ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

Том 16 № 1 (59) 2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 16   № 1 (59)   2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, № 1 (59), 2016

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 16 **№ 1 (59)** **2016**

CONTENTS

Volume 16 **No. 1 (59)** **2016**

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 5–16.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ВАСИЛИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ВОИНОВ
(К 75-летию со дня рождения)

Исполнилось 75 лет со дня рождения известного казахстанского математика, доктора физико-математических наук, профессора Василия Григорьевича Воинова. Василий Григорьевич Воинов родился 14 января 1941 года в Китайской Народной Республике. В 1954 году вместе с родителями репатриировал в СССР и проживал в Алтайском крае до 1956 года. В 1956 году вместе с родителями переехал в город Омск, где в 1958 году с серебряной медалью закончил среднюю школу и в том же году поступил в Томский государственный университет им. Куйбышева на радиофизический факультет, который окончил в 1963 году. В 1964 году переехал в г. Алма-Ату.

Работал в Институте ядерной физики и затем в Институте физики высоких энергий АН КазССР. В 1973 году защитил кандидатскую диссертацию по физике высоких энергий и космических лучей. В 1989 году в Объединенном Институте ядерных исследований в г. Дубна защитил докторскую диссертацию по теории вероятностей и математической статистики. В 1996 году получил звание профессора по информатике и управлению. С 1996 по 1998 годы работал в Казахском государственном университете, где преподавал математическую статистику для бакалавров и магистрантов. С 1999 года работает в КИМЭП, где в 2005 году получил должность полного профессора.

С 1999 по 2016 годы читал 12 различных курсов по математической статистике для бакалавров, магистрантов и соискателей докторских степеней в бизнесе.

Работает по совместительству в Институте математики и математического моделирования МОН РК, в течение многих лет является руководителем научной темы по теории вероятностей.

Им получены фундаментальные результаты по теории вероятностей и математической статистике.

Результаты научных исследований опубликованы в 6 монографиях, в том числе в издательствах ELSEVIER, New York; Kluwer Netherlands; "Наука" , Москва и Казахстан; им опубликовано более 100 научных статей, в том числе 40 статей в высокорейтинговых журналах.

В.Г. Воинов неоднократно проводил научную работу совместно с различными научными учреждениями Дальнего зарубежья, в частности, с университетом Бордо-2 (Франция), Кингстонским университетом (Лондон), университетом McMaster (Канада), с университетом Technion (Израиль) и с университетом Bath (Англия). Им получено много новых научных результатов международного уровня.

Неоднократно выступал с докладами, в том числе приглашенными, на Международных конференциях США, Италии, Франции, Австрии, Норвегии, Греции, Канады, Португалии, Казахстана, в Сингапуре.

Коллектив Института математики и математического моделирования МОН РК поздравляет Василия Григорьевича Воинова со славным юбилеем. Желает крепкого здоровья, счастья, радостей, огромных творческих успехов.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Список научных трудов Воинова В.Г.

1. Книги

1) Voinov V.G., Nikulin M.S., Balakrishnan N. Chi-squared goodness-of-fit tests with applications // Academic Press, ELSEVIER, New York. – 2013. – 229 p.

2) Voinov V.G., Nikulin M.S. Unbiased estimators and their applications // Multivariate case, Kluwer Academic publishers, Netherlands. – 1996. – V. 2. – 262 p.

3) Voinov V.G., Nikulin M.S. Unbiased estimators and their applications. Univariate case. Kluwer Academic publishers, Netherlands. – 1993. – V. 1. – 521 p.

4) Voinov V.G., Nikulin M.S. Unbiased estimators and their applications. – Moscow, Nauka, 1989. – 436 p. (in Russian).

5) Воинов В.Г. и др. Автоматизация обработки фильмовой информации при высоких энергиях. – "Наука" , АН КазССР, 1978. – 131 с.

6) Воинов В.Г., Часников И.Я. Многократное рассеяние заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях. – Алма-Ата, "Наука КазССР" , 1969. – 130 с.

2. Главы в книгах

1) Nikulin M., Voinov V. Unbiased estimators and their applications // In: International Encyclopaedia of Statistical Sciences. – Springer: New York, 2011. – Part U. – P. 1619-1621.

2) Voinov V., Nikulin M. Chi-square Goodness-of-fit Tests: Drawbacks and Improvements // In: International Encyclopedia of Statistical Science. – Springer: New York, 2011. – Part C. – P. 246-250.

3) Voinov V., Alloyarova R., Pya N. Recent achievements in modified chi-squared goodness-of-fit testing. Chapter in book: Statistical models and methods for biomedical and technical systems. Eds. F.Vonta, M.Nikulin, N.Limnios, C.Huber. ISTE WILEY, London. – 2008. – P. 193-206.

4) Voinov V., Nikulin M., Pya N. Independent distributed in the limit components of some chi-squared tests // In book: Recent Advances in Stochastic Modelling and Data Analysis. Edi. Christos H. Skiadas, Publisher: World Scientific Publishing Co Pte Ltd. – 2007. – P. 243-250.

5) Nikulin M., Voinov V. Chi-squared testing // In: Encyclopedia of Statistical Sciences eds. S.Kotz, N.Balakrishnan, C.B.Read, B.Vidakovich, 2nd Ed., John Wiley Sons, Hoboken, New Jersey, 2006. – V. 2. – P. 912-921.

6) Voinov V.G., Nikulin M.S. Unbiased estimation in reliability and similar problems. In: Recent Advances in Reliability Theory, Eds. M.Limnios, M.Nikulin, Birkh*ä*user. Boston, 2000. – P. 435-448.

7) Voinov V.G., Nikulin M.S. On a subset sum algorithm and its probabilistic and other applications. In: Advances in combinatorial methods and applications to probability and statistics, Eds. N. Balakrishnan, Boston, 1997. – P. 153-163.

3. Статьи в рецензируемых международных журналах

1) Voinov V., Pya N., Makarov R., Voinov Y. New invariant and consistent chi-squared type goodness-of-fit tests for multivariate normality and a related comparative simulation study // Commun. in Statist. Theory and Methods. – 2014. – DOI: 10.1080/03610926.2014.901370.

2) Voinov V., Pya N., Shapakov N., Voinov Y. Goodness-of-fit tests for the power-generalized Weibull probability distribution. Commun // Statist.-Simula. Computa. – 2013. – V. 42. – P. 1003-1012.

3) Voinov V., Pya N., Makarov R., Voinov Y. Goodness-of-fit tests for two-dimensional normal probability distribution // AFBE Journal. – 2012. – V. 5. – P. 201-218.

4) Lumelskii Ya., Voinov V., Voinov E., Nikulin M. Approximate confidence limits for a proportion of the P.distribution // Commun. Statis. Theory Methods. – 2011. – V. 40. – P. 1601-1619.

5)Voinov V., Voinov E., Rakhimova R. Poisson versus binomial: The U.S. Supreme Court judges' appointment // Australian and New Zealand J. of Statistics. – 2010. – V. 52(3). – P. 261-274.

6) Voinov V., Voinov E. A statistical reanalysis of the classical Rutherford's experiment // Commun. Statist.-Simula. Computa. – 2010. – V. 39. – P. 157-171.

7) Voinov V., Pya N. A note on vector-valued goodness-of-fit tests // Commun. Statist.-Theory Methods. – 2010. – V. 39. – P. 452-459.

8) Voinov V. A decomposition of Pearson-Fisher and Dzhaparidze-Nikulin statistics and some ideas for a more powerful test construction. Commun.

Statist-Theory Methods. – 2010. – V. 39. – P. 667-677.

9) Voinov V., Pya N., Alloyarova R. A comparative study of some modified chi-squared tests // Commun. Statist.-Simula.Computa. – 2009. – V. 38. – P. 355-367.

10) Alloyarova R., Nikulin M., Pya N., Voinov V. The Power-Generalized Weibull probability distribution and its use in survival analysis // Communications in Dependability and Quality Management. – 2007. – V. 10. – P. 5-15.

11) Lumelskii Ya., Voinov V., Nikulin M., Feigin P. On a generalization of the classical random sampling scheme and unbiased estimation // Commun. Statist. Theory and Methods. – 2007. – V. 36. – P. 693-705.

12) Воинов В.Г. Об оптимальных свойствах критерия Рао-Робсон-Никулина // Заводская Лаборатория. – 2006. – Т. 72. – С. 65-70.

13) Nikulin M.S., Smirnov T.I.,Voinov V.G. Multivariate discrete distributions induced by an urn scheme, linear onization equations, unbiased estimating, testing and applications // J. of Stat. Plan. Inf. – 2002. – V. 101. – P. 255-266.

14) Voinov V.G. et al. A probabilistic description of radioactive contamination: a multivariate model // Appl. Radiation and Isotopes. – 2001. – V. 54. – P. 355-363.

15) Voinov V.G. et al. A probabilistic description of radioactive contamination // Appl. Radiation and Isotopes. – 2000. – V. 52. – P. 993-1002.

16) Voinov V.G., Nikulin M.S. On some statistical and probability problems related to unipartite and multipartite partitions // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1997. – V. 52. – P. 163-178.

17) Bordes L., Nikulin M.S., Voinov V.G. Unbiased estimation for a multivariate exponential whose components have a common shift // J. Multivar. Analysis. – 1997. – V. 63. – P. 199-221.

18) Voinov V.G., Nikulin M.S. A review of the results on the Stein approach for estimators improvement // Questiio. – 1995. – V. 19. – P. 9-35.

19) Voinov V.G., Nikulin M.S. On the problem of the means of weighted normal populations // Questiio. – 1995. – V. 19. – P. 93-106.

20) Voinov V.G., Nikulin M.S. Generating functions, problems of additive number theory and some statistical applications // Rev. Roum. Math. Pures

et Appl. – 1995. – V. 40. – P. 107-147.

21) Voinov V.G., Nikulin M.S. A chi-square goodness-of-fit test for modified power series distributions // Sankhya. – 1994. – V. 56B. – P. 86-94.

22) Voinov V.G., Nikulin M.S. On power series, Bell polynomials, Hardy-Ramanujan-Rademacher problem and their statistical applications // Kybernetika. – 1994. – V. 30. – P. 343-358.

23) Voinov V.G., Nikulin M.S.Unbiased estimators of multivariate discrete distributions and chi-square goodness-of-fit test // Questiio. – 1993. – V. 17. – P. 301-326.

24) Voinov V.G., Kumganbayev M.A derivation of the probability density function for a modified Greenwood's statistic and testing the uniformity // Sankhya. – 1990. – V. 52A. – P. 91-102.

25) Voinov V.G., Nikulin M.S. A chi-square goodness of-fit test for exponential distributions of the first order // Lecture notes N1412. Springer. – 1989. – P. 239-258.

26) Voinov V.G., Pshenin E.S. Does the phenomenon of anomalons really exist? // Z. Phys. A.-Atomic Nuclei. – 1987. – V. 328. – P. 363-371.

27) Voinov V.G. On Jani's paper on the minimum variance unbiased estimation for a left-truncated modified power series distribution // Sankhya. – 1986. – V. 48B. – P. 144-150.

28) Voinov V.G. Unbiased estimation of powers of the inverse of mean and related problems // Sankhya. – 1985. – V. 47B. – P. 354-364.

29) Voinov V.G., Pshenin E.S. On the momentum and the energy estimation for charged tracks in nuclear emulsion and bubble chambers // Nucl. Instrum. And Methods in Phys. Res. – 1985. – V. A238. – P. 572-574.

30) Voinov V.G. Variance and its unbiased estimator for the common mean of several normal populations // Sankhya. – 1984. – V. 46B. – P. 291-300.

31) Voinov V.G., Chenyavsky M.M. On the statistical estimation of the lifetimes of charmed particles // Nucl. Instrum. And Methods in Phys. Res. – 1984. – V. A228. – P. 133-140.

32) Voinov V.G., Pshenin E.S. A possible explanation for the evidence of anomalously short mean free paths of projectile fragments from heavy ion collisions // Phys. Lett. – 1983. – V. 128B. – P. 133-137.

33) Voinov V.G. et al. Energy and angle distributions of secondary particles in - nucleus interactions at 50 Gev // Nuclear Physics. – 1977. – V. 25. – P.

1003-1008.

34) Voinov V.G. et al. Associate multiples in - nucleus interactions at 50 Gev // Nuclear Physics. – 1977. – V. 25. – P. 782-787.

35) Voinov V.G. et al. Pion-nucleus' interactions momentum characteristics at 60 Gev // Nuclear Physics. – 1972. – V. 16. – P. 539-545.

36) Voinov V.G. et al. Coherent production of particles by 60 Gev/c pions on emulsion nuclei // Phys. Lett. – 1970. – V. 31B. – P. 241-245.

37) Voinov V.G. et al. General characteristics of pion-nucleon interactions at 60 Gev/c obtained in nuclear emulsions // Phys. Lett. – 1970. – V. 31B. – P. 237-240.

38) Voinov V.G. et al. Inelastic and coherent pion-nucleus interactions in nuclear emulsions under the energy 60 Gev // Nuclear Physics. – 1969. – V. 10. – P. 991-998.

39) Voinov V.G., Chasnikov I.Ya. Multiple Coulomb Scattering of pions with the energy of 60 Gev. // Nuclear Physics. – 1968. – V. 10. – P. 988-990.

4. Публикации

1) Voinov V.G. Recent achievements in chi-squared type goodness-of-fit testing // Математический журнал. – 2014. – V. 14. – P. 90-115.

2) Voinov V. The chi-squared test and modifications: from 1900 to 2010 // In: JSM Proceedings, Section on Statistical Education. Alexandria, VA: American Statistical Association. – 2010. – P. 869-880.

3) Voinov Y. Approximate confidence limits for a proportion of the hypergeometric probability distribution: applications in audits, acceptance sampling and medical investigations // In: JSM Proceedings, Business and Economic Statistics Section. Alexandria, VA: American Statistical Association. – 2010. – P. 881-893.

4) Voinov V., Voinov E. Some new modified chi-squared goodness-of-fit tests and their application in particle physics and political science // In: Proceedings of JSM 2008, Denver, Colorado, 2009. Aug. 3-7, ISBN 978-0-9791747-5-9. – P. 540-547.

5) V.Voinov, N. Pya A note on vector-valued goodness-of-fit tests // In: Proceedings of the XIIth Int. Conf. On Applied Stochastic Models and Data Analysis, May 29-31 and June 1, 2007, Chania, Crete, Greece. CD publication.

6) Vlasov O., Voinov V. "On optimizing advertising activities of a company"// Proc. of the 5th Annual KIMEP Int. Research Conf. (KIRC),KIMEP. – Almaty, 2006. – P. 155-161.

7) Lumelskii Ya., Voinov V., Nikulin M., Feigin P. "Unbiased estimators for the multivariate Polya distributions"// In: Proc. of the Int. Conf. on Statistical Methods for Biomedical and Technical Systems, Limassol, Cyprus, May 29-31, 2006. – P. 381-386.

8) Voinov V.G. Chi-squared goodness-of-fit tests: history, achievements, open problems // In: Proc. of the 7th Iranian Statist. Conf., Allameh-Tabatabaie Univ., Aug. 23-25, 2004. – P. 366-384.

9) Voinov V., Pya N. On the power of modified chi-squared goodness-of-fit tests for the family of logistic and normal distributions // In: Proc. Of the 7th Iranian Statist. Conf., Allameh-Tabatabaie Univ., Aug. 23-25, 2004. – P. 385-403.

10) Novak M., Voinov V., Pya N. Probabilistic and neural network descriptions of radioactive fields // In: Proceedings of the Int. Conf. "Advances in Statistical Inferential Methods: Theory and Applications", June 9-12, KIMEP. – Almaty: "Gylym". – 2003. – P. 149-169.

11) Voinov V., Naumov A., Pya N. Some recent advances in chi-squared testing // In: Proceedings of the Int. Conf. "Advances in Statistical Inferential Methods: Theory and Applications June 9-12, KIMEP. – Almaty: "Gylym". – 2003. – P. 233-247.

12) Vlasov O., Voinov V., Kini R., Pya N. A multivariate statistical model of a firm's advertising activities and their financial implications // In: Proceedings of the Int. Conf. Advances in Statistical Inferential Methods: Theory and Applications" June 9-12, KIMEP. – Almaty: "Gylym". – 2003. – P. 471-476.

13) Voinov V., Pya N. On some business and other applications of neural net like algorithms // In: Proceedings of the Int. Conf. Advances in Statistical Inferential Methods: Theory and Applications" June 9-12, KIMEP. – Almaty: "Gylym". – 2003. – P. 477-485.

14) Pya N.Y., Voinov V.G. The non-uniqueness of a non-negative integer solution of a system of linear onization equations with applications to integer programming, genetics, reliability, etc. // Proceedings of a Third Int. Conf. on Math. Methods in Reliability, June 17-20, 2002, Trondheim, Norway, NTNU.

15) Nikulin M.S., Voinov V.G. On some chi-squared type criteria for the logistic, exponential and normal distributions // Technical Report №0204 of University Victor Segalen Bordeaux 2 - France, 2002. – 13 p.

16) Voinov V.G., Pya N. On some business, radioecology and other applications of neural net like algorithms // Technical Report No. 0205 of University Victor Segalen Bordeaux 2 - France, 2002. – 9 p.

17) Voinov V.G. Some remarks on environmental factors that affect companies' supply chain operations in Kazakhstan // Central Asian J. of Econom., Manag. Social Research. – 2001. – №2. – P. 91-103.

18) Voinov V.G., Pya N. On unbiased estimation of the reliability and the hazard rate for some probability models // Proc. Of the 2d Int. Conf. on Math. Meth. In Reliab., Bordeaux, France, 2000. – V. 2. – P. 887-890.

19) Voinov V.G. et al. Estimating environmental radioactive contamination in Kazakhstan // Central Asian J. of Econom., Manag.Social Research, Premier Issue. – 2000. – P. 59-71.

20) Voinov V.G., Nikulin M.S. Tables of the best possible unbiased estimates for functions of parameters of multinomial and negative multinomial distributions // J. Math. Sci. – 1996. – V. 81. – P. 363-2367.

21) Voinov V.G. On an approach in the additive number theory // Doklady NAN RK. – 1995. – №5. – P. 9-15 (in Russian).

22) Voinov V.G., Kikkarin S.M. On an enumeration of multipartite partitions // Doklady NAN RK. – 1994. – №6. – P. 40-46 (in Russian).

23) Voinov V.G. et al. Using automated system SI-2 for functional state of onization leucocytes // In: "Pathology of vessels and heart", Minzdrav KazSSR, Alma-Ata, 1988. – 107 p.(in Russian).

24) Voinov V.G. Some particular inversion formulas for Laplace transforms and their application when estimating parameters of probability distributions // "Zapiski Nauchnikh Seminarov LOMI". – Leningrad: "Nauka". – 1988. – V. 166. – P. 17-24.

25) Voinov V.G., ChasnikovI.Ya. Ecological problems and remote Earth control // In: All-union UNESCO Conference on "A human and Biosphere". – "Nauka KazSSR", Alma-Ata, 1988. – 91 p.(in Russian).

26) Voinov V.G., ChasnikovI.Ya. Some features of exotic baryon systems and the problem of anomalons // In: Proceedings of the Third Int. Conf. on Nucl. Nucleus Collisions, Saint-Malo, France, Amsterdam: North Holland. –

1988. – 235 p.

27) Voinov V.G., Nikulin M.S. Best unbiased estimators of a statistical model for integrated circuit quality control // Zavodskaya Laboratoriya. – 1988. – № 7. – P. 88-94 (in Russian).

28) Voinov V.G. et al. Peculiarities of angle distributions of shower particles in pA interactions // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1986. – № 2. – P. 48-52 (in Russian).

29) Voinov V.G. et al. An automated real time system for nuclear emulsion interactions' energy characteristics measurement // Technical Report of HEPI AN KazSSR. – 1986. – № 86-01. – 37 p. (in Russian).

30) Voinov V.G., Neumann A.R. An example of a new table for calculating percentage points // In: First Bernoulli Congress on Mathematical Statistics and Probability Theory. – Tashkent, M.: Nauka, 1986. – V. II. – 522 p.

31) Voinov V.G., Kumganbayev M. On a geometrical approach to the derivation of the probability density function of random variables // In: First Bernoulli Congress on Mathematical Statistics and Probability Theory. – Tashkent, M.: Nauka, 1986. – V. II. – 896 p.

32) Voinov V.G. Unbiased optical density estimation based on a transmission coefficient of the light flow // In: Automated Pattern Processing Systems ASOIZ-86, L'viv. – M.: Nauka, 1986. – P. 190-192 (in Russian).

33) Voinov V.G. Lagrange's method for finding quantiles and non-centrality parameters of probability distributions // Theory of Prob. and Appl. – 1986. – V. 31. – P. 185-187 (in Russian).

34) Voinov V.G., Nikulin M.S. The remark on the paper of Bol'shev and Mirvaliev about the exponential model of emission of particles // Theory of Prob. and Appl. – 1984. – V. 20. – P. 175-176.

35) Voinov V.G. An interface between the onization calorimeter and PC "Electronika-100" // In: Automation of physical experiments for researching. – Alma-Ata: Nauka, 1984. – P. 5-10 (in Russian).

36) Voinov V.G. An automated system SI-2 for half-tone images processing // Technical Report of HEPI AN KazSSR. – 1984. – № 84-26. – 37 p. (in Russian).

37) Voinov V.G. An unbiased parameter estimate of the double-truncated distribution and its application in the relativistic nuclear physics // Theory of Prob. and Appl. – 1984. – V. 29. – P. 171-173 (in Russian).

38) Voinov V.G. On an application of unbiased sufficient estimators in some physical problems // Theory of Prob. and Appl. – 1983. – № 3. – P. 615-616 (in Russian).

39) Voinov V.G. The weighted mean as a method of measurements' combining // Metrology. – 1982. – № 6. – P. 3-9 (in Russian).

40) Voinov V.G. Without-reduction electric drive's moving for automated high precision devices // Priborii Technika Experimenta, 1982. – № 2. – P. 220 (in Russian).

41) Voinov V.G., Chernyavsky M.M. Some systematic errors of charge particles' moments and take-off angles in nuclear emulsions // Trudy PhIAN SSSR. – 1979. – V. 108. – P. 166-172 (in Russian).

42) Voinov V.G. et al. An application of a non-synchronous electric motor with a hollow cylindrical rotor for the high-precision measurement table control // Priborii Technika Experimenta, 1979. – № 5. – P. 258-266 (in Russian).

43) Voinov G.G. et al. An automation of film information treatment under high energies // Nauka AN KazSSR, 1978. – 131 p. (in Russian).

44) Voinov V.G. et al. Energy characteristics of - nucleus interactions under 50 Gev. // Pis'ma v JETPF. – 1975. – V. 22. – P. 56-61 (in Russian).

45) Voinov V.G. et al. On a thermodynamic description of adrons' interactions under accelerator energies // In: High energy physics and cosmic rays. – Alma-Ata: Nauka, 1974. – P. 90-105 (in Russian).

46) Voinov V.G. et al. On charge particles momentum determination by the curvature of their trajectories // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1974. – № 4. – 197 p. (in Russian).

47) Voinov V.G. et al. On the influence of the sample size and restrictions on cross displacement when estimating multiple coulomb scattering // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1972. – № 4. – P. 1-6 (in Russian).

48) Voinov V.G. et al. Inelastic pion-nucleus interactions at 7-60 Gev. // In.: High energy physics and cosmic rays. – Alma-Ata: Nauka, 1971. – P. 120-140.

49) Voinov V.G. et al. Characteristics of coherent interactions of - mesons in nuclear emulsions under 60 Gev. // Dokl. AN SSSR. – 1970. – V. 194. – P. 544-546 (in Russian).

50)Voinov V.G. et al. 60 Gev pion's momentum measurements in nuclear emulsions // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1970. – № 4. – P. 85-89 (in Russian).

51) Voinov V.G. On a method of eliminating the random errors // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1968. – № 4. – P. 61-66 (in Russian).

52) Voinov V.G., Chasnikov I.Ya. On correlation properties of the spurious scattering in nuclear emulsions // Izvestiya AN KazSSR. Ser. Phys. Math. – 1967. – № 4. – P. 3-8 (in Russian).

5. Изобретение

1) Voinov V.G. et al. A numerical photometer // The author certificate N1423918 (USSR). Inventions Bulletin. – 1988. – № 34.

6. Программноеобеспечение

1) Package 'mvnTest',February 10, 2016, Version 1.1-0. Author Natalya Pya [aut, cre], Vassilly Voinov [aut], Rashid Makarov [aut], Yevgeniy Voinov [aut], Maintainer Natalya Pyanat.pya@gmail.com. Title: Goodness of Fit Tests for Multivariate NormalityDate 2016-01-25 Description: Routines for assessing multivariate normality. Implements three Wald's type chisquaredtests; non-parametric Anderson-Darling and Cramer-von Mises tests; Doornik-Hansen test, Royston test and Henze-Zirkler test. Depends R (>= 2.15.0), mvtnormImports methods, stats, graphics, MASSLicense GPL (>= 2)LazyLoad yesNeedsCompilation noRepository CRANDate/Publication 2016-02-10 18:57:23.

Пакет включен в R-всемирно используемый комплекс программ для статистических исследований.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 17–34.

УДК 519. 642

АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Э.А. Бакирова[1], Н.Б. Искакова[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]bakirova1974@mail.ru, [2]narkesh@mail.ru

Аннотация: Предлагается метод нахождения численного решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием. Метод основан на аппроксимации интегрального члена кубическим сплайном и сведении исходной задачи к линейной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: Интегро-дифференциальные уравнения, интегральное краевое условие, разрешимость, численные методы.

1. Введение

Интегро-дифференциальные уравнения встречаются во многих разделах прикладной математики, являясь математическими моделями различных процессов механики, физики, химии, техники, биологии, медицины, экономики и др. Вопросам разрешимости и построения приближенных методов нахождения решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов [1]–[6].

При отыскании приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений возникают нагруженные дифференциальные уравнения, получаемые при интерполировании интегрального члена интегро-дифференциального уравнения. В монографии [7] приводится обзор методов решения краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений.

Keywords: *Integral-differential equation, integral boundary condition, solvability, numerical methods.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3362/ГФ4.

В настоящей статье предлагается метод нахождения решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием, основанный на применении сплайнов [8] и метода параметризации [9]. Интегральный член интегро-дифференциального уравнения аппроксимируется кубическим сплайном и исследуемая краевая задача заменяется линейной краевой задачей для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе метода параметризации для аппроксимирующей краевой задачи построен алгоритм нахождения ее численного решения.

Постановка задачи. На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с интегральным условием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^T B(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t)$, $B(t)$ и n-вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $(n \times n)$-матрица $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T] \times [0,T]$.

Решением задачи (1), (2) является непрерывная на $[0,T]$, непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению (1) и интегральному краевому условию (2).

Возьмем $h_0 > 0 : mh_0 = T$, $(m \in \mathbb{N})$, и по нему произведем разбиение

$$[0,T] = \bigcup_{r=1}^{m} [t_{r-1}, t_r].$$

При этом задача (1),(2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,s)x_r(s)ds + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1,m}, \tag{3}$$

$$\sum_{p=1}^{m} \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} B(t)x_p(t)dt = d, \quad d \in R^n, \tag{4}$$

$$\lim_{t \to t_s - 0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, m-1}, \tag{5}$$

где (5) – условия склеивания решения в точках разбиения интервала $(0, T)$.

2. Сплайн-аппроксимация интегрального члена линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Пусть $h > 0 : Nh = h_0$ $(N \in \mathbb{N})$. На отрезке $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, m}$, с шагом h выберем точки $t_{r,i}$, $i = \overline{1, N}$:

$$t_{r-1} = t_{r,0} < t_{r,1} < t_{r,2} < ... < t_{r,N-1} < t_{r,N} = t_r, \quad r = \overline{1, m},$$

где $t_{1,0} = 0$, $t_{r,0} = t_{r-1,N}$, $r = \overline{2, m}$, $t_{m,N} = T$, $h = t_{r,i} - t_{r,i-1}$, и обозначим $\widehat{K}_{r,i}(t) = K(t, t_{r,i}) \cdot x_r(t_{r,i})$, $r = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, N}$.

На $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1, m}$, $i = 1, ..., N$, будем искать функцию $S_r(t, s) = S_{r,i}(t, s)$ в виде многочлена третьей степени

$$S_{r,i}(t, s) = \widehat{a}_{r,i} + \widehat{b}_{r,i}(s - t_{r,i}) + \frac{\widehat{c}_{r,i}}{2}(s - t_{r,i})^2 + \frac{\widehat{d}_{r,i}}{6}(s - t_{r,i})^3, \tag{6}$$

$$t_{r,i-1} \le s \le t_{r,i}, \quad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N}.$$

В (6) коэффициенты $\widehat{a}_{r,i}, \widehat{b}_{r,i}, \widehat{c}_{r,i}, \widehat{d}_{r,i}$ определяются по формулам

$$\widehat{c}_{r,i-1} + 4\widehat{c}_{r,i} + \widehat{c}_{r,i+1} =$$

$$= \frac{6}{h^2}\Big(\widehat{K}_{r,i-1}(t) - 2\widehat{K}_{r,i}(t) + \widehat{K}_{r,i+1}(t)\Big), \quad r = \overline{1, m}, \; i = \overline{1, N-1},$$

$$\widehat{a}_{r,i} = \widehat{K}_{r,i}(t), \quad r = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{7}$$

$$\widehat{d}_{r,i} = \frac{\widehat{c}_{r,i} - \widehat{c}_{r,i-1}}{h}, \quad r = \overline{1, m}, \; i = \overline{1, N},$$

$$\widehat{b}_{r,i} = \frac{h}{2} \cdot \widehat{c}_{r,i} - \frac{h^2}{6} \cdot \widehat{d}_{r,i} + \frac{\widehat{K}_{r,i}(t) - \widehat{K}_{r,i-1}(t)}{h}, \quad r = \overline{1, m}, \; i = \overline{1, N},$$

причем $\widehat{c}_{r,0} = \widehat{c}_{r,N} = 0$, $\widehat{K}_{1,0}(t) = K(t,0)\cdot x_1(0)$, $\widehat{K}_{r,0}(t) = K(t,t_{r-1,N})\cdot x_r(t_{r-1,N})$, $r=\overline{2,m}$.

Интегрируя функцию $S_{r,i}(t,s)$ на отрезке $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$, $r=\overline{1,m}$, $i=1,...,N$, и учитывая формулы (7), получим

$$\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} S_{r,i}(t,s)ds = \sum_{j=1}^{N+1} M_j^{(r)}\cdot K(t,t_{r,j-1})\cdot x_r(t_{r,j-1}),\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N},$$

где

$$M_j^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\Big(1-\sum\limits_{i=1}^{N-1} p_{i,j}\Big) & \text{при}\quad j=1,\quad j=N+1,\quad r=\overline{1,m}, \\ \dfrac{h}{2}\Big(2-\sum\limits_{i=1}^{N-1} p_{i,j}\Big) & \text{при}\quad j=\overline{2,N},\quad r=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{8}$$

а $p_{i,j}$, $i=\overline{1,N-1}$, $j=\overline{1,N+1}$, – это элементы матрицы, которая определяется как произведение квадратной матрицы $(N-1)$-го порядка вида

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

и прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

размерности $(N-1)\times(N+1)$.

Тогда задача (3)–(5) аппроксимируется двухточечной краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_{r,i}}{dt} = A(t)x_{r,i} + M_1^{(1)}K(t,t_{1,0})x_{1,1}(t_{1,0})+$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1} M_{j+1}^{(r)}\cdot K(t,t_{r,j})\cdot x_{r,j+1}(t_{r,j})+$$

$$+\sum_{r=1}^{m-1}(M_{N+1}^{(r)}+M_1^{(r+1)})\cdot K(t,t_{r,N})\cdot x_{r+1,1}(t_{r,N})+$$

$$+M_{N+1}^{(m)}\cdot K(t,t_{m,N})\cdot x_{m,N}(t_{m,N})+f(t),\ t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}],\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N}, \quad (9)$$

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\int_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)x_{p,i}(t)dt = d, \quad d\in R^n mN, \qquad (10)$$

$$\lim_{t\to t_{r,i}-0} x_{r,i}(t) = x_{r,i+1}(t_{r,i}), \quad r=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,N-1}, \qquad (11)$$

$$\lim_{t\to t_{r,N}-0} x_{r,N}(t) = x_{r+1,1}(t_{r,N}), \quad r=\overline{1,m-1}, \qquad (12)$$

$$x_{m,N}(T) = \lim_{t\to T-0} x_{m,N}(t), \qquad (13)$$

где (11), (12), (13) – условия склеивания решения в точках разбиения интервала $(0,T)$.

В задаче (9)–(13) функции $x_{r,i}(t)$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, являются сужениями функций $x_r(t)$ на интервалах $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$.

3. Алгоритмы нахождения численного решения линейной краевой задачи для аппроксимирующего нагруженного дифференциального уравнения

Введем дополнительные параметры $\lambda_{r,i} = x_{r,i}(t_{r,i-1})$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, $\lambda_{m,N+1}=x_{m,N}(t_{m,N})$ и на каждом интервале $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$ произведем замену функции $u_{r,i}(t) = x_{r,i} - \lambda_{r,i}$. Тогда краевая задача (9)–(13) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{du_{r,i}}{dt} = A(t)(u_{r,i}(t) + \lambda_{r,i}) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(t)\lambda_{r,j} + f(t),\ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \quad (14)$$

$$u_{r,i}(t_{r,i-1}) = 0,\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}, \quad (15)$$

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)(u_{p,i}(t) + \lambda_{p,i})dt = d, \quad (16)$$

$$\lambda_{r,i} + \lim_{t\to t_{r,i}-0} u_{r,i}(t) = \lambda_{r,i+1},\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N-1}, \quad (17)$$

$$\lambda_{r,N} + \lim_{t\to t_{r,N}-0} u_{r,N}(t) = \lambda_{r+1,1},\ r = \overline{1,m-1}, \quad (18)$$

$$\lambda_{m,N} + \lim_{t\to t_{m,N}-0} u_{m,N}(t) = \lambda_{m,N+1}, \quad (19)$$

где $\widetilde{K}_{r,j}(t) = \begin{cases} M_j^{(r)}K(t, t_{r,j-1}) \text{ при } j = \overline{1,N-1},\ j = N+1,\ r = \overline{1,m}, \\ (M_{j+1}^{(r)} + M_j^{(r+1)})K(t, t_{r,j}) \text{ при } j = N,\ r = \overline{1,m-1}. \end{cases}$

Задачи (1),(2) и (14)–(19) эквивалентны. Если функция $x^*(t)$ – решение задачи (1),(2), то пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda^*_{1,1}, \lambda^*_{1,2}, \ldots, \lambda_{m,N+1})$, $\lambda^*_{r,i} = x^*(t_{r,i-1})$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, $\lambda^*_{m,N+1} = x^*(t_{m,N})$, $u^*[t] = (u^*_{1,1}(t), u^*_{1,2}(t), \ldots, u^*_{m,N}(t))$, $u^*_{r,i}(t) = x^*(t) - x^*(t_{r,i-1})$, $t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, будет решением задачи (14)-(19).

И наоборот, если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ – решение задачи (14)–(19), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_{r,i} + \widetilde{u}_{r,i}(t)$, $t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m,N+1}$, удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (1) и краевым условиям (2).

Использование фундаментальной матрицы $X(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0, T],$$

позволяет получить единственное решение задачи Коши (14),(15) при фиксированных значениях параметров:

$$u_{r,i}(t) = X(t) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\Big[A(\tau)\lambda_{r,i} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} \widetilde{K}_{r,j}(\tau)\lambda_{r,j} + f(\tau)\Big]d\tau,$$

где $t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$.

Введем обозначения

$$D_{r,i}(t) = X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau, \ r = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,N}, \qquad (20)$$

$$H_{r,i}^{k,j}(t) = X(t_{r,i})\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\widetilde{K}_{k,j}(\tau)d\tau, \qquad (21)$$

$$k, r = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,N}, \ j = \overline{1,N+1},$$

$$F_{r,i}(t) = X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \ r = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,N}. \qquad (22)$$

Учитывая обозначения (20)–(22), определим $\lim\limits_{t\to t_{r,i}-0} u_{r,i}(t)$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, и, подставив их в (16),(17),(18),(19), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_{r,i}$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N+1}$:

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\Bigg[\int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)D_{p,i}(t)dt \cdot \lambda_{p,i} + \int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)dt \cdot \lambda_{p,i} +$$

$$+ \int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1} H_{p,i}^{k,j}(t)\lambda_{k,j}dt\Bigg] = d - \sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}} B(t)F_{p,i}(t)dt, \qquad (23)$$

$$(I + D_{r,i}(t_{r,i}))\lambda_{r,i} + H_{r,i}^{1,1}(t_{r,i})\lambda_{1,1} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1} H_{r,i}^{k,j+1}(t_{r,i})\lambda_{k,j+1} +$$

$$+H_{r,i}^{m,N+1}(t_{r,i})\lambda_{m,N+1}+\sum_{k=1}^{m-1}(H_{r,i}^{k,N+1}(t_{r,i})+$$

$$+H_{r,i}^{k+1,1}(t_{r,i}))\lambda_{k+1,1}-\lambda_{r,i+1}=-F_{r,i}(t_{r,i}),\ r=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N-1}, \tag{24}$$

$$(I+D_{r,N}(t_{r,i}))\lambda_{r,N}+H_{r,N}^{1,1}(t_{r,i})\lambda_{1,1}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}H_{r,N}^{k,j+1}(t_{r,i})\lambda_{k,j+1}+$$

$$+H_{r,N}^{m,N+1}(t_{r,i})\lambda_{m,N+1}+\sum_{k=1}^{m-1}(H_{r,N}^{k,N+1}(t_{r,i})+$$

$$+H_{r,i}^{k+1,1}(t_{r,i}))\lambda_{k+1,1}-\lambda_{r+1,1}=-F_{rN}(t_{r,i}),\quad r=\overline{1,m}, \tag{25}$$

$$(I+D_{m,N}(t_{r,i})\lambda_{m,N}+H_{m,N}^{1,1}(t_{r,i})\lambda_{1,1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}H_{m,N}^{k,j+1}(t_{r,i})\lambda_{k,j+1}+H_{m,N}^{m,N+1}(t_{r,i})\lambda_{m,N+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(H_{m,N}^{k,N+1}(t_{r,i})+H_{m,i}^{k+1,1}(t_{r,i}))\lambda_{k+1,1}-\lambda_{m,N+1}=-F_{m,N}(t_{r,i}). \tag{26}$$

Через $Q_*(h)$ обозначим матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (23)–(26). Тогда эту систему запишем в виде

$$Q_*(h)\cdot\lambda=-F_*(h),\quad \lambda\in R^{nm(N+1)}, \tag{27}$$

где
$F_*(h)=\Big(-d+\sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{p,i-1}}^{t_{p,i}}B(t)F_{p,i}(t)dt, F_{1,1}(0), F_{1,2}(t_{1,1}),\ldots,F_{m,N}(t_{m,N-1})\Big)'\in R^{nm(N+1)}$.

Лемма 1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $N\in\mathbb{N}$ такие, что $mh_0=T$, $Nh=h_0$. Тогда верно следующее:*

а) вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_{m,N}^*)\in R^{nm(N+1)}$, составленный из значений решения $x^*(t)$ задачи (1), (2) в точках разбиения $\lambda_{r,i}^*=x^*(t_{r,i-1})$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N+1}$, удовлетворяет системе (27);

б) если $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{mN}) \in R^{nm(N+1)}$ *является решением системы уравнений (27), а система функций* $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), ..., \widetilde{u}_{m,N}(t))$ *– решением специальной задачи Коши (14), (15) при* $\lambda_{r,i} = \widetilde{\lambda}_{r,i}$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N+1}$, *то функция* $\widetilde{x}(t)$, *определяемая равенствами* $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_{r,i} + \widetilde{u}_{r,i}(t)$, $t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i})$, $r = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N+1}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{,mN} + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_{m,N}(t)$, *является решением задачи (1), (2).*

Доказательство с незначительными изменениями проводится аналогично доказательству леммы 1 из [4].

Используя данную лемму, можно установить, что обратимость матрицы $Q_*(h)$ системы уравнений (27) является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (9)–(13).

Алгоритм нахождения решения аппроксимирующей краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений (14)–(19) основан на построении и решении системы (27). Для этого решаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + P(t), \ x(t_{r,i-1}) = 0, \ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \ r = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,N}. \quad (28)$$

Здесь $P(t)$ либо $(n \times n)$-матрица, либо n-вектор, непрерывный на $[t_{r,i-1}, t_{r,i}]$, $r = \overline{1,m}$. Решением задачи (28) будет либо квадратная матрица, либо вектор размерности n.

Через $E_{*,r,i}(A(\cdot), P(\cdot), t)$ обозначим решение задачи Коши (14),(15) и

$$E_{*,r,i}(A(\cdot), P(\cdot), t) = X(t) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t} X^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau, \ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}]. \quad (29)$$

1 шаг. Пусть выбраны числа $m \in \mathbb{N}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $mh_0 = T$, $Nh = h_0$, где h_0 – шаг разбиения отрезка $[0,T]$, а h – внутренний шаг разбиения частичных отрезков $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1,m}$.

Решая mN задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t), \ x(t_{r,i-1}) = 0, \ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}], \ r = \overline{1,m}, \ i = \overline{1,N}, \quad (30)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \widetilde{K}_{k,j}(t),\ x(t_{r,i-1}) = 0,\ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}],$$
$$r,k = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,N+1}, \qquad (31)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ x(t_{r,i-1}) = 0,\ t \in [t_{r,i-1}, t_{r,i}],\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}, \qquad (32)$$

получим $E_{*,r,i}(A(\cdot), A(\cdot), t)$, $E_{*,r,i}(A(\cdot), \widetilde{K}_{k,j}(\cdot), t)$, $E_{*,r,i}(A(\cdot), f(\cdot), t)$, $r,k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,N+1}$.

2 шаг. Вычислим интегралы

$$\beta_{r,i} = \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} B(t)dt,\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}, \qquad (33)$$

$$\beta_{r,i}(A) = \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} B(t)E_{*,r,i}(A(\cdot), A(\cdot), t)dt,\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}, \qquad (34)$$

$$\beta_{r,i}(f) = \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} B(t)E_{*,r,i}(A(\cdot), f(\cdot), t)dt,\ r = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N}, \qquad (35)$$

$$\beta_{r,i}(\widetilde{K}_{k,j}) = \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} B(t)E_{*,r,i}(A(\cdot), \widetilde{K}_{k,j}(\cdot), t)dt,$$
$$r,k = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,N+1}. \qquad (36)$$

3 шаг. Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_*(h) \cdot \lambda = -F_*(h), \quad \lambda \in R^{nm(N+1)}.$$

Элементы матрицы $Q_*(h) : R^{nm(N+1)} \to R^{nm(N+1)}$ и вектора $F_*(h) \in R^{nm(N+1)}$ определяются равенствами (20), (21), (22), где вместо

$$X(t_{r,i}) \int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau,$$

$$X(t_{r,i})\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)\widetilde{K}_{k,j}(\tau)d\tau, \quad r,k=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{1,N+1},$$

$$X(t_{r,i})\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

в силу (29) можно поставить

$$E_{*,r,i}(A(\cdot),A(\cdot),t), \quad E_{*,r,i}(A(\cdot),\widetilde{K}_{k,j}(\cdot),t), \quad E_{*,r,i}(A(\cdot),f(\cdot),t),$$

$r,k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N+1}$.

Решая систему (27), найдем $\lambda^*_{r,i}$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$. Тем самым находим значения функции $x^*(t)$ в точках нагружения.

4 шаг. Значения функции $x^*(t)$ в остальных точках подинтервала $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$ определяются решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{K}_{r,j}(t)\lambda^*_{r,j}+f(t), \quad t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}],$$

$$x(t_{r,i-1})=\lambda^*_{r,i}, \; r=\overline{1,m}, \; i=\overline{1,N}. \tag{37}$$

Как известно, фундаментальную матрицу удается построить не всегда, поэтому предлагается численная реализация алгоритма нахождения решения задачи (14)–(19), основанная на методе Рунге-Кутта четвертого порядка точности и формуле Симпсона.

Каждый интервал $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, делим на четные $\widetilde{N}$ части с шагом $\widetilde{h}=(t_{r,i}-t_{r,i-1})/\widetilde{N}$.

Предположим, что переменная $\widehat{t}$ на каждом интервале $[t_{r,i-1},t_{r,i}]$ принимает дискретные значения: $\widehat{t}=t_{r,i-1}$, $\widehat{t}=t_{r,i-1}+\widetilde{h},\ldots$, $\widehat{t}=t_{r,i-1}+(\widetilde{N}-1)\widetilde{h}$, $\widehat{t}=t_{r,i}$, и множество таких точек обозначим через $\{t_{r,i-1},t_{r,i}\}$.

Методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности найдем численное решение задач Коши (30)–(32) на множестве $\{t_{r,i-1},t_{r,i}\}$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, и определим значения $(n\times n)$-матриц

$E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),A(\cdot),t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),\widetilde{K}_{k,j}(\cdot),t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),f(\cdot),t)$, $r,k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N+1}$.

Используя значения $(n\times n)$-матриц $E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),A(\cdot),t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),\widetilde{K}_{k,j}(\cdot),t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),f(\cdot),t)$, $r,k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N+1}$, на $\{t_{r,i-1},t_{r,i}\}$ с помощью формулы Симпсона вычислим определенные интегралы

$$\beta^{\widetilde{h}}_{r,i}=\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}}B(t)dt,\quad r=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,N},$$

$$\beta^{\widetilde{h}}_{r,i}(A)=\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}}B(t)E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),A(\cdot),t)dt,\quad r=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,N},$$

$$\beta^{\widetilde{h}}_{r,i}(f)=\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}}B(t)E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),f(\cdot),t)dt,\quad r=\overline{1,m},\quad i=\overline{1,N},$$

$$\beta^{\widetilde{h}}_{r,i}(\widetilde{K}_{k,j})=\int\limits_{t_{r,i-1}}^{t_{r,i}}B(t)E^{\widetilde{h}}_{*,r,i}(A(\cdot),\widetilde{K}_{k,j}(\cdot),t)dt,\ r,k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,N+1}.$$

Построив систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q^{\widetilde{h}}_{*}(h)\cdot\lambda=-F^{\widetilde{h}}_{*}(h),\quad \lambda\in R^{nm(N+1)},$$

найдем $\lambda^{\widetilde{h}}=(\lambda^{\widetilde{h}}_1,\lambda^{\widetilde{h}}_2,...,\lambda^{\widetilde{h}}_{m,N})$, являющиеся значениями решения задачи (14)–(19) в начальных точках подинтервалов, т.е. $x^{\widetilde{h}}(t_{r,i-1})=\lambda^{\widetilde{h}}_{r,i}$, $r=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,N}$.

Значения численного решения в остальных точках подинтервалов найдем, применяя метод Рунге - Кутта четвертого порядка точности к задаче Коши

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{K}_{r,j}(t)\cdot\lambda^{\widetilde{h}}_{r,j}+f(t),\quad t\in[t_{r,i-1},t_{r,i}],$$

$$x(t_{r,i-1}) = \lambda_{r,i}^{\widetilde{h}}, \quad r = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Пример. Рассмотрим на [0,1] краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in (0,1), \quad x \in R^2, \tag{38}$$

$$\int\limits_0^1 B(t)x(t)dt = d, \tag{39}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2t^3 e^{\frac{ts}{2}} \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t(t^2-1) + 1 + \frac{2t}{3} \\ 2t - 3t^2 + 16e^{\frac{t}{2}}t - 32e^{\frac{t}{2}} + 32 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1-e \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Решением задачи (38),(39) является вектор $x^*(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $m = 1$, $N = 5$ ($h_0 = 1$, $h = 0.2$).

На отрезке $[0,1]$ выберем точки $t_{j-1} = (j-1) \cdot 0.2$, $j = \overline{1,6}$. Функцию $K(t,s)x(s)$ представим в виде кубического сплайна. Тогда краевая задача (38),(39) сведется к краевой задаче для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{6} M_j \cdot K(t, t_{j-1}) \cdot x(t_{j-1}) + f(t), \quad t \in (0,1),$$

$$\sum_{i=1}^{5} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^2,$$

где
$$M_1 = M_6 = \frac{3}{38}, \quad M_2 = M_5 = \frac{43}{190}, \quad M_3 = M_4 = \frac{37}{190},$$
– коэффициенты, найденные по формуле (8).

Введем параметры $\lambda_j = x(t_{j-1})$, $j = \overline{1,6}$, и произведя замену $u_i(t) = x(t) - \lambda_i$, $i = \overline{1,5}$, получим краевую задачу вида

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)(u_i + \lambda_i) + \sum_{j=1}^{6} M_j \cdot K(t, t_{j-1})\lambda_j + f(t), \ t \in [t_{i-1}, t_i], \ i = \overline{1,5},$$

$$u_i(t_{i-1}) = 0, \ i = \overline{1,5},$$

$$\sum_{i=1}^{5} \int_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)(u_i(t) + \lambda_i)dt = d,$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \ s = \overline{1,5}.$$

К полученной аппроксимирующей краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения применим численную реализацию предложенного алгоритма.

Каждый интервал $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,5}$, делим на четные $\widetilde{N}$ части с шагом $\widetilde{h} = h/\widetilde{N}$. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности решаем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t), \ x(t_{i-1}) = 0, \ t \in [t_{i-1}, t_i], \ i = \overline{1,5}, \tag{40}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \widetilde{K}_j(t), \ x(t_{i-1}) = 0, \ t \in [t_{i-1}, t_i], \ i = \overline{1,5}, \ j = \overline{1,6}, \tag{41}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \ x(t_{i-1}) = 0, \ t \in [t_{i-1}, t_i], \ i = \overline{1,5}, \tag{42}$$

где $\widetilde{K}_j(t) = M_j \cdot K(t, t_{j-1}), \ j = \overline{1,6}$.

Численное решение задач (40)–(42) обозначим через $E^{\widetilde{h}}_{*,i}(A(\cdot), A(\cdot), t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,i}(A(\cdot), \widetilde{K}_j(\cdot), t)$, $E^{\widetilde{h}}_{*,i}(A(\cdot), f(\cdot), t)$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,6}$, соответственно.

С помощью формулы Симпсона вычислим определенные интегралы

$$\beta_i^{\widetilde{h}} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)dt, \quad i = \overline{1,5},$$

$$\beta_i^{\widetilde{h}}(A) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)E_{*,i}^{\widetilde{h}}(A(\cdot), A(\cdot), t)dt, \quad i = \overline{1,5},$$

$$\beta_i^{\widetilde{h}}(f) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)E_{*,i}^{\widetilde{h}}(A(\cdot), f(\cdot), t)dt, \quad i = \overline{1,5},$$

$$\beta_i^{\widetilde{h}}(\widetilde{K}_j) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} B(t)E_{*,i}^{\widetilde{h}}(A(\cdot), \widetilde{K}_j(\cdot), t)dt, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,6}.$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$Q_*^{\widetilde{h}}(0.2) \cdot \lambda^{\widetilde{h}} = -F_*^{\widetilde{h}}(0.2), \quad \lambda^{\widetilde{h}} \in R^{12}. \tag{43}$$

Решая систему уравнений (43), получим численные значения параметров

$$\lambda_1^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -1.0001427 \\ -1.0001268 \end{pmatrix}, \ \lambda_2^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -1.0001376 \\ -0.9601265 \end{pmatrix}, \ \lambda_3^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -1.0001064 \\ -0.8401167 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -1.0000462 \\ -0.6400609 \end{pmatrix}, \ \lambda_5^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -0.9999429 \\ -0.3598749 \end{pmatrix}, \ \lambda_6^{\widetilde{h}} = \begin{pmatrix} -0.9997505 \\ 0.0006007 \end{pmatrix}.$$

Численные решения в остальных точках подинтервалов найдем, вновь применяя метод Рунге-Кутта четвертого порядка к задаче Коши,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \mathcal{F}_*(t), \quad x(t_{i-1}) = \lambda_i^{\widetilde{h}}, \ \in [t_{i-1}, t_i], \ i = \overline{1,5},$$

где

$$\mathcal{F}_*(t) = \frac{3}{38}K(t,0)\lambda_1^{\widetilde{h}} + \frac{43}{190}K(t,0.2)\lambda_2^{\widetilde{h}} + \frac{37}{190}K(t,0.4)\lambda_3^{\widetilde{h}} +$$
$$+ \frac{37}{190}K(t,0.6)\lambda_4^{\widetilde{h}} + \frac{43}{190}K(t,0.8)\lambda_5^{\widetilde{h}} + \frac{3}{38}K(t,1)\lambda_6^{\widetilde{h}} + f(t).$$

Таблица 1 – Результаты численной реализации построенного алгоритма при выборе чисел $m = 1$, $N = 5$, $\widetilde{N} = 8$ и разность между точным и численным решениями краевой задачи (38), (39).

t	$x_1^{\widetilde{h}}(t)$	$\lvert x_1^*(t) - x_1^{\widetilde{h}}(t)\rvert$	$x_2^{\widetilde{h}}(t)$	$\lvert x_2^*(t) - x_2^{\widetilde{h}}(t)\rvert$
0	-1.0001427	0.0001427	-1.0001268	0.0001268
0.025	-1.0001435	0.0001435	-0.9995018	0.0001268
0.05	-1.0001438	0.0001438	-0.9976268	0.0001268
0.075	-1.0001438	0.0001438	-0.9945018	0.0001268
0.1	-1.0001434	0.0001434	-0.9901268	0.0001268
0.125	-1.0001426	0.0001426	-0.9845018	0.0001268
0.15	-1.0001413	0.0001413	-0.9776267	0.0001267
0.175	-1.0001397	0.0001397	-0.9695016	0.0001266
0.2	-1.0001376	0.0001376	-0.9601265	0.0001265
0.225	-1.0001352	0.0001352	-0.9495012	0.0001262
0.25	-1.0001323	0.0001323	-0.9376257	0.0001257
0.275	-1.0001290	0.0001290	-0.9245001	0.0001251
0.3	-1.0001254	0.0001254	-0.9101242	0.0001242
0.325	-1.0001213	0.0001213	-0.8944980	0.0001230
0.35	-1.0001167	0.0001167	-0.8776214	0.0001214
0.375	-1.0001118	0.0001118	-0.8594944	0.0001194
0.4	-1.0001064	0.0001064	-0.8401167	0.0001167
0.425	-1.0001006	0.0001006	-0.8194885	0.0001135
0.45	-1.0000944	0.0000944	-0.7976094	0.0001094
0.475	-1.0000876	0.0000876	-0.7744795	0.0001045
0.5	-1.0000804	0.0000804	-0.7500985	0.0000985
0.525	-1.0000727	0.0000727	-0.7244663	0.0000913
0.55	-1.0000645	0.0000645	-0.6975827	0.0000827
0.575	-1.0000556	0.0000556	-0.6694477	0.0000727
0.6	-1.0000462	0.0000462	-0.6400609	0.0000609
0.625	-1.0000362	0.0000362	-0.6094221	0.0000471
0.65	-1.0000255	0.0000255	-0.5775312	0.0000312
0.675	-1.0000140	0.0000140	-0.5443879	0.0000129
0.7	-1.0000017	0.0000017	-0.5099919	0.0000081
0.725	-0.9999886	0.0000114	-0.4743429	0.0000321

0.75	-0.9999744	0.0000256	-0.4374407	0.0000593
0.775	-0.9999592	0.0000408	-0.3992848	0.0000902
0.8	-0.9999429	0.0000571	-0.3598749	0.0001251
0.825	-0.9999252	0.0000748	-0.3192107	0.0001643
0.85	-0.9999061	0.0000939	-0.2772917	0.0002083
0.875	-0.9998853	0.0001147	-0.2.41174	0.0002576
0.9	-0.9998628	0.0001372	-0.1896874	0.0003126
0.925	-0.9998383	0.0001617	-0.1440012	0.0003738
0.95	-0.9998116	0.0001884	-0.0970582	0.0004418
0.975	-0.9997824	0.0002176	-0.0488578	0.0005172
1	-0.9997505	0.0002495	0.0006007	0.0006007

Литература

1 Lakshmikantham V., Rao M.R.M. Theory of Integro-Differential Equations. – Gordon Breach, London, 1995.

2 Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос.ун-т, 1957. – 328 с.

3 Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе, 1962.

4 Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation // Comput. Math., Math. Phys. – 2010. – P. 1150-1161.

5 Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations // Ukranian Math. Journal. – 2015. – Vol 66, No 8. – P. 1200-1219.

6 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations //J. Comput., Appl. Math. – 2015. – P. 342-357.

7 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 205 с.

8 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука 1989. – 432 с.

9 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

Статья поступила в редакцию 04.03.2016

Бакирова Э.А., Искакова Н.Б. ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТЫ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІН СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯЛАУ НЕГІЗІНДЕ ТАБУДЫҢ АЛГОРИТМДЕРІ

Интегралдық шарты бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеуң үшін сызықты шеттік есептің сандық шешімін табудың әдісі ұсынылады. Бұл әдіс интегралдық мүшені кубтық сплайнмен аппроксимациялауға және бастапқы есепті жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін сызықты шеттік есепке келтіруге негізделген.

Bakirova E.A., Iskakova N.B. ALGORITHMS FOR FINDING SOLUTIONS OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION BASED ON SPLINE-APPROXIMATION

Method for finding numerical solution of linear boundary value problem for Fredholm integral-differential equation with integral condition is proposed. The method is based on approximation of the integral term by cubic spline and reducing initial problem to linear boundary value problem for loaded differential equations.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 35–57.

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Бижанова Г. И.[1], Шаймарданова М. Н.[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]bizhanova@math.kz
e-mail: [2]makpal.shaimardanova@gmail.com

Аннотация: Изучается одномерная задача для параболического уравнения с производной по времени в граничном условии при невыполнении условий согласования всех необходимых порядков. Показано, что за счет этого возникают сингулярные решения, производные которых имеют особенности в начальный момент времени в окрестности границы. Установлены существование, единственность, оценка регулярного решения задачи в пространстве Гельдера.

Ключевые слова: Граничная задача, уравнение теплопроводности, несогласование начальных и граничных данных, сингулярные и регулярное решения.

1. Введение. Постановка задачи

В работе изучена краевая задача для уравнения теплопроводности с производной по времени в граничном условии в пространстве Гельдера. Такая задача является некорректной по Адамару [1] и для ее разрешимости требуется дополнительное условие на коэффициенты при первых производных решения по пространственным переменным в граничном условии. Подобные задачи изучались в пространствах Соболева и Гельдера, подробную библиографию можно найти в [2].

При решении краевых задач для параболических уравнении в пространствах Гельдера требуется выполнение условий согласования граничных и начальных данных, которые гарантируют непрерывность решения и

Keywords: *Boundary value problem, heat equation, incompatibility of initial and boundary data, singular solutions and regular one.*

2010 Mathematics Subject Classification: AMS 2010: 35K05, 35K20, 35C05, 35B25.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3358/ГФ4.

его допустимых производных в замыкании области. В работе рассматривается случай, когда в задаче не выполнены условия согласования краевых и начальных данных всех необходимых порядков.

Ранее в [3]–[6] были изучены первая, вторая краевые задачи и задача сопряжения для параболических уравнений при невыполненных условиях согласования.

В настоящей статье в разделах 1–3 приводятся постановка задачи, основные определения и сформулированы теоремы 1–3. В разделе 4 найдено решение задачи в явном виде при помощи интегрального преобразования Лапласа, получены сингулярные решения задачи, которые возникли за счет невыполнения условий согласования. Основные теоремы 1–3 о разрешимости задачи, установлении порядка особенностей сингулярных решений приведены в разделе 5.

Пусть $\Omega := (0, \infty)$, $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, $\sigma_T := (0, T)$.

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую параболическому уравнению

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u = f(x, t) \text{ в } \Omega_T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u\mid_{t=0} = u_0(x) \text{ в } \Omega \tag{2}$$

и граничному условию

$$(\partial_t u - b\partial_x u)\mid_{x=0} = \varphi(t),\ t \in \sigma_T. \tag{3}$$

Здесь a, b – положительные постоянные, $\partial_t^k = \partial^k/\partial t^k$, $\partial_x^k = \partial^k/\partial x^k$, k=1,2,... .

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $D_t^k u = u^{(k)}$. Через $C_1, C_2, ...$ будем обозначать положительные постоянные, причем в каждом разделе их нумерация будет начинаться с единицы.

2. Основные определения

Задачу (1)–(3) будем изучать в классическом пространстве Гельдера [7].

Пусть l – нецелое положительное число, $\alpha = l - [l] \in (0, 1)$.

Под $C_x^{2+l,1+l/2}{}_t(\bar\Omega_T)$ будем понимать банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$| u |_{\Omega_T}^{(2+l)} = \sum_{2j_0+j=0}^{2+[l]} | \partial_t^{j_0}\partial_x^j u |_{\Omega_T} + \sum_{2j_0+j=2+[l]} \left([\partial_t^{j_0}\partial_x^j u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [\partial_t^{j_0}\partial_x^j u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}\right) +$$

$$+ \sum_{2j_0+j=1+[l]} [\partial_t^{j_0}\partial_x^j u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},$$

где $| \upsilon |_{\Omega_T} = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_T} | \upsilon |$,

$$[\upsilon]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\Omega_T} \frac{| \upsilon(x,t) - \upsilon(z,t) |}{| x - z |^{\alpha}},$$

$$[\upsilon]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\Omega_T} \frac{| \upsilon(x,t) - \upsilon(x,\tau) |}{| t - \tau |^{\alpha}}.$$

Через $C^l(\bar\sigma_T)$ обозначим банахово пространство функций $u(t)$ с нормой

$$| u |_{\sigma_T}^{(l)} = \sum_{j_0=0}^{[l]} |D_t^{j_0} u|_{\sigma_T} + \left[D_t^{[l]} u\right]_{t,\sigma_T}^{(l-[l])}.$$

При решении краевых задач для параболических уравнений в пространстве Гельдера требуется выполнение условий согласования начальных и краевых данных.

Определим условия согласования начальных и граничных данных для задачи (1)–(3) [7]. Они находятся из граничного условия (3) путем его дифференцирования по t, исключения производных $\partial_t^k u$, найденных из уравнения (1), и использования начального условия (2). Найдем их.

Из уравнения теплопроводности (1) находим производную по времени

$$\partial_t u = a\partial_x^2 u + f(x,t), \tag{4}$$

подставим ее в граничное условие (3)

$$(a\partial_x^2 u + f(x,t) - b\partial_x u)|_{x=0} = \varphi(t)$$

и при $t = 0$ получим

$$(a\partial_x^2 u + f(x,t) - b\partial_x u)|_{x=0,t=0} = \varphi(t)|_{t=0}. \tag{5}$$

В силу начального условия (2) имеем $\partial_x^2 u(x,t)|_{t=0} = u_0''(x),\ \partial_x u(x,t)|_{t=0} = u_0'(x)$.

Подставим полученные выражения в граничное условие (5), тогда будем иметь

$$(au_0''(x) + f(x,0) - bu_0'(x))|_{x=0} = \varphi(0). \tag{6}$$

Для получения условия согласования первого порядка продифференцируем граничное условие (3) по переменной t

$$(\partial_t\partial_t u - b\partial_t\partial_x u)|_{x=0} = \varphi'(t). \tag{7}$$

Вместо производной по времени $\partial_t u$ в граничном условии (7) подставляем полученное из уравнения (1) выражение (4) дважды

$$(a^2\partial_x^4 u + a\partial_x^2 f(x,t) + \partial_t f(x,t) - ab\partial_x^3 u - b\partial_x f(x,t))|_{x=0} = \varphi'(t).$$

Отсюда при $t = 0$ получим

$$(a^2 u_0^{(4)}(x) + a\partial_x^2 f(x,0) + \partial_t f(x,0) - abu_0'''(x) - b\partial_x f(x,0))|_{x=0} = \varphi'(0). \tag{8}$$

Будем говорить, что для задачи (1)–(3) выполнены условия согласования порядка $n = 0, 1, 2, ...$ если имеет место равенство

$$(\partial_t^{n+1} u - b\partial_x \partial_t^n u)|_{x=0,t=0} = \varphi^{(n)}(0),$$

где производные $\partial_t^n u$ определяются по рекуррентным формулам: $\partial_t u = a\partial_x^2 u + f(x,t), \partial_t^2 u = \partial_t(a\partial_x^2 u + f(x,t)) = a^2\partial_x^4 u + a\partial_x^2 f(x,t) + \partial_t f(x,t), ...,\ \partial_t^n u = \partial_t^{n-1}\partial_t u = a\partial_x^2\partial_t^{n-1} u + f_t^{(n-1)}(x,t)$.

В частности, условия согласования нулевого и первого порядка имеют вид (6) и (8) соответсвенно.

Введем обозначения

$$A_0 := \varphi(0) - au_0''(0) - f(0,0) + bu_0'(0), \tag{9}$$

$$A_1 := \varphi'(0) - a^2 u_0^{(4)}(0) + abu_0'''(0) - a\partial_x^2 f(0,0) - \partial_t f(0,0) + b\partial_x f(0,0), \tag{10}$$

$$A_n := \varphi^{(n)}(0) - (\partial_t^{n+1} u - b\partial_x \partial_t^n u)|_{x=0,t=0}. \tag{11}$$

Очевидно, выполнение условия согласования k_0 порядка на границе $x = 0$ означает, что $A_{k_0} = 0$, а при невыполнении условия согласования k_0 порядка $A_{k_0} \neq 0$.

В дальнейшем мы будем использовать повторный интеграл вероятности $i^n \mathrm{erfc} z$ [8]. Он определяется по формулам

$$i^n \mathrm{erfc} z := \int_z^\infty i^{n-1} \mathrm{erfc} \zeta d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{12}$$

$$i^{-1} \mathrm{erfc} z := \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad i^0 \mathrm{erfc} z := \mathrm{erfc} z = \int_z^\infty i^{-1} \mathrm{erfc} \zeta d\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta \tag{13}$$

Для повторных интегралов вероятности $i^n \mathrm{erfc} z$ справедливы следующие соотношения [8]:

$$D_z i^n \mathrm{erfc} z = -i^{n-1} \mathrm{erfc} z, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad (D_z = \frac{d}{dz});$$

$$i^n \mathrm{erfc} 0 = \int_0^\infty i^{n-1} \mathrm{erfc} \zeta d\zeta = \frac{1}{2^n \Gamma(n/2 + 1)}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{14}$$

в частности,

$$\mathrm{erfc}\, 0 = \int_0^\infty i^{-1} \mathrm{erfc}\, \zeta d\zeta = \frac{2}{\Gamma(1/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера;

$$i^n \mathrm{erfc} z = \frac{1}{2n} i^{n-2} \mathrm{erfc} z - \frac{z}{n} i^{n-1} \mathrm{erfc} z, \quad n = 1, 2, ... \quad .$$

Как видно из формул (12), (14), функции $i^n \mathrm{erfc} z$ являются ограниченными при $z \geq 0$:

$$i^n \mathrm{erfc} z \leq i^n \mathrm{erfc} 0, \quad n = -1, 0, 1, ...$$

3. Основные результаты

Приведем основные теоремы настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,1), b > 0$. *Для любых функций* $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $f(x,t) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_T)$, $\varphi(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *не удовлетворяющих на границе* $x=0$ *условию согласования нулевого порядка (то есть* $A_0 \neq 0$, *где* A_0 *определяется по формуле (9)), задача (1)-(3) имеет единственное решение* $u(x,t) = V_0(x,t) + v(x,t)$, *где* $v(x,t) \in C_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T), \partial_t v(0,t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *и справедлива оценка*

$$|v|_{\Omega_T}^{(2+\alpha)} + |\partial_t v(0,t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq C_1\big(|u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |f|_{\Omega_T}^{(\alpha)} + |\varphi - A_0|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big),$$

функция

$$V_0(x,t) = A_0 \int_0^t \mathrm{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma,$$

и ее производная $\partial_x V_0(x,t)$ непрерывны и ограничены в $\overline{\Omega}_T$, а производные $\partial_t V_0(x,t)$, $\partial_x^2 V_0(x,t)$ определяются по формулам

$$\partial_t V_0(x,t) = a\partial_x^2 V_0(x,t) = A_0 \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - A_0 J(x,t),$$

$$J(x,t) = \frac{b}{\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma \tag{15}$$

и являются ограниченными в $\overline{\Omega}_T$, разрывными функциями в точке $x = 0,\ t = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in (0,1),\ k = 0,1,2,....$ *Для любых функций* $u_0(x) \in C^{2+k+\alpha}(\bar{\Omega})$, $f(x,t) \in C_{x\ \ t}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, $\varphi(t) \in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *не удовлетворяющих на границе* $x = 0$ *условиям согласования порядков* $0, ..., \left[\frac{1+k}{2}\right]$ *(то есть* $A_n \neq 0,\ n = 0, ..., \left[\frac{1+k}{2}\right]$, *где* A_n *определяется по формулам (9) – (11)), задача (1) – (3) имеет единственное решение* $u(x,t) = V(x,t) + v(x,t)$, *где* $v(x,t) \in C_{x\ \ t}^{2+k+\alpha,1+\frac{k+\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_T)$, $\partial_t v(0,t) \in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, *и справедлива оценка*

$$|v|_{\Omega_T}^{(2+k+\alpha)} + |\partial_t v(0,t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})} \leq$$

$$\leq C_2\Big(|u_0|_{\Omega}^{(2+k+\alpha)} + |f|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)} + \Big|\varphi - \Sigma_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]}\frac{A_n}{n!}t^n\Big|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})}\Big),$$

а функция $V(x,t)$ определяется по формулам

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} V_n(x,t), \tag{16}$$

$$V_n(x,t) = \frac{A_n}{n! i^{2n}\mathrm{erfc}0}\int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n}\mathrm{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть $b > 0$. Производные $\partial_t^{j_0}\partial_x^j V_n(x,t) = a^{j_0}\partial_x^{2j_0+j}V_n(x,t)$, $2j_0 + j = 0, 1, ...,$ функции $V_n(x,t)$, определяемой по форумуле (17),*

1. непрерывны и ограничены в $\bar{\Omega}_T$ при $2j_0 + j = 0, 1, ..., 2n+1$;

2. при $2j_0 + j = 2n+2$ разрывны в точке $x = 0,\ t = 0$ и ограничены в $\bar{\Omega}_T$;

3. имеют особенность в окрестности точки $x = 0,\ t = 0$ при $2j_0 + j = 2n+3$

$$\partial_t^{j_0}\partial_x^j V_n(x,t) = A_n a^{j_0-n-1}(-2\Gamma(x,t) + \frac{b}{a}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{b}{a}J(x,t))$$

и при $2j_0 + j = 2n+2+p,\ p = 2, 3, ...,$

$$\partial_t^{j_0}\partial_x^j V_n(x,t) = A_n a^{j_0-n-1}\Big(-2\partial_x^{p-1}\Gamma(x,t) - \sum_{q=0}^{p-2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-1-q}\partial_x^q\Gamma(x,t) +$$

$$+\Big(\frac{b}{a}\Big)^p \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \Big(\frac{b}{a}\Big)^p J(x,t)\Big),$$

где интеграл $J(x,t)$ определяется по формуле (15), $\Gamma(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4at}}$ – фундаментальное решение уравнения (1);

4. при $2j_0 + j = 2n+2+p,\ p = 0, 1, ...,$ удовлетворяют оценке

$$|\partial_t^{j_0}\partial_x^j V_n(x,t)| \leq C_3\frac{1}{t^{p/2}}e^{-\frac{x^2}{8at}}. \tag{18}$$

Замечание 1. *Как видно из формул (16), (17), если выполнено условия согласования* k_0 *порядка, то есть* $A_{k_0} = 0$, *то* $V_{k_0}(x,t) = 0$.

4. Вспомогательные задачи

В дальнейшем нам потребуется решение следующий задачи с неизвестной функцией $v(x,t)$:

$$\partial_t v - a\partial_x^2 v = 0 \text{ в } \Omega_T, \tag{19}$$

$$v|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{20}$$

$$(\partial_t v - b\partial_x v)|_{x=0} = \varphi(t), \ t \in \sigma_T, \tag{21}$$

где $b > 0$.

Лемма 1. *Пусть* $b > 0$. *Для любой функции* $\varphi(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, $\alpha \in (0,1)$, *решение задачи (19)–(21) имеет вид*

$$v(x,t) = \int_0^t \varphi(\tau) G(x, t-\tau) d\tau, \tag{22}$$

где

$$G(x,t-\tau) = \int_0^{t-\tau} \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}} d\sigma \equiv$$

$$\equiv -2a \int_0^{t-\tau} \partial_x \Gamma(x+b\sigma, t-\tau-\sigma). \tag{23}$$

Доказательство. Для нахождения решения задачи (19)–(21) применим к задаче интегральное преобразование Лапласа по переменной t.

Через $\tilde{v}(x,p) = L[v]$ будем обозначать преобразование Лапласа по переменной t функции $v(x,t)$:

$$\tilde{v}(x,p) = \int_0^\infty v(x,t) e^{-pt} dt.$$

Учитывая начальное условие (20) и формулу $L[\partial_t v] = p\tilde{v}(x,p) - v(x,0) = p\tilde{v}(x,p)$, запишем уравнение теплопроводности (19) и граничное условие задачи (21) в области изображений Лапласа

$$a\tilde{v}_x'' - p\tilde{v} = 0, \ (p\tilde{v} - b\tilde{v}_x')|_{x=0} = \tilde{\varphi}, \tag{24}$$

где $\tilde{\varphi}(p) = L[\varphi(t)]$.

Ограниченное в области $(0, \infty)$ решение уранения (24) при $x > 0$ имеет вид

$$\tilde{v} = A(p)e^{-rx}, \ r = \sqrt{p}/\sqrt{a}, \tag{25}$$

где $A(p)$ – неизвестная функция от p, подлежащая определению из граничного условия. Подставив в граничное условие (24) функцию (25), найдем

$$A(p) = \frac{\varphi(p)}{p + br}$$

и вместе с ним решение задачи (24) в области изображений Лапласа

$$\tilde{v} = \frac{\varphi(p)}{p + br}e^{-rx}.$$

В силу условий $\mathrm{Re}\ p \geq c_0 > 0$, $\mathrm{Re}\ r \geq c_1 > 0$ и $b > 0$ представим дробь $\frac{1}{p+br}$ в виде

$$\frac{1}{p + br} = \int_0^\infty e^{-(p+br)\sigma} d\sigma,$$

тогда

$$\tilde{v} = \tilde{\varphi}(p) \int_0^\infty e^{-(p+br)\sigma - rx} d\sigma \equiv \tilde{\varphi}(p)\tilde{G}(x, p),$$

где

$$\tilde{G}(x, p) = \int_0^\infty e^{-(p+br)\sigma - rx} d\sigma, \quad G(x, t) = L^{-1}[\tilde{G}(x, p)] =$$

$$= L^{-1}\left[\int_0^\infty e^{-(p+br)\sigma - rx} d\sigma\right].$$

Пользуясь формулой свертки

$$L^{-1}[\tilde{f}_1 \tilde{f}_2] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \tag{26}$$

решение $v(x, t)$ можем записать следующим образом:

$$v(x, t) = L^{-1}[\tilde{v}] = \int_0^t L^{-1}[\tilde{\varphi}(p)](\tau) L^{-1}\left[\tilde{G}(x, p)\right](x, t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t \varphi(\tau) G(x, t-\tau) d\tau. \qquad (27)$$

Для нахождения обратного преобразования ядра $\tilde{G}(x,p) = e^{-p\sigma} e^{-\frac{x+br}{\sqrt{a}}\sqrt{p}}$ сначала получим обратное преобразование функции $e^{-\frac{x+br}{\sqrt{a}}\sqrt{p}}$.

Применяя табличную формулу [9]

$$L^{-1}[e^{-\gamma\sqrt{p}}] = \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\gamma^2}{4t}}, \ \gamma > 0,$$

найдем

$$L^{-1}\left[e^{-\frac{x+br}{\sqrt{a}}\sqrt{p}}\right] = \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi t^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4at}}.$$

Далее, так как [10]

$$L^{-1}[e^{-p\sigma}] = \eta(t-\sigma)\delta(t-\sigma),$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака, действующая по формуле

$$(\delta(t-\sigma), f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\sigma)dt = f(\sigma), \ \eta(t-\sigma) = \begin{cases} 1, \ t \geq \sigma, \\ 0, \ t < \sigma, \end{cases} \qquad (28)$$

по формуле свертки (26) будем иметь

$$G(x,t) = L^{-1}[\tilde{G}(x,p)] = L^{-1}\left[\int_0^\infty e^{-p\sigma} e^{-\frac{x+b\sigma}{\sqrt{a}}\sqrt{p}} d\sigma\right] =$$

$$= \int_0^t d\tau_1 \int_0^\infty \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau_1)}^3} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\tau_1)}} \eta(\tau_1-\sigma)\delta(\tau_1-\sigma)d\sigma.$$

Так как ступенчатая функция $\eta(\tau_1-\sigma)$ равна единице при $\tau_1-\sigma \geq 0$, $\sigma \leq \tau_1$ и нулю при $\sigma \geq \tau_1$ и

$$\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau_1)}^3} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\tau_1)}} = -2a\partial_x\Gamma(x+b\sigma, t-\tau_1),$$

то

$$G(x,t) = -2a \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \partial_x \Gamma(x+b\sigma, t-\tau_1)\delta(\tau_1-\sigma)d\sigma =$$

$$= -2a \int_0^t d\sigma \int_\sigma^t \partial_x \Gamma(x+b\sigma, t-\tau_1)\delta(\tau_1-\sigma)d\tau_1.$$

Учитывая формулу (28) для $\delta(\tau_1-\sigma)$, получим выражение (23).

Из формулы (27) найдем решение задачи (19)–(21) в виде (22)

$$v(x,t) = \int_0^t \varphi(\tau)G(x,t-\tau)d\tau =$$

$$= -2a \int_0^t \varphi(\tau)d\tau \int_0^{t-\tau} \partial_x \Gamma(x+b\sigma, t-\tau-\sigma)d\sigma.$$

Лемма 1 доказана. □

Для выделения из решения задачи (1)– (3) сингулярных при $t = 0$ функций, которые возникают из-за невыполнения условий согласования, рассмотрим модельную задачу с неизвестной функцией $V_n(x,t)$, $n = 0,1,2,...$,

$$\partial_t V_n - a\partial_x^2 V_n = 0 \text{ в } \Omega_T := (0,\infty)\times(0,T), \tag{29}$$

$$V_n|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (\partial_t V_n - b\partial_x V_n)|_{x=0} = \frac{A_n}{n!}t^n, \ t \in \sigma_T, \tag{30}$$

где коэффициент A_n определяется по формуле (11), причем $A_n \neq 0$. Очевидно, в каждой из этих задач не выполнено условие согласования порядка 0 при $n = 0$ и при $n \geq 1$ выполнены условия согласования порядков $0,..,n-1$ и не выполнено – порядка n.

Лемма 2. *Решение $V_n(x,t)$, $n = 0,1,...$, задачи (29), (30) имеет вид*

$$V_n(x,t) = \frac{A_n}{n! i^{2n}\mathrm{erfc}0} \int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n}\mathrm{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma, \tag{31}$$

где повторный интеграл вероятности $i^n\mathrm{erfc}z$ определяется по формулам (12), (13).

Доказательство. (29), (30) есть задача (19)–(21), решение которой согласно лемме 1 имеет вид (22), (23)

$$V_n(x,t) = \frac{A_n}{n!} J_n(x,t), \tag{32}$$

$$J_n(x,t) = \int_0^t \tau^n d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}} d\sigma =$$

$$= \int_0^t d\sigma \int_0^{t-\sigma} \tau^n \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\tau-\sigma)}} d\sigma. \tag{33}$$

Вычислим интеграл $J_n(x,t)$. Для этого сначала рассмотрим интеграл

$$i_n(x,t) = \int_0^t \tau^n \frac{c}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} e^{-\frac{c^2}{t-\tau}} d\tau, \;\; c = \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a}}.$$

В интеграле i_n произведем замену переменной интегрирования $\frac{\tau}{t-\tau} = \zeta$, тогда получим

$$i_n = \frac{ct^{n-1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\zeta^n}{(1+\zeta)^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{c^2(1+\zeta)}{t}} d\zeta.$$

Воспользуемся табличной формулой [11, с. 333, №3. 383, 6]

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+\beta)^{-\nu+1/2} e^{-\mu x} dx = 2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu)\mu^{-1/2} e^{-\frac{\beta\mu}{2}} D_{1-2\nu}(\sqrt{2\beta\mu}),$$

где $\beta \geq 0, \mu > 0, \nu > 0$, $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера, $D_{1-2\nu}(\sqrt{2\beta\mu})$ – функция параболического цилиндра. Положим $\nu = n+1$, $\beta = 1$, $\mu = c^2/t$, тогда

$$i_n = \frac{ct^{n-1/2}}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1/2}\Gamma(n+1)\big(\frac{c^2}{t}\big)^{-1/2} e^{-\frac{c^2}{t}} D_{-2n-1}\big(\sqrt{2}\frac{c}{\sqrt{t}}\big) =$$

$$= 2^{n+1/2}\Gamma(n+1)\frac{t^n}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{c^2}{2t}} D_{-2n-1}\big(\sqrt{2}\frac{c}{\sqrt{t}}\big).$$

Применим формулу, связывающую функцию параболического цилиндра и повторный интеграл вероятности [8, с. 300, №7.2.13],

$$i^m \mathrm{erfc} z = \frac{e^{-z^2/2}}{(2^{m-1}\pi)^{1/2}} D_{-m-1}(\sqrt{2}\, z), \;\; D_{-m-1}(\sqrt{2}\, z) = (2^{m-1}\pi)^{1/2} i^m \mathrm{erfc} z \; e^{z^2/2},$$

с $m = 2n$, $z = c/\sqrt{t}$, тогда получим

$$i_n = 2^{2n} n! t^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{c}{\sqrt{t}}.$$

Подставив найденный интеграл i_n в формулу (33), учитывая, что $c = (x + b\sigma)/2\sqrt{a}$ и вместо t записав $t - \sigma$, будем иметь

$$J_n = 2^{2n} n! \int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{x + b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}} d\sigma,$$

и тогда решение (32) задачи (29), (30) запишется в виде

$$V_n(x,t) = 2^{2n} A_n \int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{x + b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}} d\sigma.$$

Применив формулу (14): $i^{2n}\mathrm{erfc}0 = \frac{1}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2^{2n} n!}$, найдем

$$V_n(x,t) = \frac{A_n}{n! i^{2n} \mathrm{erfc} 0} \int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{x + b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}} d\sigma.$$

Мы получили решение (31) задачи (29), (30).

Функция (22) с $\varphi(t) = \frac{A_n}{n!} t^n$, которую мы свели к виду (31), удовлетворяет уравнению теплопроводности (19) за счет производной $\partial_x \Gamma$.

Покажем, что построенная функция $V_n(x,t)$ удовлетворяет граничному условию (30). Действительно,

$$\partial_t V_n - b\partial_x V_n = \frac{A_n}{n! i^{2n} \mathrm{erfc} 0} \int_0^t (\partial_t - b\partial_x) \Big((t-\sigma_1)^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{x + b\sigma_2}{2\sqrt{a(t-\sigma_1)}} \Big) \Big|_{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma} d\sigma =$$

$$= -\frac{A_n}{n! i^{2n} \mathrm{erfc} 0} \int_0^t (\partial_{\sigma_1} + \partial_{\sigma_2}) \Big((t-\sigma_1)^n i^{2n} \mathrm{erfc} \frac{x + b\sigma_2}{2\sqrt{a(t-\sigma_1)}} \Big) \Big|_{\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma} d\sigma =$$

$$= -\frac{A_n}{n! i^{2n}\mathrm{erfc}0}\int_0^t \frac{d}{d\sigma}\Big((t-\sigma)^n i^{2n}\mathrm{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}\Big)\Big|_{\sigma_1=\sigma_2=\sigma} d\sigma =$$

$$= \frac{A_n}{n! i^{2n}\mathrm{erfc}0} t^n i^{2n}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

Отсюда получим

$$(\partial_t V_n - b\partial_x V_n)|_{x=0} = \frac{A_n}{n!} t^n.$$

Таким образом, функция V_n удовлетворяет граничному условию (30), а также нулевому начальному условию.

Лемма 2 доказана. □

Для определения порядка особенности производных сингулярных функций $V_n(x,t)$, которые возникают из-за невыполнения условий согласования, изучим потенциал двойного слоя в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть $b > 0$. Производные функции*

$$w(x,t) = \int_0^t \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\sigma)^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma = \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - J(x,t), \quad (34)$$

$$J(x,t) = \frac{b}{\sqrt{a\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma, \ b > 0, \quad (35)$$

могут быть представлены в виде

$$\partial_x w(x,t) = -2\Gamma(x,t) + \frac{b}{a}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{b}{a}J(x,t), \quad (36)$$

$$\partial_x^{2j_0+j} w(x,t) = -2\partial_x^{2j_0+j-1}\Gamma(x,t) - 2\sum_{q=0}^{2j_0+j-2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j-1-q}\partial_x^q\Gamma(x,t) +$$

$$+\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j} J(x,t), \ 2j_0+j = 2,3,..., \quad (37)$$

и для них справедлива оценка

$$|\partial_t^{j_0}\partial_t^{j} w(x,t)| \le C_1 \frac{1}{t^{\frac{2j_0+j}{2}}} e^{-\frac{x^2}{8at}}, \ (x,t)\in\bar{\Omega}_T, \ 2j_0+j = 0,1,..., \quad (38)$$

где $\Gamma(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности (1).

Доказательство. В интеграле (34) произведем замену $\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}=\zeta$, тогда получим

$$w(x,t)=\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}-J(x,t), \tag{39}$$

где $J(x,t)$ определяется по формуле (35). Непосредственными оценками констант Гельдера интеграла $J(x,t)$ можно показать, что $J(x,t)\in C_{x\ t}^{\beta,\gamma}(\bar\Omega_T)$, $\beta\in(0,1),\gamma\in(0,1/2)$ в $\bar\Omega_T$ и $J(x,t)\le C_2\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{8at}}$.

Оценим производные интеграла $J(x,t)$, учитывая, что $J_t-aJ_{xx}=0$.

Итак, имеем

$$J_x=-\frac{b}{a}\int_0^t\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\sigma)^3}}e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}}d\sigma=-\frac{b}{a}\Big(\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}-J(x,t)\Big), \tag{40}$$

$$J_{xx}=2\frac{b}{a}\Gamma(x,t)-\Big(\frac{b}{a}\Big)^2\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}+\frac{b^2}{a^2}J(x,t),$$

где $\Gamma(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ - фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворят оценке

$$|\partial_t^{j_0}\partial_x^j\Gamma(x,t)|\le\frac{C_3}{t^{\frac{1+2j_0+j}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}}. \tag{41}$$

Докажем методом математической индукции рекуррентную формулу

$$\partial_x^pJ(x,t)=2\sum_{q=0}^{p-2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-1-q}\partial_x^q\Gamma(x,t)-\Big(\frac{b}{a}\Big)^p\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}+\Big(\frac{b}{a}\Big)^pJ(x,t),\ p=2,3,\dots . \tag{42}$$

При $p=2$ формула (42) верна. Пусть она справедлива при $p-1$, $p\ge3$,

$$\partial_x^{p-1}J(x,t)=2\sum_{q=0}^{p-3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-2-q}\partial_x^q\Gamma(x,t)-\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-1}\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}+\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-1}J(x,t).$$

Продифференцируем это равенство по x и примем во внимание соотношение (40), тогда

$$\partial_x^pJ=2\sum_{q=0}^{p-3}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-2-q}\partial_x^{q+1}\Gamma(x,t)+2\Big(\frac{b}{a}\Big)^{p-1}\Gamma(x,t)-\Big(\frac{b}{a}\Big)^p\Big(\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}-J(x,t)\Big)$$

и после замены $q_1 = 1 + q$ в сумме мы получим формулу (42).

Обратимся к функции (39). Так как $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $w_t = aw_{xx}$, то

$$\partial_t^{j_0}\partial_x^j w(x,t) = a^{j_0}\partial_x^{2j_0+j}w(x,t),\ 2j_0 + j = 0, 1, ...,$$

$$w_x(x,t) = -2\Gamma(x,t) + \frac{b}{a}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{b}{a}J(x,t), \tag{43}$$

$$w_{xx}(x,t) = -2\Gamma_x(x,t) - 2\frac{b}{a}\Gamma(x,t) + \Big(\frac{b}{a}\Big)^2\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \Big(\frac{b}{a}\Big)^2 J(x,t),$$

$$\partial_x^{2j_0+j}w(x,t) = -2\partial_x^{2j_0+j-1}\Gamma(x,t) - \partial_x^{2j_0+j}J(x,t),\ 2j_0 + j = 1, 2, ...\ .$$

Применим к производной интеграла $J(x,t)$ формулу (42) с $p = 2j_0+j = 2, 3, ...$, тогда мы получим

$$\partial_x^{2j_0+j}w(x,t) = -2\partial_x^{2j_0+j-1}\Gamma(x,t) - 2\sum_{q=0}^{2j_0+j-2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j-1-q}\partial_x^q\Gamma(x,t)+$$

$$+\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j}\mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}} - \Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j}J(x,t).$$

Учитывая оценки (41) для $\Gamma(x,t)$,

$$\mathrm{erfc}z \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\int_z^\infty e^{-\frac{\zeta^2}{2}}d\zeta \le \sqrt{2}e^{-\frac{z^2}{2}},$$

а также оценку интеграла $J(x,t) \le C_2\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{8at}}$ в $\bar{\Omega}_T$, будем иметь

$$|\partial_x^{2j_0+j}w(x,t)| \le C_4\frac{1}{t^{\frac{2j_0+j}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}} + C_5\sum_{q=0}^{2j_0+j-2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j-1-q}\frac{1}{t^{\frac{q+1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}}+$$

$$+\sqrt{2}\Big(\frac{b}{a}\Big)^{2j_0+j}e^{-\frac{x^2}{8at}} + C_6\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{8at}}.$$

Отсюда и из (39), (43) будет следовать

$$|\partial_x^{2j_0+j}w(x,t)| \le \big(C_7\frac{1}{t^{\frac{2j_0+j}{2}}} + C_8 + C_6\sqrt{t}\big)e^{-\frac{x^2}{8at}},\ 2j_0 + j = 2, 3, ...,$$

$$|w_x(x,t)| \le \Big(C_9\frac{1}{t^{1/2}} + C_{10} + C_{11}\sqrt{t}\Big)e^{-\frac{x^2}{8at}},$$

$$|w(x,t)| \le \big(C_{12} + C_{13}\sqrt{t}\big)e^{-\frac{x^2}{8at}}.$$

Объединив три последние оценки, получим

$$|\partial_t^{j_0}\partial_x^j w(x,t)| = a^{j_0}|\partial_x^{2j_0+j}w(x,t)| \le C_1\frac{1}{t^{\frac{2j_0+j}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}},\ 2j_0+j=0,1,...,$$

а это есть требуемая оценка (38).

Лемма 3 доказана. □

5. Доказательство теорем 1–3

В разделе 4 мы построили функции $V_n(x,t),\ n=0,1,2,...,$ (см. (31)) – решения вспомогательных задач (29)–(30), в которых не выполнены условия согласования порядка n. Эти функции позволят нам свести задачу (1)–(3) к задаче, в который заданные функции будут подчиняться всем условиям согласования.

Доказательство теоремы 1. В задаче (1)–(3) произведем замену

$$u(x,t) = V_0(x,t) + v(x,t),$$

где $v(x,t)$ – новая неизвестная функция,

$$V_0(x,t) = A_0\int_0^t \operatorname{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma$$

– решение задачи (29), (30) с $n=0,\ A_0 := \varphi(0) - au''(0) - f(0,0) + bu_0'(0)$, тогда для функции $v(x,t)$ мы получим задачу

$$\partial_t v - a\partial_x^2 v = f \text{ в } \Omega_T, \tag{44}$$

$$v|_{t=0} = u_0(x) \text{ в } \Omega, \tag{45}$$

$$(\partial_t v - b\partial_x v)|_{x=0} = \varphi(t) - A_0,\ t\in\sigma_T. \tag{46}$$

Покажем, что в задаче (44)–(46) выполнено условие согласования нулевого порядка. Подставив $\partial_t v = f + a\partial_x^2 v$ в граничное условие (46)

$(f(x,t) + a\partial_x^2 v(x,t) - b\partial_x v(x,t))|_{x=0} = \varphi(t) - A_0$ и используя начальное условие (45), мы получим при $t = 0$ равенство

$$f(0,0) + au_0''(0) - bu_0'(0) = \varphi(0) - \varphi(0) + au_0''(0) + f(0,0) - bu_0''(0).$$

Таким образом, в задаче (44)–(46) выполнено условие согласования нулевого порядка и согласно [2] при условиях теоремы 1 задача (44)–(46) имеет единственное решение $v(x,t) \in C_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\partial_t v(0,t) \in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\bar{\sigma}_T)$, и для него справедлива оценка

$$|v|_{\Omega_T}^{(2+\alpha)} + |\partial_t v(0,t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq C_1\big(|u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |f|_{\Omega_T}^{(\alpha)} + |\varphi - A_0|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big).$$

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. В задаче (1)–(3) произведем замену

$$u(x,t) = V(x,t) + v(x,t),$$

где $v(x,t)$ – новая неизвестная функция,

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} V_n(x,t),$$

$$V_n(x,t) = \frac{A_n}{n! i^{2n}\mathrm{erfc} 0}\int_0^t (t-\sigma)^n i^{2n}\mathrm{erfc}\frac{x + b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma,$$

$V_n(x,t)$ – решение задачи (29), (30), $n = 0, ..., [\frac{1+k}{2}]$, величина A_n определяется по формулам (9)–(11). Тогда для функции $v(x,t)$ мы получим задачу

$$\partial_t v - a\partial_x^2 v = f \text{ в } \Omega_T, \tag{47}$$

$$v|_{t=0} = u_0(x) \text{ в } \Omega, \tag{48}$$

$$(\partial_t v - b\partial_x v)|_{x=0} = \varphi(t) - \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} \frac{A_n}{n!}t^n,\ t \in \sigma_T. \tag{49}$$

Покажем, что в задаче (47)–(49) выполнены условия согласования порядков $n = 0, ..., [\frac{1+k}{2}]$.

Подставив $\partial_t v = f + a\partial_x^2 v$ в граничное условие (49) $(f(x,t)+a\partial_x^2 v(x,t)-b\partial_x v(x,t))|_{x=0} = \varphi(t) - \Sigma_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]}\frac{A_n}{n!}t^n$, мы получим при $t=0$ равенство

$$f(0,0)+au_0''(0)-bu_0'(0)=\varphi(0)-A_0,$$

которое означает, что условие согласования нулевого порядка выполнено.

Продифференцируем по t граничное условие (49), воспользуемся уравнением (47) и начальным условием (48), тогда получим тождество

$$a^2u_0^4+a\partial_x^2 f(0,0)+\partial_t f(0,0)-abu_0'''(0)-f(0,0)=\varphi'(0)-A_1,$$

здесь A_1 определяется по формуле (10)

Условие согласования n-го порядка имеет вид

$$(\partial_t^{n+1}u-b\partial_x\partial_t^n u)|_{x=0,t=0}=\varphi^{(n)}(0)-A_n,$$

где $A_n := (\varphi^{(n)}(0)-(\partial_t^{n+1}u-b\partial_x\partial_t^n u))|_{x=0,t=0}$, это означает, что условие согласования n-го порядка для задачи (47)–(49) выполнено, $n=0,1,...,[\frac{1+k}{2}]$.

Мы видим, что в задаче (47) – (49) выполнены условия согласования порядков $0,1,...,[\frac{1+k}{2}]$, тогда при выполнении условий теоремы 2 [2] задача (47)–(49) имеет единственное решение $v(x,t)\in C_x^{2+k+\alpha,1+\frac{k+\alpha}{2}}{}_t(\bar\Omega_T)$, $\partial_t v(0,t)\in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\bar\sigma_T)$, и для него справедлива оценка

$$|v|_{\Omega_T}^{(2+k+\alpha)}+|\partial_t(0,t)|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})}\leq$$

$$\leq C_2\Big(|u_0|_{\Omega}^{(2+k+\alpha)}+|f|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)}+\Big|\varphi-\Sigma_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]}\frac{A_n}{n!}t^n\Big|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})}\Big).$$

Теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3. П.1. Функция $V_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\partial_t V_n = a\partial_x^2 V_n$. Рассмотрим ее производные $\partial_t^{j_0}\partial_x^j V_n(x,t) = a^{j_0}\partial_x^{2j_0+j}V_n(x,t)$. Учитывая формулы $D_z i^n\mathrm{erfc} z = -i^{n-1}\mathrm{erfc} z$, $i^{2n}\mathrm{erfc}0=\frac{1}{2^{2n}n!}$, при $2j_0+j=p$, $p=0,1,...,2n$, получим

$$\partial_x^p V_n(x,t)=(-1)^p\frac{2^{2n-p}}{a^{p/2}}A_n\int_t^0(t-\sigma)^{n-p/2}i^{2n-p}\mathrm{erfc}\frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}}d\sigma,$$

$$\partial_x^{2n} V_n(x,t) = \frac{A_n}{a^n} \int_0^t \operatorname{erfc} \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a(t-\sigma)}} d\sigma,$$

$$\partial_x^{2n+1} V_n(x,t) = -\frac{A_n}{a^n \sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma.$$

Из этих формул следует, что при $2j_0 + j = 0, 1, \ldots, 2n+1$ производные $\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t)$ непрерывны и ограничены в $\bar{\Omega}_T$.

П.2. Рассмотрим производную

$$\partial_x^{2n+2} V_n(x,t) = \frac{A_n}{a^{n+1}} \int_0^t \frac{x+b\sigma}{2\sqrt{a\pi(t-\sigma)^3}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma \equiv$$

$$\equiv \frac{A_n}{a^{n+1}} w(x,t) = A_n a^{-n-1} \Big(\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - J(x,t) \Big), \tag{50}$$

$$J(x,t) = \frac{b}{\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x+b\sigma)^2}{4a(t-\sigma)}} d\sigma.$$

Функция

$$\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \text{ в } \Omega_T$$

является ограниченной в $\overline{\Omega}_T$, разрывной в точке $x = 0$, $t = 0$, действительно,

$$\lim_{t\to 0} \lim_{x\to 0} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = 1, \ \lim_{x\to 0} \lim_{t\to 0} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = 0,$$

а интеграл $J(x,t)$ непрерывен и ограничен в $\overline{\Omega}_T$.

П.3. Последующие производные функции (50), которая выражается через функцию $w(x,t)$, вычислим по формулам (36), (37).

При $2j_0 + j = 2n+3$ $(p = 1)$ в силу (43) имеем

$$\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t) = A_n a^{j_0-n-1} \partial_x w(x,t) =$$

$$= A_n a^{j_0-n-1} \Big(-2\Gamma(x,t) + \frac{b}{a} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{b}{a} J(x,t) \Big) \tag{51}$$

и при $2j_0 + j = 2n + 2 + p, \ p = 2, 3, ...$, найдем

$$\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t) = a^{j_0} \partial^{2j_0+j} V_n(x,t) = a^{j_0} \partial_x^{2n+2+p} V_n(x,t) =$$

$$= A_n \, a^{j_0-n-1} \partial_x^p w(x,t) = A_n a^{j_0-n-1} \Big(-2\partial_x^{p-1} \Gamma(x,t) - 2 \sum_{q=0}^{p-2} \left(\frac{b}{a}\right)^{p-1-q} \partial_x^q \Gamma(x,t) +$$

$$+ \left(\frac{b}{a}\right)^p \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} - \left(\frac{b}{a}\right)^p J(x,t) \Big). \qquad (52)$$

В выражениях (51), (52) содержится фундаментальное решение уравнения (1) $\Gamma(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$ и его производные, т.е. производные $\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t)$ не ограничены в точке $x = 0, \ t = 0$.

П.4. Привлекая оценку (38) производной функции $w(x,t)$, из формул (50), (51), (52) получим требуемое неравенство

$$|\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t)| \le C_3 \frac{1}{t^{p/2}} \, e^{-\frac{x^2}{8at}}. \qquad (53)$$

Из этой оценки видно, что особенность производных сингулярных решений $\partial_t^{j_0} \partial_x^j V(x,t)$ при $2j_0 + j = 2n + 2 + p, \ p = 1, 2, ...$ находится в окрестности точки $x = 0$ при $t \to 0$. Действительно, пусть $x \ge r_0 > 0$. Применив формулу

$$|\xi|^\alpha e^{-\xi^2} \le C_\alpha e^{-\xi^2/2}, \ \alpha > 0,$$

из оценки (53) получим

$$|\partial_t^{j_0} \partial_x^j V_n(x,t)| \le C_3 \frac{1}{t^{p/2}} \, e^{-\frac{x^2}{8at}} \le C_3 \frac{1}{t^{p/2}} \, e^{-\frac{{r_0}^2}{8at}} \le C_4 \frac{1}{{r_0}^p} \, e^{-\frac{{r_0}^2}{16at}}.$$

Это неравенство показывает, что при $x_0 \ge r_0$ производные ограничены при любом t и стремятся к нулю при $t \to 0$.

Теорема 3 доказана. □

Литература

1 Темирбулатов С.И. Задача теплопроводности с производной по времени в граничном условии // Диффернц. уравнения. – 1993. – № 10. – С. 666-673.

2 Бижанова Г.И., Солонников В.А. О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5, № 1. – С. 109-142 (English transl. St-Petersburg Math.J. – 1994. – V. 5. – № 1. – P. 97-124).

3 Бижанова Г.И. Решение а пространствах Гелдера краевых задач для параболических уравнений при рассоглассовании начальных и краевых данных // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2010. – Т. 36. – С. 12-30.

4 Bizhanova G.I. Classical solution of nonregular conjunction problem for the heat equation // Математический журнал. – Алматы. – 2010. – Т. 10. – С. 37-48.

5 Bizhanova G.I. On the classical solvability of boundary value problems for parabolic equations with incompatible initial and boundary data // Progress in nonlinear differential equations and their applications. – 2011. – Т. 80. – С. 57-80.

6 Бижанова Г.И. Сингулярные решения в задачах для параболических уравнений при рассогласовании начальных и краевых данных // Математический журнал. – Алматы. – 2012. – Т. 12. – № 3. – С 55-64.

7 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уранения параболического типа // Москва, 1967. – 736 с.

8 Абрамовиц М. и Стиган И. Справочник по специальным функциям // Москва, 1979. – 832 с.

9 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теорий функций комплексного переменного. – Москва, 1958. – 678 с.

10 Бижанова Г.И. Применение интегральных преобразований к решению краевых задач для параболических уравнений // Алматы. Институт математики МОН РК. – 1997. – 52 с.

11 Градштейн М.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // Москва, 1971. – 1108 с.

Статья поступила в редакцию 30.03.2016

Бижанова Г.И., Шаймарданова М.Н. ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫНДА УАҚЫТ БОЙЫНША ТУЫНДЫСЫ БАР ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ ҮШІН РЕГУЛЯРЛЫ ЕМЕС ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ

Шекаралық шартында уақыт бойынша туындысы бар параболалық теңдеу үшін бірөлшемді есеп барлық қажетті ретті келісім шарттары орындалмаған жағдайда зерттеледі. Сол себепті шекараның аймағында туындыларының уақыттың бастапқы мезетінде ерекшеліктері бар сингулярлы шешімдер туындайтыны көрсетілген. Гельдер кеңістігіндегі есептің регулярлы шешімінің бар болуы, жалғыздығы мен бағалауы дәлелденген.

Bizhanova G.I., Shaimardanova M.N. SOLUTION OF THE NONREGULAR PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH THE TIME DERIVATIVE IN THE BOUNDARY CONDITIONS

There is studied one dimensional problem for a parabolic equation with a time derivative in the boundary condition with non fulfillment of the compatibility conditions of all necessary orders. It is shown due to this there are appeared singular solutions, the derivatives of which have the singularities at an initial moment in the vicinity of a boundary. Existence, uniqueness, estimate of the regular solution is proved in the Hölder space.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 58–76.

УДК 517.977

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Ф. Валеев[1], А. Ескермесулы[2], Э.А. Назирова[3]

[1]Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
450000, Уфа, Россия, ул.Чернышевского, 112, e-mail: [1]ValeevNF@yandex.ru

[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
010000, Астана, Казахстан, ул.Сатпаева, 2, e-mail: [2]aleke1410@gmail.com

[3]Башкирский государственный универститет
450000, Уфа, Россия, ул.Заки Валиди, 32, e-mail: [3]ellkid@gmail.com

Аннотация: В работе предлагается новый подход к исследованию асимптотического поведения решений при больших значениях x сингулярных линейных дифференциальных уравнений вида

$$-\frac{d^n}{dx^n}y(x,\lambda)+q(x)y(x,\lambda)=\lambda y$$

с нерегулярно растущим при $x\to\infty$ потенциалом $q(x)$. Идея построения асимптотики решений сингулярных линейных дифференциальных уравнений и ее эффективность показаны на уравнениях 4-го порядка с осциллирующими потенциалами.

Ключевые слова: Асимптотические формулы решений дифференциальных уравнений, L-диагональные системы.

1. Постановка задачи

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших значениях x фундаментальных систем решений (далее ФСР) линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка со спектральным параметром $\lambda\in\mathbb{C}$ вида

Keywords: *L-diagonal systems, asymptotic formulas for the solutions of differential equations.*

2010 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Гранты № 15-01-01095/А, 5499/ГФ4.

$$-y^{(4)}(x,\lambda)+q(x)y(x,\lambda)=\lambda y, \qquad x\in(0,\infty). \tag{1.1}$$

Асимптотическое поведение при $x\to\infty$ ФСР таких уравнений хорошо изучено в случае, когда потенциал $q(x)$ имеет некоторое "правильное" или "регулярное" поведение при больших значениях x.

Под регулярностью понимается следующее: функция $q(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой, функции $q'(x)$ и $q''(x)$ не меняют знак для $x\in[c,+\infty)$, где c – фиксированное положительное число, а так же выполняется

$$q(x)\to+\infty,\ \ x\to\infty,$$

$$q'(x)=o(q^{\gamma}(x)),\ \ 0<\gamma<\frac{5}{4},\ \ x\to\infty.$$

В совокупности такие условия принято называть условиями Титчмарша-Левитана.

Известно [1], что для таких потенциалов ФСР уравнения (1.1) имеет следующую асимптотику

$$y_k(x,\lambda)\sim\frac{1}{[\mu_k(x,\lambda)]^{\frac{3}{2}}}\ \exp\Big\{\int\limits_{x_0}^{x}\mu_k(t,\lambda)dt\Big\}, \tag{1.2}$$

где $\mu_k(x,\lambda),\ k=1,2,3,4,$ – корни уравнения $\mu^4(x,\lambda)=q(x)-\lambda$.

Значительно меньше изучен случай, когда потенциал $q(x)$ не удовлетворяет условиям регулярности Титчмарша-Левитана. Примером таких нерегулярных потенциалов могут, например, служить функции вида $q(x)=q_1(x)+f(x)$, где $q_1(x)$ – регулярная функция, а $f(x)$

$$f(x)=\sum a_k(x)\cdot S_k\left(\varphi_k(x)\right), \tag{1.3}$$

где $S_k(t)$ – периодическая функция, а $a_k(x)$, $\varphi_k(x)$ – достаточно гладкие монотонные функции.

Уравнения типа (1.1) с подобными потенциалами ранее изучались в работах: [2], [1], [3], [4] и др. В частности, для уравнений

$$-y''+(q(x)+h(x))y=\lambda y$$

характерным требованием для построения асимптотики являлось следующее: функция

$$g(x)=\int\limits_{x}^{\infty}\frac{h(t)}{\sqrt{q(t)}}dt$$

должна быть суммируема на некотором интервале $[x_0,+\infty)$. При этом условии в работах [5], [6] асимптотические формулы для ФСР были построены с помощью сведения исходного уравнения к системе интегральных уравнений и применения принципа сжимающих отображений. В работе [4] для исследования асимптотических формул ФСР был применен существенно иной подход, основанный на последовательных матричных преобразованиях, позволяющих приводить уравнение (1.1) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, обладающей свойством L-диагональности (см. [7]).

Целью нашей работы является построение асимптотических формул при $x\to\infty$ для ФСР уравнения

$$-y^{(4)}+(q(x)+h(x))y=\lambda y,$$

где $q(x)$ – регулярный потенциал, $h(x)$ – так называемое "быстро осциллирующее" возмущение вида (1.3). Для построения асимптотик мы воспользуемся методом, предложенным в работе [4].

2. Основной результат

Рассмотрим следующее уравнение

$$-y^{(4)}(x,\lambda)+(q(x)+h(x))y(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda), \tag{2.1}$$

где $\lambda\in\mathbb{C},\ \ x\in(0,\infty)$.

Функция $q(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией и удовлетворяет условиям регулярности типа Титчмарша–Левитана, а именно: $q''(x),\ q'(x)$ не меняют знак для достаточно больших x и

$$q(x)\to+\infty,\quad q'(x)=o(q^{\gamma}(x)),\ \ 0<\gamma<5/4,\ x\to+\infty.$$

Далее для построения асимптотических формул для ФСР уравнения (2.1) при $x\to\infty$ мы преобразуем исходное уравнение к так называемой L-диагональной системе линейных дифференциальных уравнений (см. [7]) (с "почти" диагональной правой частью). При проведении преобразований будут сформулированы условия на функцию $h(x)$. Затем в конце пункта сформулируем основное утверждение работы – теорему об асимптотике решений уравнения (2.1).

Перейдем от уравнения (2.1) к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя в рассмотрение вектор-столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix},$$

$$Y' = A \cdot Y = (A_0 + A_1)Y, \tag{2.2}$$

$$A_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q(x)-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $A_0(x,\lambda)$. Обозначим через $\mu(x,\lambda)$ главное значение корня $\mu(x,\lambda) = \sqrt[4]{q(x)-\lambda}$.

Тогда собственные значения матрицы A_0 суть

$$\mu_1(x,\lambda) = \mu(x,\lambda), \ \ \mu_2(x,\lambda) = i\mu(x,\lambda),$$

$$\mu_3(x,\lambda) = -\mu(x,\lambda), \ \ \mu_4(x,\lambda) = -i\mu(x,\lambda).$$

Обозначим

$$\mu_0(x,\lambda) = \sqrt[4]{1 - \frac{\lambda}{q(x)}}.$$

Заметим, что

$$\mu_0(x,\lambda) = 1 + o(1) \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Пусть

$$T(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mu^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $T(x,\lambda)$ приводит $A_0(x,\lambda)$ к диагональному виду

$$T^{-1}A_0T = \Lambda(x,\lambda),$$

$$\Lambda(x,\lambda) = diag\{\mu_1(x,\lambda), \mu_2(x,\lambda), \mu_3(x,\lambda), \mu_4(x,\lambda)\} = \mu(x,\lambda)\Lambda_0,$$

где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Замена

$$Y = T \cdot Z, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

преобразует систему (2.2) к виду

$$Z'(x,\lambda) = \left(\mu(x,\lambda)\Lambda_0 + \frac{h(x)}{4\mu^3(x,\lambda)}M_0 + \frac{\mu'(x,\lambda)}{2\mu(x,\lambda)}K_0\right) Z(x,\lambda), \tag{2.4}$$

где

$$\frac{h(x)}{4\mu^3(x,\lambda)}M_0 = T^{-1}A_1T, \quad \frac{\mu'(x,\lambda)}{2\mu(x,\lambda)}K_0 = T^{-1}T',$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} 3 & -1+i & -1 & -1-i \\ -1-i & 3 & -1+i & -1 \\ -1 & -1-i & 3 & -1+i \\ -1+i & -1 & -1-i & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее в системе дифференциальных уравнений (2.4) перейдем к новым переменным, полагая

$$\xi = \int_0^x q^{\frac{1}{4}}(t)dt, \quad x = g(\xi), \quad Z(x) = U(\xi). \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\phi(\xi,\lambda) = \frac{h(x)}{4q(x)\mu_0^3}, \quad \omega(\xi,\lambda) = \frac{q'(x)}{8(q(x)-\lambda)q^{\frac{1}{4}}(x)}.$$

Тогда получим новую систему линейных дифференциальных уравнений

$$U'_\xi(\xi,\lambda) = (\mu_0\Lambda_0 + \phi(\xi,\lambda)M_0 + \omega(\xi,\lambda)K_0)\,U(\xi,\lambda). \tag{2.6}$$

Классичесчкие методы построения асимптотики ФСР для систем дифференциальных уравнений вида (2.6) основаны на повторной диагонализации правой части системы уравнений с заменой вида (2.3). В данном случае эти методы приведут систему (2.6) к L-диагональному виду при условии $\phi'(\xi,\lambda) \in L_1(\xi_0,+\infty)$, $\xi_0 > 0$. Задача построения асимптотики ФСР (2.1), когда $\phi'(\xi,\lambda) \in L_1(\xi_0,+\infty)$, – хорошо изучена, асимптотику ФСР уравнения (2.1) с быстроосциллирующим возмущением

$$h(x) = \sum a_k(x)\cdot S_k\left(\varphi_k(x)\right)$$

этим методом построить не удается.

Для построения асимптотики ФСР уравнения (2.1) с быстроосциллирующим возмущением $h(x)$ вида (1.3) мы предлагаем новый подход.

Наложим на $\phi(\xi,\lambda)$ условие

$$\left|\int\limits_{\xi}^{\infty}\phi(s,\lambda)ds\right| < \infty \tag{2.7}$$

и определим функцию

$$\phi_1(\xi,\lambda) := \int\limits_{\xi}^{\infty}\phi(s,\lambda)ds. \tag{2.8}$$

Положим

$$U(\xi,\lambda) = e^{-\phi_1(\xi,\lambda)M_0}\cdot B(\xi,\lambda). \tag{2.9}$$

После замены получаем

$$B'_\xi(\xi,\lambda) = \mu_0\cdot e^{\phi_1(\xi,\lambda)M_0}\cdot\Lambda_0\cdot e^{-\phi_1(\xi,\lambda)M_0}B(\xi,\lambda)+$$

$$+\omega(\xi,\lambda)\cdot e^{\phi_1(\xi,\lambda)M_0}\cdot K_0\cdot e^{-\phi_1(\xi,\lambda)M_0}B(\xi,\lambda).$$

Используем известную формулу Хаусдорфа [8]

$$e^{\varepsilon A} B e^{-\varepsilon A} = B + \varepsilon [A, B] + \frac{\varepsilon^2}{2!} [A, [A, B]] + \ldots .$$

Тогда

$$e^{\phi_1(\xi,\lambda) M_0} \cdot \Lambda_0 \cdot e^{-\phi_1(\xi,\lambda) M_0} = \Lambda_0 + \phi_1(\xi,\lambda)[M_0, \Lambda_0] + \frac{\phi_1^2(\xi,\lambda)}{2!}[M_0, [M_0, \Lambda_0]] + \ldots ,$$

$$M_{11} = [M_0, \Lambda_0], \quad M_{12} = [M_0, M_{11}], \ldots, M_{1n} = [M_0, M_{1n-1}], \ldots ,$$

$$e^{\phi_1(\xi,\lambda) M_0} \cdot K_0 \cdot e^{-\phi_1(\xi,\lambda) M_0} = K_0 + \phi_1(\xi,\lambda)[M_0, K_0] + \frac{\phi_1^2(\xi,\lambda)}{2!}[M_0, [M_0, K_0]] + \ldots ,$$

$$K_{11} = [M_0, K_0], \quad K_{12} = [M_0, K_{11}], \ldots, K_{1n} = [M_0, K_{1n-1}], \ldots .$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ 1-i & 0 & i+1 & -2 \\ 2 & i-1 & 0 & -1-i \\ 1+i & -2 & -1-i & 0 \end{pmatrix}, \ M_{1n} = 0, \ \forall n \geq 2,$$

$$K_{11} = 6 \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \ K_{1n} = 0, \ \forall n \geq 2.$$

С учетом последних равенств имеем

$$B'_\xi(\xi,\lambda) = (\mu_0 \Lambda_0 + \mu_0 \phi_1(\xi,\lambda) M_{11} +$$

$$+ \omega(\xi,\lambda) K_0 + \omega(\xi,\lambda)\phi_1(\xi,\lambda) K_{11})\, B(\xi,\lambda). \tag{2.10}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\infty} \mu_0 \phi_1(t,\lambda) dt \right| < \infty, \ \xi > 0, \tag{2.11}$$

$$\phi_1(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty). \tag{2.12}$$

Перепишем систему (2.10) в более удобном виде:

$$B'_\xi(\xi,\lambda) = (\mu_0\Lambda_0 + \mu_0\phi_1(\xi,\lambda)M_{11} + \omega(\xi,\lambda)K_0 + K_1(\xi,\lambda))B(\xi,\lambda),$$

где элементы матрицы $K_1(\xi,\lambda) = \omega(\xi,\lambda)\phi_1(\xi,\lambda)K_{11}$ принадлежат $L_1(0,\infty)$ при выполнении условий (2.7), (2.11), (2.12). Заметим, что случай, когда $\mu_0\phi_1(\xi,\lambda) \in L_1(0,+\infty)$, изучен в работе [6], поэтому далее будем рассматривать случай $\mu_0\phi_1(\xi,\lambda)M_{11} \notin L_1(0,+\infty)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi_2(\xi,\lambda) = \int\limits_\xi^\infty \mu_0\phi_1(s,\lambda)ds. \tag{2.13}$$

Сделаем далее замену аналогичную (2.9):

$$B(\xi,\lambda) = e^{-\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}} \cdot S(\xi,\lambda), \tag{2.14}$$

тогда для $S(\xi,\lambda)$ получаем

$$S'_\xi(\xi,\lambda) = e^{\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}} \cdot (\mu_0\Lambda_0 + \omega(\xi,\lambda)\cdot K_0 + K_1(\xi,\lambda)) \cdot e^{-\phi_2(\xi)M_{11}}S(\xi,\lambda).$$

Вновь применив формулу Хаусдорфа, с учетом $M_{11}^2 = 0$ приходим к системе

$$S'_\xi(\xi,\lambda) = (\mu_0\Lambda_0 + \mu_0\phi_2(\xi,\lambda)M_{21} + \omega(\xi,\lambda)K_0 + K_2(\xi,\lambda))S(\xi,\lambda), \tag{2.15}$$

где

$$K_2(\xi,\lambda) = e^{\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}} \cdot K_1(\xi,\lambda) \cdot e^{-\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}} +$$
$$+\mu_0\frac{(\phi_2(\xi,\lambda))^2}{2!}M_{22} + \phi_2(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda)K_{21}.$$

Матрицы M_{21}, M_{22}, K_{21} имеют вид

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & -2 \\ 2i & 0 & 2i & -4i \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ -2i & 4i & -2i & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \end{pmatrix},$$

$$M_{2n} = 0, \ \forall n \geq 3,$$

$$K_{21} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ 1-i & 0 & 1+i & -2 \\ 2 & -1+i & 0 & -1-i \\ -1+i & -2 & 1-i & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{2n} = 0, \ \forall n \geq 2.$$

Заметим, что матрица $e^{\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}} \cdot K_1(\xi,\lambda) \cdot e^{-\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}}$ состоит из суммируемых элементов при выполнении условий (2.11), (2.12).

Потребуем также выполнение следующих условий:

$$\left| \int_{\xi}^{\infty} \mu_0 \phi_2(s,\lambda) ds \right| < \infty, \tag{2.16}$$

$$\phi_2^2(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty). \tag{2.17}$$

При выполнении условий (2.16), (2.17) элементы матрицы $K_2(\xi,\lambda)$ – суммируемы на $(0,\infty)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi_3(\xi,\lambda) = \int_{\xi}^{\infty} \mu_0 \phi_2(s,\lambda) ds. \tag{2.18}$$

Сделаем далее замену аналогичную (2.14):

$$S(\xi,\lambda) = e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} \cdot P(\xi,\lambda), \tag{2.19}$$

тогда для $P(\xi,\lambda)$ получаем

$$P'_{\xi}(\xi,\lambda) = e^{\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} \cdot (\mu_0\Lambda_0 + \omega(\xi,\lambda) \cdot K_0) \cdot e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} P(\xi,\lambda) +$$

$$+ e^{\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} \cdot K_2(\xi,\lambda) \cdot e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} P(\xi,\lambda). \tag{2.20}$$

Вновь по формуле Хаусдорфа

$$e^{\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} \cdot \mu_0\Lambda_0 \cdot e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} = \mu_0\Lambda_0 + \mu_0\phi_3(\xi,\lambda)M_{31} +$$

$$+ \mu_0 \frac{\phi_3^2(\xi,\lambda)}{2!} M_{32} + \mu_0 \frac{\phi_3^3(\xi,\lambda)}{3!} M_{33} + \mu_0 \frac{\phi_3^4(\xi,\lambda)}{4!} M_{34},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2-2i & -8 & 2+2i \\ 2+2i & 0 & 2-2i & -8 \\ -8 & 2+2i & 0 & 2-2i \\ 2-2i & -8 & 2+2i & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} -80 & 48 & -16 & 48 \\ -48 & 80i & -48i & 16i \\ 16 & -48 & 80 & -48 \\ 48i & -16i & 48i & -80i \end{pmatrix},$$

$$M_{33} = 10^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3,2-3,2i & 6,4 & -3,2+3,2i \\ 3,2-3,2i & 0 & 3,2+3,2i & -6,4 \\ 6,4 & -3,2+3,2i & 0 & -3,2-3,2i \\ 3,2+3,2i & -6,4 & 3,2-3,2i & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{34} = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 2,56 & 2,56i & -2,56 & -2,56i \\ 2,56 & 2,56i & -2,56 & -2,56i \\ 2,56 & 2,56i & -2,56 & -2,56i \\ 2,56 & 2,56i & -2,56 & -2,56i \end{pmatrix}, \quad M_{3n} = 0 \ \ \forall n \geq 5,$$

$$e^{\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} \cdot \omega(\xi,\lambda)K_0 \cdot e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}} = \omega(\xi,\lambda)K_0 + \omega(\xi,\lambda)\phi_3(\xi,\lambda)K_{31},$$

$$K_{31} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ i & 0 & i & -2i \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -i & 2i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{3n} = 0 \ \ \forall n \geq 2.$$

Пусть

$$K_3(\xi,\lambda) = \mu_0\phi_3(\xi,\lambda)M_{31} + \mu_0\frac{\phi_3^2(\xi,\lambda)}{2!}M_{32} + \mu_0\frac{\phi_3^3(\xi,\lambda)}{3!}M_{33}+$$

$$+\mu_0\frac{\phi_3^4(\xi,\lambda)}{4!}M_{34} + \omega(\xi,\lambda)\phi_3(\xi,\lambda)K_{31} + e^{\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}}K_2(\xi,\lambda)e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}}.$$

Поведение элементов матрицы $K_3(\xi,\lambda)$ определяется слагаемым $\mu_0\phi_3(\xi,\lambda)M_{31}$, поэтому потребуем выполнения следующего условия:

$$\phi_3(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty). \tag{2.21}$$

Тогда $K_3(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty)$ и система (2.20) принимает вид

$$P'_\xi(\xi,\lambda) = (\mu_0\Lambda_0 + \omega(\xi,\lambda)K_0 + K_3(\xi,\lambda)) \cdot P(\xi,\lambda). \tag{2.22}$$

Запишем матрицу $\mu_0\Lambda_0 + \omega(\xi,\lambda)K_0$ в виде

$$\mu_0\Lambda_0 + \omega(\xi,\lambda)K_0 = \tilde{\Lambda_0} + \omega(\xi,\lambda)\tilde{K_0},$$

$$\tilde{\Lambda_0} = \begin{pmatrix} \mu_0 + 3\omega(\xi,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mu_0 + 3\omega(\xi,\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_0 + 3\omega(\xi,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\mu_0 + 3\omega(\xi,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K_0} = K_0 - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система (2.22) примет следующий вид:

$$P'_\xi(\xi,\lambda) = \left(\tilde{\Lambda_0}(\xi,\lambda) + \omega(\xi,\lambda)\tilde{K_0} + K_3(\xi,\lambda)\right) P(\xi,\lambda).$$

Сделаем далее замену

$$P = (I + T_1(\xi,\lambda))W, \qquad T_1\tilde{\Lambda_0} = \tilde{\Lambda_0}T_1 + \omega(\xi,\lambda)\tilde{K_0}, \tag{2.23}$$

откуда находим

$$T_1(\xi,\lambda) = \frac{\omega(\xi,\lambda)}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ -i & 0 & -i & -i/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 \\ i & i/2 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразований приходим к системе

$$W'_\xi = \tilde{\Lambda_0}W - (I + T_1)^{-1}T'_1W + (I + T_1)^{-1}K_3(I + T_1)W, \tag{2.24}$$

$$T'_1(\xi,\lambda) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\omega(\xi,\lambda)}{\mu_0}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ -i & 0 & -i & -i/2 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 \\ i & i/2 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\omega(\xi,\lambda)}{\mu_0}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{q'(x)}{8(q(x)-\lambda)q^{\frac14}(x)\left(1-\frac{\lambda}{q(x)}\right)^{\frac14}}\right)\cdot\frac{1}{\xi'_x}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{q'(x)}{8(q(x)-\lambda)^{\frac54}}\right)\cdot\frac{1}{q^{\frac14}(x)}=$$

$$=\frac{q''(x)}{8q^{\frac14}(x)(q(x)-\lambda)^{\frac54}}-\frac{5q'(x)}{32q^{\frac14}(x)(q(x)-\lambda)^{\frac94}}.$$

Заметим, что при выполнении условий регулярности для функции $q(x)$ согласно [[1], с. 330] $\omega'\in L_1(0,\infty)$, так что в силу условий (2.7), (2.11), (2.12), (2.16), (2.17) и (2.21) система (2.24) является L-диагональной, а стало быть, к этой системе может быть применена теорема Левинсона [см. [1], с. 292], согласно которой основной вклад в асимптотики ФСР при $x\to+\infty$ вносит диагональная матрица $\tilde{\Lambda}_0$. Поэтому система дифференциальных уравнений (2.24) при $x\to+\infty$ имеет следующую асимпотику ФСР:

$$W(\xi,\lambda)=\exp\left\{\int\limits_0^{\xi}\tilde{\Lambda}_0(t,\lambda)dt\right\}\cdot(I+D\cdot o(1)),$$

где матрица D имеет вид

$$D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Далее, возвращаясь от системы (2.24) к системе (2.2), с учетом формул для замен переменных (2.3), (2.5), (2.9), (2.14), (2.19), (2.23) получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (2.1) $q(x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $q''(x)$, $q'(x)$ не меняют знак для достаточно больших x и*

$$q(x)\to+\infty,\quad q'(x)=o(q^{\gamma}(x)),\quad 0<\gamma<5/4,$$

а функции $\phi_1(\xi,\lambda)$, $\phi_2(\xi,\lambda)$, $\phi_3(\xi,\lambda)$, определяемые соотношениями (2.8), (2.13), (2.18), удовлетворяют условиям

$$\phi_1(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda) \in L_1(0,+\infty), \quad \phi_2(\xi,\lambda)\cdot\omega(\xi,\lambda) \in L_1(0,+\infty),$$
$$\phi_2^2(\xi,\lambda) \in L_1(0,+\infty), \quad \phi_3(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty).$$

Тогда уравнение (2.1) имеет ФСР такую, что при $x \to +\infty$ и при каждом фиксированном $\lambda \neq 0$ для

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y(x,\lambda) \\ y'(x,\lambda) \\ y''(x,\lambda) \\ y'''(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

справедливы асимптотические формулы:

$$Y(x,\lambda) = T(x,\lambda)\cdot e^{-\phi_1(\xi,\lambda)M_0}e^{-\phi_2(\xi,\lambda)M_{11}}e^{-\phi_3(\xi,\lambda)M_{21}}(I+T_1(\xi,\lambda))\times$$
$$e^{-\int\limits_0^\xi \tilde{\Lambda}_0(t,\lambda)dt}\cdot(I+D\cdot o(1)),$$

где матрицы T, T_1, M_0, M_{11}, M_{21}, $\tilde{\Lambda}_0$, D определены выше.

3. Пример

В этом пункте приведем характерный пример функций $q(x)$, $h(x)$, для которых выполнены все условия доказанной теоремы. При этом все известные до нас методы исследования не позволяли получить асимптотические формулы для решений уравнения (2.1) с такими коэффициентами.

Пусть
$$h(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad q(x) = x^\alpha,$$

$$\xi = \int\limits_0^x q^{\frac{1}{4}}(t)dt = \int\limits_0^x t^{\frac{\alpha}{4}}dt = \frac{4}{\alpha+4}x^{\frac{\alpha+4}{4}}, \quad x = \frac{\alpha+4}{4}\xi^{\frac{4}{\alpha+4}} = c\cdot\xi^{\frac{4}{\alpha+4}},$$

$$\phi(\xi,\lambda) = \frac{h(x)}{4q(x)\mu_0^3(x,\lambda)} = \frac{x^\alpha \sin x^\beta}{4x^\alpha\cdot\left(\sqrt[4]{1-\frac{\lambda}{x^\alpha}}\right)^3} = \frac{\sin\left(c\cdot\xi^{\frac{4\beta}{\alpha+4}}\right)}{4\left(1-\frac{\lambda}{c^\alpha\xi^{\frac{4\alpha}{\alpha+4}}}\right)^{\frac{3}{4}}},$$

$$\omega(\xi,\lambda)=\frac{q'(x)}{8(q(x)-\lambda)q^{\frac{1}{4}}(x)}=\frac{\alpha}{8x^{\frac{\alpha+4}{4}}\left(1-\frac{\lambda}{x^{\alpha}}\right)}=\frac{\alpha}{8c\xi\left(1-\frac{\lambda}{\xi^{\frac{4\alpha}{\alpha+4}}}\right)}.$$

Далее все постоянные, возникающие в оценках, договоримся обозначать константой c, $c>0$, а сами оценки рассматриваются при достаточно большом x.

Выясним при каких α, β выполняется условие

$$\left|\int_{\xi}^{\infty}\phi(s,\lambda)ds\right|<\infty,\ \ \xi>0.$$

Учитывая, что

$$\xi=\frac{1}{\alpha/4+1}x^{\frac{\alpha}{4}+1},\ d\xi=x^{\frac{\alpha}{4}}dx,$$

и интегрируя по частям с учетом того, что $\frac{d}{dx}\mu_0(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{x}\right)$, получим

$$\left|\int_{\xi}^{\infty}\phi(s,\lambda)ds\right|=\left|\int_{x}^{\infty}\frac{\sin t^{\beta}}{4\mu_0^3(t,\lambda)}t^{\frac{\alpha}{4}}dt\right|=\left|\frac{1}{4\beta}\int_{x}^{\infty}\frac{x^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}}{\mu_0^3(x,\lambda)}\cdot\beta t^{\beta-1}\sin t^{\beta}dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{4\beta}\cdot\frac{x^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}}{\mu_0^3(x,\lambda)}\cos x^{\beta}+\frac{1}{4\beta}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{t^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}}{\mu_0^3(t,\lambda)}\right)'\cos t^{\beta}dt\right|\le cx^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}<\infty,$$

если $\beta>\frac{\alpha}{4}+1$.

Проверим следующее условие:

$$\left|\int_{\xi}^{\infty}\mu_0\phi_1(s,\lambda)ds\right|<\infty,\ \xi>0,$$

$$\phi_1(\xi,\lambda)=\int_{\xi}^{\infty}\phi(s,\lambda)ds=\frac{1}{4\beta}\cdot\frac{x^{\frac{\alpha}{4}+1-\beta}}{\mu_0^3(x,\lambda)}\cos x^{\beta}+f_1(x,\lambda),$$

где
$$f_1(x,\lambda)=\frac{1}{4\beta}\int\limits_x^\infty\left(\frac{t^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}}{\mu_0^3(t,\lambda)}\right)'\cos t^\beta dt=O\left(x^{\frac{\alpha}{4}-2\beta+1}\right).$$
Имеем
$$\left|\int\limits_\xi^\infty\mu_0\phi_1(s,\lambda)ds\right|=\left|\int\limits_x^\infty\left(\frac{1}{4\beta}\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{4}+1-\beta}}{\mu_0^2(t,\lambda)}\cos t^\beta+\mu_0(t,\lambda)f_1(t,\lambda)\right)t^{\frac{\alpha}{4}}dt\right|\le$$
$$\le c\cdot x^{\frac{\alpha}{2}+2-2\beta}<\infty.$$
Последнее неравенство будет выполнено, если
$$\frac{\alpha}{2}+2-2\beta<0\ \text{ или }\ \beta>\frac{\alpha}{4}+1.$$

Проверим теперь следующее условие: $\phi_1(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda)\in L_1(0,\infty)$.
Имеем
$$|\phi_1(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda)|=\left|\left(c\cdot\frac{x^{\frac{\alpha}{4}+1-\beta}}{\mu_0^3(x,\lambda)}\cdot\cos x^\beta+f_1(x,\lambda)\right)\cdot\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{8(x^\alpha-\lambda)x^{\frac{\alpha}{4}}}\right|<$$
$$<c\cdot x^{\frac{\alpha}{4}-\beta+1}\cdot x^{-\frac{\alpha}{4}-1}=c\cdot x^{-\beta}.$$

Тогда получим следующую оценку:
$$\int\limits_a^\infty|\phi_1(\xi,\lambda)\omega(\xi,\lambda)|d\xi<c\int\limits_a^\infty x^{\frac{\alpha}{4}-\beta}dx<\infty,\ \ a>0,$$
отсюда
$$\frac{\alpha}{4}-\beta<-1\quad\text{или}\quad\beta>\frac{\alpha}{4}+1.$$

Проверим условие (2.16):
$$\left|\int\limits_\xi^\infty\mu_0\phi_2(s,\lambda)ds\right|<\infty.$$

Имеем

$$\phi_2(\xi,\lambda) = -c\cdot\frac{x^{\frac{\alpha}{2}+2-2\beta}}{\mu_0^2(x,\lambda)}\cdot\sin x^\beta + f_2(x,\lambda),\quad x = g(\xi),$$

где

$$f_2(x,\lambda)=\int\limits_x^\infty \mu_0(t,\lambda)f_1(t,\lambda)t^{\frac{\alpha}{4}}dt - c\int\limits_x^\infty\left(\frac{t^{\frac{\alpha}{2}+2-2\beta}}{\mu_0^2(t,\lambda)}\right)'\sin t^\beta dt = O\left(x^{\frac{\alpha}{2}+2-3\beta}\right).$$

Тогда

$$\left|\int\limits_\xi^\infty \mu_0\phi_2(s,\lambda)ds\right| = \left|\int\limits_x^\infty\left(c\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{2}+2-2\beta}}{\mu_0(t,\lambda)}\cdot\sin t^\beta + \mu_0(t,\lambda)f_2(t,\lambda)\right)t^{\frac{\alpha}{4}}dt\right| =$$

$$= \left|\frac{c}{4\beta}\int\limits_x^\infty\frac{t^{\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta}}{\mu_0(t,\lambda)}\cdot\beta t^{\beta-1}\sin t^\beta dt + \int\limits_x^\infty\mu_0(t,\lambda)f_2(t,\lambda)t^{\frac{\alpha}{4}}dt\right| \le$$

$$\le c\cdot x^{\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta} < \infty,$$

отсюда

$$\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta < 0 \;\text{ или }\; \beta > \frac{\alpha}{4}+1.$$

Проверим условие (2.17): $\phi_2^2(\xi,\lambda)\in L_1(0,\infty)$. Для этого заметим, что

$$\left|\phi_2^2(\xi,\lambda)\right| = \left|\left(c\cdot\frac{x^{\frac{\alpha}{2}+2-2\beta}}{\mu_0^2(x,\lambda)}\cdot\sin x^\beta + f_2(x,\lambda)\right)^2\right| <$$

$$< c\cdot x^{\alpha+4-4\beta},$$

и получим следующую оценку

$$\int\limits_a^\infty\left|\phi_2^2(\xi,\lambda)\right|d\xi < \int\limits_a^\infty c\cdot x^{\alpha+4-4\beta}x^{\frac{\alpha}{4}}dx < \infty,\quad a>0.$$

Это означает, что

$$\frac{5\alpha}{4}+4-4\beta < -1 \;\text{ или }\; \beta > \frac{5\alpha}{16}+\frac{5}{4}.$$

Проверим условие (2.21): $\phi_3(\xi,\lambda) \in L_1(0,\infty)$. Оценим поведение $\phi_3(\xi,\lambda)$ при $\xi \to \infty$:

$$|\phi_3(\xi,\lambda)| = \left| \int\limits_{\xi}^{\infty} \mu_0 \phi_2(s,\lambda) ds \right| = \left| c \cdot \frac{x^{\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta}}{\mu_0(x,\lambda)} \cdot \cos x^{\beta} + f_3(x,\lambda) \right| <$$

$$< c \cdot x^{\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta},$$

где

$$f_3(x,\lambda) = \int\limits_{x}^{\infty} \mu_0(t,\lambda) f_2(t,\lambda) t^{\frac{\alpha}{4}} dt + c \int\limits_{x}^{\infty} \left(\frac{t^{\frac{3\alpha}{4}+3-3\beta}}{\mu_0(t,\lambda)} \right)' \cos t^{\beta} dt = O\left(x^{\frac{3\alpha}{4}+3-4\beta} \right),$$

тогда

$$\int\limits_{a}^{\infty} |\phi_3(\xi,\lambda)| d\xi < \int\limits_{a}^{\infty} x^{\frac{3\alpha}{4}-3\beta+3} \cdot x^{\frac{\alpha}{4}} dx < \infty, \quad a > 0,$$

$$\alpha - 3\beta + 3 < -1 \quad \text{или} \quad \beta > \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{3}.$$

Тогда условия теоремы предыдущего пункта выполнены, если

$$\beta > \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{3},$$

а асимптотические при $x \to +\infty$ формулы для ФСР системы (2.2) имеют вид

$$Y(x,\lambda) \sim (x^{\alpha} - \lambda)^{-\frac{3}{8}} T(x,\lambda) e^{-\Lambda_0 \xi} e^{-\phi_1(\xi,\lambda) M_0} e^{-\phi_2(\xi,\lambda) M_{11}} e^{-\phi_3(\xi,\lambda) M_{21}},$$

где

$$\xi = \frac{x^{\alpha/4+1}}{\alpha/4+1}.$$

Литература

1 Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1983. – 354 с.

2 Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979. – 400 с.

3 Муртазин Х.Х, Султанаев Я.Т. К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма-Лиувилля// Математические заметки. – 1980. – Т. 28:4, С. 545-553.

4 Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 9-15.

5 Макина Н.К., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. О методах исследования асимптотического поведения сингулярных дифференциальных уравнений// Математические заметки. – 2014. – Т. 96. – С. 627-632

6 Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. О распределении собственных значений сингулярных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Тр. ММО. – 2014. – Вып. 2. – С. 107-123

7 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

8 Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. – М.: Наука, 1987. – 255 с.

Статья поступила в редакцию 17.11.2016

Валеев Н.Ф., Ескермесұлы Ә., Назирова Э.А. РЕГУЛЯРЛЫ ЕМЕС КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БАР ТӨРТІНШІ РЕТТІ СИНГУЛЯРЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста $x \to \infty$ жағдайда регулярсыз өсетін $q(x)$ потенциалы бар

$$-\frac{d^n}{dx^n}y(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y$$

түріндегі сингулярлық сызықты дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің x-тің үлкен мәндеріндегі асимптоталық өзгерісін зерттеуге қатысты жаңа тәсіл ұсынылады. Сингулярлық сызықты дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің асимптотикасын құру идеясы мен оның тиімділігі тербелімді потенциалдары бар 4-ші ретті теңдеулер арқылы көрсетілген.

Valeev N., Yeskermessuly A., Nazirova E. ON THE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTIONS OF A SINGULAR FOURTHORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONREGULAR COEFFICIENTS

The paper proposes a new approach to the study the asymptotic behavior of solutions of singular linear differential equations at large values of x of the form:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y$$

with irregular growing potential $q(x)$ when $x \to \infty$. The idea of constructing the asymptotic behavior of solutions of singular linear differential equations and its effectiveness are demonstrated by the example of the fourth order differential equation with oscillating potential.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 77–92.

УДК 517.977.54, 519.216.73

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Г.К. Василина[1], В.В. Могильова[2], А.Н. Станжицкий[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]v_gulmira@mail.ru

[2]Киевский национальный технический университет
03056, Украина, Киев, ул. Победы, 37, e-mail: [2]mogylova.victoria@gmail.com

[3]Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
01601, Украина, Киев, ул. Владимирская, 64/13, e-mail: [3]ostanzh@gmail.com

Аннотация: Изучаются задачи управления линейными и нелинейными стохастическими системами с квадратичным критерием качества. Для таких задач методом динамического программирования доказано существование оптимального управления в виде управления с обратной связью.

Ключевые слова: Оптимальное управление, обратная связь, функция Беллмана, уравнение Риккати, процесс Винера, стохастическая система.

1. Введение, постановка задачи

Предметом исследования данной работы является задача оптимального управления системами линейных и нелинейных стохастических уравнений с квадратичным критерием качества соответственно вида:

$$dx = [A(t)x + B(t)u]dt + [C(t)x + D(t)u]dw(t)+$$

$$+\int[M(t,v)x + G(t,v)u]\widetilde{\nu}(dt,dv),$$

$$x(0) = y, \tag{1}$$

$$I(y,u) = E(Kx(T),x(T))+$$

Keywords: *Optimal control, feedback, Bellman function, Riccati equation, Wiener process, stochastic system.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34H05,60H10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3357/ГФ4.

$$+E\int_0^T [(N(t)u(t),u(t)) + (R(t)x(t),x(t))]dt \to inf,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $w(t)$ – одномерный процесс Винера, $\widetilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ – пуассоновская мера на R^1, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, A, B, C, D, M, G, N, R – непрерывные на [0,T] матрицы, A, C, M, K, R – $n\times n$-мерные, B, D, G – $n\times m$-мерные, N – $m\times m$-мерная, $K, R(t)$ – симметричные, неотрицательно определенные, $N(t)$ – положительно определенная матрицы. И в нелинейном случае

$$dx = [f(x) + B(x)u]dt + g(x)dw(t) + \varepsilon D(x)udw_1(t),$$

$$x(0) = y, \tag{2}$$

$$I(y,u) = E\varphi(x(\tau)) + E\int_0^\tau [(\psi(x(t)) + (N(x(t))u(t),u(t))]dt \to inf,$$

где $x \in Q$, Q – ограниченная область с границей, имеющей определенную гладкость, ε – малый параметр, $y \in Q$, τ – момент первого выхода из Q. $w_1(t)$, $w(t)$ – стандартные одномерный и n-мерный винеровские процессы с независимыми компонентами. Более точная постановка задачи будет дана в основной части работы.

Задача (1) (так называемая (LQ)-задача) рассматривалась в работах многих авторов. Отметим лишь некоторых из них, в которых имеется обширная библиография.

Одними из первых работ, где изучалась данная задача в классической постановке (1), являются работы [1, 2]. В них показано, что (LQ)-задача эквивалентна разрешимости задачи Коши для некоторого матричного обобщенного уравнения Риккати. В дальнейшем задача (1) обобщалась многими авторами в различных направлениях. В [3] рассматривалась задача стабилизации решений системы (1), которая автором сведена к минимизации аналогичного функционала, но с бесконечным пределом интегрирования, что привело к аналогичному обобщенному уравнению Риккати. При этом, в случае одномерного управления, автор использовал метод аппроксимации Беллмана.

В работах [4]-[6] рассматривалось обобщение LQ-задачи на бесконечномерные стохастические системы. При этом операторы A и B были постоянными, A – инфинитезимальный генератор C_0-полугруппы, удовлетворяющий либо оценке $\parallel exp(tA) \parallel \leq Ke^{-\alpha t}$, $K > 0$, $\alpha > 0$, $t \geq 0$, либо регулярно диссипативный. В [7] рассмотрена LQ-задача в предположениях, что матрицы $A(t), B(t), C(t), D(t)$ – случайные. В этой работе доказана эквивалентность задачи управления решению обобщенного стохастического уравнения Риккати.

В [8] рассмотрена LQ-задача, когда критерий качества имеет вид

$$I(s, y, u) =$$

$$= E \int_s^T [x^*(t)Q(t)x(t) + 2u^*(t)S(t)x(t) + u^*(t)R(t)u(t)]dt + x^*(T)Hx(T),$$

где матрицы Q, R, H не обязательно неотрицательно определенные. Здесь также доказана эквивалентность задачи оптимизации разрешимости обобщенного уравнения Риккати. Однако вопрос, о разрешимости соответствующих обобщенных уравнений Риккати еще до конца не исследован. В работе [9], используя метод линеаризации Беллмана, Вонэм доказал существование нужного решения у такого типа уравнений в случае, когда в задаче (1) $C(t) \equiv 0$. Для случая $C(t) \neq 0$ получается несколько иное, чем в [9], уравнение, к которому метод Вонэма, по-видимому, не применим. В работе [4] уравнение типа Риккати решено в гильбертовом пространстве. Однако, отсюда, вообще говоря, не следует соответствующий результат для задачи (1), поскольку в указанной работе A и B – постоянные операторы, причем эволюционный оператор, порожденный A, допускает оценку

$$\parallel exp(tA) \parallel \leq Ke^{-\alpha t}, K > 0, \alpha > 0, t \geq 0.$$

В задаче (1) такие ограничения на $A(t)$, $B(t)$ не накладываются.

Метод, предложенный в [3], по-видимому, применим для доказательства существования решения обобщенного уравнения Риккати и в случае многомерного управления. Однако, во всех работах разрешимость указанного уравнения исследовалась методом последовательных приближений

Беллмана путем построения монотонно невозрастающей последовательности решений линейных задач, предел которой является решением нелинейной задачи. В данной работе мы предлагаем другой метод доказательства разрешимости обобщенного уравнения Рикатти, идея которого базируется не на методе Беллмана, а на прямом применении общих теорем существования решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Для нелинейной задачи (2) сколько-нибудь существенные результаты получены в случае, когда управление не входит в стохастическую часть. В этой ситуации соответствующее уравнение Беллмана является квазилинейным, то есть старшие производные входят в него линейно. Последнее делает возможным применение общих теорий существования решений квазилинейных уравнений (см., напр., [3]). Ситуация становится принципиально другой, когда управление входит в стохастическую часть. В этом случае уравнение Беллмана в нелинейной части уже содержит старшие производные, что делает невозможным применение квазилинейной теории. Именно такой случай и рассматривается в данной статье.

Работа состоит из двух частей. Первая часть касается LQ-задачи (1). Здесь доказано существование решения задачи Коши для обобщенного уравнения Риккати методом, отличным от метода работ [3, 4, 9], который базируется на идее схемы линеаризации Беллмана. Наше доказательство состоит в непосредственном применении теорем существования для обыкновенных дифференциальных уравнений к обобщенному уравнению Риккати.

Основную часть работы составляет ее вторая часть, которая касается исследования нелинейной задачи (2). К сожалению, авторам пока удалось получить содержательный результат только в случае, когда управление в стохастическую часть входит с малым параметром. С использованием абстрактной теоремы о неявной функции удалось доказать существование при малых ε решения уравнения Беллмана, соответствующего задаче (2).

2. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

В данном разделе дадим строгую постановку анонсированной во введении стохастической линейно-квадратической задачи оптимального управления (LQ), а затем покажем, что полученное при этом матричное дифференциальное уравнение типа Риккати имеет нужное неотрицательно определенное решение. Тем самым будет доказано, что LQ-задача разрешима.

Итак, рассмотрим задачу (1) оптимального управления (LQ-задачу). Данную задачу будем решать методом динамического программирования. Оптимальное управление ищем в виде управления с обратной связью $u = u(t,x) \in R^m$. Обозначим через L_u производящий оператор марковского процесса, а через $x_u(t)$ – решения системы (1) при подстановке вместо $u - u(t,x)$.

Если $V(s,x)$ – функция Беллмана нашей задачи, то

$$L_u V(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} V(t,x) + (A(t)x + B(t)u, \frac{\partial}{\partial x})V(t,x) +$$

$$+\frac{1}{2}(C(t)x + D(t)u, \frac{\partial}{\partial x})^2 V(t,x) +$$

$$+\int \big[V(t, x + M(t,v)x + G(t,v)u) - V(t,x) -$$

$$-\big(M(t,v)x + G(t,v)u, \frac{\partial}{\partial x}\big)V(t,x)\big]\Pi(dv).$$

Известно (см., напр., [10], с. 222), что при условии непрерывности частных производных V_s, V_{x_i}, $V_{x_i x_j}$ $i,j = \overline{1,n}$, условии полиномиального по x роста $V(s,x)$, она удовлетворяет уравнению динамического программирования

$$\min_{u \in R^m} [L_u V(s,x) + (N(s)u, u) + (R(s)x, x)] = 0 \tag{3}$$

При этом $V(s,y) \le I(s,y,u)$ для любого допустимого управления u с обратной связью, (s,y) – начальное значение задачи (1) $(x(s) = y)$. И если $u^* = u^*(t,x)$ доставляет минимум в (2), то оно оптимально и $V(s,y) = I(s,y,u^*)$. Очевидно также, что

$$V(T,x) = K. \tag{4}$$

Если искать решение уравнения (3) в виде неотрицательно определенной квадратичной формы

$$V(t,x) = (F(t)x, x), \tag{5}$$

где $F(t)$ – гладкая, симметрическая, неотрицательно определенная $n \times n$-матрица, то, как отмечалось выше, уравнение (3) сводится к матричному уравнению типа Риккати вида

$$\dot{F} + A^*F + FA + C^*FC + \int M^*(t,v)F(t)M(t,v)\Pi(dv) + R-$$

$$-\Big(FB + C^*FD + \int M^*(t,v)F(t)G(t,v)\Pi(dv)\Big)\times \tag{6}$$

$$\times\Big(N + D^*FD + \int G^*(t,v)F(t)G(t,v)\Pi(dv)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big(B^*F + D^*FC + \int G^*(t,v)F(t)M(t,v)\Pi(dv)\Big) = 0$$

с начальным условием

$$F(T) = K. \tag{7}$$

(* означает транспонирование.) И если задача Коши (6), (7) имеет неотрицательно определенное решение на $[0,T]$, то оптимальное управление существует и дается формулой

$$u^*(t,x) = -\Big(N + D^*FD + \int G^*(t,v)F(t)G(t,v)\Pi(dv)\Big)^{-1}\times$$

$$\cdot\Big(B^*F + D^*FC + \int G^*(t,v)F(t)M(t,v)\Pi(dv)\Big)x. \tag{8}$$

Уравнение (6) имеет довольно сложный вид, поскольку оно нелинейное и сингулярное. Отметим, что даже в детерминированном случае ($C \equiv 0, D \equiv 0, M \equiv 0, G \equiv 0$) оно становится матричным уравнением Риккати. Еще заметим, что для решения (1) требуется установить существование неотрицательно определенного решения задачи Коши (6),(7).

Приводимая ниже теорема гарантирует существование такого решения, а поэтому и разрешимость (LQ-задачи) в указанной постановке.

Теорема 1. *Задача Коши (6), (7) имеет неотрицательно определенное на $[0,T]$ решение.*

Доказательство. Поскольку $F(T) = K$ неотрицательно определена, то матрица $D^*(T)F(T)D(T) + N(T) + \int G^*(T,v)F(T)G(T,v)\Pi(dv)$ положительно определена. Поэтому, если матрица F мало отличается от матрицы K (матричная норма $\| F - K \|$ – мала), то в силу непрерывности матриц $D(t)$, $N(t)$ и $G(t)$ матрица $D^*(t)F(t)D(t)+N(t)+\int G^*(t,v)F(t)G(t,v)\Pi(dv)$ положительно определена для $|t-T| \leq \varepsilon$, $\| F - K \| \leq \varepsilon$ и некоторого $\varepsilon > 0$. А поэтому для данных t и F эта матрица невырождена и правая часть (6) является гладкой в этой области функцией с ограниченными по компонентам матрицы F частными производными. Следовательно, в силу теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши система (1) имеет единственное решение при $t \in [\tau, T]$ для некоторого $\tau \in [0,T]$. Следовательно, при $t \in [\tau, T]$ функция $V(t,x) = (F(t)x, x)$ – решение уравнения Беллмана (3). Поэтому в силу теоремы 4.1 [10, с. 222] на этом отрезке $(F(t)x, x)$ – минимальное значение функционала задачи (1) с начальным условием $x(t) = x$ для $x \in R^n$. А поскольку $I(t,x,u) \geq 0$, то $(F(t)x,x) \geq 0$ для любого $x \in R^n$ и $t \in [\tau, T]$. Повторяя в точке τ аналогичную процедуру, решение уравнения (6) еще продолжаем влево до момента его выхода на границу области определения уравнения (6). Поэтому теорема будет доказана, если мы покажем, что $\| F(t) \|$ не уходит на бесконечность за конечное время. Иными словами, невозможна следующая ситуация: существует $t_0 \in [0, \tau]$ такое, что при $t \to t_0 + 0$ $\| F(t) \| \to \infty$.

Пусть такое t_0 существует. Отметим, что при $t \in (t_0, T]$ функция $(F(t)x, x)$ дает минимальное значение функционала $I(t,x,u)$. Из неотрицательной определенности матриц K, $N(t)$ и $R(t)$ следует неотрицательность функционала I, а следовательно, ограниченность снизу $(F(t)x,x)$. Очевидно, что при $u \equiv 0$ значение критерия дает верхнюю границу для функции Беллмана. Стандартными оценками вторых моментов для решения линейной стохастической системы

$$\begin{aligned} &dx = A(t)xdt + C(t)xdw(t) + \int M(t,v)x\,\widetilde{\nu}(dt,dv), \\ &x(s) = y \end{aligned}$$

нетрудно получить для $I(s,y,0)$ оценку :

$$I(s,y,0) \leq K\| y \|^2$$

для $s \in [0,T]$, где $K > 0$ не зависит от s и y. Поэтому для $V(t,x)$ справедлива априорная оценка

$$V(t,x) = (F(t)x,x) \leq K\| x \|^2, t \in (t_0, T].$$

Отсюда следует ограниченность матрицы $F(t)$ в любой окрестности точки t_0. Последнее противоречит определению точки t_0. Теорема доказана.

Теорема 2. *Задача оптимизации (1) имеет решение, при этом оптимальное управление дается формулой (8).*

3. Нелинейный случай

Перейдем к рассмотрению нелинейной задачи управления, анонсированной во введении. Дадим её точную постановку. В пространстве R^n рассматривается задача оптимального управления стохастической системой с квадратичным по управлению критерием качества:

$$dx = [f(x) + B(x)u]dt + g(x)dw(t) + \varepsilon D(x)udw_1(t),$$

$$x(0) = y, \tag{9}$$

$$I(y,u) = E\varphi(x(\tau)) + E\int\limits_0^\tau [\psi(x(t)) + [N(x(t))u(t), u(t)]dt \to inf,$$

ε – малый параметр, $x \in Q$, Q – ограниченная область из R^n. Относительно данной задачи будем предполагать выполнение следующих условий:
1) $w(t)$ – стандартный n-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $w_1(t)$ – одномерный винеровский процесс, независящий от $w(t)$;
2) вектор-функция f, $n \times m$-мерные матрицы B и D – липшицевы по $x \in \bar{Q}$ ($\bar{Q}$ – замыкание области);
3) $n \times n$-мерная матрица $g(x) \in C_{1,1}(\bar{Q})$, $m \times m$-мерная матрица $N(x) \in C_{0,1}(\bar{Q})$, функции $\varphi \in C_{2,1}(\partial Q)$, $\psi(x) \in C_{0,1}(\bar{Q})$, $\partial Q \in C_{2,1}$.

Здесь $C_{l,1}(\bar{Q})$ – пространство l раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{Q}$ функций, l-я производная которых липшицева в $\bar{Q}$. Норма в нем определяется стандартным образом (см., напр., [11], с. 21);
4) матрица $g(x)$ имеет обратную при $x \in \bar{Q}$;
5) $\psi(x) > 0$, $N(x)$ – положительно определенная при $x \in \bar{Q}$.

Как уже говорилось, $\tau \geq 0$ – момент первого выхода решения $x(t)$ из области Q. Управление $u \in R^n$ будем искать, как управление с обратной связью $u = u(x)$, которое будем считать допустимым, если $u(x)$ липшицева в Q. При этих предположениях решение задачи Коши $x_u^y(t)$ существует при $t \geq 0$ и сильно единственно для любого допустимого управления $u(x)$. В силу условия 4) диффузионная матрица, отвечающая марковскому процессу $x_u^y(t)$, положительно определена и, поскольку область Q ограничена, а функции, входящие в (9), непрерывны, то, как следует из [3] (с. 132), момент τ первого выхода решения из Q с вероятностью 1 конечен для любого допустимого управления. Более того, конечным является и $E\tau$. А поэтому в силу ограниченности Q и непрерывности φ, ψ и N величина $I(y,u)$ также конечна для любого допустимого управления. Последнее делает возможным для решения задачи (9) применить метод динамического программирования, в частности, теорему 4.2 из [10] (с. 228). Производящий дифференциальный оператор для $x_u^y(t)$ имеет следующий вид

$$L_u = (f(x) + B(x)u, \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\Big(\varepsilon D(x)u, \frac{\partial}{\partial x}\Big)^2,$$

где g_{ij} – компонента матрицы gg^*, $\dfrac{\partial}{\partial x} = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)^*$. Согласно указанной теореме 4.2, уравнение Беллмана данной задачи имеет вид

$$\min_{u \in R^m} [L_u V(x) + \psi(x) + (N(x)u, u)] = 0 \tag{10}$$

с граничным условием $V(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial Q$. Или, в более развернутом виде,

$$\Big(f(x), \frac{\partial V}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \psi(x) + \min_{u \in R^m}\{(B(x)u, \frac{\partial V}{\partial x}\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}(\varepsilon D(x)u, \frac{\partial}{\partial x})^2 V + (N(x)u, u)\} = 0. \tag{11}$$

Найдем минимум по u выражения в фигурных скобках. Для этого вычислим производную по u этого выражения. Нетрудно видеть, что она имеет вид:

$$B^* \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon^2 (D(x)u, \frac{\partial}{\partial x}) D^* \frac{\partial V}{\partial x} + 2N(x)u.$$

Приравнивая последнее выражение к нулю, получим

$$\varepsilon^2(D(x)u, \frac{\partial}{\partial x})D^*(x)\frac{\partial V}{\partial x} + 2N(x)u = -B^*\frac{\partial V}{\partial x}$$

или

$$(\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))u = -B^*\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Откуда

$$u = -(\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))^{-1}B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{12}$$

Здесь $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ – матрица вторых производных. Вторая производная Фреше по u равна выражению $2N(x) + \varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x)$ и, если она положительно определена, то выражение (12) доставляет минимум в (10) или (11). Подставляя (12) в (11), получим уравнение Беллмана в виде, явно не включающем управления

$$\begin{gathered}\Big(f(x), \frac{\partial V}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \psi(x) - \\ -\big(B(x)(\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))^{-1}B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}) + \\ +\frac{1}{2}\varepsilon^2(D(x)(\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))^{-1}B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})^2 V + \\ +(N(x)(\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))^{-1}\times \\ \times B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}, (\varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(x) + 2N(x))^{-1}B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}) = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

К нему следует присоединить граничное условие

$$V(x) = \varphi(x), x \in \partial Q. \tag{14}$$

Таким образом, задача (9) свелась к нахождению дважды непрерывно дифференцируемого решения (13), (14) $V_\varepsilon(x)$ такого, что при малых ε матрица $2N(x) + \varepsilon^2 D^*(x)\frac{\partial^2 V_\varepsilon(x)}{\partial x^2}D(x))$ положительно определена. Очевидно, что для решения задачи (9) достаточно ограничиться нулевыми граничными условиями (в противном случае от исходного функционала перейдем к $I_1(y,u) = I(y,u) - \varphi(y)$). Итак, будем в дальнейшем решать уравнение (13) с нулевыми граничными условиями

$$V(x) = 0,\ \ x \in \partial Q. \tag{15}$$

При $\varepsilon = 0$ данная задача принимает вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \Big(f(x), \frac{\partial V}{\partial x}\Big) -$$

$$-\frac{1}{4}\Big(B(x)N^{-1}(x)B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\Big) + \psi(x) = 0, \tag{16}$$

$$V(x) = 0,\ \ x \in \partial Q \tag{17}$$

и является задачей Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа. При этом условие 4) в силу компактности обеспечивает равномерную эллиптичность этого уравнения. Для дальнейших выкладок нам понадобится лемма.

Лемма 1. *При выполнении условий 1)-5) задача Дирихле (16), (17) имеет решение $V_0(x) \in C_{2,1}(\bar{Q})$.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, уравнение (16) есть квазилинейное уравнение эллиптического типа с равномерно эллиптической главной частью. А поэтому для доказательства разрешимости задачи (16), (17) можно воспользоваться общими теоремами о нелинейных эллиптических уравнениях, в частности, теоремой 8.4 ([11], с. 341). Для этого перепишем (16) в дивергентном виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}(g_{i1}(x)V'_{x_1} + ... + g_{in}(x)V'_{x_n}) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{i1}(x))V'_{x_1} + ... + \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{in}(x))V'_{x_n}) + \tag{18}$$

$$+(f(x),\frac{\partial V}{\partial x})-\frac{1}{4}(B(x)N^{-1}(x)B^*(x)\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x})+\psi(x)=0$$

и проверим выполнение для него условий указанной теоремы. В качестве функции $w(x)$, фигурирующей в условии (8.24), возьмем $w(x)=-e^{m(x_1+a)}$. Подставляя ее в (16), получим

$$-\frac{1}{2}g_{11}(x)m^2e^{m(x_1+a)}-me^{m(x_1+a)}f_1(x)-\frac{1}{4}l_{11}(x)m^2e^{2m(x_1+a)}+\psi(x),$$

где l_{11} – первый элемент неотрицательно определенной матрицы $B(x)N^{-1}(x)B^*(x)$. Выбором достаточно больших положительных m и a последнее выражение можно сделать меньше нуля для всех рассматриваемых значений x, что приводит к выполнению неравенства (8.24) указанной теоремы 8.4.

Взяв в качестве $\hat{w}(t)$ функцию $e^{-m(x_1+a)}$ и подставив ее в (16), получим

$$\frac{1}{2}m^2e^{-m(x_1+a)}g_{11}(x)-me^{-m(x_1+a)}f_1(x)-\frac{1}{4}m^2e^{-2m(x_1+a)}l_{11}(x)+\psi(x)=0.$$

Откуда опять выбором достаточно больших положительных m и a, с учетом условия 5), придем к выполнению неравенства (8.25) теоремы 8.4. Учитывая положительную определенность диффузионной матрицы gg^*, а также то, что все слагаемые в (18) имеют рост по V'_x не выше квадратичного, придем к выполнению остальных условий теоремы 8.4. Лемма доказана.

Теперь перейдем к основному результату данной работы, касающемуся разрешимости задачи Дирихле (13), (15).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении условий 1)-5) существует $\varepsilon_0>0$, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ задача (13), (15) имеет единственное решение $V_\varepsilon(x)\in C_{2,1}(\bar{Q})$ такое, что*

$$\| V_\varepsilon(x)-V_0(x)\|_{2,1}\to 0, \varepsilon\to 0, \tag{19}$$

где $V_0(x)$ – решение задачи (16), (17).

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся абстрактной теоремой о неявной функции (см., напр., [12], с. 569). Для этого введем два банаховых пространства X и Y. Пусть $X = C^0_{2,1}(\bar{Q})$ – банахово пространство функций из $C_{2,1}(\bar{Q})$, принимающих нулевое значение на ∂Q, $Y = C_{0,1}(\bar{Q})$. Тогда задача (13), (15) порождает отображение $F : X \times R^1 \to Y$. Таким образом, задача (13), (15) сводится к разрешимости операторного уравнения

$$F(V, \varepsilon) = 0 \tag{20}$$

в окрестности точки $(V_0, 0)$ в указанных пространствах. Покажем, что для отображения (20) выполнены условия теоремы о неявной функции.

Действительно, как следует из доказанной выше леммы, уравнение (20) имеет решение $V = V_0$, $\varepsilon = 0$. Из вида отображения F следует, что оно определено на функциях из некоторой окрестности V_0 и ε из окрестности нуля. Обозначим через W окрестность в $X \times R^1$, где V принадлежат окрестности V_0, а ε – окрестности нуля.

Покажем, что $F \in C^1(W)$ (в смысле строгой дифференцируемости).

Непрерывная дифференцируемость F по V следует из следующих рассуждений. Представим отображение F по V, как суперпозицию двух отображений

$$F(V, \varepsilon) = F(G(V), \varepsilon), \tag{21}$$

где $G : X \to Y \times Y$ есть линейное отображение,

$$G(V) = \begin{pmatrix} V' \\ V'' \end{pmatrix}, \tag{22}$$

а $FG : Y^2 \to Y$ построено по левой части (13). Гладкость внешнего отображения следует из того, что оно дробно-рациональное по V' и V''. Гладкость же отображения (22) очевидна. Очевидна также и гладкость исходного отображения по ε. Тогда принадлежность F классу $C^1(W)$ следует из известных теорем анализа.

Для проверки последнего условия теоремы о неявной функции, а именно: обратимости оператора $F'_V(V_0, 0)$, выпишем его действие на функции $h \in C^0_{2,1}(\bar{Q})$. Имеем

$$F'_V(V_0, 0)h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+\Big(f(x),\frac{\partial h}{\partial x}\Big)-\frac{1}{2}\Big(B(x)N^{-1}(x)B^*(x)\frac{\partial V_0}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial x}\Big). \tag{23}$$

Таким образом, обратимость оператора $F'_V(V_0,0)$ сводится к проверке однозначной разрешимости в пространстве $C^0_{2,1}(\bar{Q})$ линейной краевой задачи Дирихле

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}+\Big(f(x),\frac{\partial h}{\partial x}\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(B(x)N^{-1}(x)B^*(x)\frac{\partial V_0}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial x}\Big)=r(x), \tag{24}$$

$$h(x)=0,\ x\in\partial Q, \tag{25}$$

для каждой функции $r(x)$ из $C_{0,1}(\bar{Q})$. Однако, в силу условий 1)-5) принадлежности $V_0(x)$) пространству $C^0_{2,1}(\bar{Q})$, такая разрешимость имеет место в силу теоремы 18 из [13] (с. 113). Таким образом, все условия теоремы о неявной функции выполнены, откуда и следует доказательство теоремы со свойством (19).

Учитывая теперь формулу (12) для оптимального управления, принадлежность функции $V_\varepsilon(x)$ классу $C^0_{2,1}(\bar{Q})$, а также (19), можно гарантировать для малых ε существование оптимального управления $u_\varepsilon(x)$ исходной задачи (9). При этом функция $u_\varepsilon(x)$ является липшицевой по x и

$$\| u_\varepsilon(x)-u_0(x)\|_{0,1}\to 0,\ \varepsilon\to 0. \tag{26}$$

Учитывая также дифференцируемость функции $V_\varepsilon(x)$ по ε, для нее можно получить асимптотическое разложение по параметру ε. А именно:

$$V_\varepsilon(x)=V_0+\varepsilon L+\bar{o}(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0, \tag{27}$$

где

$$L(x)=-[F'_V(V_0,0)]^{-1}F'_\varepsilon(V_0,0). \tag{28}$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 4. *При выполнении условий 1)-5) задача (9) имеет решение. При этом справедлива формула (26). Минимальное значение функционала $V_\varepsilon(x)$ допускает равномерное по $x\in\bar{Q}$ представление (27), где функция $L(x)$ определяется формулой (28).*

Сказанное выше делает возможным приближенный синтез оптимального управления, аналогично результатам [14] для более широкого класса систем при менее ограничительных предположениях.

Литература

1 Kleinman D.L. On the linear regylator problem and the matrix Riccati equation // Rep. ESL-R-271, Electronic Systems Laboratory. – Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 1966. – P. 102-119.

2 Wonham W.M. Optimal stationary control of a linear system with state-dependent noise // Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. – 1967. – № 5. – P. 486-500.

3 Хасьминский Р.З. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 329 с.

4 Ichikawa A. Dinamic Programing approch to stochastic evolution equations // SIAM J. Control and Optimization. – 1979. – V. 17, № 1. – P. 152-173.

5 Sirbu M., Tessitore G. Null controllability of an infinite dimensional SDE with state and control-dependent noise // SIAM J. Control and Optimization. – 1990. – V. 26. – P. 617-640.

6 Tessitore G. Some remarks on the Riccati equations arising in an optimal control problem with state and control-dependent noise // SIAM J.Control and Optimization. – 1992. – № 30. – P. 717-744.

7 Chen S. and Yang J. Stochastic Linear Quadratic Qptimal Control Problems // Appl. Math. Optim. – 2001. – № 43. – P. 21-45.

8 Luo J., Feng E. Generalized differential Riccati equation and indefinite stochastic LQ control with cross term // Appl. Math. and Computation. – 2004. – № 155. – P. 121-135.

9 Wonham W.M. On a matrix Riccati equation of stochastic control // SIAM J. Control. – 1968. – V. 6, № 4. – P. 681-697.

10 Флеминг У.,Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

11 Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и нелинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.

12 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.

13 Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

14 Черноусько Ф.А., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. – М.: Наука, 1978. – 315 с.

Статья поступила в редакцию 31.03.2016

Василина Г.К., Могильова В.В., Станжицкий А.Н. КВАДРАТТЫҚ САПА КРИТЕРИЙІ БАР СТОХАСТИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ ТИІМДІ БАСҚАРУ

Квадраттық сапа критерийі бар сызықтық және бейсызық стохастикалық жүйелерді басқару есептері зерттеледі. Бұл есептер үшін кері байланысы бар басқару түріндегі тиімді басқарудың бар болуы динамикалық бағдарламалау әдісімен дәлелденді.

Vassilina G.K., Mogylova V.V., Stanzhytskyi A.N. OPTIMAL CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH QUADRATIC CONTROL CRITERION

The control problems of the linear and nonlinear stochastic systems with quadratic control criterion are studied. For these problems the existence of optimal control in the feedback control form is proved using the dynamic programming method.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 93–100.

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М.Т. Дженалиев[1], М.Г. Ергалиев[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]muvasharkhan@gmail.com

Аннотация: В работах [1], [2] была рассмотрена граничная задача Дирихле для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области ($\omega = 1$), где установлено наличие нетривиального решения. Здесь изучаются свойства четности или нечетности решений исходной и сопряженной граничных задач в более общей бесконечной вырождающейся области.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, подвижная граница, сопряженная задача.

1. Постановки задач

В семействе областей $G_\omega = \{(x,t) : t > 0, 0 < x < t^\omega\}$, $\omega > 1/2$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \tag{1}$$

с однородными граничными условиями

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \qquad u(x,t)|_{x=t^\omega} = 0 \tag{2}$$

и соответствующую ей сопряженную граничную задачу

$$-u_t^*(x,t) = a^2 u_{xx}^*(x,t) \tag{3}$$

с однородным предельным и однородными граничными условиями

$$u^*(x,t)|_{t=\infty} = 0,\ u^*(x,t)|_{x=0} = u^*(x,t)|_{x=t^\omega} = 0. \tag{4}$$

Ставится следующая задача. Выяснить свойства чётности или нечётности по пространственной переменной x решений задач (1)–(2) и (3)–(4).

Keywords: *Heat equation, movable boundary, conjugated problem.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35R37, 35K20.
Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0823/ГФ4.

2. Формулировка основных лемм

Основные результаты работы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Для каждого* $\omega > 1/2$ *решение* $u_\omega(x,t)$ *граничной задачи (1)–(2) в области* G_ω *нечётно продолжается в область* $G_\omega^- = \{(x,t) : t > 0, -t^\omega < x < 0\}$, *т.е.*

$$u(x,t) = -u(-x,t),\ (x,t) \in G_\omega,\ \omega > 1/2. \tag{5}$$

Лемма 2. *Для каждого* $\omega > 1/2$ *решение* $u^*_\omega(x,t)$ *граничной задачи (3)–(4) в области* G_ω *нечётно продолжается в область* $G_\omega^- = \{(x,t) : t > 0, -t^\omega < x < 0\}$, *т.е.*

$$u^*(x,t) = -u^*(-x,t),\ (x,t) \in G_\omega,\ \omega > 1/2. \tag{6}$$

Доказательство Леммы 1. Решение граничной задачи (1)–(2) представим в виде теплового потенциала двойного слоя [3]:

$$u(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Используя условия (2) и свойства теплового потенциала [3, с. 480], получаем следующее интегральное соотношение относительно неизвестной плотности $\nu(t)$, где $\nu(t)$ пока неизвестная функция, подлежащая определению:

$$\frac{\nu(t)}{2a^2} - \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{8}$$

Из (8) находим

$$\nu(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Подставляя значение $\nu(t)$ (9) в (7), получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{8a^4\pi} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{\tau_1^{\omega}}{(\tau-\tau_1)^{3/2}} \exp\Big\{-\frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau-\tau_1)}\Big\}\varphi(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\tau^{\omega}}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{-\frac{(x-\tau^{\omega})^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\varphi(\tau)d\tau = u_1(x,t)+u_2(x,t). \quad (10)$$

Далее, меняя порядок интегрирования в первом слагаемом, из (10) имеем

$$u_1(x,t) = \frac{1}{8a^4\pi} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{\tau_1^{\omega}}{(\tau-\tau_1)^{3/2}} \exp\Big\{-\frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau-\tau_1)}\Big\}\varphi(\tau_1)d\tau_1 d\tau =$$

$$= \frac{1}{8a^4\pi} \int_0^t x\tau_1^{\omega}\varphi(\tau_1)I(x,t,\tau_1)d\tau_1, \quad (11)$$

где

$$I(x,t,\tau_1) = \int_{\tau_1}^t \frac{1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau-\tau_1)}\Big\}d\tau.$$

Вычислим интеграл $I(x,t,\tau_1)$. Введем замену $z=\sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\tau_1}}$, тогда

$$\tau = \frac{t+z^2\tau_1}{1+z^2}, \quad d\tau = -\frac{2z(t-\tau_1)}{(1+z^2)^2}dz,$$

$$t-\tau = \frac{z^2(t-\tau_1)}{1+z^2}, \quad \tau-\tau_1 = \frac{t-\tau_1}{1+z^2}.$$

Далее имеем

$$I(x,t,\tau_1) = -\int_{\infty}^0 \frac{2z(t-\tau_1)(1+z^2)^3}{(1+z^2)^2 z^3 (t-\tau_1)^3}\times$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{x^2(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)z^2} - \frac{\tau_1^{2\omega}(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)}\Big\}dz =$$

$$= \frac{2}{(t-\tau_1)^2} \exp\Big\{-\frac{x^2+\tau_1^{2\omega}}{4a^2(t-\tau_1)}\Big\}\times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{1+z^2}{z^2} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau_1)z^2} - \frac{\tau_1^{2\omega}z^2}{4a^2(t-\tau_1)}\Big\}dz.$$

В последнем интеграле используем известное равенство [4, с. 321, 325]

$$\int_0^\infty \exp\Big\{ -\alpha z^2 - \beta \frac{1}{z^2} \Big\} dz = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \exp\Big\{ -2\sqrt{\alpha\beta} \Big\}. \tag{12}$$

Тогда

$$I(x,t,\tau_1) = \frac{2}{(t-\tau_1)^2} \exp\Big\{ \frac{x^2+\tau_1^{2\omega}}{4a^2(t-\tau_1)} \Big\} \Big(\frac{\sqrt{\pi}2a(t-\tau_1)^{1/2}}{2x} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -2 \frac{x}{2a(t-\tau_1)^{1/2}} \frac{\tau_1^\omega}{2a(t-\tau_1)^{1/2}} \Big\} + \frac{\sqrt{\pi}2a(t-\tau_1)^{1/2}}{2\tau_1^\omega} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -2 \frac{x}{2a(t-\tau_1)^{1/2}} \frac{\tau_1^\omega}{2a(t-\tau_1)^{1/2}} \Big\} \Big) = \frac{2a\sqrt{\pi}(x+\tau_1^\omega)}{x\tau_1^\omega(t-\tau_1)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x+\tau_1^\omega)^2}{4a^2(t-\tau_1)} \Big\}.$$

Подставляя $I(x,t,\tau_1)$ в (11), получаем

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x+\tau_1^\omega}{(t-\tau_1)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x+\tau_1^\omega)^2}{4a^2(t-\tau_1)} \Big\} \varphi(\tau_1) d\tau_1. \tag{13}$$

Используя полученное выражение для $u_1(x,t)$ (13) и (10), получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \Big[\frac{x+\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x+\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \Big\} +$$

$$+ \frac{x-\tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \Big\} \Big] \varphi(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Из (14) непосредственно следует справедливость свойства (5) для решения $u(x,t)$ граничной задачи (1)–(2). Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2. Решение граничной задачи (3)–(4) представим в виде теплового потенциала двойного слоя [3]:

$$u^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{x}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} \nu^*(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{x-\tau^\omega}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(\tau^\omega-x)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} \varphi^*(\tau) d\tau. \tag{15}$$

Используя условия (4) и свойства теплового потенциала [3, с. 480], получаем следующее интегральное соотношение относительно неизвестной плотности $\nu^*(t)$, где $\nu^*(t)$ пока неизвестная функция, подлежащая определению:

$$-\frac{\nu^*(t)}{2a^2}-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\tau^{\omega}}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^{2\omega}}{4a^2(\tau-t)}\right\}\varphi^*(\tau)d\tau=0. \tag{16}$$

Из (16) находим

$$\nu^*(t)=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\tau^{\omega}}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^{2\omega}}{4a^2(\tau-t)}\right\}\varphi^*(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Подставляя значение $\nu^*(t)$ (17) в (15), получаем

$$u^*(x,t)=-\frac{1}{8a^4\pi}\int_t^{\infty}\frac{x}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\}\times$$

$$\times\int_\tau^{\infty}\frac{\tau_1^{\omega}}{(\tau_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\varphi^*(\tau_1)d\tau_1d\tau+$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{x-\tau^{\omega}}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau^{\omega})^2}{4a^2(\tau-t)}\right\}\varphi(\tau)d\tau=u_1^*(x,t)+u_2^*(x,t). \tag{18}$$

Далее, меняя порядок интегрирования в первом слагаемом, из (18) имеем

$$u_1^*(x,t)=-\frac{1}{8a^4\pi}\int_t^{\infty}\frac{x}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\}\times$$

$$\times\int_\tau^{\infty}\frac{\tau_1^{\omega}}{(\tau_1-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau_1-\tau)}\right\}\varphi^*(\tau_1)d\tau_1d\tau=$$

$$=-\frac{1}{8a^4\pi}\int_t^{\infty}x\tau_1^{\omega}\varphi^*(\tau_1)I^*(x,t,\tau_1)d\tau_1, \tag{19}$$

где

$$I^*(x,t,\tau_1)=\int_t^{\tau_1}\frac{1}{[(\tau-t)(\tau_1-\tau)]^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(-x)^2}{4a^2(\tau-t)}-\frac{\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau_1-\tau)}\right\}d\tau.$$

Вычислим интеграл $I^*(x,t,\tau_1)$. Введем замену $z=\sqrt{\frac{\tau-t}{\tau_1-\tau}}$, тогда

$$\tau=\frac{t+z^2\tau_1}{1+z^2},\quad d\tau=\frac{2z(\tau_1-t)}{(1+z^2)^2}dz$$

$$\tau-t=\frac{z^2(\tau_1-t)}{1+z^2},\quad \tau_1-\tau=\frac{\tau_1-t}{1+z^2}.$$

Далее имеем

$$I^*(x,t,\tau_1)=\int_0^\infty\frac{2z(\tau_1-t)(1+z^2)^3}{(1+z^2)^2z^3(\tau_1-t)^3}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{(-x)^2(1+z^2)}{4a^2(\tau_1-t)z^2}-\frac{\tau_1^{2\omega}(1+z^2)}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}dz=$$

$$=\frac{2}{(\tau_1-t)^2}\exp\Big\{-\frac{x^2+\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{1+z^2}{z^2}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(\tau_1-t)z^2}-\frac{\tau_1^{2\omega}z^2}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}dz.$$

Последний интеграл вычисляем аналогично, как при доказательстве леммы 1. Получаем

$$I^*(x,t,\tau_1)=\frac{2}{(\tau_1-t)^2}\exp\Big\{-\frac{x^2+\tau_1^{2\omega}}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{\pi}2a(\tau_1-t)^{1/2}}{2x}\times$$

$$\times\exp\Big\{-2\frac{x}{2a(\tau_1-t)^{1/2}}\frac{\tau_1^{\omega}}{2a(\tau_1-t)^{1/2}}\Big\}+\frac{\sqrt{\pi}2a(\tau_1-t)^{1/2}}{2\tau_1^{\omega}}\times$$

$$\times\exp\Big\{-2\frac{x}{2a(\tau_1-t)^{1/2}}\frac{\tau_1^{\omega}}{2a(\tau_1-t)^{1/2}}\Big\}\Big)=\frac{2a\sqrt{\pi}(x+\tau_1^{\omega})}{x\tau_1^{\omega}(\tau_1-t)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{(x+\tau_1^{\omega})^2}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}.$$

Подставляем $I^*(x,t,\tau_1)$ в (19):

$$u_1^*(x,t)=-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_t^\infty\frac{x+\tau_1^{\omega}}{(\tau_1-t)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{(x+\tau_1^{\omega})^2}{4a^2(\tau_1-t)}\Big\}\varphi^*(\tau_1)d\tau_1. \tag{20}$$

Используя полученное выражение для $u_1^*(x,t)$ (20) и (18), получаем представление решения задачи (3)–(4):

$$u^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \Big[-\frac{x+\tau^\omega}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x+\tau^\omega)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} +$$

$$+ \frac{x-\tau^\omega}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(x-\tau^\omega)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} \Big] \varphi^*(\tau) d\tau. \tag{21}$$

Из (21) непосредственно следует справедливость свойства (6) для решения $u^*(x,t)$ граничной задачи (3)–(4). Лемма 2 доказана.

Замечание 1. *Утверждения лемм 1 и 2 остаются в силе, если однородные граничные условия из* (2) *и* (4) *соответственно заменим на неоднородные.*

Замечание 2. *Из представлений решений* (14) *и* (21) *находим интегральные уравнения относительно неизвестных функций* $\varphi(t)$ *и* $\varphi^*(t)$ *соответственно:*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \Big(\frac{t^\omega - \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \Big\} +$$

$$+ \frac{t^\omega + \tau^\omega}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(t^\omega + \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \Big\} \Big) \varphi(\tau) d\tau, \ \omega > 1/2,$$

$$\varphi^*(t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \Big(\frac{t^\omega - \tau^\omega}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} +$$

$$+ \frac{t^\omega + \tau^\omega}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\Big\{ -\frac{(t^\omega + \tau^\omega)^2}{4a^2(\tau-t)} \Big\} \Big) \varphi^*(\tau) d\tau, \ \omega > 1/2.$$

Исследованию вопросов разрешимости этих интегральных уравнений будет посвящена отдельная работа.

Заключение.

В работе установлены свойства нечетного продолжения по пространственной переменной решений исходной и сопряженной граничных задач теплопроводности в вырождающейся неограниченной области.

Литература

1 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary value problems. – 2014. – V. 2014. – 21 p.

2 Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1234-1248.

3 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

4 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 982 с.

Статья поступила в редакцию 29.02.2016

Дженалиев М.Т., Ергалиев М.Г. АЗҒЫНДАЛАТЫН ШЕКСIЗ ОБЛЫСТАҒЫ ЖЫЛУӨТКIЗГIШТIК ТЕҢДЕУI ҮШIН ДИРИХЛЕ ЕСЕБIНIҢ ШЕШIМIНIҢ БIР ҚАСИЕТI ТУРАЛЫ

[1], [2] жұмыстарында шексiз бұрыштық облыстағы ($\omega = 1$) жылуөткiзгiштiк теңдеуi үшiн шекаралық Дирихле есебi қарастырылып, оның нөлдiк емес шешiмiнiң бар екендiгi тағайындалған. Бұл жұмыста одан гөрi жалпы азғындалатын шексiз облыстағы бастапқы және түйiндес шекаралық есептердiң шешiмдерiнiң жұп немесе тақ болуы қасиеттерi зерттеледi.

Jenaliyev M.T., Yergaliyev M.G. ON A PROPERTY OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN THE DEGENERATE AND UNBOUNDED DOMAIN

In papers [1], [2] a boundary value problem for the heat equation was studied in the unbounded angular domain ($\omega = 1$) and it was found that the problem had non-trivial solution. In this work we study even-odd properties of solutions of primary and conjugated boundary value problems in the more general unbounded and degenerate domain.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 101–117.

УДК 519. 642

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ж.М. Кадирбаева[1], А.Т. Асанова[2]

[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]apelman86pm@mail.ru, [2]assanova@math.kz

Аннотация: Исследуется линейная двухточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. В условиях импульсного воздействия учтены значения в предыдущих точках импульса. Рассматриваемая задача сведена к эквивалентной многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. Предлагается численная реализация метода параметризации с использованием метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построенные численные алгоритмы иллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: Нагруженное дифференциальное уравнение, импульсное воздействие, метод параметризации, фундаментальная матрица.

1. Введение. Постановка задачи

Как известно, многие явления в сложных эволюционных системах с памятью существенно зависят от предыстории этой системы. В большинстве случаев данные явления описываются нагруженными дифференциальными уравнениями [1–4]. Важным примером нагруженных дифференциальных уравнений является стационарное односкоростное уравнение переноса [5]. За последние десятилетия теория нагруженных уравнений интенсивно развивалась в работах многих математиков. Обзор результатов по краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений различных классов и библиографию можно посмотреть в [4, 6, 7]. Если в сложных

Keywords: *Loaded differential equation, impulse effect, parameterization method, fundamental matrix.*

2010 Mathematics Subject Classification: 517.75, 519.911.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0822/ГФ4.

эволюционных системах с памятью появляются кратковременные возмущения, длительностью которых можно пренебречь, то возникают дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Математическое моделирование задач теории автоматического управления, теории ядерных реакторов, электрической и механической инженерии, мониторинга землетрясений, динамических систем также часто приводят к периодическим и двухточечным краевым задачам для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями [8–23]. Наличие импульса оказывает существенное влияние на свойства решений обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [8–10, 12, 16]. Отметим, что построение приближенных и численных решений интегро-дифференциальных уравнений [13–23] тесно связано с нагруженными дифференциальными уравнениями, которые появляются при аппроксимации интегральных слагаемых [1, 2, 4]. Это приводит к необходимости разработки конструктивных методов решения краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений и нахождению эффективных признаков существования их решений. В этих целях для решения периодических и двухточечных краевых задач для систем нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений был применен метод параметризации [24]. На его основе были построены алгоритмы нахождения приближенных решений и их сходимости к точному решению указанных задач, установлены критерии однозначной, корректной разрешимости рассматриваемых задач в терминах коэффициентов системы и граничных матриц [25–28]. Метод параметризации также был развит на линейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями [29], были получены коэффициентные признаки однозначной разрешимости и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

Развитие вычислительных технологий и расширение сферы их применения в прикладных задачах требуют разработки численных методов решения краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. В работах [30, 31] был предложен численный метод решения системы линейных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. При этом были проведены численные эксперименты для модельных задач. В работе [32] методом параметризации были установлены критерии корректной разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и предложены алгоритмы нахождения приближенных решений. Также был разработан численный метод решения рассматриваемой задачи на основе алгоритмов метода параметризации при регулярном разбиении отрезка. Данный подход был применен к решению двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [33]. На основе результатов работы [32] была предложена численная реализация алгоритмов метода параметризации решения указанной задачи.

В настоящей работе рассматривается двухточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Точки нагружения в дифференциальном уравнении являются также точками импульсного воздействия, а условия импульсного воздействия учитывают значения в предыдущих точках импульса. Условия такого вида рассматривались в работе [16] для интегро-дифференциального уравнения. Методом параметризации интервал разбивается на части и вводятся дополнительные параметры, как значения решения в начальных точках подинтервалов. По матрицам нагруженных слагаемых краевого условия и условий импульсного воздействия составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Коэффициенты и правая часть системы определяются решениями задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения системы находятся через значения искомой функции в начальных точках подинтервалов. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах определяется методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности. Проведены численные эксперименты предлагаемого подхода на примерах.

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на отрезке $[0,T]$

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t) \lim_{t\to\theta_j+0} x(t) + f(t),\ t \in (0,T)\backslash\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_m\}, \qquad (1)$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d,\ d\in\mathbb{R}^n,\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \sum_{k=1}^{i-1} D_k \lim_{t\to\theta_k-0} x(t) + \varphi_i, \qquad (3)$$

$\varphi_i \in \mathbb{R}^n$, $\quad i=\overline{1,m}$.

Здесь $(n\times n)$-матрицы $A_j(t)$, $j=\overline{0,m}$, и n-вектор-функция $f(t)$ кусочно-непрерывны на $[0,T]$ с возможными разрывами первого рода в точках $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$. B_j, C_j, $j=\overline{0,m}$, D_k, $k=\overline{1,m-1}$, – постоянные матрицы размерности $(n\times n)$, $0=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}=T$, $||x||=\max\limits_i |x_i|$, $||A(t)||=\max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}(t)|$.

Пусть $PC([0,T],\theta_i,\mathbb{R}^n)$ – пространство кусочно-непрерывных функций $x(t)$ с нормой $||x||_1=\max\limits_{i=\overline{0,m}} \sup\limits_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} ||x(t)||$.

Решением задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) на $[0,T]$ кроме точек $t=\theta_i$, $i=\overline{1,m}$, граничному условию (2) и условиям импульсных воздействий в фиксированные моменты времени (3).

Схема метода. Интервал $[0,T]$ разбивается на подинтервалы точками нагружения: $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{m+1}[\theta_{r-1},\theta_r)$.

Введем пространство $C([0,T],\theta_r,\ \mathbb{R}^{n(m+1)})$ систем функций $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_{m+1}(t))$, где функции $x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, непрерывны на $[\theta_{r-1},\theta_r)$ и имеют конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to\theta_r-0} x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, с нормой $||x[\cdot]||_2=\max\limits_{r=\overline{1,m+1}} \sup\limits_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)} ||x_r(t)||$.

Сужение функции $x(t)$ на $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $\quad r=\overline{1,m+1}$, обозначим через $x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$.

Пусть $\lambda_r=x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$.

На каждом интервале $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$ в задаче (1)–(3) произведем замену $x_r(t)=u_r(t)+\lambda_r$, $r=\overline{1,m+1}$, и получим краевую задачу с параметрами λ_r:

$$\frac{du_r}{dt}=A_0(t)[u_r(t)+\lambda_r]+\sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}+f(t),\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r), \qquad (4)$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{5}$$

$$B_0\lambda_1 + C_0\lambda_{m+1} + C_0 \lim_{t\to T-0} u_{m+1}(t) = d, \tag{6}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} u_i(t) + B_i\lambda_i - C_i\lambda_{i+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} D_k\big[\lim_{t\to\theta_k-0} u_k(t) + \lambda_k\big] + \varphi_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Решением задачи (4)–(7) является пара $(\lambda, u[t])$ с элементами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{m+1}(t)) \in C([0,T], \theta_r, \mathbb{R}^{n(m+1)})$, где функции $u_r(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, и при $\lambda_r = \lambda_r^*$ удовлетворяют системе нагруженных дифференциальных уравнений (4) и условиям (5)–(7).

Задачи (1)–(3) и (4)–(7) эквивалентны. Если пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), ..., \widetilde{u}_{m+1}(t)) \in C([0,T], \theta_r, \mathbb{R}^{n(m+1)})$ – решение задачи (4)–(7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{u}_r(t) + \widetilde{\lambda}_r$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $\quad r = \overline{1, m+1}$, $\widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{m+1} + \lim\limits_{t\to T-0} \widetilde{u}_{m+1}(t)$, будет решением исходной задачи (1)–(3). И наоборот, если функция $x(t)$ является решением задачи (4)–(7), то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (x(\theta_0), x(\theta_1), ..., x(\theta_m))$, $u[t] = (x(t) - x(\theta_0), x(t) - x(\theta_1), , ..., x(t) - x(\theta_m))$, будет решением задачи (4)–(7).

Пусть $X_r(t)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$ на $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$.

Тогда решение задачи Коши (4), (5) можно записать в следующем виде:

$$u_r(t) = X_r(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau)\Big\{A_0(\tau)\lambda_r + \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\lambda_{j+1}\Big\}d\tau +$$

$$+ X_r(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) f(\tau)d\tau, \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ r = \overline{1, m+1}. \tag{8}$$

Подставив правую часть (8) в краевое условие (6) и условия импульса (7) при соответствующих предельных значениях, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно параметров λ_r, $r = \overline{1, m+1}$:

$$B_0\lambda_1 + C_0\Big[I + X_{m+1}(T)\int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)A_0(\tau)d\tau\Big]\lambda_{m+1}+$$

$$+C_0X_{m+1}(T)\int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}d\tau =$$

$$= d - C_0X_{m+1}(T)\int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (9)$$

$$B_iX_i(\theta_i)\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X_i^{-1}(\tau)\Big\{A_0(\tau)\lambda_i + \sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}\Big\}d\tau + B_i\lambda_i -$$

$$-C_i\lambda_{i+1} - \sum_{k=1}^{i-1}D_kX_k(\theta_k)\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} X_k^{-1}(\tau)\Big\{A_0(\tau)\lambda_k + \sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}\Big\}d\tau -$$

$$-\sum_{k=1}^{i-1}D_k\lambda_k = \varphi_i - B_iX_i(\theta_i)\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} X_i^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}D_kX_k(\theta_k)\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} X_k^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad i=\overline{1,m}. \qquad (10)$$

Обозначив через $Q_*(\theta)$ матрицу, соответствующую левой части системы (9), (10) и составленную из коэффициентов при параметрах λ_r, $r = \overline{1, m+1}$, а также введя вектор

$$F_*(\theta) = \Big(d - C_0X_{m+1}(T)\int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\varphi_1 - B_1X_1(\theta_1)\int_{\theta_0}^{\theta_1} X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\varphi_2 - B_2X_2(\theta_2)\int_{\theta_1}^{\theta_2} X_2^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + D_1X_1(\theta_1)\int_{\theta_0}^{\theta_1} X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \ \ldots,$$

$$\varphi_m - B_mX_m(\theta_m)\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} X_m^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} D_k X_k(\theta_k) \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} X_k^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \Big)',$$

запишем систему (9), (10) в виде

$$Q_*(\theta)\lambda = F_*(\theta). \tag{11}$$

Нетрудно установить, что разрешимость краевой задачи (1)–(3) эквивалентна разрешимости системы (11) [32]. Решение системы (11), вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$, состоит из значений решений исходной задачи (1)–(3) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$.

Если известно $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m+1}^*)$ – решение системы (11), то решение краевой задачи (1)–(3) определяется равенствами

$$x^*(t) = X_r(t) X_r^{-1}(\theta_{r-1}) \lambda_r^* + X_r(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau) d\tau \lambda_{j+1}^* +$$

$$+X_r(t) \int_{\theta_{r-1}}^{t} X_r^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \ r = \overline{1, m+1}, \tag{12}$$

$$x^*(T) = X_{m+1}(T) \Big[X_{m+1}^{-1}(\theta_m) \lambda_{m+1}^* + \int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau) d\tau \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau) \lambda_{j+1}^* \Big] +$$

$$+X_{m+1}(T) \int_{\theta_m}^{T} X_{m+1}^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Представления (12), (13) дают аналитическую форму решения линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1)–(3).

Численная реализация метода параметризации. Как видно из уравнений (9), (10), коэффициенты и правая часть системы (11) составляются из решений задач Коши

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t) z + A_j(t), \ z(\theta_{r-1}) = 0, \ j = \overline{0, m}, \ r = \overline{1, m+1}, \tag{14}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t), \ z(\theta_{r-1}) = 0, \ r = \overline{1, m+1}. \tag{15}$$

Применяя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности для численного решения задач Коши (14), (15), строится следующий алгоритм численного решения двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1)–(3).

Пусть имеется разбиение $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$. Каждый подинтервал $[\theta_{i-1}, \theta_i)$, $i = \overline{1, m+1}$, делится на N_i частей, приближенные значения коэффициентов и правой части (11) определяются через решения матричных и векторных задач Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности с шагом $h_i = (\theta_i - \theta_{i-1})/N_i$, $i = \overline{1, m+1}$, на каждом i-ом интервале. Тогда получаем следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров λ:

$$Q_*^{\widetilde{h}}(\theta)\lambda = -F_*^{\widetilde{h}}(\theta), \ \lambda \in \mathbb{R}^{n(m+1)}, \ \widetilde{h} = (h_1, h_2, ..., h_{m+1}). \tag{16}$$

Решая систему алгебраических уравнений (16), найдем $\lambda^{\widetilde{h}} \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$. Как было отмечено выше, компоненты $\lambda^{\widetilde{h}} = (\lambda_1^{\widetilde{h}}, \lambda_2^{\widetilde{h}}, \ldots, \lambda_{m+1}^{\widetilde{h}}) \in R^{n(m+1)}$ являются значениями приближенного решения задачи (1)–(3) в начальных точках подинтервалов $x^{\widetilde{h}_r}(\theta_0) = \lambda_1^{\widetilde{h}}$, $x^{\widetilde{h}_r}(\theta_1) = \lambda_2^{\widetilde{h}}$,...,$x^{\widetilde{h}_r}(\theta_m) = \lambda_{m+1}^{\widetilde{h}}$. Из формул (12), (13) следует, что приближенные значения решения в остальных точках подинтервалов определяются через решения задач Коши

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\lambda_{j+1}^{\widetilde{h}} + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \tag{17}$$

$$x(\theta_{r-1}) = \lambda_r^{\widetilde{h}}, \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{18}$$

Снова применяя метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности для численного решения задач Коши (17), (18), будет определено численное решение задачи (1)–(3).

Для иллюстрации предложенного подхода численного решения двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1)–(3) на основе метода параметризации рассмотрим следующие примеры.

На $[0,T]$ рассмотрим линейную двухточечную краевую задачу для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{2} A_j(t) \lim_{t\to\theta_j+0} x(t) + f(t), \quad t \in [0,T]\backslash\{\theta_1,\theta_2\}, \tag{19}$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d, \qquad d \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{20}$$

$$B_1 \lim_{t\to\theta_1-0} x(t) - C_1 \lim_{t\to\theta_1+0} x(t) = \varphi_1, \qquad \varphi_1 \in \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

$$B_2 \lim_{t\to\theta_2-0} x(t) - C_2 \lim_{t\to\theta_2+0} x(t) = \varphi_2 + D_1 \lim_{t\to\theta_1-0} x(t),\ \varphi_2 \in \mathbb{R}^2. \tag{22}$$

Пример 1.

$$T=1, \quad \theta_1 = \frac{1}{4},\ \theta_2 = \frac{1}{2},\ A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi_1 = \begin{pmatrix} -1/16 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -1/2 - 11t/4 \\ 15/16 - t \end{pmatrix} \text{ при } t \in [0, 1/4)\,,$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - 3t/4 - 1/2 \\ -t^2 - t + 15/16 \end{pmatrix} \text{ при } t \in [1/4, 1/2)\,,$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -1/2 - 15t/4 \\ -1/16 - 2t \end{pmatrix} \text{ при } t \in [1/2, 1]\,.$$

В рассматриваемой задаче фундаментальной матрицей дифференциальной части является

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Дополнительные параметры λ_r, $r=\overline{1,3}$, введем как значения решения в начальных точках подинтервалов $\lambda_1\hat{=}x(0)$, $\lambda_2\hat{=}x(\frac{1}{4})$, $\lambda_3\hat{=}x(\frac{1}{2})$ и осуществим замену $x(s)=u_1(s)+\lambda_1$, $s\in[0,\frac{1}{4})$, $x(s)=u_2(s)+\lambda_2$, $s\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, $x(s)=u_3(s)+\lambda_3$, $s\in[\frac{1}{2},1)$.

Тогда для функции $u_r(t)$, $r=\overline{1,3}$, имеют место равенства

$$u_1(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}\lambda_1+$$

$$+\begin{pmatrix} -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t} & \frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} \\ \frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t} & -\frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} \end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t} & \frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} \\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t} & -\frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t} \end{pmatrix}\lambda_3+$$

$$+\begin{pmatrix} -\frac{7t^2}{16}+\frac{7t}{32}+\frac{23}{64}-\frac{23}{64}e^{2t} \\ \frac{7t^2}{16}+\frac{53t}{32}+\frac{23}{64}-\frac{23}{64}e^{2t} \end{pmatrix},\ t\in\left[0,\frac{1}{4}\right),$$

$$u_2(t)=\begin{pmatrix} -\frac{t}{2}-\frac{5}{8}+\frac{3}{4}e^{2t-\frac{1}{2}} & \frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{41}{64}+\frac{11}{16}e^{2t-\frac{1}{2}} \\ \frac{t}{2}-\frac{7}{8}+\frac{3}{4}e^{2t-\frac{1}{2}} & -\frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{39}{64}+\frac{11}{16}e^{2t-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}e^{2t-\frac{1}{2}} & \frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{9}{64}+\frac{3}{16}e^{2t-\frac{1}{2}} \\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}e^{2t-\frac{1}{2}} & -\frac{t^2}{4}-\frac{t}{4}-\frac{7}{64}+\frac{3}{16}e^{2t-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\lambda_3+$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{9t^2}{16}+\frac{7t}{32}+\frac{137}{256}-\frac{5}{8}e^{2t-\frac{1}{2}} \\ \frac{7t^2}{16}+\frac{53t}{32}+\frac{47}{256}-\frac{5}{8}e^{2t-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\ t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),$$

$$u_3(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}e^{2t-1} & \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{4}e^{2t-1} \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}e^{2t-1} & -\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4}e^{2t-1} \end{pmatrix} \lambda_2 +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2} - 1 + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} & \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{11}{64} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} \\ -\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} & -\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4} - \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4}e^{2t-1} \end{pmatrix} \lambda_3 +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\dfrac{7t^2}{16} + \dfrac{39t}{32} + \dfrac{69}{64} - \dfrac{101}{64}e^{2t-1} \\ \dfrac{7t^2}{16} + \dfrac{53t}{64} + \dfrac{41}{64} - \dfrac{101}{64}e^{2t-1} \end{pmatrix}, \ t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right],$$

Краевое условие и условии импульсного воздействия при $t = 1/4$, $t = 1/2$ приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно параметров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e & \frac{3}{16} - \frac{1}{4}e & -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}e & \frac{11}{16} - \frac{3}{4}e \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}e & \frac{9}{16} - \frac{1}{4}e & 1 - \frac{3}{4}e & \frac{1}{16} - \frac{3}{4}e \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{11}{8} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{11}{64} + \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{11}{64} + \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{77}{64} + \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{13}{64} + \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & \frac{11}{4} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{9}{16}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{16}e^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} + \frac{5}{16}e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} & -\frac{3}{4} - \frac{3}{16}e^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{55}{64} - \frac{101}{64}e \\ \frac{47}{64} - \frac{101}{64}e \\ -\frac{115}{256} - \frac{23}{64}e^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{205}{256} - \frac{92}{256}e^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{31}{64} + \frac{17}{64}e^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{51}{64} - \frac{29}{64}e^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем значения параметров

$$\lambda_{11}^* = 0, \quad \lambda_{12}^* = 0, \quad \lambda_{21}^* = 1/16, \quad \lambda_{22}^* = 1/4, \quad \lambda_{31}^* = 1/2, \quad \lambda_{32}^* = 3/2.$$

Единственным решением задачи (19)–(22) является

$$x^*(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}\int\limits_0^t \begin{pmatrix} -1/2 \\ \frac{(1-2\tau)e^{-2\tau}}{2} \end{pmatrix} d\tau=\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \left[0, \frac{1}{4}\right),$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} -\frac{32}{3} + \frac{5}{32}e^{2t-1/2} \\ \frac{3}{32} + \frac{5}{32}e^{2t-1/2} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}\int\limits_{1/4}^t \begin{pmatrix} \tau - 1/2 \\ \frac{(1-2\tau^2)e^{-2\tau}}{2} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + e^{2t-1} \\ \frac{1}{2} + e^{2t-1} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}\int\limits_{1/2}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -2\tau e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}, \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

В этом примере нам удалось построить фундаментальную матрицу дифференциальной части рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения. Это в совокупности с вычисляемыми интегралами позволило построить решение задачи в явном виде на основе алгоритма метода параметризации.

Пример 2.

$$T = 1, \quad \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_1 = \begin{pmatrix} -1/16 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - 7t/4 - 1/2 \\ 15/16 - t \end{pmatrix} \text{ при } \quad t \in [0, 1/4)\,,$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + t/4 - 1/2 \\ -t^3 - t + 15/16 \end{pmatrix} \text{ при } \quad t \in [1/4, 1/2)\,,$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t^2 - 11t/4 + 1/2 \\ -t^2 - t - 1/16 \end{pmatrix} \text{ при } \quad t \in [1/2, 1]\,.$$

В этом примере матрица дифференциальной части является переменной и построить фундаментальную матрицу не удается.

Таблица 1 – Результаты численной реализации алгоритма
при разбиении интервалов $[0, 0.25]$, $[0.25, 0.5]$, $[0.5, 1]$
с шагом $h_1 = h_2 = 0.025$, $h_3 = 0.05$

t	$\widetilde{x}_1(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$	t	$\widetilde{x}_1(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$	t	$\widetilde{x}_1(t)$	$\widetilde{x}_2(t)$
0	0	0	0.25	0.06249999	0.25	0.5	0.5	1.5
0.025	0	0.025	0.275	0.07562499	0.275	0.55	0.55	1.55
0.05	0	0.05	0.3	0.08999999	0.3	0.6	0.6	1.6
0.075	0	0.075	0.325	0.10562499	0.325	0.65	0.65	1.65
0.1	0	0.1	0.35	0.12249999	0.35	0.7	0.7	1.7
0.125	0	0.125	0.375	0.14062499	0.375	0.75	0.75	1.75
0.15	0	0.15	0.4	0.15999999	0.4	0.8	0.8	1.8
0.175	0	0.175	0.425	0.18062499	0.425	0.85	0.85	1.85
0.2	0	0.2	0.0.45	0.20249999	0.45	0.9	0.9	1.9
0.225	0	0.225	0.475	0.22562499	0.475	0.95	0.95	1.95
0.25	0	0.25	0.5	0.24999999	0.5	1	1	2

Решением задачи в примере 2 является
$x^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ при $t \in [0, 1/4)$, $\quad x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ при $t \in [1/4, 1/2)$, $x^*(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ при $t \in [1/2, 1]$.

Для разности соответствующих значений точного и построенного решений задачи примера 2 справедлива следующая оценка

$$\max_{j=\overline{1,30}} \|x^*(t_j) - \widetilde{x}(t_j)\| < 0.000000001.$$

Литература

1 Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72-81.

2 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 86-94.

3 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М: Высшая школа, 1995. – 205 с.

4 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М: Наука, 2012. – 232 с.

5 Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН СССР. – 1961. – Т. 61. – 158 с.

6 Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.

7 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Fылым, 2010.

8 Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Выша школа, 1987. – 287 с. (English translation: Samoilenko A.M. and Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995. – 290 p.).

9 Akhmetov M.U. and Perestyuk N.A. Stability of periodic solutions of differential equations with impulse effect on surfaces // Ukranian mathematical journal. – 1989. – Vol. 41, № 12. – P.1596-1601. (in Russ.).

10 Bainov D.D. and Simeonov P.S. Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications. – New York-Chichester-Brisbane-Toronto: Halsted Press, 1989. – 345 p.

11 Hu S. and Lakshmikantham V. Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems // Nonlinear Analysis. – 1989. – Vol. 13, № 1. – P. 75-85.

12 Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P. Theory of impulsive differential equations. – World Scientific Publishers Singapore, 1989. – 434 p.

13 Liu X., Guo D. Periodic boundary value problem a class of second-order impulsive integro-differential equation in Banach spaces // J. Math. Anal., Appl. – 1997. – Vol. 216. – P. 284-302.

14 He Z., He X. Periodic boundary value problems first order impulsive integro-differential equations of mixed type // J. Math. Anal., Appl. – 2004. – Vol. 296. – P. 8-20.

15 Nieto J.J., Rodrigues-Lopez R. New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications // J. Math. Anal., Appl. – 2007. – Vol. 328. – P. 1343-1368.

16 Akhmet M.U., Tleubergenova M.A., Yilmaz O. Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – Vol. 56. – P. 1071-1081.

17 Li W., Song G. Nonlinear boundary value problem for second order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach space // Computers and Mathematics with Applications. – 2008. – Vol. 56. – P. 1372-1381.

18 Li J. Periodic boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – Vol. 198. – P. 317-325.

19 Luo Z., Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // Nonlinear Analysis. – 2009. – Vol. 70. – P. 2248-2260.

20 Yansheng L. Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulse // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 223, № 1. – P. 27-39.

21 Ahmad B., Alsaedi A. Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems of nonlinear impulsive functional integro-differential equations of mixed type // Nonlinear Analysis: Hybrid systems. – 2009. – Vol. 3. – P. 501-509.

22 Li J., Luo Z., Yang X., Shen J. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // Nonlinear Analysis. – 2010. – Vol. 72. – P. 3837-3841.

23 Liang J., Liu Y., Liu Z. A class of BVPs for first order impulsive integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 218. – P. 3667-3672.

24 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

25 Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер.физ-матем. – 2005. – № 1. – С. 95-102.

26 Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. – Алматы. – 2005. – Т. 5, № 3. – С. 25-34.

27 Кадирбаева Ж.М. Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. – Алматы, 2009. – Т. 9, № 2(32). – С. 64-70.

28 Кадирбаева Ж.М. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Математический журнал. – Алматы, 2009. – Т. 9, № 4(34). – С. 63-71.
29 Абдуллаев В.М., Айда-Заде К.Р. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 9. – С. 1585-1595.
30 Абдуллаев В.М., Айда-Заде К.Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1096-1109.
31 Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Математический журнал. – Алматы, 2004. – Т. 4, № 4. – С. 93-102.
32 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 294. – P. 342-357.
33 Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М. Численная реализация метода параметризации решения двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Математический журнал. – Алматы, 2014. – Т. 14, № 2. – С. 36-49.

Статья поступила в редакцию 17.02.2016

Қадырбаева Ж.М., Асанова А.Т. ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ИМПУЛЬСТІК ЖҮЙЕЛЕРІ ҮШІН ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ САНДЫҚ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

Импульстік әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Импульстік әсер шарттарында алдыңғы импульс нүктелеріндегі мәндері ескерілген. Қарастырылып отырған есеп пара-пар болатын жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлері бар көпнүктелі шеттік есепке келтірілген. Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін шешуге дәлдігі 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісін пайдалана отырып параметрлеу әдісінің сандық жүзеге асырылуы ұсынылады. Құрылған есептік алгоритмдер мысалдармен толықтырылып көрсетілген.

Kadirbayeva Zh.M., Assanova A.T. ON NUMERICAL SOLVING OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR IMPULSIVE SYSTEMS OF LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

The linear two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect is investigated.

The problem considered is reduced to the equivalent multi-point boundary value problem for systems of ordinary differential equations with parameters. The conditions of impulse effects take into account the values of the previous impulse points. Using Runge-Kutta 4th-order accuracy method for solving Cauchy problems for ordinary differential equations, the numerical implementation of the parametrization method is proposed. Numerical algorithms are illustrated by the examples.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 118–134.

УДК 517.951

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Б.Д. Кошанов[1], Ж.К. Кулимбек[2]
[1,2]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]koshanov@list.ru, [2]k.zhazira.93@mail.ru

Аннотация: В данной работе изучены решения уравнения Пуассона и неоднородного бигармонического уравнения в неограниченной области. В таких исследованиях возникает необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решения исследуемых уравнений. Вычислены размерности пространств решений вышеуказанных задач с дополнительным условием на бесконечности.

Ключевые слова: Уравнения Пуассона, оператор Лапласа, эллиптические уравнения, бигармонические уравнения, задача Дирихле, функция Грина, неравенство Шварца.

Распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона. При исследовании колебаний тонких пластин малых прогибов возникают бигармонические уравнения.

В римановой геометрии широко используются оператор Лапласа и инварианты многообразий, получаемые из спектральных характеристик лапласиана. При обосновании кубатурных формул важную роль играет полигармоническое уравнение. При этом, как показал С.Л. Соболев [1], необходимо пользоваться неограниченными решениями полигармонического уравнения. Однако, даже в случае уравнения Лапласа правильные постановки краевых задач в классах неограниченных функций в полной мере не исследованы [2, 3].

Keywords: *Poisson equation, Laplace operator, elliptic equations, biharmonic equation, Dirichlet problem, Green's function, Schwarz inequality.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35J67, 31A30, 31A10.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 3492/ГФ4.

Рассмотрения, касающиеся граничных задач для эллиптических операторов, можно распространить на некоторые весовые пространства типа Соболева-Бесова.

Однако, интересные с точки зрения приложения граничные задачи не охватываются указанными теориями. К таким задачам относится изучение решений неоднородного уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области. Здесь появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решение уравнения Пуассона. Такие требования условиями излучения типа Зоммерфельда [4] могут быть физически интерпретированы. Подобная же проблема введения дополнительных условий возникает, когда рассматриваются неограниченные решения уравнения Лапласа и бигармонического уравнения. Результаты работы связаны с введением весового пространства, которое может восприниматься, как некоторое интегральное условие на бесконечности и в котором операторы Лапласа и би-Лапласа имеют конечномерный дефект.

1. Ядро оператора Лапласа в многомерных весовых пространствах в неограниченной области

В данном разделе работы изучим граничные задачи для оператора Лапласа в неограниченных областях $\Omega \subset R^n$.

Исследуются решения $u(x)$ уравнения Лапласа

$$\triangle u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \; x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G}, \tag{1}$$

вне компакта $\overline{G}$, содержащего начало координат,

$$D(u, \Omega) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx, \tag{2}$$

где $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, \; \alpha \in R^1$.

Введем следующие обозначения:
$C_0^\infty(\Omega)$ – пространство функций из $C^\infty(\Omega)$, имеющих компактный носитель в Ω;

$W_2^1(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}},\ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right);$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по этой же норме;
$W_{2,loc}^1(\Omega)$ – пространство функций $u(x)$ таких, что $u(x) \in W_2^1(\Omega \cap Q_R)$ для любого шара $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$;
$\overset{\circ}{W}{}_{2,loc}^1(\Omega)$ – пространство функций $u(x) \in W_{2,loc}^1(\Omega)$ таких, что $u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения $\triangle u(x) = 0$ в Ω, удовлетворяющее условию $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$. Тогда при $n \geq 3$ для функции $u(x)$ справедливо представление*

$$u(x) = P(x) + C_0\Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \tag{3}$$

где $P(x)$ – многочлен степени ниже

$$d_0 = max\{1; 1 - \frac{\alpha + n}{2}\},$$

$\Gamma(x) = -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{2-n}$ – фундаментальное решение оператора Лапласа [4], σ_n – площадь поверхности единичной сферы в R^n, $C_i, i = 0, 1, ..., n,$ – некоторые константы, а для функции $u_1(x)$ справедлива оценка

$$|\partial_x^\gamma u_1(x)| \leq b_\gamma |x|^{-n-|\gamma|}, \tag{4}$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n), \gamma_i, i = 1, ..., n,$ – целые неотрицательные числа, $b_\gamma = const, \partial_x = (\partial_{x_i}, ..., \partial_{x_n}), \partial_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial_{x_j}}, j = 1, ..., n.$

Доказательство. Так как область G ограничена, то можно считать, что она содержится в шаре $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$.

Пусть $\theta(|x|) \in C^\infty(R^1), \theta = 1$ при $|x| > R+2$ и $\theta = 0$ при $|x| < R+1$, тогда функция $v(x) = \theta(|x|) \cdot u(x)$ удовлетворяет уравнению $\triangle v(x) = f(x)$ в R^n, где $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$.
Положим
$$w(x) = v(x) - \int\limits_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy, \tag{5}$$

где $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа. Очевидно, что
$$\triangle w(x) = 0 \ \text{ в } \ R^n. \tag{6}$$

Применив к уравнению (6) преобразование Фурье, получим
$$|\eta|^2 \cdot \widetilde{w}(\eta) = 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{w}(\eta)$ – образ Фурье функции $w(x)$.

Из (7) следует, что носитель функции $\widetilde{w}(\eta)$ содержится в одноточечном множестве $\{0\}$. Следовательно, $\widetilde{w}(\eta)$ является конечной линейной комбинацией $\delta(x)$-функции и её производных [4]. Отсюда следует, что $w(x)$ является многочленом.

Из (5) получим
$$v(x) = P(x) + v_1(x), \tag{8}$$

где $P(x) \equiv w(x)$ – многочлен, а
$$v_1(x) = \int\limits_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy, \tag{9}$$

Пусть d – порядок многочлена $P(x)$. Покажем, что $d < d_0$.

Предположим, что $d \geq d_0 \geq 1$. Тогда существует конус K в R^n с вершиной в начале координат и число $N > 0$ такие, что
$$|\nabla P(x)| \geq const \rho^{d-1} \tag{10}$$

при $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$. Под конусом K в R^n с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\mu \cdot x \in K$ при всех $\mu > 0$.

С другой стороны, так как

$$f(x) \in C_0^\infty(R^n), \quad \text{а} \quad |\nabla_x \Gamma(x-y)| \leq c \cdot |x-y|^{1-n},$$

то

$$|\nabla v_1(x)| \leq const\ \rho^{1-n}.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$|\nabla v(x)| \geq const\ \rho^{d-1} \tag{11}$$

при $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$. Из определения функции $v(x)$ следует, что $D_\alpha(v(x), \Omega) < \infty$. С другой стороны, в силу неравенства (11) следует, что

$$D_\alpha(v(x), \Omega) \geq \int\limits_{K\cap\{\rho>N\}} \rho^{2(d-1)+\alpha} dx.$$

Для сходимости полученного интеграла необходимо, чтобы

$$2(d-1) + \alpha + n < 0,$$

откуда следует, что

$$d < 1 - \frac{(\alpha+n)}{2} \leq d_0.$$

Итак,

$$d < d_0.$$

Докажем теперь, что

$$v_1(x) = a_0 \cdot \Gamma(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + v_2(x), \tag{12}$$

где $a_0, ..., a_n$ – некоторые константы, а функция $v_2(x)$ удовлетворяет неравенству (4).

По формуле Тейлора [6] имеем

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} y_j + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma(x + t \cdot y)}{\partial x_i \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j.$$

Подставляя это равенство в (9), получим

$$v_1(x) = \Gamma(x) \cdot \int\limits_{R^n} f(y) \cdot dy - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R^n} y_j \cdot f(y) \cdot dy \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma(x + t \cdot y)}{\partial x_i \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j \cdot f(y) \cdot dy.$$

Отсюда следует формула (12) с

$$a_0 = \int\limits_{R^n} f(y) dy, \quad a_j = - \int\limits_{R^n} f(y) \cdot y_j dy,$$

$$v_2(x) = \int\limits_{R^n} \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma(x + t \cdot y)}{\partial x_i \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j \cdot f(y) \cdot dy.$$

Выполнение неравенств (4) для функции $v_2(x)$ проверяется непосредственно. Так как $u(x) = v(x) = P(x) + v_1(x)$ при $|x| > R + 2$, то отсюда следует представление (3) для функции $u(x)$. Лемма доказана.

2. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в неограниченной области

В области $\Omega = R^n \setminus \overline{G}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) с граничным условием

$$u(x)|_{\partial \Omega} = 0. \tag{13}$$

Определение 1. [7].*Функцию $u(x)$ называют обобщенным решением задачи (1), (13), если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,loc}(\Omega)$ и для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место интегральное тождество*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{14}$$

Здесь мы будем вычислять размерность пространства решений задачи (1), (13), удовлетворяющих условию

$$D_\alpha(u,\Omega) \equiv \int\limits_\Omega \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx < \infty,$$

где $\alpha \in R^1$.

Пусть $\Pi_1(\alpha) = \{u(x)|u(x)$ – обобщенное решение задачи (1), (13) с условием $D_\alpha(u,\Omega) < \infty\}$. Обозначим через $m_1(\alpha)$ размерность пространства $\Pi_1(\alpha)$, т.е. $m_1(\alpha) = dim\Pi_1(\alpha)$.

Ниже будут получены формулы для вычисления величины $m_1(\alpha)$ в зависимости от числа $\alpha \in R^1$. Все теоремы будут сформулированы и доказаны для задачи (1), (13) с условием

$$D_\alpha(u,\Omega) < \infty.$$

Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\triangle u = 0, \tag{15}$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \tag{16}$$

$$F(u) \equiv \int\limits_\Omega \left[|x|^{-2}|u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx < \infty. \tag{17}$$

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ задача (15),(16),(17) имеет единственное решение.*

Доказательство. Докажем сначала единственность решения.

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два решения задачи (15),(16),(17). Тогда функция

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

тоже является решением задачи (15),(16),(17) с

$$\varphi(x) = 0,$$

т.е. является решением задачи (15), (13), (17). Пусть

$$v(x) = \theta_N(x) \cdot u(x),$$

где

$$\theta_N = \theta(\frac{|\,x\,|}{N}), \theta \in C^\infty(R^n), 0 \le \theta \le 1,$$

$\theta(t) = 0$ при $t > 2$ и $\theta(t) = 1$ при $t < 1$.

Тогда, умножая уравнение (15) на функцию $v(x)$ и интегрируя по Ω при достаточно большом N, получим

$$0 = \int\limits_\Omega \Delta u \cdot v(x)dx \equiv -\int\limits_\Omega |\,\nabla u\,|^2 \cdot\theta_N(x)dx - \int\limits_\Omega (\nabla u)\cdot(\nabla\theta_N(x))\cdot udx =$$

$$= -\int\limits_\Omega |\,\nabla u\,|^2 \cdot\theta_N(x)dx - \frac{1}{N}\int\limits_{N<|x|<2N} (\nabla u)\cdot\nabla\theta(\frac{|\,x\,|}{N})\cdot u(x)dx. \qquad (18)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (18), применяя неравенство Шварца,

$$\left|\frac{1}{N}\int\limits_{N<|x|<2N} (\nabla u)\cdot\nabla\theta(\frac{|x|}{N})\cdot u(x)dx\right| \le C\cdot\int\limits_{|x|>N} |\nabla u|\frac{|u|}{x}\cdot dx \le$$

$$\le C\Bigg[\int\limits_{|x|>N}|\nabla u|^2dx\Bigg]^{\frac{1}{2}}\cdot\Bigg[\int\limits_{|x|>N}\frac{|u|^2}{|x|^2}dx\Bigg]^{\frac{1}{2}} \to 0 \ \text{ при } \ N\to\infty$$

в силу условия (17). Переходя к пределу при $N\to\infty$ в (18), получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2dx = 0,$$

откуда следует, что $u(x)\equiv const$. Так как $u(x)\,|_{\partial\Omega}= 0$, то $u(x)\equiv 0$ в Ω.

Докажем теперь, что задача (15),(16),(17) имеет решение. Обозначим через $W^1_{2,F}$ замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u(x)\|_{W^1_{2,F}} = [F(u)]^{\frac{1}{2}}.$$

Определим множество $M = \{v(x) \in W^1_{2,F}, v(x) \mid_{\partial\Omega} = \varphi(x)\}$ и рассмотрим функционал

$$I(v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Так как $I(v) \geq 0$ для любого $v(x) \in M$, то множество значений I на M ограничено снизу. Всякое множество, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань [6]. Положим $\inf\limits_{v \in M} I(v) = \mu$, $\mu \geq 0$. Из множества M можно выделить последовательность $\{u_k\}$, для которой $I(u_k) \to \mu$ при $k \to \infty$, что следует из определения точной нижней грани. Последовательность $\{u_k\}$ назовем минимизирующей [8].

Докажем сначала, что существует функция $u_0 \in M$ такая, что $I(u_0) = \mu$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдется такое $N >> 1$, что $I(u_k) < \mu + \varepsilon$, если $k > N$.

Пусть $k, m > N$. Так как $u_k, u_m \in M$, то $\dfrac{u_k + u_m}{2} \in M$, поэтому

$$I(\frac{u_k + u_m}{2}) \geq \mu.$$

Из равенства параллелограмма

$$I(\frac{u_k + u_m}{2}) + I(\frac{u_k - u_m}{2}) = \frac{1}{2} \cdot I(u_k) + \frac{1}{2} \cdot I(u_m)$$

следует неравенство

$$\mu + I(\frac{u_k + u_m}{2}) \leq (\frac{\mu + \varepsilon}{2}) + (\frac{\mu + \varepsilon}{2}) = \mu + \varepsilon,$$

т.е.

$$I(\frac{u_k - u_m}{2}) \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad I(u_k - u_m) \leq 4\varepsilon.$$

Таким образом, $I(u_k - u_m) \to 0$ при $k, m \to \infty$. Кроме того, так как $(u_k - u_m)|_{\partial\Omega} = 0$, то по лемме Харди [9] имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u_k - u_m|^2 \cdot |x|^{-2} dx \leq C \cdot \int\limits_{\Omega} |\nabla(u_k - u_m)|^2 dx.$$

Следовательно, последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в $W^1_{2,F}$.

Обозначим предельную функцию через $u_0(x)$. Так как функционал $I(v)$ является непрерывным на $W^1_{2,F}$, то

$$I(u_0) = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \mu.$$

Кроме того, очевидно, что пространство $W^1_{2,F}$ непрерывно вложено в $W^1_{2,loc}(\Omega)$. Отсюда и из равенства $u_k|_{\partial\Omega} = \varphi$ следует, что $u_0|_{\partial\Omega} = \varphi$. Таким образом, $u_0(x) \in M$ и $I(u_0) = \mu$.

Покажем, что функция $u_0(x) \in M$ удовлетворяет условию (15). Пусть $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда функция $f(t) = I(u_0 + v\cdot t)$, определенная на R^1, имеет локальный минимум в точке $t = 0$. Так как функция

$$f(t) = I(u_0) + 2\cdot t\cdot \int\limits_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + t^2 \cdot I(v)$$

дифференцируема по t, то $f'(0) = 0$. Следовательно, $\int\limits_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = 0$ для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Это означает, что функция $u_0(x)$ является обобщенным решением уравнения (15). Лемма 2.1 полностью доказана.

Теперь перейдем к вычислению размерности пространства решений задачи (15), (13) с условием $D_\alpha(u,\Omega) < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $n > 2$ и $-n \le \alpha < n-2$. Тогда $m_1(\alpha) = 1$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $m_1(0) = 1$. Пусть u_0 – решение задачи (15), (16), (17) с $\varphi \equiv 1$. Такое решение существует и единственно согласно лемме 1.1.

Рассмотрим функцию $u(x) = u_0(x) - 1$. Очевидно, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (15) и граничному условию (13). Кроме того, в силу (17) $D_\alpha(u,\Omega) < \infty$. Следовательно, $u(x) \in \Pi_1(0)$. Таким образом, $m_1(0) \ge 1$.

Докажем, что любая другая функция $v(x)$ из пространства $\Pi_1(0)$ представляется в виде $v(x) = s\cdot u(x)$, где $s \in R$ – некоторая константа. Согласно лемме 1.1 для функции $u(x)$ справедливо представление:

$$u(x) = P(x) + C_0\Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \tag{19}$$

где $P(x)$ – многочлен, $degP(x) \leq 1$ и функция $u_1(x)$ удовлетворяет неравенству (4). Покажем, что $P(x) \equiv a_0 \neq 0$. Допустим противное. Пусть $a_0 = 0$. Тогда

$$|u(x)| \leq |c_0\Gamma(x)| + \sum_{j=1}^{n} |c_j \cdot \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j}| + |u_1(x)| \leq const \cdot |x|^{2-n}, \tag{20}$$

$$|\nabla u(x)| \leq |c_0\nabla\Gamma(x)| + \sum_{j=1}^{n} |c_j \cdot \nabla\frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j}| + |\nabla u_1(x)| \leq const \cdot |x|^{1-n}.$$

Умножим уравнение (15) на функцию $\Phi(x) = \theta_N(x) \cdot u(x)$, где $\theta_N = \theta(\frac{|\ x\ |}{N}), \theta \in C^{\infty}(R^1), 0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 1$ при $s < 1$ и $\theta(s) = 0$ при $s > 2$, и проинтегрируем по Ω, получим

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x) \cdot \Phi(x)dx \equiv \int\limits_{\Omega} \triangle u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x)d(x) \equiv$$

$$\equiv -\int\limits_{\Omega} \theta_N(x) \cdot |\ \nabla u(x)\ |^2\ dx - \frac{1}{N}\int\limits_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x)dx. \tag{21}$$

Оценим второе слагаемое в правой части полученного равенства (21). В силу неравенств (20) имеем

$$\left|\frac{1}{N}\int\limits_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x)dx\right| \leq C \cdot \frac{1}{N} \int\limits_{\Omega\bigcap\{|x|>N\}} |\nabla u(x)| \cdot |u(x)| \cdot |x|^{-1}dx \leq$$

$$\leq C \cdot \int\limits_{|x|>N} |x|^{2-2n}dx \to 0$$

при $N \to \infty$. Отсюда и из (21) следует, что $\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2dx = 0$, следовательно, $u(x) = const$. В силу граничного условия (13) $u(x) \equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что в представлении (19) постоянная $a_0 \neq 0$.

Пусть теперь $v(x)$ – произвольная функция из $\Pi_1(0)$. Тогда в силу леммы 1.1 имеем

$$v(x) = a_0' + c_0'\Gamma(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j' \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + v_1(x), \tag{22}$$

где функция $v_1(x)$ удовлетворяет оценкам (17).

Положим $s = \dfrac{a_0'}{a_0}$ и рассмотрим функцию $w(x) = v(x) - s \cdot u(x)$. Очевидно, что $\triangle w = 0$ в Ω и $w(x)\mid_{\partial\Omega} = 0$. Кроме того, в силу (19), (22) и выбора числа s функция $w(x)$ удовлетворяет неравенствам (21). Отсюда, как было показано выше, следует, что $w(x) = 0$. Таким образом, $m_1(0) = 1$.

Покажем теперь, что $m_1(\alpha) = m_1(0)$ при $-n \leq \alpha < n-2$. Пусть $u(x) \in \Pi_1(0)$ при некотором $\alpha \in [-n; 0)$. Тогда из леммы 1.1 следует, что

$$u(x) = a_0 + c_0\Gamma(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x). \tag{23}$$

Поэтому

$$|\nabla u(x)| \leq |c_0 \nabla \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^{n} |c_j \cdot \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j}| +$$

$$+ |\nabla u_1(x)| \leq const \cdot |x|^{1-n}. \tag{23a}$$

Отсюда следует, что

$$D_0(u, \Omega) \equiv \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int\limits_{\Omega} |x|^{2-2n} dx < \infty,$$

т.е. $u(x) \in \Pi_1(0)$.

Таким образом, пространство $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ при $-n \leq \alpha < 0$. С другой стороны, $\Pi_1(\alpha) \subset \Pi_1(0)$ при $\alpha < 0$. Следовательно, $m_1(\alpha) = m_1(0) = 1$ при $-n \leq \alpha < 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 \leq \alpha < n-2$. Достаточно показать, что $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ при указанных значениях параметра α.

Пусть $u(x) \in \Pi_1(0)$. Тогда функцию $u(x)$ можно представить в виде (23) и для нее справедлива оценка (23а). Значит,

$$D_\alpha(u, \Omega) = \int\limits_{\Omega} \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int\limits_{\Omega} |x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty$$

при $\alpha < n-2$, т.е. $u(x) \in \Pi_1(\alpha)$. Таким образом, $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ и $m_1(\alpha) = m_1(0) = 1$, если $-0 \leq \alpha < n-2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $n > 2$ *и* $n - 2 \le \alpha < \infty$. *Тогда* $m_1(\alpha) = 0$.

Доказательство теоремы мы не будем проводить.

3. Ядро оператора Би-Лапласа в многомерных весовых пространствах в неограниченной области

В работе [5] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле в круге, а в работах [11, 12] построена функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре произвольной размерности.

В дальнейшем будем исследовать решения $u(x)$ задачи Дирихле для бигармонического уравнения

$$\triangle^2 u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = 0, x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G}, \tag{24}$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{25}$$

вне компакта $\overline{G}$, содержащего начало координат,

$$D(u,\Omega) \equiv \int_\Omega \left[|\nabla(\triangle u)|^2 + |u|^2\right] dx, \; D_\alpha(u,\Omega) \equiv \int_\Omega \rho^\alpha \left[|\nabla(\triangle u)|^2 + |u|^2\right] dx, \tag{26}$$

где $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, \quad \alpha \in R^1$.

Соответственно для случая оператора би-Лапласа введем следующие обозначения:
$C_0^\infty(\Omega)$ – пространство функций из $C^\infty(\Omega)$, имеющих компактный носитель в Ω;
$W_2^3(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$||u||_{W_2^3(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(|\nabla(\triangle u)|^2 + |u|^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2};$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^3(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по этой же норме;
$W^3_{2,loc}(\Omega)$ – пространство функций $u(x)$ таких, что $u(x) \in W_2^3(\Omega \cap Q_R)$ для любого шара $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$;
$\overset{\circ}{W}{}^3_{2,loc}(\Omega)$ – пространство функций $u(x) \in W^3_{2,loc}(\Omega)$ таких, что $u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$.

Определение 2. *Функцию $u(x)$ называют обобщенным решением задачи (24), (25), если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^3_{2,loc}(\Omega)$ и для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место интегральное тождество*

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\triangle u)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{27}$$

Далее мы будем вычислять размерность пространства решений задачи (24), (25), удовлетворяющих условию

$$D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int\limits_\Omega \rho^\alpha \Big[|\nabla(\triangle u)|^2 + |u|^2 \Big] dx < \infty.$$

Лемма 3. *Пусть n – нечетное, а также n – четных если $n > 4$. Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения $\triangle^2 u(x) = 0$ в Ω, удовлетворяющим условию $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$. Тогда при $n \geq 3$ для функции $u(x)$ справедливо представление*

$$u(x) = P(x) + C_0\Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \tag{28}$$

где $P(x)$ – многочлен степени ниже

$$d_0 = max\{1; 2 - \frac{\alpha + n}{2}\},$$

$\Gamma(x) = \dfrac{1}{(4-n)4 \cdot (2-n)} \cdot \dfrac{1}{\sigma_n} |x|^{4-n}$ *– фундаментальное решение оператора би-Лапласа [4], $\sigma_n = (2\pi)^n$ – площадь поверхности единичной сферы в R^n,*

$C_i,\ i=0,1,...,n$ – *некоторые константы, а для функции* $u_1(x)$ *справедлива оценка:*

$$|\partial_x^\gamma \triangle u_1(x)| \le b_\gamma |x|^{-n-|\gamma|}, \tag{29}$$

$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n),\gamma_i,\ i=1,...,n,$ – *целые неотрицательные числа,* $b_\gamma = const, \partial_x=(\partial_{x_i},...,\partial_{x_n}),\ \partial_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial_{x_j}},\ j=1,...,n.$

Пусть $\Pi_1(\alpha)=\{u(x)|u(x)$ – обобщенное решение задачи (24), (25) с условием $D_\alpha(u,\Omega)<\infty\}$. Обозначим через $m_1(\alpha)$ размерность пространства $\Pi_1(\alpha)$, т.е. $m_1(\alpha)=dim\Pi_1(\alpha)$.

В зависимости от числа $\alpha\in R^1$ мы сформулируем все утверждения леммы и теоремы для задачи Дирихле бигармонического уравнения с условием $D_\alpha(u,\Omega)<\infty$. Здесь мы не будем приводить доказательство утверждений, так как они аналогичны случаю оператора Лапласа.

Рассматривается вспомогательная задача

$$\triangle^2 u=0,\quad x\in\Omega, \tag{30}$$

$$u(x)|_{\partial\Omega}=\varphi_0(x),\quad x\in\partial\Omega, \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\varphi_1(x),\quad x\in\partial\Omega, \tag{32}$$

$$F(u)\equiv\int\limits_\Omega\Big[|x|^{-2}|u|^2+|\nabla(\triangle u)|^2\Big]dx<\infty. \tag{33}$$

Лемма 4. *Для любых функций* $\varphi_0\in C^3(\partial\Omega)$, $\varphi_1\in C^2(\partial\Omega)$ *задача (30)-(33) имеет единственное решение.*

Теорема 3. *Пусть* $n>4$ *и* $2-n\le\alpha<n-4$. *Тогда* $m_1(\alpha)=1$.

Теорема 4. *Пусть* $n>4$ *и* $n-4\le\alpha<\infty$. *Тогда* $m_1(\alpha)=0$.

Литература

1 Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

2 Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. – 1985. – № 4. – С. 38-47.

3 Матевосян О.А. О единственности решения первой краевой задачи теории упругости для неограниченных областей // УМН. – 1993. – Т. 48, № 6. – С. 159-160.

4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

5 Begehr H., Vanegas C.J. Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation. – Math. Nachr. – 2006. – P. 38-57.

6 Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1984. – Т.2. – 640 с.

7 Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 493 с.

8 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.

9 Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.

10 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д., Рамазанов М.А. О корректных краевых задачах для уравнения Лапласа во внешних областях // Деп. в КазгосИНТИ. – 1998. – № 8294-Ка98.

11 Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421, № 3. – С. 305-307.

12 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский мат. журнал. – 2010. – Т. 2. – С. 41-52.

Статья поступила в редакцию 18.03.2016

Кошанов Б.Д., Күлімбек Ж.К. ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТАҒЫ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ МЕН БИГАРМОНИЯЛЫ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ТӘРТІБІ

Бұл мақалада Пуассон теңдеуи мен біртексіз бигармониялы теңдеудің шектелмеген облыстағы шешімдері зерттелді. Осындай зерттеулерде қарастырылатын теңдеулердің шешімін бірмәнді анықтайтын қосымша шартты шексіздікте енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шексіздіктегі шарты бар жоғарыда көрсетілген есептердің шешімдер кеңістіктерінің өлшемдері есептелінген.

Koshanov B.D., Kulimbek Zh.K. THE BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF POISSON EQUATION AND BIHARMONIC EQUATION IN UNBOUNDED DOMAIN

In this paper we study the solutions of Poisson equation and nonhomogeneous biharmonic equation in unbounded domain. In the study, there is a need to add the additional conditions at infinity, which uniquely determine the solutions of investigated equations. Dimensions of the spaces of the solutions of the problems with additional condition at infinity are calculated.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 1. — С. 135–144.

УДК 517.956.4

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

М.А. Садыбеков[1], Г. Дилдабек[2], А.А. Тенгаева[3]

[1]Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: [1]sadybekov@math.kz

[2]Казахский национальный университет им. Аль-Фараби
050040, Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, e-mail: [2]dildabek.g@gmail.com

[3]Казахский национальный аграрный университет
050010, Алматы, пр-т Абая, 8, e-mail: [3]aijan0973@mail.ru

Аннотация: В работе рассматривается нелокальная начально-краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Область рассмотрения – прямоугольник. Ставится классическое начальное условие по переменной t. По пространственной переменной x ставится нелокальное периодическое краевое условие. Хорошо известно, что решение задачи может быть построено в виде сходящегося ортогонального ряда по собственным функциям спектральной задачи для оператора кратного дифференцирования с периодическими краевыми условиями. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям (ряда Фурье). Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина – через функцию Якоби. В нашей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, начально-краевая задача, периодические краевые условия, функция Грина.

1. Введение

Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами в последнее время внимание учёных привлекают задачи математической

Keywords: *Heat equation, initial-boundary value problems, periodic boundary condition, Green's function.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35C15, 35E15, 35K05, 35K20.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 0825/ГФ4.

физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. К ним относятся краевые задачи с условиями типа периодичности, с условием Бицадзе-Самарского, Самарского-Ионкина, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена также наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы, многослойной оптики и т.п. Возможность представления решения задачи в интегральном виде, основанном на функции Грина начально-краевой задачи, имеет существенные преимущества для практики. Интегральное представление решения позволяет дать физическую интерпретацию: сопряженная функция Грина в точке с координатой y_0 в момент времени s_0 при наблюдении температуры в точке (x_0, t_0) есть температура в точке x_0 в момент времени t_0, если в точку y_0 в момент времени s_0 помещен импульсный тепловой источник единичной мощности. В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Область рассмотрения – прямоугольник. Ставится классическое начальное условие по переменной t. По пространственной переменной x ставится нелокальное периодическое краевое условие. Хорошо известно, что решение этой задачи может быть построено в виде сходящегося ортогонального ряда по собственным функциям спектральной задачи для оператора кратного дифференцирования с периодическими краевыми условиями. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям (ряда Фурье).

Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина – через функцию Якоби. В настоящей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

2. Постановка задачи

В области $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = f(x,t). \tag{1}$$

К классическим задачам теории теплопроводности относят первую и вторую начально-краевые задачи. Это – задачи нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \tau(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и однородным краевым условиям

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=1} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

или

$$u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=1} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

соответственно.

Также хорошо известной и широко применяемой является начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с периодическими краевыми условиями

$$u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u(0,t) = u(1,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Эти задачи хорошо исследованы, их решения (в классическом и обобщенном смыслах) существуют, единственны и могут быть построены методом разделения переменных. Решение может быть представлено с помощью функции Грина в виде

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G(x,\xi,t)\tau(\xi) d\xi. \tag{6}$$

Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (1) с произвольными самосопряженными краевыми условиями по переменной x строится методом разделения переменных в виде [1, с. 194]

$$G(x,\xi,t-s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-s)} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi), \tag{7}$$

где $y_n(x)$ – ортогональные собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_n.

Поэтому функции Грина первой, второй и периодической начально-краевых задач соответственно имеют вид [1, с. 196]:

$$G_D(x,\xi,t-s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2(t-s)} \sin(n\pi x)\sin(n\pi\xi), \tag{8}$$

$$G_N(x,\xi,t-s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2(t-s)} \cos(n\pi x)\cos(n\pi\xi), \tag{9}$$

$$G_\pi(x,\xi,t-s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi)^2(t-s)} \cos(2n\pi(x-\xi)). \tag{10}$$

Функция Грина может быть построена методом отражений [2, стр. 116]. Это дает нам второй (эквивалентный) вид функции Грина. Для первой и второй начально-краевых задач соответственно функции Грина имеют вид

$$G_D(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-s)}} \right], \tag{11}$$

$$G_N(x,\xi,t-s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-s)}} \right]. \tag{12}$$

Это представление также может быть получено через функцию Якоби [1, с. 197]. Каждое из представлений имеет свои преимущества. Для начально-краевой задачи с периодическими краевыми условиями по пространственной переменной подобного экспоненциального представления функции Грина получено не было. В настоящей работе нами найдено представление функции Грина нелокальных начально-краевых задач с периодическими и антипериодическими краевыми условиями в виде ряда по экспонентам.

3. Функция Грина периодической задачи

Теорема 1. *Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *и с периодическими краевыми условиями* (5) *имеет вид*

$$G_\pi(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi+n)^2}{4(t-s)}}. \qquad (13)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся способом решения задач теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями, предложенным в [3]. Решение задачи (1), (2), (5) представим в виде

$$u\,(x,t)=C\,(x,t)+S\,(x,t)\,, \qquad (14)$$

где $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$ – четные и нечетные по переменной x на интервале $(0,1)$ части функции $u\,(x,t)$:

$$2C\,(x,t)=u\,(x,t)+u\,(1-x,t)\,,\quad 2S\,(x,t)=u\,(x,t)-u\,(1-x,t)\,. \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$ являются в области Ω решениями уравнений теплопроводности

$$C_t\,(x,t)-C_{xx}\,(x,t)=f_0\,(x,t)\,, \qquad (16)$$

$$S_t\,(x,t)-S_{xx}\,(x,t)=f_1(x,t) \qquad (17)$$

и удовлетворяют однородным начальным условиям

$$C\,(x,0)=\tau_0(x),\quad 0\le x\le 1, \qquad (18)$$

$$S\,(x,0)=\tau_1(x),\quad 0\le x\le 1, \qquad (19)$$

где обозначено

$$\begin{gathered}2f_0\,(x,t)=f\,(x,t)+f\,(1-x,t)\,,\\ 2f_1\,(x,t)=f\,(x,t)-f\,(1-x,t)\,,\\ 2\tau_0(x)=\tau(x)+\tau(1-x),\ \ 2\tau_1(x)=\tau(x)-\tau(1-x).\end{gathered} \qquad (20)$$

Найдем краевые условия по переменной x, которым на границе области Ω удовлетворяют функции $C\,(x,t)$ и $S\,(x,t)$. Подчиняя функцию (14) краевым условиям (5), с учетом соотношений (15) получаем

$$C_x\,(x,0)=C_x\,(x,1)=0,\ \ 0\le x\le 1, \qquad (21)$$

$$S\,(x,0) = S\,(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{22}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с периодическими краевыми условиями (5) сведено к решению двух задач с более простыми краевыми условиями. Это – вторая начально-краевая задача для уравнения (16) с начальным условием (18) и с краевыми условиями Неймана (21) и первая начально-краевая задача для уравнения (17) с начальным условием (19) и с краевыми условиями Дирихле (22). Эти задачи хорошо исследованы, их решения (в классическом и обобщенном смыслах) существуют, единственны и могут быть представлены с помощью функций Грина (11) и (12) по формуле (6).

Для $C\,(x,t)$ получаем представление

$$C(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_N(x,\xi,t-s) f_0(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_N(x,\xi,t)\tau_0(\xi)d\xi. \tag{23}$$

Учитывая обозначения (20), отсюда после несложных преобразований будем иметь

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{G_N(x,\xi,t-s) + G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\} f(\xi,s)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{G_N(x,\xi,t) + G_N(x,1-\xi,t)\Big\}\tau(\xi)d\xi. \tag{24}$$

Аналогично для $S\,(x,t)$ получим

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{G_D(x,\xi,t-s) - G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\} f(\xi,s)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{G_D(x,\xi,t) - G_D(x,1-\xi,t)\Big\}\tau(\xi)d\xi. \tag{25}$$

Суммируя полученное в (24) и (25) с учетом (14) будем иметь

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_\pi(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^1 G_\pi(x,\xi,t)\tau(\xi)d\xi, \tag{26}$$

где обозначено

$$G_\pi(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2}\Big\{G_N(x,\xi,t-s)+G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{G_D(x,\xi,t-s)-G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\}. \tag{27}$$

Теперь здесь используем явный вид функций Грина из (11) и (12). Тогда

$$G_\pi(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}}+e^{-\frac{(x-\xi+2n+1)^2}{4(t-s)}}\right], \tag{28}$$

откуда легко получаем (11). Теорема доказана. □

4. Функция Грина антипериодической задачи

Наряду с рассмотренными выше задачами также хорошо известной и широко применяемой является начально-краевая задача для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с антипериодическими краевыми условиями

$$u_x(0,t)=-u_x(1,t),\quad u(0,t)=-u(1,t),\quad 0\le t\le T. \tag{29}$$

Её решение (в классическом и обобщенном смыслах) существует, единственно и может быть построено методом разделения переменных, а также может быть представлено с помощью функции Грина. В настоящем разделе мы построим явный вид функции Грина задачи в экспоненциальной форме.

Теорема 2. *Функция Грина начально-краевой задачи для уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *и с антипериодическими краевыми условиями* (29) *имеет вид*

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{-\frac{(x-\xi+n)^2}{4(t-s)}}. \tag{30}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 и использует способ решения задач теплопроводности с неусиленно регулярными краевыми условиями, предложенный в [3]. Решение задачи (1), (2), (29) представим в виде (14), где $C(x,t)$ и $S(x,t)$ – четные и нечетные по переменной x на интервале $(0,1)$ части функции $u(x,t)$. Нетрудно убедиться в том, что функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$ являются в области Ω решениями уравнений теплопроводности (16) и (17) соответственно и удовлетворяют однородным начальным условиям (18) и (19).

Найдем краевые условия по переменной x, которым на границе области Ω удовлетворяют функции $C(x,t)$ и $S(x,t)$. Подчиняя функцию (14) краевым условиям (29), с учетом соотношений (15) получаем

$$C(x,0) = C(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{31}$$

$$S_x(x,0) = S_x(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{32}$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи для уравнения (1) с начальными условиями (2) и с антипериодическими краевыми условиями (5) сведено к решению двух задач с более простыми краевыми условиями. Это – первая начально-краевая задача для уравнения (16) с начальным условием (18) и с краевыми условиями Дирихле (31) и вторая начально-краевая задача для уравнения (17) с начальным условием (19) и с краевыми условиями Неймана (32). Решение этих задач представляем с помощью функций Грина (11) и (12) по формуле (6).

Для $C(x,t)$ получаем представление

$$C(x,t) = \int_0^t ds \int_0^1 G_D(x,\xi,t-s) f_0(\xi,s)d\xi + \int_0^1 G_D(x,\xi,t)\tau_0(\xi)d\xi. \tag{33}$$

Учитывая обозначения (20), отсюда после несложных преобразований будем иметь

$$C(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{G_D(x,\xi,t-s) + G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\} f(\xi,s)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{G_D(x,\xi,t) + G_D(x,1-\xi,t)\Big\}\tau(\xi)d\xi. \tag{34}$$

Аналогично для $S(x,t)$ получим

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_0^1 \Big\{G_N(x,\xi,t-s) - G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\} f(\xi,s)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{G_N(x,\xi,t) - G_N(x,1-\xi,t)\Big\}\tau(\xi)d\xi. \tag{35}$$

Суммируя полученное в (34) и (35), с учетом (14) будем иметь

$$u(x,t)=\int_0^t ds\int_0^1 G_{a\pi}(x,\xi,t-s)f(\xi,s)d\xi+\int_0^1 G_{a\pi}(x,\xi,t)\tau(\xi)d\xi, \tag{36}$$

где обозначено

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2}\Big\{G_D(x,\xi,t-s)+G_D(x,1-\xi,t-s)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{G_N(x,\xi,t-s)-G_N(x,1-\xi,t-s)\Big\}. \tag{37}$$

Теперь здесь используем явный вид функций Грина из (11) и (12). Тогда

$$G_{a\pi}(x,\xi,t-s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-s)}}-e^{-\frac{(x-\xi+2n+1)^2}{4(t-s)}}\right], \tag{38}$$

откуда легко получаем (30). Теорема доказана. □

Литература

1 Бабич В.М. и др. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. Под. ред. Михлина С.Г. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

2 Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. Ю.В. Егорова, под ред. О.А. Олейник. – М.: Мир, 1966. – 352 с.

3 Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. — С. 180-186.

Статья поступила в редакцию 29.03.2016

Садыбеков М.А., Ділдәбек Г., Тенгаева А.А. ПЕРИОДТЫ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫ БАР ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ЕСЕБІНІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

Бұл жұмыста біртекті емес бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бейлокал бастапқы-шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылу облысы - тіктөртбұрыш болып табылады. t айнымалысы бойынша классикалық бастапқы шарт қойылған. Кеңістіктік x айнымалысы бойынша бейлокал периодты шеттік шарт қойылған. Бұл есептің шешімін периодты шеттік шарттары бар еселі дифференциалдау операторы үшін спектралдық есептің меншікті функциялары бойынша ортогональдық жинақталатын қатар түрінде тұрғызуға болатындығы белгілі. Сол себепті осы есептің Грин функциясын да тригонометриялық функциялар бойынша шексіз қатар (Фурье қатары) түрінде жазуға болады. Классикалық бірінші және екінші бастапқы-шеттік есептер үшін Грин функциясының екінші кейіптемесі - Якоби функциясы да бар екені белгілі. Біздің жұмыста периодты шеттік шарттары бар бейлокал бастапқы-шеттік есептің Грин функциясының кейіптемесі экспоненталар бойынша қатар түрінде табылып отыр.

Sadybekov M.A., Dildabek G., Tengayeva A.A. GREEN FUNCTION OF THE HEAT EQUATION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITION

This work deals with nonlocal initial boundary value problem for the inhomogeneous one-dimensional heat equation. Viewing area is rectangle. We consider classic initial condition in the variable t and nonlocal periodic boundary conditions in the spatial variable x. It is well known that the solution of the problem can be constructed in the form of a convergent orthogonal series of eigenfunctions of a spectral problem for the operator of multiple differentiation with periodic boundary conditions. Therefore, Green's function of this problem may also be represented in the form of an infinite series of trig functions (Fourier series). For the first and the second classic initial boundary value problems there is also a second representation of Green's function, i.e. through Jacobi function. In our work, we obtain the representation of Green's function of nonlocal initial boundary value problem with periodic boundary conditions in the form of exponential series.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, №1 (59), 2016

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
31.03.2016 г.

Тираж 300 экз. Объем 147 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz