ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

Том 14 № 1 (51) 2014

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, № 1 (51), 2014

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 14 **№ 1 (51)** **2014**

CONTENTS

Volume 14 **No. 1 (51)** **2014**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 517.938

К АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В ПРОСТОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Б.К. Абенов, С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: babenov@mail.ru,
serikbai.aisagaliev@kaznu.kz
Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: mnk@ipik.kz

Получено новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости позволяет получить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы шире, нежели известные методы. Эффективность предлагаемого метода показана на примере.
Ключевые слова: *абсолютная устойчивость, регулируемая система, условие абсолютной устойчивости, оценка несобственных интегралов, невырожденное преобразование.*

Введение

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует

Keywords: *absolute stability, regulative system, absolute stability condition, improper integrals evaluation, nondegenerate transformation.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34C05, 34C07, 34C25

отметить монографии [1–6]. Существуют два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье [2], метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А.Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функций Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье сводится к разрешимости матричных неравенств. Естественно, для решения прикладных задач такой подход довольно сложный. Продолжателем идей А.И. Лурье в направлении поиска наибольшего коэффициента усиления линейной части системы был А.К.Бедельбаев [5], а качество переходных процессов в регулируемых системах было исследовано в работе Б.М. Майгарина [6].

Частотное условие абсолютной устойчивости В.М.Попова является необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств А.Н. Лурье, и, более того, для одномерных систем частотные условия допускают геометрическую интерпретацию, что позволяет проверить разрешимость матричных неравенств при фиксированных значениях конструктивных параметров системы. Однако для многомерных систем частотные условия не имеют геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных систем, и их проверка в этих случаях является довольно сложной задачей. Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [7, 8].

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему [9]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$, асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$, с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) \bigm| 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2, \forall\, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом?

Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема [10]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$,

$\sigma = Sx$, асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$, с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_2 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1,\, R^1) \,\big|\, 0 \le \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \le \mu_0, \forall\,\sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом?

Проблема Калмана имеет положительное решение при $n = 2$. Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$.

В работе [11] предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах [12–15] приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований. С целью показать эффективность предлагаемого метода в виде примера приведена система третьего порядка, для который проблема Айзермана имеет положительное решение.

1. Постановка задачи

Уравнение движения регулируемых систем в простом критическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\eta} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = Dx + E\eta, \\ &x(0) = x_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad t \in I = [0, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, E — постоянные матрицы порядков $n\times n,\ n\times 1,\ 1\times n,\ 1\times 1$ соответственно, матрица A — гурвицева, то есть $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n},\ \lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы A,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \bigl\{\varphi(\sigma) \in C(R^1,\ R^1) \,\big|\, \varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma),\ 0 \le \bar{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \\ \sigma \ne 0,\ \forall\,\sigma \in R^1,\ \bar{\varphi}(0) = 0,\ |\bar{\varphi}(\sigma)| \le \bar{\varphi}_*,\ 0 < \bar{\varphi}_* < \infty\bigr\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon{>}0$ — сколь угодно малое число. Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \bigl\{\bar{\varphi}(\sigma) \in C(R^1,\ R^1) \,\big|\, 0 \le \bar{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \sigma \ne 0,\ \forall\,\sigma \in R^1, \\ \bar{\varphi}(0) = 0,\ \bigl|\bar{\varphi}(\bar{\sigma})\bigr| \le \bar{\varphi}_*,\ 0 \le \bar{\varphi}_* < \infty\bigr\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами, для таких систем функция $\varphi(\sigma)$удовлетворяет условиям (2), (3).

Поскольку $0 < \varphi_* < \infty$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, то включения (2), (3) содержат все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$.

Положения равновесия системы (1), (2) определяются из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Dx_* + E\eta_*$.

Так как матрица A — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$ в случае, когда система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0,\ \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Полагаем, что в достаточно малой окрестности точки $\sigma = 0$, функцию $\varphi(\sigma)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$. Иными словами, при $|\sigma| < \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\varepsilon \leq \mu$, $\varepsilon > 0$. Тогда тривиальное решение системы (1), (2), равное $x_* = 0$, $\eta_* = 0$, асимптотически устойчиво в малом, если матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix},\ 0 < \varepsilon \leq \mu < \bar{\mu}_0,\ \bar{\mu}_0 \geq \mu_0\,,$$

гурвицева.

Определение 1. *Положение равновесия $x_* = 0$, $\eta_* = 0$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \leq \mu$, — гурвицевы и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = x_* = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = \eta_* = 0$ для любых x_0, η_0, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$.*

Заметим, что

1) исследуются свойства решений системы с дифференциальным включением

$$\dot{x} \in Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\eta} \in \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta,\ t \in [0, \infty)\,;$$

2) поскольку $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, то уравнение (1) имеет неединственное решение, исходящее из начальной точки $x(0) = x_0$, $\eta(0) = \eta_0$;

3) из определения абсолютной устойчивости следует, что все решения системы, исходящие из любой начальной точки (x_0, η_0), $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$, стремятся к положению равновесия $x_* = 0$, $\eta_* = 0$ при $t \to \infty$.

Определение 2. *Условием абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, D, E, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* ($x_* = 0,\ \eta_* = 0$) *абсолютно устойчиво.*

Ставится задача: найти новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия $x_* = 0,\ \eta_* = 0$ системы (1), (2), которое позволяет в пространстве конструктивных параметров системы выделить область шире, чем известные критерии.

Отметим что

1) постановка задачи абсолютной устойчивости решений уравнений с дифференциальным включением отличается от постановки задачи на устойчивость по Ляпунову;

2) целесообразно для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2) разработать совершенно новый метод, отличный от второго метода Ляпунова.

Ниже приведен совершенно новый подход к исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

2. Неособое преобразование

Как следует из включений (2), (3), уравнения движения (1) могут быть представлены в виде

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \bar{\varphi}(\sigma),\ \ \sigma = S\,z,\ \ z(0) = z_0,\ t \in I = [0, \infty), \qquad (4)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix},\ A_1 = A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A + B\varepsilon D & B\varepsilon E \\ \varepsilon D & \varepsilon E \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix},$$

$\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, матрица $A_1 = A_1(\varepsilon)$ порядка $(n+1) \times (n+1)$ — гурвицева.

Характеристический полином матрицы A_1 равен

$$\Delta(\lambda) = |\lambda\, I_{n+1} - A_1| = \lambda^{n+1} + a_n\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

где I_{n+1} — единичная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$, $a_i = a_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A_1) = 0$. Тогда

$$A_1^{n+1} = -a_n\,A^n - a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1\,A_1 - a_0\,I_{n+1}\ .$$

Лемма 1. *Пусть вектор-строка* $\theta=(\theta_1,\,\theta_2,\,\ldots\,,\theta_n,\theta_{n+1})\in R^{n+1}$ *такая, что*

$$\theta B_1=0,\quad \theta A_1B_1=0,\quad \ldots,\quad \theta A_1^{n-1}B_1=0,\quad \theta A_1^nB\neq 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение (4) *может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned}&\dot y_1=y_2,\ \dot y_2=y_3,\ \ldots,\ \dot y_n=y_{n+1},\\ &\dot y_{n+1}=-a_0y_1-a_1y_2-\ldots-a_n\ y_{n+1}+\theta\ A_1^n\,B_1\bar\varphi(\sigma),\end{aligned} \tag{6}$$

где $y_1=\theta z,\ y_2=\theta A_1z,\ \ldots,\ y_{n+1}=\theta A_1^nz,\ z=z(t),\ y_i=y_i(t),\ i=\overline{1,n+1}.$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение из (4). Умножая слева на θ, имеем

$$\theta\dot z=\theta A_1z+\theta B_1\bar\varphi(\sigma)=\theta A_1z,\quad \theta z(0)=\theta z_0,\quad t\in I, \tag{7}$$

в силу равенства $\theta B_1=0$, где $\theta z=y_1,\ \theta A_1z=y_2$. Следовательно, $\dot y(t)=y_2(t),\ t\in I.$

Дифференцируя по t тождество (7), получим

$$\dot y_2=\theta\ddot z=\theta A_1\dot z=\theta A_1[A_1z+B_1\bar\varphi(\sigma)]=\theta A_1^2z=y_3,\quad y_2(0)=\theta A_1z_0,\ t\in I,$$

где $\theta A_1B_1=0$. Аналогично получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot y_3=\theta\,\dddot z=\theta A_1^2\dot z=\theta A_1^3z=y_4,\quad y_3(0)=\theta A_1^2z_0\,,\ldots,\\ \dot y_n=y_{n+1},\quad \dot y_{n+1}=-a_0y_1-a_1y_2-\ldots-\theta A_1^nB_1\bar\varphi(\sigma),\end{gathered}$$

где $y_{n+1}(0)=\theta A_1^nz_0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R=(\theta^*,\ A_1^*\theta^*,\ \ldots\ ,A_1^{*n}\theta^*) \tag{8}$$

порядка $(n+1)\times(n+1)$ *равен* $n+1$, *где* "$*$" *— знак транспонирования. Тогда*

1. существует вектор-строка $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n)\in R^{n+1}$ *такая, что*

$$\sigma=\beta_0y_1+\ \beta_1y_2+\cdots+\beta_ny_{n+1}; \tag{9}$$

2. если $y_1=\theta\,z=0,y_2=\theta\,\mathrm{A}_1z=0,\ldots,y_{n+1}=\theta\,\mathrm{A}_1^nz=0,$ *то* $z=0.$

Доказательство. Заметим, что ранг матрицы R равен $n+1$ тогда и только тогда, когда векторы θ^*, $\mathrm{A}_1^*\theta^*, \ldots, \mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$ — линейно независимы. Поскольку векторы $\theta^*, \mathrm{A}_1^*\theta^*, \ldots, \mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$ образуют базис в R^{n+1}, то вектор $S^* \in R^{n+1}$ может быть представлен однозначно в виде $S* = \beta_0\theta^* + \beta_1\mathrm{A}_1^*\theta^* + \cdots + \beta_n\mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$. Тогда

$$\sigma = Sz = \beta_0\theta\, z + \beta_1\mathrm{A}_1^*\theta^* z + \cdots + \beta_n\mathrm{A}_1^{*n}\theta^* z = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \cdots + \beta_n y_{n+1}.$$

Теперь второе уравнение из (4) запишется в виде (9).

С другой стороны, из (8) следует, что пара $(\theta^*, \mathrm{A}_1^*)$ управляема. Из управляемости пары $(\theta^*, \mathrm{A}_1^*)$ следует, что равенства $\theta\, z = 0$, $\theta\,\mathrm{A}_1 z = 0, \ldots, \theta\,\mathrm{A}_1^n z = 0$ влекут за собой $z = 0$. Следовательно, из $y_i = 0$, $i = \overline{1,\ n+1}$, следует $z = 0$. Лемма доказана. □

Из лемм 1, 2 следует, что если выполнены равенства (5) и ранг матрицы R равен $n+1$, то система (1) равносильна системе (6), (9). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i\,(t) = 0,\ i = \overline{1,\ n+1}$, следует $\lim\limits_{t\to\infty} z\,(t) = 0$.

Вводя обозначения

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \end{pmatrix},\ \ \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta\,\mathrm{A}_1^n\mathrm{B}_1 \end{pmatrix},\ \ \bar{S} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n),$$

уравнения движения (6), (9) представим в виде

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}\bar{\varphi}\,(\sigma)\,,\ \ \sigma = \bar{S}\,y, \quad \bar{\varphi}\,(\sigma)\, \in \Phi_1. \tag{10}$$

3. Свойства решений

Можно показать, что решения системы (1), (2), а также (6), (9) ограничены. Эти свойства могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

Теорема 1. *Пусть матрица* $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1\,(\varepsilon)$ — *гурвицева, то есть* $\mathrm{Re}\,\lambda_j(A_1) < 0$, $j = \overline{1,n}$, *функция* $\bar{\varphi}\,(\sigma) \in \Phi_1$ *и пусть, кроме того, выполнены равенства* (5) *и ранг матрицы* R *равен* $n+1$. *Тогда верны оценки*

$$|z\,(t)| \le c_0,\ |\dot{z}\,(t)| \le c_1\ \ \forall\, t \in I = [0, \infty)\,, \tag{11}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1},\ \ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2},\ \ i = \overline{1, n+1},\ \ t \in I, \tag{12}$$

$$|\sigma(t)| \le c_2,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_3,\ \forall t \in I, \tag{13}$$

где $0 < m_{i1}, m_{i2} = const < \infty$, $i = \overline{1,\ n+1}$, $0 < c_i = const < \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Кроме того, функции $z(t), y_i(t),\ i = \overline{1,\ n+1},\ \sigma(t),\ t \in I$, *равномерно непрерывны.*

Доказательство. Из включения $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ следует, что $|\bar{\varphi}(\sigma(t))| \le \bar{\varphi}_*$, $0 < \bar{\varphi}_* < \infty$, $\forall t \in I$. Так как матрица $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1(\varepsilon)$ — гурвицева, то есть если $a = \max\limits_{1 \le j \le n+1} Re\,\lambda_j(A_1) < 0$, то $\left\|e^{\mathrm{A}_1 t}\right\| \le ce^{(a+\delta)t}$, $\forall t \in I$, $c = c(\delta) > 0$, $\delta > 0$ — сколь угодно малое число.

Решение дифференциального уравнения (4) запишется так

$$z(t) = e^{A_1 t} z_0 + \int\limits_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 \bar{\varphi}(\sigma(\tau))\, d\tau,\ t \in I.$$

Тогда

$$|z(t)| \le \left\|e^{A_1 t}\right\| |z_0| + \int\limits_0^t \left\|e^{A_1(t-\tau)}\right\| |B_1| |\bar{\varphi}(\sigma(\tau))| d\tau \le c|z_0| e^{(a+\delta)t} +$$

$$+ ce^{(a+\delta)t} |B_1| \bar{\varphi}_* \int\limits_0^t e^{(a+\delta)\tau} d\tau =$$

$$= c|z_0| e^{(a+\delta)t} + ce^{a+\delta t} |B_1| \bar{\varphi}_* \left(-\frac{1}{a+\delta} e^{-(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta}\right) =$$

$$= c|z_0| e^{(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta} c |B_1| \bar{\varphi}_* \left(-1 + e^{(a+\delta)t}\right) \le c_0,\ \ \forall t \in I,$$

где $e^{(a+\delta)t} \le 1\ \forall t \in I$, $a + \delta < 0$. Отсюда следует ограниченность решения (4). Следовательно, решение системы (1), (2) ограничено. Из (4) следует, что

$$|\dot{z}(t)| \le \|A_1\| |z(t)| + |B_1|\ |\bar{\varphi}(\sigma(t))| \le \|A_1\| c_0 + |B_1| \bar{\varphi}_* = c_1, \forall t \in I,$$
$$|\sigma(t)| \le \|S\|\ |z(t)| \le c_2,\ \ |\dot{\sigma}(t)| \le \|S\|\ |\dot{z}(t)| \le c_3,\ \ \forall t \in I.$$

Из ограниченности производных $\dot{z}(t), \dot{\sigma},\ t \in I$, следует равномерная непрерывность функций $z(t),\ \sigma(t)$ в I.

Так как $y_1(t) = \theta\, z(t)$, $y_2(t) = \theta\, A_1 z(t), \ldots, y_{n+1}(t) = \theta A_1^n z(t),\ t \in I$, то

$$|y_1(t)| \le |\theta|\,|z(t)| \le |\theta|\, c_0 = m_{11}, \quad |y_2(t)| \le |\theta|\,\|A_1\|\,|z(t)| \le = m_{21}, \ldots,$$
$$|y_{n+1}(t)| \le |\theta|\,\|A_1^n\|\,|z(t)| \le = m_{n+1,1},\ \forall\, t \in I.$$

Из (6) получаем $|\dot{y}_i(t)| \le |y_{i+1}(t)| \le m_{i2},\ i = \overline{1,n},\ \forall\, t \in I$,

$$|\dot{y}_{n+1}(t)| \le |a_0|\,|y_1(t)| + \ldots + |a_n|\,|y_{n+1}(t)| + \|\theta A_1^n B\|\,\bar{\varphi}_* \le m_{n+1,2}, \forall\, t \in I.$$

Из ограниченности производных $\dot{y}_i(t),\ i = \overline{1, n+1}$ следует равномерная непрерывность функций $y_i,\ i = \overline{1, n+1}$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* $1, 2$, *величина* $\chi = \theta A_1^n B_1 \ne 0$. *Тогда вдоль решения системы* (10) *верны тождества*

$$\bar{\varphi}(\sigma(t)) = \chi^{-1}\omega(t) + \chi^{-1}a_0 y_1(t) + \ldots + \chi^{-1}a_n y_{n+1}(t),\ t \in I, \qquad (14)$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_{n+1}(t),\ t \in I, \qquad (15)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n+1}(t) + \beta_n \omega(t),\ t \in I, \qquad (16)$$

где $\omega = \omega(t) = \dot{y}_{n+1}(t),\ t \in I$.

Доказательство. Вдоль решения системы (10) (см.(6), (9)) верно равенство

$$\dot{y}_{n+1}(t) = \omega(t) = -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \ldots - a_n y_{n+1}(t) + \chi\bar{\varphi}(\sigma(t)),\ t \in I,$$

где $\chi = \theta A_1^n B_1 \ne 0$. Отсюда следует тождество (14). Тождество (15) следует из (9). Так как $\dot{\sigma}(t) = \beta_0 \dot{y}_1(t) + \beta_1 \dot{y}_2(t) + \ldots + \beta_n \dot{y}_{n+1}(t),\ t \in I$, то справдливо тождество (16). □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм* $1, 2$, *матрица* A_1 *— гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой постоянной матрицы* Q *порядка* $(n+2) \times (n+2)$ *квадратичная форма* $\xi^*(t) Q \xi(t)$, $\xi(t) = (\omega(t), y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$ *представима в виде*

$$\xi^*(t)\, Q\xi(t) = q_0\omega^2(t) + q_1 y_1^2(t) + \ldots + q_{n+1} y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\Big(\xi^*(t)\, F\xi(t)\Big)$$
$$t \in I = [0, \infty), \qquad (17)$$

где F *— постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что

$$\omega(t)y_1(t) \equiv \dot{y}_{n+1}(t)y_1(t) = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1\big) - y_{n+1}\dot{y}_1 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1\big) - $$
$$- y_{n+1}y_2 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1 - y_n y_2 + y_{n-1}y_3\big) - y_{n-1}y_4 = \dots,$$

$$\omega(t)y_2(t) \equiv \dot{y}_{n+1}y_2 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_2\big) - y_{n+1}y_3 =$$
$$= \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_2 - y_n y_3 + y_{n-1}y_4\big) - y_{n-1}y_5 = \dots,$$

$$\omega(t)y_{n+1}(t) \equiv \dot{y}_{n+1}(t)\, y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(y_{n+1}^2\big), \dots, y_1(t)y_2(t) =$$
$$= y_1(t)\,\dot{y}_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(y_1^2\big),$$

$$y_1(t)y_3(t) \equiv y_1(t)\dot{y}_2(t) = \frac{d}{dt}\big(y_1y_2\big) - y_2^2, \dots, y_1(t)y_{n+1}(t) = y_1(t)\,\dot{y}_n(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\big(y_1y_n\big) - y_2y_n = \dots, \qquad y_2(t)\,y_3(t) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\big(y_2^2\big), \dots .$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$\omega\, y_1 = \dot{y}_3y_1 = \frac{d}{dt}\big(y_1y_3\big) - y_2y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_3\big) - y_2\dot{y}_2 = \frac{d}{dt}\,\Big(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2\Big),$$
$$\omega\, y_2 = \dot{y}_3\, y_2 = \frac{d}{dt}\,\big(y_2y_3\big) - y_3^2\,; \quad \omega\, y_3 = \dot{y}_3y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_3^2\big),$$
$$y_1y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_1^2\big), \quad y_1y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_2\big) - y_2^2, \quad y_2y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_2^2\big)\,.$$

При $n = 3$

$$\omega\, y_1 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_4 - y_2y_3\big) + y_3^2\,, \quad W y_2 = \frac{d}{dt}\,\Big(y_2y_4 - \frac{1}{2}\,y_3^2\Big)\,,$$
$$\omega y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_3y_4\big) - y_4^2\,, \quad \omega\, y_4 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_4^2\big)\,, \quad y_1y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_1^2\big)\,,$$
$$y_1y_3 = \frac{d}{dt} \quad \big(y_1y_2\big) - y_2^2\,, \quad y_1y_4 = \frac{d}{dt}\,\Big(y_1y_3 - \frac{1}{2}\,y_2^2\Big),$$
$$y_2y_4 = \frac{d}{dt}\,\big(y_2y_3\big) - y_3^2\,,\ y_3y_4 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_3^2\big),\ y_2y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_2^2\big).$$

Поскольку квадратичная форма $\xi^*(t)\,Q\,\xi(t)$ содержит слагаемые с постоянными коэффициентами — произведения компонентов вектора $\xi(t)$, то верно представление вида (17). Доказательство леммы в более общем виде довольно громоздко. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \xi^*(t)\,Q\,\xi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty [q_0\omega^2(t) + q_1 y_1^2(t) + \ldots + q_{n+1}y_{n+1}^2]\,dt + l_0, \tag{18}$$

$$l_0 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)Fy(t)]\,dt = y^*(\infty)Fy(\infty) - y^*(0)Fy(0), \quad |l_0| < \infty. \tag{19}$$

Доказательство. Интегрируя тождество (17) с учетом оценки (12), где $|y_i(0)| \le m_{i\,1}$, $|y_i(\infty)| \le m_{i\,1}$, $i = \overline{1, n+1}$, получим соотношения (18), (19). Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *вектор-функция* $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$, $t \in I = [0, \infty)$, *ограничена:* $|y(t)| \le a$, $t \in I$, *и непрерывно дифференцируема, причем* $|\dot y(t)| \le c$, $t \in I$, $0 < a < \infty$, $0 < c < \infty$;

2) *скалярная функция* $V(x)$ *положительна, непрерывна при любом* $x \in R^{n+1}, x \ne 0$ *и* $V(0) = 0$;

3) $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1)–3) леммы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Предположим противное, то есть $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \ne 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ такая, что $|y(t)| \ge \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \ge m > 0$. Поскольку $y(t)$, $t \in I$, непрерывно дифференцируема и $|\dot y(t)| < c$, $\forall\, t \in I$, то $|y(t) - y(t_k)| \le c\,|t - t_k|$, $t \in$

$[t_k - m/2, t_k + m/2]$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\int_0^\infty V(y(t))dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{t_k - m/2}^{t_k + m/2} V(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c\dfrac{m}{2} = \varepsilon_0 > 0$. Поскольку $\displaystyle\int_{t_k - m/2}^{t_k + m/2} V(y(t))dt \geq V_{\min} m$, $V_{\min} = \min\limits_{\varepsilon_0 \leq |x| \leq a} V(x)$, то $\displaystyle\int_0^\infty V(y(t))dt = \infty$. Это противоречит третьему условию леммы. Лемма доказана. □

4. Несобственные интегралы

На основе тождеств (14)–(16), оценок (11)–(13) с учетом (17)–(19) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (10).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ — *гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* τ *вдоль решения системы* (10) *несобственный интеграл сходится:*

$$\begin{gathered} I_1 = \int_0^\infty \bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty \big(N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + \\ + N_{n+1} y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_1 = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)\tau d\tau = \bar{c}_1, \quad |\bar{c}_1| < \infty, \end{gathered} \tag{20}$$

$$l_1 = y^*(t)\, F_1\, y(t)\big|_0^\infty = y^*(\infty)\, F_1\, y(\infty) - y^*(0) F_1\, y(0), \quad |l_1| < \infty, \tag{21}$$

где $N_i = N_i(\tau)$, $i = \overline{0, n+1}$, F_1 — *постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$

Доказательство. Имеем

$$\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t) = \chi^{-1}\big(\omega(t) + a_0 y_1(t) + \ldots + a_n y_{n+1}(t)\big)\tau\times$$

$$\times\big(\beta_0 y_2(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n+1}(t) + \beta_n\omega(t)\big) = \xi^*(t)N\xi(t), \quad t\in I,$$

где $\xi(t) = \big(\omega(t), y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t)\big)$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \xi^*(t)N\xi(t)dt = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)\tau d\tau = \bar{c}_1,\ \ |\bar{c}_1| < \infty,$$

в силу ограниченности $\sigma(t),\ \ t\in I$, где N — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Как следует из леммы 4 ($Q{=}N$), верно равенство

$$\xi^*(t)N\xi(t) = N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1} y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\Big(y^*(t)F_1 y(t)\Big), \quad t\in I.$$

Теперь соотношения (20), (21) следуют из (18), (19), где $l_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\left[y^*(t)F_1y(t)\right]dt = y^*(t)F_1y(t)\big|_0^\infty,\ |l_1| < \infty$ в силу ограниченности $y(0)$, и $y(\infty)$. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $\tau = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \omega^2(t)dt = \int\limits_0^\infty \left(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2(t) - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}y_{n+1}^2(t)\right)dt + \bar{c}_0\,, \tag{22}$$

$$\bar{c}_0 = \Sigma_0^{-1}\left(c_{11} - l_{11}\right),\ |\bar{c}_0| < \infty,\ |c_{11}| < \infty,\ |l_{11}| < \infty, \tag{23}$$

где $\varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) = \xi^*(t)\Sigma\xi(t) = \Sigma_0\omega^2(t) + \ldots + \Sigma_{n+1}y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\big(y^*(t)F_0y(t)\big)$, $l_{11} = y^*(t)F_0y(t)\big|_0^\infty,\ c_{11} = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)d\sigma,\ \Sigma_0 \neq 0.$

Доказательство. Как следует из теоремы 3, при $\tau = 1$

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty \big(\Sigma_0\omega^2(t) + \Sigma_1 y_1^2(t) + ... + \Sigma_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)\,dt +$$
$$+\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\big(y^*(t)F_0y(t)\big)dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)d\sigma = c_{11},\ |c_{11}| < \infty,$$

где $l_{11} = y^*(t)F_0y(t)\big|_0^\infty,\ |l_{11}| < \infty$. Отсюда при $\Sigma_0 \neq 0,\ \bar{c}_0 = \Sigma_0^{-1}\,(c_{11} - l_{11})$ получим равенства (22), (23). □

Теорема 4. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* $A,\ A_1\,(\varepsilon)$ — *гурвицевы,* $\bar{\varphi}\,(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы* (10)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^\infty \big(\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))\big)dt = \\ &= \int\limits_0^\infty \big(M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$l_2 = y^*(t)F_2y(t)\,|_0^\infty = y^*(\infty)F_2y(\infty) - y^*(0)F_2y(0),\ \ |l_2| < \infty, \tag{25}$$

где $M_i = M_i(\tau_1),\ \ \tau_1 > 0,\ \ \ i = \overline{0, n+1}$, F_2 — *постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство. Из включения $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ следует

$$\frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{\sigma} < \mu_0, \quad \frac{\sigma}{\bar{\varphi}(\sigma)} > \mu_0^{-1}, \quad \forall\,\sigma \in R^1.$$

Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ верно неравенство $\bar{\varphi}(\sigma)\tau_1\sigma > \tau_1\mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma),\ \forall\,\sigma \in R^1$. Отсюда следует, что вдоль решения системы (10) выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t)) > 0,\ \sigma(t) \neq 0,\ \forall\,t \in I, \tag{26}$$

где

$$\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t)) = (\omega + a_0y_1 + \ldots + a_ny_{n+1})\chi^{-1}\tau_1(\beta_0y_1 + \ldots + \\ +\beta_ny_{n+1}) - \chi^{-1}\tau_1\mu_0^{-1}\chi^{-1}(\omega + a_0y_1 + \ldots + a_ny_{n+1})^2 = \xi^*(t)M\xi(t),\ t \in I,$$

M — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Далее, применяя лемму 3 с $Q = M$, получим $\xi^*(t)M\xi(t) = M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\big(y^*(t)F_2y(t)\big),\ t \in I.$

Теперь соотношения (24), (25) следуют из (18), (19), (26). □

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *величина* $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда*

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \Big(\big(M_1 - M_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\big)y_1^2(t) + \ldots + \big(M_{n+1} - M_0\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\big)y_{n+1}^2(t)\Big)\,dt + \\ + \bar{c}_2 > 0, \quad (27)$$

$$\bar{c}_2 = M_0\bar{c}_0 + l_2,\ |\bar{c}_2| < \infty. \quad (28)$$

Доказательство. Поскольку $\Sigma_0 \neq 0$, то верны равенства (22), (23). Так как

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \Big(M_0\big(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}y_{n+1}^2\big) + M_1y_1^2 + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2\Big)\,dt + \\ +M_0\bar{c}_0 + l_2 > 0,$$

то верно неравенство (27). □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ — *гурвицевы*, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{n+1}$ *вдоль решения системы* (10)

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \big(\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2dt = \\ = \int\limits_0^\infty \big(\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_3 \geq 0, \quad (29)$$

$$l_3 = y^*(t)F_3y(t)\Big|_0^\infty = y*(\infty)F_3y(\infty) - y^*(0)F_3y(0), \ |l_3| < \infty, \tag{30}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$, $i = \overline{0,\ n+1}$, F_3 *— постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4, где $(\gamma_0\omega + \gamma_1 y_1 + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1})^2 = \xi^*(t)\Gamma\xi(t)$, Γ — постоянная матрица порядка $(n+2) \times (n+2)$.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, *величина* $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда*

$$I_3 = \int_0^\infty \left(\left(\Gamma_1 - \Gamma_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\right)y_1^2(t) + \ldots + \left(\Gamma_{n+1} - \Gamma_0\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\right)y_{n+1}^2(t)\right)dt + \\ + \bar{c}_3 \geq 0, \tag{31}$$

$$\bar{c}_3 = \Gamma_0\bar{C}_0 + l_3, \ \ |\bar{c}_3| < \infty. \tag{32}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 7. Соотношения (31), (32) следуют из формул (29), (30) и формул (22), (23).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *— гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* τ_2, τ_3, γ_0, $\gamma_1 \ldots \gamma_{n+1}$ *вдоль решения системы* (10)

$$\begin{aligned} I_4 = \int_0^\infty \Big(&\tau_2\dot{\sigma}^2(t) + \tau_3\big(\bar{\varphi}(\sigma)\sigma(t) - \mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma)\big) + \\ &+ \big(\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2\Big)dt = \\ &= \int_0^\infty \big(\mathrm{P}_0\omega^2(t) + \ldots + \mathrm{P}_1 y_1^2(t) + \ldots + \mathrm{P}_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_4, \end{aligned} \tag{33}$$

$$l_4 = y^*(t)F_4y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_4y(\infty) - y^*(0)F_4y(0), \ \ |l_4| < \infty, \tag{34}$$

где $P_i = P_i(\tau_2, \tau_3, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$, $i = \overline{0, n+1}$, F_4*—постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство теоремы следует из представления

$$\tau_2\dot{\sigma}^2(t) + \tau_3\big(\varphi(\sigma(t))\sigma(t) - \mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t))\big) +$$

$$+\big(\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2 = \xi^*(t)P\xi(t),\ t \in I,$$

где P — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Далее, применяя леммы 3, 4 с Q=P, получим (33), (34).

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *величина* $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда*

$$I_4 = \int\limits_0^\infty \bigg(\Big(P_1 - P_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\Big)y_1^2(t) + \ldots + \Big(P_{n+1} - P_0\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\Big)y_{n+1}^2(t)\bigg)dt + \bar{c}_4, \quad (35)$$

$$\bar{c}_4 = P_0\bar{c}_0 + l_4, \quad |\bar{c}_4| < \infty. \quad (36)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 7. Соотношения (35), (36) следуют из (33), (34) и формул (22), (23).

5. Абсолютная устойчивость

На основе результатов, изложенных выше, могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрицы* $A, A_1(\mu),\ 0 < \varepsilon \leq \mu < \mu_0,\ \mu_0 \leq \bar{\mu}_0,$ — *гурвицевы*, $\bar{\varphi}(\delta) \in \Phi_1$, ε — *сколько угодно малое число;*
2. *существует вектор* $\theta^* \in R^{n+1}$ *такой, что* $\theta B_1 = 0,\ \theta A_1 B_1 = 0, \ldots, \theta A^{n-1}B_1 = 0,\ \theta A_1^n B \neq 0;$
3. *ранг матрицы* $R = \|\theta^*,\ A_1^*\theta^*, \ldots, A_1^{*n}\theta^*\|$ *равен* $n+1;$
4. *выполнено равенство* $0 \leq I_2 + I_3 = I_1$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \big((M_0 + \Gamma_0 - N_0)\omega^2(t) + (M_1 + \Gamma_1 - N_1)y_1^2(t) + \ldots +$$

$$+(M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2(t)\big)dt = l_1 - l_2 - l_3,\ |l_1 - l_2 - l\ _3| < \infty. \quad (37)$$

Доказательство. При выполнении условий 1) – 3) теоремы верны утверждения теорем 3 – 5. Как следует из условия 4) теоремы, выполнено равенство $0 \leq I_2 + I_3 = I_1$. Отсюда с учетом равенств (20), (24), (29) имеем

$$\int_0^\infty \big(M_0\omega^2 + M_1 y_1^2 + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2\big)dt + l_2 +$$
$$+\int_0^\infty \big(\Gamma_0\omega^2 + \Gamma_1 y_1^2 + \ldots + \Gamma_{n+1}y_{n+1}^2\big)dt + l_3 =$$
$$= \int_0^\infty \big(N_0\omega^2 + N_1 y_1^2 + \ldots + N_{n+1}y_{n+1}^2\big)dt + l_1.$$

Тогда

$$\int_0^\infty \Big((M_0 + \Gamma_0 - N_0)\,\omega^2 + (M_1 - \Gamma_1 - N_1)y_1^2 + \ldots +$$
$$+(M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2\Big)dt = l_1 - l_2 - l_3.$$

Поскольку $|l_1 - l_2 - l_3| \leq |l_1| + |l_2| + |l_3|$, где $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$, $|l_3| < \infty$, в силу (19), (25), (30), то $|l_1 - l_2 - l_3| < \infty$. Следовательно верно равенство (37). □

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7 *и пусть, кроме того,*

$$\begin{aligned}
&(M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,\\
&(M_2 + \Gamma_2 - N_2) - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,
\end{aligned} \tag{38}$$

где $\Sigma_0 \neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 6, то верно равенство (37). Как следует из леммы 6 (см. (22), (23)),

$$\int_0^\infty \omega^2 dt = \int_0^\infty \left(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}y_{n+1}^2\right) dt + \bar{c}_0, \ \ |\bar{c}_0| < \infty.$$

Теперь равенство (37) запишется в виде

$$\int_0^\infty \left((M_0 + \Gamma_0 - N_0)\Big(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}y_{n+1}^2\Big)\right) dt + (M_0 + \Gamma_0 - N_0)\bar{c}_0 +$$
$$+ \int_0^\infty \left((M_1 + \Gamma_1 - N_1)y_1^2 + \ldots + (M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2\right) dt =$$
$$= l_1 - l_2 - l_3. \tag{39}$$

Тогда (см.(39))

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \left[\left((M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma}(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\right) y_1^2 + \ldots + \right. \\ \left. + \left((M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\right) y_{n+1}^2\right] dt = \\ = l_1 - l_2 - l_3 - (M_0 + \Gamma_0 - N_0)\bar{c}_0 = l_5,\end{gathered} \tag{40}$$

$$|l_5| \leq |l_1| + |l_2| + |l_3| + |M_0 + \Gamma_0 - N_0|\,|\bar{c}_0| \ < \infty. \tag{41}$$

Далее, применяя лемму 5 к равенству (40) и учитывая оценки (41), получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

В самом деле, вектор-функция $y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t)\big)$ вдоль решения системы (10) непрерывно-дифференцируема и $|y_i(t)| \leq m_{i1}$, $|\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}$, $i = \overline{1, n+1}$, $t \in I$ (см. теорему 1). Скалярная функция

$$\begin{gathered} lV(x) = \left((M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\right) x_1^2 + \ldots + \\ + \left((M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0)\right) x_{n+1}^2 > 0 \end{gathered}$$

при любом $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1},\ x \neq 0,\ V(0) = 0$, в силу неравенств (38), $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = l_5 < \infty,\ |l_5| < \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Тогда согласно утверждению леммы 2 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0,\ \forall x_0,\ |x_0| < \infty,\ \forall\, \varphi \in \Phi_0$. Система (10) равносильна системе (1), (2). Из гурвицевости матрицы $A_1(\mu),\ 0 < \varepsilon \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$ следует асимптотическая устойчивость в малом положения равновесия системы (1), (2). □

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* 1) –3) *теоремы* 7 *и условия теоремы* 6*, кроме того, выполнено равенство* $I_4 = I_1$*. Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \big((P_0 - N_0)\,\omega^2(t) + (P_1 - N_1)y_1^2 + \ldots + (P_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2(t)\big)\,dt = \\ = l_1 - l_4, \quad |l_1 - l_4| < \infty. \tag{42}$$

Как и в доказательстве теоремы 7, можно показать, что из равенства $I_4 = I_1$ следует (42), где $|l_1 - l_4| \leq |l_1| + |l_4| < \infty$.

Заметим, что несобственный интеграл I_4 при $\tau_3 = \tau_1 > 0$ может быть представлен в виде

$$I_4 = I_2 + I_3 + \int\limits_0^\infty \tau_2 \dot{\sigma}^2(t)dt.$$

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9 *и пусть, кроме того,*

$$P_1 - N_1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0 - N_0) > 0, \dots, P_{n+1} - N_{n+1} - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(P_0 - N_0) > 0, \tag{43}$$

где $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда положение равновесия системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из лемм 5, 6 и равенства (42). Легко убедиться в том, что

$$\int\limits_0^\infty \bigg(\Big((P_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0 - N_0)\Big)y_1^2 + \ldots + \\ + \Big((P_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(P_0 - N_0)\Big)y_{n+1}^2\bigg)dt = \\ = l_1 - l_4 - (P_0 - N_0)\,\bar{c}_0 = l_6,\ |l_6| < \infty.$$

Далее, как в доказательстве теоремы 8, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы. $\square$

Пример. Уравнения движения системы имеют вид (см.(1))

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + \varphi(\delta),\ \dot{\eta} = \varphi(\delta),\ \delta = -3x_1 + x_2 - 1,5\eta, \quad (44)$$

где $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma)$, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. Для данного примера исходные данные возьмем следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ D = (-3,\ 1),\ E = (-1,\ 5),\ n = 2.$$

Производная $\dot{\sigma}(t) = x_2 - 0,5\varphi(\sigma)$.

1. Характеристический полином матрицы A имеет вид $\Delta(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \lambda^2 + \lambda + 1$. Легко проверить, что матрица A — гурвицева.

$$A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3-3\varepsilon & -2+\varepsilon & -1,5\varepsilon \\ -3\varepsilon & \varepsilon & -1,5\varepsilon \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ S = (-3,\ 1,\ -1.5).$$

Функция $z(t)$, $t \in I$, — решение дифференциального уравнения $\dot{z} = A_1(\varepsilon) z + B_1\bar{\varphi}(\sigma), \sigma = Sz$. Характеристический полином матрицы $A_1(\varepsilon)$ равен $\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A_1(\varepsilon)| = \lambda^3 + (1+0,5\varepsilon)\lambda^2 + (1-0,5\varepsilon)\lambda + 1,5\varepsilon$. Для гурвицевости матрицы $A_1(\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы $1,5\varepsilon > 0$, $1 + 0,5\varepsilon > 0$, $(1 - 0,5\varepsilon) > 0$, $(1 + 0,5\varepsilon)(1 - 0,5\varepsilon) - 1,5\varepsilon > 0$.

Отсюда следует, что матрица$A_1(\varepsilon)$ — гурвицева при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Имеем $a_0 = 1,5\varepsilon$, $a_1 = 1 - 0,5\varepsilon$, $a_2 = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Условие $\theta B_1 = 0$ выполняется при $\theta_3 = -\theta_2$. Следовательно, $\theta = (\theta_1, \theta_2, -\theta_2)$. Тогда $\theta A_1 B_1 = -\theta_1 - 2\theta_2 = 0$, $\theta_1 = -2\theta_2$. Искомый вектор при $\theta_2 = 1$ имеет вид $\theta = (-2, 1, -1)$, тогда $\theta A_1^2 B_1 = -1 \neq 0$.

Теперь уравнение (44) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_3 y_3 - \bar{\varphi}(\sigma), \\ &\sigma = 1,5y_1 - 0,5y_2 + 0,5y_3. \end{aligned} \quad (45)$$

Поскольку $\theta^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_1^*\theta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1^{*2}\theta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то матрица $R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|R| = 1$, имеет ранг, равный 3.

Векторы $\theta^*, A_1^*\theta^*, A_1^{*2}\theta^*$ образуют базис в R^3, $S^* = 1,5\theta^* - 0,5A_1^*\theta^* + 0,5A_1^{*2}\theta^*$, $\sigma = 1,5y_1 - 0,5y_2 + 0,5y_3$. Выше были приведены условия лемм 1 и 2.

2. Из (45) следует, что вдоль решения системы (45) верны тождества

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma(t)) &= -\omega\,(t) - y_2\,(t) - y_3(t),\ t \in I = [0, \infty)\,, \\ \sigma(t) &= 1,5y_1(t) - 0,5y_2\,(t) + 0,5y_3\,(t)\,,\ t \in I, \\ \dot{\sigma}\,(t) &= 1,5y_2\,(t) - 0,5y_3\,(t) + 0,5\omega\,(t)\,,\ t \in I, \end{aligned} \tag{46}$$

где $\omega\,(t) = \dot{y}_3\,(t)\,,\ t \in I$. Поскольку $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, то принимается $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Так как ранг равен 3, то системы (44), (45) равносильны и из $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) \to 0$ при $t \to \infty$ следует $z(t) = (x_1(t), x_2(t), \eta(t)) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. Вычислим несобственные интегралы $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$:

а) $I_1 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}\,(\sigma\,(t))\,\tau\dot{\sigma}\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left(N_0\omega^2\,(t) + N_2y_2^2\,(t) + N_3\sigma y_3^2\,(t)\right)dt + l_1 = \bar{c}_1, |\bar{c}_1| < \infty, |l_1| < \infty$, где $N_0 = -0,5\tau,\ N_1 = 0,\ N_2 = -1,5\tau,\ N_3 = 2,5\tau$, $l_1 = y^*\,(t)\,F_1y\,(t)\,\big|_0^\infty$. Отсюда при τ=1, имеем

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}\,(\sigma\,(t))\,\dot{\sigma}\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left[\Sigma_0\omega^2\,(t) + \Sigma_2y_2^2\,(t) + \Sigma_3y_3^2\,(t)\right]dt + l_{11} = c_{11},$$

$$l_{11} = y^*\,(t)\ F_0y\,(t)|_0^\infty\,,\ |l_{11}| < \infty,\ |c_{11}| < \infty,$$

где $\Sigma_0 = -0,5,\ \Sigma_1 = 0,\ \Sigma_2 = -1,5,\ \Sigma_3 = 2,5$.

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \omega^2\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}y_2^2\,(t) - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}y_3^2\,(t)\right]dt + \bar{c}_0, \tag{47}$$

здесь $-\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=0,\ -\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0}=-3,\ -\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}=5.$

$$
\begin{aligned}
\text{б)}\quad 0\le I_2 &= \int\limits_0^\infty \left[\bar\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)\tau_1\sigma\left(t\right)-\tau_1\mu_0^{-1}\bar\varphi^2\left(\sigma\left(t\right)\right)\right]dt=\\
&=\int\limits_0^\infty \left[M_0\omega^2\left(t\right)+M_2y_2^2\left(t\right)+M_3y_3^2\left(t\right)\right]dt+l_2= \qquad (48)\\
=\int\limits_0^\infty &\left[\left(M_2-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}M_0\right)y_2^2\left(t\right)+\left(M_3-\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}M_0\right)y_3^2\left(t\right)\right]dt+\bar c_2,\ \bar c_2=M_0\bar c_0+l_2,
\end{aligned}
$$

где $M_0=-\tau_1\mu_0^{-1},\ M_1=0,\ M_2=2\tau_1-\tau_1\mu_0^{-1},\ M_3=-\tau_1+\tau_1\mu_0^{-1},$
$M_1-M_0\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=0,\ M_2-M_0\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0}=2\tau_1+2\tau_1\mu_0^{-1},\ M_3-\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}M_0=-\tau_1-4\tau_1\mu_0^{-1}.$

$$
\begin{aligned}
\text{в)}\qquad 0\le I_3 &= \int\limits_0^\infty \left[\gamma_0\omega+\gamma_1y_1+\gamma_2y_2+\gamma_3y_3\right]^2dt=\\
&=\int\limits_0^\infty \left[\Gamma_0\omega^2+\Gamma_1y_1^2+\Gamma_2y_2^2+\Gamma_3y_3^2\right]dt+l_3=\\
&=\int\limits_0^\infty \left[\left(\Gamma_1-\Gamma_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\right)y_1^2(t)+\left(\Gamma_2-\Gamma_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}\right)y_2^2(t)+\right. \qquad (49)\\
&\left.+\left(\Gamma_3-\Gamma_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}\right)y_3^2(t)\right]dt+\bar c_3,\ |\bar c_3|<\infty,\ \bar c_3=\Gamma_0\bar c_0+l_3,
\end{aligned}
$$

где $\Gamma_0=\gamma_0^2, \Gamma_1=\gamma_1^2, \Gamma_2=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3, \Gamma_3=\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2, \Gamma_1-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=\Gamma_1=\gamma_1^2,$
$\Gamma_2-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_1}=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3-3\gamma_0^2,\ \Gamma_3-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}=\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2+5\gamma_0^2.$

г) $$I_4 = \int\limits_0^\infty \Big(\tau_2 \dot{\sigma}^2(t) + \tau_3 \left[\bar{\varphi}(\sigma(t))\sigma(t) - \mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t)) \right] +$$
$$+ \left[\gamma_0\omega + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 \right]^2 \Big) dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left[P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + P_2 y_2^2(t) + P_3 y_3^2(t) \right] dt + l_4 =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left[\left(P_1 - P_0 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} \right) y_1^2(t) + \left(P_2 - P_0 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0} \right) y_2^2(t) + \left(P_3 - P_0 \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0} \right) y_3^2(t) \right] dt +$$
$$+ \bar{c}_4, \quad \bar{c}_4 = P_0\bar{c}_0 + l_4, \quad |\bar{c}_4| < \infty,$$
где $P_1 - P_0\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0} = \gamma_1^2$, $P_2 - P_0\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0} = \left(2\tau_3 + 2\tau_3\mu_0^{-1}\right) + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 + 1,5\tau_2$, $P_3 - P_0\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0} = -\tau_3 - 4\tau_3\mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2$.

4. Теперь условия теоремы 8 (см.(38)) запишутся так:

$$\begin{aligned} &(M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \Gamma_1 = \gamma_1^2 > 0 \\ &(M_2 + \Gamma_2 - N_2) - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \\ &= 2\tau_1 + 2\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 > 0, \\ &(M_3 + \Gamma_3 - N_3) - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \\ &= -\tau_1 - 4\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2 > 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Пусть $d_1 > 0,\ d_2 > 0$ — неизвестные величины. Тогда неравенства (50) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 > 0, \qquad 2\tau_1 + 2\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 - d_1 = 0, \\ -\tau_1 - 4\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2 - d_2 = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Из (51) имеем

$$\tau_1 = \frac{-4\gamma_2^2 + 8\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_0^2 + 4\gamma_0\gamma_2 - 2\gamma_3^2 + 4d_1 + 2d_2}{6}, \tag{52}$$

$$\tau_1\mu_0^{-1} = \frac{2\gamma_3^2 - 4\gamma_0\gamma_2 + 7\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 2d_2 - d_1}{6}, \tag{53}$$

где $\gamma_1^2 > 0, \tau_1 > 0, \tau_1\mu_0^{-1} > 0,\ d_1 > 0, d_2 > 0$. Тогда

$$\bar{\mu}_0 = \frac{-4\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_2 - 2\gamma_3^2 + 8\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_0^2 + 4d_1 + 2d_2}{2\gamma_3^2 - 4\gamma_0\gamma_2 + 7\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 2d_2 - d_1}. \tag{54}$$

5. Определим предельное значение $\bar{\mu}_0$ из гурвицевости матрицы$A_1(\mu)$. Характеристическое уравнение матрицы $A_1(\mu)$ имеет вид

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A_1(\mu)| = \lambda^3 + (1 + 0,5\mu)\,\lambda^2 + (1 - 0,5\mu)\,\lambda + 1,5\mu = 0.$$

Предельное значение $\bar{\mu}_0$ определяется из условия $(1 + 0,5\mu)(1 - 0,5\mu) - 1,5\mu > 0$. Отсюда следует, что предельное значение μ равно $\bar{\mu}_0 = \sqrt{13} - 3 = 0,60555127546$. Итак, матрица $A_1(\mu)$ — гурвицева, если $\varepsilon < \mu < \bar{\mu}_0$, $\varepsilon > 0$.

6. Из (52)–(54) при $\gamma_2 = 1/2\,\gamma_0,\ \gamma_3 = 2\,\gamma_1$ получим

$$\tau_1 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{6}, \quad \mu_0 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 - 2d_2 - d_1},$$

где $\tau_1 > 0,\ \mu_0 > 0$ при $5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 > 2d_2 + d_1$. Заметим, что решения линейной системы $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma,\ \dot{\eta} = \mu\sigma,\ \sigma = Dx + E\eta$ асимптотически устойчивы при $\varepsilon \le \mu < \bar{\mu}_0$. В самом деле, если $z = (x, \eta)$, то $\dot{z} = A_1(\mu)z,\ \sigma = S\,z$, где матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 - 3\mu & -2 + \mu & -1,5\mu \\ -3\mu & \mu & -1,5\mu \end{pmatrix}$$

— гурвицева при $0 < \varepsilon \le \mu < \bar{\mu}_0$, $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$. Будут ли решения системы (1), (2) абсолютно устойчивы при $\mu_0 = \bar{\mu}_0$? Иными словами, для системы (44) имеет ли положительное решение проблема Айзермана?

7. Для примера (44) проблема Айзермана имеет положительное решение, если существуют числа $\gamma_0, \gamma_1,\ \ d_1 > 0,\ d_2 > 0, \tau_1 > 0$ такие, что

$$\mu_0 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 - 2d_2 - d_1} = \bar{\mu}_0 = \sqrt{13} - 3.$$

Можно показать, что данное равенство выполняется при $\gamma_0^2 = 32\gamma_1^2$, $d_1 = 0,0217\gamma_1^2 > 0$, $d_2 = 0,016966\gamma_1^2 > 0$, $\tau_1 = 104,120732\gamma_1^2 > 0$.

Таким образом, положение равновесия системы (44) абсолютно устойчиво в $[\varepsilon, \bar{\mu}_0)$, проблема Айзермана для примера (44) имеет положительное решение.

6. Заключение

В работе получены следующие основные результаты: уравнения движения системы с помощью неособых преобразований сведены к специальному виду; получены эквивалентные тождества вдоль решений системы относительно переменных нелинейности в системе; сделана оценка решения нелинейной системы; изучены асимптотические свойства функций, связанных с ограниченностью несобственного интеграла; получено новое представление квадратичной формы относительно фазовых переменных в виде суммы двух слагаемых (первое слагаемое является квадратичной формой, приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое – полным дифференциалом функции по времени); на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы доказаны теоремы об абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы.

Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости решения уравнений с дифференциальным включением позволяет получить более широкую область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы, нежели известные критерии.

Литература

1 Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: АН СССР, 1963. — 240 с.

2 Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.

3 Попов В.П. Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 453 с.

4 Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

5 Бедельбаев А.К. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. — Алма-Ата: АН КазССР, 1960. — 164 с.

6 Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. — Алма-Ата: Наука КазССР, 1980. — 316 с.

7 Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1969. — №5. — С. 38–48.

8 Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. — 1970. – № 12. — С. 83–94.

9 Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН. — 1949. — Т.4, № 4. — С. 186–188.

10 Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. — 1957. — V.79, № 3. — P. 553–556.

11 Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 4. — С. 3–36.

12 Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. — Минск-Москва. — 1994. — Т.30, № 5. — С. 748–757.

13 Айсагалиев С.С. Теория регулируемых систем. — Алматы: Қазақ университетi, 2000. — 234 с.

14 Айсагалиев С.А. Теория устойчивости динамических систем. — Алматы: Қазақ университетi, 2012. — 216 с.

15 Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of synchronization theory // Journal Inverse Ill-Posed Problems. — 2013. — № 21. — P. 159–175.

Literatura

1 Aizerman M.A., Gantmaher F.R. Absolyutnaya ustoichivost' reguliruemyh sistem. — M.: AN SSSR, 1963. — 240 s.

2 Lur'e A.I. Nekotorye nelineinye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. — M.: Gostehizdat, 1951. — 216 s.

3 Popov V.P. Giperustoichivost' avtomaticheskih sistem. — M.: Nauka, 1970. — 453 s.

4 Gelig A.H., Leonov G.A., Yakubovich V.A. Ustoichivost' nelineinyh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya. — M.: Nauka, 1978. — 400s.

5 Bedel'baev A.K. Ustoichivost' nelineinyh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — Alma-Ata: AN KazSSR, 1960. — 164 s.

6 Maigarin B.Zh. Ustoichivost' i kachestvo processov nelineinyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. — Alma-Ata: Nauka KazSSR, 1980. — 316 s.

7 Aisagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti vynuzhdennyh dvizheniy v nelineinyh sistemah // Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika. — 1969. — №5. — S. 38–48.

8 Aisagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti sistemy upravleniya s neskol'kimi nelineinymi elementami // AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika. — 1970. – № 12. — S. 83–94.

9 Aizerman M.A. Ob odnoi probleme, kasayushheisya ustoichivosti v "bol'shom" dinamicheskih sistem // UMN. — 1949. — T.4, № 4. — S. 186–188.

10 Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. — 1957. — V.79, № 3. — P. 553–556.

11 Bragin V.O., Vagaitcev V.I., Kuznetcov N.V., Leonov G.A. Algoritmy poiska skrytyh kolebaniy v nelineinyh sistemah. Problemy Aizermana, Kalmana i tcepi ChUA // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2011. — № 4. — S. 3–36.

12 Aisagaliev S.A. K teorii absolyutnoi ustoichivosti reguliruemyh sistem // Differentcial'nye uravneniya. — Minsk-Moskva. — 1994. — T.30, № 5. — S. 748–757.

13 Aisagaliev S.S. Teoriya reguliruemyh sistem. — Almaty: Kazakh universiteti, 2000. — 234 s.

14 Aisagaliev S.A. Teoriya ustoichivosti dinamicheskih sistem. — Almaty: Kazakh universiteti, 2012. — 216 s.

15 Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of synchronization theory // Journal Inverse Ill-Posed Problems. — 2013. — № 21. — P. 159–175.

Поступила в редакцию 19.02.2014 г.

Әбенов Б.Қ., Айсағалиев С.Ә., Қалимолдаев М.Н. ҚАРАПАЙЫМ ЕРЕКШЕ ЖАҒДАЙДАҒЫ РЕТТЕЛЕТІН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ АБСОЛЮТТІК ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНА

Жүйенің шешімдері бойымен меншікті емес интегралдарды бағалау жолымен қарапайым ерекше жағдайдағы сызықтық емес реттелетін жүйелердің тепе-теңдік күйінің абсолюттік орнықтылығының жаңа тиімді шарты алынған. Абсолюттік орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісі конструкциялық параметрлер кеңістігінде белгілі әдістерге қарағанда кеңірек абсолюттік орнықтылық аймағын алуға мүмкіндік береді. Ұсынылған әдістің тиімділігі мысал арқылы көрсетілген.

Abenov B.K., Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N. TO ABSOLUTE STABILITY OF REGULAR SYSTEMS IN THE SIMPLE CRITICAL CASE

A new effective condition of absolute stability of the equilibrium of nonlinear regulative systems in the simple critical case is obtained by evaluating of improper integrals along solution of the system. The proposed research method of the absolute stability allows to obtain domain of absolute stability in the space of constructive parameters of system wider, than the known methods. Efficiency of suggested method is demonstrated by an example.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 517.956.3

Ш. Билал, С. Х. Шалгинбаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: bilal44@mail.ru
КазУМО и МЯ им. Абылай хана
050022, г.Алматы, ул. Муратбаева, 200, e-mail: salta_sinar@mail.ru

АДДИТИВНАЯ ОЦЕНКА МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕРЕЗ ДУАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Получен критерий выполнения весового аддитивного неравенства $\|wAf\|_{l_q} \leq C(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})$.
Ключевые слова: *аддитивное неравенство, матричный оператор, ограниченная последовательность.*

1. Постановка задачи

Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $w = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательности неотрицательных, а $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — положительных чисел.

Пусть $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Символы $0 \leq f$, $0 \leq f \downarrow$ соответственно означают, что последовательность f неотрицательная, неотрицательная и невозрастающая. Пусть A — матричный оператор вида

$$(Af)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \ i \geq 1,$$

Keywords: *additive inequality, matrix operator, bounded sequence*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

с неотрицательной матрицей $(a_{i,j})$.

В работе устанавливается весовая аддитивная оценка вида

$$\|wAf\|_{l_q} \leq C(\|uf\|_{l_p} + \|vF\|_{l_p}), \ f \geq 0, \tag{1}$$

когда $1 \leq q \leq \infty, \ p = \infty$. Здесь $F = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}, \ F_i = \sum\limits_{j=1}^{i} f_j, \ i \geq 1$ и

$$\|uf\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i f_i|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{i \geq 1} |u_i f_i|, \ p = \infty. \end{cases}$$

Оценка вида (1) при $1 \leq q, p < \infty$ в различных предположениях относительно матрицы $(a_{i,j})$ рассматривались в работах [1–4].

Для решения задачи (1) при $p = \infty$, следуя работе [1], сначала найдем величину, эквивалентную к величине

$$J(u, v, g) = \sup_{f \geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}}, \tag{2}$$

где $0 \leq g \downarrow$, которая позволяет получить критерий выполнения оценки (1).

2. Решение задачи (2)

Для каждого $n \geq 1$ определим

$$\varphi_n = \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} \left[\left(\sum_{i=k}^{n} u_i^{-1} \right)^{-1} + \sup_{i \geq k} v_i \right] \right\}^{-1},$$

и положим $\varphi_0 = 0$.

Теорема 1. *Пусть $0 \leq g \downarrow$ и v — ограниченная последовательность. Тогда*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq J(u, v, g) \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}). \tag{3}$$

Для того, чтобы доказать теорему 1, мы предварительно установим несколько лемм.

Лемма 1. *Предположим, что весовая последовательность* v *ограничена. Тогда последовательность* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *определена, положительная, строго возрастающая.*

Доказательство. Действительно, в силу условия леммы 1 из определения φ_n, $n \geq 1$, следует существование и положительность φ_n для каждого $n \geq 1$.

Пусть $n > 2$. Тогда

$$\varphi_n \geq \left\{ \min_{1\leq k\leq n-1} \left[\left(\sum_{i=k}^{n-1} u_i^{-1} + u_n^{-1} \right)^{-1} + \sup_{i\geq k} v_i \right] \right\}^{-1} >$$

$$> \left\{ \min_{1\leq k\leq n-1} \left[\left(\sum_{i=k}^{n-1} u_i^{-1} \right)^{-1} + \sup_{i\geq k} v_i \right] \right\}^{-1} = \varphi_{n-1} > 0.$$

□

Лемма 2. *Пусть выполнено условие леммы* 1. *Тогда для всех* $n \geq 1$

$$0 < u_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \leq 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Тогда

$$\varphi_n = \sup_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=k}^{n} u_i^{-1}\right)^{-1} + \sup\limits_{i\geq k} v_i} = \sup_{1\leq k\leq n-1} \frac{\sum\limits_{i=k}^{n-1} u_i^{-1} + u_n^{-1}}{1 + \left(\sum\limits_{i=k}^{n} u_i^{-1}\right) \sup\limits_{i\geq k} v_i} \leq$$

$$\leq \frac{\left(\sum\limits_{i=k}^{n-1} u_i^{-1}\right)}{1 + \left(\sum\limits_{i=k}^{n-1} u_i^{-1}\right) \sup\limits_{i\geq \kappa} \vartheta_i} + \frac{u_n^{-1}}{1 + u_{n-1}^{-1} \sup\limits_{i\geq n} v_i} < \varphi_{n-1} + u_n^{-1}.$$

Откуда вытекает (4). А при $n = 1$ из

$$\varphi_1 = \left(u_1 + \sup_{i\geq 1} v_i\right)^{-1}$$

следует $1 > u_1\varphi_1 = u_1(\varphi_1 - \varphi_0)$. □

Лемма 3. *Пусть выполнено условие леммы* 1. *Тогда для всех* $n \geq 1$

$$v_n \varphi_n < 1. \tag{5}$$

Действительно,

$$v_n \varphi_n = \sup_{1 \leq k \leq n} \frac{v_n}{\left(\sum\limits_{i=k}^{n} u_i^{-1}\right)^{-1} + \sup\limits_{i \geq k} v_i} < \frac{v_n}{\sup\limits_{i \geq 1} v_i} \leq 1.$$

□

Лемма 4. *Пусть выполнено условие леммы* 1. *Тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{k \geq 1} F_k \varphi_k^{-1} \leq 2\Big(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}\Big), \ f \geq 0. \tag{6}$$

Доказательство. Для каждого целого k определим $m_k = \inf\{m : m \geq 1, \ F_m \geq 2^k\}$. Из определения m_k вытекает $m_k \leq m_{k+1}$, $F_{m_k} \geq 2^k$ и $F_{m_k-1} < 2^k$, $\sum\limits_{i=m_{k-1}}^{m_k} f_i = F_{m_k} - F_{m_{k-1}-1} \geq 2^{k-1}$, если $m_k < \infty$. Положим $I_k = \{i : m_k \leq i \leq m_{k+1} - 1\}$. Тогда $N = \{1, 2, \ldots\} \subset \bigcup\limits_k I_k$. Учитывая, что последовательность $\{F_k\}$ неубывающая, а $\{\varphi_k^{-1}\}$ — невозрастающая, имеем

$$\sup_{k \geq 1} F_k \varphi_k^{-1} = \sup_{k \in Z} \sup_{m_k \leq i \leq m_{k+1}-1} F_i \varphi_i^{-1} \leq \sup_{k \in Z} F_{m_{k+1}-1} \varphi_{m_k}^{-1} \leq$$

$$\leq \sup_{k \in Z} 2^{k+1} \varphi_{m_k}^{-1} \leq \sup_{k \in Z} 2^{k+1} \Big(\min_{1 \leq j \leq m_k} \Big[\Big(\sum_{i=j}^{m_k} u_i^{-1} \Big)^{-1} + \sup_{i \geq j} v_i \Big] \Big) \leq$$

$$\leq \sup_{k \in Z} 2^{k+1} \Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1} \Big)^{-1} + \sup_{k \in Z} 2^{k+1} \sup_{i \geq m_{k-1}} v_i := H_1 + H_2. \tag{7}$$

Оценим H_1 и H_2.

$$H_1 = \sup_{k \in Z} 2^{k+1} \Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1} \Big)^{-1} = 2 \sup_{k \in Z} 2^k \Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1} \Big)^{-1} \leq$$

$$\leq 2\sup_{k\in Z}\Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} f_i\Big)\Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1}\Big)^{-1}\leq$$

$$\leq 2\sup_{k\in Z}\Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1}\Big)\Big(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k} u_i^{-1}\Big)^{-1}\sup_{m_{k-1}\leq j\leq m_k} u_j f_j =$$

$$= 2\sup_{k\in Z}\sup_{m_{k-1}\leq j\leq m_k} u_j f_j = 2\sup_{j\geq 1} u_j f_j = 2\|uf\|_{l_\infty}. \tag{8}$$

$$H_2 = \sup_{k\in Z} 2^{k+1}\sup_{i\geq m_{k-1}} v_i = \sup_{k\in Z} 2^{k+1}\sup_{i\geq k}\sup_{m_{i-1}\leq j\leq m_i} v_j \leq$$

$$\leq 2\sup_{k\in Z} 2^k\sup_{i\geq k}\sup_{m_{i-1}\leq j\leq m_i} v_j \leq 2\sup_{k\in Z}\sup_{i\geq k} 2^i\sup_{m_{i-1}\leq j\leq m_i} v_j \leq$$

$$\leq 2\sup_{k\in Z}\sup_{i\geq k} F_{m_i}\sup_{m_{i-1}\leq j\leq m_i} v_j \leq$$

$$\leq 2\sup_{k\in Z}\sup_{i\geq k}\sup_{m_{i-1}\leq j\leq m_i} F_j v_j = 2\sup_{i\geq 1} F_i v_i = 2\|vF\|_{l_\infty}. \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) имеем (6). □

Лемма 5. *Пусть выполнено условие леммы 1. Тогда для $f\geq 0$ имеет место оценка*

$$\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty} \leq 2\sup_{i\geq k} f_i(\varphi_i-\varphi_{i-1})^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Действительно, в силу (4) имеем

$$\|uf\|_{l_\infty} = \sup_{i\geq 1} u_i f_i = \sup_{i\geq 1} u_i(\varphi_i-\varphi_{i-1}) f_i(\varphi_i-\varphi_{i-1})^{-1} \leq 1\sup_{i\geq 1} f_i(\varphi_i-\varphi_{i-1})^{-1}.$$

На основании (5) получим

$$\|vF\|_{l_\infty} = \sup_{i\geq 1} v_i\sum_{j=1}^{i} f_j = \sup_{i\geq 1} v_i\sum_{j=1}^{i}(\varphi_j-\varphi_{j-1}) f_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})^{-1}\leq$$

$$\leq \sup_{i\geq 1} v_i\sum_{j=1}^{i}(\varphi_j-\varphi_{j-1})\sup_{j\geq 1} f_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})^{-1} =$$

$$= \sup_{i\geq 1} v_i\varphi_i\sup_{j\geq 1} f_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})^{-1} < \sup_{j\geq 1} f_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})^{-1}.$$

Откуда следует (10). □

Лемма 6. *Для любых $f \geq 0,\ 0 \leq g \downarrow$ имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i \leq \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k. \tag{11}$$

Доказательство. Неравенство (11) докажем в предположении $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k w_k < \infty$, в противном случае, принимая соглашение $\infty \leq \infty$, выполнение (11) считаем очевидным. Рассмотрим два случая: $W_\infty = \infty$ и $W_\infty < \infty$, где $W_\infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$.

Пусть $W_\infty = \infty$. Тогда для выполнения неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k w_k < \infty$ необходимо, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g_\infty = 0$. Поэтому g_k можно представить в виде $g_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} h_i,\ h_i \geq 0,\ i \geq 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sum_{j=i}^{\infty} h_j = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sum_{i=1}^{j} f_i = \sum_{j=1}^{\infty} h_j F_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sum_{i=1}^{j} w_i \Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \leq \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sum_{i=1}^{k} w_i =$$

$$= \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} w_i \sum_{k=i}^{\infty} h_k = \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} g_i w_i,$$

то есть неравенство (11) выполняется.

Пусть теперь $W_\infty < \infty$. Тогда g_k можно представить в виде $g_k = g_\infty + \tilde{g}_k$, где $\tilde{g}_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} h_i$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i = g_\infty F_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sum_{j=i}^{\infty} h_j = g_\infty W_\infty W_\infty^{-1} F_\infty +$$

$$+ \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i w_i \leq$$

$$\leq \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j\Big(g_\infty \sum_{i=1}^{\infty} w_i + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i w_i\Big) = \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{i=1}^{j} w_i\Big)^{-1} F_j \sum_{i=1}^{\infty} g_i w_i.$$

И в этом случае неравенство (11) доказано. □

Доказательство теоремы 1. Оценка снизу. Из (10) и из принципа двойственности в $l_p,\ p \geq 1$, имеем

$$J(u,v,g) \geq \sup_{f\geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{2\sup\limits_{j\geq 1} f_j(\varphi_j - \varphi_{j-1})^{-1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} g_j(\varphi_j - \varphi_{j-1}). \qquad (12)$$

Оценка сверху. Используя (6) и (11), получим

$$J(u,v,g) \leq \sup_{f\geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i g_i}{\sup\limits_{j\geq 1} F_j\varphi_j^{-1}} \leq 2\sup_{f>0} \frac{\sup\limits_{j\geq 1} F_j\varphi_j^{-1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\sup\limits_{j\geq 1} F_j\varphi_j^{-1}} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}). \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует неравенство (3). Теорема 1 доказана. □

3. Аддитивная оценка (1)

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq g \leq \infty,\ p = \infty$ *и* $\psi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ i \geq 1$. *Пусть сопряженный матричный оператор* $(A^*g)_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i$ *обладает свойством* $0 \leq A^*g \downarrow$ *для любого* $g \geq 0$. *Тогда неравенство* (1) *выполнятся тогда и только тогда, когда*

$$B = \|wA\psi\|_q < \infty, \quad \text{причем } \frac{1}{2}B \leq C \leq 2B, \qquad (14)$$

где C *— наилучшая константа в* (1).

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (14). Используя принцип двойственности в l_p (3), имеем

$$C = \sup_{f\geq 0} \frac{\|wAf\|_{l_q}}{\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty}} = \sup_{f\geq 0}\sup_{g\geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i(Af)_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g\geq 0}\sup_{f\geq 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} f_j}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty}+\|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g\geq 0}\sup_{f\geq 0}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}(\|uf\|_{l_\infty}+\|vF\|_{l_\infty})} =$$

$$= \sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}}\sup_{f\geq 0}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j (A^*g)_j}{\|uf\|_{l_\infty}+\|vF\|_{l_\infty}}. \qquad (15)$$

Используя левую часть соотношения (3), получим

$$C \geq \frac{1}{2}\sup_{g\geq 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A^*g)_j(\varphi_j-\varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2}\sup_{g\geq 0}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j} g_i(\varphi_j-\varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{g\geq 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}(\varphi_j-\varphi_{j-1})}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2}\sup_{g\geq 0}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i(A\psi)_i}{\|w^{-1}g\|_{l_{q'}}} = \frac{1}{2}\|wA\psi\|_{l_q}. \qquad (16)$$

Теперь, применяя правую часть неравенства (3) из (15), как и выше, получим $C \leq 2\|wA\psi\|_{l_q}$. Отсюда и из (16) будет следовать (14). Теорема доказана. $\square$

Литература

1 Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Труды межд.конф. "Современное состояние и перспектива развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии ". — 2001. — С. 111–115.

2 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators // Математический журнал. — 2011. — Т.11, №2(40). — С. 73–85.

3 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional analysis. — 2011. — T.2, №1. — C. 114–127.

4 Oinarov R., Okroti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. — 2007. — №4. — P. 843–861.

Literatura

1 Oinarov R. Dual'noe neravenstvo k additivnoi otcenke matrichnogo operatora // Trudy mezhd.konf. "Sovremennoe sostoyanie i perspektiva razvitiya matematiki v ramkah programmy "Kazakhstan v tret'em tysyacheletii". — 2001. — S. 111–115.

2 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators // Matematicheskiy zhurnal. — 2011. — T.11, №2(40). — S. 73–85.

3 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional analysis. — 2011. T.2. — №1. — S. 114–127.

4 Oinarov R., Okroti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. — 2007. — №4. — P. 843–861.

Статья поступила в редакцию 7.10.2013

Билал Ш., Шалгинбаева С.Х. ЕКІЖАҚ ТЕҢСІЗДІК АРҚЫЛЫ МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫ ҚОСЫМДЫ БАҒАЛАУ

$\|wAf\|_{l_q} \leq C(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})$ жүгенді қосымдық теңсіздігі орындалуының критериі алынды.

Bilal Sh., Shalginbayeva S.H. ADDITIVE ESTIMATE OF MATRIX OPERATOR BY DUAL INEQUALITY

The criterion of fulfilment of weighted additive inequality $\|wAf\|_{l_q} \leq C(\|uf\|_{l_\infty} + \|vF\|_{l_\infty})$ is obtained.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 519.443

А.А. Болен

Казахский национальный педагогический университет имени Абая
050010, Алматы, ул. Толе би, 80, e-mail: amangeldy.bolen@mail.ru

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМИТИВНЫХ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Дается описание ведущих модулей характеров Дирихле примарного порядка p^l. Приводится классификация примитивных характеров Дирихле порядка p^l и приложения к конструктивному описанию множества всех абсолютно циклических полей степени p^l. Производится подсчет числа всех абсолютно циклических полей степени p^l с заданным дискриминантом.
Ключевые слова: *характеры Дирихле, абелевы поля, дискриминант поля.*

Одной из центральных проблем алгебраической теории чисел является конкретное описание абелевых расширений над заданным полем. Эта задача имеет глубокую связь с обратной задачей Галуа. Теорема Кронекера-Вебера утверждает, что любое абсолютно абелево поле (а.а.п.) будет подполем поля деления круга Кронекера-Вебера $Q(\zeta_f)$ при некотором f, где $\zeta_f = \exp(i\frac{2\pi}{f}) = \cos\frac{2\pi}{f} + i\sin\frac{2\pi}{f} \in C^*$, Q — поле рациональных чисел. Ведущим дивизором а.а.п. K называется наименьшее натуральное число $F(K) = f$ такое, что $Q(\zeta_f)$ является наименьшим полем поля деления круга, в котором содержится K. Так как любая а.а.п. является композитом абсолютно циклических полей степени p^l, где p простое число, то конструктивное описание множества всех абсолютно абелевых полей сводится к описанию множества всех абсолютно циклических полей степени p^l. Эффективным инструментом для конкретного конструктивного описания и

Keywords: *characters of Dirichlet, abelian fields, discriminant of the field*
2010 Mathematics Subject Classification: 43A10, 43A20

изучения абелевых расширений особую роль играет изучение ведущих модулей характера Дирихле и суммы Гаусса по характеру Дирихле [3]. Для осуществления нашей цели напомним некоторые структурные особенности группы Галуа $U(f)$ поля $Q(\zeta_f)$. Пусть $f = 2^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ каноническое разложение натурального числа f.

Определение 1. *Разложение* $U(f) = (\tilde{g}_{-1})(\tilde{g}_0)(\tilde{g}_1)\dots(\tilde{g}_s)$, $\tilde{g}_j \in U(f)$, $|\tilde{g}_{-1}| = 1$, $|\tilde{g}_0| = 2^{k_0-2}$, *при* $k_0 \geq 2$, $|\tilde{g}_j| = \varphi(p_j^{k_j}) = p_j^{k_j-1}(p_j-1)$, $j = 1, 2, \dots, s$, *группы обратимых элементов* $U(f)$ *кольца вычетов* $Z/(f)$ *по модулю* f *в прямое произведения циклических подгруп* $(\tilde{g}_j)$, $j = -1, 0, 1, 2, \dots, s$, *называется эффективным каноническим представлением группы* $U(f)$, *если для любого делителя* $d \in Z^+$ *числа* $f \in Z^+$, $U(d) = (\bar{g}_{-1})(\bar{g}_0)(\bar{g}_1)\dots(\bar{g}_s)$, $\bar{g}_i \in Z/(d)$ *также является разложением группы* $U(d)$ *в прямое произведение подгруп.*

Предложение 1. *Для любого положительного целого числа* $f \in Z^+$ *существует эффективное каноническое разложение группы* $U(f)$ *в прямое произведения подгруп.*

Доказательство. Известно [1], что для любого $f = 2^{k_0}$ эффективное представление группы $U(2^{k_0})$ имеет вид

$$U(2^{k_0}) = (-\bar{1})(\bar{5}) = \left\{(-\bar{1})^{t_{-1}}(\bar{5})^{t_0} \,\middle|\, (t_{-1}, t_0) \in Z/(2) \oplus Z/(2^{k_0-2})\right\},$$

где при $k_0 \geq 2$ класс вычетов по модулю $m = 2^{k_0}$ с представителем -1 в группе $U(2^{k_0})$ имеет порядок $\left|\overline{-1}\right| = 2$, а класс с представителем 5 имеет порядок $\left|\bar{5}\right| = 2^{k_0-2}$. Заметим, что через $Z/2 \oplus Z/(2^{k_0-2})$ обозначена прямая сумма аддитивной группы кольца вычетов $Z/2$ и $Z/(2^{k_0-2})$. Известно также [1], если p_j — нечетное простое число, то существует $a_j \in Z^+$ такое, что $U(p_j^{k_j}) = (\bar{a}_j)$ и $|\bar{a}_j| = \varphi(p_j^{k_j}) = p_j^{k_j-1}(p_j-1)$ для любого $k_j \in Z^+$. Для выбора такого $a_j \in Z^+$ достаточно взять любой первообразный корень $a_j \in Z^+$ по простому модулю p_j, удовлетворяющий условию $a_j^{p_j-1} \neq 1(mod\, p_j^2)$. Например, эффективные представления: $U(3^k) = (\bar{2})$, $U(5^k) = (\bar{2})$, $U(7^k) = (\bar{3})$.

Пусть $f = 2^{k_0}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение. Согласно китайской теореме об остатках разрешимы системы сравнений

$$\begin{cases} g_{-1} \equiv -1 & (mod\, 2^{k_0}) \\ g_{-1} \equiv 1 & (mod\, m_0') \end{cases}, \begin{cases} g_0 \equiv 5 & (mod\, 2^{k_0}) \\ g_0 \equiv 1 & (mod\, m_0') \end{cases}, \begin{cases} g_i \equiv a_i & (mod\, p_i^{k_i}) \\ g_i \equiv 1 & (mod\, m_i') \end{cases},$$

где $m = m_i'p_i^{k_i}$. Тогда $U(f) = (\tilde{g}_{-1})(\tilde{g}_0)(\tilde{g}_1)\dots(\tilde{g}_s)$, $\tilde{g}_j \in U(f)$ — эффективное разложение. Например,

$$U(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3) = (30871) \cdot (61741) \cdot (96041) \cdot (24697) \cdot (36361).$$

Заметим, что автоморфизм $g_{-1}^{t_{-1}}\, g_0^{t_0}\, g_1^{t_1}\, \dots\, g_s^{t_s} : Q(\zeta_f) \to Q(\zeta_f)$, $f = 2^{k_0} \times p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}$ поля $Q(\zeta_f)$ определяется формулой $g_{-1}^{t_{-1}}g_0^{t_0}g_1^{t_1}\dots g_s^{t_s}(\zeta_f) = \zeta_f^{g_{-1}^{t_{-1}}g_0^{t_0}g_1^{t_1}\dots g_s^{t_s}}$. Эффективное представление группы обратимых элементов $U(m)$ кольца вычетов $Z/(m)$ по произвольному модулю $m \in Z^+$ играет огромную роль в изучении класса круговых и абсолютно абелевых полей, способствует построить эффективное представление группы характеров $X(f)$ группы $U(f)$, а также позволяет эффективно описать вложение группы $U(d)$ в группу $U(f)$ для любого делителя d числа $f \in Z^+$.

Пусть $X(f)$ — группы характеров группы $U(f)$, $X^*(f)$ — группа характеров Дирихле по модулю f. Изоморфизм группы $X(f)$ и $X^*(f)$ устанавливается каждому характеру $\chi \in X(f)$ естественным образом сопоставлением характера Дирихле $\chi^* \in X^*(f)$ по модулю f, $\chi^* : Z \to C$, определяемым формулой для $n \in Z : \chi^*(n) = \begin{cases} \chi(n), & \text{если } (n,f) = 1 \\ 0, & \text{если } (n,f) > 1 \end{cases}$. Имея в виду этот естественный изоморфизм, группу характеров Дирихле по модулю m будем также обозначать $X(f)$. Тогда для любого простого числа p имеем цепочку вложений: $X(p) \subseteq X(p^2) \subseteq \dots X(p^l) \subseteq \dots$. Понятие примитивного характера Дирихле $\chi \in X(p^l)$ по модулю p^l имеет очень простую формулировку. Характер $\chi \in X(p^l)$ называется примитивным характером по модулю p^l, если $\chi \notin X(p^{l-1})$, в этом случае p^l называется ведущим модулем характера $\chi \in X(p^l)$ и обозначается как $F(\chi) = p^l$. Из этого определения непосредственно следует, что число примитивных характеров Дирихле с ведущим модулем p^l равно $\varphi(p^l) - \varphi(p^{l-1})$, где φ — функция Эйлера. Если $m = 2^{k_0}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение и $U(f) = (\tilde{g}_{-1})(\tilde{g}_0)(\tilde{g}_1)\dots(\tilde{g}_s)$, $\tilde{g}_j \in U(f)$ — эффективное каноническое разложение группы $U(f)$, то группы характеров Дирихле имеет эффективное каноническое разложение $X(f) = (\lambda_{-1})(\lambda_0)(\lambda_1)\dots(\lambda_s)$ или $X(f) = \{\lambda_{-1}^{a_{-1}}\lambda_0^{a_0}\lambda_1^{a_1}\dots\lambda_s^{a_s} \big| (a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_s) \in Z_2 \oplus Z_{2^{k_0-2}} \oplus Z_{\varphi(p^{k_1})} \oplus \dots \oplus Z_{\varphi(p^{k_s})}\}$, где $\lambda_{-1}^{a_{-1}}\lambda_0^{a_0}\lambda_1^{a_1}\dots\lambda_s^{a_s}(g_{-1}^{t_{-1}}g_0^{t_0}g_1^{t_1}\dots g_s^{t_s}) = \zeta_2^{a_{-1}t_{-1}}\zeta_{2^{k_0-2}}^{a_0t_0}\zeta_{\varphi(p^{k_1})}^{a_1t_1}\dots\zeta_{\varphi(p^{k_s})}^{a_st_s}$, в частности, $X(2^{k_0}) = (\lambda_{-1})(\lambda_0)$, $\lambda_{-1}^{a_{-1}}\lambda_0^{a_0}(g_{-1}^{t_{-1}}g_0^{t_0}) = \zeta_2^{a_{-1}t_{-1}}\zeta_{2^{k_0-2}}^{a_0t_0}$, $X(p_j^{k_j}) = (\lambda_j)$, $\lambda_j(g_j) = \zeta_{\varphi(p^{k_j})}$, $j = 1, 2, \dots, s$. Каждый характер Дирихле $\chi \in X(m)$ по модулю m имеет каноническое разложение $\chi = \chi_0\chi_1\chi_2\dots\chi_s$, где $\chi_i \in X(p_i^{k_i})$, $i = 0, 1, 2, \dots, s$, $\chi(n) = \chi_0(n)\chi_1(n)\chi_2(n)\dots\chi_s(n)$, $n \in Z$, при этом $F(\chi) = F(\chi_0)F(\chi_1)\dots F(\chi_s)$. Если $F(\chi) = m$, то $\chi \in X(m)$ — примитивный характер по модулю m. Таким образом, изучение ведущих модулей характера Дирихле сводится к изучению ведущих модулей характеров по примарному модулю p^k. Заметим, что если p — нечетное простое число, $\chi \in X(p^k)$ — характер с ведущим модулем $F(\chi) \neq 1$, то $F(\chi) = p^{1+ord_p|\chi|}$. Если $\chi \in X(2^k)$, характер с ведущим модулем $F(\chi) \neq 1$, $F(\chi) \neq 4$, то $F(\chi) = 2^{2+ord_2|\chi|}$.

Непосредственно проверяется, что для $a \in U(m)$ и характера Дирихле $\chi \in X(m)$ имеют место соотношения ортогональности, а именно

$$\sum_{a \in U(m)} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } \chi = \varepsilon_m \\ 0, & \text{если } \chi \neq \varepsilon_m \end{cases},$$

$$\sum_{\chi \in X(m)} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } a \equiv 1 (mod\, m) \\ 0, & \text{если } a \neq 1 (mod\, m) \end{cases},$$

где $\varepsilon_m \in X(m)$ — единичный характер Дирихле по модулю m.

Произведение характеров Дирихле $\chi_1 \in X(m)$ по модулю m и $\chi_2 \in X(k)$ по модулю k определяется формулой: $\chi_1\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$ и является характером Дирихле $\chi_1 \cdot \chi_2 \in X([m, k])$ по модулю $[m, k]$, где $[m, k]$ — наименшее общее кратное чисел $m, k \in Z^+$. Если m делится на натуральное число $d \in Z^+$, $m \,\vdots\, d$, то отображение $In_{d,m} : X(d) \to X(m)$, определенное формулой $In_{d,m}(\chi) = \chi\varepsilon_m$, где $\chi \in X(d)$, $\varepsilon_m \in X(m)$ — единичный характер Дирихле по модулю m, является изоморфным вложением группы $X(d)$ в группу $X(m)$. Характер Дирихле $In_{d,m}(\chi) = \chi\varepsilon_m \in X(m)$ по модулю m называется индуцированным характером Дирихле $\chi \in X(d)$. Если $m \,\vdots\, d$,

$d \vdots k$, $\lambda = In_{d,m}(\chi) = \chi\varepsilon_m \in X(m)$, $\chi \in X(d)$, $\chi = In_{k,d}(\delta) = \delta\varepsilon_d \in X(d)$, $\delta \in X(k)$, то $\lambda = In_{k,m}(\delta) = \delta\varepsilon_m \in X(m)$. □

Предложение 2. *Если m делится на натуральное число $d \in Z^+$, $m \vdots d$, то характер $\lambda \in X(m)$ индуцируется некоторым характером $\chi \in X(d)$ тогда и только тогда, когда $\forall b, c \in U(m)\, (b \equiv c (mod\, d) \to \lambda(b) = \lambda(c))$.*

Доказательство. Пусть $m \vdots d$, $\lambda = In_{d,m}(\chi) = \chi\varepsilon_m \in X(m)$. Тогда из $b, c \in U(m), b \equiv c(mod\, d)$, следует $\chi\varepsilon_m(b) = \chi\varepsilon_m(c)$ значит, $\chi(b) = \chi(c)$. Обратно, пусть $m \vdots d$,$\forall b, c \in U(m)\, (b \equiv c(mod\, d) \to \lambda(b) = \lambda(c))$. Тогда можно однозначно определить характер Дирихле $\chi \in X(d)$ по модулю d, следующей формулой: $\chi(a) = \begin{cases} \lambda(b), & \text{если } a \in U(d), a \equiv b(mod\, d), b \in U(m) \\ 0, & \text{если } a \notin U(d) \end{cases}$.
Это определение корректно и не зависит от выбора $b \in U(m)$ и $\lambda = \chi\varepsilon_m$.

Если характер $\lambda \in X(m)$ индуцируется характерами по модулям m_1, m_2, тогда он индуцируется некоторым характером по модулю (m_1, m_2). Следовательно, наименьший модуль f, при котором $\lambda \in X(m)$ индуцируется примитивным характером $\chi \in X(f)$ по модулю f, является ведущим модулем характер $\lambda \in X(m)$, $f = F(\lambda)$. □

Предложение 3. *Если $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение, $\chi \in X(f)$, $\chi = \chi_1 \ldots \chi_s$, $\chi_i \in X(p_i^{k_i})$, то сумма Гаусса $\tau_1(\chi) = \sum\limits_{t \in U(f)} \chi(t)\zeta_f^t$, соответствующая характеру Дирихле $\chi \in X(f)$ по модулю f, определяется формулой $\tau(\chi) = \prod\limits_{j=0}^{s} \chi_j(m_j)\tau_j(\chi_j)$, где $\tau(\chi_j) = \sum\limits_{t \in U(p_j^{k_j})} \chi_j(t)\zeta_{p_j^{k_j}}^t$, $j = 0.1, 2, \ldots, s$.*

Доказательство. Пусть $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} = m_j p_j^{k_j}$. Тогда $m_j \in U(p_j^{k_j})$, $U(m) = \left\{ m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s \,\middle|\, x_1 \in U(p_1^{k_1}), \ldots, x_s \in U(p_s^{k_s}) \right\}$. Следовательно,

$$\tau(\chi) = \sum_{t \in U(m)} \chi(t)\zeta_m^t = \sum_{t_1 \in U(p_1^{k_1})} \ldots \sum_{t_s \in U(p_s^{k_s})} \chi(m_1 t_1 + \ldots + m_s t_s)\zeta_m^{m_1 t_1 + \ldots + m_s t_s},$$

$$\tau(\chi)=\sum_{t_1\in U(p_1^{k_1})}\chi_1(m_1t_1)\zeta_{p_1^{k_1}}^{t_1}\ldots\sum_{t_s\in U(p_s^{k_s})}\chi_s(m_st_s)\zeta_{p_s^{k_s}}^{t_s}=\prod_{j=1}^{s}\chi_j(m_j)\tau_j(\chi_j).$$

Заметим, что если $\chi\in X(f)$ — примитивный характер по модулю f, то $|\tau(\chi)|=\sqrt{f}$. $\square$

Предложение 4. *Пусть p^l степень нечетного простого числа p. Примитивный характер Дирихле $\chi\in X(f)$, $f=F(\chi)$, по модулю f порядка $|\chi|=p^l$ существует тогда и только тогда, когда f имеет каноническое разложение вида $f=p_1p_2\ldots p_s$ или $f=p^{l_0+1}p_1p_2\ldots p_s$, где $p_i\equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i\in Z^+$, $l=\max\{l_1,\ldots,l_s\}$ или $l=\max\{l_0,l_1,\ldots,l_s\}$.*

Доказательство. Пусть $f=p^{k_0}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$, $p,p_1,\ldots,p_s$ — попарно различные простые числа, $\chi\in X(f)$, $f=F(\chi)$, $|\chi|=p^l$, $\chi=\chi_0\chi_1\ldots\chi_s$, $\chi_i\in X(p_i^{k_i})$, $F(\chi_i)=p_i^{k_i}$, $i=0,1,2,\ldots,s$, $p_0=p$. Так как $|\chi|=p^l$, то $|\chi_i|=p^{l_i}$, $l=\max\{l_0,l_1,\ldots,l_s\}$. Заметим, что по модулю p не существует характера порядка p, ибо $|X(p)|=\varphi(p)=p-1$, следовательно, $k_0=0$, или $k_0=l_0+1$. Если $2\le k_i$, $i=1,2,\ldots,s$, то не существует примитивного характера порядка $\chi_i\in X(p_i^{k_i})$, порядка $|\chi_i|=p^{l_i}$. Таким образом, $k_i=1$, $i=1,2,\ldots,s$. Обратно, если $f=p_1p_2\ldots p_s$ или $f=p^{l_0+1}p_1p_2\ldots p_s$, где $p_i\equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i\in Z^+$, $l=\max\{l_1,\ldots,l_s\}$ или $l=\max\{l_0,l_1,\ldots,l_s\}$, то существуют примитивные характеры $\chi_i\in X(p_i)$, $F(\chi_i)=p_i$ порядков $|\chi_i|=p^{l_i}$. Тогда, $\chi=\chi_0\chi_1\ldots\chi_s\in X(f)$, $|\chi|=p^l$, и $F(\chi)=F(\chi_0)F(\chi_1)\ldots F(\chi_s)=f$. $\square$

Аналогично доказывается предложение 5.

Предложение 5. *Примитивный характер Дирихле $\chi\in X(f)$ по модулю f порядка $|\chi|=2^l$ существует тогда и только тогда, когда f имеет каноническое разложение вида $f=p_1p_2\ldots p_s$ или $f=2^{l_0+2}p_1p_2\ldots p_s$, где $p_i\equiv 1(mod\, 2^{l_i})$, $l_i\in Z^+$, $l=\max\{l_1,\ldots,l_s\}$ или $l=\max\{l_0,l_1,\ldots,l_s\}$.*

Обозначим через $P(m)$ множество всех примитивных характеров по модулю m и через $N(m)=|P(m)|$ — число всех примитивных характеров по модулю m. Пусть $m=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$ — каноническое разложение, тогда $P(m)=\left\{\chi_1\ldots\chi_s\,\middle|\,\chi_i\in P(p_i^{k_i}),i=1,\ldots,s\right\}$, $N(m)=|P(m)|=\prod_{i=1}^{s}\left|P(p_i^{k_i})\right|=\prod_{i=1}^{s}N(p_i^{k_i})$, $N(m)$ — мультипликативная функция. Заметим, что число всех примитивных характеров по модулю 2^{l+2} порядка $|\chi| = 2^l$ равно $N_{2^l}(2^{l+2}) = 2\varphi(2^{l+1}) = 2(2^{l+1} - 2^l) = 2^{l+1}$, если p — нечетное простое число, то число всех примитивных характеров по модулю p^{l+1} порядка $|\chi| = p^l$ равно $N_{p^l}(p^{l+1}) = \varphi(p^l)$, а число всех примитивных характеров по простому модулю $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$ порядка p^{l_i} равно $N_{p^l}(p_i) = \varphi(p^l)$. Тогда число $N_{p^l}(f)$ примитивных характеров порядка $|\chi| = p^l$ с ведущим модулем $f = p_1 p_2 \ldots p_s$ или $f = p^{l_0+1} p_1 p_2 \ldots p_s$, где $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_1, \ldots, l_s\}$ или $l = \max\{l_0, l_1, \ldots, l_s\}$, имеющее каноническое разложение $\chi = \chi_0 \chi_1 \ldots \chi_s \in X(f)$, $|\chi_i| = p_i^{l_i}$, равно $N_{p^l}(f) = \prod\limits_{i=1}^{s} \varphi(p^{l_i})$ или $N_{p^l}(f) = \prod\limits_{i=0}^{s} \varphi(p^{l_i})$. Число $N_{2^l}(f)$ примитивных характеров порядка $|\chi| = 2^l$ с ведущим модулем $f = p_1 p_2 \ldots p_s$ или $f = 2^{l_0+2} p_1 p_2 \ldots p_s$, где $p_i \equiv 1(mod\, 2^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_1, \ldots, l_s\}$ или $l = \max\{l_0, l_1, \ldots, l_s\}$, имеющее каноническое разложение $\chi = \chi_0 \chi_1 \ldots \chi_s \in X(f)$, $|\chi_i| = 2^{l_i}$, равно $N_{2^l}(f) = \prod\limits_{i=1}^{s} \varphi(2^{l_i})$ или $N_{2^l}(f) = 2^{l_0+1} \prod\limits_{i=1}^{s} \varphi(2^{l_i})$. $\square$

Определение 2. *Два примитивных характера* $\chi_1, \chi_2 \in X(f)$ *порядка* p^l *называются эквивалентными и обозначаются* $\chi_1 \sim \chi_2$, *если они порождают одну и ту же подгруппу* $X(f)$, *то есть* $(\chi_1) = (\chi_2)$. *Очевидно, что если* $\chi_1, \chi_2 \in X(p^k)$ *и* $\chi_1 \sim \chi_2$, *то* $\theta(\chi_1) = \theta(\chi_2)$ *порядка степени* p^k.

Пусть p — простое число, X_{p^l} — множество всех примитивных характеров порядка p^l, $X_{p^l}/\sim$ — фактормножество множества всех примитивных характеров порядка p^l по эквивалентности $\sim$, P_{p^l} — множество всех абсолютно циклических полей степени p^l.

Теорема. *Отображение* $\psi : X_{p^l}/\sim \longrightarrow P_{p^l}$, *определенное формулой* $\psi(\chi) = Q(\theta(\chi))$, $\chi \in X_{p^l}$, $F(\chi) = f$ — *примитивный характер Дирихле по модулю* f *порядка* $|\chi| = p^l$, $\theta(\chi) = \sum\limits_{t \in Ker \chi} \zeta_f^t \in Q(\zeta_f)$ *является биективным отображением, причем* $F(\chi) = F(Q(\theta(\chi)))$, $|Q(\theta(\chi)) : Q| = |\chi|$ *и* $\theta(\chi) = \frac{1}{p^l} \sum\limits_{i=0}^{p^l-1} \tau(\chi^i) \in Q(\zeta_f)$, *где* $\tau(\chi^i) = \sum\limits_{t \in U(f)} \chi^i(t) \zeta_f^t$ — *суммы Гаусса соответствующей характерам* $\chi^i \in X(f)$ *по модулю* f.

Если $f = p_1 p_2 \dots p_s$, $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_1, \dots, l_s\}$ $\chi = \chi_0\chi_1 \dots \chi_s \in X(f)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $|\chi_i| = p_i^{l_i}$ $U(f)/\ker\chi = (\overline{g}) = \left\{g^i \cdot \ker\chi | 0 \le i < p^l\right\}$, $|\overline{g}| = p^l$, *то совокупность* p^l *сопряженных чисел* $\left\{g^j\left(\theta(\chi)\right)|g^j \in U(f)/Ker\chi\right\}$ *является нормальным целым базисом поля* $Q\left(\theta(\chi)\right)$, *степени* p^l, *и дискриминант* D *равен* $D = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{p^l - p^{l-l_i}}$.

Если p *— нечетное простое число,* $f = p^{l_0+1}p_1p_2 \dots p_s$, $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_0, l_1, \dots, l_s\}$. $\chi = \chi_0\chi_1 \dots \chi_s \in X(f)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $|\chi_i| = p_i^{l_i}$, $p_0 = p^{l_0+1}$, *то дискриминант поля* $Q\left(\theta(\chi)\right)$ *степени* p^l *равен* $D = p^{p^{l-l_i}\left[(l_0+1)p^{l_0} - \frac{p^{l_0}-1}{p-1} - 1\right]} \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{p^l - p^{l-l_i}}$.

Если $f = 2^{l_0+2}p_1p_2 \dots p_s$, $p_i \equiv 1(mod\, 2^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_0, l_1, \dots, l_s\}$, $\chi = \chi_0\chi_1 \dots \chi_s \in X(f)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $|\chi_i| = 2^{l_i}$, $p_0 = 2^{l_0+2}$, *то дискриминант поля* $Q\left(\theta(\chi)\right)$ *степени* p^l *равен* $D = 2^{2^{l-l_i}\left[(l_0+1)2^{l_0} - 1\right]} \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{2^l - 2^{l-l_i}}$.

Доказательство. Пусть p — нечетное простое число, $K \in P_{p^i}$ — абсолютно абелево поле степени p^l с ведущим дивизором $F(K) = f = p^{l_0+1}p_1p_2 \dots p_s$, $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$. Тогда группа Галуа поля $K \in P_{p^i}$ — циклическая группа $U(f)/\ker\chi = (\overline{g}) = \left\{g^i \cdot \ker\chi | 0 \le i < p^l\right\}$ порядка $|\overline{g}| = p^l$, причем существует с точностью до эквивалентности единственный примитивный характер $\chi \in X(f)$, $f = F(\chi)$ по модулю f, порядка $|\chi| = p^l$ такой, что $\psi_f(Ker\chi) = Q\left(\theta(\chi)\right) = K$, где $\psi_f : S\left(U(f)\right) \to S\left(Q(\zeta_f)\right)$ — соответствие Галуа, $\theta(\chi) = \sum\limits_{t \in Ker\chi} \zeta_f^t$.

Пусть $U(f) = (\tilde{g}_0)(\tilde{g}_1) \dots (\tilde{g}_s)$, $\tilde{g}_j \in U(f)$, $\chi = \chi_0\chi_1 \dots \chi_s \in X(f)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $|\chi_i| = p_i^{l_i}$, $p_0 = p^{l_0+1}$, $\chi_i(g_i) = \zeta_{p_i^{l_i}}^{q_i}$, $(q_i, p^{l_i}) = 1$, $\chi(g) = \chi_0 \dots \chi_s(g_0^{a_1} \dots g_s^{a_s}) = \zeta_{p^{l_1}}^{q_1 a_1} \dots \zeta_{p^{l_s}}^{q_s a_s} = \zeta_{p^l}^{p^{l-l_1}q_0a_0 + \dots + p^{l-l_s}q_sa_s} = \zeta_{p^l}$, $Ker\chi = \left\{g_0^{t_0} \dots g_s^{t_s} | p^{l-l_0}q_0t_0 + \dots + p^{l-l_s}q_st_s \equiv 0(mod\, p^l)\right\}$.

Заметим, что суммы Гаусса $\tau(\chi) = \sum\limits_{t \in U(f)} \chi^i(t)\zeta_f^t$, соответствующие характерам Дирихле $\chi^i \in X(f)$ по модулю f и $g^j\left(\theta(\chi)\right)$ связаны между собой соотношениями $g^j\left(\theta(\chi)\right) = \dfrac{1}{p^l}\sum\limits_{i=1}^{p^l-1} \zeta_{p^l}^{-ij}\tau(\chi^i)$, $\tau(\chi^i) = \sum\limits_{j=0}^{p^l-1} \zeta_{p^l}^{ij} g^j\left(\theta(\chi)\right)$. Действительно, $\frac{1}{p^k}\sum_{j=0}^{p^l-1}\zeta_{p^l}^{-ij}\tau\chi^i) =$

$$\sum_{t_1=0}^{\varphi(p_0)-1}\cdots\sum_{t_s=0}^{\varphi(p_s)-1}\frac{1}{p^l}\sum_{j=0}^{p^k-1}\zeta_{p^l}^{i(p^{l-l_0}t_0+\ldots+p^{l-l_1}t_s-j)}\zeta_f^{g_0^{t_0}\ldots g_s^{t_s}}\sum_{t\in Ker\chi}\zeta_f^{g^jt} = \theta_j(\chi),$$

$$\sum_{j=1}^{p^l-1}\zeta_{p^l}^{ij}g^j\left(\theta(x)\right) = \sum_{k=0}^{p^l-1}\left(\frac{1}{p^l}\sum_{i=0}^{p^l-1}\zeta_{p^l}^{(i-k)jq}\right)\tau(\chi^k) = \sum_{\substack{i=0\\ k\equiv i(mod\, p^l)}}^{p^l-1}\tau(\chi^k) = \tau(\chi^i).$$

Если $f = p_1p_2\ldots p_s$, $p_i \equiv 1(mod\, p^{l_i})$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_1,\ldots,l_s\}$, $\chi = \chi_0\chi_1\cdots\chi_s \in X(f)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $|\chi_i| = p_i^{l_i}$ $U(f)/\ker\chi = (\overline{g}) = \left\{g^i\cdot\ker\chi|0\le i<p^l\right\}$, $|\overline{g}| = p^l$, то $\det\left(\zeta_{p^l}^{ij}\right)^2\det\left(g^{j+l}\left(\theta(\chi)\right)\right)^2 =$

$$\det\left(\zeta_{p^l}^{-il}\sum_{j=0}^{p^k-1}\zeta_{p^l}^{i(j+l)}g^{j+l}\left(\theta(\chi)\right)\right)^2 = \prod_{i=0}^{p^k-1}\tau(\chi^i)\left(\det\zeta_{p^l}^{il}\right)^2,$$

$$\det\left(g^{j+l}\left(\theta(\chi)\right)\right)^2 = \left(\prod_{i=0}^{p^k-1}\tau(\chi^i)\right)^2 = \prod_{i=1}^{p^k-1}\chi^i(-1)\left|\tau(\chi^i)\right|^2 = \prod_{i=1}^{p^k-1}F(\chi^i) = D.$$

Теперь, по теореме о ведущих дивизорах дискриминанта поля [2] имеем $D = \prod_{k=0}^{p^l-1}F(\chi^k) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{k=1}^{p^l-1}F(\chi_i^k) = \prod_{i=1}^{s}p_i^{p^l-p^{l-l_i}}$. Аналогично доказываются другие случаи. □

Следствие 1. *Если p — нечетное простое число, то для любого $l_0\in Z^+$ существует с точностью до эквивалентности единственный примитивный характер Дирихле $\chi = \lambda_{p^{l_0+1}}^{p-1}\in X(p^{l_0+1})$, $X(p^{l_0+1}) = (\lambda_{p^{l_0+1}})$ с ведущим модулем p^{l_0+1} порядка $|\chi| = p^{l_0}$ и существует единственное циклическое поле $Q\left(\theta(\chi)\right)$ степени $\left|Q\left(\theta(\chi)\right):Q\right| = p^{l_0}$ с ведущим дивизором p^{l_0+1}, дискриминант поля $Q\left(\theta(\chi)\right)$ равен $D = p^{(l_0+1)p^{l_0}-\frac{p^{l_0}-1}{p-1}-1}$, где $\theta(\chi) = \sum_{t\in Ker\chi}\zeta_{p^{l_0+1}}^t = \frac{1}{p^{l_0}}\sum_{i=0}^{p^{l_0}-1}\tau(\chi^i)\in Q(\zeta_{p^{l_0+1}})$.*

Следствие 2. *Для любого $l_0 \in Z^+$ с точностью до эквивалентности существуют два примитивных характера Дирихле $\lambda_{2^{l_0+2}}, \lambda_{-1}\lambda_{2^{l_0+2}} \in X(2^{l_0+2})$, $X(2^{l_0+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^{l_0+2}})$ с ведущим модулем 2^{l_0+2}, $X(2^{l_0+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^{l_0+2}})$ порядка $|\lambda_{2^{l_0+2}}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^{l_0+2}}| = 2^{l_0}$ и существуют в точности два циклических поля $Q(\theta(\lambda_{2^{l_0+2}}), Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^{l_0+2}}) \in S\left(Q(\zeta_{2^{l_0+2}})\right)$ степени 2^{l_0} с ведущим дивизором 2^{l_0+2} и дискриминантом $D = 2^{(l_0+1)2^{l_0}-1}$, где $\theta(\lambda_{2^{l_0+2}}) = \zeta_{2^{l_0+2}} + \zeta_{2^{l_0+2}}^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{2^{l_0+2}}$, $\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^{l_0+2}}) = \zeta_{2^{l_0+2}} - \zeta_{2^{l_0+2}}^{-1} = 2i\sin\frac{2\pi}{2^{l_0+2}}$. При $l_0 = 1$ дискриминант поля $Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3})) = Q(i\sqrt{2})$ равен $D = -8$. Для минимальных многочленов $f_{2^{l_0}}(x)$ и $h_{2^{l_0}}(x)$ чисел $\theta(\lambda_{2^{l_0+2}}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^{l_0+2}}) \in Q(\zeta_{2^{l_0+2}})$ справедливы рекуррентные формулы: $f_{2^{l_0}}(x) = f_{2^{l_0-1}}(x^2-2)$, $h_{2^{l_0}}(x) = h_{2^{l_0-1}}(x^2+2)$, где $f_{2^3}(x) = x^2-2$, $h_{2^3}(x) = x^2+2$.*

Следствие 3. *Если простое число p не делит D, то число $N_{p^l}(D)$ всех циклических полей степени p^l, имеющих один и тот же заданный дискриминант $D = \prod\limits_{i=1}^{s} p_i^{p^l-p^{l-l_i}}$, равно $N_{p^l}(D) = \prod\limits_{i=1}^{s}\varphi(p^{l_i})/\varphi(p^l)$.*

Отметим, что теорема в случае $p^l = 2$ хорошо известна, а именно, примитивные квадратные характеры имеют ведущие модули вида $f = p_1 \ldots p_s$, $f = 4p_1 \ldots p_s$, $f = 8p_1 \ldots p_s$, $p_i \equiv 1(mod 2)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. По ведущим модулям $f = p_1 \ldots p_s$, $f = 4p_1 \ldots p_s$ существуют единственные примитивные квадратичные характеры $\chi = \chi_1 \ldots \chi_s \in X(p_1 \ldots p_s)$, $\chi_i \in X(p_i)$, $\chi = \lambda_{-1}\chi_1 \ldots \chi_s \in X(4p_1 \ldots p_s)$, где $\lambda_{-1} \in X(4) = (\lambda_{-1})$ — единственный примитивный квадратичный характер по модулю 4. Соответствующие квадратичные поля $Q\left(\sqrt{\chi(-1)p_1 \ldots p_s}\right)$, $Q\left(\sqrt{-\chi(-1)p_1 \ldots p_s}\right)$, где $\theta(\chi) = 1/2\left(\tau(\chi^0) + \tau(\chi^1)\right) = 1/2\left((-1)^s + \sqrt{\chi(-1)p_1 \ldots p_s}\right)$, $\theta(\chi_0\chi) = \sqrt{-\chi(-1)p_1 \ldots p_s}$. По модулю $f = 8p_1 \ldots p_s$ существует в точности два примитивных характера $\lambda_8\chi, \lambda_{-1}\lambda_8\chi \in X(8p_1 \ldots p_s)$, где $X(8) = (\lambda_{-1})(\lambda_8)$. Соответствующие квадратичные поля $Q\left(\sqrt{\chi(-1)2p_1 \ldots p_s}\right)$, $Q\left(\sqrt{-\chi(-1)2p_1 \ldots p_s}\right)$, где $\theta(\lambda_8\chi) = \sqrt{\chi(-1)2p_1 \ldots p_s}$, $\theta(\lambda_{-1}\lambda_8\chi) = \sqrt{-\chi(-1)2p_1 \ldots p_s}$. В теореме доказано, что гауссовы суммы являются эффективным инструментом для описания и изучения не только класса квадратичных полей, но и для описания и изучения класса всех абсолютно абелевых полей. Заметим также, что $\theta(\chi)$ в случае $f = p_1$ — простое число, является в точности $p_1 - 1/p^l$ членным гауссовым периодом поля $Q(\zeta_{p_1})$. Таким образом, теорема является обобщением приема Гаусса, описывающего подполя $Q(\zeta_{p_1})$.

Литература

1 Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 416 с.

2 Hasse H. Berichte über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper Teil I // Jahresbericht der DMV. — 1926. — Bd.35. — P.1–55.

3 Болен А. Конструктивное описание абсолютно циклических полей, ведущие девизоры которых — степени простых чисел // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. — 2005., №5. — С.21–26.

Literatura

1 Aierlend K., Rouzen M. Klassicheskoe vvedenie v sovremennuyu teoriyu chisel. — M.: Mir, 1987. — 416 s.

2 Hasse H. Berichte über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper Teil I // Jahresbericht der DMV. — 1926. — Bd.35. — P.1–55.

3 Bolen A. Konstruktivnoe opisanie absolyutno tciklicheskih polei, vedushie devizory kotoryh — stepeni prostyh chisel // Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya. — 2005., №5. — S.21–26.

Статья поступила в редакцию 30.01.13

Болен А.А. ПРИМИТИВТІ ДИРИХЛЕ СИПАТТАРЫНЫҢ КЛАССИФИКАЦИЯСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ.

Кез келген p жай саны үшін примар p^l ретті Дирихле сипаттарының жетекші модульдері беріледі. p^l ретті примитивті Дирихле сипаттарының классификациясы және оның p^l дәрежелі абсолют циклдік өрістердің

жиының конструктивті сипаттауға қолдануы келтіріледі. Берілген дискриминант бойынша p^l дәрежелі абсолют циклдік өрістердің санына есептеу жүргізіледі.

Bolen A.A. CLASSIFICATION OF THE PRIMITIVE CHARACTERS OF DIRICHLET AND THEIR APPLICATIONS

There is given the description of the Dirichlet leading characters of primary order p^l. There is done the classification of the primitive Dirichlet characters of the order p^l and the applications to the constructive description of set of all absolute abelian fields of p^l degree. There is made the calculation of the absolute cyclic fields to p^l degree with the given discriminant.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 517.958

S.N. Kharin

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: staskharin@yahoo.com

THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE TWO-PHASE STEFAN PROBLEM WITH BOUNDARY FLUX CONDITION

Integral error functions (Hartree functions) are used for the solving of the boundary value problems for the heat equation. Analytical solutions of some classical problems in domains with fixed boundary are obtained in a simple form, while for the problems in domains with moving boundary approximate solutions are found, and the error of approximation is estimated with the help of maximum principle. The most important result of this paper is the analytical solution of the two-phase Stefan problem with boundary flux condition in the form of series of Hartree functions. The recurrent expressions for the coefficients of these series are presented and the convergence of the series is proved.
Keywords: *integral error functions, Stefan problem, analytical solution.*

1. Introduction. Properties of Hartree functions.

Problems for the heat equation in domains with moving boundaries including Stefan problem, are very important for many applications, such as melting and welding, freezing and cooling processes, displacement of oil by water and other phenomena. The general method for the solution of these problems is based on the reduction of a boundary value problem to the integral equations. This method enables to prove theorems of existence and uniqueness of the solution, however it is not effective for the calculation of the

Keywords: *integral error functions, Stefan problem, analytical solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 80 A 22

real temperature fields. Therefore the elaboration of analytical and numerical methods of solution is very actual. This paper is an attempt to find the analytical solution of the Stefan problem using special functions, namely the integral error functions.

The integral error functions determined by recurrent formulas

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} v dv, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$i^0 \operatorname{erfc} x \equiv \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv, \tag{1.1}$$

were introduced by Hartree [1] in 1935.

One can obtain from (1.1)

$$i^n \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \int_x^\infty (v - x)^n \exp(-v^2) dv. \tag{1.2}$$

They satisfy the differential equation

$$\frac{d^2}{dx^2} i^n \operatorname{erfc} x + 2x \frac{d}{dx} i^n \operatorname{erfc} x - 2n\, i^n \operatorname{erfc} x = 0 \tag{1.3}$$

and recurrent formulas

$$2n\, i^n \operatorname{erfc} x = i^{n-2} \operatorname{erfc} x - 2x\, i^{n-1} \operatorname{erfc} x. \tag{1.4}$$

Integral error functions (sometimes they are called also Hartree functions) are very useful for investigation of heat transfer, diffusion and other phenomena, which can be described by the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

in a region $D(t > 0, 0 < x < \alpha(t))$ with free boundary $x = \alpha(t)$, since the functions

$$u_n(\pm x, t) = t^{\frac{n}{2}}\, i^n \operatorname{erfc} \left(\frac{\pm x}{2a\sqrt{t}} \right)$$

satisfy the equation (1.5) as well as their linear combination or even series

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(A_n u_n(x,t)+B_n u_n(-x,t)\big)$$

for any constantsA_n, B_n. We can choose these constants to satisfy the boundary conditions at $x=0$ and $x=\alpha(t)$, if given boundary functions can be expanded into Taylor series with powers t or $\sqrt{t}$ [2], [3].

Hartree functions were generalized later for non-integer and for negative index n with applications to certain problems [4].

Let us derive new properties of Hartree functions, which are not considered in above-mentioned papers.

1. If n is an integer, then

$$i^n\operatorname{erfc}(-x)+(-1)^n\, i^n\operatorname{erfc} x=\frac{1}{2^{n-1}n!i^n}H_n(ix)=\frac{1}{2^{n-1}n!}e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2}\right)$$

with $i=\sqrt{-1}$ and Hermite polynomials $H_n(x)$ in the right hand side. Indeed, using formula (1.2) one can write

$$\begin{aligned}&i^n\operatorname{erfc}(-x)+(-1)^n\, i^n\operatorname{erfc} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!}\int_{-x}^{\infty}(v+x)^n\exp(-v^2)dv+\\&+\frac{(-1)^n2}{n!\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty}(v-x)^n\exp(-v^2)dv=\frac{2}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(v+x)^n\exp(-v^2)dv=\\&=\frac{1}{2^{n-1}n!i^n}H_n(ix).\end{aligned}$$

Using formula for Hermite polynomials one can derive

$$i^n\operatorname{erfc}(-x)+(-1)^n\, i^n\operatorname{erfc} x=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{n-2m}}{2^{2m-1}m!(n-2m)!}\ . \tag{1.6}$$

If $n=2k$, then

$$i^{2k}\operatorname{erfc} x+\, i^{2k}\operatorname{erfc}(-x)=\sum_{m=0}^{k}\frac{x^{2(k-m)}}{2^{2m-1}m!(2k-2m)!}, \tag{1.6$_1$}$$

i.e.

$$\operatorname{erfc} x + \operatorname{erfc}(-x) = 2,$$

$$i^2\operatorname{erfc} x + i^2\operatorname{erfc}(-x) = \frac{1}{2} + x^2,$$

$$i^4\operatorname{erfc} x + i^4\operatorname{erfc}(-x) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^4,$$

$$i^{2k}\operatorname{erfc} x + i^{2k}\operatorname{erfc} x =$$

$$= \frac{1}{2^{2k-1}k!} + \frac{x^2}{2^{2k-3}(k-1)!\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^{2k-5}(k-2)!\cdot 4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{2^{-1}(2k)!}\ .$$

If $n = 2k+1$, then

$$i^{2k+1}\operatorname{erfc}(-x) - i^{2k+1}\operatorname{erfc} x = \sum_{m=0}^{k} \frac{x^{2(k-m)+1}}{2^{2m-1}m!(2k-2m+1)!}\ , \tag{1.6$_2$}$$

i.e.

$$i\operatorname{erfc}(-x) - i\operatorname{erfc} x = 2x,$$

$$i^3\operatorname{erfc}(-x) - i^3\operatorname{erfc} x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3,$$

$$i^5\operatorname{erfc}(-x) - i^5\operatorname{erfc} x = \frac{1}{2^3\cdot 2!}x + \frac{1}{2\cdot 3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5,$$

$$i^{2k+1}\operatorname{erfc}(-x) - i^{2k+1}\operatorname{erfc} x = \frac{x}{2^{2k-1}k!} + \frac{x^3}{2^{2k-3}(k-1)!\cdot 3!} +$$
$$+ \frac{x^5}{2^{2k-3}(k-2)!\cdot 5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2^{-1}(2k+1)!}\ .$$

2. The proof of the formula

$$i^n\operatorname{erfc}(-x) - (-1)^n\, i^n\operatorname{erfc} x = \frac{1}{2^{n-1}n!}e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2}\operatorname{erf} x\right), \tag{1.7}$$

where

$$\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-v^2)dv,$$

can be obtained by mathematical induction method with the help of the recurrent formula (1.3).

3. Differentiating the right hand side of formula (1.7) we obtain

$$i^n\mathrm{erfc}\,(-x) - (-1)^n\, i^n\mathrm{erfc}\, x = P_n(x)\mathrm{erf}\, x - Q_n(x)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2), \tag{1.8}$$

where polynomials $P_n(x)$ and $Q_n(x)$ are defined by formulas

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{n-2m}}{2^{2m-1}m!(n-2m)!}, \qquad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}H_{n-k-1}(x)}{2^{n-k}(n-k)!}P_k(x).$$

4. From (1.7), (1.8) we can derive the explicit expressions for Hartree functions of an integer index n

$$i^n\mathrm{erfc}\, x = \frac{(-1)^n}{2}\left[P_n(x)\mathrm{erfc}\, x + Q_n(x)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)\right], \tag{1.9}$$

$$i^n\mathrm{erfc}\,(-x) = \frac{1}{2}\left[P_n(x)\mathrm{erfc}(-x) - Q_n(x)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)\right]. \tag{1.10}$$

5. By L'Hopital rule and representation (1.1) it is not difficult to show that

$$\lim_{x\to\infty}\frac{i^n\mathrm{erfc}\,(-x)}{x^n} = \frac{2}{n!}\ . \tag{1.11}$$

2. Applications

2.1 Heat equation. Half-infinite domain.

Consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = f(t), \tag{2.3}$$

$$u(\infty,t) = 0, \tag{2.4}$$

$$\varphi(0) = f(0), \qquad \varphi(\infty) = 0, \tag{2.5}$$

where $\varphi(x)$ and $f(t)$ are analytical functions. It's solution can be represented in the form

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a\sqrt{t})^n \left(A_n\, i^n \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + B_n\, i^n \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right). \tag{2.6}$$

This function satisfies the heat equation (2.1), as it was mentioned above for any constants A_n and B_n. To satisfy the initial and boundary conditions (2.2) and (2.3) we expand the functions $\varphi(x)$ and $f(t)$ in Maclaurin series:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n, \tag{2.7}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n. \tag{2.8}$$

One can derive from the formula (1.11)

$$\lim_{t\to 0} (2a\sqrt{t})^n\, i^n \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{n!} x^n, \tag{2.9}$$

while

$$\lim_{t\to 0} (2a\sqrt{t})^n\, i^n \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Then initial condition (2.2) gives

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} B_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

thus

$$B_n = \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

Using the boundary condition (2.3) we get

$$u(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (A_n + B_n) \cdot i^n \mathrm{erfc}\, 0 \cdot (2a\sqrt{t})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, t^n. \tag{2.12}$$

Taking into account that

$$i^n \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{n!\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{n+1}{2}), \quad i^{2m} \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{2^{2m} m!},$$

$$i^{2m+1} \operatorname{erfc} 0 = \frac{m!}{(2m+1)!\sqrt{\pi}} \tag{2.13}$$

and comparing coefficients in (2.12) we obtain

$$A_{2m+1} + B_{2m+1} = 0, \qquad A_{2m} + B_{2m} = 2^{2m-1} f^{(m)}(0), \tag{2.14}$$

so

$$A_{2m+1} = -\frac{1}{2}\varphi^{(2m+1)}(0),$$

$$A_{2m} = 2^{2m-1} f^{(m)}(0) - \frac{1}{2}\varphi^{(2m)}(0), \quad m = 0, 1, 2, \dots. \tag{2.15}$$

The expressions (2.6), (2.11), (2.15) give the solution of the problem (2.1) – (2.5).

It has to be noted that the radius of convergence of the series (2.6) is equal to the minimum of the radius of convergence of the series (2.7) and (2.8).

2.2 Heat contact problem

Heat transfer between two half-infinite domains, which have ideal contact, is described by the equations

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \tag{2.16}$$

with the initial conditions

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \tag{2.17}$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \tag{2.18}$$

conditions of conjugations of temperature and heat flux

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \tag{2.19}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}, \tag{2.20}$$

and conditions at infinity

$$u_1(-\infty, t) = u_2(\infty, t) = 0. \tag{2.21}$$

Suggesting that initial functions can be expanded in Maclaurin series

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_2^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{2.22}$$

we represent the solution in the form

$$u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_1\sqrt{t})^n \left(A_n\, i^n\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) + B_n\, i^n\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right)\right), \tag{2.23}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_2\sqrt{t})^n \left(C_n\, i^n\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) + D_n\, i^n\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right). \tag{2.24}$$

Coefficients A_n and D_n can be found similarly like in the previous case (see formula (2.11)) from the initial conditions (2.17), (2.18) with the help of the expansions (2.22)

$$A_n = \frac{1}{2}\varphi_1^{(n)}(0), \qquad D_n = \frac{1}{2}\varphi_2^{(n)}(0), \tag{2.25}$$

while the conditions (2.19), (2.20) supply the rest part of the equations

$$a_1^n(A_n + B_n) = a_2^n(C_n + D_n), \tag{2.26}$$

$$\lambda_1 a_1^{n-1}(A_n - B_n) = \lambda_2 a_2^{n-1}(C_n - D_n), \tag{2.27}$$

that give values for B_n and C_n

$$C_n = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_n + D_n, \qquad B_n = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n (C_n + D_n) - A_n. \tag{2.28}$$

2.3 A domain with moving boundary

Let the heat equation
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.29}$$
be given on the interval with the moving boundary $D:\{0<x<t,\ t>0\}$, whith the boundary conditions
$$u(0,t)=e^t, \tag{2.30}$$
$$u(t,t)=1 \tag{2.31}$$
and fitting condition
$$u(0,0)=1. \tag{2.32}$$
The exact solution of this test problem is
$$u(x,t)=e^{t-x}. \tag{2.33}$$

Let us find the approximate solution of this problem $u_a(x,t)$ using Hartree functions:
$$u_a(x,t)=\sum_{k=0}^{n}t^{k/2}\left(A_k\,i^k\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-B_k\,i^k\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right). \tag{2.34}$$

This function satisfies the heat equation (2.29). Satisfying the boundary conditions (2.30) and (2.31) we get
$$e^t=\sum_{k=1}^{n}t^{k/2}\left(A_k+B_k\right)\,i^k\mathrm{erfc}\,0,$$
$$1=\sum_{k=1}^{n}t^{k/2}\left(A_k\,i^k\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)+B_k\,i^k\mathrm{erfc}\left(-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right). \tag{2.35}$$
After substitution
$$A_k+B_k=C_k \tag{2.36}$$
we obtain the system of the equations
$$\sum_{k=0}^{n}C_k\,i^k\mathrm{erfc}\,0\cdot t^{k/2}=e^t, \tag{2.37}$$

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \left(i^k \mathrm{erfc}\left(-\frac{\sqrt{t}}{2}\right) - i^k \mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right) \cdot t^{k/2} = 1 - \sum_{k=0}^{n} C_k \, i^k \mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right) \cdot t^{k/2}. \tag{2.38}$$

If we take $n = 5$ and satisfy the equations (2.37) and (2.38) at the points $t = t_i = \frac{2i}{10}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, we find the values for B_k and C_k:

$$C_0 = 1,\ C_1 = 0.276,\ C_2 = -0.232,\ C_3 = 28.952, C_4 = -87.416,$$
$$C_5 = 173.348,\ B_0 = 0.401,\ B_1 = -0.279,\ B_2 = -1.333,$$
$$B_3 = 6.033,\ B_4 = -11.389,\ B_5 = 8.884.$$

Fig.1 depicts the graphs of approximate solution $\nu(t) = \sum_{k=0}^{5} C_k \, i^k \mathrm{erfc}\, 0 \cdot t^{k/2}$ and exact solution at the boundary $x = 1$, which are almost identical.

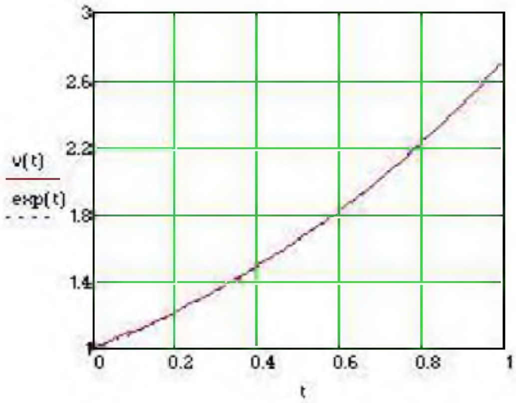

Figure 1

The greatest error of approximation is in the neighborhood of zero. The graphs for this neighborhood are presented in Fig.2. One can see that the error of approximation is less than 1%. Similar situation can be observed at the second boundary $x = t$. The graphs of the functions $g(t) = 1$ and $W(t) = \sum_{k=1}^{5} t^{k/2} \left(A_k \, i^k \mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right) + B_k \, i^k \mathrm{erfc}\left(-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right)$ are presented in Fig.3 and Fig.4.

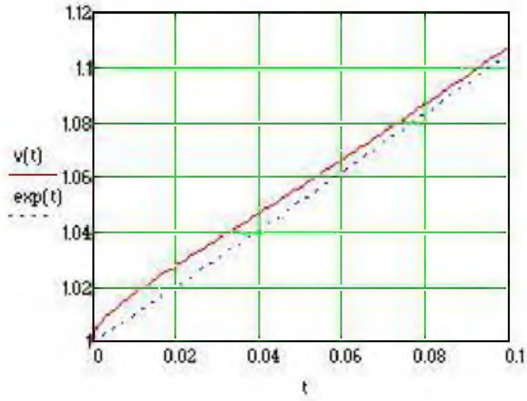

Figure 2

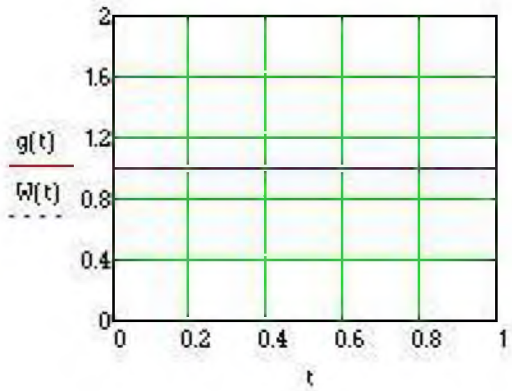

Figure 3

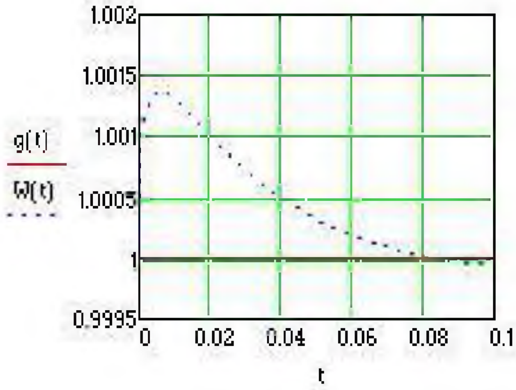

Figure 4

Again the greatest error of approximation is less than 0.15 %.

Thus if we replace the original functions e^t and 1 by approximate functions, then according to the maximum principle for the heat equation the error of approximation of the solution in the whole domain is not greater than the error on the boundaries.

Now the main problem for the heat equation given in a moving domain $D: 0 < t < 1,\ 0 < x < \alpha(t)$ is to investigate a possibility of approximation of any function $f(t)$ by the linear combination of the functions

$$1,\ \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}\right),\ t^{1/2} i\mathrm{erfc}\left(\pm\frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}\right),\ t\cdot i^2\mathrm{erfc}\left(\pm\frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}\right),\dots,$$

$$t^{n/2}\, i^n\mathrm{erfc}\left(\pm\frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}\right)$$

and evaluate the error of approximation.

It seems that such approximation is correct. For example, approximation of $f(t) = \sin t$ by the function $q(t) = \sum_{k=0}^{5} C_k\, i^k\mathrm{erfc}\, 0 \cdot t^{k/2}$, $C_0 = 0$, $C_1 = 5.995\cdot 10^{-3}$, $C_2 = 3.994$, $C_3 = -0.89$, $C_4 = 9.168$, $C_5 = -38.615$ is presented in Fig.5 and Fig.6.

One can see almost full identity.

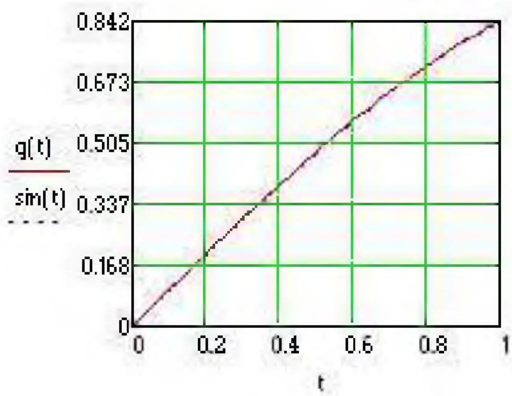

Figure 5

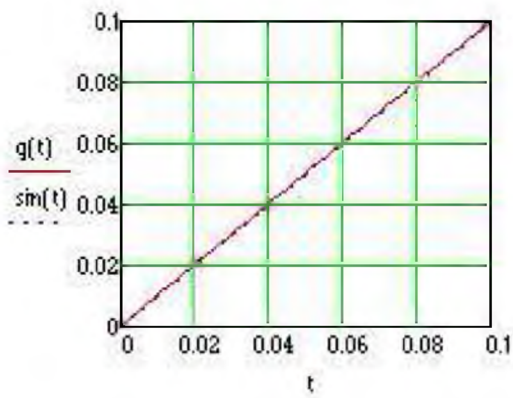

Figure 6

3. Two-phase Stefan problem with boundary flux condition

3.1 Mathematical model

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \alpha(t), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \alpha(t) < x < \infty, \quad (3.1)$$

with the boundary and initial conditions:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = f(t), \qquad (3.2)$$

$$u_2(x,0) = \varphi(x), \qquad (3.3)$$

the conditions of conjugations of temperature and heat flux on a free boundary

$$u_1(\alpha(t),t) = u_2(\alpha(t),t) = U_m\,, \qquad (3.4)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(\alpha(t),t)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2(\alpha(t),t)}{\partial x} + \rho L \frac{d\alpha}{dt}\,, \qquad (3.5)$$

$$\alpha(0) = 0$$

and zero conditions at infinity

$$u_2(\infty,t) = 0. \qquad (3.6)$$

3.2 Method of solution

Suggesting that the initial and boundary functions can be expanded in Maclaurin series

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \qquad\qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (3.7)$$

we represent the solution in the form

$$u_1(x,t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (2a_1\sqrt{t})^{2n+1} \Big(i^{2n+1}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - i^{2n+1}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right)\Big) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(2a_1\sqrt{t})^n \Big(i^n\mathrm{erfc}\Big(-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\Big) + i^n\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\Big)\Big), \tag{3.8}$$

$$u_2(x,t) =$$
$$= U_m + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(2a_2\sqrt{t})^n \Big(i^n\mathrm{erfc}\Big(-\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\Big) + (-1)^n\, i^n\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\Big)\Big) +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} B_n(2a_2\sqrt{t})^n\, i^n\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\Big) \tag{3.9}$$

Coefficients C_n and D_n can be found similarly like in the previous case (see formulas (2.9) – (2.11)) from the boundary and initial conditions (3.2), (3.3) using expansions (3.7):

$$C_n = -\frac{1}{2\lambda_1 a_1^n} f^{(n)}(0), \qquad D_n = \frac{1}{2}\varphi^{(n)}(0), \qquad \varphi(0) = U_m. \tag{3.10}$$

Thus, the conditions (3.2), (3.3) are satisfied.

Now we should find A_n and B_n to satisfy the remaining conditions on the free boundary $\alpha(t)$, which we try to represent in the form [1]

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n/2}. \tag{3.11}$$

If we substitute (3.11) into (3.4), (3.5) and compare powers we can find that α_0 should be negative which is impossible from physical point of view, because a free boundary cannot move in negative direction at $t > 0$. It occurs only for arbitrary boundary and initial conditions. If the condition of concordance for initial and boundary functions is fulfilled

$$f(0) = -\lambda\varphi'(0),$$

then we can derive from (3.4), (3.5) that $\alpha_0 = 0$.

Thus $\alpha(t)$ can be written in the form

$$\alpha(t) = 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1}\tau^{n+1}, \tag{3.12}$$

where $\tau=\sqrt{t}$.

Now we rewrite the conditions (3.4), (3.5) in the terms of τ and compare the equal powers in the left and the right hand sides of equations using differentiation and putting then $\tau=0$. We get

$$u_1(\alpha(\tau),\tau)|_{\tau=0}=u_2(\alpha(\tau),\tau)|_{\tau=0}=U_m,$$

$$\left.\frac{\partial^m u_1(\alpha(\tau),\tau)}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial^m u_2(\alpha(\tau),\tau)}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=0,\quad m=0,1,2,\ldots,\tag{3.13}$$

$$-\lambda_1\left.\frac{\partial^m u_{1x}(\alpha(\tau),\tau)}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=-\lambda_2\left.\frac{\partial^m u_{2x}(\alpha(\tau),\tau)}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=$$
$$=a_1\rho L\left(\frac{m}{2}+1\right)m!\,\alpha_m,\ m=0,1,2,\ldots.$$

In particular at $m=0$

$$A_0=U_m,\qquad B_0=0,\qquad \alpha_1=-\frac{a_1 f(0)}{\lambda_1}.\tag{3.14}$$

3.3 Faa di Bruno formula

The main problem is to find the remaining unknown coefficients. We have

$$\left.\frac{\partial^m\left[(2\tau)^{2n}\left(i^{2n}\mathrm{erfc}\,(-\xi(\tau))+i^{2n}\mathrm{erfc}\,(\xi(\tau))\right]\right.}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=\sum_{l=0}^{m}2^{2n}\binom{m}{l}\times$$
$$\times\frac{(2n)!}{(2n-m+l)!}\tau^{2n-m+l}\left.\frac{\partial^m\left[i^{2n}\mathrm{erfc}\,(-\xi(\tau))+i^{2n}\mathrm{erfc}\,(\xi(\tau))\right]}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0}=$$
$$=2^{2n}\frac{m!}{(m-2n)!}\left.\frac{\partial^{m-2n}\left[i^{2n}\mathrm{erfc}\,(-\xi(\tau))+i^{2n}\mathrm{erfc}\,(\xi(\tau)\right]}{\partial\tau^m}\right|_{\tau=0},\tag{3.15}$$

$$\xi(\tau)=\frac{\omega}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p+1}\tau^{p+1},\quad \omega=a_1/a_2,\quad m=0,1,2,\ldots.$$

For this purpose we use the Faa di Bruno formula (Arbogast formula) for a derivative of a composite function. If $g = g(x)$ and $x = f(t)$, then

$$\frac{d^m}{dt^m} g[f(t)] =$$

$$= \sum_{b_i} \frac{m!}{b_1! b_2! \ldots b_m!} g^{(k)} [f(t)] \cdot \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2} \ldots \left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}. \quad (3.16)$$

Here $\sum\limits_{b_i}$ means the sum for every value of $b_i = 0, 1, 2, \ldots$, such that

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_m = k, \quad b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m.$$

If

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n + \cdots,$$

then

$$\left.\frac{d^m}{dt^m} g(f(t))\right|_{t=0} = \sum_{b_i} g^{(k)}(\alpha_0) \frac{m! \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \cdots \alpha_m^{b_m}}{b_1! b_2! \cdots b_m!} .$$

Example. Let

$$g(x) = i^n \operatorname{erfc} x, \quad x = \alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \cdots + \alpha_n \tau^n + \cdots.$$

$$\left.\frac{d^m}{d\tau^m}\, i^n \operatorname{erfc}\, (\alpha(\tau))\right|_{\tau=0} = m! \sum_{b_i} (-1)^k\, i^{n-k} \operatorname{erfc}\,(\alpha_0) \frac{\alpha_1^{b_1}}{b_1!} \cdot \frac{\alpha_2^{b_2}}{b_2!} \cdots \frac{\alpha_m^{b_m}}{b_m!} .$$

3.4 Series on the free boundary

Using Faa di Bruno formula we get

$$\left.\frac{\partial^m \left[\, i^{2n} \operatorname{erfc}\, (-\xi(\tau)) +\, i^{2n} \operatorname{erfc}\, (\xi(\tau))\right]}{\partial \tau^m}\right|_{\tau=0} =$$

$$= \sum_{p=0}^{[m/2]} \frac{\omega^{2p}}{2^{2n}(n-p)!} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \ldots \alpha_m^{\beta_m}$$

under the conditions

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 2p, \qquad \sum_{k=1}^{m} k\beta_k = m.$$

Substituting this formula into (3.15) we obtain

$$\left.\frac{\partial^m \left[(2\tau)^{2n} \left[i^{2n}\mathrm{erfc}\ (-\xi(\tau)) + i^{2n}\mathrm{erfc}\ (\xi(\tau)\right]\right]}{\partial \tau^m}\right|_{\tau=0} = m! A_{2n}^m(\omega),$$

where

$$A_{2n}^m(\omega) = \sum_{p=0}^{[m/2-n]} \frac{\omega^{2p}}{(n-p)!} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_m!} \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_m^{\beta_m} \tag{3.17}$$

under the conditions

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 2p, \qquad \sum_{k=1}^{m} k\beta_k = m-2n.$$

Similarly we can find

$$\left.\frac{\partial^m \left[(2\tau)^{2n} \left[i^{2n+1}\mathrm{erfc}\ (-\xi(\tau)) + i^{2n+1}\mathrm{erfc}\ (\xi(\tau))\right]\right]}{\partial \tau^m}\right|_{\tau=0} = m! A_{2n+1}^m(\omega),$$

where

$$A_{2n+1}^m(\omega) = \sum_{p=0}^{[m/2-n-1]} \frac{\omega^{2p+1}}{(n-p)!} \sum_{\gamma_i} \frac{m!}{\gamma_1!\gamma_2!\cdots\gamma_m!} \alpha_1^{\gamma_1}\alpha_2^{\gamma_2}\cdots\alpha_m^{\gamma_m} \tag{3.18}$$

under the conditions

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 2p+1, \qquad \sum_{k=1}^{m} k\beta_k = m-2n-1,$$

and also

$$\left.\frac{\partial^m \left[(2\tau)^{2n}\, i^{n}\mathrm{erfc}\ (\xi(\tau))\right]}{\partial \tau^m}\right|_{\tau=0} = m! B_n^m(\omega),$$

where

$$B_{2n}^m(\omega) = \frac{2^n}{(m-n)!} \left. \frac{\partial^{m-n} \left[i^n \mathrm{erfc}\ (\xi(\tau)) \right]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{m-n} \frac{(-\omega)^p}{\Gamma((n-r)/2-1)} \sum\limits_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2!...\beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \ldots \alpha_m^{\beta_m} & \text{if} \quad m \le 2n, \\ \sum\limits_{r=0}^{m-n} \frac{(-\omega)^p}{\Gamma((n-r)/2-1)} \sum\limits_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2!...\beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \ldots \alpha_m^{\beta_m} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{p=0}^{m-2n} \frac{(-1)^p(-\omega)^{n+p+1}(2p)!}{2^{2p}p!} \sum\limits_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1!\beta_2!...\beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \ldots \alpha_m^{\beta_m} & \text{if} \quad m > 2n. \end{cases} \tag{3.19}$$

Therefore the equations (3.4)–(3.5) can be written in the form

$$\begin{cases} -\sum\limits_{n=0}^{[m/2]} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n+1}^m(1) + \sum\limits_{n=2}^{m} A_n A_n^m(1) + \sum\limits_{n=0}^{[m/2]} A_{2n+1} B_{2n+1}^m(1) = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{m} a_2^{n/2} \varphi^{(n)}(0) A_n^m(\omega) + \sum\limits_{n=1}^{m} B_n B_n^m(\omega) = 0, \qquad A_1 = B_1 = 0, \\ -\sum\limits_{n=0}^{[m/2]} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n}^m(1) + \sum\limits_{n=2}^{m} A_n A_{n-1}^m(1) - \sum\limits_{n=1}^{[m/2]} A_{2n+1} B_{2n}^m(1) - \\ -\frac{\omega\lambda_2}{\lambda_1} \left[\sum\limits_{n=2}^{m} a_2^{n/2} \varphi^{(n)}(0) A_{n-1}^m(\omega) - \sum\limits_{n=2}^{m} B_n B_{n-1}^m(\omega) \right] = \frac{\rho L a_1^2}{\lambda_1} (\frac{m}{2} + 1) \alpha_{m+1} \end{cases} \tag{3.20}$$

and the coefficientsA_n, B_n, α_n can be found from the recurrent system of algebraic equations (3.20).

3.5 Convergence of series

If we substitute the values

$$A_{2m}^{2m}(\omega) = 2^{2m}\, i^{2m} \mathrm{erfc}\, 0 = 1/m!, \quad A_{2m+1}^{2m+1}(\omega) = 0,$$

$$B_m^m(\omega) = 1/\Gamma(m/2+1), \quad A_{m+1}^m(\omega) = B_{m+1}^m(\omega) = 0$$

into (3.20) we obtain

$$A_{2m} = m! \sum_{n=0}^{m-1} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n-1}^{2m}(1) + \sum_{n=2}^{2m-1} A_n A_n^{2m}(1) + \sum_{n=1}^{m-1} A_{2n-1} B_{2n-1}^{2m}(1),$$

$$A_{2m+1} = \Gamma(m+1/2)\sum_{n=0}^{m-1} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n+1}^{2m+1}(1) + \sum_{n=2}^{2m} A_n A_n^{2m+1}(1) + \\ + \sum_{n=1}^{m-1} A_{2n+1} B_{2n+1}^{2m+1}(1),$$

$$B_m = -\Gamma(m+1/2)\sum_{n=0}^{m-1} a_2\, \varphi^{(n)}(0) A_{2n}^{m}(\omega) + \sum_{n=2}^{m-1} B_n B_n^{m}(\omega).$$

These recurrent formulas permit us to calculate all coefficients A_n, B_n for any n. The coefficients α_n can be found from the third equation in (3.20). Let $\alpha(t_0) = \alpha_0$ for any time $t = t_0$. Then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(2a_1\sqrt{t_0}\right)^n \left[i^n \mathrm{erfc}\left(-\frac{\alpha_0}{2a_1\sqrt{t_0}}\right) + i^n \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha_0}{2a_1\sqrt{t_0}}\right)\right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(2a_2\sqrt{t_0}\right)^n \, i^n \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha_0}{2a_2\sqrt{t_0}}\right)$$

should be converged because $u_1 = u_2 = U_m$ on the interface. Therefore there exist some constants C_1, C_2, independent of n, such that

$$|A_n| < C_1/\left(2a_1\sqrt{t_0}\right)^n \left[i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi_0) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi_0\right],$$

$$|B_n| < C_2/\left(2a_1\sqrt{t_0}\right)^n \, i^n \mathrm{erfc}\,(\xi_0), \qquad \xi_0 = \frac{\alpha_0}{2a_1\sqrt{t_0}}.$$

The function $i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi$ is a monotonically increasing positive function, while $i^n \mathrm{erfc}\,\xi$ monotonically decreases, therefore

$$i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi < i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi_0) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi_0, \quad 0 < \xi < \xi_0,$$

$$i^n \mathrm{erfc}\,\xi < i^n \mathrm{erfc}\,\xi_0, \quad \xi_0 < \xi < \infty.$$

Thus,

$$\left| A_n \left(2a_1\sqrt{t_0}\right)^n \left[i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi\right]\right| <$$

$$< C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n/2} \frac{i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi}{i^n \mathrm{erfc}\,(-\xi_0) + i^n \mathrm{erfc}\,\xi_0} < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n/2},$$

$$\left|B_n\left(2a_2\sqrt{t}\right)^n\ i^n\mathrm{erfc}\,\xi\right| < C_2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{n/2}.$$

These series are geometric ones and the series for $u_1(x,t)$ converge for all $x<\alpha_0$, while the series for $u_2(x,t)$ converge for all $x>\alpha_0$ and $t<t_0$.

The series for $\alpha(t)$ can be estimated similarly. From the third equation of (3.20) we can find that

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(2a_1\sqrt{t}\right)^{n-1}\left[\,i^n\mathrm{erfc}\,(-\xi)-\,i^n\mathrm{erfc}\,\xi\right],\quad \sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(2a_2\sqrt{t}\right)^{n-1}\ i^n\mathrm{erfc}\,\xi$$

converge in their domains. This means that $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial x}$ are bounded, thus, the series for $\alpha(t)$ converge for all $t<t_0$.

Литература

1 Hartree D.R. Some properties and applications of the repeated integrals of the error function // Mem. Manchester Lit. and Phil. Soc. — 1935. — V.80. — P. 85–102.

2 Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н., Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. — Алма-Ата: Наука, 1977, 236 с.

3 Шпади Ю.Р. Функции Хартри и их свойства // Математический журнал. — 2007. — Т.1, № 1(10). — С. 1–8.

4 Харин С.Н. Об одном обобщении функции ошибок и ее приложении в задачах теплопроводности // В Сб. Дифференциальные уравнения и их приложения. — Алма-Ата: Наука. — 1982. — С. 51–59.

Literatura

1 Hartree D.R. Some properties and applications of the repeated integrals of the error function // Mem. Manchester Lit. and Phil. Soc. — 1935. — V.80. — P. 85–102.

2 Kim E.I., Omel'chenko V.T., Kharin S.N., Matematicheskie modeli teplovyh processov v elektricheskih kontaktah. — Alma-Ata: Nauka, 1977, 236s.

3 Shpadi Ju.R. Funktcii Hartri i ih svoistva // Matematicheskiy zhurnal. — 2007. — T.1, №1(10). — C. 1–8.

4 Kharin S.N. Ob odnom obobshhenii funktcii oshibok i ee prilozhenii v zadachah teploprovodnosti // V Sb. Differencial'nye uravneniya i ih prilozheniya. — Alma-Ata: Nauka. — 1982. — C. 51–59.

Поступила в редакцию 25.12.13

Харин С.Н. ШЕКАРАСЫНДА ЖЫЛУЛЫҚ АҒЫНЫ БАР ЕКIФАЗАЛЫҚ СТЕФАН ЕСЕБIНIҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШIМI

Жылуөткiзгiштiк теңдеуiнiң шеттiк есептерiн шешу үшiн қателiктердiң интегралдық функциялары (Хартри функциялары) пайдаланылды. Бекiтiлген шекаралары бар облыстардағы кейбiр классикалық есептердiң аналитикалық шешiмдерi қарапайым түрде алынды, ал жылжымалы шекаралары бар облыстардағы есептер үшiн максимум қағидасының көмегiмен жуықтау қателiгiнiң бағалауы бар жуықтау шешiмдерi табылған. Бұл жұмыстың ең маңызды нәтижесi берiлген жылулық ағыны бар екiфазалық Стефан есебiнiң Хартри функциялары бойынша қатарлар түрiнде табылған аналитикалық шешiмi болып саналады. Осы қатарлардың жинақтылығы дәлелденiп, коэффициенттерiн есептеуге арналған рекуррентті формулалар алынды.

Харин С.Н. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ НА ГРАНИЦЕ

Интегральные функции ошибок (функции Хартри) использованы для решения краевых задач для уравнения теплопроводности. Аналитические решения некоторых классических задач в областях с фиксированными границами получены в простой форме, а для задач в областях с движущимися границами найдены приближенные решения с оценкой погрешности приближения с помощью принципа максимума. Наиболее важным результатом этой работы является аналитическое решение двухфазной задачи Стефана с заданным тепловым потоком, которое найдено в виде рядов по функциям Хартри. Получены рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов этих рядов, сходимость которых доказана.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 517, 519.6, 519.8

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ: ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИРЕШЕНИЯ

Б.Г. Муканова, М.Н. Кулбай

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: mbsha01@gmail.com
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71/13, e-mail: makulbay@gmail.com

Рассматривается обратная задача продолжения для модели стационарной диффузии в цилиндрическом слое. Коэффициент диффузии предполагается кусочно- постоянным. Требуется восстановить стационарное поле температуры на внутренней границе цилиндра по данным Коши на внешней оболочке цилиндра. Задача решается методом квазирешения и регуляризации функционала невязки. Для системы необходимых условий минимума функционала невязки построены аналитические формулы для минимайзера. Формулы реализованы численно и проведены серии численных экспериментов.

Ключевые слова: *обратная задача, квазирешение, численное решение, цилиндрически слоистая среда, задача продолжения, необходимые условия минимума, метод Фурье.*

Введение

Для описания стационарной диффузии распределения потенциала электрического поля и других стационарных полей универсальной математической моделью является общее эллиптическое уравнение вида

Keywords: *inverse problem, quasisolution, numerical solution, cylindrically layered medium, necessary minimality conditions, Fourier method.*

2010 Mathematics Subject Classification: 49N45, 74S25, 65N32

$\mathrm{div}(\mathrm{a}(\tilde{\mathrm{r}})\mathrm{grad}(\mathrm{u})) = \mathrm{f}$. Мы будем использовать это уравнение в качестве математической модели стационарного распределения температуры. В технологических процессах актуальной является задача определения температуры на одной из границ цилиндрического слоя, если исследователю доступна для наблюдений другая граница. Математическая модель в случае постоянного коэффициента сводится к задаче Коши для уравнения Лапласа, которая является классическим примером некорректной задачи (пример Адамара). В прямоугольной области решение задачи может быть получено аналитически в виде ряда [1], но это решения является экспоненциально неустойчивым по отношению к возмущению начальных данных, поэтому это решение непригодно для численной реализации. Так как наша задача является некорректной, мы будем применять методы квазирешения [2, 3] и регуляризации [4], применяемые за последние десятилетия для решения обратных и некорректных задач. Стандартным приемом в численном решении обратных задач является метод минимизации функционала невязки каким-либо градиентным методом, как это сделано, например, в работе [5]. Однако, аналитические методы имеют преимущество перед численными по точности и позволяют провести детальный анализ результатов в зависимости от параметров задачи. В работе [6] впервые получены аналитические формулы для регуляризованного решения начально-краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод основан на решении системы необходимых условий минимума функционала невязки. Решение этой системы построено аналитически и проведен детальный анализ результатов в зависимости от параметров регуляризации и данных задачи. В настоящей работе мы реализуем этот подход для решения обратной задачи для двумерной установившейся теплопроводности в цилиндрически-слоистой среде. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать однородные краевые условия, так как для линейных задач неоднородные условия могут быть сведены к однородным стандартным методом.

1. Постановка задачи

Для определенности, будем считать, что известна температура и поток тепла на внешней границе и требуется восстановить значение температуры на внутренней границе цилиндра. Заметим, что все наши дальнейшие рассуждения справедливы также, если данные заданы на внутренней границе и требуется найти решение на внешней границе.

Пусть R_1, R_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра высотой H, материал цилиндра неоднороден и коэффициент теплопроводности — кусочно-постоянный и зависит только от радиуса r. Требуется найти неизвестную температуру на внутренней границе цилиндра $r = R_1$, если возможно измерить поток тепла и температуру на внешней границе.

Дадим математическую формулировку задачи. Стационарное распределение температуры в цилиндрическом слое в случае цилиндрической симметрии описывается эллиптическим уравнением вида

$$Lu \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ra(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + a(r)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r,z) \in Q, \tag{1}$$

где

$$Q = \{(r,z) \mid r \in (R_1, R_2), \ \ z \in (0\ , H)\}.$$

Здесь $a(r)$ — коэффициент температуропроводности среды предполагается известным. Мы рассмотрим случай, когда функция $a(r)$ кусочно-постоянная с одним разрывом при $r = R_3$. В технологических процессах такое описание моделирует 2-х слойную тепловую изоляцию цилиндра. Будем рассматривать цилиндрически-симметричный случай.

Тогда с учетом представления коэффициента теплопроводности $a(r)$ в виде

$$a(r) = \begin{cases} a_1, & R_1 \le r < R_3 \\ a_2, & R_3 \le r < R_2 \end{cases},$$

уравнение (1) сводится к уравнению Лапласа внутри каждого слоя

$$Lu \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r,z) \in Q, \ \ r \ne R_3, \tag{2}$$

на стыке слоев требуется выполнение условия непрерывности тепловых потоков

$$u\Big|_{r=R_3-0} = u\Big|_{r=R_3+0}, \qquad a_1\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_3-0} = a_2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_3+0} \tag{3}$$

при начальных и краевых условиях

$$u(r,0) = 0, \ \ u(r,H) = 0, \tag{4}$$

$$u(R_2,z)=s(z),\ \ \frac{\partial u}{\partial r}(R_2,z)=p(z). \tag{5}$$

При этом функция на границе $r=R_1$

$$u(R_1,z)=q(z) \tag{6}$$

подлежит определению.

Итак, сформулируем постановку обратной задачи.

Требуется найти граничные значения $q(z)=u(R_1,z)$ *функции* $u(r,z)$, *удовлетворяющей уравнению* (2), *краевым условиям* (3), (4) *и данным Коши* (5).

2. Расчетные формулы

Будем решать задачу методом квазирешения [2], а именно, минимизируем функционал невязки вида

$$J(q)=\frac{1}{2}\int\limits_0^H (u_r(R_2,z;q)-p(z))^2dz+\frac{1}{2}\beta\int\limits_0^H q^2(z)dz\to\min_{q(z)}. \tag{7}$$

Следуя работе [6], можно показать, что необходимые условия минимума функционала (7) выражаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\Delta u=0,\ \ \Delta v=0,\ \ (r,z)\in Q,\ \ r\neq R_3,\\
&a_1\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_3-0}=a_2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_3+0},\quad a_1\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R_3-0}=a_2\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R_3+0},\\
&u(r,0)=0,\ \ u(r,H)=0,\quad v(r,0)=0,\ \ v(r,H)=0,\\
&v(R_1,z)=0,\quad a(R_2)v(R_2,z)-u_r(R_2,z)=-p(z),\\
&u(R_2,z)=s(z)\ ,\ \ \beta u(R_1,z)=a(R_1)v_r(R_1,z).
\end{aligned} \tag{8}$$

Можно показать, что функционал (7) является сильно выпуклым [5], [7]. Тогда необходимые условия минимума являются также и достаточными, поэтому решение системы (8) дает одновременно решение задачи минимизации функционала.

Построим решение задачи (8). Будем искать решение задачи (8) в виде рядов:

$$u(r,z)=\sum_{l=1}^{\infty}u_l(r)\sin\frac{\pi lz}{H},\quad v(r,z)=\sum_{l=1}^{\infty}v_l(r)\sin\frac{\pi lz}{H}. \tag{9}$$

Чтобы функции (9) являлись решениями задачи (8), они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{1}{r}(ru_l')'-\lambda^2u_l=0,\quad \frac{1}{r}(ru_l')'-\lambda^2v_l=0, \tag{10}$$

где $\lambda=\pi l/H$, и краевым условиям вида

$$\begin{aligned}&v_l(R_1)=0,\quad a(R_2)v_l(R_2)-u_l'(R_2)=-p_l,\\ &u_l(R_2)=s_l,\quad \beta u_l(R_1)-a(R_1)v_l'(R_1)=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Кроме этого, должны выполняться условия сопряжения на внутренних границах

$$a_1u_l'\Big|_{r=R_3-0}=a_2u_l'\Big|_{r=R_3+0},\quad a_1v_l'\Big|_{r=R_3-0}=a_2v_l'\Big|_{r=R_3+0} \tag{12}$$

Введем вспомогательные задачи Коши для функций $U(r)$, $W(r)$, $V(r)$ на отрезке (R_1,R_2) при каждом l :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(rU')'-\lambda^2U=0,\quad U(R_2)=0,\quad U'(R_2)=1,\\ &U(R_3+0)=U(R_3-0),\quad a_2U'(R_3+0)=a_1U'(R_3-0).\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(rW')'-\lambda^2W=0,\quad W(R_2)=1,\quad W'(R_2)=0,\\ &W(R_3+0)=W(R_3-0)\ ,\quad a_2W'(R_3+0)=a_1W'(R_3-0).\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(rV')'-\lambda^2V=0\ ,\quad V(R_3)=0\ ,\quad V'(R_3)=1,\\ &V(R_3+0)=V(R_3-0)\ ,\quad a_2V'(R_3+0)=a_1V'(R_3-0).\end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения для функций U, V, W после замены $x = \lambda r$ приводятся к уравнению Бесселя

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} - R = 0. \tag{16}$$

Поэтому мы можем выписать функцию $U(x)$ через общее решение уравнения (16) в виде

$$\begin{aligned} &U(x) = C_U I_0(x) + D_U K_0(x), \quad x \in (\lambda R_3, \lambda R_2), \\ &U(x) = C_U^{(1)} I_0(x) + D_U^{(1)} K_0(x), \quad x \in (\lambda R_1, \lambda R_3) \end{aligned} \tag{17}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &U'(R_2) = \lambda C_U I_0'(\lambda R_2) + \lambda D_U K_0'(\lambda R_2) = \lambda C_U I_1(\lambda R_2) - \lambda D_U K_1(\lambda R_2) = 1, \\ &U(R_2) = C_U I_0(\lambda R_2) + D_U K_0(\lambda R_2) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

и условиях сопряжения

$$\begin{aligned} &U'(R_3 + 0) = \lambda C_U I_1(\lambda R_3) - \lambda D_U K_1(\lambda R_3) = \\ &U'(R_3 - 0) = \lambda C_U^{(1)} I_1(\lambda R_3) - \lambda D_U^{(1)} K_1(\lambda R_3), \\ &U(R_3 + 0) = C_U I_0(\lambda R_3) + D_U K_0(\lambda R_3) = \\ &\frac{a_1}{a_2} U(R_3 - 0) = \frac{a_1}{a_2}\big(C_U^{(1)} I_0(\lambda R_3) + D_U^{(1)} K_0(\lambda R_3)\big). \end{aligned} \tag{19}$$

Условия (18), (19) определяют произвольные константы C_U, D_U, $C_U^{(1)}$, $D_U^{(1)}$ в формулах (17). Аналогично решаются задачи Коши для функций W, V, а произвольные постоянные для них определяются из линейных алгебраических систем

$$W'(R_2) = \lambda C_W I_1(\lambda R_2) - \lambda D_W K_1(\lambda R_2) = 0,$$

$$W(R_2) = C_W I_0(\lambda R_2) + D_W K_0(\lambda R_2) = 1,$$

$$W'(R_3 + 0) = \lambda C_W I_1(\lambda R_3) - \lambda D_W K_1(\lambda R_3) =$$

$$= W'(R_3 - 0) = \lambda C_W^{(1)} I_1(\lambda R_3) - \lambda D_W^{(1)} K_1(\lambda R_3),$$

$$W(R_3 + 0) = C_W I_0(\lambda R_3) + D_W K_0(\lambda R_3) = \frac{a_1}{a_2} W(R_3 - 0) =$$

$$= \frac{a_1}{a_2}\big(C_W^{(1)} I_0(\lambda R_3) + D_W^{(1)} K_0(\lambda R_3)\big)$$

и

$$V'(R_1) = \lambda C_V I_1(\lambda R_1) - \lambda D_V K_1(\lambda R_1) = 1,$$

$$V(R_1) = C_V I_0(\lambda R_1) + D_V K_0(\lambda R_1) = 0,$$

$$V'(R_3 - 0) = \lambda C_V I_1(\lambda R_3) - \lambda D_V K_1(\lambda R_3) = V'(R_3 + 0) =$$

$$= \lambda C_V^{(1)} I_1(\lambda R_3) - \lambda D_V^{(1)} K_1(\lambda R_3),$$

$$V(R_3 - 0) = C_V I_0(\lambda R_3) + D_V K_0(\lambda R_3) = \frac{a_2}{a_1} V(R_3 + 0) =$$

$$= \frac{a_2}{a_1}\big(C_V^{(1)} I_0(\lambda R_3) + D_V^{(1)} K_0(\lambda R_3)\big).$$

Будем искать коэффициенты рядов (9) для каждого l в виде линейных комбинаций полученных вспомогательных решений

$$u_l(r) = AU(r) + CW(r), \quad v_l(r) = BV(r). \tag{20}$$

По построению частичные суммы рядов (9) с коэффициентами в виде (20) удовлетворяют уравнениям (10) и условиям сопряжения (12).

Задаем некоторое число гармоник L и разложим в ряд Фурье данные Коши (4), (5), вычислим коэффициенты p_l, s_l:

$$p(z) = \sum_1^L p_l \sin\frac{\pi l z}{H}, \quad s(z) = \sum_1^L s_l \sin\frac{\pi l z}{H}. \tag{21}$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям в (8), подставим ряды (9) и суммы (21) в краевые условия и учтем данные Коши для каждой из функций U, V, W. Тогда получим систему уравнений, определяющую постоянные A, B, C для каждого значения l,

$$a_2 BV(R_2) - A = -p_l, \quad C = s_l, \quad \beta AU(R_3) + \beta CW(R_3) - a_2 B = 0.$$

Отсюда следует, что

$$C = s_1, \quad A = a_2 BV(R_2) + p_l,$$

$$B = \frac{-\beta U(R_3)p_l - \beta s_l W(R_3)}{a_2(\beta V(R_2)U(R_3) - 1)}, \tag{22}$$

$$A = \frac{-\beta s_l V(R_2)W(R_3) - p_l}{\beta V(R_2)U(R_3) - 1}.$$

После вычисления функций $u_l(r)$, $v_l(r)$ по формулам (20) мы можем вычислить частичную сумму ряда (9) при $r = R_1$ и приближенно найти искомую функцию $q(z)$

$$q(z) = u(R_1, z) = \sum_1^L u_l(R_1) \sin \frac{\pi l z}{H}\,. \tag{23}$$

3. Численный алгоритм и примеры

Для того, чтобы численно реализовать разработанный нами метод решения обратной задачи, мы должны последовательно выполнить следующие этапы расчета:

0 этап. Чтобы получить данные Коши для рассматриваемой задачи, мы должны сгенерировать синтетические данные – решение прямой задачи при некоторой заданной функции $q(z)$. Сначала мы должны решить прямую задачу с известной $q(z)$, получить значения $p(z)$, а затем решать обратную задачу так, как если бы нам была неизвестна функция $q(z)$, а функция $p(z)$ была известна. Прямая задача легко решается методом разделения переменных. Единственной ее особенностью является то, что на внутренней границе $r = R_3$ мы должны удовлетворить условиям сопряжения.

В случае разрывного коэффициента теплопроводности мы используем представление решения в каждом слое, аналогичное (17),

$$u_l(\lambda r) = CI_0(\lambda r) + DK_0(\lambda r), \quad r \in (R_3, R_2),$$

$$u_l(x) = C_1 I_0(\lambda r) + D_1 K_0(\lambda r), \quad r \in (R_1, R_3), \quad \lambda = \pi l/H, \quad l = 1, \ldots, L \tag{24}$$

и запишем условия на границе слоев при $r = R_3$

$$\begin{aligned} &CI_0(\lambda R_3) + DK_0(\lambda R_3) = C_1 I_0(\lambda R_3) + D_1 K_0(\lambda R_3), \\ &a_2[CI_1(\lambda R_3) - DK_1(\lambda R_3)] = a_1[C_1 I_1(\lambda R_3) - D_1 K_1(\lambda R_3)] \end{aligned} \tag{25}$$

и краевые условия при $r = R_1$ и $r = R_2$

$$\begin{aligned} &C_1 I_0(\lambda R_1) + D_1 K_0(\lambda R_1) = q_l, \\ &CI_0(\lambda R_2) + DK_0(\lambda R_2) = p_l. \end{aligned} \tag{26}$$

Система (25), (26) определяет константы для каждого слоя и позволяет построить решение в виде (24) для каждого слоя.

Далее мы последовательно выполняем следующие этапы расчета.

1 этап. Задаем некоторое число гармоник L по z. Разложим в ряд Фурье граничные измерения (5), вычислив коэффициенты сумм (21).

2 этап. Находим коэффициенты $C_U, D_U, C_U^{(1)}, D_U^{(1)}$ из системы (18), (19), аналогично вычисляем $C_W, D_W, C_W^{(1)}, D_W^{(1)}$, $C_V, D_V, C_V^{(1)}, D_V^{(1)}$.

3 этап. Вычисляем коэффициенты A, B, C по формулам (22) с учетом выражений (17) для вспомогательных функций U, V, W.

4 этап. Вычисляем значения $u_l(R_1)$ по формулам (20).

5 этап. Вычисляем сумму (23), которая и есть искомое приближенное решение задачи (8).

Приведем примеры численного расчета данной задачи.

На рисунке 1 мы показываем один из вариантов расчета поля температуры в вертикальном сечении цилиндра в координатах r, z для двухслойной среды с параметрами $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_3 = 2.5$, $a_1 = 10$, $a_2 = 1$, $L = 20$.

Приведем пример восстановления функции на неизвестной границе для двухслойной среды. На рисунке 2 мы приводим вариант, когда слой имел разрыв при $r = 2.5$ с коэффициентом диффузии, равным 10 во внутреннем слое и 1 — во внешнем. Относительная ошибка при этом составила всего лишь 2.4×10^{-5}, поэтому линии визуально не отличимы.

На рисунке 3 мы показываем менее благоприятный вариант расчета при тех же параметрах, что и на рисунке 2.

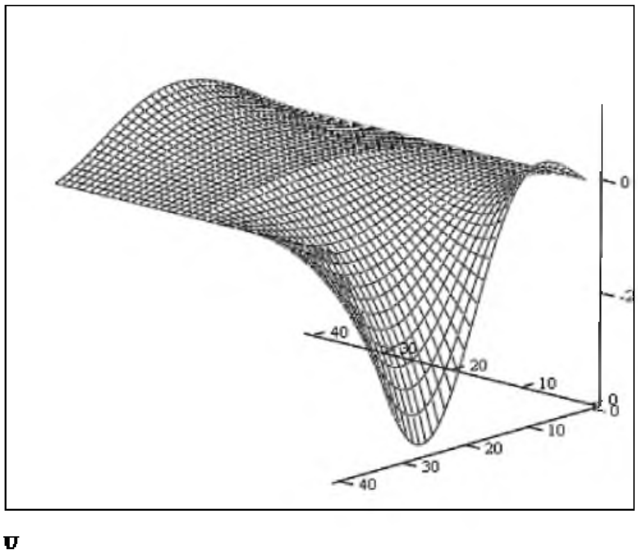

Рис. 1: Распределение температуры в вертикальном сечении цилиндра на сетке 40×40 для двухслойной среды.

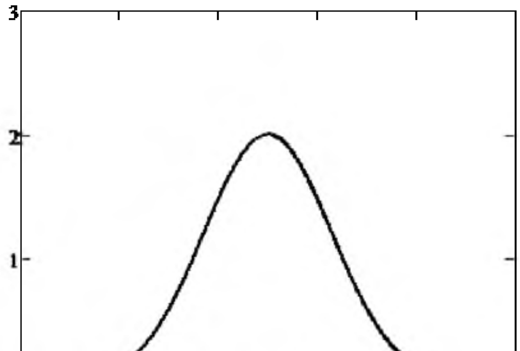

Рис. 2: Восстановление гладкого граничного условия для двухслойной среды.

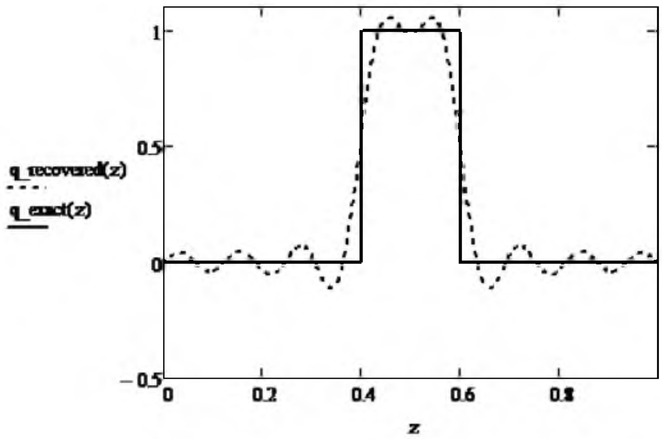

Рис. 3: Восстановление температуры на внутренней границе двухслойной среды при разрывной неизвестной функции.

Расчеты показывают, что разработанный нами метод позволяет с высокой точностью решать задачи Коши для уравнения Лапласа в цилиндрическом слое в случае гладких данных задачи. Отметим, что метод не позволяет с хорошей точностью восстановить разрывные функции.

Литература

1 Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. — 1957. — Т.112, №2. — С.195–197.

2 Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.

3 Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сборник. — 1963. — Т.61, №2. — С.211–223.

4 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 224 с.

5 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Аяпбергенова А.Т., Нечаев Д.В. Оптимизационный метод решения задач продолжения // Вычислитель-

ные технологии. — 2004. — Т.9. Специальный выпуск: Труды совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям — С.49–60.

6 Balgaisha Mukanova. Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2012. — V.21, Iss.8. — P.1255–1267.

7 Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

Literatura

1 Lavrent'ev M.M. O zadache Koshi dlya lineinyh ellipticheskih uravneniy vtorogo poryadka // DAN SSSR. — 1957. — T.112, № 2. — S.195–197.

2 Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriya lineinyh nekorrektnyh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978. — 206 s.

3 Ivanov V.K. O nekorrektno postavlennyh zadachah // Matem. sbornik. — 1963. — T.61, № 2. — S.211–223.

4 Tikhonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody resheniya nekorrektnyh zadach. — M.: Nauka, 1974. — 224 s.

5 Kabanihin S.I., Bektemesov M.A., Ayapbergenova A.T., Nechaev D.V. Optimizatcionnyi metod resheniya zadach prodolzheniya // Vychislitel'nye tehnologii. — 2004. — T.9. Special'nyi vypusk: Trudy soveshhaniya rossiysko-kazakhstanskoi rabochei gruppy po vychislitel'nym i informatcionnym tehnologiyam — S.49–60.

6 Balgaisha Mukanova. Numerical reconstruction of unknown boundary data in the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2012. — V.21, Iss.8. — P.1255–1267.

7 Vasil'ev F.P. Metody resheniya ekstremal'nyh zadach. — M.: Nauka, 1981. — 400 s.

Поступила в редакцию 12.02.14

Муканова Б.Г., Кулбай М.Н. ЦИЛИНДРЛIК ҚАБАТТАЛҒАН ОРТАДАҒЫ ЛАПЛАС ТЕҢДЕУI ҮШIН ЖАЛҒАСТЫРУ ЕСЕБI: КВАЗИШЕШIМ ҚҰРАСТЫРУ

Цилиндрлiк қабатталған ортада стационар диффузия моделi үшiн жалғастыру керi есебi қарастырылады. Диффузия коэффициентi бөлiктелген тұрақты деп қабылданады. Цилиндрдiң сыртқы қабатындағы Коши берiлгендерi бойынша цилиндрдiң iшкi шекарасындағы температураның стационар өрiсiн қалыпқа келтiру керек. Есеп квазишешiм және түтқырсыздық функционалын регуляризациялау әдiсiне сүйенiп шешiледi. Түтқырсыздық функционалы минимумының қажеттi шарттар жүйесi үшiн минимайзерге арналған аналитикалық формулалар құрастырылған. Формулалар сандық түрде алынып есептiк эксперименттер тiзбесi жүзеге асырылған.

Mukanova B.G., Kulbay M.N. CONTINUATION PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN CYLINDRICAL LAYERED MEDIA: CONSTRUCTION OF THE QUASISOLUTION

The continuation inverse problem for a steady-state diffusion model in a cylindrical layer is considered. The diffusion coefficient is supposed to be a piecewise constant function. It is required to determine stationary temperature field at the inner boundary of the cylinder under Cauchy data given on the outer boundary of the cylinder. The problem is solved by the method of quasisolution and residual functional regularization method. For the system consisting of the necessary conditions for a minimum functional of the residual analytical formulas of the minimizer are derived. The formulas are numerically calculated and series of the numerical experiments are done.

УДК 519.218

А.К. Шаймерденова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: altinay86@mail.ru

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Изучаются однотипные ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения. Известны асимптотические свойства вероятности невырождения процесса за фиксированный момент времени. Получены асимптотические свойства вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения в критическом и близких к критическому случаях.
Ключевые слова: *вероятность невырождения, случайный момент, дробно-линейное распределение, тауберова теорема.*

Введение

Исчезновение распространенных фамилий известных людей привлекало много внимания в середине XIX-го столетия. В 1874 году появилась работа Ватсона и Гальтона "Задачи о вырождении фамилий". Потом математическая модель Гальтона и Ватсона (в дальнейшем будем употреблять термин: процесс Гальтона-Ватсона) в течение многих лет не привлекала к себе внимания. Последующие исследования принадлежат Фишеру (1922, 1930). Использовал эту модель в генетике Холдейн (1927). Впервые

Keywords: *survival probability, random moment, linear-fractional distribution, Tauberian theorem*
2010 Mathematics Subject Classification: 60J80

полное и корректное определение вероятности вырождения для процесса Гальтона-Ватсона было дано Стеффенсеном (1930, 1932). В 1938 году А.Н.Колмогоров определил асимптотическое поведение вероятности того, что фамилия продолжает существовать после большого числа поколений. Лотка (1931, 1939), Семенов (1934), Шокли и Пирс (1938) использовали идею Гальтона и Ватсона в теории химических (неядерных) цепных реакций, в задачах изучения размножения электронов в электронном детекторном устройстве. Далее список продолжили Хокинс и Улам (1944), Эверетт и Улам (1948) и так далее.

Одна из недавно опубликованных работ посвящена процессу Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением (см. [1]). Асимптотическое поведение вероятности невырождения процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением в неоднородной среде изучалось в работе [2].

Очень удобной интерпретацией ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона является их описание в терминах эволюции популяции частиц. Процесс начинается с одной частицы. Обозначим эту начальную частицу через Z_0. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. К концу жизни частица производит случайное число потомков ξ в соответствии с распределением $P(\xi = k) = p_k,\ k = 0, 1, \ldots$. Каждая новая частица также имеет единичную продолжительность жизни и к концу жизни порождает (независимо от других частиц) случайное число потомков в соответствии с распределением $p_k,\ k = 0, 1, \ldots$. Таким образом, при $n \geq 0$

$$Z_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_{Z_n}^{(n)},$$

где $\xi_i^{(n)}$ — число потомков i-ой частицы n-го поколения ($i = 1, 2, \ldots, Z_n$), причем $\xi_i^{(n)}$ одинаково распределены при всех $i = 1, 2, \ldots$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$, и независимы.

Закон размножения частиц дается через производящую функцию

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1\,.$$

Среднее число частиц вычисляется через производящую функцию $\mu = f'(1)$. Сравнивая среднее число частиц μ с единицей, получим классификацию ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона:

- если $\mu > 1$, то процесс называется надкритическим,
- если $\mu < 1$, то процесс называется докритическим,
- если $\mu = 1$, то процесс называется критическим.

Хорошо известно, что для критических процессов Гальтона-Ватсона справедлива следующая предельная теорема (см., например, [3], 49 стр.)

Теорема 1. *В критическом случае, когда $\mu = 1$, если производящая функция удовлетворяет условию $f''(1) = 2B \in (0, \infty)$, то имеет место следующая асимптотика вероятности невырождения процесса за n поколений*

$$P(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{Bn}, \quad n \to \infty.$$

То есть имеется асимптотическое поведение вероятности невырождения за фиксированный момент наблюдений. А что, если мы будем наблюдать процесс в случайное время T? Какова вероятность невырождения критического процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением, наблюдаемого в случайное время? И какая будет вероятность невырождения процессов, близких к критическим в случайный момент времени?

Рассмотрим, для простоты, однотипный ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением, так как для этого случая многие вычисления упрощаются.

Распределение числа потомков для дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона задается соотношениями

$$p_0 = h_0;\ p_k = h_1 \left(\frac{m}{1+m}\right)^{k-1} \frac{1}{1+m},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда производящая функция имеет вид

$$f(s) = h_0 + h_1 \frac{s}{1+m-ms}\ ,$$

где m — положительная константа, $h_1 = 1 - h_0$ — вероятность того, что частица будет иметь хотя бы одного потомка, с вероятностью h_0 частица не имеет потомков и среднее число потомков равно $\mu = f'(1) = h_1(1+m)$.

Закон размножения за n поколений сохраняет свойство дробно-линейности (см. [4], 6 стр.)

$$f^{(n)}(s) = h_0^{(n)} + h_1^{(n)} \frac{s}{1 + m^{(n)} - m^{(n)}s} ,$$

где

- в надкритическом случае, когда $\mu > 1$, вероятность равна $h_1^{(n)} = \frac{\mu^n(1-q)}{\mu^n - q}$ и $1 + m^{(n)} = \frac{\mu^n - q}{1-q}$,
- в докритическом случае, когда $\mu < 1$, вероятность равна $h_1^{(n)} = \frac{\mu^n(q-1)}{q-\mu^n}$ и $1 + m^{(n)} = \frac{q-\mu^n}{q-1}$,
- в критическом случае, когда $\mu = 1$, вероятность равна $h_1^{(n)} = \frac{1}{1+mn}$ и $1 + m^{(n)} = 1 + mn$,

где $q = \frac{1+m}{m}h_0$, $h_1^{(n)}$ является $P(Z_n \neq 0)$ вероятностью невырождения.

Аналогом теоремы 1 для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением является теорема 2.

Теорема 2. *В критическом случае, когда $\mu = 1$, верна следующая асимптотика вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона за n поколений:*

$$P(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{mn}, n \to \infty.$$

Учитывая эту теорему, получим аналогичный результат для вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения.

Пусть $T \sim \mathrm{Geom}(p)$ — случайное время распределения геометрически, то есть $P(T = n) = p(1-p)^n$. Наша цель — найти асимптотические свойства вероятности невырождения дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения T.

Во втором разделе даются асимптотические свойства вероятности невырождения критических дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения T. Из результата видно, что в случайный момент наблюдения вероятность невырождения отличается от случая теоремы 2 на $\ln n$ (учитывается, что p порядка $1/n$). В полученном нами результате вероятность невырождения становится больше за счет $\ln n$. Почему больше? Случайный момент T меньше момента n. Значит вероятность невырождения больше. Может быть, случайный момент T больше момента n, но с малой вероятностью $P(T > n) = (1-p)^n$ (хвост геометрического распределения). Поэтому, в среднем, T меньше момента n, что и делает вероятность невырождения больше.

В третьем разделе рассматриваются близкие к критическому случаю процессы и их вероятности невырождений в случайный момент времени.

1. Основной результат для критического процесса

Для краткости, вероятность невырождения в случайный момент наблюдения обозначим через $1 - Q_p$, так как она зависит от параметра p. Она находится по формуле полной вероятности

$$1 - Q_p = P(Z_T \neq 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T = n) P(Z_T \neq 0 |\, T = n).$$

Заметим, что условная вероятность $P(Z_T \neq 0 |\, T = n)$ совпадает с вероятностью невырождения $P(Z_n \neq 0)$.

Дадим определение медленно меняющейся функций и приведем тауберову теорему из [5], 513 стр., она нам понадобится для доказательства теоремы 4.

Определение 1. *Заданная на $(0, \infty)$ положительная функция L называется медленно меняющейся на бесконечности в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию*

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1$$

при $t \to \infty$ для любого $x > 0$.

Теорема 3. *Пусть $a_n \geq 0$ и пусть ряд*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

сходится при $0 \le s < 1$. *Если функция* L *медленно меняется на бесконечности и* $0 \le \rho < \infty$, *то каждое из двух соотношений*

$$F(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad s \to 1-, \tag{1}$$

и

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

влечет другое.

Далее, если последовательность a_n *монотонна и* $0 < \rho < \infty$, *то выражение* (1) *равносильно соотношению*

$$a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n), \quad n \to \infty.$$

Теорема 4. *Вероятность невырождения критического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения удовлетворяет соотношению*

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, \quad p \to 0.$$

Доказательство теоремы 4.

Эту теорему будем доказывать с помощью тауберовой теоремы. Вероятность невырождения за n поколений в критическом случае равна

$$P(Z_n \ne 0) = \frac{1}{1+mn} \ .$$

Учитывая эту формулу, получим формулу вероятности невырождения в случайный момент времени для критического случая

$$1 - Q_p = P(Z_T \ne 0) = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1+mn} \ .$$

Далее, применяя Тауберову теорему, получим асимптотику для вероятности невырождения $1 - Q_p$. В нашем случае $a_n = \frac{1}{1+mn}, s = 1 - p$. Имеем

$$1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+2m} + \ldots + \frac{1}{1+mn} \sim \frac{1}{m} \ln n, \quad n \to \infty.$$

Сравнивая это выражение с (2), замечаем, что $\rho = 0$, $L(n) = 1/m \ln n$. По утверждению теоремы 3, (2) влечет (1). Тогда имеет место соотношение

$$p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1+mn} \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, \quad p \to 0+.$$

Это завершает доказательство данной теоремы. □

2. Близкие к критическому случаю процессы

Интересен случай, когда $\mu = \mu(p)$ в зависимости от p стремится к единице, то есть $\mu(p) \to 1$ при $p \to 0$.

Учитывая выражение для q, перепишем вероятность $P(Z_n \neq 0)$ в следующем виде в надкритическом и докритическом случаях:

$$P(Z_n \neq 0) = \frac{\mu^n}{1 + m(1 + \mu + \ldots + \mu^{n-1})}.$$

Отсюда

$$1 - Q_p = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu(1-p))^n}{1 + m(1 + \mu + \ldots + \mu^{n-1})}. \tag{3}$$

Теорема 5. *Пусть* $\mu < 1$. *Если* $\frac{1-\mu(p)}{p} \to c$ *при* $p \to 0$, *тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно соотношение*

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, \quad p \to 0.$$

Теорема 6. *Пусть* $\mu > 1$. *Если* $\frac{\mu(p)-1}{p} \to c$ *при* $p \to 0$, *тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно соотношение*

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, \quad p \to 0.$$

Доказательство теоремы 5.

Рассмотрим отдельно вероятность $1 - Q_p$ в докритическом случае при $\mu < 1$. Нас интересует асимптотическое поведение вероятности невырождения (3) в случайный момент времени T, когда $\frac{1-\mu(p)}{p} \to c$ при $p \to 0$, то есть при достаточно малых p для μ, для $\forall\varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon$, $\forall p < p_\varepsilon$, выполняется следующее неравенство $1-(c+\varepsilon)p \le \mu \le 1-(c-\varepsilon)p$.

Из оценки для μ получим $1-(1+c+\varepsilon)p \le \mu(1-p) \le 1-(1+c-\varepsilon)p$. С помощью последнего неравенства и $\mu < 1$ оценим ряд снизу

$$p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})} \ge p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(1-(1+c+\varepsilon)p)^n}{1+mn} \ge$$
$$\ge (1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{1}{1+mn} \ge (1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}p\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{p+mx} \ge$$
$$\ge \frac{1}{m}(1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}p(\ln p^{-1}+\ln m\varepsilon).$$

Отсюда
$$\underline{\lim}_{p\to 0}\frac{1-Q_p}{p\ln p^{-1}} \ge \frac{e^{-(1+c+\varepsilon)\varepsilon}}{m}\ . \tag{4}$$

Разделим равенство (3) на две суммы

$$1-Q_p = p\Bigg(\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})}+$$
$$+\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})}\Bigg).$$

Оценивая сверху сумму и ряд, мы видим, что основной вклад дает сумма

$$p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})} \le p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^n}{1+mn\mu^{\varepsilon/p}} \le$$
$$\le p\sum_{x_n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor p}\frac{p}{p+mx_ne^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)}} \le p\left(1+\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{p+mxe^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)}}\right) \le$$
$$\le p\left(\frac{1}{m}\ln p^{-1}+1+\frac{1}{m}(p+m\varepsilon e^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)})\right).$$

Заметим, что $\lim_{p\to 0} e^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)} = e^{-\varepsilon(c+\varepsilon)}$. Таким образом, чтобы доказать
$$\overline{\lim}_{p\to 0}\frac{1-Q_p}{p\ln p^{-1}} \le \frac{1}{m}, \tag{5}$$
достаточно показать, что предел ряда при $p \to 0$ будет равен 0.

Действительно,
$$\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m\frac{1-\mu^n}{1-\mu}} \le \sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m\frac{1-\mu^{\varepsilon/p}}{1-\mu}} =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{m}{1-\mu}(1-\mu^{\varepsilon/p})}\frac{(\mu(1-p))^{\varepsilon/p}}{1-\mu(1-p)} \le$$
$$\le p\frac{1-\mu}{m(1-(c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}\frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}{(1+c-\varepsilon)p} \to$$
$$\to \frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}}\frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon},\ p\to 0.$$
Отсюда получим, что $p\frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}}\frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon}$ стремится к 0 при $p \to 0$ и фиксированном ε. Полученные оценки (5) и (4) доказывают данную теорему при $\varepsilon \to 0$. $\square$.

Доказательство теоремы 6.

Теперь рассмотрим надкритический случай. Изучим асимптотическое поведение вероятности невырождения (3) в случайный момент времени T, когда $\frac{\mu(p)-1}{p} \to c$ при $p \to 0$, то есть при достаточно малых p для μ при $\forall\varepsilon > 0\ \exists p_\varepsilon,\ \forall p < p_\varepsilon$ имеем следующее неравенство: $1+(c-\varepsilon)p \le \mu \le 1+(c+\varepsilon)p$.

При $\mu > 1$ и при помощи неравенства $1-(1-c+2\varepsilon)p \le \mu(1-p) \le 1-(1-c-2\varepsilon)p$ сначала оценим ряд снизу
$$1-Q_p = p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})} \ge$$
$$\ge p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(1-p)^n}{1+mn(1+(c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}} \ge p(1-p)^{\varepsilon/p}\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{1}{1+m_\varepsilon n},$$

где $\quad m_\varepsilon = m(1+(c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p} =$

$$= p(1-p)^{\varepsilon/p}\sum_{x_n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor p}\frac{p}{p+m_\varepsilon x_n} \geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon}\int_p^{p+\varepsilon m_\varepsilon}\frac{dy}{y} \geq$$
$$\geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon}\left(\ln p^{-1} + \ln \varepsilon m_\varepsilon\right).$$

Следовательно,

$$\underline{\lim}_{p\to 0}\frac{1-Q_p}{p\ln p^{-1}} \geq \frac{e^{-\varepsilon}}{me^{\varepsilon(c+\varepsilon)}}\ .$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим нужное нам неравенство. Оценим ряд (3) сверху, для этого представим его в следующем виде:

$$1-Q_p = p\Bigg(\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})}+$$
$$+\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})}\Bigg).$$

Заметим, что основную роль играет первая сумма

$$p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m(1+\mu+\ldots+\mu^{n-1})} \leq p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(1-(1-c-2\varepsilon)p)^n}{1+mn} \leq$$
$$\leq p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{1}{1+mn} \leq p\left[\frac{1}{m}\ln p^{-1} + 1 + \frac{p+m\varepsilon}{m}\right].$$

Отсюда найдем

$$\overline{\lim_{p\to 0}}\frac{1-Q_p}{p\ln p^{-1}} \leq \frac{1}{m},$$

так как

$$\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^n}{1+m\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}\leq\frac{1}{1+\frac{m}{\mu-1}(\mu^{\varepsilon/p}-1)}\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}(1-(1-c-2\varepsilon)p)^n=$$

$$=\frac{\mu-1}{m(\mu^{\varepsilon/p}-1)}\frac{(1-(1-c-2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1-c-2\varepsilon)p}\leq$$

$$\leq\frac{\mu-1}{m(1+(c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}\frac{(1-(1-c-2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1-c-2\varepsilon)p}\to$$

$$\to\frac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)},\quad p\to 0.$$

Учитывая множитель p, получим $p\frac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)}\to 0,\ p\to 0$ (при фиксированном ε). Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Литература

1 Sagitov S. Linear-fractional branching processes with countably many types // Stochastic processes and their applications. — 2013. — V.123. — P. 2940–2956.

2 Шаймерденова А.К. Многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде // Вестник НАН РК. — 2012. — №.5. С. 46–49.

3 Ватутин В.А. Ветвящиеся процессы. — М.: МИАН, 2008. — 109 с.

4 Athreya K. and Ney P. Branching processes. — John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

5 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. — М.: Мир, 1967. — 765 с.

Literatura

1 Sagitov S. Linear-fractional branching processes with countably many types // Stochastic processes and their applications. — 2013. — V.123. — P. 2940–2956.

2 Shaimerdenova A.K. Mnogotipnye drobno-lineinye vetvyashiesya processy v neodnorodnoi srede // Vestnik NAN RK. — 2012. — №.5. S. 46–49.

3 Vatutin V.A. Vetvyashiesya processy. — M.: MIAN, 2008. — 109 c.

4 Athreya K. and Ney P. Branching processes. — John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

5 Feller V. Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya. T.2. — M.: Mir, 1967. — 765 c.

Статья поступила в редакцию 11.07.2013

Шаймерденова А.К. КЕЗДЕЙСОҚ БАҚЫЛАНҒАН УАҚЫТТАҒЫ ТАРАМДАЛАТЫН ҮДЕРІСТЕРГЕ АРНАЛҒАН ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

Көбеюдің бөлшек-сызықты заңы бар біртектес Гальтон-Ватсон тарамдалатын үдерістері қарастырылған. Уақыттың бекітілген сәтіндегі үдерістің жоғалмау ықтималдығының асимптоталық қасиеттері белгілі. Бақылаудың кездейсоқ сәтінде үдерістің жоғалмау ықтималдығының асимптоталық қасиеттері ерекше және ерекшеге жақын жағдайларда табылған.

Shaimerdenova A.K. LIMIT THEOREMS FOR BRANCHING PROCESS AT RANDOM MOMENT

There are studied single-type Galton-Watson processes with linear-fractional reproduction laws. Asymptotic properties of survival of probability of the process at fixed time are well known. Asymptotic properties of survival probability of the process at random moment for critical and close to critical cases have been found.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

ХРОНИКА

На базе Кызылординского государственного университета имени Коркыт Ата 24–26 октября 2013 года состоялась Международная научно-практическая конференция "Современная математика: проблемы и приложения," посвященная научно-педагогической деятельности выдающегося ученого-математика Асана Дабсовича Тайманова, доктора физико-математических наук, академика АН КазССР, основоположника казахстанской школы по математической логике. Работа конференции включала три пленарных и три секционных заседания по трем секциям. На конференции было представлено 108 научных сообщений, из них пленарных — 21 доклад, секционных — 87 докладов. Перед началом конференции был издан сборник научных трудов.

Член-корреспондент НАН РК *Б.С.Байжанов*

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 14, №1 (51), 2014

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
26.05.2014 г.

Тираж 300 экз. Объем 105 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz