods // *J. of Statistical Computation and Simulation.* – 2012. – V. 82. – P. 1743-1752.
- 12 Moore D.S., Spruill M.C. Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit // *The Annals of Statistics.* – 1975. – V. 3. – P. 599-616.
- 13 Moore D.S. Generalized inverses. Wald's method and the construction of chi-squared tests of fit // *J. of the American Statistical Association.* – 1977. – V. 72. – P. 131-137.
- 14 Nikulin M.S. Chi-square test for continuous distributions // *Theory of Probability and its Applications.* – 1973. – V. 18. – P. 638-639.
- 15 Voinov V. A Note on Wald's Type Chi-squared Tests of Fit // *Communications in Statistics-Theory and Methods.* – 2013. – <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03610926.2013.768668>.
- 16 Moore D.S., Stubblebine J.B. Chi-square tests for multivariate normality with application to common stock prices // *Communications in Statistics. – Theory and Methods.* – 1981. – V. A10(8). – P. 713-738.
- 17 Press S.J. *Applied Multivariate Analysis.* – New York: Holt Rinehart and Winston, 1972. – 304 p.
- 18 McCulloch C.E. Relationships among some chi-square goodness of fit statistics // *Communications in Statistics. – Theory and Methods.* – 1985. – V. 14. – P. 593-603.
- 19 Dzhaparidze K.O., Nikulin M.S. On a modification of the standard statistic of Pearson // *Theory of Probability and Applications.* – 1974. – V. 19. – P. 851-853.
- 20 Henze N. and Zirkler B. A class of invariant consistent tests for multivariate normality // *Communications in Statistics. – Theory and Methods.* – 1990. – V. 19. – P. 3595-3617.
- 21 Royston J.P. Approximating the Shapiro-Wilk W-Test for non-normality // *Statistics and Computing.* – 1992. – V. 2. – P. 117-119.

22 Voinov V., Pya N., Alloyarova R. A comparative study of some modified chi-squared tests // Communications in Statistics. – Simulation and Computation. – 2009. – V. 38. – P. 355-367.

23 Farrell P.J., Saliban-Barrera M., Naczk K. On tests for multivariate normality and associated simulation studies // J. of Statistical Computation and Simulation. – 2007. – V. 77. – P. 1065-1080.

Received 22.07.2015

Воинов Е. ЕКІ ӨЛШЕМДІ ҚАЛЫПТЫЛЫҚҚА АРНАЛҒАН ЖАҢА ЕКІ ВАЛЬД ТЕКТЕС КЕЛІСІМ КРИТЕРИЙІ

Екі өлшемді қалыптылыққа екі жаңа Вальд тектес хи-квадрат инвариантты келісімінің критерийі ұсынылған. Критерийлер 1981 жылы ұсынылған хи-квадрат критерийлерін құрастыру үшін ішінара ковариациялық матрицаны диагональды түрге айналдыратын жиынтықтан екі өлшемді іріктеулердің және Мур мен Стаблбайнның әдісін модификациялаудың сызықты түрлендіруіне негізделген. Осы жаңа нәтижелерге жету үшін 1977 жылғы әйгілі Мур теоремасының 2013 жылы Воинов дәлелдеген нақтыланған тұжырымдамасы пайдаланылады. Берілген критерийлердің модельдейтін қуатының әр түрлі баламалық нұсқалармен салыстырмасы көрсетілген. Ұсынылған түрлендірілген McCulloch критерийінің әр түрлі тоғыз баламалық нұсқаларға қатысты модельдейтін қуаты өте танымал Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Henze, Zirkler, Doornik және Hansen, оған қоса 1992ж. Royston өзгерткен Shapiro-Wilk's W тестісінің критерийлерінің қуаттарымен салыстырылады. Жеті критерийдің барлығын да іс жүзінде пайдалануға болатындығы зерттеудің жалпы қорытындысы болып табылады.

Воинов Е. ДВА НОВЫХ КРИТЕРИЯ СОГЛАСИЯ ТИПА ВАЛЬДА ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ

Предложены два новых инвариантных критерия согласия хи-квадрат типа Вальда для двумерной нормальности. Критерии основаны на линейном преобразовании двумерной выборки из совокупности, которое диагонализует выборочную ковариационную матрицу, и модификации метода Мура и Стаблбайна для построения критериев хи-квадрат, предложенном в 1981 году. Для получения этих новых результатов используется более точная формулировка хорошо известной теоремы Мура 1977 года, доказанная Воиновым в 2013 году. Показано сравнение моделируемой мощности данных критериев с различными альтернативами. Моделируемая мощность предложенного модифицированного критерия McCulloch в отношении девяти различных альтернатив сравнивается с мощностями хорошо известных критериев Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Henze и Zirkler, Doornik и Hansen, и, измененный Royston в 1992, W тест Shapiro-Wilk's. Общий вывод исследования состоит в том, что все семь критериев могут быть использованы на практике.

**СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, НАГРУЖЕННОГО ПО
НУЛЬМЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЯМ, С ПОМОЩЬЮ
ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ**

М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ¹, М. И. РАМАЗАНОВ²

¹Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: muvasharkhan@gmail.com

²Институт прикладной математики
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: ramamur@mail.ru

Аннотация: В работе изучаются вопросы разрешимости задачи стабилизации для нагруженного уравнения теплопроводности в заданной полуполосе. Предложен алгоритм выбора граничных функций (управлений), обеспечивающих стабилизацию решения граничной задачи при $t \rightarrow \infty$ к заданному стационарному режиму с предписанной скоростью $\exp(-\sigma_0 t)$.

Ключевые слова: Нагруженное уравнение теплопроводности, граничные управления, стабилизация, спектральная задача.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти такие граничные управления $u_1(t)$, $u_2(t) \in L_2(0, \infty)$, чтобы решение $y(x, t)$ начально-граничной задачи

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot y(x_m, t) = 0, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (1)$$

$$y(-\pi/2, t) = u_1(t), \quad y(\pi/2, t) = u_2(t), \quad (2)$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad (3)$$

стремилось к нулю при $t \rightarrow \infty$ следующим образом:

$$\|y(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq C_0 e^{-\sigma_0 t}, \quad (4)$$

Keywords: *Loaded heat equation, boundary controls, stabilization, spectral problem.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35B35, 35K20, 35R10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0823/ГФ4.

© М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, 2015.

где $Q = \{x, t \mid -\pi/2 < x < \pi/2, t > 0\}$, $\{\alpha_m, m = 1, \dots, M\} \subset \mathbb{C}$ – заданные комплексные числа, $\{x_m, m = 1, \dots, M\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$ – фиксированные точки, σ_0 – заданное положительное число, $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$ – заданная функция. Уравнение (1) называют нагруженным [1], [2]. Отметим, что задача (1)–(4) с одной точкой нагрузки была исследована в [3].

Поставленную задачу можно интерпретировать как обратную: требуется найти тройку функций $\{y(x, t), u_1(t), u_2(t)\}$ при дополнительном условии (4).

2. О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Запишем задачу (1)–(3) в операторной форме

$$Ly = \{y_0, u_1, u_2\}, \text{ где } L : L_2(Q) \rightarrow E \equiv L_2(-\pi/2, \pi/2) \times L_2(0, \infty) \times L_2(0, \infty),$$

и дадим определение сильного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $y(x, t) \in L_2(Q)$ будем называть сильным решением граничной задачи (1)–(3), если существует последовательность

$$\{y_s(x, t)\}_{s=1}^\infty \subset C_{x,t}^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$$

такая, что

$$y_s(x, t) \rightarrow y(x, t) \text{ в } L_2(Q) \text{ при } s \rightarrow \infty,$$

$$Ly_s \rightarrow \{y_0, u_1, u_2\} \in E \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любых заданных управлений $u_1(t), u_2(t) \in L_2(0, \infty)$ и любой начальной функции $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$ граничная задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение

$$y(x, t) \in L_2(Q),$$

причем $y(x, t) \in W(0, \infty)$, где

$$W(0, \infty) = \{v \mid v \in L_2(0, \infty; W_2^1(-\pi/2, \pi/2)), v_t \in L_2(0, \infty; W_2^{-1}(-\pi/2, \pi/2))\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведение к интегральному уравнению. Граничная задача (1)–(3) сводится к изучению следующего нагруженного интегрального уравнения:

$$y(x, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_0(\xi)G(x, \xi, t)d\xi - \int_0^t \sum_{m=1}^M \alpha_m y(x_m, \tau) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x, \xi, t - \tau)d\xi d\tau + \\ + \int_0^t u_1(\tau)H_1(x, t - \tau)d\tau - \int_0^t u_2(\tau)H_2(x, t - \tau)d\tau, \quad (5)$$

где функция Грина G имеет вид:

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n(x + \pi/2) \sin n(\xi + \pi/2) \exp\{-n^2 t\},$$

а функции H_1 и H_2 выражаются через функцию Грина по формулам:

$$H_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t)|_{\xi=-\pi/2}, \quad H_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t)|_{\xi=\pi/2}.$$

Из (5) для неизвестной функции $\mu(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m y(x_m, t)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu(t) + \int_0^t K(t - \tau)\mu(\tau)d\tau = F(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

где ядро интегрального оператора имеет вид

$$K(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\sin\{(2n - 1)(x_m + \pi/2)\}}{2n - 1} \exp\{-(2n - 1)^2 t\}, \quad (7)$$

правая часть уравнения представляет собой сумму $F(t) = F_0(t) + F_1(t) + F_2(t)$, которые определяются функциями $y_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $G(x, \xi, t)$ соответственно.

Очевидно, что функции $K(t) \in L_1(0, \infty)$, а функции $F_j(t)$, $j = 0, 1, 2$, принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$. Остается применить известную теорию интегральных уравнений Вольтерра второго рода для установления разрешимости в пространстве $L_2(0, \infty)$ интегрального уравнения (6) для любых функций $y_0(x)$, $u_j(t)$, $j = 1, 2$, из выше определенных классов.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пусть для заданных функций $y_0(x)$, $u_j(t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, задача (1)–(3) имеет два, неравных друг другу, решения $y_1(x, t)$ и $y_2(x, t)$. Тогда разность $\tilde{y}(x, t) = y_1(x, t) - y_2(x, t)$ будет решением следующей однородной граничной задачи:

$$\begin{cases} \tilde{y}_t(x, t) - \tilde{y}_{xx}(x, t) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \tilde{y}(x_m, t) = 0, & x, t \in Q, \\ \tilde{y}(x, 0) = 0, \quad \tilde{y}(-\pi/2, t) = \tilde{y}(\pi/2, t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Умножая уравнение из (8) скалярно в $L_2(-\pi/2, \pi/2)$ на $\tilde{y}(x, t)$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{y}(x, t)\|_0^2 + \|\tilde{y}_x(x, t)\|_0^2 \leq \sum_{m=1}^M |\alpha_m| \sqrt{\pi} |\tilde{y}(x_m, t)| \cdot \|\tilde{y}(x, t)\|_0. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|_0$ и $(\cdot, \cdot)_0$ обозначены соответственно норма и скалярное произведение в пространстве $L_2(-\pi/2, \pi/2)$. Далее, используя неравенство Коши для правой части (9), имеем

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{y}(x, t)\|_0^2 + \|\tilde{y}_x(x, t)\|_0^2 \leq \sum_{m=1}^M |\alpha_m|^2 \pi^2 \|\tilde{y}(x, t)\|_0^2.$$

Отсюда на основе неравенства Гронуолла следует, что

$$\tilde{y}(x, t) \equiv 0 \in L_\infty((0, \infty); L_2(-\pi/2, \pi/2)) \cap L_2((0, \infty); \dot{W}_2^1(-\pi/2, \pi/2)), \quad (10)$$

т.е. граничная задача (1)–(3) может иметь не более одного решения.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (6) может иметь не более одного решения. В противном случае, если бы интегральное уравнение (6) имело более одного решения, то граничная задача (1)–(3), согласно

соотношению (5), также имела бы более одного решения, что невозможно, как было только что доказано. Это означает, что интегральное уравнение (6) в классе $L_2(0, \infty)$ может иметь только одно решение. Единственность доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вышеприведенное доказательство единственности без изменений проходит и для сопряженной к (8) однородной граничной задачи:

$$\begin{cases} -\tilde{p}_t(x, t) - \tilde{p}_{xx}(x, t) + \sum_{m=1}^M \bar{\alpha}_m \cdot \delta(x - x_m) \otimes \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{p}(\xi, t) d\xi = 0, \{x, t\} \in Q, \\ \tilde{p}(x, \infty) = 0, \tilde{p}(-\pi/2, t) = \tilde{p}(\pi/2, t) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Граничная задача (11) также сводится к изучению соответствующего интегрального уравнения, разрешимость которого устанавливается, как в случае прямой задачи.

Так как для сопряженной граничной задачи (11) имеет место единственность, то соответствующее ему интегральное уравнение в классе $L_2(0, \infty)$ может иметь только тривиальное решение.

Согласно теории интегральных уравнений мы получаем, что в классе $L_2(0, \infty)$ интегральное уравнение (6) имеет единственное решение для любых правых частей $F(t) \in L_2(0, \infty)$. Отсюда сразу же следует существование единственного сильного решения граничной задачи (1)–(3).

Таким образом, нами полностью доказано первое утверждение теоремы 1.

Доказательству второго утверждения теоремы 1, т.е. установлению дополнительных дифференциальных свойств решения задачи (1)–(3), посвящен следующий пункт.

4. О ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ

Заметим, что согласно теореме о следах [4, с. 32-33, 265-269] для заданных функций $u_j(t) \in L_2(0, \infty)$, $j = 1, 2$, существует функция $w(x, t) \in W(0, \infty)$, где

$$W(0, \infty) = \{v | v \in L_2(0, \infty; W_2^1(-\pi/2, \pi/2)), v_t \in L_2(0, \infty; W_2^{-1}(-\pi/2, \pi/2))\},$$

такая, что $w(-\pi/2, t) = u_1(t)$, $w(\pi/2, t) = u_2(t)$.

С учетом этого граничная задача (1)–(3) принимает вид

$$\begin{cases} (y-w)_t(x, t) - (y-w)_{xx}(x, t) + \sum_{m=1}^M \alpha_m (y-w)(x_m, t) = f_1(x, t), \{x, t\} \in Q, \\ (y-w)(x, 0) = y_1(x), (y-w)(-\pi/2, t) = (y-w)(\pi/2, t) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} f_1 = -w_t(x, t) + w_{xx}(x, t) - \sum_{m=1}^M \alpha_m w(x_m, t) \in L_2(0, \infty; W_2^{-1}(-\pi/2, \pi/2)), \\ y_1 = y_0(x) - w(x, 0) \in L_2(-\pi/2, \pi/2). \end{cases} \quad (13)$$

Ранее, в работе [5], на основе установленных там априорных оценок и применения метода Галеркина было доказано, что граничная задача (12) для любых заданных функций $f_1(x, t)$ и $y_1(x)$, удовлетворяющих условиям (13), имеет решение $(y-w)(x, t) \in W(0, \infty)$, т.е. соответствующая (12) граничная задача (1)–(3) имеет решение $y(x, t) \in W(0, \infty)$. Отсюда следует справедливость второго утверждения теоремы 1. Таким образом, завершено доказательство теоремы 1.

Построению и обоснованию алгоритма выбора нужных граничных управляющих функций $u_j(t)$, $j = 1, 2$, в задаче (1)–(4) и его численной реализации посвящен следующий пункт.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ РАСШИРЕНИЕМ ОБЛАСТИ

Рассмотрим в области $Q_1 = \{x, t | -\pi < x < \pi, t > 0\}$ вспомогательную задачу

$$z_t(x, t) - z_{xx}(x, t) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot z(x_m, t) = 0, \{x, t\} \in Q_1, \quad (14)$$

$$z(-\pi, t) = z(\pi, t), z_x(-\pi, t) = z_x(\pi, t), \quad (15)$$

$$z(x, t)|_{t=0} = z_0(x), \quad (16)$$

где $z_0(x)$ – функция, требующая своего определения.

Решение задачи (14)–(16) будем искать в виде

$$z(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_k(t) \varphi_k(x). \quad (17)$$

где $\{\varphi_k(x), k \in \mathbb{Z}\}$ — базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$ и $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Для этого рассмотрим соответствующую задаче (14)–(16) спектральную задачу

$$-\varphi''(x) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \varphi(x_m) = \lambda \varphi(x), \quad (18)$$

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \quad \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi). \quad (19)$$

Введем следующее обозначение: $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Для задачи (18)–(19) рассмотрим следующие два случая.

1⁰. *Случай, когда не существует такого $k \in \mathbb{Z}$, что $\sum_{m=1}^M \alpha_m = k^2$.* Общее решение спектральной задачи (18)–(19) имеет вид

$$\varphi_k(x) = A_k e^{i\sqrt{\lambda_k}x} + D_k, \quad (20)$$

и, подставляя (20) в (18), находим

$$D_k = A_k \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i\sqrt{\lambda_k}x_m\}}{\lambda_k - \sum_{m=1}^M \alpha_m},$$

здесь принимаем $A_k = 1$. Тогда необходимо принять $\lambda_k = k^2$, чтобы удовлетворялись условия (19). Отсюда запишем окончательный вид решения уравнения (18)

$$\varphi_k(x) = e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i\sqrt{\lambda_k}x_m\}}{\lambda_k - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \quad k \in \mathbb{Z}'. \quad (21)$$

Для $k = 0$: $\varphi_0(x) = \text{const}$, $\lambda_0 = \sum_{m=1}^M \alpha_m$, т.е. для собственного значения $\lambda_0 = \sum_{m=1}^M \alpha_m$ можно принять собственную функцию $\varphi_0(x) = 1$.

Таким образом, имеем следующую систему собственных функций и собственных чисел:

$$\begin{aligned} & \{\varphi_k(x), \lambda_k; k \in \mathbb{Z}\} = \\ & = \left\{ 1, \lambda_0 = \sum_{m=1}^M \alpha_m; e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i\sqrt{\lambda_k} x_m\}}{\lambda_k - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \lambda_k = k^2, k \in \mathbb{Z}' \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Заметим, что полученная система собственных функций (22) полна в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, составляет базис, но не является ортогональной. Полнота системы собственных функций (22) следует из теоремы Пэли-Винера [6, с. 224-227].

Для (22) найдем биортогональную последовательность. Она будет иметь вид

$$\{\psi_k(x), k \in \mathbb{Z}\} = \{f_0(x), e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}'\},$$

в которой неизвестной является только функция $f_0(x)$.

Неизвестную функцию $f_0(x)$ используя базис (22), будем искать в виде

$$f_0(x) = C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} C_n \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right)$$

из условий биортогональности:

$$(1, f_0(x)) = 1; \left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, f_0(x) \right) = 0, k \in \mathbb{Z}'.$$

Из этих условий имеем

$$\begin{aligned} (1, f_0(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} C_n \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right) \right] dx = \\ &= 2\pi \left[C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} C_n \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right]. \end{aligned}$$

Итак,

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} - \sum_{n \in \mathbb{Z}'} C_n \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}.$$

Далее для $k \in \mathbb{Z}'$:

$$\begin{aligned} &\left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, f_0(x) \right) = \\ &= \left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} C_n \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$C_0 \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} + C_k + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} - C_0 \right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}'.$$

Здесь мы находим C_k :

$$C_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha}{k^2 - \alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}'.$$

Используя значения C_k , перепишем C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right)^2 \right].$$

Далее, используя значения C_0 , запишем искомую функцию f_0 :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right)^2 \right] - \\ &- \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда искомая функция $f_0(x)$ определяется соотношением:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx}. \end{aligned}$$

Таким образом, для базиса (22) биортогональной последовательностью является следующая:

$$\{\psi_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx}, e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}' \right\}, \quad (23)$$

которая определяет в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ биортогональный базис.

2⁰. Случай, когда существует такое число $k \in \mathbb{Z}$, что $\sum_{m=1}^M \alpha_m = k^2$.

Пусть k_0 – такое число, что $\sum_{m=1}^M \alpha_m = k_0^2$. Общее решение спектральной задачи (18)–(19) имеет вид

$$\varphi_k(x) = A_k e^{i\sqrt{\lambda_k}x} + D_k \quad (24)$$

и, подставляя (24) в (18), находим

$$D_k = A_k \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m},$$

здесь принимаем $A_k = 1$. Тогда необходимо принять $\lambda_k = k^2$, чтобы удовлетворялись условия (19). Отсюда запишем окончательный вид решения уравнения (18)

$$\varphi_k(x) = e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \quad k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}.$$

Для k_0 : $\varphi_{k_0}(x) = \text{const}$, $\lambda_{k_0} = \sum_{m=1}^M \alpha_m = k_0^2$, т.е. для собственного значения

$\lambda_{k_0} = \sum_{m=1}^M \alpha_m = k_0^2$, можно принять собственную функцию $\varphi_{k_0}(x) = 1$.

Далее находим присоединенные функции следующим образом:

$$-\overline{\varphi}_{k_0}''(x) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \cdot \overline{\varphi}_{k_0}(x_m) - k_0^2 \overline{\varphi}_{k_0}(x) = k_0^2, \quad (25)$$

$$\overline{\varphi}_{k_0}(-\pi) = \overline{\varphi}_{k_0}(\pi), \quad \overline{\varphi}'_{k_0}(-\pi) = \overline{\varphi}'_{k_0}(\pi). \quad (26)$$

Общее решение спектральной задачи (25)–(26) имеет вид

$$\bar{\varphi}_{k_0}(x) = C + A_1 e^{ik_0 x} + A_2 e^{-ik_0 x}. \quad (27)$$

Подставляя общее решение (27) в (25), находим

$$\sum_{m=1}^M \alpha_m [A_1 \exp\{i k_0 x_m\} + A_2 \exp\{-i k_0 x_m\}] = k_0^2.$$

Полагая, например,

$$A_1 = \frac{1}{2} \exp\{-i k_0 x_m\}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \exp\{i k_0 x_m\},$$

отсюда находим, что присоединенными функциями являются $\{e^{\pm ik_0 x}\}$.

Итак, имеем собственные числа и соответствующие им собственные функции

$$\{\varphi_k(x), \lambda_k; k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm k_0\}\} = \left\{ 1, \lambda_0 = k_0^2; e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \lambda_k = k^2, k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\} \right\} \quad (28)$$

и присоединенные функции

$$\{\varphi_{\pm k_0}(x), \lambda_0\} = \left\{ e^{\pm ik_0 x}, \lambda_0 = k_0^2 = \sum_{m=1}^M \alpha_m \right\}. \quad (29)$$

Здесь постоянная является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_0 = k_0^2 = \sum_{m=1}^M \alpha_m$ (это означает, что найдется такое целое число, квадрат которого равен числу $\sum_{m=1}^M \alpha_m$). Кроме того, заметим, что нуль не является собственным значением. В этом случае система собственных функций оказывается неполной и неортогональной в

пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Объединяя с (28) присоединенные функции (29), получаем полную систему (согласно теореме Пэли-Винера [6, с. 224-227]):

$$\{\varphi_k(x), \lambda_k; k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ 1, \lambda_0 = k_0^2; e^{\pm ik_0x}, \lambda_0 = k_0^2 = \sum_{m=1}^M \alpha_m; \right.$$

$$\left. e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \lambda_k = k^2, k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\} \right\}. \quad (30)$$

Для (30) биортогональной последовательностью является

$$\{\psi_k(x); k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ f_0(x), e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}' \right\},$$

где нужно найти неизвестную функцию $f_0(x)$ следующим образом:

$$f_0(x) = C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} C_n \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right) + C_{k_0} e^{ik_0x} + C_{-k_0} e^{-ik_0x},$$

из условия биортогональности $(1, f_0(x)) = 1$ имеем

$$\left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, f_0(x) \right) = 0; k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}; (e^{\pm ik_0x}, f_0(x)) = 0.$$

И далее

$$(1, f_0(x)) = 2\pi \left[C_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} C_n \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right] = 1.$$

Итак,

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} - \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} C_n \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}.$$

Далее для $k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}$

$$\begin{aligned} \left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, f_0(x) \right) &= \left(e^{ikx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, C_0 + \right. \\ &\left. + \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} C_n \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C_0 \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} + C_k + \\ + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} - C_0 \right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}. \end{aligned}$$

Здесь мы находим C_k :

$$C_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i k x_m\}}{k^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m}, \quad k \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}.$$

Используя значения C_k , перепишем C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right)^2 \right].$$

Далее, используя значения C_0 , запишем искомую функцию f_0 :

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right)^2 \right] -$$

$$- \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \left(e^{inx} + \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \right).$$

Отсюда следует, что искомая функция $f_0(x)$ определяется соотношением:

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}' \setminus \{\pm k_0\}} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx}.$$

Итак, для (30) биортогональной системой является

$$\{\psi_k(x), k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm k_0\}} \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\{i n x_m\}}{n^2 - \sum_{m=1}^M \alpha_m} \cdot e^{inx}, e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}' \right\}. \quad (31)$$

Эта система также определяет в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ биортогональный базис.

Для определения Фурье-коэффициентов разложения (17) имеем задачу Коши:

$$Z'_k(t) + \lambda_k Z_k(t) = 0, \quad Z_k(0) = z_{0k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (32)$$

где z_{0k} — коэффициенты разложения функции $z_0(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$.

Решение задачи Коши (32) имеет вид: $Z_k(t) = z_{0k} e^{-\lambda_k t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем будем считать, что в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ имеем:

- базис $\{\varphi_k(x), k \in \mathbb{Z}\}$, составленный из системы собственных функций (22) или из системы собственных и присоединенных функций (30);
- и соответствующий биортогональный базис $\{\psi_k(x), k \in \mathbb{Z}\}$, определенный соотношениями (23) или (31).

Тогда решение исходной начально-граничной задачи (14)–(16) можем записать в виде (17):

$$z(x, t) = z_{00} e^{-\alpha t} \varphi_0(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}'} z_{0k} e^{-k^2 t} \varphi_k(x), \quad (33)$$

где

$$z_{0k} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(x)} z_0(x) dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— коэффициенты Фурье функции $z_0(x)$; $\psi_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, определены соответственно формулами (23) или (31). Из (32) и (33) непосредственно следует, что если

$$z_{0k} = 0 \quad \text{при} \quad k^2 < \sigma_0, \quad (34)$$

$$z_{00} \neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \alpha \geq \sigma_0; \quad z_{00} = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \alpha < \sigma_0, \quad (35)$$

то решение (33) задачи (14)–(16) будет удовлетворять неравенству

$$\|z(x, t)\|_{L_2(-\pi, \pi)} \leq C e^{-\sigma_0 t}.$$

Обозначим множество индексов k , для которых выполнены условия (34) и (35), через $\mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$.

С помощью операторов сужения $\zeta_{-\pi/2}$ и $\zeta_{\pi/2}$ находим искомые управления:

$$u_1(t) = \zeta_{-\pi/2}\{z(x, t)\}, \quad u_2(t) = \zeta_{\pi/2}\{z(x, t)\}.$$

Остается построить оператор продолжения функции $y_0(x)$ до функции $z_0(x)$, определенный на интервале $(-\pi, \pi)$:

$$S : L_2(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow L_2(-\pi, \pi), \quad \text{т.е. } (\zeta_{(-\pi/2, \pi/2)} S y_0)(x) \equiv y_0(x), \quad (36)$$

так, чтобы коэффициенты Фурье z_{0k} функции $z_0 = S y_0$ (36) удовлетворяли условиям (34) и (35). Здесь использовано обозначение $\zeta_{(-\pi/2, \pi/2)}$ для оператора сужения $\zeta_{(-\pi/2, \pi/2)} : L_2(-\pi, \pi) \rightarrow L_2(-\pi/2, \pi/2)$.

Покажем справедливость аналога леммы из работы [7].

ЛЕММА 1. *Для $\forall \sigma_0 > 0 \exists$ такой оператор продолжения S (36), что при $\forall y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$ выполнено соотношение*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_k(x)} (S y_0)(x) dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор S (36) формулой:

$$S y_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ z_1(x), & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \end{cases} \quad (38)$$

где функция $z_1(x)$ подлежит определению. В силу (37) $z_1(x)$ должна удовлетворять системе уравнений:

$$\int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} \overline{\psi_k(x)} \cdot z_1(x) dx = - \int_{(-\pi/2, \pi/2)} \overline{\psi_k(x)} \cdot y_0(x) dx \equiv -\hat{y}_0(k), \quad k \in \mathbb{Z}_0. \quad (39)$$

Будем искать функцию $z_1(x)$ в виде

$$z_1(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \hat{z}_1(j) \psi_j(x). \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получим систему уравнений для определения $\widehat{z}_1(j)$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} a_{kj} \widehat{z}_1(j) = -\widehat{y}_0(k), \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad (41)$$

где $\widehat{y}_0(k)$ определено в (39), а коэффициенты a_{kj} определяются соотношениями

$$a_{kj} = \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} \overline{\psi_k(x)} \cdot \psi_j(x) dx, \quad k, j \in \mathbb{Z}_0. \quad (42)$$

Матрица $A = \|a_{kj}\|$ положительно определена. Действительно, если

$$\Psi = \{\widehat{\psi}_k, k \in \mathbb{Z}_0\} \text{ и } \psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \widehat{\psi}_k \cdot \psi_k(x),$$

то в силу (42)

$$\begin{aligned} (A\Psi, \Psi) &= \sum_{k, j \in \mathbb{Z}_0} a_{kj} \cdot \widehat{\psi}_j \cdot \overline{\widehat{\psi}_k} = \\ &= \sum_{k, j \in \mathbb{Z}_0} \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} \psi_j(x) \cdot \overline{\psi_k(x)} dx \cdot \widehat{\psi}_j \cdot \overline{\widehat{\psi}_k} = \\ &= \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \psi_j(x) \cdot \widehat{\psi}_j \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \overline{\widehat{\psi}_k} \cdot \overline{\psi_k(x)} dx = \\ &= \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} \overline{\psi(x)} \cdot \psi(x) dx = \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} |\psi(x)|^2 dx \geq 0. \quad (43) \end{aligned}$$

Если при некотором Ψ в (43) достигается равенство, то

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} \widehat{\psi}_k \psi_k(x) \equiv 0 \text{ и, значит, } \widehat{\psi}_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0.$$

Следовательно, $\det \|a_{kj}\| \neq 0$ и поэтому система (41) и формула (40) однозначно определяют оператор (38), удовлетворяющий всем условиям леммы.

6. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Результаты предыдущих пунктов позволяют реализовать следующий алгоритм приближенного построения граничных управляющих функций (и даже в форме синтеза, обрабатывающих случайные возмущения), обеспечивающих монотонное и не медленнее заданной экспоненты убывание (стабилизацию решения) по времени согласно формуле (4) $L_2(-\pi/2, \pi/2)$ -нормы решения. Последнее достигается выполнением требований (34) и (35).

Шаг 1. В соответствие с исходной граничной задачей (1)–(3) на полуполосе ширины π с неоднородными граничными условиями Дирихле и начальным условием на отрезке $(-\pi/2, \pi/2)$, задаваемой функцией $y_0(x)$, ставится вспомогательная граничная задача (14)–(16) на расширенной полуполосе шириной, равной 2π , с условиями периодичности (вместо условий Дирихле) и начальной функцией $z_0(x)$ на отрезке $(-\pi, \pi)$. Функцию $z_0(x)$ будем определять, как продолжение заданной функции $y_0(x)$.

Таким образом, во вспомогательной граничной задаче (14)–(16) необходимо доопределить функцию $z_0(x)$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ так, чтобы для решения $z(x, t)$ задачи (14)–(16) было выполнено требование (4). В этом случае условие (4) будет выполнено и для его сужения $y(x, t)$ и требуемые граничные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ будут определены, как следы функции $z(x, t)$ при $x = \pm\pi/2$.

Шаг 2. Решаем спектральную задачу для нагруженного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка и строим полную биортогональную систему функций на отрезке $(-\pi, \pi)$.

Шаг 3. Находим коэффициенты разложения искомой функции $z_0(x)$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ по построенной в предыдущем шаге полной биортогональной системе так, чтобы были выполнены условия (34) и (35). Заметим, что условия (34) и (35) обеспечивают выполнение требования (4) для решения вспомогательной граничной задачи (14)–(16).

Шаг 4. По найденному решению $z(x, t)$ вспомогательной граничной задачи (14)–(16), как его сужению на полуполосу Q , находим решение $y(x, t)$ первоначальной граничной задачи (1)–(3), удовлетворяющее требуемому условию (4). Граничные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ найдем, как следы решения $z(x, t)$, т.е.

$$u_1(t) = z(x, t)|_{x=-\pi/2}, \quad u_2(t) = z(x, t)|_{x=\pi/2}.$$

Третий шаг алгоритма является основным. Конструктивная реализуемость шага 3 математически обосновывается леммой 1.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена постановка задачи по стабилизации решения нагруженного уравнения теплопроводности, нагруженного по нуль-мерным многообразиям пространственного интервала при помощи граничных условий. Доказана теорема о разрешимости поставленной обратной задачи и разработан алгоритм приближенного построения граничных управлений в форме синтеза.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
- 2 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ылым, 2010. – 335 с.
- 3 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об одной задаче по стабилизации решения нагруженного уравнения теплопроводности // Математический журнал. – 2012. – Т. 12, №3 (58). – С. 81–87.
- 4 Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
- 5 Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, №4. – С. 641-651.
- 6 Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
- 7 Фурсиков А.В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сборник – 2001. – Т. 192, №4. – С. 115-160.

Статья поступила в редакцию 25.11.2015

Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. НӨЛ-ӨЛШЕМДІ КӨПБЕЙНЕЛІК-ТЕР БОЙЫНША ЖҮКТЕЛГЕН ЖЫЛУӨТКІЗГІШ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІН ШЕКАРАЛЫҚ БАСҚАРУЛАР АРҚЫЛЫ ТҰРАҚТАНДЫРУ

Бұл жұмыста жартылай жолақта берілген жүктелген жылуөткізгіш теңдеуі үшін тұрақтандыру есебінің шешілімділігі мәселелері қарастырылады. Шекаралық есептің шешімін $t \rightarrow \infty$ болғанда берілген стационар түзімге белгіленген $\exp(-\sigma_0 t)$ жылдамдығы бойынша тұрақтануын қамтамасыз ететін шекаралық функцияларды (басқаруларды) іріктеу алгоритмі ұсынылған.

Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. STABILIZATION OF SOLUTIONS OF LOADED ON ZERO-DIMENSIONAL MANIFOLDS HEAT EQUATION WITH USING BOUNDARY CONTROLS

In this paper we study the solvability of the stabilization problem for the loaded heat equation in a given half-strip. It is proposed the algorithm selection of the boundary functions (controls) ensuring the stabilization of the solution of the boundary value problem at $t \rightarrow \infty$ to a given stationary state with the prescribed velocity $\exp(-\sigma_0 t)$.

**ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
НАГРУЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
СУЩЕСТВЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ
ИНТЕРВАЛА**

Д.С. Джумабаев¹, Р.Е. Утешова²

^{1,2}Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: ¹dzhumabaev@list.ru, ²ruteshova@mail.ru

Аннотация: На конечном интервале рассматривается система нагруженных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами и правой частью, имеющими существенные особенности на концах интервала. В терминах двусторонне-бесконечных матриц специальной структуры установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченного решения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: Нагруженные дифференциальные уравнения, ограниченное решение, однозначная разрешимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ограниченные на всей оси решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их связь с экспоненциальной дихотомичностью исследованы в [1]–[4]. Ограниченные на конечном интервале решения для обыкновенных дифференциальных уравнений с существенными особенностями на концах интервала изучались в [5]–[9].

В настоящей работе на $(0, T)$ рассматривается система линейных нагруженных дифференциальных уравнений.

На $(0, T)$ рассмотрим линейное нагруженное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^m K_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

Keywords: *Loaded differential equations, bounded solution, unique solvability.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Гранты № 3362/ГФ4, 4057/ГФ4.

© Д.С. Джумабаев, Р.Е. Утешова, 2015.

где $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < T$, $A(t), K_j(t), j = \overline{1, m}, f(t)$ непрерывны на $(0, T)$,

$$\|A(t)\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)| = \alpha(t), \quad \|K_j(t)\| \leq \alpha(t), \quad j = \overline{1, m},$$

$\alpha(t)$ – непрерывная на $(0, T)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \int_a^{T/2} \alpha(t) dt = \infty, \quad \lim_{b \rightarrow T-0} \int_{T/2}^b \alpha(t) dt = \infty. \quad (2)$$

Из условий (2) следует, что функция $\alpha(t)$ неограничена в окрестности особых точек:

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \alpha(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} \alpha(t) = \infty.$$

Отметим, что нагруженные члены уравнения оказывают существенное влияние на его свойства.

В качестве подтверждения на (0,3) рассмотрим линейное нагруженное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x(1) + c(t)x(2) + f(t), \quad (3)$$

где

$$a(t) = \begin{cases} 1/t^2, & t \in (0, 1), \\ 1, & t \in [1, 2], \\ 1/(t-3)^2, & t \in (2, 3) \end{cases}$$

$$b(t) = -\frac{e^2}{e-1}a(t), \quad c(t) = \frac{e}{e-1}a(t), \quad f(t) = \frac{e}{e-1}a(t).$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (3) имеют существенные особенности в точках $t_0 = 0$ и $T = 3$. Однако, из-за наличия нагруженных членов уравнение (3) не имеет решений. Действительно, если $x^*(t)$ является решением уравнения (3), то имеет место равенство

$$\dot{x}^*(t) = x^*(t) - \frac{e^2}{e-1}x^*(1) + \frac{e}{e-1}x^*(2) + \frac{e}{e-1}, \quad t \in [1, 2].$$

Интегрируя это уравнение на интервале (1,2), имеем

$$\begin{aligned} x^*(t) &= e^{t-1}x^*(1) + \int_1^t \left[-\frac{e^2}{e-1}x^*(1) + \frac{e}{e-1}x^*(2) + \frac{e}{e-1} \right] e^{-\int_1^t ds} d\tau = \\ &= e^{t-1}x^*(1) + \left[-\frac{e^2}{e-1}x^*(1) + \frac{e}{e-1}x^*(2) + \frac{e}{e-1} \right] \frac{e^t - e}{e^t}. \end{aligned}$$

При $t = 2$ получим

$$x^*(2) = ex^*(1) + \frac{e}{e-1} \cdot \frac{e^2 - e}{e^2} [-ex^*(1) + x^*(2) + 1],$$

что приводит к противоречию: $0=1$.

Введем следующие пространства:

$\tilde{C}((0, T), R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций $x : (0, T) \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sup_{t \in (0, T)} \|x(t)\|;$$

m_n – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda_r \in R^n$ с нормой

$$\|\lambda\|_2 = \|(\dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots)\|_2 = \sup_r \|\lambda_r\|, \quad r \in Z;$$

$\tilde{C}_{1/\alpha}((0, T), R^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных с весом $1/\alpha(t)$ функций $f : (0, T) \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup_{t \in (0, T)} \|f(t)/\alpha(t)\|;$$

$L(m_n)$ – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих m_n в себя, с индуцированной нормой.

На основе метода параметризации [10] исследуем вопросы существования и единственности ограниченного на $(0, T)$ решения уравнения (1) при условии

$$f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}((0, T), R^n).$$

Обозначим $a = \max_{i=0, m-1} \{ \int_i^{i+1} \alpha(t) dt \}$ и произведем разбиение $(0, T) = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} [t_{r-1}, t_r)$, где точки t_r , $r \in Z$, определим из соотношений

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} \alpha(t) dt = a, \quad r = 0, -1, -2, \dots,$$

$$t_r = \theta_r, \quad r = 1, 2, \dots, m,$$

$$\int_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(t) dt = a, \quad r = m+1, m+2, \dots$$

Примем следующие обозначения: $\bar{h}(a)$ – двусторонне-бесконечная последовательность чисел $h_r(a) = t_r - t_{r-1}$, $r \in Z$; $\hat{x}[t] = (\dots, \hat{x}_r(t), \hat{x}_{r+1}(t), \dots)$, где $x_r(t)$ – сужение функции $x(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n)$ на интервал $[t_{r-1}, t_r)$, $r \in Z$.

Введем $m_n(\bar{h}(a))$ – пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных на $[t_{r-1}, t_r)$ функций $x_r(t)$, $r \in Z$, имеющих конечный левосторонний предел в точке t_r , с нормой

$$\|x[\cdot]\|_3 = \|(\dots, x_r(t), x_{r+1}(t), \dots)\|_3 = \sup_s \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|.$$

Ограниченное на $(0, T)$ решение уравнения (1) называется решением задачи 1_α .

Разрешимость задачи 1_α эквивалентна существованию решения $x[t] \in m_n(\bar{h}(a))$ систем уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{j=1}^m K_j(t)x_{j+1}(t_j) + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r),$$

с условиями склеивания решения в точках разбиения

$$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} x_r(t) = x_{r+1}(t_r), \quad r \in Z.$$

Введем дополнительные параметры λ_r , как значения функций $x_r(t)$ в начальных точках подинтервалов: $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$. Произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$, получим сингулярную задачу с параметром:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + \sum_{j=0}^{m-1} K_{j+1}(t)\lambda_{j+1} + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r \in Z, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_r-0} u_r(t) + \lambda_r = \lambda_{r+1}, \quad r \in Z, \quad (5)$$

$$(\lambda, u[t]) \in m_n \times m_n(\bar{h}(a)). \quad (6)$$

Если пара $(\lambda^*, u^*[t]) \in m_n \times m_n(\bar{h}(a))$ – решение задачи (4)–(6), то функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ $r \in Z$, принадлежит пространству $\tilde{C}((0, T), R^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in (0, T)$. И, наоборот, если $x(t)$ – решение задачи 1_α , то пара $(\lambda, u[t])$, где

$$\lambda = (\dots, x_r(t_{r-1}), x_{r+1}(t_r), \dots),$$

$$u[t] = (\dots, x_r(t) - x_r(t_{r-1}), x_{r+1}(t) - x_{r+1}(t_r), \dots),$$

$x_r(t)$ – сужение функции $x(t)$ на r -й интервал, принадлежит $m_n \times m_n(\bar{h}(a))$ и является решением сингулярной задачи с параметром (4)–(6).

При фиксированных значениях параметра λ_r функция $u_r(t)$ определяется из интегрального уравнения

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_{r-1}}^t K_{j+1}(\tau)\lambda_{j+1} + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad r \in Z. \quad (7)$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (7) и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + \sum_{i=1}^m H_{\nu,r}^i(t)\lambda_{i+1} + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{\nu,r}(t) &= \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \\
 H_{\nu,r}^i(t) &= \int_{t_{r-1}}^t K_i(\tau_1) d\tau_1 + \\
 &+ \sum_{j=1}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} K_i(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1, \\
 F_{\nu,r}(t) &= \int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1, \\
 G_{\nu,r}(u, t) &= \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \quad \tau_0 = t, \quad r \in Z.
 \end{aligned}$$

Из (8) найдем $\lim_{t \rightarrow t_{r-0}} u_r(t), r \in Z$. Подставляя соответствующие им выражения в (5), получим двусторонне-бесконечную систему уравнений относительно параметров λ_r :

$$\begin{aligned}
 [I + D_{\nu,r}(h_r(a))] \lambda_r + \sum_{i=1}^m H_{\nu,r}^i(h_r(a)) \lambda_{i+1} - \lambda_{r+1} &= \\
 = -F_{\nu,r}(h_r(a)) - G_{\nu,r}(u, h_r(a)), \quad r \in Z, & \quad (9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{\nu,r}(h_r(a)) &= D_{\nu,r}(t_r), \quad H_{\nu,r}^i(h_r(a)) = H_{\nu,r}^i(t_r), \\
 F_{\nu,r}(h_r(a)) &= F_{\nu,r}(t_r), \quad G_{\nu,r}(u, h_r(a)) = G_{\nu,r}(u, t_r) \quad r \in Z,
 \end{aligned}$$

I – единичная матрица порядка n .

Двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части системы (9), обозначим через $Q_{\nu, \bar{h}(a)}$.

Систему уравнений (9) запишем в виде

$$Q_{\nu, \bar{h}(a)} \lambda = -F_{\nu}(\bar{h}(a)) - G_{\nu}(u, \bar{h}(a)), \quad \lambda \in m_n, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\nu}(\bar{h}(a)) &= (\dots, F_{\nu, r}(h_r(a)), F_{\nu, r+1}(h_{r+1}(a)), \dots), \\ G_{\nu}(u, \bar{h}(a)) &= (\dots, G_{\nu, r}(u, h_r(a)), G_{\nu, r+1}(u, h_{r+1}(a)), \dots). \end{aligned}$$

Учитывая оценки

$$\|F_{\nu, r}(h_r(a))\| \leq \|f\|_{\alpha} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a^j}{j!}, \quad r \in Z,$$

$$\|G_{\nu, r}(u, h_r(a))\| \leq \frac{a^{\nu}}{\nu!} \|u[t]\|_3, \quad r \in Z,$$

получим, что

$$F_{\nu}(\bar{h}(a)) \in m_n, \quad G_{\nu}(u, \bar{h}(a)) \in m_n$$

для любых $u[t] \in m_n(\bar{h}(a))$ и $\bar{h}(a)$.

Решение многоточечной краевой задачи (4)–(6) найдем, как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, определяемый по следующему алгоритму.

Шаг 0. В предположении, что матрица $Q_{\nu, \bar{h}(a)} : m_n \rightarrow m_n$ ограничено обратима, из уравнения

$$Q_{\nu, \bar{h}(a)} \lambda = -F_{\nu}(\bar{h}(a)) \quad (11)$$

определим начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in m_n$. На отрезках $[t_{r-1}, t_r)$, $r \in Z$, решая задачи Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим

$$u^{(0)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots) \in m_n(\bar{h}(a)).$$

Шаг 1. Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$, $r \in Z$, в правую часть (10), из уравнения

$$Q_{\nu, \bar{h}(a)} \lambda = -F_{\nu}(\bar{h}(a)) - G_{\nu}(u^{(0)}, \bar{h}(a))$$

определим $\lambda^{(1)} \in m_n$. На отрезках $[t_{r-1}, t_r)$, $r \in Z$, решая задачи Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(0)}(t)$. При наших предположениях относительно коэффициентов и правой части(1), легко устанавливается, что

$$u^{(1)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots) \in m_n(\bar{h}(a)).$$

И т.д.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторых $a > 0$ и $\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_{\nu, \bar{h}(a)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима и выполняются неравенства

$$\|Q_{\nu, \bar{h}(a)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \gamma_\nu(\bar{h}(a)), \quad (12)$$

$$q_\nu(\bar{h}(a)) = \gamma_\nu(\bar{h}(a))(m+1) \left(e^a - 1 - a - \dots - \frac{a^\nu}{\nu!} \right) < 1. \quad (13)$$

Тогда алгоритм сходится к единственному решению $(\lambda^*, u^*[t])$ сингулярной задачи с параметром (4)–(6) и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \sup_r \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|\lambda^* + u_r^*(t)\| \leq \\ & \leq \left[\gamma_\nu(\bar{h}(a)) e^a \frac{1}{1 - q_\nu(\bar{h}(a))} \frac{a^\nu}{\nu!} M(\bar{h}(a)) + \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a^j}{j!} + M(\bar{h}(a)) \right] \|f\|_\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } M(\bar{h}(a)) = \left[a e^a + (e^a - 1)(m+1) \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a^j}{j!} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ограниченной обратимости двусторонне-бесконечной матрицы $Q_{\nu, \bar{h}(a)}$ из (11) найдем

$$\lambda^{(0)} = -[Q_{\nu, \bar{h}(a)}]^{-1} F_\nu(\bar{h}(a)),$$

где $\lambda^{(0)} = (\dots, \lambda_r^{(0)}, \lambda_{r+1}^{(0)}, \dots) \in m_n$, причем

$$\|\lambda^{(0)}\|_2 \leq \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \|f\|_\alpha \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a^j}{j!}. \quad (15)$$

Решая задачи Коши (4) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r \in Z$, находим

$$u^{(0)}[t] = (\dots, u_r^{(0)}(t), u_{r+1}^{(0)}(t), \dots).$$

Так как $\lambda^{(0)} \in m_n$, то легко устанавливается, что $u^{(0)}[t] \in m_n(\bar{h}(a))$. Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим

$$\begin{aligned} \|u_r^{(0)}(t)\| &\leq \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) \|u_r^{(0)}(\tau)\| d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau \|\lambda_r^{(0)}\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau \|\lambda_{j+1}^{(0)}\| + \int_{t_{r-1}}^t \|f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) \|u_r^{(0)}(\tau)\| d\tau + (m+1) \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau \|\lambda^{(0)}\|_2 + \int_{t_{r-1}}^t \|f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq (m+1)(e^a - 1) \|\lambda^{(0)}\|_2 + ae^a \|f\|_\alpha, \end{aligned}$$

откуда с учетом (15) имеем

$$\|u^{(0)}[t]\|_3 \leq M(\bar{h}(a)) \|f\|_\alpha.$$

Далее по алгоритму найдем $\lambda^{(1)}$ и оценим $\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2$:

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \|G_\nu(u^{(0)}, \bar{h}(a))\|_2 \leq \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \frac{a^\nu}{\nu!} M(\bar{h}(a)) \|f\|_\alpha. \quad (16)$$

Продолжая итерационный процесс, найдем последовательность системы пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r \in Z$, $k = 1, 2, \dots$.

Вновь воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана, из неравенств

$$\|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) \|u_r^{(k+1)}(\tau) - u_r^{(k)}(\tau)\| d\tau +$$

$$+(m+1) \int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r \in Z,$$

получим оценку разности решений задач Коши через разность параметров:

$$\|u_r^{(k+1)}(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq (m+1)(e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1) \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|, \\ t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r \in Z. \quad (17)$$

Из уравнения (10) и оценки (16) следует, что

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_2 \leq q_\nu(\bar{h}(a)) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

В силу условия (13) и неравенств (16)–(18) последовательность $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к решению $(\lambda^*, u^*[t])$ задачи (4)–(6), причем справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|_2 \leq \frac{[q_\nu(\bar{h}(a))]^k}{1 - q_\nu(\bar{h}(a))} \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \frac{a^\nu}{\nu!} M(\bar{h}(a)),$$

$$\|u^*[t] - u^{(k)}[t]\|_3 \leq (e^a - 1) \frac{[q_\nu(\bar{h}(a))]^k}{1 - q_\nu(\bar{h}(a))} \gamma_\nu(\bar{h}(a)) \frac{a^\nu}{\nu!} M(\bar{h}(a)).$$

В силу того, что $(\lambda^*, u^*[t])$ является решением задачи (4)–(6), функция $x^*(t)$, определяемая равенствами

$$x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r \in Z,$$

является решением задачи 1_α и справедлива оценка (14).

Покажем единственность. Предположим, что $x^*(t), \tilde{x}(t)$ – два решения задачи 1_α . Тогда соответствующие им системы пар $(\lambda^*, u^*[t]), (\bar{\lambda}, \bar{u}[t])$ являются решениями краевой задачи с параметром (4)–(6), причем

$$\|u^*[t] - \bar{u}[t]\|_3 \leq (e^a - 1)(m+1) \|\lambda^* - \bar{\lambda}\|_2,$$

$$\|\lambda^* - \bar{\lambda}\|_2 \leq q_\nu(\bar{h}(a)) \|\lambda^* - \bar{\lambda}\|_2, \quad q_\nu(\bar{h}(a)) < 1.$$

Следовательно, $\lambda^* = \bar{\lambda}$, $u^*[t] = \bar{u}[t]$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задача 1_α называется корректно разрешимой, если для любой функции $f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}((0, T), R^n)$ существует единственное решение $x(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n)$ и для него справедлива оценка

$$\|x\|_1 \leq K \|f\|_\alpha,$$

где K – константа, независящая от $f(t)$.

Если выполнены условия теоремы 1, то из единственности решения задачи (4)–(6) и оценки (14) следует корректная разрешимости задачи 1_α .

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для корректной разрешимости задачи 1_α .

ТЕОРЕМА 2. Задача 1_α корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_{\nu, \bar{h}(a)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима и выполняются неравенства (12), (13).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. Думка, 1990. – 270 с.
- 2 Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – Т. 30 – С. 3-103.
- 3 Speramiglio Adalberto Soluções limitadas de equações diferenciais ordinárias e estabilidade // Rev. mat. e estatist. – 1990. – V. 8. – P. 1-9.
- 4 Lin Muren A criterion for generalized exponential dichotomy and existence of bounded solution // Shuxue wulixuebao. Ser. A=Acta Math. Sci. – 2003. – Т. 23, No 5. – P. 619-626.
- 5 Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Серия Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – Т. 30. – С. 105-201.
- 6 Кигурадзе И.Т. О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения – 2003. – Т. 39, №2. – С. 198-209.
- 7 Kiguradze I., Púza B., Stavroulakis I.P. On singular boundary value problems for functional differential equations of higher order // Georgian Math. J. – 2001. – No 8. – P. 791-814.

8 Agarwal R.P., Kiguradze I. On multi-point boundary problems for linear ordinary differential equations with singularities // J. Math. Anal., Appl. – 2004. – V. 297, No 4. – P. 131-151.

9 Кудрявцев Л.Д. Задачи с начальными асимптотическими данными для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады РАН. – 2006. – Т. 407, №2. – С. 172-175.

10 Джумабаев Д.С. Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1990. – Т. 30 – С. 388-404.

Статья поступила в редакцию 19.11.2015

Джумабаев Д.С., Утешова Р.Е. АРАЛЫҚТЫҢ ШЕТТЕРІНДЕ ЕЛЕУЛІ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ БАР ЖҮКТЕЛГЕН СЫЗЫҚТЫ ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ ШЕКТЕЛГЕН ШЕШІМДЕРІ

Коэффициенттері мен оң жағының аралықтың шеттерінде елеулі ерекшеліктері бар жүктелген сызықты жәй дифференциалдық тендеулер жүйесі ақырлы аралықта қарастырылады. Зерттеліп отырған жүйенің шектелген шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары арнайы құрылымды екі жақты шексіз матрицалардың терминдерінде тағайындалған.

Dzhumabaev D.S., Uteshova R.E. BOUNDED SOLUTIONS OF LOADED LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES AT THE ENDPOINTS OF THE INTERVAL

On a finite interval a system of loaded linear ordinary differential equations is considered. It is supposed, that the coefficients and the right part of the system possess the singularity at the endpoints of the interval. Necessary and sufficient conditions of the existence of a bounded solution of the system in the terms of two-sided infinite matrices of special structure are established.

**О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕПРЯМЫМ
УПРАВЛЕНИЕМ**Г.Т. ИБРАЕВА¹, М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ²¹Военный институт сил воздушной обороны им. Т.Бегельдинова
030000, Актобе, пр. А.Молдагуловой, 16, e-mail: ibraeva@mail.ru²Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: marat207@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются обратные задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, зависящим от части переменных, и с управлением по первой производной (задача 1) и с управлением по второй производной (задача 2). Методом квазиобращения определяются множества уравнений регулятора, обеспечивающие в этих задачах необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

Ключевые слова: Обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие.

1. ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основы теории и общие методы решения обратных задач для дифференциальных систем разработаны в [1]–[7] и др., для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2]–[7] изложены постановка, классификация обратных задач для дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ,

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equations, integral manifold.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 1170/ГФ2.

© Г.Т. Ибраева, М.И. Тлеубергенов, 2015.

метод квазиобращения, предложен в работе [7], позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости.

В работах [8]–[10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены 1) *основная обратная задача динамики*: построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) *задача восстановления уравнений движения*: построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) *задача замыкания уравнений движения*: построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Различные варианты стохастических задач восстановления с прямым управлением помимо [9] рассмотрены также в [11]–[13]. Наряду с прямым управлением важным, с точки зрения приложений, представляется рассмотрение обратных задач восстановления с непрямым управлением.

Задача 1. *СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.* Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), & x \in R^n, \\ \dot{y} = g_1(x, y, t) + \sigma_1(x, y, t)\xi, & \xi \in R^k. \end{cases} \quad (1)$$

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (1)), то есть определить коэффициенты $g_1(x, y, t)$ и $\sigma_1(x, y, t)$ так, чтобы множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in C_{xt}^{22}, \quad \lambda \in R^m, \quad (2)$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Задача 2. *СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ВТОРОГО ПОРЯДКА.* Пусть задана система

дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \ddot{y} = g_2(x, y, t) + \sigma_2(x, y, t) \dot{\xi}, \end{cases} \quad y \in R^r. \quad (3)$$

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (3)) по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in C_{xt}^{33}. \quad (4)$$

Иначе говоря, по заданным вектор-функциям f, λ определим коэффициенты $g_2(x, y, t)$ и $\sigma_2(x, y, t)$ так, чтобы множество (4) было интегральным многообразием системы уравнений (3).

Здесь $x \in R^n, y \in R^r, \xi \in R^k$, а σ – матрица размерности $(r \times k)$.

Будем говорить, что некоторая функция $f(z, t)$ принадлежит классу $K, f \in K$, если z непрерывна по $t, t \in [0, \infty]$, липшицева по x и y во всем пространстве $z = (x^T, y^T)^T \in R^{n+r}$:

$$\|f(z, t) - f(\tilde{z}, t)\| \leq B \|z - \tilde{z}\| \quad (5)$$

и удовлетворяет условию линейного роста по z

$$\|f(z, t)\| \leq B(1 + \|z\|) \quad (6)$$

с некоторой постоянной B , что обеспечивает в $R^{n+r} \ni z$ существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = (x_0^T, y_0^T)$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [14].

Предположим, что $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями, которую, следуя [15], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(z) P^0(t, dz)$, ξ_0 – винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t, dz)$ – число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество dz ; $c(z)$ – векторная функция, отображающая пространство R^{n+r} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t .

Вектор непрямого управления $y \in R^r$ изменяется в соответствии с уравнением динамики регулятора в виде стохастического уравнения Ито первого порядка в задаче 1 и второго порядка в задаче 2.

Указанные задачи в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследованы в [5], [7]. Частный случай задач 1 и 2 рассмотрен в [16] в предположении, что случайные возмущения из класса винеровских процессов (как подкласса процессов с независимыми приращениями). Для решения поставленных выше задач в данной работе используется метод квазиобращения [7], в основе которого лежит

ЛЕММА 1 (7, с. 12–13). *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \vartheta = (\vartheta_k), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m \leq n, \quad (7)$$

где матрица H имеет ранг, равный m , определяется выражением

$$\vartheta = s [H C] + H^+ g. \quad (8)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина,

$$[H C] = [h_1 \dots h_m \ c_{m+1} \dots c_{n-1}]$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k}), \rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (H H^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H .

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Следуя правилу стохастического дифференцирования сложной функции в случае случайных процессов с независимыми приращениями $\lambda = \lambda(x, t)$ [15, с. 200], составим уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}, \quad (9)$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \cdot (g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}) + f_t + \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma_1 \sigma_1^T + f_t$, $S_1 = \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma_1 \sigma_1^T$, $S_2 = \int \{f_{yy}(x, y + \sigma_1 c(z), t) - f_{yy}(x, y, t) + f_{yy} \sigma_1 c(z)\} dz$, $S_3 = \int [f_{yy}(x, y + \sigma_1 c(z), t) - f_{yy}(x, y, t)] P^0(t, dz)$, а под $f_{yy} : D$, следуя [15], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $f_\mu(x, y, t)$ вектора $f(x, y, t)$ по компонентам y на матрицу D :

$$f_{yy} : D = \begin{bmatrix} \text{tr}(f_{1yy}D) \\ \vdots \\ \text{tr}(f_{myy}D) \end{bmatrix}.$$

С помощью обозначения:

$$G_1 = \lambda_x [f_x f + S_1 + S_2 + S_3 + f_t] + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}$$

перепишем (9) в виде

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \lambda_x f_y g_1 + \lambda_x f_y \sigma_1 \dot{\xi}. \quad (10)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольные функции: m -мерную вектор-функцию A_1 и $(m \times k)$ – матрицу B_1 , которые удовлетворяют условию $A_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$, $B_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$ и такие, что

$$\ddot{\lambda} = A_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + B_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (11)$$

На основе уравнений (10) и (11) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_1 = A_1 - G_1, \\ \lambda_x f_y \sigma_1 = B_1, \end{cases} \quad (12)$$

из которых нужно определить множество управляющих параметров $\{g_1\}$ и множество матриц диффузий $\{\sigma_1\}$. Обозначим $H_1 = \lambda_x f_y$ и из соотношений (12) определим вектор-функцию g_1 :

$$g_1 = s_1 [H_1 C] + (H_1)^+ (A_1 - G_1) \quad (13)$$

и столбцы матрицы диффузий $\{\sigma_{1i}\}$ в виде

$$\sigma_{1i} = s_{2i} [H_1 C] + (H_1)^+ (B_{1i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (14)$$

где s_1, s_{2i} – произвольные скалярные величины.

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2), необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_1\}$ имело вид (13), а столбцы множества матриц диффузий $\{\sigma_1\}$ – вид (14).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В скалярном случае задачи $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C_{xt}^{22}$ и уравнение возмущенного движения в результате двукратного стохастического дифференцирования примет вид

$$\ddot{\lambda} = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{f} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} (g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Обозначим

$$\tilde{G}_1 = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2},$$

тогда (15) запишется в виде

$$\ddot{\lambda} = \tilde{G}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_1 \dot{\xi}. \quad (16)$$

Введем произвольные скалярные функции Н.П. Еругина [1] $a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, $b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям $a_1(0, 0, x, y, t) \equiv b_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$ и такие, что

$$\ddot{\lambda} = a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), приходим к соотношениям

$$a_1 = \tilde{G}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_1, \quad (18)$$

$$b_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_1, \quad (19)$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_1 и коэффициент диффузии σ_1 .

Из соотношений (18) и (19) получаем

$$g_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (a_1 - \tilde{G}_1), \quad (20)$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} b_1. \quad (21)$$

Следовательно, справедливо утверждение

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того чтобы система уравнений (1) в скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C_{xt}^{22}$ обладала интегральным многообразием (2), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент сноса g_1 имел вид (20), а коэффициент диффузии σ_1 – вид (21).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2

В силу стохастического дифференцирования сложной функции найдем последовательно вторую и третью производные функции $\lambda = \lambda(x, t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} &= \lambda_x \dot{f} + f^t \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}, \\ \ddot{\lambda} &= (\lambda_{xx} + \lambda_{xt}) \dot{f} + \lambda_x \ddot{f} + f^T \lambda_{xx} f + f^T (\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f + f^T \lambda_{xx} \dot{f} + \\ &\quad + 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt} \dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \dot{y} + f_t$, $\ddot{f} = (f_{xx} f + f_{xy} \dot{y} + f_{xt}) f + f_x \dot{f} + (f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + f_{yt}) \cdot \dot{y} + f_y \ddot{y} + f_{tx} f + f_{ty} \dot{y} + f_{tt}$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} G_2 &= (\lambda_{xx} + \lambda_{xt}) \dot{f} + \lambda_x [(f_{xx} f + f_{xy} \dot{y} + f_{xt}) f + f_x \dot{f} + (f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + f_{yt}) \dot{y} + \\ &\quad + f_{tx} f + f_{ty} \dot{y} + f_{tt}] + f^T \lambda_{xx} f + f^T (\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f + \\ &\quad + f^T \lambda_{xx} \dot{f} + 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt} \dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \end{aligned}$$

тогда уравнение возмущенного движения (22) запишется в виде

$$\ddot{\lambda} = G_2 + \lambda_x f_y g_2 + \lambda_x f_y \sigma_2 \dot{\xi}. \quad (23)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольную m -мерную вектор-функцию $A_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$ и матрицу $B_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям

$$A_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0, \quad B_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0$$

и такие, что имеет место соотношение

$$\ddot{\lambda} = A_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) + B_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)\dot{\xi}. \quad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), получаем соотношения

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_2 = A_2 - G_2, \\ \lambda_x f_y \sigma_2 = B_2, \end{cases} \quad (25)$$

из которых нужно определить множества как коэффициентов сноса $\{g_2\}$, так и матриц диффузий $\{\sigma_2\}$.

Обозначив через $H_2 = \lambda_x f_y$, из соотношений (25) определим множество $\{g_2\}$ в виде

$$g_2 = s_3[H_2 C] + (H_2)^+ (A_2 - G_2), \quad (26)$$

а столбцы множества матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ в виде

$$\sigma_{2i} = s_{4i}(E - \lambda_x^T \Gamma^{-1} \lambda_x) c + (H_2)^+ (B_{2i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (27)$$

где s_3, s_{4i} – произвольные скалярные величины.

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы система уравнений (3) имела заданное интегральное многообразие (4), необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_2\}$ имело вид (26), а столбцы множества матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ – вид (27).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В скалярном случае задачи $2 \ x \in R^1, y \in R^1, \lambda \in R^1, \lambda \in C_{xt}^{22}$, уравнение возмущенного движения в результате трехкратного стохастического дифференцирования примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \left(\left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^2 \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t^2} \right) f + \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) \dot{f} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \ddot{f} + \left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x \partial t} \right) f + \\ & + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^3}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\ddot{f} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{f} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \right) \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 = & \left(\left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^2 \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t^2} \right) f + \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) \dot{f} + \left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^3} + \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{f} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \right) \dot{y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right], \end{aligned}$$

и перепишем (28) в виде

$$\ddot{\lambda} = \tilde{G}_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_2 \dot{\xi}. \quad (29)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольные скалярные функции $a_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$, $b_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют следующему условию: $a_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv b_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0$ и такие, что

$$\ddot{\lambda} = a_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) + b_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (30)$$

Сравнивая (29) и (30), приходим к соотношениям

$$a_2 = \tilde{G}_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2, \quad b_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_2, \quad (31)$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_2 и коэффициент диффузии σ_2 .

Из соотношений (31) получаем

$$g_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (a_2 - \tilde{G}_2), \quad (32)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} b_2. \quad (33)$$

Следовательно, справедливо утверждение

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того, чтобы система уравнений (3) в скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C_{xt}^{22}$ обладала интегральным многообразием (4), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент сноса g_2 имел вид (32), а коэффициент диффузии σ_2 – вид (33).

Полученные результаты обобщают на стохастический случай известные в классе ОДУ утверждения И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова [7].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 659-670.
- 2 Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971.
- 3 Галиуллин А.С. Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. ХУІІ, №8. – С. 1487-1489.
- 4 Галиуллин А.С. Об определении силовой функции по заданному интегралу уравнений движения // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. ХУІІІ, №5. – С. 744-748.
- 5 Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986.
- 6 Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник РУДН. Серия прикладная математика и информатика. – 1994. – №1. – С. 5-21.
- 7 Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М., 1986. – 88 с.
- 8 Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Серия физико-математическая. – 1998. – №3. – С. 55-61.
- 9 Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, №5. – С. 714-716.

10 Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. – 1999. – №1. – С. 53-60.

11 Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т. К стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Известия МОН РК. Серия физико-математическая. – 2006. – №5. – С. 8-13.

12 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the Restoration Problem with Gegenerated Diffusion // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2015. – V. 6, №1. – P. 93-99.

13 Тлеубергенов М.И. К обратной стохастической задаче восстановления // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №2. – С. 269-273.

14 Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

15 Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

16 Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче с непрямым управлением // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2006. – №5. – С. 13-17.

Статья поступила в редакцию 08.12.2015

Ыбраева Г.Т., Тілеубергенов М.Ы. ТУРА ЕМЕС БАСҚАРУЫ БАР
СТОХАСТИКАЛЫҚ ЕСЕПТІ КВАЗИ-КЕРІ АЙНАЛДЫРУ ӘДІСІМЕН
ШЕШУ ТУРАЛЫ

Ито түріндегі стохастикалық дифференциалдық теңдеулер класында бірінші туынды бойынша басқаруы (1 есеп) және екінші туынды бойынша басқаруы (2 есеп) бар айнымалылардың бір бөлігіне тәуелді берілген қозғалыстың қасиеттері бойынша кері есептер қарастырылады. Осы есептердегі берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін регулятор теңдеулерінің жиындары квази-кері айналдыру әдісімен анықталады.

Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. ON THE SOLVING THE INVERSE
STOCHASTIC PROBLEM WITH INDIRECT CONTROL BY THE QUASI-
INVERSION METHOD

The inverse problems in the class of stochastic differential Ito's equations by the given properties of motion, depending on the part of variables and with the control by the first derivative (problem 1) and with the control by the second derivative (problem 2), are considered. The set of regulator's equations, which ensures necessary and sufficient conditions of the existence of the given integral manifold is defined in these problems by the quasi-inversion method.

**ПОСТРОЕНИЕ ENO-СХЕМЫ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ
СЕТКЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО
ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ**Е.С. МОИСЕЕВА¹, А.О. БЕКЕТАЕВА²¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: k.moisseyeva@gmail.com²Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: azimaras@mail.ru

Аннотация: Разрабатывается ENO-схема третьего порядка точности на неравномерной сетке. Способ построения ENO-схемы основан на методологии, разработанной для равномерной сетки. Эффективность построенного алгоритма показана на примере численного моделирования пространственного сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси с поперечным вдувом струи. Также проводится анализ различных функций ограничителей наклона с целью определить наиболее оптимальную функцию, приводящую к наименьшему размазыванию решения.

Ключевые слова: ENO-схема, неравномерная сетка, ограничители наклона, сверхзвуковое течение, поперечный вдув, многокомпонентный газ.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение взаимодействия поперечно-вдуваемой струи и сверхзвукового потока является важной проблемой в моделировании горения в сверхзвуковых ПВРД. При этом формируется достаточно сложная картина течения, схематически она показана на рис.1 [1], [2]. Перед струей формируется трехмерный головной скачок уплотнения 1, который взаимодействует с пограничным слоем, что приводит к появлению более слабого косоугольного скачка уплотнения 2. Далее последующее торможение сверхзвукового участка течения в области отрыва сопровождается появлением

Keywords: *ENO scheme, non-uniform grid, slope limiters, supersonic flow, transverse injection, multispecies gas.*

2010 Mathematics Subject Classification: 65M06, 76J20.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0827/ГФ4.

© Е.С. Моисеева, А.О. Бекетаева, 2015.



Рисунок 1 – Схема течения [1] (а), в плоскости симметрии xz [2] (б)

ем замыкающего скачка уплотнения 3. Вышеописанные три скачка образуют известную λ -образную ударно-волновую структуру 4. При вдуве недорасширенной струи происходит ее расширение. Волны разряжения, возникающие у кромки сопла, отражаясь от границ струи, образуют бочкообразную ударно-волновую структуру, замыкающуюся прямым скачком уплотнения – диском Маха, за которым течение становится дозвуковым и затем ускоряется до значения скорости основного потока. Границы струи на некотором расстоянии от центра вдува принимают форму пары противоположно вращающихся вихрей. Еще одна вихревая структура возникает перед струей – подковообразные вихри, которые огибают струю и образуют устойчивый вихревой след за струей. Также за струей находится еще одна рециркуляционная зона вследствие наличия зоны разряжения.

Для того, чтобы учесть все вышеописанные сложные структуры, возникающие при истечении звуковой струи в сверхзвуковой поток, в областях больших градиентов (в пограничном слое, у стенки, на уровне вдува струи) вводится сгущение сетки и используются схемы высокого порядка точности. В настоящее время основным инструментом преодоления трудностей численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса при моделировании сверхзвуковых течений таких, как возникновение осцилляций и разрывов в решении, являются существенно неосциллирующие схемы – ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted essentially non-oscillatory) схемы. Обычно эти схемы применяются на равномерной сетке с использованием преобразования координат [3]–[5], однако, в последнее

время появились работы [6], [7], в которых разрабатываются и изучаются TVD-схемы и соответствующие функции ограничителей наклона на неравномерной сетке.

Целью данной работы является разработка конечно-разностной ENO-схемы третьего порядка точности на неравномерной сетке. Способ построения ENO-схемы основан на методологии, предложенной авторами [8] для равномерной сетки. При этом для построения существенно неосциллирующей кусочно-полиномиальной функции полином Ньютона третьей степени адаптируется для неравномерной сетки. Эффективность разработанного алгоритма показывается на примере моделирования пространственного сверхзвукового течения воздуха с поперечным вдувом струи водорода путем численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых $k - \omega$ моделью турбулентности. Дополнительно вводится эффективный показатель адиабаты газовой смеси, который позволяет вычислить производные от давления по независимым переменным при определении матриц Якоби и таким образом построить эффективный неявный алгоритм решения. Изучается влияние выбора ограничителей в разработанном численном алгоритме на динамику слоя смешения, поскольку точный расчет распространения массовых концентраций является важным при моделировании задач горения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система трехмерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Векторы \vec{U} , \vec{E} , \vec{F} , \vec{G} определяются выражениями

$$\begin{aligned} \vec{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T, \\ \vec{E} &= (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T, \\ \vec{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E_t + p)v, \rho v Y_k)^T, \\ \vec{G} &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E_t + p)w, \rho w Y_k)^T \end{aligned}$$

и векторы $\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$ связаны с вязкими напряжениями:

$$\begin{aligned}\vec{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T, \\ \vec{F}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, J_{ky})^T, \\ \vec{G}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T.\end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{2\mu}{3Re} (2u_x - v_y - w_z), \tau_{yy} = \frac{2\mu}{3Re} (2v_y - u_x - w_z), \\ \tau_{zz} &= \frac{2\mu}{3Re} (2w_z - u_x - v_y), \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re} (u_y + v_x), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x), \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{Re} (v_z + w_y).\end{aligned}$$

Компоненты диффузионного и теплового потоков задаются выражениями

$$\begin{aligned}J_{kx} &= -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, J_{ky} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial y}, J_{kz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z}, \\ q_x &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{kx}, \\ q_y &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{ky}, \\ q_z &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{kz}.\end{aligned}$$

Для давления и полной энергии запишутся следующие формулы:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}, E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N Y_k h_k - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2).$$

Удельная энтальпия и удельная теплоемкость k -ой компоненты определяются как

$$h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT, c_{pk} = C_{pk} \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right),$$

где молярная теплоемкость записывается в полиномиальной форме

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^5 \bar{a}_{ki} T^{i-1},$$

а коэффициенты \bar{a}_{ki} определяются из термодинамических таблиц JANAF [9].

Коэффициент вязкости определяется как сумма коэффициентов ламинарной и турбулентной вязкостей: $\mu = \mu_l + \mu_t$, μ_t определяется с помощью $k - \omega$ модели турбулентности [10], μ_l – из формулы Уилке.

В системе (1) u, v, w, ρ, T – компоненты вектора скорости, плотность и температура соответственно. Y_k и W_k – массовая концентрация и молекулярный вес k -ой компоненты, где Y_1 – массовая концентрация H_2 , Y_2 – массовая концентрация O_2 , Y_3 – массовая концентрация N_2 . γ – параметр адиабаты, M – число Маха. Индекс 0 соответствует параметрам струи и индекс ∞ соответствует параметрам основного потока.

Система (1) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. В качестве определяющих параметров приняты параметры потока на входе $(u_\infty, \rho_\infty, T_\infty)$, характерным размером длины является диаметр круглого отверстия d . Давление p и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, удельная энтальпия h_k – к $R^0 T_\infty / W_\infty$, молярные удельные теплоемкости C_{pk} – к R^0 .

Граничные условия имеют следующий вид:

на входе задаются параметры потока

$$\begin{aligned} p = p_\infty, \quad T = T_\infty, \quad u &= M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, \quad v = w = 0, \quad Y_k = Y_{k\infty}, \quad W_k = W_{k\infty}, \\ x &= 0, \quad 0 \leq y \leq H_y, \quad 0 \leq z \leq H_z. \end{aligned}$$

Также во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, продольная составляющая скорости аппроксимируется по степенному закону; в струе задаются параметры струи

$$\begin{aligned} p = np_\infty, \quad T = T_0, \quad u &= v = 0, \quad w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, \quad Y_k = Y_{k0}, \quad W_k = W_{k0}, \\ z &= 0, \quad |x^2 + y^2| \leq R, \end{aligned}$$

где $n = p_0/p_\infty$ – параметр нерасчетности.

На выходной границе задается условие неотражения [11]. На нижней стенке задается условия прилипания и теплоизоляции; на верхней и на боковых границах выполняется условие симметрии. Здесь H_x – длина, H_y – ширина, H_z – высота расчетной области, R – радиус круглого отверстия.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача решается неявно и аналогично методологии для равномерной сетки, разработанной авторами в [8], [12]. Численное решение осуществляется в два этапа. На первом этапе вычисляются термодинамические параметры и на втором определяются массовые концентрации. Для аппроксимации первых производных используются конечные разности против потока первого порядка точности, для аппроксимации вторых производных – центральные разности первого порядка точности. Для аппроксимации конвективных членов используется ENO-схема третьего порядка точности, которая будет описана ниже. Решение полученной системы разностных уравнений осуществляется согласно принципу расщепления по направлениям для вектора термодинамических параметров методом матричной прогонки, а для массовых концентраций – методом скалярной прогонки.

Численное решение системы (1) осуществляется на основе ENO-схемы третьего порядка точности. Здесь будут показаны основные этапы построения данной схемы на неравномерной сетке на примере одномерного невязкого случая. Затем данный метод обобщается на трехмерный случай.

Этап 1. Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0,$$

где $A = \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial \vec{u}}$ – матрица Якоби.

В полосе $t_n \leq t < t_{n+1}$ значения функции $\vec{u}(x, t_n)$ заменяются кусочно-постоянными, а именно: ее средними

$$\vec{v}_h = \vec{u}_j = \frac{1}{\bar{h}_j} \int_{I_j} \vec{u}(x, t_n) dx,$$

где $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $\bar{h}_j = (h_j + h_{j-1})/2$, $h_j = x_{j+1} - x_j$.

Тогда искомая задача на этом малом отрезке по времени для $\lambda > 0$ – собственного значения матрицы A – будет иметь вид

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

с начальным условием

$$\vec{v}_h(x, t_n) = R(x; \vec{v}^n),$$

где $R(x; \vec{v}^n)$ есть кусочно-полиномиальная функция. Точное решение задачи (2) для достаточно малого Δt будет иметь вид

$$\vec{v}_h(t) = E(t - t_n) \vec{v}_h(t_n + 0),$$

где $E(t)$ – оператор точного решения (2). Тогда

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_h(x, t_{n+1}) = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} \vec{v}_h(x, t_n) dx. \quad (3)$$

Этап 2. В терминах инвариантов Римана $w = R^{-1}v$, где R – собственный вектор матрицы для собственного значения λ , покомпонентная форма точного решения (2) в полосе $t_n \leq t < t_{n+1}$ представляется следующим образом:

$$w(x, t) = R(x - \lambda t; \vec{w}^n).$$

Тогда схема (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \vec{w}_j^{n+1} &= \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x - \lambda t; \vec{w}^n) dx = \\ &= \frac{1}{h_j} \left(H_m(x_{j+1/2} - \lambda t; W) - H_m(x_{j-1/2} - \lambda t; W) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $W(x)$ – первообразная для $w(x)$, а полином $H_m(x; W)$ строится на основе формулы Ньютона третьей степени, алгоритм построения аналогичен работе [8]. Окончательное решение для положительных ($\lambda > 0$) и

отрицательных ($\lambda < 0$) собственных значений матрицы Якоби запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_j^{n+1} = & \bar{w}_j^n - \\
 & -\sigma_j^+ \Delta_- \bar{w}_j^n - \sigma_j^+ \Delta_- \left[\bar{h}_j \left(1 - \sigma_j^+ \right) \limiter1 \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j}, \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) + \left(\sigma_j^+ - 1 \right) \times \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} \bar{h}_j s_j \left(\bar{\sigma}_j^+ - 1 \right) \limiter2 \left(d_j \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+1} \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \\ \bar{h}_{j+1} \bar{h}_j \left(\sigma_j^+ + 1 \right) \limiter2 \left(d_{j+1} \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+2} \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \end{array} \right] - \\
 & -\sigma_j^- \Delta_+ \bar{w}_j^n - \sigma_j^- \Delta_+ \left[\bar{h}_j \left(1 + \sigma_j^- \right) \limiter1 \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j}, \frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) - \left(\sigma_j^- + 1 \right) \times \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} \bar{h}_j \bar{h}_{j-1} \left(\sigma_{j-1}^- - 1 \right) \limiter2 \left(d_j \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+1} \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \text{если } \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \\ \bar{h}_j s_{j+1} \left(1 + \bar{\sigma}_{j+1}^- \right) \limiter2 \left(d_{j+1} \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right), d_{j+2} \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right) \\ \text{если } \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{w}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{w}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \end{array} \right], \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $\sigma_j^\pm = \lambda^\pm \Delta t / h_j$, $\lambda^\pm = (\lambda \pm |\lambda|) / 2$, $\Delta_\pm w_j = \pm(w_{j\pm 1} - w_j)$, $s_j = \bar{h}_j + \bar{h}_{j-1}$, $d_j = 1 / (\bar{h}_j + \bar{h}_{j-1} + \bar{h}_{j-2})$, а функции $\limiter1(a, b)$ и $\limiter2(a, b)$ являются ограничителями, соответствующими членам второго и третьего порядков точности. Здесь в качестве ограничителя $\limiter1(a, b)$ выбираются известные функции $\minmod(a, b)$ или $\text{superbee}(a, b)$, а в качестве ограничителя $\limiter2(a, b)$ – известная функция $\dot{m}(a, b)$:

$$\begin{aligned}
 \limiter1(a, b) = \minmod(a, b) &= \begin{cases} s \min(|a|, |b|), & \text{if } \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = s, \\ 0, & \text{else;} \end{cases} \\
 \limiter1(a, b) = \text{superbee}(a, b) &= \begin{cases} \minmod(2a, b), & \text{if } |a| \leq |b|, \\ \minmod(a, 2b), & \text{if } |a| > |b|; \end{cases} \quad (6) \\
 \limiter2(a, b) = \dot{m}(a, b) &= \begin{cases} 1/2 a, & \text{if } |a| \leq |b|, \\ 1/2 b, & \text{if } |a| > |b|. \end{cases}
 \end{aligned}$$

После осуществления перехода от переменных \bar{w}^n – инвариантов Римана – к переменным v^n , схему (5) можно представить следующим отношением:

$$\bar{v}_j^{n+1} = \bar{v}_j^n - \frac{\Delta t}{h_j} \hat{A}_{j-1/2}^+ \Delta_- \bar{f}_j^m - \frac{\Delta t}{h_j} \hat{A}_{j+1/2}^- \Delta_+ \bar{f}_j^m. \quad (7)$$

Здесь поток \bar{f}_j^m представляется в виде

$$\bar{f}_j^m = \bar{f}_j + \bar{E}_j + \bar{D}_j, \quad (8)$$

где векторы \bar{E}_j , \bar{D}_j определяются следующим образом (верхние индексы + и – соответствуют положительным и отрицательным собственным значениям матрицы Якоби):

$$\bar{E}_j^\pm = \pm \text{limiter1}(\bar{E}_{j-1/2}, \bar{E}_{j+1/2}),$$

$$\bar{D}_j^+ = \begin{cases} \text{limiter2}(d_j \bar{D}_{j-1/2}^+, d_{j+1} \bar{D}_{j+1/2}^+), & \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right|, \\ \text{limiter2}(d_{j+1} \hat{D}_{j+1/2}^+, d_{j+2} \hat{D}_{j+3/2}^+), & \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right) \right|; \end{cases}$$

$$\bar{D}_j^- = \begin{cases} \text{limiter2}(d_j \hat{D}_{j-3/2}^-, d_{j+1} \hat{D}_{j-1/2}^-), & \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| \leq \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right|, \\ \text{limiter2}(d_{j+1} \bar{D}_{j-1/2}^-, d_{j+2} \bar{D}_{j+1/2}^-), & \text{если } \left| \Delta_- \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right| > \left| \Delta_+ \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right) \right|, \end{cases}$$

где $\bar{E}_{j-1/2} = \bar{h}_j \left(I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| \right) \frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j}$, $\bar{E}_{j+1/2} = \bar{h}_j \left(I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| \right) \times \frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}}$,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{j-1/2}^\pm &= \bar{h}_j \alpha_j \left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_j} |A_{j-1/2}| \right) \left(I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| \right) \Delta_\mp \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right), \\ \bar{D}_{j+1/2}^\pm &= \bar{h}_j \alpha_j \left(I - \frac{\Delta t}{\alpha_j} |A_{j+1/2}| \right) \left(I - \frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| \right) \Delta_\mp \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right), \\ \hat{D}_{j-1/2}^\pm &= \bar{h}_j \bar{h}_{j\mp 1} \left(\frac{\Delta t}{h_{j\mp 1}} |A_{j-1/2}| - I \right) \left(\frac{\Delta t}{h_j} |A_{j-1/2}| + I \right) \Delta_\mp \left(\frac{\Delta_- \bar{f}_j^n}{s_j} \right), \\ \hat{D}_{j+1/2}^\pm &= \bar{h}_j \bar{h}_{j\mp 1} \left(\frac{\Delta t}{h_{j\mp 1}} |A_{j+1/2}| - I \right) \left(\frac{\Delta t}{h_j} |A_{j+1/2}| + I \right) \Delta_\mp \left(\frac{\Delta_+ \bar{f}_j^n}{s_{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_j = s_j$ для A^+ и $\alpha_j = s_{j+1}$ для A^- , а матрицы $\hat{A}^\pm = A^\pm A^{-1}$, причем $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, где $A^\pm = R\Lambda^\pm R^{-1} = R\left(\frac{\Lambda \pm |\Lambda|}{2}\right)R^{-1}$, I – единичная матрица.

Тогда (7) можно рассматривать как одностороннюю схему с разностями против потока для следующего модифицированного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial \vec{f}^m}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Ниже приводится обобщение описанного метода для исходной системы уравнений (1). Предварительно в областях больших градиентов, т.е. в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне струи, вводится сгущение сетки.

Одношаговая конечно-разностная схема Эйлера для интегрирования по времени системы (1) аналогично (9) формально записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{U}^{n+1} + \Delta t \left\{ \left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial \vec{E}^m}{\partial x} + \left(\hat{B}^+ + \hat{B}^-\right) \frac{\partial \vec{F}^m}{\partial y} + \left(\hat{C}^+ + \hat{C}^-\right) \frac{\partial \vec{G}^m}{\partial z} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial \vec{E}_v^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}_v^{n+1}}{\partial z} \right] \right\} = O\left(\frac{1}{2}\Delta t^2\right), \quad (10) \end{aligned}$$

здесь \vec{E}^m , \vec{F}^m , \vec{G}^m – модифицированные потоки на узловых точках (i, j, k) , состоящие из исходных конвективных векторов $(\vec{E}, \vec{F}, \vec{G})$ и добавочных членов высокого порядка точности $(\vec{E}_x, \vec{D}_x, \vec{E}_y, \vec{D}_y, \vec{E}_z, \vec{D}_z)$, а именно:

$$\vec{E}^m = \vec{E}^{n+1} + \left(\vec{E}_x + \vec{D}_x\right)^n,$$

где \vec{E}_x , \vec{D}_x определяются из (8). Выражения для потоков \vec{F}^m и \vec{G}^m записываются аналогичным образом. Матрицы $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, $\hat{B}^+ + \hat{B}^- = I$, $\hat{C}^+ + \hat{C}^- = I$; $\hat{A}^\pm = A^\pm A^{-1}$, $\hat{B}^\pm = B^\pm B^{-1}$, $\hat{C}^\pm = C^\pm C^{-1}$. $A = \partial \vec{E} / \partial \vec{U}$, $B = \partial \vec{F} / \partial \vec{U}$, $C = \partial \vec{G} / \partial \vec{U}$ – матрицы Якоби.

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты поставленной задачи (1) проводились на разнесенной сетке размером $241 \times 201 \times 201$ с шагом по времени $\Delta t = 0.01$. Размеры

вычислительной области: $H_x = 20$, $H_y = 15$ и $H_z = 10$ калибров. Сопло расположено в центре нижней стенки. Параметры струи и потока задавались следующими: $Pr = 0.9$, $M_0 = 1$, $M_\infty = 4$, $T_0 = 800K$, $T_\infty = 1000K$, $Re = 10^4$, параметр нерасчетности $n = 11.72$.

Поскольку целью данной работы является разработка и применение конечно-разностной ENO-схемы третьего порядка точности на неравномерной сетке, предварительно в работе авторов [13] было проведено сравнение численного решения задачи на равномерной сетке с использованием преобразования координат и на неравномерной сетке. Было получено удовлетворительное согласование результатов между собой и с экспериментальными данными.

Далее, так как в построенной ENO-схеме применяются ограничители, в качестве которых может выступить множество специальных функций [6], для численного решения задачи (1) выбираются две следующие формы ограничителей из (6) для изучения их влияния на ударно-волновую структуру и динамику слоя смешения:

$$\mathit{limiter}1(a, b) = \mathit{minmod}(a, b), \mathit{limiter}2(a, b) = \dot{m}(a, b); \quad (11)$$

$$\mathit{limiter}1(a, b) = 1.1\mathit{superbee}(a, b), \mathit{limiter}2(a, b) = \dot{m}(a, b). \quad (12)$$

Выбор данных ограничителей определяется тестовыми расчетами на равномерной сетке, проведенными авторами в [12], суть которых заключалась в решении задачи переноса кубического облака водорода в воздушной среде ($O_2 - N_2$) с целью определить оптимальный ограничитель. Было показано, что использование (11) заметно размывает решение, в то время как незначительное изменение ограничителя второго порядка (12) приводит к существенному сокращению диссипативных эффектов.

Влияние ограничителей на динамику слоя смешения хорошо иллюстрируется картиной изолиний массовых концентраций. На рис. 2, 3 приведены результаты сравнения численного эксперимента для поставленной задачи (1), где в левой части представлены результаты, полученные с ограничителем (11), в правой – с (12). Как видно из картины распространения массовых концентраций, размывание решения хорошо заметно по области максимальных и минимальных значений ($Y_1 = 0.99$, $Y_1 = 0.0003$).

Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что расширение струи в плоскости xz существенно меньше, чем в плоскости xy , что объясняется значитель-

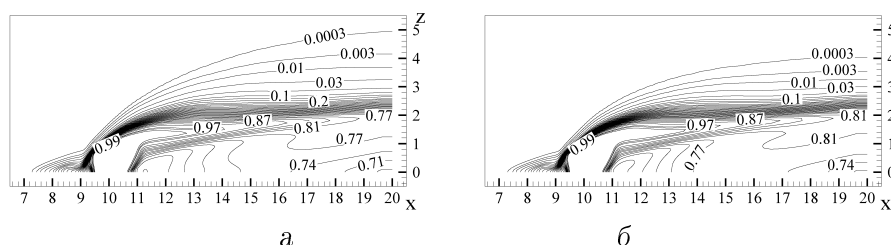


Рисунок 2 – Расчет распределения массовой концентрации водорода в плоскости симметрии xz с использованием различных ограничителей: а – ограничители (11); б – ограничители (12)

ным сносом вдуваемого газа натекающим потоком воздуха. При этом видно, что использование ограничителей (11) приводит к заметному размазыванию решения. Так, максимальная высота, на которую поднимается линия массовой концентрации водорода $Y_1 = 0.0003$, для (11) равняется $z_{max} = 4.94$, а для (12) $z_{max} = 4.902$.

Рис. 3, а-б показывает, что проникновение водорода в область перед струей незначительно распространяется вблизи стенки, то есть в дозвуковой зоне, боковое перетекание струи потоком имеет подковообразную форму. Выше, в тройной точке λ -образной ударно-волновой структуры, область отрывной зоны перед струей уменьшается вследствие уменьшения дозвукового пограничного слоя и почти вплотную подходит к границе струи, область обтекания струи потоком сужается (рис. 3, в-г). Затем отрывная зона перед струей полностью исчезает (рис. 4, д-е), поскольку имеет место как боковое перетекание, так и обтекание струи потоком сверху. При использовании ограничителей (11) в сечении xy так же наблюдается размазывание решения по сравнению с решением, полученным с использованием ограничителей (12).

На рис. 3 приведен обобщающий график зависимости глубины проникновения водорода от отношения динамического давления $q = (\rho \vec{V}^2)_0 / (\rho \vec{V}^2)_\infty$, расчеты производились с параметрами эксперимента [14] в диапазоне $4 < q < 16$, что соответствует значениям параметра нерасчетности $7 < n < 24$, при этом $Re = 9.47 \cdot 10^4$ для $n = 7.81$ и $n = 11.72$, $Re = 6.31 \cdot 10^4$ для $n = 15.61$ и $n = 23.356$. Верхние кривые показывают глубину проникновения водорода ($Y_1 = 0.0003$) в сечении $x/d = 17$,

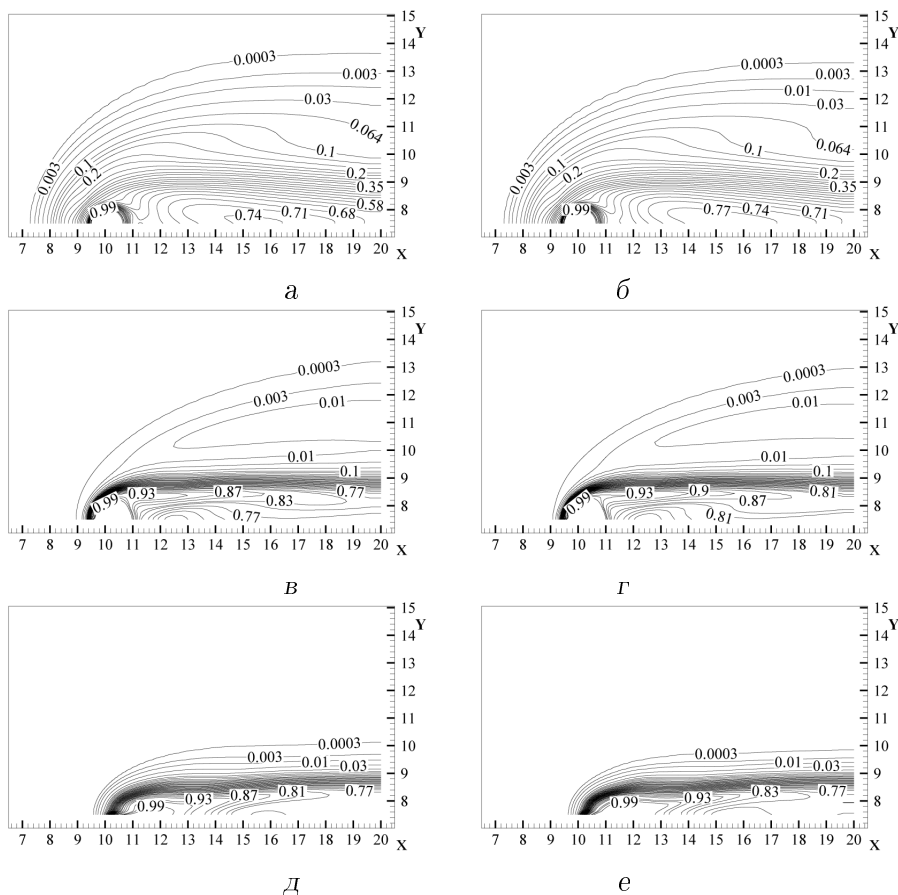


Рисунок 3 – Расчет распределения массовой концентрации водорода в различных сечениях плоскости xy с использованием различных ограничителей:

- а – ограничители (11), $z/d = 0.01$; б – ограничители (12), $z/d = 0.01$;
- в – ограничители (11), $z/d = 0.75$; г – ограничители (12), $z/d = 0.75$;
- д – ограничители (11), $z/d = 1.3$; е – ограничители (12), $z/d = 1.3$

нижние обозначают максимальную высоту от стенки канала, на которую поднялась линия максимального значения концентрации водорода в данном сечении. Видно, что размазывание решения при использовании (11) происходит существенно сильнее, чем в случае (12).

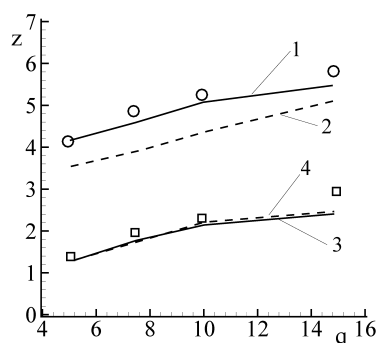


Рисунок 4 – Зависимость глубины проникновения водорода от отношения динамического давления q в сечении $x/d = 17$: кривая 1 - $Y_1 = 0.0003$, ограничители (11); кривая 2 - $y_1 = 0.0003$, ограничители (12); кривая 3 - максимальное значение Y_1 , ограничители (11) ($Y_1 = 0.541, n = 7.81$; $Y_1 = 0.693, n = 11.72$; $Y_1 = 0.817, n = 15.61$; $Y_1 = 0.93, n = 23.356$); кривая 4 - максимальное значение Y_1 , ограничители (12) ($Y_1 = 0.297, n = 7.81$; $Y_1 = 0.382, n = 11.72$; $Y_1 = 0.476, n = 15.61$; $Y_1 = 0.61, n = 23.356$); \circ, \square - эксперимент [14]

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построена существенно - неосциллирующая ENO-схема третьего порядка точности на неравномерной сетке. Основное преимущество алгоритма заключается в том, что его модификация с равномерной на неравномерную сетки осуществляется достаточно просто, а этапы построения ENO-схемы при этом соответствуют этапам построения схемы на равномерной сетке [12]. Разработанная методология решения применяется для численного моделирования трехмерного сверхзвукового турбулентного течения многокомпонентной газовой смеси при наличии поперечного вдува звуковой струи. Различные варианты ограничителей наклона, использующихся в ENO-схеме, адаптированы для неравномерной сетки. Проведен анализ влияния выбора ограничителей на слой смешения. Уста-

новлено, что неудачный выбор функций ограничителей может привести к чрезмерному расширению слоя смешения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Gruber M.R., Nejad A.S., Chen T.H., Dutton J.C. Transverse Injection from Circular and Elliptic Nozzles into a Supersonic Crossflow // *J. Propulsion and Power*. – 2000. – V. 16, No 3. – P. 449-457.
- 2 Ben-Yakar A., Mungal M.G., Hanson R.K. Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows // *Physics of Fluids*. – 2006. – V. 18. – 026101, P. 1-16.
- 3 Adams N.A., Shariff K.A High-Resolution Hybrid Compact-ENO Scheme for Shock-Turbulence Interaction Problems // *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 127, No 1. – P. 27-51
- 4 Sun D., Hu Ch., Cai T. Computation of Supersonic Turbulent Flowfield with Transverse Injection // *App. Math. Mech. English Edition*. – 2002. – V. 23, No 1. – P. 107-113
- 5 Amano R.S., Sun D. Numerical Simulation of Supersonic Flowfield with Secondary Injection // 24th Congress of ICAS, Yokohama. – 2004. – P. 1-8.
- 6 Berger M.J., Aftosmis M.J., Murman S.E. Analysis of slope limiters on irregular grids // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2005. – P. 0490.
- 7 Zeng X.A General Approach to Enhance Slope Limiters on Non-Uniform Rectilinear grids // Submitted to *SIAM J. Sci. Comput.* – 2014. – P. 20-45.
- 8 Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // *Вычислительные технологии*. – 2007. – Т. 12, Спец. выпуск 4: Труды V Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычисл. и информ. технол. – 2007. – С. 17-25.
- 9 Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A. CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // SANDIA Report SAND89-8009. – 1989. – P. 16-25.
- 10 Rumsey C L. Compressibility considerations for $k - \omega$ turbulence models in hypersonic boundary layer applications // NASA/TM-2009-215705. – 2009. – P. 65-77.
- 11 Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // *J. Comp. Phys.* – 1992. – V. 101. – P. 104-129.
- 12 Моисеева Е.С., Найманова А.Ж. Сверхзвуковое течение многокомпонентной газовой смеси с вдувом струи // *Вычислительные технологии*. – 2014. – Т. 19, No 5. – С. 51-66.
- 13 Moisseyeva Ye., Naimanova A., Belyayev Ye., Shakhan N. Third order ENO Scheme on Non-uniform Grid for Supersonic Flows // *Applied Mechanics and Materials*. – 2015. – V. 789-790. – P. 328-333.

14 Rogers R.C. A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream // NASA TN D-6114. – 1971. – 250 p.

Статья поступила в редакцию 02.09.2015

Моисеева Е.С., Бекетаева Ә.О. КӨПКОМПОНЕНТТІ ГАЗ ҚОСПАСЫНЫҢ ЖЫЛДАМДЫҒЫ ДЫБЫС ЖЫЛДАМДЫҒЫНАН ЖОҒАРЫ АҒЫНЫН МОДЕЛЬДЕУ ҮШІН БІРКЕЛКІ ЕМЕС ТОРДА ENO-СҮЛБАСЫН ТҮРҒЫЗУ

Біркелкі емес торда үшінші ретті дәлдікпен ENO-сұлбасы құрастырылады. ENO-сұлбасын құрастыру тәсілі біртекті тор үшін жасалған әдіснамаға негізделген. Құрастырылған алгоритмнің тиімділігі ағыншасының көлденең үрлемесі бар көпкомпонентті газ қоспасының кеңістіктегі жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағының сандық модельдеу мысалында көрсетілген. Сонымен бірге шешімнің барынша аз жағылуына алып келетін ең тиімді функцияны анықтау мақсатында көлбеудің шектегіштерінің әр түрлі функцияларына талдау жасалады.

Moisseyeva Ye., Beketaeva A. DEVELOPMENT OF ENO SCHEME ON NON-UNIFORM GRID FOR SIMULATION OF SUPERSONIC FLOW OF MULTISPECIES GAS MIXTURE

The ENO scheme of the third order accuracy is developed on the non-uniform grid. The method of constructing the ENO scheme is based on the methodology for a uniform grid. The efficiency of the algorithm is shown by the example of the numerical simulation of the supersonic multispecies gas mixture flow with the transverse injected jet. Also, the analysis of the various slope limiter functions is done to define the most optimal function leading to the smallest spread of the solution.

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ**

Б.Х. ТУРМЕТОВ

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz
Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави
161200, Туркестан, ул. Бекзат Саттарханова, 29, e-mail: turmetovbh@mail.ru

Аннотация: В работе для неоднородного бигармонического уравнения в многомерном шаре изучаются новые классы краевых задач. Рассматриваемые задачи являются аналогами периодических задач для круговых областей. Доказаны теоремы существования и единственности решения исследуемых задач.

Ключевые слова: Бигармоническое уравнение, периодическая краевая задача, разрешимость, существование и единственность решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – единичный шар, $\partial\Omega$ – единичная сфера, $r = |x|$ – радиус вектор. Обозначим $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$, $x = (x_1, \tilde{x}) \in R^n$. Для любой точки $x = (x_1, \tilde{x}) \in \Omega$ сопоставим "противоположную" ей точку $x^* = (-x_1, \alpha\tilde{x}) \in \Omega$, где $\alpha_j, j = 2, \dots, n$, принимают одно из значений ± 1 .

Введем обозначения

$$\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}, \quad \partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \leq 0\},$$

$$I = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 = 0\}.$$

Пусть $k = 1, 2$, ν – вектор нормали к границе области Ω . Рассмотрим в Ω следующие три типа задач.

Keywords: *Biharmonic equation, periodic boundary value problem, solvability, existence and uniqueness of solutions.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34L05, 34L20.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0085/ПЦФ-14.

© Б.Х. Турметов, 2015.

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in \partial\Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = g_0(x), x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} + (-1)^k \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2} = g_2(x), x \in \partial\Omega_+. \quad (4)$$

ЗАДАЧА 2. Найти функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = g_0(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} + (-1)^k \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2} = g_2(x), x \in \partial\Omega_+. \quad (7)$$

ЗАДАЧА 3. Найти функцию $u(x) \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = g_0(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = g_2(x), x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Заметим, что если $x = (0, \tilde{x}) \in I$, то $x^* = (0, \alpha\tilde{x}) \in I$ и поэтому из условия (3) следует, что для функции $g_1(x)$ необходимо выполнение условия согласования вида

$$g_1(0, \tilde{x}) = -(-1)^k \left[\frac{\partial u(0, \alpha\tilde{x})}{\partial \nu} - (-1)^k \frac{\partial u(0, \tilde{x})}{\partial \nu} \right] = -(-1)^k g_1(0, \alpha\tilde{x}), (0, \tilde{x}) \in I.$$

Приведем необходимые условия согласования в задачах 1-3 для остальных случаев.

Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_j \geq 0$ – мультииндекс с $|\beta| = |\beta_1| + \dots + |\beta_n|$, $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$, $D^\beta u(x) = u(x)$, если $|\beta| = 0$. Необходимым условием существования решения задач 1, 2 и 3 из класса $C^2(\bar{\Omega})$ являются выполнения условий согласования

а) для задачи 1:

$$D^\beta g_1(0, \tilde{x}) + (-1)^k D^\beta g_1(0, \alpha \tilde{x}) = 0, (0, \tilde{x}) \in I, |\beta| = 0, 1 \quad (11)$$

и

$$g_2(0, \tilde{x}) - (-1)^k g_2(0, \alpha \tilde{x}) = 0, (0, \tilde{x}) \in I; \quad (12)$$

б) для задачи 2:

$$D^\beta g_0(0, \tilde{x}) + (-1)^k D^\beta g_0(0, \alpha \tilde{x}) = 0, (0, \tilde{x}) \in I, |\beta| = 0, 1, 2 \quad (13)$$

и (12);

с) для задачи 3: условия (11) и (13).

Всюду в дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Отметим, что аналогичные задачи для уравнения Лапласа и Пуассона исследовались в работах [1]–[4].

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

ТЕОРЕМА 1. *Если решение задачи 1 существует, то оно единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу идентичности доказательств, приведем доказательство только для случая $k = 1$. Предположим, что существуют две функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, удовлетворяющие условиям задачи (1)–(4). Покажем, что функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ тождественно равняется нулю. Очевидно, что $u(x)$ – бигармоническая функция, удовлетворяющая однородным условиям (2)–(4), т.е.

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega_+, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = -\frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2}, x \in \partial\Omega_+. \quad (16)$$

Далее, если $x = (x_1, \tilde{x})$ и $x \in \partial\Omega_-$, то $x^* = (-x_1, \alpha\tilde{x})$ и $x^* \in \partial\Omega_+$. Поэтому из равенства (15) следует, что

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}, x \in \partial\Omega_-.$$

Следовательно, для всех $x \in \partial\Omega$ выполняется равенство

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}, x \in \partial\Omega.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2}, x \in \partial\Omega. \quad (17)$$

Тогда из условий (16) и (17) следует, что

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = 0, x \in \partial\Omega.$$

Значит, решение задачи 1 является и решением следующей задачи типа Дирихле:

$$\Delta^2 u(x) = 0, x \in \Omega, u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = 0, x \in \partial\Omega. \quad (18)$$

Так как решение задачи (18) единственно (см., например, [5]), то $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть решение задачи 2 существует. Тогда

- 1) если $k = 1$, то решение единственно,
- 2) если $k = 2$, то решение единственно с точностью до постоянного слагаемого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство приведем для случая $k = 2$. Пусть $u(x)$ – бигармоническая функция, удовлетворяющая однородным условиям (5)–(7), т.е.

$$u(x) = u(x^*), x \in \partial\Omega_+, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = -\frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2}, \quad x \in \partial\Omega_+. \quad (21)$$

Далее, если $x \in \partial\Omega_-$, то $x^* \in \partial\Omega_+$. Поэтому из равенства (19) следует, что

$$u(x^*) = u(x), \quad x \in \partial\Omega_-.$$

Следовательно, для всех $x \in \partial\Omega$ выполняется равенство

$$u(x) = u(x^*), \quad x \in \partial\Omega.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial \nu^2}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (22)$$

Тогда из условий (21) и (22) следует, что

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Значит, решение задачи 2 является и решением следующей задачи типа Неймана:

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Известно (см., например, [6]), что решение этой задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $u(x) \equiv C$, $x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3. Пусть решение задачи 3 существует. Тогда

- 1) если $k = 1$, то решение единственно,
- 2) если $k = 2$, то решение единственно с точностью до постоянного слагаемого.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

В этом пункте обоснуем существование решения задачи 1. Введем в рассмотрение вспомогательные функции:

$$v(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(x^*)), \quad w(x) = \frac{1}{2}(u(x) - u(x^*)).$$

Очевидно, что $u(x) = v(x) + w(x)$. Кроме того,

$$v(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(x^*)) = \frac{1}{2}(u(x^*) + u(x)) = v(x^*),$$

$$w(x) = \frac{1}{2}(u(x) - u(x^*)) = -\frac{1}{2}(u(x^*) - u(x)) = -w(x^*).$$

Пусть $k = 1$. Находим задачи, которым удовлетворяют эти функции. Применяя к функциям $v(x)$ и $w(x)$ оператор Δ^2 , имеем

$$\Delta^2 v(x) = \frac{1}{2}[\Delta^2 u(x) + \Delta^2 u(x^*)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(x^*)] \equiv f^+(x),$$

$$\Delta^2 w(x) = \frac{1}{2}[\Delta^2 u(x) - \Delta^2 u(x^*)] = \frac{1}{2}[f(x) - f(x^*)] \equiv f^-(x).$$

Далее из краевого условия (2) получаем

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}[u(x) + u(x^*)] \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}[g_0(x) + g_0(x^*)] \equiv g_0^+(x),$$

$$w(x)|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2}[u(x) - u(x^*)] \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}[g_0(x) - g_0(x^*)] \equiv g_0^-(x),$$

Из условия (4) для функции $v(x)$ имеем

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial\nu^2} + \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial\nu^2} \right] \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{g_2(x)}{2}.$$

Если $x \in \partial\Omega_-$, то $x^* \in \partial\Omega_+$ и поэтому из равенства (4) следует

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega_-} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial\nu^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial\nu^2} \right] \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{g_2(x^*)}{2}.$$

Введем функцию

$$2\tilde{g}_2(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \in \partial\Omega_+ \\ g_2(x^*), & x \in \partial\Omega_- \end{cases}$$

Тогда

$$\left. \frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_2(x).$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением следующей задачи типа Дирихле:

$$\Delta^2 v(x) = f^+(x), x \in \Omega; \quad v(x)|_{\partial\Omega} = g_0^+(x), \quad \left. \frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_2(x). \quad (23)$$

Аналогичным образом из условия (3) для функции $w(x)$ получаем

$$\left. \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} \right] \right|_{\partial\Omega_+} = \frac{g_1(x)}{2}.$$

Если $x \in \partial\Omega_-$, то $x^* \in \partial\Omega_+$ и поэтому из равенства (3) следует, что

$$\left. \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega_-} = -\frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right] \right|_{\partial\Omega_+} = -\frac{g_1(x^*)}{2}.$$

Обозначим

$$2\tilde{g}_1(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in \partial\Omega_+ \\ -g_1(x^*), & x \in \partial\Omega_- \end{cases}$$

Тогда функция $w(x)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2 w(x) = f^-(x), x \in \Omega; \quad w(x)|_{\partial\Omega} = g_0^-(x), \quad \left. \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_1(x). \quad (24)$$

Заметим, что если функция $f(x)$ является достаточно гладкой в области $\bar{\Omega}$, а функция $g_0(x)$ – на сфере $\partial\Omega$, то очевидно, что этими же свойствами обладают функции $f^+(x)$, $f^-(x)$, $g_0^+(x)$ и $g_0^-(x)$. Далее, если функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ являются гладкими на $\partial\Omega_+$, то при выполнении условий согласования (8),(9) такими же свойствами будут обладать функции $\tilde{g}_1(x)$ и $\tilde{g}_2(x)$. А при достаточно гладких функциях $f^+(x)$, $f^-(x)$, $g_0^+(x)$, $g_0^-(x)$, $\tilde{g}_1(x)$ и $\tilde{g}_2(x)$ решения задач (23) и (24) существуют и единственны.

Сформулируем основной результат относительно задачи 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $k = 1, 2, 0 < \alpha < 1$, $f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $g_0(x) \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, $g_1(x) \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega_+)$, $g_2(x) \in C^\alpha(\partial\Omega_+)$ и выполняются условия согласования (11), (12). Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

4. ИССЛЕДОВАНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Как и в случае задачи 1, рассмотрим вспомогательные функции $v(x)$, $w(x)$. Из условия (6) для этих функций в обоих случаях $k = 1, 2$ получаем краевые условия вида

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} [g_1(x) + g_1(x^*)] \equiv g_1^+(x),$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} [g_1(x) - g_1(x^*)] \equiv g_1^-(x).$$

Пусть $k = 1$. Из условия (5), как и в случае задачи 1, для функции $v(x)$ получаем

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \quad 2\tilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x), & x \in \partial\Omega_+ \\ g_0(x^*), & x \in \partial\Omega_- \end{cases}$$

Тогда функция $v(x)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2 v(x) = f^+(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x)|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g_1^+(x). \quad (25)$$

При гладких данных $f^+(x)$, $\tilde{g}_0(x)$ и $g_1^+(x)$ решение задачи (25) существует и единственно.

Далее из условия (7) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial\Omega_+} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{g_2(x)}{2}, \\ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial\Omega_-} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\partial\Omega_+} = -\frac{g_2(x^*)}{2} \end{aligned}$$

и поэтому выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_2(x), \quad 2\tilde{g}_2(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \in \partial\Omega_+ \\ -g_2(x^*), & x \in \partial\Omega_- \end{cases}$$

Таким образом, функция $w(x)$ является решением следующей задачи типа Неймана:

$$\Delta^2 w(x) = f^-(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = g_1^-(x), \quad \frac{\partial^2 w(x)}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial \Omega} = \tilde{g}_2(x). \quad (26)$$

В работе [6] доказано, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (26) является выполнение условия

$$\int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f^-(x) dx = \int_{\partial \Omega} [\tilde{g}_2(x) - g_1^-(x)] dS_x. \quad (27)$$

В нашем случае для интегралов из равенства (27) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f^-(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(x) dx - \int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(x^*) dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(x) dx - \int_{\Omega} \frac{1 - |x^*|^2}{2} f(x) dx \right] = 0, \\ \int_{\partial \Omega} \tilde{g}_2(x) dS_x &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_+} g_2(x) dS_x - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_+} g_2(x) dS_x = 0, \\ \int_{\partial \Omega} g_1^-(x) dS_x &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_+} g_1(x) dS_x - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_+} g_1(x) dS_x = 0, \end{aligned}$$

Следовательно, условие разрешимости (27) всегда выполняется и поэтому решение задачи для гладких данных существует и единственно.

В случае $k = 2$ аналогичными вычислениями можно показать, что функции $v(x)$ и $w(x)$ являются решениями следующих задач:

$$\Delta^2 v(x) = f^+(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = g_1^+(x), \quad \frac{\partial^2 v(x)}{\partial \nu^2} \Big|_{\partial \Omega} = \tilde{g}_2(x) \quad (28)$$

и

$$\Delta^2 w(x) = f^-(x), \quad x \in \Omega, \quad w(x)|_{\partial \Omega} = \tilde{g}_0(x), \quad \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = g_1^-(x). \quad (29)$$

В этом случае при гладких данных решение задачи (29) всегда существует, а условие разрешимости задачи (28) имеет вид

$$\int_{\Omega} \frac{1-|x|^2}{2} f(x) dx = \int_{\partial\Omega_+} g_2(x) dS_x - \int_{\partial\Omega} g_1(x) dS_x.$$

Сформулируем основной результат относительно задачи 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $g_0(x) \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega_+)$, $g_1(x) \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $g_2(x) \in C^\alpha(\partial\Omega_+)$, $0 < \alpha < 1$ и выполнены условия согласования (12), (13).

Тогда

1) если $k = 1$, то решение задачи 2 существует и единственно,

2) если $k = 2$, то для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\Omega} \frac{1-|x|^2}{2} f(x) dx = \int_{\partial\Omega_+} g_2(x) dS_x - \int_{\partial\Omega} g_1(x) dS_x.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

При исследовании разрешимости задачи 3 для вспомогательных функций $v(x)$ и $w(x)$ в случае $k = 1$ получаем задачи

$$\Delta^2 v(x) = f^+(x), x \in \Omega, v(x)|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \frac{\partial^2 v(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = g_2^+(x),$$

$$\Delta^2 w(x) = f^-(x), x \in \Omega; \frac{\partial w(x)}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_1(x), \frac{\partial^2 w(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = g_2^-(x),$$

а в случае $k = 2$ получаем задачи

$$\Delta^2 v(x) = f^+(x), x \in \Omega; \frac{\partial v(x)}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_1(x), \frac{\partial^2 v(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = g_2^+(x)$$

и

$$\Delta^2 w(x) = f^-(x), x \in \Omega, w(x)|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \frac{\partial^2 w(x)}{\partial\nu^2} \Big|_{\partial\Omega} = g_2^-(x).$$

Эти задачи исследуются также, как и в случае задач 1 и 2. Отсюда получаем основной результат относительно задачи 3.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $g_0(x) \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega_+)$, $g_1(x) \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $g_2(x) \in C^\alpha(\partial\Omega_+)$, $0 < \alpha < 1$ и выполнены условия согласования (11), (13).

Тогда

1) если $k = 1$, то решение задачи 3 существует и единственно,

2) если $k = 2$, то для разрешимости задачи 3 необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\Omega} \frac{1 - |x|^2}{2} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g_2(x) dS_x - \int_{\partial\Omega_+} g_1(x) dS_x.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

ЛИТЕРАТУРА

1 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in ball // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – V.3, No 1. – P. 143-146.

2 Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, No 2. – С. 264-268.

3 Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – V. 2014, No 157. – P. 1-14.

4 Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh., Muratbekova M. A. On solvability of some nonlocal boundary value problems with the Hadamard boundary operator // Int. Conf. on analysis and applied math. (ICAAM 2014). – AIP Conf. Proc. – 2014. – V. 1611. – P. 266-270.

5 Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions // Comm Pure Appl. Math. – 1959. – V. 12, No 4. – P. 623-727.

6 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Bekeeva A.E. Solvability conditions of the biharmonic equation in the unit ball // Int. J. of Pure and Applied Math. – 2012. – V. 81, No 3. – P. 487-495.

Статья поступила в редакцию 23.11.2015

Турметов Б.Х. ПЕРИОДТЫ ШАРТТАРЫ БАР БИГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІН ШЕШІЛІМДІЛІГІ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыста көп өлшемді шарда біртекті емес бигармониялық теңдеу үшін шеттік есептердің жаңа класы зерттелінеді. Қарастырылатын есептер дөңгелек аймақтар үшін периодты шеттік есептердің аналогы болып табылады. Зерттелінетін есептерің шешімінің бар және жалғыз болуы жайлы теоремалар дәлелденген.

Turmetov B.Kh. ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE BIHARMONIC EQUATION WITH PERIODIC CONDITIONS

In this paper new classes of boundary value problems are studied for an inhomogeneous biharmonic equation in a multidimensional ball. These problems are analogous of periodic problems for circular domains. We proved theorems on the existence and the uniqueness of the solutions of the problems.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе \LaTeX -2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, №4 (58), 2015

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте <http://www.math.kz>
Института математики и математического моделирования МОН РК
25.12.2015 г.

Тираж 300 экз. Объем 108 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: <http://www.math.kz>