ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 15   № 1 (55)   2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, № 1 (55), 2015

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 15 **№ 1 (55)** **2015**

CONTENTS

Volume 15 **No. 1 (55)** **2015**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. №1 (55). С.5–19*

УДК 517.51

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ В СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассмотрены симметричное пространство периодических функций многих переменных и класс Никольского-Бесова в этом пространстве. Доказаны оценки сверху линейного поперечника класса Никольского-Бесова по норме пространства Лоренца.
Ключевые слова: *симметричное пространство, класс Никольского-Бесова, линейный поперечник.*

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m - мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m; \quad 0 \le x_j \le 1; \quad j = 1, \ldots, m\}$ — m - мерный куб.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^m функций называется симметричным,

1. если из того, что $|f(\bar{x})| \le |g(\bar{x})|$ почти всюду на I^m и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$;

2. из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см. [1], с. 123).

Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

Keywords: *symmetrical space, Nikol'ski-Besov class, the linear width.*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10.

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset I^m$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега множества e. Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$ определенная на отрезке $[0, 1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0, 1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1], с.137). Такие функции называются Φ - функциями. Далее, $X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ.

Будем рассматривать сепарабельные симметричные пространства 1-периодических функций. Примеры сепарабельных симметричных пространств:

1. $L_q(T^m) = L_q$ — пространство Лебега с нормой (см. [2])

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{I^m} |f(2\pi\bar{x})|^q d\bar{x}\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < +\infty.$$

Здесь и в дальнейшем $T^m = [0, 2\pi]^m$.

2. Пространство Лоренца $L_{q\theta}(T^m)$ с нормой

$$\|f\|_{q\theta} = \left\{\frac{\theta}{q}\int_0^1 \left(\int_0^t f^*(\tau)d\tau\right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1}dt\right\}^{1/\theta} < +\infty,$$

$1 \leq q < +\infty, \quad 1 < \theta < +\infty$, где $f^*(\tau)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ (см. [1], с. 83).

Для данной функции $\varphi(t), \quad t \in [0, 1]$ положим $\bar{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0, 1]$ и

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1 \leq \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$.

Функция $f \in L_1(T^m) = L(T^m)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(2\pi\bar{x}) \sim \sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n}, 2\pi\bar{x}\rangle}, \;\; \bar{x} \in I^m,$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(T^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, и $\mathbb{Z}^m$ — пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_s(f,\overline{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(s)} a_{\bar{k}}(f)e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $s = 0,1,2,\ldots$,

$$\rho(s) = \left\{\bar{k} = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s-1}] \le |k_j| < 2^s, \ \ j = 1,\ldots,m\right\}.$$

Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство и $1 < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r > 0$. Рассматриваются классы Никольского, Бесова ([2], [3])

$$B^r_{X,\theta} = \left\{f \in X(\varphi) : \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta}\,\|\delta_s(f)\|_X^\theta\right)^{1/\theta} \le 1\right\},$$

$$H^r_X = \left\{f \in X(\varphi) : \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\,\|\delta_s(f)\|_X \le 1\right\}.$$

Приведем определение линейного поперечника, который был введен В.М. Тихомировым [4].

Определение. *Пусть W — множество в банаховом пространстве X. Тогда линейный поперечник множества W в пространстве X (обозначется $\lambda_M(W,X)$) определяется согласно формуле*

$$\lambda_M(W,X) = \inf_A \sup_{f\in W} \|f - Af\|_X,$$

где inf *берется по всем действующим в X линейным операторам A, размерность области значений которых не превышает M.*

В одномерном случае для класса Соболева W^r_p при условии $r > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ известна следующая оценка

$$\lambda_M(W^r_p, L_q) \asymp M^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$. Это соотношение в случае $1 \le q \le p \le \infty$ установлено в работах В.М. Тихомирова [4], а в случаях $1 \le p \le q \le 2, \quad 2 \le p < q \le \infty$ — Р.С. Исмагилова [5], В.Е. Майорова [6].

В многомерном случае оценки линейных поперечников для классов Соболева W_p^r, Никольского H_p^r, Бесова $B_{p,\theta}^r$ получили В.Н. Темляков [7], Э.М. Галеев [8], [9], А.Д. Изаак [10], А.С. Романюк [11], [12], Д.Б. Базарханов [13].

Цель настоящей статьи найти оценки линейного поперечника выше определенного класса $B_{X,\theta}^r$ в пространстве $L_{q,\tau}(T^m)$.

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \le B(y) \le C_2 \cdot A(y)$.

1 Вспомогательные утверждения

Сначала приведем некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.

Пусть

$$T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{k_1,\dots,k_m} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle} = \sum_{|\bar{k}|\le\bar{n}} a_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}$$

— полином по кратной тригонометрической системе порядка $n_j \in \mathbb{N}$ по переменной $x_j,\ j = 1, \dots, m$. Здесь неравенство $|\bar{k}| \le \bar{n}$ понимается в том смысле, что $|k_j| \le n_j$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Пусть l_p^m обозначает пространство R^m с нормой

$$\|\bar{x}\|_{l_p^m} = (\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p)^{1/p}, \ \ 1 \le p < +\infty, \quad \|\bar{x}\|_{l_p^m} = \max_{j=1,\dots,m} |x_j|, p = +\infty$$

и B_p^m — единичный шар в l_p^m.

В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма 1. *(см.*[14]*, лемма 4). Пусть даны* Φ*-функции* $\phi_1(x)$ *и* $\phi_2(x)$, $x \in$

$(0,1]$ *и* $\beta_{\phi_1} < \alpha_{\phi_2}$. *Тогда для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

существует Φ-*функция* $\theta_1(x)$, *для которой* $\alpha_{\theta_1} > 1$ *и* $\theta_1(x) \asymp \theta(x)$, $x \in [0,1]$.

Лемма 2. *Пусть* $X(\varphi), Y(\psi)$ — *симмтеричные пространства и* $1 < \beta_\psi < \alpha_\varphi$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $T_{\bar n}$ *выполняется неравенство*

$$\|T_{\bar n}\|_Y \leq C \frac{\psi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})}{\varphi(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})} \|T_{\bar n}\|_X.$$

Доказательство леммы 2 приведено в [15].

Лемма 3. ([8], [9]). *Пусть* $\bar s \in \mathbb{N}^m$, $f \in \Im(\rho(\bar s))$, $M_{\bar s} \in \mathbb{Z}_+$, $M_{\bar s} \leq 2^{\langle \bar s, \bar 1\rangle} = \prod_{j=1}^m 2^{s_j}$. *Тогда при* $1 < p, q < +\infty$ *существует линейный оператор* $\Lambda_{M_{\bar s}} : \Im(\rho(\bar s)) \to \Im(\rho(\bar s))$, *размерность области значений которого не превышает* $M_{\bar s}$ *и такой, что*

$$\|f - \Lambda_{M_{\bar s}} f\|_q \asymp \lambda_{M_{\bar s}}\Big(B_p^{2^{\langle \bar s, \bar 1\rangle}},\ l_q^{2^{\langle \bar s, \bar 1\rangle}}\Big) 2^{\langle \bar s, \bar 1\rangle(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Лемма 4. *(см.* [16], [17]*). Пусть* $M < m$, $1 \leq p < 2 \leq q < +\infty$, $1/p + 1/q \geq 1$. *Тогда*

$$\lambda_M\Big(B_p^m, l_q^m\Big) \asymp \max\Big\{m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\ \min\Big\{1,\ m^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}}\Big\}\sqrt{1 - \frac{M}{m}}\Big\}.$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $X(\varphi)$ — *симметричное пространство,* $L_{q,\tau}$ — *пространство Лоренца и* $\log_2 \beta_{\bar\varphi} < 1/q < 1/2 \leq \log_2 \alpha_\varphi \leq \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, *где* $\bar\varphi(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0,1)$.

Если $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$, *то*

$$\lambda_M\left(B_{X,\theta}^r\right)_{L_{q,\tau}} \leq C \frac{M^{-(\frac{r}{m}+\frac{1}{2})}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Доказательство. Пусть $f \in B^r_{X,\theta}$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем натуральное число n такое, что $2^{nm} < M \le 2^{(n+1)m}$.

Введем обозначение $M_s = 2^{sm}$, если $s = 0, 1, \ldots, n$ и $M_s = [2^{s(m+\alpha)}2^{-sm\alpha}]$, если $s = n+1, n+2, \ldots$.

Из условия $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$, следует, что $B^r_{X,\theta} \subset L_{q,\tau}(I^m)$. Действительно, в силу свойства нормы и неравенства разных метрик в симметричном пространстве (см. лемма 2) получим

$$\|f\|_{q,\tau} \le \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f)\|_{q,\tau} \le C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{-s\frac{m}{q}}}{\varphi(2^{-sm})} \|\delta_s(f)\|_X.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера будем иметь

$$\|f\|_{q,\tau} \le C \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|^{\theta}_{q,\tau} \right\}^{1/\theta} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-sm})} \right)^{\theta'} \right\}^{1/\theta'},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$. Из условия $\log_2 \beta_\varphi - 1/q < r/m$, следует, что ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-sm})} \right)^{\theta'}$$

сходится. Следовательно $f \in L_{q,\tau}(T^m)$. Этим доказано, что $B^r_{X,\theta} \subset L_{q,\tau}(T^m)$.

Согласно лемме 3 для каждого числа M_s существует линейный непрерывный оператор Λ_{M_s}, для которого верно утверждение этой леммы. Рассмотрим линейный непрерывный оператор Λ_M ранга M, действующий на функцию $f \in B^r_{X,\theta}$ по формуле

$$\Lambda_M f(\bar{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{M_s} \delta_s(f, \bar{x}).$$

Выберем число $q_0 > q > 2$. Тогда, как и выше, можно доказать, что $B^r_{X,\theta} \subset L_{q_0}(T^m)$. Поэтому $f - \Lambda_M f \in L_{q_0}(T^m)$. Так как $q < q_0$, то $L_{q_0}(T^m) \subset L_{q,\tau}(T^m)$ и

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C \|f - \Lambda_M f\|_{q_0}.$$

Теперь применяем теорему Литтльвуда – Пэли (см. [2], С. 54) :

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C\|f-\Lambda_M f\|_{q_0} \le$$

$$\le \| \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} |\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \|_{q_0}. \qquad (1)$$

Так как $2 < q_0 < +\infty$, то в силу неравенства Минковского из (1) получим

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \|\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f)\|_{q_0}^2 \right)^{1/2}.$$

Выберем число $p_0^{'}$ такое, что $\log_2 \beta_{\bar{\varphi}} < 1/p_0^{'} < 1/q_0 < 1/q < 1/2$. Тогда в силу того, что $\log_2 \beta_{\bar{\varphi}} = 1 - \log_2 \alpha_{\varphi}$ имеем $\log_2 \alpha_{\varphi} = 1 - \log_2 \beta_{\bar{\varphi}} > 1 - 1/p_0^{'} = 1/p_0 > 1/2$. По лемме 3 справедливо неравенство

$$\|\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f)\|_{q_0} \le C\lambda_{M_s}\Big(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{q_0}^{2^{sm}}\Big) 2^{sm(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}\|\delta(f)\|_{p_0}.$$

Поэтому

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \lambda_{M_s}^2\Big(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{q_0}^{2^{sm}}\Big) 2^{sm(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})2}\|\delta(f)\|_{p_0}^2 \right)^{1/2}.$$

По лемме 4

$$\lambda_{M_s}^2\Big(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{q_0}^{2^{sm}}\Big) \le C 2^{sm\frac{1}{q_0}2} M_s^{-1/2}.$$

Поэтому

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \Big(2^{sm\frac{1}{q_0}} M_s^{-\frac{1}{2}}\Big)^2 2^{sm(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})2}\|\delta_s(f)\|_{p_0}^2 \right)^{1/2} =$$

$$= C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} M_s^{-1} 2^{sm\frac{2}{p_0}} \|\delta_s(f)\|_{p_0}^2 \right)^{1/2}.$$

Так как $\log_2 \alpha_\varphi > \frac{1}{p_0}$, то применяя неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве (см. лемма 2), получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} M_s^{-1} 2^{sm\frac{2}{p_0}} \Big(\frac{2^{-\frac{sm}{p_0}}}{\varphi(2^{-sm})} \Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2 \right)^{1/2} =$$

$$= C \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} M_s^{-1} \Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})} \Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2 \right)^{1/2}$$

для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$.

Введем обозначение

$$J_1 = \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} M_s^{-1} \Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})} \Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Учитывая значение чисел $M_s = [2^{n(m+\alpha)} 2^{-sm\alpha}]$, будем иметь

$$J_1 \leq 2^{-n\frac{(m+\alpha)}{2}} \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sm\alpha} \Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})} \Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2 \right)^{1/2}.$$

Так как $\log_2 \beta_\varphi < r/m$, то выберем число $\alpha > 0$ такое, что $\log_2 \beta_\varphi < r/m - \alpha/2 < r/m$. Следовательно, по лемме 1 для функции

$$g(t) = \frac{t^{\frac{r}{m} - \frac{\alpha}{2}}}{\varphi(t)}, \ t \in (0, (2\pi)^m], \quad g(0) = 0$$

существует Φ – функция g_1 такая, что $g_t \asymp g(t)$ и $\alpha_{g_1} > 1$. Поэтому

$$\sum_{\alpha n \leq s < +\infty} \frac{2^{-sm(\frac{r}{m} + \frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-sm})} \leq C \sum_{\alpha n \leq s < +\infty} g_1(2^{-sm}) 2^{-sm\varepsilon} \leq$$

$$\leq C g_1(2^{-nm\alpha}) \sum_{\alpha n \leq s < +\infty} 2^{-sm\varepsilon} \leq C g_1(2^{-nm\alpha}) 2^{-nm\alpha\varepsilon} \leq C \frac{2^{-nm\alpha(\frac{r}{m} + \frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-nm\alpha})}.$$

для всех $s > n$. Следовательно,

$$\left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sm\alpha}\Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=n+1}^{\infty} \Big(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^2 \big(2^{sr}\|\delta_s(f)\|_X\big)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}\left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sr2}\|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$J_1 \leq C2^{-n\frac{(m+\alpha)}{2}}\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}\left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sr2}\|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{1/2}$$

для любой функции $f \in B_{X,\theta}^r$ при условии $\log_2 \beta_\varphi < r/m$. Следовательно

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}\left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sr2}\|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{1/2}$$

для любой функции $f \in B_{X,\theta}^r$ при условии $\log_2 \beta_\varphi < r/m$.

Пусть $1 \leq \theta \leq 2$. Тогда применяя неравенство Йенсена (см. [2], с.125) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|\delta_s(f)\|_X^\theta\right)^{1/\theta}$$

для любой функции $f \in B_{X,\theta}^r$ при условии $\log_2 \beta_\varphi < r/m$.

Пусть $2 < \theta < +\infty$. Тогда полагая $\beta = \theta/2,\ \ 1/\beta + 1/\beta' = 1$ и применяя неравенство Гельдера, будем иметь

$$\left(\sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sm\alpha}\Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^2 \|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|\delta_s(f)\|_X^\theta\right)^{1/\theta} \times$$

$$\times\left(\sum_{s=n+1}^{\infty}\Big(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{2\beta'}\right)^{\frac{1}{2\beta'}}$$

Так как $\log_2\beta_\varphi < r/m-\alpha/2 < r/m$, то из леммы 1 следует, что

$$\left(\sum_{s=n+1}^{\infty}\Big(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{2\beta'}\right)^{\frac{1}{2\beta'}} \le C\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{s=n+1}^{\infty}2^{sm\alpha}\Big(\frac{1}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{2}\|\delta_s(f)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}\left(\sum_{s=0}^{\infty}2^{sr\theta}\|\delta_s(f)\|_X^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при условии $\log_2\beta_\varphi < r/m$. Следовательно,

$$J_1 \le C2^{-n\frac{(m+\alpha)}{2}}\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}$$

в случае $2<\theta<+\infty$ для любой функции $f\in B^r_{X,\theta}$ при условии $\log_2\beta_\varphi < r/m$. Тогда

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}$$

в случае $2<\theta<+\infty$, для любой функции $f\in B^r_{X,\theta}$ при условии $\log_2\beta_\varphi < r/m$.

Таким образом,

$$\|f-\Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C2^{-\frac{nm}{2}}\frac{2^{-nr}}{\varphi(2^{-nm})}$$

для любой функции $f\in B^r_{X,\theta}$ при условии $\log_2\beta_\varphi < r/m$, $2<\theta<+\infty$. Следовательно,

$$\lambda_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \le C\frac{2^{-nm(\frac{r}{m}+\frac{1}{2})}}{\varphi(2^{-nm})}$$

при условии $\log_2\beta_\varphi < r/m$, $1\le\theta<+\infty$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $L_{q,\tau}$ — пространство Лоренца и $1/q < \log_2 \alpha_{\bar{\varphi}}$, $\log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, где $\bar{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0,1)$. Если $1 - 1/q < r/m$, то*

$$\lambda_M \left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \le C M^{-\left(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Доказательство. Пусть $f \in B^r_{X,\theta}$. В силу неравенства треугольника, леммы 2 и неравенства Гельдера будем иметь

$$\|f\|_{q,\tau} \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \left(\frac{2^{-s\frac{m}{q}}}{\varphi(2^{-sm})}\right) \|\delta_s(f)\|_X \le$$

$$\le \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|_X^\theta\right)^{1/\theta} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \Big(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{\theta'}\right)^{1/\theta'}, \tag{1}$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Так как по условию теоремы $1 - 1/q < r/m$ и известно, что $\log_2 \beta_\varphi \le 1$, то $\log_2 \beta_\varphi < 1/q + r/m$. Поэтому из леммы 1 следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \Big(\frac{2^{-sm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^{\theta'} < +\infty.$$

Тогда из (1) получим $B^r_{X,\theta} \subset L_{q,\tau}(T^m)$.

Теперь выберем число p_0' такое, что $1/q < 1/p_0' < \log_2 \alpha_{\bar{\varphi}}$. Тогда $1/p_0 = 1 - 1/p_0' > 1 - \log_2 \alpha_{\bar{\varphi}} = \log_2 \beta_\varphi$.

Выше мы показали, что $B^r_{X,\theta} \subset L_{q,\tau}(T^m)$ и из неравенства $1/q < 1/p_0'$ следует, что $L_{q,\tau}(I^m) \subset L_{p_0'}(T^m)$. Следовательно $B^r_{X,\theta} \subset L_{p_0'}(T^m)$.

Используя лемму 2 можно доказать, что

$$\|f\|_{q,\tau} \le C \left\{\sum_{s=0}^{\infty} \Big(\frac{2^{-sm/q}}{\varphi(2^{-sm})}\Big)^\tau \|\delta_s(f)\|_X^\tau\right\}^{1/\tau}. \tag{2}$$

Теперь к функции $f - \Lambda_M f \in L_{p_0'}(I^m)$ применяем неравенство (2). Тогда

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p_0' - 1/q)\tau} \|\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f)\|_{p_0'}^\tau\right)^{1/\tau}. \tag{3}$$

Далее, пользуясь леммой 3 при $q = p_0$, получим

$$\|\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f)\|_{p_0^{'}} \le \lambda_{M_s}\left(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{p_0^{'}}^{2^{sm}}\right)2^{sm(1/p_0 - 1/p_0^{'})}\|\delta_s(f)\|_{p_0}.$$

Поэтому из неравенства (3) находим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(\frac{1}{p_0^{'}} - \frac{1}{q})\tau}\lambda_{M_s}^{\tau}\left(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{p_0^{'}}^{2^{sm}}\right)2^{sm(\frac{1}{p_0} \frac{1}{p_0^{'}})\tau}\|\delta_s(f)\|_{p_0}^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} =$$

$$= C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q})\tau}\lambda_{M_s}^{\tau}\left(B_{p_0}^{2^{sm}}, l_{p_0^{'}}^{2^{sm}}\right)\|\delta_s(f)\|_{p_0}^{\tau}\right)^{1/\tau}. \qquad (4)$$

Теперь применяем лемму 4 при $q = p_0^{'}$. Тогда из (4) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q})\tau}\left(2^{\frac{sm}{p_0^{'}}}M_s^{-\frac{1}{2}}\right)^{\tau}\|\delta_s(f)\|_{p_0}^{\tau}\right)^{1/\tau} =$$

$$= C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1-\frac{1}{q})\tau}M_s^{-\frac{\tau}{2}}\|\delta_s(f)\|_{p_0}^{\tau}\right)^{1/\tau}. \qquad (5)$$

Так как $\log_2 \beta_\varphi < 1/p_0$, то

$$\|\delta_s(f)\|_{p_0} \le C\|\delta_s(f)\|_X.$$

Поэтому из (5) следует, что

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1-\frac{1}{q})\tau}M_s^{-\frac{\tau}{2}}\|\delta_s(f)\|_X^{\tau}\right)^{1/\tau}. \qquad (6)$$

Значения чисел $M_s = [2^{n(m+\alpha)}2^{-sm\alpha}]$ подставим в (6)

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \le C\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1-\frac{1}{q})\tau}\left(2^{-n(m+\alpha)}2^{sm\alpha}\right)^{\frac{\tau}{2}}\|\delta_s(f)\|_X^{\tau}\right)^{1/\tau} =$$

$$= C2^{-n\frac{m+\alpha}{2}}\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1-\frac{1}{q})\tau}\left(2^{sm\alpha}\right)^{\frac{\tau}{2}}2^{-sr\tau}2^{sr\tau}\|\delta_s(f)\|_X^{\tau}\right)^{1/\tau}. \qquad (7)$$

Если $\tau \leq \theta$, то в силу того, что по условию теоремы $r/m > 1-1/q$, выберем положительное число α такое, что $1 - 1/q < r/m - \alpha/2 < r/m$. Тогда из неравенства (7), учитывая неравенство Иенсена (см. [2], с.125), получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-n\frac{m+\alpha}{2}} 2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2}-1+\frac{1}{q})} \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\tau} \|\delta_s(f)\|_X^{\tau} \right)^{1/\tau} \leq$$

$$\leq C 2^{-nm(\frac{1}{2}+\frac{r}{m}-1+\frac{1}{q})} \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|_X^{\theta} \right)^{1/\theta}$$

для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$ при условии $\tau \leq \theta$, $r/m > 1 - 1/q$.

Таким образом

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-nm(\frac{1}{2}+\frac{r}{m}-1+\frac{1}{q})} \tag{8}$$

для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$ при условии $\tau \leq \theta$, $r/m > 1 - 1/q$.

Если $\theta < \tau$, то применяя неравенство Гельдера с показателем $\beta = \tau/\theta$, $1/\beta + 1/\beta^{'} = 1$, из неравенства (7) получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-n\frac{m+\alpha}{2}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|_X^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-sm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2}-1+\frac{1}{q})\tau\beta^{'}} \right)^{\frac{1}{\tau\beta^{'}}}$$

Выбрав числа α: $r/m - \alpha/2 - 1 + 1/q > 0$, получим

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-n\frac{m+\alpha}{2}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|\delta_s(f)\|_X^{\theta} \right)^{1/\theta} 2^{-nm(\frac{r}{m}-\frac{\alpha}{2}-1+\frac{1}{q})}$$

для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$ при условии $\theta < \tau$, $r/m > 1 - 1/q$. Следовательно,

$$\|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-nm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} \tag{9}$$

для любой функции $f \in B^r_{X,\theta}$ при условии $\theta < \tau$, $r/m > 1 - 1/q$.

Таким образом, из неравенств (8), (9) следует, что

$$\sup_{f \in B^r_{X,\theta}} \|f - \Lambda_M f\|_{q,\tau} \leq C 2^{-nm(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}$$

для всех $1 \leq \theta \leq +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, при условии $r/m > 1 - 1/q$. Теорема 2 доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0740/ГФ КН МОН РК.

Литература

1 Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

2 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

3 Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды математического института АН СССР. — 1961. — Т.60. — С. 42–81.

4 Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи математических наук. — 1960. — Т.15, №3. — С. 81–120.

5 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. // Успехи математических наук. — 1974. — Т.29, №3. — С. 161–178.

6 Майоров В.Е. О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. Академии наук СССР. — 1978 — Т.243, №5. — С. 1127 – 1130.

7 Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

8 Галеев Э.М. Линейные поперечники классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ, серия матем., мех. — 1987. - №4. — С. 13–16.

9 Галеев Э.М. Линейные поперечники классов Гельдера - Никольского периодических функций многих переменных // Матем. зам. — 1996. — Т.59, №2. — С. 189 – 199.

10 Изаак А.Д. Поперечники классов Гельдера – Никольского и конечномерных множеств в пространствах со смешанной нормой // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, №3. — С. 459 – 461.

11 Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных I. // Украинский математический журнал. — 2001. — Т. 53., №5. — С. 647–661.

12 Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных II. // Украинский математический журнал. — 2001. — Т. 53., №6. — С. 965–977.

13 Базарханов Д.Б. Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского - Бесова обобщенной смешанной гладкости // Доклады Российской академии наук. — 2009. — Т.426, №1. — С. 11–14.

14 Лапин С.В. Некоторые теоремы вложения для произведений функций // Деп. в ВИНИТИ, 03.03. 1980. — №1036-80. Деп. — 31 с.

15 Акишев Г. О порядках M - членных приближений классов функций симметричного пространства // Математический журнал. — 2014. — Т. 14, №4(54). — С.46–71.

16 Глускин Е.Д. Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 219, №3. — С. 527–530.

17 Глускин Е.Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Матем. сб. — 1983. — Т. 120, №2. — С. 180–189.

Статья поступила в редакцию 08.07.14

Ақышев Ғ. СИММЕТРИЯЛЫҚ КЕҢІСТІКТЕГІ КЛАСТАРДЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ҚИМАЛАРЫН БАҒАЛАУ

Мақалада көпайнымалы периодты функциялардың симметриялық кеңістігі және осы кеңістіктегі Никольский-Бесов класы қарастырылған. Никольский-Бесов класының сызықтық қималарының Лоренц кеңістігінің нормасында жоғарыдан бағалаулары табылған.

Akishev G. THE ESTIMATES OF THE LINEAR WIDTHS OF CLASSES IN THE SYMMETRICAL SPACE

In this paper there are considered symmetrical space of periodic functions of many variables and Nikol'ski-Besov class in this space. There are proved the estimates from above of the linear widths of Nikol'ski-Besov class in the norm of the Lorentz space.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 1 (55). С.20–37*

УДК 517.5

Д.Б. Базарханов

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: dauren@math.kz

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе строится нелинейный метод приближенного восстановления псевдодифференциальных операторов с символами из специальных классов. Даются оценки погрешности на единичных шарах подходящих функциональных пространств типа Никольского-Бесова и типа Лизоркина-Трибеля для некоторых соотношений между параметрами классов символов и функциональных пространств.
Ключевые слова: *псевдо-дифференциальный оператор, приближенное восстановление, нелинейный метод, пространство функций, смешанная гладкость.*

Введение

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; для $m \in \mathbb{N}$ $\mathrm{z}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$; $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор. Для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $\|x\| = \sqrt{xx}$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| : \kappa \in \mathrm{z}_m\}$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений на $\mathbb{R}^m$ соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_m^{-1}(f)$ — прямое

Keywords: *pseudo-differential operator, approximate recovery, nonlinear method, function space, mixed smoothness.*
2010 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40.

и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее, пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \lambda)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\lambda \in \mathbb{Z}^m$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим гладкий символ $\psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ (т.е. $\psi(\cdot,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$) и гладкий периодический символ $\widetilde{\psi} : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ (т.е. $\widetilde{\psi}(\cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ для каждого $\xi \in \mathbb{Z}^m$) и соответствующие им формальные псевдодифференциальные операторы (ПДО)

$$\psi(x,D) : f(x) \to \psi(x,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(\xi)\psi(x,\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi,$$

$$\widetilde{\psi}(x,D) : f(x) \to \widetilde{\psi}(x,D)f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\xi)\widetilde{\psi}(x,\xi)e^{2\pi i\xi x}.$$

Введем следующие классы символов ("типа произведения" при $n \geq 2$). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, и вектор $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|\mathfrak{m}| = m$ ($\mathfrak{m} = m$, если $n = 1$, $\mathfrak{m} = \mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^m$, если $n = m$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + \ldots + m_\nu$; $\mathrm{K}_\nu \equiv \{\kappa_{\nu-1} + 1, \ldots, \kappa_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{N}_0^m$ положим

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial_{x_1}^{\lambda_1} \ldots \partial_{x_m}^{\lambda_m}}, \quad \Delta^\lambda = \Delta_1^{\lambda_1} \circ \ldots \circ \Delta_m^{\lambda_m},$$

здесь $\Delta_\kappa^{\lambda_\kappa}$ — конечная разность порядка λ_κ (с шагом 1) по κ–й переменной, $\kappa \in \mathrm{z}_m$.

Определение 1. *Пусть* $\mathtt{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$;$\mathfrak{K} = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда*

`i)` *символ* $\psi(x,\xi)$ *принадлежит классу* $\Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}(\mathbb{R}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \leq K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\mu} > 0$ *такая, что*

$$|\partial_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x,\xi)| \leq c_{\lambda\mu} \prod_{\nu\in\mathrm{z}_n} (1 + \|\xi\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^m;$$

ii) *периодический символ* $\widetilde{\psi}(x,\xi)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}(\mathbb{T}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu} > 0$ *такая, что*

$$|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \widetilde{\psi}(x,\xi)| \le c_{\lambda\,\mu} \prod_{\nu\in \mathrm{z}_n} (1+\|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^m, \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Отметим, что при $n = 1$ класс символов $\Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}$ есть известный класс Л. Хермандера $S^{\mathtt{t}}$, который играет важную роль в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами; см., например, [1]. При $n = m \ge 2$ эти классы содержат символы ПДО смешанного типа. В несколько более общем случае $1 \le n \le m$ такие ПДО естественным образом возникают в связи функциональными пространствами "типа произведения" , см., например, [2]–[6], [7, ch. II, §5.20–5.23, ch.III, §5.27].

Из класса $\Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ с помощью дополнительных условий гладкости выделим класс $\Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{I}^m)$.

Определение 2. *Пусть* $1 \le \vartheta \le \infty$; $\mathtt{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = (K_1,\ldots,K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда*

i) *символ* $\psi(x,\xi) \in \Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}$ *принадлежит классу* $\Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{R}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \ne \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что* ($\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}$)

$$\|\partial_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x,\xi) \,|\, B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,\mathfrak{m}_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \le c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu\in\mathrm{z}} (1+\|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu\varepsilon_\nu}$$

$$\prod_{\nu\in\dot{\mathrm{z}}} (1+\|\xi^\nu\|)^{t_\nu - \rho_\nu|\lambda^\nu| + \delta_\nu|\mu^\nu|}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^m;$$

ii) *периодический символ* $\widetilde{\psi}(x,\xi) \in \Psi^{\mathtt{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{T}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n(\mathrm{z} \ne \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что*

$$\|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \widetilde{\psi}(x,\xi) \,|\, \widetilde{B}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,\mathfrak{m}_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \le c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu\in\mathrm{z}} (1+\|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu\varepsilon_\nu}$$

для вектора $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \ne \varnothing)$ через a_{z} обозначаем вектор $(a_\nu : \nu \in \mathrm{z})$

$$\prod_{\nu\in\dot{z}}(1+\|\xi^\nu\|)^{t_\nu-|\mu^\nu|}, \qquad x\in\mathbb{T}^m, \xi\in\mathbb{Z}^m.$$

(Здесь норма $\|\cdot\mid B^{v_z\,\mathfrak{m}_z}_{\infty\,\vartheta}(\prod_{\nu\in z}\mathbb{I}^{m_\nu})\|$ применяется по "переменной" $x^z\equiv(x^\nu:\nu\in z)$).

В настоящей работе строится нелинейный метод приближенного восстановления ПДО, который дает хорошую погрешность приближения для каждого ПДО с символом из класса $\Psi^{\mathbf{t}\,v\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ (см. Определение 2 ниже) на элементах подходящих функциональных пространств типа Никольского-Бесова $B^{\mathbf{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ и типа Лизоркина-Трибеля $L^{\mathbf{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$.

1 Функциональные пространства

Пусть $L_p(\mathbb{I}^m)$ $(1\le p\le\infty)$ — пространство измеримых функций $f:\mathbb{I}^m\to\mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p=\infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной нормой $\|f\mid L_p(\mathbb{I}^m)\|$; здесь $\mathbb{I}\in\{\mathbb{R},\mathbb{T}\}$; $L_p\equiv L_p(\mathbb{R}^m), \widetilde{L}_p\equiv L_p(\mathbb{T}^m)$. Ясно, что для $f\in L_1$ $(\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ и $g\in\widetilde{L}_1$ $(\subset\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m))$

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^m}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx, \xi\in\mathbb{R}^m,\ \widehat{g}(\xi)=\int_{\mathbb{T}^m}g(x)e^{-2\pi i\xi x}dx, \xi\in\mathbb{Z}^m.$$

Далее, $\ell_q=\ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(1\le q\le\infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha)=(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой

$$\|(a_\alpha)\mid\ell_q\|=\big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}|a_\alpha|^q\big)^{1/q}\ (1\le q<\infty), \|(a_\alpha)\mid\ell_\infty\|=\sup(|a_\alpha|\ :\alpha\in\mathbb{N}_0^n).$$

$\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))$ (соответственно, $L_p(\mathbb{I}^m;\ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x))=(g_\alpha(x))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$, $x\in\mathbb{I}^m$, с конечной нормой

$$\|(g_\alpha)\mid\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\|=\|(\|g_\alpha\mid L_p(\mathbb{I}^m)\|)\mid\ell_q\|$$

(соответственно,

$$\|(g_\alpha)\mid L_p(\mathbb{I}^m;\ell_q\|=\|\|(g_\alpha(\cdot))\mid\ell_q\|\mid L_p(\mathbb{I}^m)\|).$$

Теперь определим ($\mathfrak{m}$–кратное) разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Выберем функции $\eta_0^\nu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_\nu})\,(\nu\in z_n)$ такие, что $0\le\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)\le1$, $\xi^\nu\in\mathbb{R}^{m_\nu}$;

$\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)=1$, если $|\xi^\nu|_\infty\le 1$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)=0$, если $|\xi^\nu|_\infty\ge 3/2$ $(\nu\in\mathrm{z}_n)$. Положим $\widehat{\eta^\nu}(\xi^\nu)\equiv\widehat{\eta_0^\nu}(2^{-1}\xi^\nu)-\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)$; $\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu)\equiv\widehat{\eta^\nu}(2^{-j+1}\xi^\nu), j\in\mathbb{N}$, тогда

$$\{\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu),\ j\in\mathbb{N}_0\}$$

— гладкое разбиение единицы (по "коридорам") на $\mathbb{R}^{m_\nu}$ $(\nu\in\mathrm{z}_n)$, а

$$\{\widehat{\eta}_\alpha(\xi)\equiv\prod_{\nu=1}^n\widehat{\eta_{\alpha_\nu}^\nu}(\xi^\nu),\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n\}$$

— ($\mathfrak{m}$ – кратное) гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$.

Наконец, введем операторы $\Delta_\alpha^\eta\equiv\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{R}}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\widetilde{\Delta}_\alpha^\eta\equiv\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{T}}:\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)\to\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ следующим образом:

$$\Delta_\alpha^\eta(f,x)\equiv\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{R}}(f,x)=\mathcal{F}_m^{-1}(\,\widehat{\eta}_\alpha\widehat{f}\,)(x)=\eta_\alpha*f(x)$$

(свертка понимается в смысле теории распределений),

$$\widetilde{\Delta}_\alpha^\eta(f,x)\equiv\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{T}}(f,x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\eta}_\alpha(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

Определение 3. *Пусть* $\mathfrak{s}=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $1\le p,q\le\infty$; $\mathbb{I}\in\{\mathbb{R},\mathbb{T}\}$.

I. *Пространство типа Никольского-Бесова* $B_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех функций* $f\in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,B_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)\,\|\;=\;\|(2^{\alpha\mathfrak{s}}\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{I}}(f,x))\,|\,\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\|.$$

II. *Пространство типа Лизоркина-Трибеля* $L_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ $(p<\infty)$ *состоит из всех функций* $f\in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,L_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)\,\|\;=\;\|(2^{\alpha\mathfrak{s}}\Delta_\alpha^{\eta,\mathbb{I}}(f,x))\,|\,L_p(\mathbb{I}^m;\ell_q)\|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ *и* $\mathrm{L}_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля соответственно; положим ради краткости* $A_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}=A_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{R}^m)$, $\widetilde{A}_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}=A_{p\,q}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}(\mathbb{T}^m)$, *где* $A\in\{B,\mathrm{B},L,\mathrm{L}\}$.

2 Предварительные сведения: наилучшие N-членные приближения и жадные алгоритмы

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot \mid X\|$, $\Phi = (\phi_\imath : \imath \in \mathfrak{I})$ — система элементов из X ($\mathfrak{I}$ — (счетное индексное) множество). Величина

$$\sigma_N(f, \Phi, X) = \inf \{ \|f - \sum_{\imath \in \mathcal{I}} c_\imath \phi_\imath \mid X\| \mid c_\imath \in \mathbb{C} \ (\imath \in \mathcal{I}),\ \mathcal{I} \subset \mathfrak{I} :\ \sharp \mathcal{I} = N \}$$

называется наилучшим N-членным приближением элемента $f \in X$ по системе Φ ($N \in \mathbb{N}_0$). Для множества $\mathrm{F} \subset X$ положим

$$\sigma_N(\mathrm{F}, \Phi, X) = \sup \{ \sigma_N(f, \Phi, X) \mid f \in \mathrm{F} \}. \tag{1}$$

Отметим, что впервые наилучшие N-членные приближения элементов f гильбертова пространства L_2 по ортонормированному базису появились в работе [8]: именно в терминах этих величин формулируется известный критерий С.Б. Стечкина абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Фурье элемента f по этому базису.

Исследованию наилучших N-членных приближений и различных нелинейных методов приближения для тех или иных множеств (классов функций) F, систем (базисов, словарей, ...) Φ и объемлющих (функциональных) пространств X и соответствующих методов восстановления операторов посвящено много работ. Обстоятельные обзоры [9], [10], [11] и монография [12] показывают, что интерес к нелинейной проблематике в теории приближений не ослабевает, там же приведены достаточно подробная история вопроса и обширная библиография.

В настоящей работе даются приложения оценок наилучших N-членных приближений (1) и оценок погрешности так называемых жадных алгоритмов для классов гладких функций F по системе всплесков в классических функциональных пространствах, полученных автором [13] к приближенному нелинейному восстановлению псевдодифференциальных операторов. А именно, точные в смысле порядка оценки величин (1) в случае, когда $X = L_r(\mathbb{T}^k)$ $(1 < r < \infty)$ — (лебегово) функциональное пространство на k-мерном торе, $\Phi = \widetilde{\mathcal{W}}^m$ — m-кратная система периодизированных всплесков Мейера (см. раздел 3), а F — функциональные классы типа Никольского-Бесова $\mathrm{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ или типа Лизоркина-Трибеля $\mathrm{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ (см.

раздел 2, Определение 3) из [13] применяются к восстановлению псевдодифференциальных операторов из классов $\Psi^{\mathbf{t}\,v\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$.

Напомним определение кратной системы периодизированных всплесков $\widetilde{\mathcal{W}}^m$ (см. [13]). Пусть $\vartheta(\tau)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция, равная $\pi/4$ при $\tau > \pi/3$ и $-\pi/4$ при $\tau < \pi/3$. Далее, $\psi(\tau)$ — четная функция, задаваемая формулой

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \pi/4 + \vartheta(\tau - \pi), & \text{если} \;\; \tau \in [2\pi/3, 4\pi/3]; \\ \pi/4 - \vartheta(\frac{\tau}{2} - \pi), & \text{если} \;\; \tau \in [4\pi/3, 8\pi/3]; \\ 0, & \text{если} \;\; \tau \in [0, 2\pi/3) \cup (8\pi/3, \infty). \end{cases}$$

Тогда

$$w^0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{4\pi/3} \cos(t\tau)\cos(\psi(\tau))d\tau$$

и

$$w^1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \cos((t-1/2)\tau)\sin(\psi(\tau))d\tau$$

— соответственно масштабирующая функция и всплеск Мейера (см. [14, ch.2, §12, ch.3, §2]).

Положим

$$\mathrm{E}^k = \mathrm{E}^k(0) = \{0, 1\}^k, \;\; \mathrm{E}^k(1) = \mathrm{E}^k \setminus \{(0, \ldots, 0)\};$$

$$\Lambda(k, j) = \mathbb{Z}^k, \;\; \widetilde{\Lambda}(k, j) = \mathbb{Z}^k \cap [0, 2^j - 1]^k, \, j \in \mathbb{N}_0;$$

определим функции $w^\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(\iota = (\iota_1, \ldots, \iota_k) \in \mathrm{E}^k)$ следующим образом:

$$w^\iota(x) = w^{\iota_1}(x_1) \times \cdots \times w^{\iota_k}(x_k),$$

и далее

$$w^\iota_j(x) = w^\iota(2^j x) \quad (j \in \mathbb{N}_0),$$

$$w^\iota_{j\lambda}(x) = 2^{jk/2} w^\iota_j(x - 2^{-j}\lambda) = 2^{jk/2} w^\iota(2^j x - \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{Z}^k, \, j \in \mathbb{N}_0),$$

и определим функции $\tilde{w}^\iota_{j\lambda} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\tilde{w}^\iota_{j\lambda}(x) = 2^{jk/2} \widetilde{w^\iota_j}(x - 2^{-j}\lambda) \quad (\lambda \in \widetilde{\Lambda}(k, j), \, j \in \mathbb{N}_0, \, \iota \in \mathrm{E}^k),$$

где $\widetilde{h} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}$ — периодизация функции $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$:

$$\widetilde{h}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} h(\,x - \xi).$$

Тогда

$$\widetilde{\mathcal{W}}^k = \{\widetilde{w}^{\iota}_{\alpha\lambda} \,|\, \lambda \in \widetilde{\Lambda}(k,j), \iota \in \mathrm{E}^k(\mathrm{sign} j),\ j \in \mathbb{N}_0\}$$

— (k-мерная) система (периодизировнных) всплесков Мейера.

Наконец, введем (m-кратную) систему всплесков $\widetilde{\mathcal{W}}^m$:

$$\widetilde{\mathcal{W}}^m \equiv \widetilde{\mathcal{W}}^{m_1} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathcal{W}}^{m_n} \equiv$$

$$\{\widetilde{w}^{\iota}_{\alpha\lambda}(x) = \widetilde{w}^{\iota^1}_{\alpha_1\,\lambda^1}(x^1) \times \cdots \times \widetilde{w}^{\iota^n}_{\alpha_n\,\lambda^n}(x^n) \ \ | \ \ \lambda \in \widetilde{\Lambda}(m,\alpha),\, \iota \in \mathrm{E}^m(\alpha),\, \alpha \in \mathbb{N}^n_0\},$$

здесь $\mathrm{E}^m(\alpha) = \{\iota \in \mathrm{E}^k : \iota^\nu \in \mathrm{E}^{m_\nu}(\mathrm{sign}\,\alpha_\nu),\, \nu \in \mathrm{z}_n\}$, $\widetilde{\Lambda}(m,\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{Z}^k \mid \lambda^\nu \in \widetilde{\Lambda}(m_\nu,\alpha_\nu),\, \nu \in \mathrm{z}_n\}$. Введем операторы $\widetilde{\Delta}^w_\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n_0)$: для $f \in \widetilde{L}_1$

$$\widetilde{\Delta}^w_\alpha(f,x) = \sum_{\iota \in \mathrm{E}^m(\alpha)} \ \sum_{\lambda \in \widetilde{\Lambda}(m,\alpha)} f^{\iota}_{\alpha\lambda} \widetilde{w}^{\iota}_{\alpha\lambda}(x), \text{ где } f^{\iota}_{\alpha\lambda} = \int_{\mathbb{T}^k} f(x)\, \widetilde{w}^{\iota}_{\alpha\lambda}(x)\, dx.$$

Пусть $s = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$. Положим $\varsigma_\nu = \frac{s_\nu}{m_\nu}$; $\nu \in \mathrm{z}_n$; не ограничивая общности, будем предполагать, что $\varsigma \equiv \min\{\,\varsigma_\nu \mid \nu \in \mathrm{z}_n\} = \varsigma_1 = \ldots = \varsigma_\omega < \varsigma_\nu$, $\ \nu \in \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}_\omega$ для некоторого $\omega \in \mathrm{z}_n$.

Далее будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства : для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая константа $C = C(F,H) > 0$, что верно неравенство $F(u) \le CH(u)$ для $u \ge u_0 > 0$; $F(u) \asymp H(u)$, если одновременно $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$.

Всюду ниже $u = \min\{p,q\}$, $\log$ — это логарифм по основанию 2.

Определим функцию $\varsigma(p,q,r)$ для $1 \le p,q,r \le \infty$ следующим образом:

$$\varsigma(p,q,r) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{p,q,r\}} \cdot \frac{2}{r_*} - \frac{1}{r}, & \text{если } \ 1 < r < \infty, \\ \frac{1}{u} - 1, & \text{если } \ r = 1,\, u < \infty, \\ \frac{1}{u}, & \text{если } \ p < r = \infty, \\ 0, & \text{если } \ r = 1,\, u = \infty \ \text{ или } \ r = p = \infty. \end{cases}$$

В теореме A и всех последующих теоремах в случае, когда $\mathrm{F} = \mathrm{L}$ (т.е. для классов Лизоркина-Трибеля), будем предполагать, не оговаривая это особо, что $p < \infty$.

Теорема A. *Пусть* $1 \le p, q, r \le \infty$; $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что* $\varsigma > \varsigma(p,q,r)$; $\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда верно соотношение*

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \asymp N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}, \quad \text{если} \quad 1 < r < \infty.$$

Это часть теоремы 5.1 из [13].

Пусть $\mathfrak{P}^m$ — множество всех полуоткрытых диадических параллелепипедов из $\mathbb{R}^m$ вида

$$P = P^m_{\alpha\lambda} = \{\, x \in \mathbb{R}^k \,:\, 2^\alpha \cdot x - \lambda \in [\,0,1\,)^k \,\} \ (\alpha \in \mathbb{N}^n_0, \lambda \in \mathbb{Z}^m);$$

$$\widetilde{\mathfrak{P}}^m = \{P \in \mathfrak{P}^m \,|\, P \subset [0,1)^k\}.$$

Дадим более удобную здесь нумерацию всплесков из $\widetilde{\mathcal{W}}^m$ посредством параллелепипедов из $\widetilde{\mathfrak{P}}^m$, а именно, положим

$$\widetilde{w}^{\iota}_P = \widetilde{w}^{\iota}_{\alpha\lambda}, \text{если} \ \ \iota \in \mathrm{E}^m(\alpha_P), \ P = P^m_{\alpha\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{P}}^m.$$

Здесь $\alpha_P \equiv \alpha$ для $P = P^m_{\alpha\lambda}$. Пусть

$$\mathbb{J}[\alpha] = \{(\iota, P) \,|\, \iota \in \mathrm{E}^m(\alpha),\, \alpha_P = \alpha\} \ (\alpha \in \mathbb{N}^n_0).$$

Ясно, что для $f \in \widetilde{L}_1$

$$\widetilde{\Delta}^w_\alpha(f,x) = \sum_{(\iota,P)\in\mathbb{J}[\alpha]} f^\iota_P\, \widetilde{w}^\iota_P = \sum_{\iota\in\mathrm{E}^m(\alpha)} \sum_{\alpha_P=\alpha} f^\iota_P\, \widetilde{w}^\iota_P.$$

Ключевую роль при построении хороших нелинейных методов восстановления ПДО играют два варианта так называемых "жадных" алгоритмов, именно, $G^{c,a}(\cdot, \widetilde{\mathcal{W}}^m)$ и $G^v(\cdot, \widetilde{\mathcal{W}}^m)$. Отметим, что жадные (greedy) алгоритмы занимают важное место среди нелинейных методов приближения: весьма полное представление о них дает недавний обзор [11] и монография [12].

Рассмотрим следующий вариант "жадного" (greedy–type) алгоритма $G^{c,a}(\cdot,\widetilde{\mathcal{W}}^m)$ (см. [15, §§2, 3], [11]). Фиксируем число $a \in \mathbb{R}$; для $f \in \widetilde{L}_1$ переставим последовательность

$$(|f_P^\iota||P|^a \,|\, P \in \widetilde{\mathfrak{P}}^m,\ \iota \in \mathrm{E}^m(\alpha_P))$$

в убывающем порядке

$$|f_{P(1)}^{\iota(1)}||P(1)|^a \geq |f_{P(2)}^{\iota(2)}||P(2)|^a \geq \dots .$$

Определим для $f \in \widetilde{L}_1$ сумму

$$G_N^{c,a}(f,\widetilde{\mathcal{W}}^m) = \sum_{j=1}^N f_{P(j)}^{\iota(j)} \widetilde{w}_{P(j)}^{\iota(j)},\ N \in \mathbb{N}.$$

Для множества $\widetilde{\mathrm{F}} \subset \widetilde{L}_r$ положим

$$\mathcal{G}_N^{c,a}(\widetilde{\mathrm{F}},\widetilde{\mathcal{W}}^m,\widetilde{L}_r) := \sup\{\, \|f - G_N^{c,a}(f,\widetilde{\mathcal{W}}^m) \,|\, \widetilde{L}_r\| \mid f \in \widetilde{\mathrm{F}}\}.$$

Теорема B. [13, теорема 7.1] *Пусть* $1 \leq p,q,r \leq \infty$, $p^* \leq r \leq \infty$; $a > -1/2$; $\delta \in (0,1)$; $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2} - a, (a+\frac{1}{2})(\frac{r}{u} - 1)\}, & \textit{если}\ \ r < \infty, \\ \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2} - a, (a+\frac{1}{2})(\frac{1}{\delta} - 1) + \frac{1}{p}\}, & \textit{если}\ \ p < r = \infty, \\ \frac{1}{2} - a, & \textit{если}\ \ u = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B},\mathrm{L}\}$. *Тогда справедливы оценки*

$$\mathcal{G}_N^{c,a}(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q},\widetilde{\mathcal{W}}^m,\widetilde{L}_r) \ll N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})},\ \ \text{если}\ \ r < \infty,$$

$$\mathcal{G}_N^{c,a}(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q},\widetilde{\mathcal{W}}^m,\widetilde{L}_\infty) \ll N^{-\varsigma+\frac{\delta}{p}}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma-\frac{\delta}{p}+1-\frac{1}{q})},\ \ \text{если}\ \ p < \infty,$$

$$\mathcal{G}_N^{c,a}(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\,m}_{\infty\,q},\widetilde{\mathcal{W}}^m,\widetilde{L}_\infty) \ll N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+1-\frac{1}{q})}.$$

Пусть $1 \leq v \leq \infty$. Рассмотрим теперь "L_v—жадный" (L_v—greedy) алгоритм $G^v(\cdot,\widetilde{\mathcal{W}}^m)$, который определяется следующим образом (см. [15, §§1–3], [11]).

Для $f \in \widetilde{L}_1$ переставим последовательность $(\|f_P^\iota \widetilde{w}_P^\iota \,|\, \widetilde{L}_v\| \,|\, P \in \widetilde{\mathfrak{P}}^m,\ \iota \in \mathrm{E}^m(\alpha_P))$ в убывающем порядке

$$\|f_{P[1]}^{\iota[1]} \widetilde{w}_{P[1]}^{\iota[1]} \,|\, \widetilde{L}_v\| \geq \|f_{P[2]}^{\iota[2]} \widetilde{w}_{P[2]}^{\iota[2]} \,|\, \widetilde{L}_v\| \geq \ldots.$$

Определим для $f \in \widetilde{L}_1$ сумму

$$G_N^v(f, \widetilde{\mathcal{W}}^m) = \sum_{j=1}^{N} f_{P[j]}^{\iota[j]} \widetilde{w}_{P[j]}^{\iota[j]},\ N \in \mathbb{N}.$$

Для множества $\widetilde{\mathrm{F}} \subset \widetilde{L}_r$ положим

$$\mathcal{G}_N^v(\widetilde{F}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) := \sup\ \{\ \|f - G_N^v(f, \widetilde{W}^m)\ |\ \widetilde{L}_r\| \,|\, f \in \widetilde{\mathrm{F}}\}.$$

Ясно (см. [15], а также лемму 6.1 из [13]), что алгоритмы G^v и $G^{c,a}$ с $a = \frac{1}{v} - \frac{1}{2}$ тесно связаны.

Справедлива

Теорема C. [13, теорема 7.2] $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq v < \infty$, $p^* \leq r \leq \infty$; $\delta \in (0,1)$; $s \in \mathbb{R}_+^n$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}, (\frac{r}{u} - 1)\frac{1}{v}\}, & \text{если} \ \ r < \infty, \\ \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}, (\frac{1}{\delta} - 1)\frac{1}{v} + \frac{1}{p}\}, & \text{если} \ \ p < r = \infty, \\ 0, & \text{если} \ \ p = r = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда выполняются оценки*

$$\mathcal{G}_N^v(\widetilde{\mathrm{F}}_{p\,q}^{s\,m}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \ll N^{-\varsigma} (\log N)^{(\omega-1)(\varsigma + \frac{1}{2} - \frac{1}{q})}, \ \ \text{если} \ \ r < \infty,$$

$$\mathcal{G}_N^v(\widetilde{\mathrm{F}}_{p\,q}^{s\,m}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll N^{-\varsigma + \frac{\delta}{p}} (\log N)^{(\omega-1)(\varsigma - \frac{\delta}{p} + 1 - \frac{1}{q})}, \ \ \text{если} \ \ p < \infty, \qquad (2)$$

$$\mathcal{G}_N^v(\widetilde{\mathrm{B}}_{\infty\,q}^{s\,m}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll N^{-\varsigma} (\log N)^{(\omega-1)(\varsigma + 1 - \frac{1}{q})}. \qquad (3)$$

Теорема D. [13, теорема 7.3] $1 \le p, q \le \infty$, $1 \le r < \infty$, $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \frac{1}{\min\{p,q,r\}} \cdot \frac{2}{r_*} - \frac{1}{r}, & \text{если } 1 < r < \infty, \\ \frac{1}{u} - 1, & \text{если } r = 1,\ u < \infty, \\ 0, & \text{если } r = 1,\ u = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда справедливы оценки*

$$\mathcal{G}^r_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \ll N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}, \quad \text{если } 1 < r < \infty; \tag{4}$$

$$\mathcal{G}^1_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_1) \ll N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+1-\frac{1}{q})}. \tag{5}$$

3 Конструкция нелинейного метода восстановления ПДО

Построим для $f \in \widetilde{L}_1$ следующие методы восстановления ПДО $\widetilde{\psi}$:

$$S^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, x) = \widetilde{\psi}(D,x) G^{c,a}_N(f,x), \tag{6}$$

$$S^{v}_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, x) = \widetilde{\psi}(D,x) G^{v}_N(f,x). \tag{7}$$

и обозначим через

$$\mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) := \sup\{\|\widetilde{\psi}(D,x)f - S^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, x) \,|\, \widetilde{L}_r\| \,|\, f \in \widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) := \sup\{\|\widetilde{\psi}(D,x)f - S^{v}_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, x) \,|\, \widetilde{L}_r\| \,|\, f \in \widetilde{F}^{s\,m}_{p\,q}\} \tag{9}$$

погрешности методов (6) и (7) соответственно на множестве $F \subset \widetilde{L}_r$.

Наконец, введем величину

$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) := \inf_{\{c_\imath\}\subset\mathbb{C}, \{\psi_\imath\}\subset\widetilde{\mathcal{W}}_m, \sharp\mathcal{I}\le N} \|\widetilde{\psi}(D,x)f - \widetilde{\psi}(D,x)\sum_{\imath\in\mathcal{I}} c_\imath\varphi_\imath \,|\, \widetilde{L}_r\|$$

и положим для $F \subset \widetilde{L}_r$

$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) := \sup\{\sigma_N(\widetilde{\psi}, f, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \,|\, f \in F\}.$$

Ясно, что
$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \le \mathcal{G}_N^{c,a}(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \tag{10}$$
и
$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \le \mathcal{G}_N^{v}(\widetilde{\psi}, F, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \tag{11}$$

4 Оценки погрешности

Здесь формулируется и обсуждается основной результат работы — оценки погрешности (8) и (9) методов нелинейного восстановления (6) и (7) соответственно на классах $\widetilde{\mathrm{B}}^{s\,m}_{p\,q}$ и $\widetilde{\mathrm{L}}^{s\,m}_{p\,q}$ в метрике $\widetilde{L}_r$ для некоторых соотношений между параметрами s, p, q, r, m ($s \in \mathbb{R}^n_+$, $1 \le p, q, r \le \infty$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $k = m_1 + \cdots + m_n$): в случае $1 < r < \infty$ это точные в смысле порядка оценки, а в случае $r \in \{1, \infty\}$ — оценки сверху.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{s}, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^n$; $1 \le p, q, r, \vartheta \le \infty$ *такие, что* $\mathfrak{s} - \mathfrak{t} = \upsilon - \mathbf{1}, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{m} + \mathbf{1}(\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Пусть* $1 < r < \infty$, $1 \le p, q, \theta \le \infty$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*
$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \ll_{\widetilde{\psi}} N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})};$$
более того, найдутся символы $\widetilde{\psi}^\star, \widetilde{\psi}^* \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*
$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_r) \asymp_{\widetilde{\psi}^\star} N^{-\varsigma}(\log N)^{(\omega-1)(\varsigma+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}, \tag{12}$$
здесь и ниже $\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$.

II. *Кроме того, для любого символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*
$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_1) \ll_{\widetilde{\psi}} (N)^{-\varsigma}\Big(\log N\Big)^{(\omega-1)(\varsigma+1-q)}.$$

Здесь и ниже обозначения $\ll_{\widetilde{\psi}}$ и $\asymp_{\widetilde{\psi}}$ подчеркивают, что константы в определении $\ll$ и $\asymp$ зависят от $\widetilde{\psi}$.

III. *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Тогда для любого символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} (N)^{-\varsigma}\Big(\log N\Big)^{(\omega-1)(\varsigma+1-\frac{1}{q})},$$

и для любого $\delta \in (0,1)$

$$\sigma_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}_m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} (N)^{-\varsigma+\frac{\delta}{p}}\Big(\log N\Big)^{(\omega-1)(\varsigma-\frac{\delta}{p}+1-\frac{1}{q})},$$

в последнем случае постоянная зависит еще от δ.

5 Схема доказательства теоремы 1

Ключевыми ингредиентами доказательства теоремы 1 являются приводимые ниже теоремы 2, 3 и 4, а также теоремы A, B, C и D из раздела 3.

Шаг 1. На этом шаге устанавливается , что ПДО $\widetilde{\psi}(x, D)$ с символом из $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ действует непрерывно из $\widetilde{\mathrm{F}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в $\widetilde{\mathrm{F}}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{e}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$, здесь $\mathrm{F} = \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$ в более общем контексте, нежели требуется для доказательства Теоремы 1. Именно, верна

Теорема E. [16] *Пусть* $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}^n_+, \mathtt{t} \in \mathbb{R}^n_+$ *такие, что* $\mathtt{t} < \mathfrak{s}$; $\upsilon \in \mathbb{R}^n_+$; $1 \le p, q, \vartheta \le \infty$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} \in \mathbb{N}^n$ *такой, что* $\mathfrak{K} > \mathfrak{m}$. *Пусть далее символ* $\psi \in \Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *(периодический символ* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$*). Тогда ПДО* $\psi(x, D)$ *(соответственно, периодический ПДО* $\widetilde{\psi}(x, D)$*) является непрерывным из* $B^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $B^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *(соответственно, из* $\widetilde{B}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $\widetilde{B}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$*) и при* $p < \infty$ *из* $L^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $L^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *(соответственно, из* $\widetilde{L}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $\widetilde{L}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$*), если для каждого* $\nu \in \mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих условий:*
i) $s_\nu - t_\nu < \upsilon_\nu$;
ii) $s_\nu - t_\nu = \upsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu < 1, \ \vartheta \le q \le \infty$;
iii) $s_\nu - t_\nu = \upsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu = \vartheta = q = 1$.

Отметим, что в непериодическом случае с $\mathfrak{K} = (\infty, \ldots, \infty)$, $\mathtt{t} = 0$ эта теорема получена в [5].

Шаг 2. Здесь устанавливается связь между погрешностью методов (8), (9) восстановления ПДО с символом из $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ на классе $\widetilde{\mathrm{F}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ и соответствующими оценками погрешности жадных алгоритмов.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{s}, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^n$; $1 \le \vartheta \le \infty$ *такие, что* $\mathfrak{s} - \mathfrak{t} = \upsilon - \mathbf{1}, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{m} + \mathbf{1}(\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Пусть* $1 \le p, q, r \le \infty$, $p^* \le r \le \infty$; $a > -1/2$; $\delta \in (0,1)$; $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2} - a, (a + \frac{1}{2})(\frac{r}{u} - 1)\}, & \textit{если} \ \ r < \infty, \\ \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2} - a, (a + \frac{1}{2})(\frac{1}{\delta} - 1) + \frac{1}{p}\}, & \textit{если} \ \ p < r = \infty, \\ \frac{1}{2} - a, & \textit{если} \ \ u = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r), \quad \textit{если} \ \ r < \infty,$$

$$\mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty), \quad \textit{если} \ \ p < \infty,$$

$$\mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{B}}^{s\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{c,a}_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s-t\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty).$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{s}, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^n$; $1 \le \vartheta \le \infty$ *такие, что* $\mathfrak{s} - \mathfrak{t} = \upsilon - \mathbf{1}, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{m} + \mathbf{1}(\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $1 \le v < \infty$, $p^* \le r \le \infty$; $\delta \in (0,1)$; $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}, (\frac{r}{u} - 1)\frac{1}{v}\}, & \textit{если} \ \ r < \infty, \\ \max\{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}, (\frac{1}{\delta} - 1)\frac{1}{v} + \frac{1}{p}\}, & \textit{если} \ \ p < r = \infty, \\ 0, & \textit{если} \ \ p = r = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r), \quad \textit{если} \ \ r < \infty,$$

$$\mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty), \quad \textit{если} \ \ p < \infty,$$

$$\mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{B}}^{s\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^{v}_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s-t\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty).$$

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{s}, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^n$; $1 \le \vartheta \le \infty$ *такие, что* $\mathfrak{s} - \mathfrak{t} = \upsilon - \mathbf{1}, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{m} + \mathbf{1}(\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $1 \le r < \infty$, $s \in \mathbb{R}^n_+$ *такой, что*

$$\varsigma > \begin{cases} \frac{1}{\min\{p,q,r\}} \cdot \frac{2}{r_*} - \frac{1}{r}, & \text{если } \ 1 < r < \infty, \\ \frac{1}{u} - 1, & \text{если } \ r = 1,\ u < \infty, \\ 0, & \text{если } \ r = 1,\ u = \infty; \end{cases}$$

$\mathrm{F} \in \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\mathcal{G}^r_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^r_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_r), \quad \text{если } \ r < \infty,$$

$$\mathcal{G}^r_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{F}}^{s\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^r_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s-t\,m}_{p\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty), \quad \text{если } \ p < \infty,$$

$$\mathcal{G}^r_N(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathrm{B}}^{s\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty) \ll_{\widetilde{\psi}} \mathcal{G}^r_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s-t\,m}_{\infty\,q}, \widetilde{\mathcal{W}}^m, \widetilde{L}_\infty).$$

Шаг 3. Теперь (в виду теорем 2, 3, 4 и неравенств (10), (11)) для получения требуемых оценок сверху погрешности восстановления ПДО с символом из класса $\widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ остается применить оценки сверху из теорем A, B, C и D для классов $\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ и $\widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в метрике $\widetilde{L}_r$. При получении оценки снизу в (12) строятся пробные функции и используется оценка снизу в Теореме A.

Литература

1 Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987. — 696 с.

2 Fefferman R., Stein E.M. Singular integrals on product spaces // Adv. Math. — 1982. — V.45, № 2. — P. 117–143.

3 Chang S.-Y.A., Fefferman R. Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains // Bull. Amer Math. Soc. — 1985. — V. 12, № 1. — P. 1–43.

4 Fefferman R. Harmonic analysis on product spaces // Ann. Math. — 1987. — V.126, № 1. — P. 109–130.

5 Yamazaki M. Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type // Math. Nachr. — 1987. — V. 188, № 1. — P. 297–315.

6 Carbery A., Seeger A. H^p and L^p variants of multiparameter Calderon–Zygmund theory // Trans. Amer Math. Soc. — 1992. — V. 334, № 2. — P. 719–747.

7 Stein E.M., Harmonic analysis: Real–Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. — 716 p.

8 Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — Т.102, № 1. — С. 51–150.

9 DeVore R. A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. — 1998. — V.7. — P. 51—150.

10 Temlyakov V.N. Nonlinear methods of approximation // Found. Comp. Math. — 2003. — V.3, № 1. — P. 33–107.

11 Temlyakov V.N. Greedy approximation // Acta Numerica. — 2008. — V.17. — P. 235—409.

12 Temlyakov V.N. Greedy approximation. Cambridge University Press, Cambridge, 2011, xiv+418 pp.

13 Базарханов Д.Б. Нелинейные приближения классов периодических функций многих переменных // Тр. МИ РАН. — 2014. — Т. 284. — С. 8–37.

14 Meyer Y. Wavelets and operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37. "Cambridge Univ. Press" , 1992. 223 p.

15 Temlyakov V.N. Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. Approx. — 2000. — V. 16, № 3. — P. 399–426.

16 Базарханов Д.Б. Приближенное восстановление псевдодифференциальных операторов // Матем. журн. — Алматы. — 2012. — Т.12, №2, С. 56–68.

Статья поступила в редакцию 03.02.15

Базарханов Д.Б. ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ

Жұмыста символдары арнаулы кластарға жататын псевдодифференциалдық операторларды жуықтап қалпына келтірудің сызықты емес әдісі құрылған. Никольский-Бесов және Лизоркин-Трибель тектес лайықты функциялар кеңістіктерінің бірлік шарларында символдар кластары мен функциялар кеңістіктерінің параметрлері арасындағы кейбір қатынастар үшін қателік бағалары алынған.

Bazarkhanov D.B. NONLINEAR RECOVERY OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS

In the paper there is constructed nonlinear method for approximate recovery of pseudo-differential operator with symbols from special classes. The error bounds on unit balls of appropriate function spaces of Nikol'skii-Besov type and Lizorkin-Triebel type are given for certain relations between parameters of symbol classes and function spaces.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. №1 (55). С.38–56*

УДК 510.67

B.S. Baizhanov, N.S. Tazabekova, A.D. Yershigeshova, T.S. Zambarnaya

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: baizhanov@hotmail.com, tazabekova.nargiz@gmail.com, aisha.yershigeshova@gmail.com, t.zambar@gmail.com

TYPES IN SMALL THEORIES

In this paper quasi-neighborhoods, neighborhoods, their properties and connection with each other are studied. Also we are going to describe how orthogonality of types connected with definability of quasi-neighborhoods.

We study the relations of weakly orthogonality and almost orthogonality of types and relation of them with the concept as the weakly and strongly convergence of formula to type. In the theorem 4 there is proved that some applied conditions with orthogonality save the property of non-homogeneity and keep the number of countable, non-isomorphic models. For any model $\mathfrak{M}$ of a theory T, $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ is called to be a finite diagram of $\mathfrak{M}$, it is the set of all types that realized in $\mathfrak{M}$ [1]. We prove that if there is a counterexample to Vaught's conjecture then there is a finite diagram with ω_1 countable non-isomorphic models
Keywords: *neighborhood, orthogonality of types, convergence of formula to a type.*

Introduction

Questions on countable models of small theories developed in the works [2]–[5]. A detailed list of works on countable models of complete theories can be found in [6]. In this paper, the authors try to form an approach to the

Keywords: *neighborhood, orthogonality of types, convergence of formula to a type.*
2010 Mathematics Subject Classification: 03C99.

understanding of Vaught's conjecture through notions of orthogonality of types and of neighborhood in types.

The notion of orthogonality of types was introduced in [7], definition of semi-isolation – in [4]. In the work [5] the notion of quasi-neighborhood for 1-types in weakly o-minimal theories was given.

1 Types: orthogonality of types and neighborhoods in types

Definition 1. [*4*] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $\bar{a}$ and $\bar{b}$ be tuples in $\mathfrak{M}$, $A \subseteq M$. The tuple $\bar{a}$ semi-isolates the tuple $\bar{b}$ over the set A, if there exists a formula $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \in tp(\bar{b}/A\bar{a})$ for which $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \vdash tp(\bar{b}/A)$. In this case we say that the formula $\varphi(\bar{a}, \bar{y})$ (with parameters in A) witnesses that $\bar{b}$ is semi-isolated over $\bar{a}$ with respect to A.*

We say that $\bar{a}$ isolates $\bar{b}$ over the set A if the formula $\varphi(\bar{a}, \bar{y})$ is principal (isolating).

Definition 2. [*8, 5*] *Let $p \rightleftharpoons p(\bar{x})$ and $q \rightleftharpoons q(\bar{y})$ be some (may be incomplete) types over the set $A \subseteq M$ in a model $\mathfrak{M}$ of a theory T. A formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with parameters in A is (p, q)-preserving, (p, q)-semi-isolating or $(p \to q)$-formula if for any realization $\bar{a}$ of p $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \vdash q(\bar{y})$ holds.*

A formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is $(p \leftrightarrow q)$-formula if $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is both a $(p \to q)$-formula and $(p \leftarrow q)$-formula.

If $p = q$ then a (p, q)-preserving formula called p-preserving or $(p \to p)$-formula.

Definition 3. [*5, 9*] *Let $p(\bar{x})$ be some (may be incomplete) n-type over a set $A \subseteq M$ in a model $\mathfrak{M}$ of a theory T, B be a set in the model $\mathfrak{M}$. A quasi-neighborhood of B in p is the set $QV_{p,\mathfrak{M}}(B)$ of all tuples $\bar{c} \in M$ such that there exists a tuple $\bar{b} \in B$ and $(tp(\bar{b}/A), p)$-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$.*

In particular, a quasi-neighborhood of $\bar{a}$ in p is the set $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{b} \in p(M)|$ there exists a p-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $\bar{b} \in \varphi(\bar{a}, M) \subset p(M)\}$.

It is easy to see that $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ consists from elements from $p(M)$ which are semi-isolated by $\bar{a}$.

We will show some properties of quasi-neighborhoods in the following lemma.

Lemma 1. [5, 6] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $\bar{a}$ and $\bar{b}$ be tuples from $\mathfrak{M}$, $p, q \in S(A)$.*

1) $\bar{a} \in QV_{tp(\bar{a}),\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

2) $\bar{a}$ semi-isolates $\bar{b}$ if only if $\bar{b} \in QV_{tp(\bar{b}),\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

3) If $\bar{b} \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ and $\bar{c} \in QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{b})$ then $\bar{c} \in QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

4) If $\bar{b} \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ then $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{b}) \subseteq QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

Proof. 1) $QV_{tp(\bar{a}),\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{b} \in tp(\bar{a}) \mid$ there exists $tp(\bar{a})$-preserving formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $\models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$;

Let $\phi(\bar{a}, M)$ be a formula $\bar{x} = \bar{a}$. Then $\bar{a} \in QV_{tp(\bar{a}),\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

2) From definition we know that $\bar{a}$ semi-isolates $\bar{b}$ if $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \vdash tp(\bar{b}/A)$.

Let $QV_{tp(\bar{b}),\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{\alpha} \in tp(\bar{b}) \mid$ there exists $tp(\bar{b})$-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $\bar{\alpha} \in \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is $tp(\bar{b})$-preserving which means that for any realization $\bar{b}$ of $tp(\bar{b})$ $\varphi(\bar{b}, \bar{y}) \vdash tp(\bar{b})$.

3) Let $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{\alpha} \in p(M) \mid$ there exists p-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{\alpha} \in \varphi(\bar{a}, M) \subseteq p(M)\}$ and

$QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{b}) = \{\bar{\beta} \in q(M) \mid$ there exists q-preserving formula $\varphi(\bar{y}, \bar{z})$: $\bar{\beta} \in \varphi(\bar{b}, M) \subseteq q(M)\}$.

In case $\bar{b} \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ for some $(tp(\bar{a}), p)$-preserving formula $\varphi_1(\bar{x}, \bar{y})$ follows that $\bar{b} \in \varphi_1(\bar{a}, M) \subset p(M)$; and in case $\bar{c} \in QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{b})$ for some (p, q)-preserving formula $\varphi_2(\bar{y}, \bar{z})$ follows that $\bar{c} \in \varphi_2(\bar{b}, M) \subset q(M)$.

So, $\bar{b}$ semi-isolates $\bar{c}$ by formula $\varphi_2(\bar{b}, M)$. Let

$$p(M) = \bigcap_{H \in p} H(M);\ q(M) = \bigcap_{\Theta \in q} \Theta(M)$$

Since $\varphi_2(\bar{b}, \bar{M}) \subset q(M)$, for any $\Theta(\bar{y}) \in q(M)$ $\mathfrak{M} \models \forall \bar{y}[\varphi_2(\bar{b}, \bar{y}) \to \Theta(\bar{y})]$ and let denote it by $K_\Theta(\bar{b})$ $([\varphi_2(\bar{b}, \bar{y}) \to \Theta(\bar{y})] = K_\Theta(\bar{b}))$.

Thus $\{K_\Theta(\bar{x}) \mid \Theta \in q\} \subseteq p(\bar{x})$.

By virtue of $\bar{b}$ semi-isolated over $\bar{a}$, for any $H(M) \in p(M)$

$$(*)\ \mathfrak{M} \models \forall \bar{x}[\varphi_1(\bar{a}, \bar{x}) \to H(\bar{x})].$$

Let $R(\bar{a}, \bar{y}) := \exists \bar{x}[\varphi_1(\bar{a}, \bar{x}) \& \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})]$. Since $\mathfrak{M} \models [\varphi_1(\bar{a}, \bar{b}) \& \varphi_2(\bar{b}, \bar{c})]$ then $\models R(\bar{a}, \bar{c})$.

We need to prove that $R(\bar{a}, M) \subset q(M)$. This means $\bar{c} \in QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

Let $\bar{c}_0$ be an arbitrary tuple from $R(\bar{a}, M)$ then $\models R(\bar{a}, \bar{c}_0)$; then for some $\bar{b}_0$ $\mathfrak{M} \models [\varphi_1(\bar{a}, \bar{b}_0) \& \varphi_2(\bar{b}_0, \bar{c}_0)]$.

By virtue of $(*)$ $\mathfrak{M} \models \forall \bar{y}[\varphi_2(\bar{b}_0, \bar{y}) \to \Theta(\bar{y})]$;

For all $\Theta(\bar{y}) \in q(M)$ $\varphi_2(\bar{b}_0, M) \subset \Theta(M)$ then

$$\varphi_2(\bar{b}_0, M) \subset \bigcap_{\Theta \in q} \Theta(M).$$

Thus $\varphi_2(\bar{b}_0, M) \subset q(M)$.

Then $\bar{c}_0 \in q(M)$ by virtue of c_0 is arbitrary $R(\bar{a}, M) \subset q(M)$.

4) Follows from prove of 3). □

Definition 4. [*8, 5*] *Let $p(\bar{x})$ be some (may be incomplete) n-type over a set $A \subseteq M$ in a model $\mathfrak{M}$ of theory T, B be a set in the model $\mathfrak{M}$. A neighborhood of B in p is the set $V_{p,\mathfrak{M}}(B)$ of all tuples $\bar{c} \in M$ such that $\mathfrak{M} \models p(\bar{c})$ and there exists a tuple $\bar{b} \in B$ and $(tp(\bar{b}/A) \leftrightarrow tp(\bar{c}/A))$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$.*

In other words, a neighborhood of B in p is the set $V_{p,\mathfrak{M}}(B) = \{\bar{c} \in M| \mathfrak{M} \models p(\bar{c})$ and $\exists \bar{b} \in B$ and there exists a formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $\varphi(\bar{b}, \bar{y}) \vdash tp(\bar{c}/A)$, $\varphi(\bar{x}, \bar{c}) \vdash tp(\bar{b}/A)$ and $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})\}$.

In particular, a neighborhood of $\bar{a}$ in p is the set $V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{b} \in p(M)|$ there exists a $(tp(\bar{b}/A) \leftrightarrow tp(\bar{a}/A))$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $\bar{b} \in \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \subset p(M)\}$.

And you can see that $V_{p,\mathfrak{M}}(a)$ consists from all elements b such that a semi-isolates b and b semi-isolates a. The next lemma follows from definition 4 and consideration like in lemma 1.

Lemma 2. [*5*] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $A \subseteq M$; $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ be tuples from $\mathfrak{M}$; $p, q \in S(A)$. $\bar{x} \in V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{y})$ is an equivalence relation on the set of realizations of p.*

1) $\bar{a} \in V_{tp(\bar{a}),\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

2) $\bar{a}$ is realization of p, $\bar{b}$ is realization of q. If $\bar{a} \in V_{p;\mathfrak{M}}(\bar{b})$ then $\bar{b} \in V_{q;\mathfrak{M}}(\bar{a})$.

3) Let B be some set in $\mathfrak{M}$. If $\bar{d} \in V_{p;\mathfrak{M}}(B)$ and $\bar{c} \in V_{q;\mathfrak{M}}(\bar{d})$ then $\bar{c} \in V_{q;\mathfrak{M}}(B)$.

Fact 1. $V_p(\bar{\alpha}) \subseteq QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha})$

Proof is obvious. $\square$

Definition 5. *A quasi-neighborhood of a tuple $\bar{a}$ in p is called definable if there exists a formula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ such that $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \psi(\bar{a}, M)$.*

Theorem 1. [5] *Let $\mathfrak{M}$ be a saturated model of theory T, $A \subseteq M$, $p \in S(A)$, $\bar{a} \in p(M)$, $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ be definable quasi-neighborhood, and $\bar{x} \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{y})$ is not an equivalence relation. Then T has the strict order property.*

Proof. At first let us introduce the notion of the strict order property in this meaning. Let Let $\mathfrak{M}$ be a model of a theory T, $p \in S(A)$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \in p(M)$, the strict order property on quasi-neighborhoods is

$$\ldots QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}_i) \subsetneq QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}_{i+1}) \subsetneq \ldots QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}_n) \subsetneq \ldots$$

Since $\mathfrak{M}$ is saturated then it is homogeneous, so there is automorphism $g : M \to M$ such that $g(a_1) = a_2, g(a_2) = a_3, \ldots$ and $\forall b \in QV_{p,\mathfrak{M}}(a_1), g(b) \in QV_{p,\mathfrak{M}}(a_2)$. So we can see that there can't be case like this: $QV_{p,\mathfrak{M}}(\alpha) \subsetneq QV_{p,\mathfrak{M}}(\gamma)$ and $QV_{p,\mathfrak{M}}(\beta) \subsetneq QV_{p,\mathfrak{M}}(\gamma)$ but $QV_{p,\mathfrak{M}}(\alpha) \cap QV_{p,\mathfrak{M}}(\beta) = \emptyset$. $\square$

Corollary 1. *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $\bar{a}$ be a tuple from $\mathfrak{M}$, $p \in S(A)$, $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ be definable quasi-neighborhood and T doesn't have the property of strict order. Then quasi-neighborhood of a tuple $\bar{a}$ in the type p equals to neighborhood of the tuple $\bar{a}$ in the type p.*

Proof. From theorem 1 follows that $\bar{x} \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{y})$ is an equivalence relation, so it is symmetric. Then $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$. $\square$

Definition 6. [8] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, p is called social type if $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ is non-definable for at least one tuple $\bar{a}$ which realizes p.*

Note 1. *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $p \in S(A)$, $\bar{a}$ be realization of p. If $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ is non-definable for one $\bar{a}$ then it is non-definable for each other realization of p.*

Proof is obvious. $\square$

Definition 7. [8] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, p is called quasi-solitary type if $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ is definable for at least one tuple $\bar{a}$ which realizes p.*

Theorem 2. *Let $\mathfrak{M}$ be a countable saturated model of a small theory T, $A \subset_{finite} M$, $p \in S(T(A))$, $V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ — non-definable for some (any) realization $\bar{a}$ of p. If for any for any $n < \omega$ for any tuples $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ from $p(M)$ such that for any i, j $(1 \leq i \neq j \leq n)$*

$$V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_i) \cap V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_j) = \emptyset, V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_i) \cap V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \emptyset$$

there is no formula $\psi(\bar{x}, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ such that $\psi(M, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) \subset V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ then $I(T, \omega) \geq \omega$.

Proof. Let find ω-sequence $< \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n, \ldots >_{n \leq \omega}$ with the next condition: $\forall \bar{\alpha}_n \in p(M) : \bar{\alpha}_n \notin V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1})$. It is possible to find such ω-sequence in M because $\mathfrak{M}$ is saturated model of a small theory.

From condition of theorem it follows that

$$V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_1) \cup V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_2).$$

Then by induction we prove that

$$V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha}_i).$$

Consider prime model $\mathfrak{M}_n$ over $\bigcup_{i<n} \bar{\alpha}_i \cup A$. So, we have at least countable set of non-isomorphic countable models of $T(A)$ because every $\mathfrak{M}_n$ contains exactly n non-definable classes of equivalence on set of realizations of p in $\mathfrak{M}_n$. □

Definition 8. [7] *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(T)$. We say that p is weakly orthogonal to q ($p \perp^w q$) if $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ is complete type.*

Definition 9. *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $p, q \in S(T)$. We say that p is not almost orthogonal to q ($p \not\perp^a q$) if there exists formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ for some $\bar{a} \in p(M)$ such that $\emptyset \neq \varphi(M, \bar{a}) \subset q(M)$.*

Now, let us look at properties of these two relations between types and consider some examples.

Properties: Let $p(\bar{x}), q(\bar{y}) \in S(T)$, then

1. If type $p(\bar{x})$ is weakly orthogonal to type $q(\bar{y})$, then they are almost orthogonal, respectively.

2. In o-minimal theories notions of weakly and almost orthogonality on the set of 1-types are coincide, $p(x) \perp^a q(y) \Leftrightarrow p(x) \perp^w q(y)$

3. The binary relation of not weakly orthogonality on the set of types $S(T)$ is symmetric.

4. If for some(equivalent to any) $\bar{\alpha}$ from the realization of type $p(\mathfrak{M})$ there exists $\bar{\beta} \in q(\mathfrak{M})$ such that $\bar{\alpha}$ semi-isolates $\bar{\beta}$, then type $p(\bar{x})$ is not almost orthogonal to $q(\bar{y})$.

5. The relation of not almost orthogonality is transitive but not necessarily symmetric.

6. If type $p(\bar{x})$ is powerful over type $q(\bar{y})$, then at least $p(\bar{x})$ is not weakly orthogonal to $q(\bar{y})$, because of the formula $F(\bar{x}, \bar{y})$ that extends $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ by $F(\bar{x}, \bar{y})$ and $\neg F(\bar{x}, \bar{y})$. And not almost orthogonal due to existence of nonempty formula $H(\bar{\alpha}, \mathfrak{M}) \subset q(\mathfrak{M})$ for $\alpha \in \bar{p}(\mathfrak{M})$.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $\bar{\alpha}$ be some tuple in $\mathfrak{M}$, p and q be types from $S(A)$. If $p \not\perp^a q$, $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha})$ is non-definable then $QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha})$ is non-definable too.*

Proof. Let $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{a}_i \in p(M) \mid \bar{a}_i \in \psi(\bar{a}, M) \subset p(M)\}$ and $QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \{\bar{a}_j \in p(M) \mid \bar{a}_j \in \phi(\bar{a}, M) \subset q(M)\}$.

We assume on contrary that $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ is non-definable and $QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ is definable.

By definition 9 for every tuple $\bar{a}_i \in QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{a})$ exists formula $\varphi_i(M, a_i) \subset q(M)$. From our assumption follows that

$$\phi(\bar{a}, M) = \bigcup \phi_j(\bar{a}_j, M)$$

and $\varphi_i(M, \bar{a}_i) \subseteq \phi_k(\bar{a}_k, M)$.

Let consider some $\bar{a}_1 \in \psi_1(\bar{a}_1, M)$ and $\bar{a}_2 \in \psi_1(\bar{a}_2, M)$. We know that $\psi_1(\bar{a}_1, M) \cap \psi_2(\bar{a}_2, M) = \emptyset$. And $\psi_1(M, \bar{a}_1) \cap \psi_2(M, \bar{a}_2) \neq \emptyset$.

Let $\psi_1(M, \bar{a}_1) \cap \psi_2(M, \bar{a}_2) = \psi_3(M, \bar{a}_3)$. It means that $\bar{a}_3 \in \psi_1(\bar{a}_1, M) \cap \psi_2(\bar{a}_2, M)$. So we have contradiction. □

Corollary 2. *Let $\mathfrak{M}$ be a model of theory T, $\bar{\alpha}$ be some tuple in $\mathfrak{M}$, p and q be types from $S(A)$. If $p \not\perp^a q$ and $q \not\perp^a p$ then $QV_{p,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha})$ is definable if only if $QV_{q,\mathfrak{M}}(\bar{\alpha})$ is definable.*

Proof is like in theorem 3. $\square$

Example 1. There exist principal type $p(x)$ and non-principal type $q(y)$ such that $p \not\perp^w q$. Theory T with signature $\Sigma =<=,<,P_i>$ where:

- $'' <''$ is a dense linear order without endpoints
- Let us consider predicates P_i as coloring of elements and every element has its color, such that $\neg\exists x(P_i(x) \wedge P_j(x)), i \neq j$
- Between any two elements there exists another one with its own color P_i: $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y \wedge P_i(z)))$.

So, in the issue, we have the linear order with infinitely many colored and colorless elements.

As a principal type we take the set of atomic formulas formulas $\{P_1(x)\} \cup \{\neg P_i(x)|1 < i < \omega\} = p(x)$ and as non principal $\{\neg P_i(x)_{i<\omega}\} = q(y)$. So, we can extend $p(x) \cup q(y)$ as $p(x) \cup q(y) \cup$ $\{x < y\}$ and $p(x) \cup q(y) \cup$ $\{y < x\}$, which implies that $p(x) \cup q(y)$ is not complete 2-type and $p(x) \not\perp^w q(y)$.

Fact 2. *Let $p(\bar{x})$, $q(\bar{y}) \in S(T)$. If there exists a model $\mathfrak{M}$ of theory T where $\mathfrak{M} \models p(\bar{x})$ and formula $H(\bar{x},\bar{y})$ such that $\exists \bar{\alpha} \in p(\mathfrak{M})$ and $\emptyset \neq H(\bar{\alpha},\mathfrak{M}) \subset q(\mathfrak{M})$ holds, $(p(\bar{x} \not\perp^a q(\bar{y}))$ then it is true for all models $\mathfrak{M}$ of theory T where $\mathfrak{M} \models p(\bar{x})$.*

Proof. By definition of not almost orthogonality, there is a formula $H(\bar{x},\bar{y})$ realization of which is in $q(\mathfrak{M})$ ($H(\bar{\alpha},\mathfrak{M}) \subset q(\mathfrak{M})$). And type is $q(\mathfrak{M}) = \cap\theta(\mathfrak{M})_{\theta\in q}$, that is our formula $H(\bar{\alpha},\mathfrak{M})$ lie in every formula $\theta(\mathfrak{M})$. We can rewrite this fact as $\models \forall \bar{y}(H(\bar{\alpha},\bar{y}) \rightarrow \theta(\bar{y}))$, name this condition as $K_\theta(\bar{\alpha})$, and note that $K_\theta(\bar{x}) \in p(\bar{x})$.

Now take $\bar{\alpha'} \in p(\mathfrak{M}')$. For every formula $\theta \in q(\mathfrak{M}')$ it is true that $\mathfrak{M}' \models K_\theta(\bar{\alpha'})$. Then in $\mathfrak{M}'$ true also $\mathfrak{M}' \models \forall \bar{y}(H(\bar{\alpha'},\bar{y}) \rightarrow \theta(\bar{y}))$. Formula $H(\bar{\alpha'},\mathfrak{M}')$ is a subset of every realization of formula $\theta(\mathfrak{M}')$. So, we have our formula in every θ-formula, and intersection of them is exactly $q(\mathfrak{M}') \Rightarrow \models \exists H(\bar{\alpha},\mathfrak{M}') \subset q(\mathfrak{M}')$ for any $\mathfrak{M}' \models p(\bar{x})$. $\square$

Theorem 4. *Let $\mathfrak{M}$ be a countable, non-homogeneous model of a small theory T, $\mathfrak{N}$ be a ω_1-saturated model ($\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$) and $p(\bar{x}) \in S(T)$ be a non-isolated type such that $p(\bar{x})$ is weakly (almost) orthogonal to any non-isolated type from the finite diagram of $\mathfrak{M}(\mathfrak{D}(\mathfrak{M}))$ and for any $q(x,\bar{y}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$, such that there exists $\bar{\alpha} \in M$, $q(N,\bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$, for any $\bar{\beta} \in M$ for $p' \in S(\bar{\alpha}\bar{\beta})$, for $q'(x,\bar{\alpha},\bar{\beta})$ such that $p \subset p'$, $q \subset q'$ we have $p' \perp^w q'(x,\bar{\alpha},\bar{\beta})$. Then the following conditions*

hold:
1) There exists a countable elementary extension $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}(M, p(\bar{c})) \prec \mathfrak{N}$, *such that* $\mathfrak{N}(M, p(\bar{c}))$ *is also non-homogeneous.*
2) For any non-homogeneous countable $\mathfrak{M}' \ncong \mathfrak{M}$, *with equal finite diagrams* $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$ *we have* $\mathfrak{N}(M, p(\bar{c})) \ncong \mathfrak{N}(M', p(\bar{c}))$.

Proof of this theorem is based on S.V.Sudoplatov's construction in his theorem [6] which states that every countable model of a small theory can be represented as an increasing chain of prime models over some finite tuples.

We shall use implicitly 5 simple facts without special mentioned.

1. Let $p, q \in S(A), p$ be isolated, q be non-isolated. Then $p \perp^a q$.

2. Let $p, q \in S(A)$, q be non-isolated, A be finite set in small theory. Then $p \perp^a q$ iff for $\bar{c} \models p$ for any $q' \in S(A\bar{c})$ such that $q(\bar{x}) \subset q'(x, \bar{c})$ we have $q'(\bar{x}, \bar{c})$ is non isolated.

3. If $tp(\bar{c}\bar{d}|\bar{b}) \not\perp^a q(x, \bar{b})$ is non-isolated, $tp(\bar{d}|\bar{c})$ is isolated then $tp(\bar{c}|\bar{b}) \not\perp^a q(x, \bar{b})$. Equivalently. If $tp(\bar{c}|\bar{b}) \perp^a q(x, \bar{b})$ is non-isolated, $tp(\bar{d}|\bar{c})$ is isolated then $tp(\bar{c}\bar{d}|\bar{b}) \perp^a q(x, \bar{b})$.

4. Let T be small, then for any formula $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ there is subformula $\psi_0(\bar{x}, \bar{b})$ such that $\psi_0(\bar{x}, \bar{b})$ detemines isolated type over $\bar{b}$.

5. Let $\bar{b} \in M, \bar{c} \in N \backslash M$, $\psi_0(x, \bar{b}, \bar{c})$ determine isolated type over $\bar{b}\bar{c}$, $q(x, \bar{y}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M})$. Then the following holds.

If $q(N, \bar{b}) \cap M = \emptyset$ then $\psi_0(N, \bar{b}, \bar{c}) \subset q(N, \bar{b})$ or $\psi_0(N, \bar{b}, \bar{c}) \cap q(N, \bar{b}) = \emptyset$.

In fact, we used the condition of almost orthogonality in formulation of theorem by next manner: $tp(\bar{c}|\bar{b}) \perp^a q(x, \bar{b})$ implies $\psi_0(N, \bar{b}, \bar{c}) \cap q(N, \bar{b}) = \emptyset$.

Let $\mathfrak{M}$ be a countable model of a small theory T and its elementary extension $\mathfrak{N}$, ω_1-saturated model of T, $\bar{c} \models p$, $\bar{c} \in N$. We will construct an elementary chain $\mathfrak{C}$ of prime models $\mathfrak{M}(\bar{a}_i)$ over tuples $\bar{a}_i$, $i \in \omega$, such that $\mathfrak{N}(M, p(\bar{c})) = \cup_{i \in \omega} \mathfrak{M}(\bar{a}_i)$.

We shall construct $\mathfrak{C}$ inductively and at some step k, some finite sequence of tuples $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ will be defined, and each such a tuple will be connected to a finite set X_i^k, $0 \leq i \leq n$, such that unions of these sets by all k with respect to fixed i will define universes of models $\mathfrak{M}(\bar{a}_i)$. If a tuple $\bar{a}_i$ is not defined before the step k then the sets X_i^k are supposed to be empty for any $k < i$.

We start with enumerating all elements of $\mathfrak{M}$: let this set be $M = \{b_k \mid k \in \omega\}$. We shall construct three families of sets:

a) $\{D_k | D_k$ contains the elements from $N \backslash M$ obtained on the step $k, k < \omega\}$;

b) $\{S_k | S_k = S_{k-1} \cup D_k, k < \omega, S_0 = M \cup \bar{c}\}$;

c) $\{B_k | B_k$ is the set of S_k-formulas with one free variables with at least one parameter from $D_k, k < \omega\}$.

At the initial step, we fix the tuple $\bar{a}_0 \rightleftharpoons b_0\bar{c}$ and for the formulas from B_0 having the minimal number and satisfying $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi_m(x, \bar{c}_m)$ we find a realization d_m of a family of decreasing sequence of principal complete types $\ldots p_{l+1}(x, b_0, b_1, \ldots, b_l, b_{l+1}, \bar{c}) \subset p_l(x, b_0, b_1, \ldots, b_l, \bar{c}) \ldots$, $l < \omega$ containing $\varphi(x, b_0, \bar{c})$. Now we let $X_0^0 \rightleftharpoons \{b_0, d_m\} \cup \bar{c}$.

Assume, at the step k we have formed the sets $S, S_1, S_2, \ldots, S_k$. If at this step some realization appears somewhere out of our model $\mathfrak{M}$ i.e. $d_i^j(k) \in \mathfrak{M}(\bar{c}) \backslash \mathfrak{M}$, then we form a new set S_{k+1} and add realization to this set.

Suppose that at step k we have already found tuples $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ $(n \leq k)$ and have formed two families of finite sets $\{X_i^k | i \leq n \leq k\}$, $\{D_i^j(k) | j \leq k,\ i \leq n\}$ and two families of infinite sets $\{S_j | j \leq k\}$, $\{B_j | j \leq k\}$ satisfying the following conditions:

(1) $\cup \bar{a}_i \subset \cup \bar{a}_{i+1},\ i < n,\ \cup \bar{a}_n \subset M \cup \bar{c} \cap X_i^k$;

(2) $\{b_0, \ldots, b_k\} \cup \bar{c} \subseteq X_n^k$;

(3) $X_i^k \subset X_{i+1}^k,\ i < n$;

(4) $D_k = \bigcup_{i \leq n} D_i(k)$, $D_i(k) \subset X_i^k$, $D_i(k) = \bigcup_{j \leq k} D_i^j(k)$, $D_i^j(k) = \{d_i^j(k)\}$.

For any $j \leq k$ for the formulas $\varphi_m(x, \bar{c}_m) \in B_j$ we chose at step k, which is minimal with respect to m and is not considered before and satisfies $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_m(x, \bar{c}_m)$, we have found realizations $d_i^j(k) \in N \backslash M$ of a family of decreasing sequence of principal complete types $p_l(x, X_n^{k-1} \cup \{b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+l}\} \bigcup_{l<j,\, i \leq n} D_i^l(k)) \supset$ $p_{l+1}(x, X_n^{k-1} \cup \{b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+l}, b_{k+l+1}\} \bigcup_{l<j,\, i \leq n} D_i^l(k))$ containing $\varphi_m(x, \bar{c}_m)$ so that for any tuple $\bar{a}_i$ with $\bar{c}_m \in X_i^{k-1}$ and for any tuple $\bar{d} \in X_i^{k-1} \cup \bigcup_{l \leq j,\, i \leq n} D_i^l(k)$ the type $tp(\bar{d}/\bar{a}_i)$ is principal; this realization is added to the minimal set X_i^k with respect to i such that $\bar{c}_m \in X_i^{k-1}$.

At step $k+1$, we consider the elements b_{k+1}. If it belongs to X_n^k then the sequence $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ remains the same and we construct sets X_i^{k+1} by adding to X_i^k the elements $d_i^j(k+1)$ satisfying the conditions (3) and (4) for $k+1$ instead of k.

If $b_{k+1} \notin X_n^k$ and starting from some $i_0 \leq n$, all types $tp(\bar{b}, \bar{a}_i)$, $\bar{b} \in X_i^k \cup \{b_{k+1}\}$ are principal, we do not extend the sequence $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ and add the element b_{k+1} to the set $X_{i_0}^k$ as well as to all consequent sets $X_i^k,\ i_0 \leq i \leq n$.

Then we obtain sets X_i^{k+1} by adding the elements $d_i^j(k+1)$ satisfying the conditions (3) and (4) for $k+1$ instead of k.

If some type $tp(\bar{b}/\bar{a}_n)$, $\bar{b} \in X_n^k \cup \{b_{k+1}\}$ is not principal, we add to the sequence $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ a tuple $\bar{a}_{n+1}$ consisting of all elements of the set $(X_n^k \cup \{b_{k+1}\}) \bigcap (M \cup \bar{c})$. Then we add this set to the (initially empty) set X_{n+1}^k and form the set X_i^{k+1}, $0 \leq i \leq n+1$, by adding a realization $d_i^j(k+1)$ of a family of decreasing sequence isolated complete types $\{p_l(x, X_n^k \cup \{b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+l}\} \cup \bigcup_{l<j,\, i \leq n+1} D_i^l(k+1)) | l < \omega\}$ containing the minimal (with respect to m in B_j) formula $\varphi_m(x, \bar{c}_m) \in B_j$ which was not considered before and contains only elements of X_n^k and satisfying $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi_m(x, \bar{c}_m)$, such that for any tuple $\bar{a}_i$ with $\bar{c}_m \in X_i^k$ and for any tuple $\bar{d} \in X_i^k \cup \bigcup_{l \leq j,\, i \leq n+1} D_i^l(k+1)$, the type $tp(\bar{d}/\bar{a}_i)$ is principal. We add the element $d_i^j(k)$ to the minimal (with respect to i) set X_i^k, and also to the consequent sets such that $\bar{c}_m \in X_j^k$, $i \leq j \leq n$. Now we let $X_{n+1}^{k+1} \rightleftharpoons X_n^k \cup \{b_{k+1}\} \cup \bigcap D_{k+1}$.

By construction, the set $X_i \rightleftharpoons \cup_{k \in \omega} X_i^k$ are the universes of prime models $\mathfrak{M}(\bar{a}_i)$ over tuples $\bar{a}_i$.

Non-homogeneity of model in the elementary extension is guaranteed by our by choose of $d_i^j(k)$.

And now, let we have two countable, non-homogeneous, non-isomorphic models $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ and by this way we can construct $\mathfrak{M}(\bar{c})$ and $\mathfrak{M}'(\bar{c})$ with saving the non-homogeneity and pairwise non-isomorphism. $\square$

Definition 10. [10] *We say that an A-definable formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ converges weakly to a type $q(\bar{x}) \in S(A)$ and write $WEC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, if, for every $\Theta \in q$, there exists $\bar{a} \in A$, such that $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ divides $\Theta(N)$.*

We say that an A-definable formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ converges strongly to a type $q(\bar{x})$ and write $STC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$ if, for every $\Theta \in q$, there exists $\bar{a} \in A$ such that $\phi(N, \bar{a}) \subset \Theta(N)$. We usually omit $\bar{x}$ in the notation $q(\bar{x})$.

Definition 11. [10] *Let Γ be a nonisolated and consistent set of A-definable formulas. We say that Γ is a quasimodel set(finitely satisfiable in works of S. Shelah) if, for every formula $\Theta \in \Gamma$, there exists $\bar{a} \in A$ such that $N \models \Theta(\bar{a})$.*

Fact 3. [10] *Let Γ be a nonisolated quasimodel set of formulas over A. Assume that Γ is closed under formation of finite conjunctions. The Γ can be extended to a quasimodel types over A.*

Proof. For every A-definable formula $Q(\bar{y})$, at least one of the sets $\Gamma(\bar{y})\cup\{Q(\bar{y})\}$, $\Gamma(\bar{y})\cup\{\neg Q(\bar{y})\}$ is a quasimodel set. $\square$

FACT 4. [10] *Let $q \in S(A)$.*

1. *If there is an A-definable formula $\phi(\bar{x},\bar{y})$ such that $WEC(\phi(\bar{x},\bar{y}),q)$ holds then there exists a finitely satisfiable type $r \in S(A)$ such that, for every $\bar{\alpha} \in r(N)$, the formula $\phi(x,\bar{\alpha})$ divides $q(N)$, i.e., $r \not\perp^w q$.*

2. *If $r \in S(A)$ for some finitely satisfiable type $r \not\perp^w q$ then $WEC(\phi(\bar{x},\bar{y}),q)$ holds for some A-definable formula $\phi(\bar{x},\bar{y})$*

Proof. 1. Denote by Γ the following set of A-definable formulas:

$$\{K(\Theta)(\bar{y}) \mid \Theta \in q, K(\Theta)(\bar{y}) := \exists x[\phi(\bar{x},\bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})] \wedge \exists x[\neg\phi(\bar{x},\bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})]\}.$$

It is clear that Γ is finitely satisfiable set; moreover, Γ is closed under formation of finite conjunctions. By Assertion 1 there exists a finitely satisfiable type $r \in S(A)$ extending Γ. Hence, for every $\bar{\gamma} \in r(N) \subseteq \Gamma(N)$, the formula $\phi(x,\bar{\alpha})$ divides $q(N)$. Therefore, $\bar{\gamma} \not\perp^w q$ and, consequently $r \not\perp^w q$.

2. Let $\bar{\alpha} \in r(N)$ and let $\bar{\alpha} \not\perp^w q$. Then, for some formula $\phi(\bar{x},\bar{y})$, the formula $\phi(\bar{x},\bar{\alpha})$ divides $q(N)$. Hence, $\phi(\bar{x},\bar{\alpha})$ divides $\Theta(N)$ for every $\Theta(\bar{x}) \in q$. This means that $N \models K(\Theta)(\bar{\alpha})$. Therefore, we have $K(\Theta)(\bar{y}) \in r$. Since r is a finitely satisfiable type, there exists $\bar{a} \in A$ such that $N \models K(\Theta)(\bar{a})$. Thus, $WEC(\phi(\bar{x},\bar{y}),q)$ holds. $\square$

2 ON A THEOREM ON SIMULTANEOUS OMITTING AND REALIZING TYPES AND ITS APPLICATIONS

Let T be a countable complete theory.

THEOREM 5. [11] *Let $\{p_i \in S(T)|i < \omega\}$ and $\{q_i \in S(T)|i < \omega\}$ be two countable sets of non-principal types. If for every $n < \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n \models T$, in which p_i are realized and q_i are omitted for all $i \leq n$, then there is a countable model $\mathfrak{M} \models T$, such that all p_i, $i < \omega$ are realized and all q_i, $i < \omega$ are omitted in $\mathfrak{M}$.*

Proof. Consider $T_1 = T \cup p_1(\bar{c_1}) \ldots \cup p_n(\bar{c_n}) \cup \ldots$ — a consistent set of formulas of the language $L(T) \cup \{\bar{c}_i|i < \omega,\}$, all $\bar{c}_i$ has no common elements. We need to show that for any $i < \omega$ all extensions of $q_i(\bar{x}_i)$ are not principal over T_1.

Suppose by a contradiction, that there exists i_0, such that q_{i_0} is a principal consistent set, that is, there exists a formula $\phi(x,\bar{a})$, $\bar{a}=(c_{i_1},\ldots,c_{i_k})$, such that for any $\psi\in q_{i_0}$ $T_1\vdash\forall x(\phi(x,\bar{a})\to\psi(x))$. Therefore, $T\cup p_{i_1}(\bar{c_{i_1}})\ldots\cup p_{i_k}(\bar{c_{i_k}})\vdash\forall x(\phi(x,\bar{a})\to\psi(x))$, $m\geq k$.

The formula $\exists\ x\phi(x,\bar{a})$ need to be a logical consequence of the theory $T\cup p_{i_1}(\bar{c_{i_1}})\ldots\cup p_{i_m}(\bar{c_{i_m}})$, $m\geq k$.

But then beginning from i_k the type q_{i_0} need to be realized in the models $\mathfrak{M}_n$, $n\geq i_k$, what contradicts to the hypothesis of the Theorem. $\square$

THEOREM 6. *If the number of different finite diagrams of T is greater than ω, then $I(T,\omega)=2^\omega$.*

Proof. Denote the set of all finite diagrams of all models of T by Λ:

$$\Lambda=\{D\mid\exists\mathfrak{M}\in Mod(T),\mathfrak{D}(\mathfrak{M})=D\}.$$

LEMMA 3. *Let $|S(T)|=\omega$, $|\Lambda|\geq\omega_1$, then there exists a type p_0, such that $|\Lambda_0|\geq\omega_1$ and $|\Lambda_1|\geq\omega_1$, where*

$$\Lambda_0=\{\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\mid p_0\in\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\in\Lambda\};$$
$$\Lambda_1=\{\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\mid p_0\notin\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\in\Lambda\}.$$

Proof. Let $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ be a list of all non-principal types from $S(T)$. For any n a type p_n divides the set Λ into two parts, $\Lambda_0^{(n)}$ and $\Lambda_1^{(n)}$, where

$$\Lambda_0^{(n)}=\{\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\mid p_n\in\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\in\Lambda\};$$
$$\Lambda_1^{(n)}=\{\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\mid p_n\notin\mathfrak{D}(\mathfrak{M})\in\Lambda\}.$$

Assume that the Lemma is not true. Then, for any n, $|\Lambda_0^{(n)}|\leq\omega$ or $|\Lambda_1^{(n)}|\leq\omega$.

Let $B_n=\Lambda_0^n$, if $|\Lambda_0^{(n)}|\leq\omega$; $B_m=\Lambda_1^n$, if $|\Lambda_1^{(n)}|\leq\omega$.

Since for any n $|B_n|\leq\omega$, $|\bigcup_{n<\omega}B_n|\leq\omega$. And therefore $|\Lambda\setminus\bigcup_{n<\omega}B_n|\geq\omega_1$. Take two different elements D_1 and D_2 from $\Lambda\setminus\bigcup_{n<\omega}B_n$. There is some type p_m such that $p_m\in D_1$ and $p_m\notin D_2$.

There may be two cases:

1. $B_m=\Lambda_0^{(m)}$. In this case, $p_m\in D_1\in\Lambda_0^{(m)}=B_m$. But $D_1\in\Lambda\setminus\bigcup_{n<\omega}B_n$, therefore, $D_1\notin B_m$. And we obtain a contradiction.

2. $B_m = \Lambda_1^{(m)}$. In this case, $p_m \notin D_2 \in \Lambda_1^{(m)} = B_m$. But $D_2 \in \Lambda \setminus \bigcup_{n<\omega} B_n$, therefore, $D_2 \notin B_m$. And we obtain a contradiction. □

In order to proof the Theorem 6 consider two cases:

1. $|S(T)| > \omega$. In this case $|S(T)| = 2^\omega$, $I(T, \omega) = 2^\omega$.

2. $|S(T)| = \omega$. Consider an arbitrary listing $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$; $t_n \in S(T)$ of all non-principal types from $S(T)$.

We will construct a tree by the following steps:

Step 1. By the Lemma 3 we will find the smallest number m, such that

$$\begin{gathered}\Lambda_0 = \{\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \mid t_m \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \in \Lambda\};\\ \Lambda_1 = \{\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \mid t_m \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \in \Lambda\};\\ |\Lambda_0| \geq \omega_1,\ |\Lambda_1| \geq \omega_1.\end{gathered}$$

Step k-1. On this stage we will have 2^{k-1} disjoint sets Λ_τ with $|\Lambda_\tau| \geq \omega_1$, where $\tau \in \{0, 1\}$ and length of τ is equal to $k - 1$.

Step k. For any τ let m_τ be the smallest with the property

$$\begin{gathered}\Lambda_{\tau_0} = \{\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \mid t_{m_\tau} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \in \Lambda_\tau\};\\ \Lambda_{\tau_1} = \{\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \mid t_{m_\tau} \notin \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) \in \Lambda_\tau\};\\ |\Lambda_{\tau_0}| \geq \omega_1,\ |\Lambda_{\tau_1}| \geq \omega_1.\end{gathered}$$

On this step we have 2^k sets, each of which has cardinality greater or equal to ω_1, and for any $\tau_1 \neq \tau_2$, $\Lambda_{\tau_1} \cap \Lambda_{\tau_2} = \emptyset$.

Each branch of 2^ω branches of the obtained tree, will be characterized by a sequence $t_m, t_{m_{\tau_1}}, \ldots, t_{m_{\tau_k}}, \ldots$ of types, which we can divide according to belonging of the type $t_{m_{\tau_n}}$ to the finite diagrams of the set $\Lambda_{\tau_{n+1}}$ into two sequences: $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ and $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$. If $t_{m_{\tau_i}} = p_k$, then, beginning from i there are models $\mathfrak{M}_n \models T$, $n > i$, such that the type p_k is realized in all $\mathfrak{M}_n$. If $t_{m_{\tau_i}} = q_k$, then, beginning from i there are models $\mathfrak{M}_n \models T$, $n > i$, such that the type q_k is omitted in all these models.

Therefore, by the Theorem 5 there is a countable model $\mathfrak{M}$, which will realize all the p_k and omit all the q_k. And all models corresponding to the different branches of the tree will be non-isomorphic since they differs in the collections of types. Thus, there are 2^ω countable non-isomorphic models. □

Corollary 3. *If there is a countable complete theory T with $I(T,\omega) = \omega_1$, then there is a finite diagram $D \in \Lambda$, such that $D = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{M}_i \in Mod(T)$, $i < \omega_1$.*

That is, there are at least ω_1 models of T with the same finite diagram D.
Proof. By the Theorem 6 we have

$$|\Lambda| > \omega \Rightarrow I(T,\omega) = 2^\omega.$$

Therefore,

$$I(T,\omega) < 2^\omega \Rightarrow |\Lambda| \leq \omega.$$

And so, we have $|\Lambda| \leq \omega$.

Suppose that the Corollary 3 is not true. Then, for any finite diagram D_i $\left|\{\mathfrak{A}_{/\cong} \mid \mathfrak{A} \models T, \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = D_i\}\right| \leq \omega$.

Therefore, $\mid \bigcup_{D_i \in \Lambda} \{\mathfrak{A}_{/\cong} \mid \mathfrak{A} \models T, \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = D_i\} \mid \ \leq \omega$, what contradicts to our assumption that $I(T,\omega) = \omega_1$. $\square$

It is obvious, that

Proposition 1. *If in a small countable theory T for any finite set of non-principal types $\{p_1(\bar{x_1}), \ldots, p_n(\bar{x_n}) | p_i \in S(T), n < \omega\}$, $(p_1 \cup p_2 \cup \ldots \cup p_n)(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ is a complete type, then $I(T,\omega) = 2^\omega$.*

Definition 12. *Let Γ be a locally consistent set of formulas, q be a type from $S(T)$. The set Γ is said to be almost orthogonal to the type q ($\Gamma \perp^a q$), if any extension of Γ is almost orthogonal to the type q.*

Proposition 2. *The types p and q are not almost orthogonal if and only if there exists a formula $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, such that for any model $\mathfrak{M} \models T$ realizing p, such that for any $\bar{\alpha} \in p(M)$*

$$\emptyset \neq \phi(\bar{\alpha}, M) \subset q(M).$$

Proof. Proof of the necessity is obvious.

We know that $\exists \bar{\alpha}\ \phi(\bar{\alpha}, M) \subset q(M) = \bigcap_{\theta \in q} \theta(M)$. Therefore, $\phi(\bar{\alpha}, M) \subset \theta(M)$ for all $\theta \in q$. We have $\mathfrak{M} \models \forall \bar{y}(\phi(\bar{\alpha}, \bar{y}) \rightarrow \theta(\bar{y}))$ for all $\theta \in q$.

Denote $\forall\bar{y}(\phi(\bar{\alpha},\bar{y}) \to \theta(\bar{y}))$ by $K_\theta(\bar{\alpha})$. $K_\theta(\bar{\alpha}) \in p$.

Let, for some $\mathfrak{M}' \models T$, $\bar{\alpha}' \in p(M')$. Therefore, $\mathfrak{M}' \models K_\theta(\bar{\alpha}')$. That is $\mathfrak{M}' \models \forall\bar{y}(\phi(\bar{\alpha},\bar{y}') \to \theta(\bar{y}))$ for all $\theta \in q$.

We have $\phi(\bar{\alpha}', M') \subset \theta(M')$ for all $\theta \in q$. Therefore, $\phi(\bar{\alpha}', M') \subset \bigcap_{\theta\in q}\theta(M') = q(M')$. □

Proposition 3. *If p and q are two types from $S(T)$, such that $p \not\perp^a q$. Then, if some model $\mathfrak{M} \models T$ realize the type p, then the type q is also realized in $\mathfrak{M}$.*

Proof. The Proposition states, that the realization of p in some model of T implies the realization of q in the same model. In other terms, p is powerful over q.

If the type p is realized in some model $\mathfrak{M} \models T$, then there is an element $\bar{\alpha} \in p(M)$. By the definition of an almost orthogonality, there is a formula $\phi(\bar{x},\bar{y})$, such that $\emptyset \neq \phi(\bar{\alpha}, M) \subset q(M)$, what means, that $q(M)$ is not empty, therefore q is realized in $\mathfrak{M}$. □

Theorem 7. *Let T be a small countable theory, and $\{r_i | i < \omega\}$ be a countable set of all non-principal types from $S(T)$, then*

(1) If for any $r_i \neq r_j$, $r_i \perp^a r_j$, then $I(T,\omega) \geq \omega$.

(2) If for any finite subset $\{r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}\}$ of $\{r_i\}$

$$(r_{i_1} \cup r_{i_2} \cup \ldots \cup r_{i_n}) \perp^a r_k,\ k < \omega,$$

then $I(T,\omega) = 2^\omega$.

Proof. (1) Take an arbitrary $n \in \mathbb{N}$. Since $r_n \perp^a r_i$, $\forall i \neq n$, $i < \omega$, realization of r_n does not imply realizations of r_i. Therefore, by the Theorem 5, there exists a model $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}$ realizing the only type r_n.

Since $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n \neq m$ impies $\mathfrak{M}_n \not\cong \mathfrak{M}_m$, there exists at least ω non-isomorphic models.

(2) Let τ be a countable sequence of 0's and 1's. Divide $\{r_i\}$ into two ordered sets, $\{p_i\}$ and $\{q_i\}$, such that $r_i = p_k$ if $\tau(i) = 0$ and $r_i = q_k$ if $\tau(i) = 1$.

For any $n \in \mathbb{N}$ take the finite parts of the sets $\{p_i\}$ and $\{q_i\}$: $\{p_1, \ldots, p_n\}$ and $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Take a prime model $\mathfrak{M}_n$ over any extension of $(p_1 \cup \ldots \cup p_n)$. Since $(p_1 \cup \ldots \cup p_n) \perp^a q_i$, $1 \leq i \leq n$, their realization does not imply realization of the types q_i, $1 \leq i \leq n$. Therefore, there the model $\mathfrak{M}_n$ will realize all p_i, and omit all q_i, $i \leq n$. Then, by the Theorem 5, there is a model $\mathfrak{M}$, realizing all p_i and omitting all q_i.

For any τ there is a model $\mathfrak{M}_\tau$ constructed by the method described. And all these models are not isomorphic, since they differs in at least one type. Therefore, $I(T, \omega) = 2^\omega$. $\square$

Theorem 8. *If the countable theory T is small, and $\{r_i \in S(T) | i < \omega\}$ is a countable set of all non-principal types such that $r_i \not\perp^a r_{i+1}$ and $r_{i+k} \perp^a r_i$, then the number of countable non-isomorphic models of T is at least countable, that is, $I(T, \omega) \geq \omega$.*

Proof. We will construct a model $\mathfrak{M}_n$ for every natural number n. If a model $\mathfrak{M}_i$ realize a type r_i, then by the Proposition 3 it realizes all the types r_j, $j > i$.

The model $\mathfrak{M}_1$ realize a type r_1 and, consequently, all the types r_i, $i < \omega$. In the model $\mathfrak{M}_i$, by the Omitting Types Theorem, the types r_j, $j < i$ are omitted, and, since $r_{l+k} \perp^a r_l$, the types r_j, $j \geq i$ are realized. $\square$

Conclusion

In this paper quasi-neighborhoods, neighborhoods, their properties and connection with each other are studied. And there given how neighborhoods can affect to the number of pairwise non-isomorphic models. Also we are going to describe how orthogonality of types connected with definability of quasi-neighborhoods (B. Baizhanov, N.Tazabekova).

We study the relations of weakly orthogonality and almost orthogonality of types and relation of them with the concept as the weakly and strongly convergence of formula to type (B.Baizhanov). In the theorem (Theorem 4) proved that some applied conditions with orthogonality save the property of non-homogeneity and keep the number of countable, non-isomorphic models (B. Baizhanov, A. Yershigeshova). We prove (Corollary 3) that if there is a counterexample to Vaught's conjecture then there is a diagram with ω_1 countable non-isomorphic models (B. Baizhanov, T. Zambarnaya).

The work was supported by grant 5125/GF 4 of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

References

1 Shelah S. Finite diagrams stable in power // Annals of Mathematical Logic. — 1970. — V. 2. — P. 69–118.

2 Vaught R.L. Denumerable models of complete theories // In Infinistic Methods. — 1959. — P. 303–321.

3 Baldwin J.T. and Lachlan A. On strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — P. 79–96.

4 Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 89. — P. 666–672.

5 Baizhanov B.S., Sudoplatov and V.V. Verbovskiy. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — V. 9. — P. 161–184.

6 Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. (In Russian) — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2014. — 356 p.

7 S. Shelah Classification theory and the number of non-isomorphic models // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — 1978. — V. 92. — 544 p.

8 Baizhanov. B.S. Classification of one-types in weakly o-minimal theories and its corollaries // Preprint. — 1996. — 32 p.

9 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // J. Symbolic Logic. — 2001. —V. 66. P. 1382–1414.

10 Baizhanov B.S. Definability of 1-types in weakly o-minimal theories // Siberian Advances in Mathematics. — 2006. — V. 16. — P. 1–33.

11 Baizhanov B. S. and Omarov B. On finite diagrams // Kazakh State University, Alma-Ata: Teorija reguljarnyh krivyh v razlichnyh geometricheskih prostranstvah. — 1979. — P. 11–15.

Received 24.02.15

Байжанов Б.С., Тазабекова Н.С., Ершигешова А.Д., Замбарная Т.С.
КІШІ ТЕОРИЯЛАРДАҒЫ ТИПТЕР

Осы мақалада квази-аймақтар, аймақтар, олардың қасиеттері және бір бірімен байланысы көрсетілген. Сонымен бірге типтердің ортогоналдығы мен квази-аймақтардың анықталымдығы арасындағы байланыс сипатталды.

Біз типтердің әлсіз ортогоналдық, ортогоналдық дерлік қатынастарын және олардың формуланың типке әлсіз және күшті жинақтылығы сияқты ұғымдармен байланысын зерттейміз. Төртінші теоремада ортогоналдығы бар кейбір қолданбалы шарттар біртексіздік қасиетін сақтайтыны, изоморфты емес және саналымды модельдердің санын бұрынғыша қалдыратыны дәлелденген. $\mathfrak{M}$ моделі үшін $D(\mathfrak{M})$ ақырғы диаграммасы деп $\mathfrak{M}$ жүзеге асырылатын $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ барлық типтердің жиыны аталады [1]. Воот гипотезасына қарсымысал бар болса, онда ω_1 изоморфты емес саналымды модельдері бар ақырғы диаграмма бар болатыны дәлелденген.

Байжанов Б.С., Тазабекова Н.С., Ершигешова А.Д., Замбарная Т.С.
ТИПЫ В МАЛЫХ ТЕОРИЯХ

В работе рассматриваются квази-окрестности, окрестности, их свойства и связь между ними. Также описывается связь между ортогональностью типов и определимостью квази-окрестностей.

Мы рассмотрим отношения слабой и почти ортогональности типов и их связь с такими понятиями, как слабая и сильная сходимость формулы к типу. В теореме 4 доказывается, что некоторые прикладные условия с ортогональностью сохраняют свойство неоднородности и оставляют прежним число счётных неизоморфных моделей. Для модели $\mathfrak{M}$ теории T, конечной диаграммой $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$, всех типов, реализующихся в $\mathfrak{M}$ [1]. Доказывается, что если существует контрпример к гипотезе Воота, тогда существует конечная диаграмма с ω_1 счётными неизоморфными моделями.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 1 (55). С.57–76*

УДК (510.52 + .58) + 519.682.1

И.В. Латкин

Восточно-Казахстанский государственный технический университет
070010, Усть-Каменогорск, ул. Протозанова, 69, e-mail: lativan@yandex.ru

СОВПАДЕНИЕ КЛАССОВ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ АЛГОРИТМАМИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ РАБОТЫ И С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ПАМЯТЬ

На основе моделирования длинных по времени вычислений относительно короткими формулами двухэлементной булевой алгебры доказывается полиномиальная сводимость всякого языка, распознаваемого за экспоненциальное время на детерминированных машинах Тьюринга, к языку таких формул. С другой стороны, известно, что язык булевых формул с кванторами является полиномиально полным в классе языков, распознаваемых с полиномиальной памятью на этих машинах. Это позволяет доказать равенство классов, упомянутых в названии работы.
Ключевые слова: *моделирование формулами, полиномиальная сводимость, экспоненциальные временные вычисления, вычисления с полиномиальной памятью.*

Введение

В 1973 г. Стокмейер и Мейер доказали [1], что теория $Th(\mathcal{B})$ двухэлементной булевой алгебры $\mathcal{B}$ (в [2] это — язык БФК — язык булевых формул с кванторами) полиномиально полна в классе $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-*space*, т.е. в классе языков,

Keywords: *simulation by formulae, polynomial reduction, exponential time computations, polynomial space computations*
2010 Mathematics Subject Classification: 03D15, 68Q15

распознаваемых с полиномиально ограниченной памятью на детерминированных машинах Тьюринга. Это, в частности, означает, что для всякого языка этого класса имеется алгоритм, который за полиномиальное время от длины входа даёт формулу теории $Th(\mathcal{B})$, моделирующую вычисления, ограниченные по ёмкости данным многочленом. При этом симулируются достаточно длительные вычисления, так как полиномиальное ограничение на память позволяет машине работать экспоненциальное время [2, 3].

Для реализации этого моделирования при доказательстве теоремы 4.3 в [1] Стокмейер и Мейер применили весьма остроумный приём. Он позволяет написать формулу полиномиально ограниченной длины для симуляции экспоненциального количества шагов машины Тьюринга при условии, что один её шаг описывается формулой полиномиальной длины. Один шаг работы машины моделируется в [1] по методу Кука — выполнимой формулой исчисления высказываний, подобно тому как в [4] описываются действия недетерминированных машин Тьюринга за полиномиальное время при доказательстве $\mathcal{NP}$-полноты задачи о выполнимости.

Мы применим это красивое построение из [1], но моделировать шаги работы машины будем более сложными формулами теории $Th(\mathcal{B})$, имеющими смену кванторов. Это усложнение вызвано тем, что описание работы машины по методу Кука — очень длинное, оно гораздо больше, чем длина той части ленты, где производятся вычисления. Действительно, в формуле Кука имеется подформула из одной пропозициональной переменной $C_{i,j,t}$, которая принимает значение «истинно», если i-я ячейка в момент времени t содержит символ рабочего алфавита X_j (см., например, доказательство теоремы 10.3 в [3]). Однако такой простой факт, что в какой-то момент t начальный кусок ленты длины $L+1$ содержит только символы X_0, кодируется формулой, содержащей фрагмент длины $2L+1$ без учёта длины индексов: $C_{0,0,t} \wedge C_{1,0,t} \wedge \ldots \wedge C_{L,0,t}$. Сократить эту запись нет возможности, даже используя квантор всеобщности, так как его нельзя применить к индексам, оставаясь в рамках теории первого порядка. Таким образом, для описания работы машины на полосе экспоненциальной ширины требуется формула Кука также экспоненциальной длины.

Выход был найден в [5]: там предложено кодировать двоичную запись номера ячейки набором значений специальных переменных $x_{t,0}, \ldots, x_{t,m}$, где $m + 1 \geqslant \log_2 L$ (см. п. 2.2 и 5.2). Это позволяет описать один шаг работы машины с экспоненциальной ёмкостной сложностью формулой полиномиальной длины. Основная идея такого сокращения заключается в том, что начальная конфигурация и условие окончания работы являются полиномиально короткими, и при экспоненциально широкой полосе всего вычисления на каждом его шаге меняется всего лишь одна клетка ленты.

В итоге получается, что теория $Th(\mathcal{B})$ полиномиально полна в классе $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$, т.е. в классе языков, которые распознаются детерминированными машинами Тьюринга за экспоненциальное время от длины входа n, точнее за время, не превосходящее $\exp(2, f(n))$, где f есть многочлен, фиксированный для данного распознаваемого языка. Тем самым устанавливается равенство классов $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-*space* и $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ на основании того, что все языки обоих классов полиномиально сводятся к языку БФК.

В то же время, конструкция моделирующих формул из заметки [5] будет заметно изменена для возможности воспользоваться модифицированным методом из [1] и избежать трудностей, возникающих при попытках полного обоснования адекватности предложенного в [5] способа симуляции экспоненциального времени работы машины, и поэтому в п. 2.2–3.2 эти формулы описываются независимым от работы [5] способом.

Заметим, что метод построения формул Кука создавался для описания работы недетерминированных машин Тьюринга, но пригодна для этого и конструкция теоремы 4.3 в [1]. А описываемое ниже моделирование для этих целей приспособить пока не удалось.

1 Необходимые соглашения и формулировка результата

В этом разделе в явном виде оговариваются ограничения на используемые машины Тьюринга, особенности их работы, способ записи их команд и формул теории булевых алгебр. Эти соглашения являются важными деталями при доказательстве основной теоремы 1, хотя ценой усложнения доказательства любое из этих ограничений можно опустить.

1.1 О машинах Тьюринга и записи булевых формул. Всюду далее рассматриваются только детерминированные машины с фиксированным рабочим алфавитом без дополнительных оговорок. Считается, что моделируемые машины имеют лишь одну рабочую ленту, так как переделка программы многоленточной машины в одноленточный вариант осуществима за полиномиальное время от длины программы; и время работы машины при этом возрастает тоже полиномиально [2, 3].

Лента машины бесконечна только вправо, именно в этом виде машины часто и рассматриваются [1]–[4]. Кроме того, такие машины позволяют моделировать полиномиальные вычисления на машинах с двухсторонней лентой за полиномиальное время. Обоснование этого проще того, что делается в случае перехода от двухленточной машины к одноленточной.

Команды машин Тьюринга — однотактные, т.е. имеют вид $q_i\alpha \to q_j\beta$, а не двухтактные $q_i\alpha \to q_j\beta\gamma$, где $\alpha \in A$, $\beta, \gamma \in A \cup \{R, L\}$ и A — рабочий алфавит. Если даже считать исполнение двухтактной команды за один шаг, то разница во времени работы получается линейной.

Машина начинает работу во внутреннем состоянии q_1, и если она распознаёт вход, то приходит либо в допускающее состояние — $q_0 = q_{yes}$, либо в отвергающее — $q_2 = q_{no}$.

Машины Тьюринга не попадают в ситуацию, когда машина остановилась, но ответ её не определён. А именно, они не пытаются выйти за левый край ленты и не содержат висячих внутренних состояний q_j, для которых $j \neq 0, 2$ и есть команды с концом $\ldots \to q_j\beta$, но нет команд с началом $q_j\alpha \to \ldots$ хотя бы для одного $\alpha \in A$. Попытки выйти за левый край ленты блокируются введением дополнительного символа $*$, которым помечается левый край ленты, и заменой команд $q_i* \to q_kL$ на $q_i* \to q_i*$. Висячие внутренние состояния ликвидируются дописыванием команд $q_j\alpha \to q_j\alpha$.

Для того, чтобы иметь возможность применять в формулах константы, далее используются исключительно формулы теории $Th(\mathcal{B})$, а не языка БФК. Хотя формальный переход между этими языками прост: если x — формула БФК из одной пропозициональной переменной, то $x = 1$ — соответствующая ей формула $Th(\mathcal{B})$ с предметной переменной x, и обратный переход почти так же прост.

Для формул теории $Th(\mathcal{B})$ зафиксируем следующий алфавит: а) сигнатурные символы $\cap, \cup, C, 0, 1$ и знак равенства $\approx$; б) латинские буквы — для указания видов предметных переменных; в) арабские цифры и запятая — для записи индексов; г) логические связки $\neg, \wedge, \vee, \to$; д) знаки кванторов $\forall, \exists$; е) вспомогательные символы: (,).

Приоритет связок и операций или его отсутствие не имеет значения, так как разница в длине формул в этих случаях получается линейной.

Программы одноленточных машин Тьюринга с рабочим алфавитом A

считаются записанными символами этого алфавита, а также, с использованием символов $q, R, L, \rightarrow$, арабских цифр и запятой.

1.2 Основная теорема и её следствие.

Теорема 1. *Любой язык класса* $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ *полиномиально трансформируется к языку формул теории двухэлементной булевой алгебры* $\mathcal{B}$*.*

Доказательство теоремы 1 описывается в разделах 2–5.

Следствие 1. *Классы* $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*-space и* $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ *совпадают.*

Доказательство. Известно, что класс $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ содержит в себе класс $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*-space* [2, 3]. Согласно теореме 1 всякий язык класса $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ полиномиально сводится к языку формул теории $Th(\mathcal{B})$, а этот язык — полиномиально полный в классе $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*-space* по упомянутой выше теореме Стокмейера–Мейера [1, 2] и ввиду отмеченной выше эквивалентности его языку БФК. Это означает, в частности, принадлежность языка $Th(\mathcal{B})$ классу $\boldsymbol{\mathcal{P}}$*-space*. Таким образом, установлено обратное включение $\boldsymbol{\mathcal{EXP}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}$*-space*. □

2 Начало доказательства теоремы 1

Пусть язык L лежит в классе $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$. По определению это означает, что имеется машина с программой P_L, время работы которой на входе X ограничено величиной $\exp(2, m_L(|X|))$ для некоторого многочлена m_L, и эта машина допускает вход тогда и только тогда, когда он принадлежит L. Здесь и всюду далее $|M|$ означает длину объекта M.

Для доказательства теоремы 1 достаточно полиномиально трансформировать этот произвольно выбранный язык L к языку формул, т.е. промоделировать работу одной машины P_L за экспоненциальное время. Однако мы в состоянии доказать большее, а именно, будет описан алгоритм, который для каждого многочлена m по любой программе P машины Тьюринга и всякому входу X строит замкнутую формулу (предложение) $\Omega_m(X, P)$ сигнатуры булевой алгебры $\mathcal{B}$, обладающую свойствами:

(а) существует такой многочлен g_m*, что для всех* X *и* P *формула* $\Omega_m(X, P)$ *строится за время, не превосходящее* $g_m(|X|, |P|)$*;*

(б) если $\mathcal{B} \models \Omega_m(X, P)$*, то машина Тьюринга с программой* P *допускает вход* X *не более, чем за* $\exp(2, m(|X|))$ *шагов, а когда* $\mathcal{B} \models \neg\Omega_m(X, P)$*, эта машина отвергает вход* X *или делает более* $\exp(2, m(|X|))$ *шагов.*

Таким образом, фактически будет доказана полиномиальная сводимость языков *проблемы допускания в отведённое время*, а именно, языков

$$AK_m \rightleftharpoons \{\langle X, P\rangle \mid \textit{машина Тьюринга с программой } P \textit{ допускает цепочку } X \textit{ в пределах времени } \exp(2, m(|X|))\}$$

к языку булевых формул. Название и обозначение этих языков специально выбраны так, чтобы подчеркнуть их сходство со знаменитым множеством проблемы остановки — K.

Сначала мы построим очень длинные формулы, моделирующие вычисления и имеющие огромное количество «лишних» переменных, и только после того как убедимся в адекватности этого моделирования (предложение 3(В) ниже), позаботимся о короткой записи построенных формул, что будет гарантировать полиномиальность построения этих формул.

Перед построением формулы $\Omega_m(X, P)$ к программе P дописываются команды *холостого хода* вида $q_k\alpha \to q_k\alpha$, где $k \in \{0(yes), 2(no)\}$, $\alpha \in A$, выполняя которые, машина не меняет конфигурацию на ленте.

2.1 Дополнительные соглашения. Для лучшего восприятия вводятся следующие сокращения:
1) кроме обычных скобок в длинных формулах применяются квадратные и фигурные; 2) считается, что $\cap$ и $\wedge$ $(\&)$ связывают сильнее, чем $\cup$ и $\vee, \to$; 3) $x<y \rightleftharpoons x\approx 0 \wedge y\approx 1$; 4) $(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)<(\beta_0, \ldots, \beta_m)$ — сравнение наборов в лексикографическом порядке: $\alpha_0<\beta_0 \vee \{\alpha_0\approx\beta_0 \wedge [\alpha_1<\beta_1 \vee (\alpha_1\approx \beta_1 \wedge (\alpha_2<\beta_2 \vee (\alpha_2\approx\beta_2 \wedge (\alpha_3<\beta_3\ldots))))]\}$.

Упорядоченный набор фиксированной длины $(x_0, \ldots, x_m)$ обозначается как $\widehat{x}$. Естественно, что «формула» $\widehat{x}\approx\widehat{\alpha}$ обозначает систему равенств: $x_0\approx\alpha_0\wedge\ldots\wedge x_m\approx\alpha_m$. Наборы переменных с двумя индексами будут встречаться только в таком виде, когда первый индекс фиксирован, например, $(u_{k,0}, \ldots, u_{k,m})$, такой набор обозначается как $\widehat{u}_k$.

При подсчёте длины формулы применяется правило: длина набора $\widehat{x}$ равна $m+1$ плюс M — количество символов, участвующих в записи индексов $0, \ldots, m$. А $|\widehat{x}\approx\widehat{\alpha}| \leqslant M+3m+3$, если набор $\widehat{\alpha}$ состоит из констант, а если это — набор переменных, то $|\widehat{x}\approx\widehat{\alpha}| \leqslant 2M+3m+3$.

Известно, что если $(\widehat{\gamma})_2 = (\gamma_0, \ldots, \gamma_m)_2$ — двоичная запись натурального числа $t < \exp(2, m)$, то числа $t+1$ и $t-1$ выражаются в виде $(\widehat{\gamma})_2+1 \rightleftharpoons (\gamma_0\oplus \gamma_1\cdot\ldots\cdot \gamma_{m-1}\cdot \gamma_m,\ \ldots,\ \gamma_{m-2}\oplus \gamma_{m-1}\cdot \gamma_m,\ \gamma_{m-1}\oplus \gamma_m,\ \gamma_m\oplus 1)_2$ и

$(\widehat{\gamma})_2-1 \rightleftharpoons (\gamma_0\oplus C\gamma_1\cdot\ldots\cdot C\gamma_{m-1}\cdot C\gamma_m,\ \ldots,\ \gamma_{m-2}\oplus C\gamma_{m-1}\cdot C\gamma_m,\ \gamma_{m-1}\oplus C\gamma_m,$ $\gamma_m\oplus 1)_2$, соответственно, где операция $\cap$ записана как умножение: $x\cdot y \rightleftharpoons x\cap y$; и $x\oplus y \rightleftharpoons x\cdot Cy\cup Cx\cdot y$. Немного в другом виде запись подобных формул содержится в [6] — пример 4 в § 2 главы 1.

Двоичная запись натурального числа t обозначается как $(t)_2$.

2.2 Основные и вспомогательные переменные. Для моделирования работы машины Тьюринга P на входе X за первые $T=\exp(2,m|X|)$ шагов достаточно описать её действия на полосе шириной в T клеток. Ввиду этого номера ячеек на ленте кодируются посредством наборов из переменных вида «икс»: $\widehat{x}_t=(x_{t,0},\ldots,x_{t,m})$ длины $m+1=m(|X|)+1$. Первый индекс t (*цвет*) обозначает номер шага, после которого возникла рассматриваемая конфигурация на ленте. Таким образом, формула $\widehat{x}_t\approx\widehat{\alpha} \rightleftharpoons x_{t,0}\approx\alpha_0\ldots x_{t,m}\approx\alpha_m$ задаёт номер $(\widehat{\alpha})_2$ в двоичной системе счисления нужной ячейки в момент времени t.

Число r подбирается настолько большим, чтобы в двоичной системе счисления можно было записать все номера внутренних состояний машины P, используя r символов 0 и 1, и при этом закодировать такими же наборами все символы алфавита A, т.е. если $\beta\in A$, то $c\beta \rightleftharpoons (c\beta_0,\ldots,c\beta_{r-1})$ — набор нулей и единиц длины r, кодирующий β.

Запись в какой-то ячейке символа ε после шага t обозначается формулой $\widehat{f_t}\approx c\varepsilon$, где $\widehat{f_t}$ — набор переменных длины r. А отдельной ячейке с номером, двоичная запись которого $(\widehat{\mu})_2$, когда в ней после шага t записан символ ε, сопоставляется *квазиуравнение* (*или клауза*) цвета t:

$$\psi_t(\widehat{\mu}\to\varepsilon) \ \rightleftharpoons\ \widehat{x}_t\approx\widehat{\mu}\to\widehat{f_t}\approx c\varepsilon \ \rightleftharpoons\ (x_{t,0}\approx\mu_0\wedge\ldots\wedge x_{t,m}\approx\mu_m)\to$$
$$\to(f_{t,0}\approx c\varepsilon_0\wedge\ldots\wedge f_{t,r-1}\approx c\varepsilon_{r-1}).$$

Наборы из переменных $\widehat{q_t}$ длины r употребляются для указания номеров внутренних состояний машины; а наборы $\widehat{d_t}$ — для записи кодов символов, стоящих в обозреваемой головкой клетке, в данный момент t. Номер $i=(\widehat{\delta})_2$ внутреннего состояния q_i и обозреваемый головкой символ α вместе с номером $(\widehat{\xi})_2$ той клетки, где он стоит, представляется для шага t в виде одной π-*формулы* цвета t:

$$\pi_t(\alpha,(i)_2,\widehat{\xi}) \ \rightleftharpoons\ \widehat{d_t}\approx c\alpha\wedge\widehat{q_t}\approx\widehat{\delta}\wedge\widehat{z_t}\approx\widehat{\xi} \ \rightleftharpoons\ (d_{t,0}\approx c\alpha_0\wedge\ldots\wedge$$
$$\wedge d_{t,r-1}\approx c\alpha_{r-1})\wedge(q_{t,0}\approx\delta_0\wedge\ldots\wedge q_{t,r-1}\approx\delta_{r-1})\wedge(z_{t,0}\approx\xi_0\wedge\ldots\wedge z_{t,m}\approx\xi_m).$$

В целом эта формула — условие на применимость команды $q_i\alpha \to \ldots$ или, иными словами, *таймер* для запуска именно этой команды, когда головка наведена на ячейку с номером $(\widehat{\xi})_2$.

Основные переменные $\widehat{x}, \widehat{z_j}$ и $\widehat{q_t}, \widehat{f_t}, \widehat{d_t}$ введены с большим избытком для облегчения доказательства, но в итоговые моделирующие формулы войдут только те из них, у которых $t=0$ или $t=T \rightleftharpoons \exp(2,m)$. Наборы основных переменных имеют разную длину, но это не приведёт к путанице, так как у наборов из «иксов» и «зетов» длина всегда будет $m+1$, а у наборов из «кю», «эф» и «дэ» — r. Наборы констант или других переменных могут быть тоже разной длины, но такой набор будет всегда однозначно привязан к одному из этих.

Остальные переменные — вспомогательные, они описываются по мере их появления. Их задача — однозначно определить значения основных переменных цвета $t+1$, при условии, что ведущие переменные цвета t имели «правильные» значения. Причём эта передача должна адекватно соответствовать той команде $M(k)$, которая применяется на шаге $t+1$.

Лемма 1. *(A) Без учёта индексов клаузы вида $\psi_t(\widehat{u} \to \beta)$ имеют длину не более, чем $4m+4r+10$; а таймеры (π-формулы) — не более чем $4m+8r+12$.*

(B) $|(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) < (\beta_0, \ldots, \beta_m)| \leqslant 10 \cdot \max\{|(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)|, |(\beta_0, \ldots, \beta_m)|\}$.

(C) Если набор $(t)_2$ имеет длину порядка a вместе с индексами, то двоичная запись чисел $t\pm1$ требует формулы длины порядка a^2.

Доказательство. (A,B) В запись таких квазиуравнений входит по $m+1$ переменных вида x и u; r переменных вида f и констант из набора $c\beta$; $m+r+1$ конъюнкций и столько же символов равенства и одна импликация. Аналогично считается длина π-формул и неравенства $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta}$.

(C) Согласно формулам п. 2.1 в двоичной записи чисел $t\pm1$ имеется столько же разрядов, что и в $(t)_2$ — $m+1$, и $m+1<a$, но первый слева разряд содержит терм длины порядка a, остальные разряды — короче. □

3 Формулы, описывающие действия машины

По программе P построим вначале формулу $\Phi^{(0)}(P)$, которая описывает один шаг работы машины при применении её к конфигурации, возникшей на каком-то шаге t. Затем опишем формулами действия машины за экспоненциальное время, модифицируя метод из [1].

3.1 Описание действия команд. Для описания работы на шаге $t{+}1$ команды $M(k)=q_i\alpha\to q_j\beta$ с номером k, где $\alpha\in A$, $\beta\in A\cup\{R,L\}$ (в том числе и команд холостого хода из начала раздела 2), применяется следующая формула $\varphi_t(k)$ со свободными основными переменными $\widehat{x}_t, \widehat{q}_t, \widehat{z}_t, \widehat{d}_t, \widehat{f}_t, \widehat{x}_{t+1}, \widehat{q}_{t+1}, \widehat{z}_{t+1}, \widehat{d}_{t+1}$ и $\widehat{f}_{t+1}$:

$$\varphi_t(k) \ \rightleftharpoons\ \forall\,\widehat{u}\ \big\{\pi_t(\alpha,(i)_2,\widehat{u})\ \to\ \big[\Delta^{коп}(\widehat{u})\ \&$$
$$\&\quad \forall\,\widehat{h}\{\Gamma^{иск}(\beta)\ \to\ [\Delta^{зап}(k,\beta)\ \&\ \pi_{t+1}(\widehat{h},(j)_2,\widehat{u}(\beta))]\}\big]\big\}.$$

Первая π-формула цвета t играет роль таймера и «запускает» выполнение команды с началом $q_i\alpha\to\ldots$ при условии, что головка осматривает клетку с номером $(\widehat{u})_2$. Номер ячейки, которую будет обозревать головка после выполнения команды $M(k)$, определяется по метасимволу $\beta\in\{R,L\}\cup A$ и набору $\widehat{u}$ следующим образом: $\widehat{u}(R)\rightleftharpoons(\widehat{u})_2{+}1$, $\widehat{u}(L)\rightleftharpoons(\widehat{u})_2{-}1$ и при $\beta\in A$ $\widehat{u}(\beta)\rightleftharpoons\widehat{u}$.

Формула $\Gamma^{иск}(\beta)$ ищет тот символ $\widehat{h}$, на который будет наведена головка после выполнения команды: а) при $\beta\in\{R,L\}$ эта формула «находит» тот символ, что записан справа или слева от обозреваемой ячейки в момент t: $\Gamma^{иск}(\beta)\ \rightleftharpoons\ \widehat{x}_t\approx\widehat{u}(\beta)\to\widehat{f}_t\approx\widehat{h}\ =\ \psi_t(\widehat{u}(\beta)\to\widehat{h})$; б) а при $\beta\in A$ искать ничего не нужно: $\Gamma^{иск}(\beta)\rightleftharpoons\widehat{h}\approx c\beta$.

Формула $\Delta^{коп}(\widehat{u})$ меняет цвет записи в ячейках, отличных от $(\widehat{u})_2$:

$$\Delta^{коп}(\widehat{u})\rightleftharpoons\forall\,\widehat{w}\,\exists\,\widehat{g}_k\{\neg\widehat{w}\approx\widehat{u}\to[\psi_t(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)\wedge\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)]\}.$$

Формула $\Delta^{зап}(k,\beta)$ при $\beta\in A$ ставит символ β цвета $t{+}1$ в клетку $(\widehat{u})_2$: $\Delta^{зап}(k,\beta)\ \rightleftharpoons\ \psi_{t+1}(\widehat{u}\to\beta)$; а при $\beta\in\{R,L\}$ она ставит туда α (тоже цвета $t{+}1$): $\Delta^{зап}(k,\beta)\rightleftharpoons\psi_{t+1}(\widehat{u}\to\alpha)$.

Вторая π-формула, цвета $t+1$, наводит головку на ячейку с номером $(\widehat{u}(\beta))_2$, а внутреннее состояние машины меняет на j.

Лемма 2. *(A) При $\beta\in A$ формулы $\Gamma^{иск}(\beta)$, $\pi_{t+1}(\widehat{h},(j)_2,\widehat{u}(\beta))$ и $\varphi_t(k)$ имеет длину порядка $O(|\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)|)$.*

(B) При $\beta\in\{R,L\}$ длины этих формул — порядка $O(m\cdot|\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)|)$.

Доказательство. (A) Согласно лемме 1(A) длина таймеров цвета t (тех, что входят в запись формул $\varphi_t(k)$ первыми) имеет тот же порядок, что и длина клаузы вида $\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)$, если не считать длину индексов. С учётом длины индексов длина обоих формул возрастает в число раз, не превосходящее величину, пропорциональную $\max\{\lceil\lg m\rceil+\lceil\lg(t+1)\rceil, \lceil\lg(r-1)\rceil+\lceil\lg(t+1)\rceil, \lceil\lg(r-1)\rceil+\lceil\lg k\rceil\}$. Остальные фрагменты формулы $\varphi_t(k)$ в этом случае имеют длину того же порядка или они короче, чем $|\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)|$, поэтому и вся формула $\varphi_t(k)$ имеет тот же порядок длины.

(B) В этом случае заключительные π-формулы (цвета $t+1$) в записи $\varphi_t(k)$ и квазиуравнение из $\Gamma^{иск}(\beta)$ значительно длиннее оцененных выше, так как в них входят равенства вида $\widehat{z}_{t+1}\approx(\widehat{u})_2\pm 1$ и $\widehat{x}_t\approx(\widehat{u})_2\pm 1$. Поэтому на основании леммы 1(C) длина таких таймеров и клауз имеет верхней оценкой величину $O(m\cdot|\psi_{t+1}(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)|)$. Остальные компоненты у $\varphi_t(k)$ значительно короче. $\square$

3.2 Описание одного шага работы. Пусть N — число команд машины P вместе с добавленными холостого хода из начала раздела 2, вся формула $\Phi^{(0)}(P)$ имеет вид:

$$\Phi^{(0)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+1}) \rightleftharpoons \bigwedge_{0<k\leqslant N}\varphi_t(k)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+1}),$$

где $\widehat{y}_t \rightleftharpoons \langle\widehat{x}_t,\widehat{q}_t,\widehat{z}_t,\widehat{d}_t,\widehat{f}_t\rangle$, $\widehat{y}_{t+1} \rightleftharpoons \langle\widehat{x}_{t+1},\widehat{q}_{t+1},\widehat{z}_{t+1},\widehat{d}_{t+1},\widehat{f}_{t+1}\rangle$ — два кортежа длины $2m+3r+2$ из свободных переменных этой формулы.

Обозначим через $\langle\Phi\rangle$ бескванторную часть (матрицу) формулы Φ.

Лемма 3. *(A) При $\widehat{x}_t\neq\widehat{\mu}$ клауза $\psi_t(\widehat{\mu}\to\varepsilon)$ истинна независимо от значения $\widehat{f}_t$. В частности, при $\widehat{x}_t\neq\widehat{w}$ или $\widehat{x}_{t+1}\neq\widehat{w}$ истинно квазиуравнение соответствующего цвета, входящее в запись $\langle\Delta^{кон}(\widehat{u})\rangle$.*

(B) При подходящей константе D_1 $|\Phi^{(0)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+1})|\leqslant D_1\cdot|P|\cdot|\varphi_t(N)|$.

Доказательство. (A) В этих случаях в клаузах ложны посылки.

(B) Считая, что количество команд в программе P, число $N-2$, — не нулевое, очевидным образом имеем $N\cdot\lceil\lg N\rceil<D_1\cdot|P|$, и поэтому верна оценка, приведённая в формулировке леммы. $\square$

3.3 Описание экспоненциального числа шагов машины и конфигураций. Действиям машины P за $e(s)=\exp(2,s)$ шагов сопоставляются формулы $\Phi^{(s+1)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$, определённые по индукции:

$$\exists\widehat{v}\,\forall\widehat{a}\,\forall\widehat{b}\,\big\{\big[(\widehat{y}_t\approx\widehat{a}\ \wedge\ \widehat{v}\approx\widehat{b})\ \vee\ (\widehat{v}\approx\widehat{a}\ \wedge\ \widehat{b}\approx\widehat{y}_{t+e(s+1)})\big]\ \to\ \Phi^{(s)}(P)(\widehat{a},\widehat{b})\big\},$$

где $\widehat{v}, \widehat{a}, \widehat{b}$ — наборы новых вспомогательных переменных.

Утверждение о том, что после шага t на ленте рассматриваемой машины записана некая конфигурация L (может быть и не реальная), когда на ленте в ячейках с номерами $(\widehat{\mu})_2$ стоят символы $\varepsilon(\widehat{\mu})$, обозревается клетка с номером $(\widehat{\eta})_2$, и механизм готов исполнить команду $q_i\alpha \to \ldots$, кодируется следующей формулой цвета t (напомним, что $T = \exp(2, m)$):

$$\Psi L(t)(\widehat{y}_t) \rightleftharpoons \pi_t(\alpha, (i)_2, \widehat{\eta}) \ \& \bigwedge_{0 \leqslant (\widehat{\mu})_2 \leqslant T} \psi_t(\widehat{\mu} \to \varepsilon(\widehat{\mu})),$$

с $2(m+1)+3r$ свободными переменными $\widehat{y}_t = \langle \widehat{x}_t, \widehat{q}_t, \widehat{z}_t, d_t, f_t \rangle$.

4 Моделирование одного шага работы

Построенные до этого формулы были просто сопоставлены определённым частям программы или некоторым процессам, а утверждать, что они что-то моделируют, т.е. становятся истинными или ложными в зависимости от реальности описываемого явления, было нельзя.

4.1 Однозначность моделирования

Предложение 1. *(A) Пусть конфигурация $K(t+1)$ возникла из конфигурации $K(t)$ в результате действий машины P. Тогда имеются такие особые значения переменных $\widehat{y}_t$, что $\Psi K(t)(\widehat{y}_t)$ истинна, и при любых значениях переменных $\widehat{y}_{t+1}$ истинность формулы $\Phi^{(0)}(P)(\widehat{y}_t, \widehat{y}_{t+1})$ следует из истинности $\Psi K(t+1)(\widehat{y}_{t+1})$.*

(B) Если формула

$$\Omega^{(0)}(X, P)(\widehat{y}_t, \widehat{y}_{t+1}) \rightleftharpoons [\Psi K(t)(\widehat{y}_t) \ \& \ \Phi^{(0)}(P)(\widehat{y}_t, \widehat{y}_{t+1})] \to \Psi K(t+1)(\widehat{y}_{t+1})$$

тождественно истинна на алгебре $\mathcal{B}$, то машина P на шаге $t+1$ перерабатывает конфигурацию $K(t)$ в $K(t+1)$.

Доказательство. Докажем оба утверждения параллельно: подберём такие значения свободных переменных формулы $\Omega^{(0)}(X, P)(\widehat{y}_t, \widehat{y}_{t+1})$, что формула $\Upsilon_{t+1} \rightleftharpoons [\Psi K(t) \,\&\, \Phi^{(0)}(P)] \to \Psi L(t+1)$ станет ложной, если конфигурация $L(t+1)$ отлична от реально возникшей $K(t+1)$ на шаге $t+1$. Тем самым мы докажем пункт (B) предложения. Но вначале будем выбирать значения для переменных из набора $\widehat{y}_t$, а затем, подбирая значения для соответствующих переменных цвета $t+1$, увидим, что формулы $\Phi^{(0)}(P)(\widehat{y}_t, \widehat{y}_{t+1})$

и $\Psi K(t+1)(\widehat{y}_{t+1})$ становятся одновременно истинными или ложными в зависимости от выбранных значений переменных.

При значениях переменных $\widehat{d_t}=c\alpha$, $\widehat{q_t}=(i)_2$, $\widehat{z}_t=\widehat{\eta}$, где $(\widehat{\eta})_2$ — номер той ячейки, а α — это тот символ, который осматривается головкой до исполнения команды $M(k)=q_i\alpha\to\ldots$, применимой к конфигурации $K(t)$, истинна π-формула $\pi_t(\alpha,(i)_2,\widehat{\eta})$, входящая в запись $\Psi K(t)$. Рассмотрим формулу $\varphi_t(l)$, соответствующую какой-то команде $M(l)=q_b\theta\to\ldots$. Эта формула содержит в качестве посылки таймер $\pi_t(\theta,(b)_2,\widehat{u})$, который при выбранных значениях переменных $\widehat{d_t},\widehat{q_t}$ и $\widehat{z}_t$ имеет вид $c\alpha\approx c\theta\wedge(i)_2\approx(b)_2\wedge\widehat{\eta}\approx\widehat{u}$. Очевидно, что если $\alpha\neq\theta$ или $i\neq b$, или $\widehat{u}\neq\widehat{\eta}$, то эта π-формула — ложна, а вся $\varphi_t(l)$ — истинна.

Итак, пусть $\varphi_t(k)$ соответствует команде $M(k)=q_i\alpha\to q_j\beta$, а $\widehat{u}=\widehat{\eta}$. Положим $\widehat{d}_{t+1}=c\lambda$, $\widehat{q}_{t+1}=(j)_2$, $\widehat{z}_{t+1}=\widehat{\eta}(\beta)$, где $(\widehat{\eta}(\beta))_2$ — это номер клетки, которую будет обозревать головка машина, а λ — тот символ, который она там увидит после выполнения команды $M(k)$. При этих $\widehat{u}$ и выбранных значениях $\widehat{d}_{t+1},\ \widehat{q}_{t+1},\widehat{z}_{t+1}$ π-формула $\pi_{t+1}(\lambda,(j)_2,\widehat{\eta}(\beta)$, входящая в запись $\Psi K(t+1)$, становится истинной, а в $\pi_{t+1}(\widehat{h}_k,(j)_2,\widehat{u}(\beta))$, стоящей в заключении у $\varphi_t(k)$, сомнение вызывает лишь равенство $\widehat{d}_{t+1}\approx\widehat{h}_k$.

Определим $\widehat{x}_t=\widehat{\eta}(\beta)$, так как $\widehat{u}=\widehat{\eta}$, у матрицы $\langle\Delta^{кон}(\widehat{u})\rangle$ по лемме 3(A) истинно квазиуравнение цвета t при всех $\widehat{w}\neq\widehat{\eta},\widehat{\eta}(\beta)$, а в $\Psi K(t)$ неясна лишь клауза $\psi_t(\widehat{\eta}(\beta)\to\lambda)$ при $\beta\in\{R,L\}$ или $\psi_t(\widehat{\eta}\to\alpha)$ при ином β. Положив теперь $\widehat{f_t}$ и $\widehat{g}_k$ равными $c\lambda$, когда $\beta\in\{R,L\}$, и равными $c\alpha$ в противном случае, получаем истинность всех допустимых квазиуравнений цвета t у $\langle\Delta^{кон}(\widehat{u})\rangle$, а также спорной клаузы в $\Psi K(t)$, поскольку у них становятся истинными и посылки, и заключения.

При $\widehat{h}\neq c\lambda$ ложна формула $\Gamma^{иск}(\beta)$, равная $\psi_t(\widehat{\eta}(\beta)\to\widehat{h})$ при $\beta\in\{R,L\}$, или $\widehat{h}\approx c\beta$ при $\beta\in A$. Следовательно, истинна вся $\langle\varphi_t(k)\rangle$. Когда $\widehat{h}=c\lambda$, то становится истинной заключительная π-формула, которая входит также и в $\Psi K(t+1)$.

Если в «неправильной» формуле $\Psi L(t+1)$ ошибка содержится только в записи таймера, то определим $\widehat{x}_{t+1}=\widehat{\eta}$ и $\widehat{f}_{t+1}=c\alpha$ или $\widehat{f}_{t+1}=c\beta$ в зависимости от значения β. А когда там имеется «неправильная» клауза $\psi_{t+1}(\widehat{\mu}\to\rho)$, у которой $\rho\in A$ отлично от «настоящего» δ, то положим $\widehat{x}_{t+1}=\widehat{\mu}$ и $\widehat{f}_{t+1}=c\delta$. Как и выше, опираясь на лемму 3(A), убеждаемся в истинности квазиуравнений цвета $t+1$ в формулах $\langle\Delta^{кон}(\widehat{u})\rangle$ и $\Delta^{зап}(k,\beta)$, следовательно, истинности всей $\langle\varphi_t(k)\rangle$; по тем же причинам истинны и все клаузы в $\Psi K(t+1)$.

В итоге получаем, что при этом выборе значений основных переменных истинны любые формулы $\varphi_t(k)$, значит истинна вся $\Phi^{(0)}(P)$. Так как в $\Omega^{(0)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+1})$ истинны и посылка, и заключение, а $K(t+1)$ отлична от $L(t+1)$, то «неправильная» формула Υ_{t+1} — ложна.

Ввиду того, что конфигурация $L(t+1)$ может отличаться от настоящей в любом месте, получается доказанным также и пункт (A). $\square$

4.2 Достаточность моделирования. Докажем утверждение обратное к предложению 1(B).

Предложение 2. *Пусть конфигурация $K(t+1)$ возникла на ленте после шага $t+1$ из конфигурации $K(t)$ в результате работы машины P на входе X. Тогда на булевой алгебре $\mathcal{B}$ тождественно истинна формула $\Omega^{(0)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+1})$.*

Доказательство. Пусть $M(k)=q_i\alpha\to q_j\beta$ — это та команда, которая переводит конфигурацию $K(t)$ в $K(t+1)$, и $\varphi_t(k)$ — написанная по этой команде формула шага $t+1$. Эта формула — следствие из $\Phi^{(0)}(P)$.

Заменим $\varphi_t(k)$ конъюнкцией формул $\varphi_t(k)(\widehat{\mu})$, каждая из которых получается из неё заменой универсальных переменных $\widehat{u}$ их всевозможными конкретными значениями. Любая формула $\varphi_t(k)(\widehat{\mu})$ содержит посылку — формулу $\widehat{d}_t\approx c\alpha\wedge\widehat{q}_t\approx(i)_2\wedge\widehat{z}_t\approx\widehat{\mu}$, одна из которых ввиду применимости команды $M(k)$ к конфигурации $K(t)$ при $\widehat{u}=\widehat{\mu}=\widehat{\eta}$ и $i=(\widehat{\delta})_2$ совпадает с $\pi_t(\alpha,\widehat{\delta},\widehat{\eta})$, входящей в $\Psi K(t)$. Поэтому, из $\Psi K(t)$ и $\varphi_t(k)(\widehat{\mu})$ следует $\Psi K(t)\ \&\ \Delta^{кон}(\widehat{\eta})\ \&\ \forall\widehat{h}\{\Gamma^{иск}(\beta)(\widehat{\eta})\to[\Delta^{зап}(k,\beta)(\widehat{\eta})\ \&\ \pi_{t+1}((\widehat{h},(j)_2,\widehat{\eta}(\beta))]\}$.

Формула $\Delta^{кон}(\widehat{\eta})$ начинается с кванторов $\forall\widehat{w}$, заменим её эквивалентной конъюнкцией, подставив вместо переменных $\widehat{w}$ все их допустимые значения. При любом значении $\widehat{w}$ имеется единственное значение набора переменных $\widehat{g}_k$, при котором клауза $\psi_t(\widehat{w}\to\widehat{g}_k)$ входит в формулу $\Psi K(t)$. Подставляя эти значения $\widehat{g}_k$ на свои места, получим все клаузы, кроме одной, формулы $\Psi K(t+1)$.

Вследствие применимости команды $M(k)$ к конфигурации $K(t)$ при подходящем значении $\widehat{h}$ формула $\Gamma^{иск}(\beta)(\widehat{\eta})$ совпадает с некоторой клаузой, входящей в $\Psi K(t)$, либо становится истинной: $\widehat{h}\approx c\beta$. В любом случае формула $\Delta^{зап}(k,\beta)(\widehat{\eta})$ содержит в явном виде недостающее пока квазиуравнение $\psi_{t+1}(\widehat{\eta}\to\ldots)$ из $\Psi K(t+1)$, а набор $\widehat{h}$ получает конкретное значение. Подставив это значение в заключительную π-формулу у $\varphi_t(k)$, получаем нужный таймер $\pi_{t+1}(\widehat{h},(j)_2,\widehat{\eta}(\beta))$ из $\Psi K(t{+}1)$. □

5 Построение формулы $\Omega_m(X,P)$

5.1 Моделирование экспоненциальных вычислений. Определим формулы $\Omega^{(s)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s)})$, моделирующие работу $e(s){=}\exp(2,s)$ шагов машины P на входе X, когда она применяется к конфигурации $K(t)$:

$$\Omega^{(s)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s)}) \rightleftharpoons [\Psi K(t)\ \&\ \Phi^{(s)}(P)] \to \Psi K(t{+}e(s)).$$

Предложение 3. *Пусть $t,s\geqslant 0$ такие, что $t{+}e(s)\leqslant T$.*

(A) Если машина P перерабатывает за $e(s)$ шагов конфигурацию $K(t)$ в $K(t+e(s))$, то найдутся такие особые значения переменных $\widehat{y}_t$, что формула $\Psi K(t)(\widehat{y}_t)$ истинна, и при любых $\widehat{y}_{t+e(s)}$ из истинности $\Psi K(t{+}e(s))(\widehat{y}_{t+e(s)})$ следует истинность $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s)})$.

(B) Формула $\Omega^{(s)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s)})$ тождественно истинна на булевой алгебре $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда машина P перерабатывает за $e(s)$ шагов конфигурацию $K(t)$ в $K(t{+}e(s))$.

Доказательство. Индукция по s. При $s{=}0$ пункт (A) следует из предложения 1(A), а пункт (B) — из предложений 1(B) и 2.

Для доказательства индукционного перехода запишем формулу $\Phi^{(s+1)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ в эквивалентном, но длинном виде:

$$\exists\widehat{v}\big\{\forall\widehat{a}\forall\widehat{b}\big[(\widehat{y}_t{\approx}\widehat{a}\ \wedge\ \widehat{v}{\approx}\widehat{b})\ \to\ \Phi^{(s)}(P)(\widehat{a},\widehat{b})\big]\ \&$$
$$\&\ \forall\widehat{a}\forall\widehat{b}\big[(\widehat{v}{\approx}\widehat{a}\ \wedge\ \widehat{b}{\approx}\widehat{y}_{t+e(s+1)})\ \to\ \Phi^{(s)}(P)(\widehat{a},\widehat{b})\big]\big\}.$$

Отсюда сразу выводится

$$\Xi_{s+1}\rightleftharpoons\exists\widehat{v}\big\{\Phi^{(s)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{v})\ \&\Phi^{(s)}(P)(\widehat{v},\widehat{y}_{t+e(s+1)})\big\}.$$

С другой стороны, каждая из двух импликаций, входящих в эквивалентную длинную запись формулы $\Phi^{(s+1)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$, может быть ложна только при верных равенствах в её посылке. Из этого следует, что эта формула равносильна Ξ_{s+1}.

Пусть машина P за $e(s)$ шагов перерабатывает конфигурацию $K(t)$ в $K(t+e(s))$, а её — в $K(t{+}e(s{+}1))$.

Из посылки формулы $\Omega^{(s+1)}(X,P)(\widehat{y}_t,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ выводится Ξ_{s+1}, а из неё следуют формулы $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{y}_t,\widehat{v}_0)$ и $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{v}_0,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ при подходящем значении переменных $\widehat{v}$. По индукционному предположению пункта (В) из первой из них и $\Psi K(t)(\widehat{y}_t)$ следует $\Psi K(t+e(s))(\widehat{v}_0)$, а из неё и второй — $\Psi K(t+e(s+1))(\widehat{y}_{t+e(s+1)})$, что доказывает индукционный переход пункта (В) в одну сторону.

Пусть теперь конфигурации $L(t+e(s+1))$ и $K(t+e(s+1))$ — различны. По индукционному предположению пункта (В) при некоторых $\widehat{v}_1,\widehat{y}_{t+e(s+1)}$ формула $[\Psi K(t+e(s))\ \&\ \Phi^{(s)}(P)]\to\Psi K(t+e(s+1))$ истинна, а $[\Psi K(t+e(s))\ \&\ \Phi^{(s)}(P)]\to\Psi L(t+e(s+1))$ ложна. Значит, у второй формулы заключение $\Psi L(t+e(s+1))(\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ ложно, а посылка истинна, т.е. истинны $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{v}_1,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ и $\Psi K(t+e(s))(\widehat{v}_1)$. Из истинности последней и $\Psi K(t)(\widehat{v}_0)$ при особом $\widehat{v}_0$, существование которого гарантирует индукционное предположение пункта (А), следует истинность $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{v}_0,\widehat{v}_1)$. Следовательно, у импликации $\{[\Psi K(t)\ \&\ \Phi^{(s+1)}(P)]\to\Psi L(t+e(s+1))\}(\widehat{v}_0,\widehat{y}_{t+e(s+1)})$ посылка истинна, а заключение — ложно, поэтому она не может быть тождественно истинной. Пункт (В) доказан.

Поскольку конфигурация $L(t+1)$ может отличаться от настоящей в каком угодно месте, для окончания доказательства пункта (А) достаточно взять значения $\widehat{v}_1$ особыми, применив индукционное предположение. $\square$

5.2 Короткая запись начальной конфигурации и условия окончания работы. Ввиду наличия команд холостого хода из начала раздела 2, утверждение о том, что машина P допускает вход X не более, чем за $\exp(2,m)$ шагов, можно записать совсем коротко — одной бескванторной формулой цвета T: $\chi(\omega)\rightleftharpoons\widehat{q}_T\approx\widehat{0}$. Длина этой формулы без индексов равна $3r$. Запись первого индекса T занимает $\lceil\lg T\rceil$ разрядов (индексы записываются в десятичной записи, а не в двоичной), где $\lg m=\log_{10}m$, а $\lceil A\rceil$ означает наименьшее целое число, не меньшее действительного числа A. Так как максимальная длина вторых индексов равна $\lceil\lg(r-1)\rceil$, то $|\chi(\omega)|<3r\cdot(\lceil\lg T\rceil+\lceil\lg(r-1)\rceil)$.

Введённая в п. 3.3 формула $\Psi K(t)$ для описания конфигурации, возникшей после шага с номером t, очень длинная — длиннее, чем $m\cdot\exp(2,m)$. Но начальная конфигурация состоит из записи входа X, который занимает $|X|$ клеток справа от края ленты, куда наведена головка, а остальная часть ленты — пустая, начиная с ячейки с номером

$|X|+1=(\widehat{\gamma})_2+1$. Исходя из этого, начальную конфигурацию $K(0)$ на ленте можно описать короткой универсальной формулой:

$$\chi(0) \rightleftharpoons \pi_0(*, (1)_2, \widehat{0}) \ \& \bigwedge_{0\leqslant(\widehat{\eta})_2\leqslant|X|} \psi_0(\widehat{\eta}\to\alpha(\eta)) \ \& \ \forall\widehat{u}_0[\widehat{u}_0>\widehat{\gamma} \to \psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)],$$

где Λ — символ пустой клетки, * — символ левого края ленты, а $\alpha(\eta)$ — это символ, стоящий в ячейке с номером $(\widehat{\eta})_2$, и π-формула цвета 0 означает, что в нулевое время механизм готов к исполнению команды $q_1* \to \ldots$, а головка машины находится в крайнем левом положении.

Лемма 4. *(A) Формулы $\chi(0)$ и $\Psi K(0)$ — эквивалентны.*
(B) $|\chi(0)(\widehat{y}_0)|\leqslant D_2\cdot|X|\cdot|\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)|$ при подходящей константе D_2.

Доказательство. (A) Бескванторная часть формулы $\chi(0)$ просто совпадает с начальным фрагментом формулы $\Psi K(0)$. После замены второй части формулы $\chi(0)$, начинающейся с кванторов $\forall\widehat{u}_0$, на равносильную ей конъюнкцию появляются остальные клаузы из $\Psi K(0)$.

(B) Согласно пунктам (A) и (B) леммы 1 длина системы неравенств $\widehat{u}_0>\widehat{\gamma}$ имеет тот же порядок, что и $|\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)|$, длина кванторной приставки немного меньше. Значит, $|\forall\widehat{u}_0[\widehat{u}_0>\widehat{\gamma}\to\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)]|$ имеет тот же порядок, что и $|\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)|$. Поскольку в запись $\chi(0)(\widehat{y}_0)$ входят ещё $|X|+1$ клауза вида $\psi_0(\widehat{\eta}\to\alpha(\eta))$ и таймер, длины которых по лемме 1(A) имеют тот же порядок, что и $|\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)|$, то длина всей формулы $\chi(0)(\widehat{y}_0)$ не превосходит $D_2\cdot|X|\cdot|\psi_0(\widehat{u}_0\to\Lambda)|$ для некоторой константы D_2. $\square$

5.3 Моделирующая формула $\Omega_m(X,P)$. Положим

$$\begin{aligned}\Omega_m(X,P) \quad &\rightleftharpoons \quad \forall\widehat{y}_0,\widehat{y}_T \Big\{ \Big[\ \chi(0)(\widehat{y}_0) \quad \& \\ \& \ \exists\widehat{v}_m\forall\widehat{a}_m\forall\widehat{b}_m\ldots\exists\widehat{v}_1\forall\widehat{a}_1\forall\widehat{b}_1 \ \Big\{ &\bigwedge_{1\leqslant s\leqslant m}\big[(\widehat{a}_{s+1}\approx\widehat{a}_s\wedge\widehat{v}_s\approx\widehat{b}_s)\vee \\ \vee(\widehat{v}_s\approx\widehat{a}_s\wedge\widehat{b}_s\approx\widehat{b}_{s+1})\big] &\to \Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1,\widehat{b}_1)\Big\}\Big] \to \chi(\omega)(\widehat{y}_T)\Big\},\end{aligned} \tag{1}$$

здесь для краткости и единообразия записи равенств внутри «большой» конъюнкции введены обозначения $\widehat{a}_{m+1}=\widehat{y}_0$, $\widehat{b}_{m+1}=\widehat{y}_T$.

Лемма 5. *Формула $\Omega_m(X,P)$ обладает свойством (б) из начала раздела 2, т.е. она истинна на булевой алгебре $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда машина P допускает вход X в пределах T шагов.*

Доказательство. Пусть $\Theta_s = \Theta_s(\widehat{a}_s, \widehat{a}_{s+1}, \widehat{b}_s, \widehat{b}_{s+1})$ обозначает дизъюнкцию равенств $(\widehat{a}_{s+1} \approx \widehat{a}_s \wedge \widehat{v}_s \approx \widehat{b}_s) \vee (\widehat{v}_s \approx \widehat{a}_s \wedge \widehat{b}_s \approx \widehat{b}_{s+1})$. Тогда используя договорённость п. 2.1 о том, что конъюнкция связывает сильнее чем импликация, и пронося кванторы через подформулы, в которых нет соответствующих переменных, получаем, что та часть формулы $\Omega_m(X,P)$, которая стоит в больших квадратных скобках в (1), равносильна каждой из трёх следующих формул:

$$\chi(0)(\widehat{y}_0) \mathbin{\&} \exists \widehat{v}_m \forall \widehat{a}_m \forall \widehat{b}_m \ldots \exists \widehat{v}_1 \forall \widehat{a}_1 \forall \widehat{b}_1 \big\{ \bigwedge_{1 \leqslant s \leqslant m} \Theta_s \to \Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1, \widehat{b}_1) \big\};$$

$$\Psi K(0)(\widehat{y}_0) \mathbin{\&} \exists \widehat{v}_m \forall \widehat{a}_m \forall \widehat{b}_m \ldots \exists \widehat{v}_1 \forall \widehat{a}_1 \forall \widehat{b}_1 \big(\Theta_m \to (\Theta_{m-1} \to (\ldots \to \\ \to (\Theta_1 \to \Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1, \widehat{b}_1)) \ldots))\big);$$

$$\Psi K(0)(\widehat{y}_0) \mathbin{\&} \exists \widehat{v}_m \forall \widehat{a}_m \forall \widehat{b}_m \big(\Theta_m \to \exists \widehat{v}_{m-1} \forall \widehat{a}_{m-1} \forall \widehat{b}_{m-1} (\Theta_{m-1} \to (\ldots \to \\ \to \exists \widehat{v}_1 \forall \widehat{a}_1 \forall \widehat{b}_1 (\Theta_1 \to \Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1, \widehat{b}_1)) \ldots))\big).$$

Согласно определению формула $\exists \widehat{v}_s \forall \widehat{a}_s \forall \widehat{b}_s (\Theta_s \to \Phi^{(s-1)}(P)(\widehat{a}_s, \widehat{b}_s))$ «сворачивается» до $\Phi^{(s)}(P)(\widehat{a}_{s+1}, \widehat{b}_{s+1})$. Поэтому вся $\Omega_m(X,P)$ равносильна $\forall \widehat{y}_0, \widehat{y}_T \big[\big(\Psi K(0) \mathbin{\&} \Phi^{(m)}(P)\big) \to \chi(\omega)\big]$, и на основании предложения 3(B) и леммы 4(A) можно утверждать, что (1) — моделирующая формула. □

5.4 Время написания формулы $\Omega_m(X,P)$. Описание моделирующей формулы $\Omega_m(X,P)$ в явном виде (1) даёт алгоритм её построения, остаётся доказать свойство (a) из начала раздела 2. Прежде чем обосновывать полиномиальность алгоритма, убедимся вначале, что формула $\Omega_m(X,P)$ в виде (1) имеет полиномиальную длину.

Лемма 6. *Существует константа $D > 0$, не зависящая от P и $m(n)$, что для всех достаточно длинных X имеет место*

$$m(|X|) \leqslant |\Omega_m(X,P)| \leqslant D \cdot |P| \cdot [m(|X|)]^{2+\varepsilon},$$

для всякого наперёд заданного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Многие компоненты моделирующей формулы (1) уже оценивались по ходу их построения, но оценки их длин делались при условии, что эти подформулы записаны с помощью основных переменных $\langle \widehat{x}_t, \widehat{q}_t, \widehat{z}_t, \widehat{d}_t, \widehat{f}_t \rangle$, которые были обозначены в п. 3.2 как $\widehat{y}_t$. Однако в запись подформул из $\Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1, \widehat{b}_1)$ входят не они, а фрагменты наборов $\widehat{a}_1$ и $\widehat{b}_1$, т.е. первые $m+1$ переменных в наборе $\widehat{a}_1$ играют роль $\widehat{x}_t$, а в наборе $\widehat{b}_1$ — роль $\widehat{x}_{t+1}$; вторые r переменных в $\widehat{a}_1$ поставлены вместо $\widehat{q}_t$, а в $\widehat{b}_1$ — вместо $\widehat{q}_{t+1}$ и т.д. Разумеется, эта замена никак не влияет на длину тех формул, куда они входят, если не учитывать индексы. Длины индексов при этом заметно изменились, именно поэтому ранее при оценке длин формул они учитывались лишь неявно, например, в леммах 1(C) и 2(A).

Первые индексы у переменных видов $\widehat{a}_1$ и $\widehat{b}_1$ не превосходят 2, поэтому их длина $\lceil\lg 2\rceil=1$. Вторые индексы у этих переменных имеют верхнюю оценку длины $E \rightleftharpoons \lceil\lg(2m+3r+2)\rceil$; но вторые индексы у переменных $\widehat{y}_0$ покороче — они не более $E_0 \rightleftharpoons \max\{\lceil\lg m\rceil, \lceil\lg(r-1)\rceil\}$; причём в запись наборов констант индексы не входят. При длинных X число $m=m(|X|)$ станет больше $r-1$, а $E, E_0 \leqslant \lceil\lg m\rceil+1$. Поэтому по леммам 1(A) и 2 длина тех квазиуравнений и таймеров из подформул $\chi(0)(\widehat{y}_0)$ и $\Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1, \widehat{b}_1)$ в (1), в которые не входят наборы $\widehat{u}(\beta)$, не превосходят $D_3 \cdot m \cdot (\lceil\lg m\rceil+2)$, а длина тех клауз и таймеров, где есть наборы $\widehat{u}(\beta)$ — не более $D_4 \cdot [m \cdot (\lceil\lg m\rceil+2)]^2$ при подходящих константах D_3 и D_4. По лемме 2 $|\varphi(k)| \leqslant D_5 \cdot [m \cdot (\lceil\lg m\rceil+2)]^2$, но уже, при другой константе D_5 и при длинных X.

Система равенств в (1), объединённая «большой» конъюнкцией, имеет длину порядка $m \cdot [m \cdot (\lceil\lg m\rceil+2)]$, и примерно та же длина у кванторной приставки перед этой конъюнкцией. Заметим, что для всякого $\varepsilon>0$ при больших m справедливо $(\lceil\lg m\rceil+2)^2 \leqslant m^{\varepsilon}$; и все константы D_s, которые появились при доказательстве этой леммы и лемм 3(B) и 4(B), зависят только от структуры соответствующих подформул у $\Omega_m(X,P)$ и отношению их длин к длине всей этой формулы, так как $|P|$ монотонно зависит от r. Например, по лемме 1(A) таймеры длиннее соответствующих клауз не более чем вдвое, и поэтому D_2 из леммы 4(B) не более десяти. Отсюда на основании лемм 3(B) и 4(B) окончательно имеем $|\Omega_m(X,P)| \leqslant D \cdot |P| \cdot [m(|X|)]^{2+\varepsilon}$. □

Следствие 2. *Существует такая константа $D_{m,\varepsilon}$, что при всех X и P верно* $|\Omega_m(X,P)| \leqslant D_{m,\varepsilon} \cdot |P| \cdot [m(|X|)]^{2+\varepsilon}$.

Доказательство. Согласно лемме при данных m и ε может быть лишь конечное число цепочек X, для которых нарушено указанное в формулировке леммы неравенство. Значит отношение $\lceil|\Omega_m(X,P)|/(|P| \cdot [m(|X|)]^{2+\varepsilon})\rceil$ достигает на таких X максимального значения. Понятно, что оно и годится на роль $D_{m,\varepsilon}$. □

Следствие 3. *Для каждого многочлена $m(n)$ найдётся такой многочлен g_m, что для всех X и P время построения формулы $\Omega_m(X,P)$ не превосходит $g_m(|X|,|P|)$.*

Доказательство. Оценим вначале время написания формулы $\Omega_m(X,P)$ многоленточной машиной Тьюринга P_1 с рабочим алфавитом, включающем в себя все символы естественного языка п. 1.1.

Пусть на входной ленте машины даны цепочка X и программа P. За один проход вдоль этой записи машина P_1 может определить длину $|X|$ входа X, максимальный номер U внутренних состояний в P и $|A|$ — количество различных символов, участвующих в записи цепочки X и командах программы P. Вычисление величин $r \leqslant \log_2(U+1+|A|)$, $m=m(|X|)$ и их десятичной записи требует полиномиального числа шагов по сравнению с $|P|$ и $|X|$. Далее P_1 опять, двигаясь вдоль записи X и P, пишет вначале формулу $\chi(0)(\widehat{y}_0)$, затем $\Phi^{(0)}(P)(\widehat{a}_1,\widehat{b}_1))$ и наконец $\Omega_m(X,P)$. Понятно, что всё это займёт время, не превосходящее $p_m(|X|,|P|)$ для некоторого многочлена $p_m(n)$. Одноленточный вариант P_2 машины P_1 эти же действия совершит за время $g_m(|X|,|P|)$, которое имеет вид $O([p_m(|X|,|P|)]^2)$ [3]. $\square$

Автор глубоко признателен рецензенту, советы и подробные замечания которого позволили заметно улучшить текст и сделать его более доступным для восприятия.

Литература

1 Stockmeyer L.J., Meyer A.R. Word problems requiring exponential time // Proc. 5th Ann. ACM Symp. on the Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York City. — 1973. — P. 1–9.

2 Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

3 Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. — 536 с.

4 Cook S.A. The complexity of theorem-proving procedures // Proc. of the 3rd Annual ACM Symp. on the Theory of Computing, Shaker Heights, Ohio. — 1971. — P. 151–159.

5 Латкин И.В. Моделирование формулами вычислений на машине

Тьюринга // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. Математика, механика, информатика. — 2008. — № 3. — С. 142–147.

6 Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

Статья поступила в редакцию 19.05.14

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Комитетом науки МОН РК, гранты 0929/ГФ3 и 3953/ГФ4.

Латкин И.В. ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ ЖҰМЫС УАҚЫТЫ ЖӘНЕ ЖАДЫҒА ПОЛИНОМИАЛДЫ ШЕКТЕУЛЕРІ БАР ДЕТЕРМИНДЕЛГЕН АЛГОРИТМДЕР АРҚЫЛЫ ШЕШІЛЕТІН ЕСЕПТЕР КЛАСТАРЫНЫҢ ҮЙЛЕСУІ

Екі элементті бульдік алгебраның қысқа формулаларына қатысты уақыт бойынша ұзақ есептеулерді моделдеу негізінде экспоненциалды уақыт аралығында Тьюринг детерминделген машинасында танып білетін кез келген тілдің осындай формулалар тіліне полиномиалды келтірілетіндігі дәлелденеді. Екінші жағынан, кванторлы бульдік формулалар тілі осы машиналарда полиномиалды жадымен танып білетін тілдер класында полиномиалды толық болып табылатындығы белгілі. Бұл жұмыс атауында айтылған кластардың теңдігін дәлелдеуге мүмкіндік береді.

Latkin I.V. THE COINCIDENCE OF THE CLASSES OF PROBLEMS SOLVABLE BY DETERMINISTIC ALGORITHMS BOUNDED BY EXPONENTIAL TIME AND POLYNOMIAL SPACE.

Based on the simulation of computations, which are the exponential time length, by the boolean formulae that have the polynomial length, we prove that every one of the languages which are recognizable by the deterministic Turing machine in the time bounded exponential is polynomial reducible to the language of the boolean formulae with quantifiers. It is well known that the language of these formulae is polynomial complete in the class of languages, which are recognizable by the deterministic machine in polynomial space. Thus these complexity classes mentioned in the title coincide with each other.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. №1 (55). С.77–88*

УДК 517.956

M. Sadybekov, G. Dildabek, A. Tengayeva

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: makhmud-s@mai.ru
Al-Farabi Kazakh National University
050038, Almaty, al-Farabi ave.,71, e-mail: dildabek.g@gmail.com
Kazakh National Agrarian University
050010, Almaty, Abai street, 8, e-mail: aijan0973@mail.ru

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH OPPOSITE FLOWS AT THE PART OF THE BOUNDARY

In the present paper we investigate a nonlocal boundary problem for the Laplace equation in a half-disk, with opposite flows at the part of the boundary. The difference of this problem is the impossibility of direct applying of the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. A special system of functions based on these eigenfunctions is constructed. This system has already formed the basis. This new basis is used for solving of the nonlocal boundary value problem. The existence and the uniqueness of the classical solution of the problem are proved.
Keywords: *Laplace equation, basis, eigenfunctions, nonlocal boundary value problem.*

1 Statement of the problem

Our goal is to find a function $u(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ satisfying in D the equation

Keywords: *Laplace equation, basis, eigenfunctions, nonlocal boundary value problem.*
2010 Mathematics Subject Classification: 33C10, 34B30, 35J, 35P10.

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$u(1,\theta) = f(\theta),\ \ 0 \le \theta \le \pi, \tag{2}$$

$$u(r,0) = 0, r \in [0,1], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = -\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha u(r,\pi), \quad r \in (0,1) \tag{4}$$

where $D = \{(r,\theta) : \quad 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$; $\alpha < 0$; $f(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -f'(\pi) + \alpha f(\pi)$.

In [1], [2] the problem for equation(1) with the boundary conditions(2), (3) was investigated but instead of (4) they used the condition of equality of the flows

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi), \quad r \in (0,1). \tag{5}$$

In [3], [4] the same problem for the Helmholtz equation was investigated.

The well-posedness of the boundary problem for equation(1) with boundary conditions (2), (3) and the condition

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha u(r,\pi), \quad r \in (0,1). \tag{6}$$

was investigated in [5], [6].

In [7] the same problem was investigated for the Helmholtz equation. The conditions of the well-posedness of the problem were found and the existence of the classical solution was proved in all the mentioned works. The existence and the uniqueness of the solution of the problems were proved by applying the method of separation of variables. In case of the boundary condition (5) the proof is based on the basis property of the special function systems of the Samarskii-Ionkin type in L_p. Under the boundary conditions (6) in case of $\alpha \neq 0$ it is impossible to use directly the Fourier method of the separation of the variables. Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis.

The problem (1)–(4) considered in the present work has the same property: it is impossible to use directly the Fourier method of the separation of the variables. The goal of the work is to prove the well-posedness of the formulated problem.

2 The uniqueness of the solution

Theorem 1. *The solution of the problem* (1)–(4) *is unique.*

Proof. Suppose that there exist two functions $u_1(r,\theta)$ and $u_2(r,\theta)$ satisfying the conditions of the problem (1)–(4). We show that the function $u(r,\theta) = u_1(r,\theta) - u_2(r,\theta)$ is equal to 0.

Consider the function

$$U(r,\theta) = u(r,\theta) - u(r,\pi-\theta)$$

in $D_1 = \{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$. It is easy to see that

$$\Delta U = 0;$$

$$U(r,\pi/2) = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(r,0) + \alpha U(r,0) = 0 \text{ at } 0 < r < 1;$$

$$U(1,\theta) = 0 \quad \text{at } 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Since $\alpha < 0$, then $U = 0$ in $\bar{D}_1$ by the maximum principle and the Zaremba-Giraud principle [8, p. 26] for the Laplace equation. This means that $u(r,\theta) = u(r,\pi-\theta)$, in particular $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$ at $r \in [0,1]$. The equality $u(r,\theta) = 0$ in $\bar{D}$ follows from the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation.

The proof of the theorem is complete.

3 Forming the basis

If solutions of equation (1) satisfying the conditions (3), (4) will be sought in the form of

$$u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta),$$

then $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}}$, $Re\sqrt{\lambda} \ge 0$ and for the function $\varphi(\theta)$ we get a spectral problem

$$-\varphi''(\theta) = \lambda\varphi(\theta),\ 0 < \theta < \pi;$$
$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = -\varphi'(\pi) + \alpha\varphi(\pi). \tag{7}$$

This problem has two groups of eigenvalues. All the eigenvalues are simple and the corresponding system of eigenfunctions does not form the basis in $L_2(0, \pi)$ [9]. Therefore the further usage of the method of the separation of the variables turns out to be impossible.

In [10] the spectral problem

$$-\vartheta''(\theta) = \lambda\vartheta(\theta),\ 0 < \theta < \pi;$$
$$\vartheta(0) = 0,\ \vartheta'(0) = \vartheta'(\pi) + \alpha\vartheta(\pi). \tag{8}$$

was considered.

The system of eigenvectors of the problem (8) does not form a basis [9] in$L_2(0, \pi)$. But a special system of functions built with help of these eigenfunctions will form the basis. And this fact was applied for the solution of the nonlocal initial-boundary problem for the heat equation. In paper [10] one family of problems simulating the determination of the temperature and density of heat sources from given values of the initial and final temperature is similarly considered. This fact was also used in [5], [6] in proving the existence of the solution.

Let us present the facts necessary for further work. The problem (7) has two groups of eigenvalues $\lambda_k^{(1)} = (2k+1)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Herein β_k are roots of the equation

$$\cot \beta\pi = \alpha/2\beta,\ \beta > 0,$$

they satisfy the inequalities $2k+1 < 2\beta_k < 2k+2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, and two-side estimates are carried out for $\delta_k = \beta_k - k - 1/2$ where k is large enough

$$-\frac{\alpha}{(2k+1)}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) < \delta_k < -\frac{\alpha}{(2k+1)}. \tag{9}$$

The eigenfunctions of the problem (7) have the form

$$\varphi_k^{(1)}(\theta) = \sin\left((2k+1)\,\theta\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ \varphi_k^{(2)}(\theta) = \sin\left(2\beta_k\theta\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Lemma 1. *The system of eigenfunctions* $\{\varphi_k^{(1)}(\theta), \varphi_k^{(2)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ *of the problem* (5) *has the form* (10). *This system is complete and minimal, almost normed but does not form even an ordinary basis in* $L_2(0,\pi)$.

Proof. The completeness and minimality of the system follow from the regularity of boundary conditions of the spectral problem (5). The limitation of norms is easily checked by direct calculation. However the properties of the completeness and minimality are not enough for the basis property.

Really, consider scalar multiplications of pairs of eigenfunctions $\left(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}\right)$. By direct calculation, we find

$$\left(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}\right) = \int_0^{\pi} \sin((2k+1)\,\theta)\sin(2\beta_k\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{\sin(2\delta_k\pi)}{2\delta_k\pi}\frac{2k+1}{2k+1+\delta_k}.$$

Taking into account that $\left\|\varphi_k^{(1)}\right\| = \sqrt{\pi/2}$, and $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\varphi_k^{(2)}\right\| = \sqrt{\pi/2}$, we get that the angle between the normed eigenvectors tends to zero:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\varphi_k^{(1)}}{\left\|\varphi_k^{(1)}\right\|}, \frac{\varphi_k^{(2)}}{\left\|\varphi_k^{(2)}\right\|}\right)_{L_2(0,\pi)} = 1.$$

Such systems can not form the unconditional basis. Lemma is proved.

It is necessary to note the fact that the system of eigenfunctions (10) does not have the basis, also follows from more general facts [9].

Now from elements of the system (10) we construct a new system which will be a basis in $L_2(0,\pi)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{2k}(\theta) &= \varphi_k^{(1)}(\theta), \\ \varphi_{2k+1}(\theta) &= \left(\varphi_k^{(2)}(\theta) - \varphi_k^{(1)}(\theta)\right)(2\delta_k)^{-1}, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Let us show that the constructed system is a Riesz basis in $L_2(0,\pi)$. The problem

$$-\psi''(\theta) = \overline{\lambda}\psi(\theta),\ 0<\theta<\pi;$$

$$\psi(0) + \psi(\pi) = 0,\ \psi'(\pi) + \alpha\psi(\pi) = 0$$

is conjugated to the problem (7). The system of the eigenfunctions of this problem is biorthogonal to the system (10):

$$\psi_k^{(1)}(\theta) = C_k^{(1)} \left\{ \cos\left((2k+1)\theta\right) + \frac{\alpha}{2k+1} \sin\left((2k+1)\theta\right) \right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\psi_k^{(2)}(\theta) = C_k^{(2)} \left\{ \cos\left(2\beta_k \theta\right) - \frac{\alpha}{2\beta_k} \sin\left(2\beta_k \theta\right) \right\},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

The constants $C_k^{(j)}$ are taken from the biorthogonal relations $\left(\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}\right) = 1,\ j = 1, 2$. Since we will not use the explicit form of the biorthogonal system, then we do not present here the explicit form of constants $C_k^{(j)}$.

The biorthogonal system to (11) has the form:

$$\psi_{2k}(\theta) = \psi_k^{(2)}(\theta) + \psi_k^{(1)}(\theta),$$

$$\psi_{2k+1}(\theta) = 2\delta_k \psi_k^{(2)}(\theta),\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

This system is constructed from the eigenfunctions of the problem conjugated to (7).

Let us show that the constructed additional system has the basis property.

Lemma 2. *The system of functions* $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ *forms a Riesz basis in* $L_2(0, \pi)$.

Proof. Since this system is constructed from the eigenfunctions of the problem with regular boundary conditions and with the help of non-degenerated linear combinations, then the completeness and minimality of the system do not change.

Let us prove asymptotic quadratic closeness of the system $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ to the system forming the Riesz basis. As such we choose the system of eigen- and associated functions of a problem of the Samarskii-Ionkin type:

$$-w''(\theta) = \lambda w(\theta),\ 0 < \theta < \pi;$$

$$w(0) = 0,\ w'(0) + w'(\pi) = 0.$$

The boundary conditions of this problem are not strengthened regular. All the eigenvalues of this problem, except zero values, are multiple: $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)} = (2k+1)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. The eigenfunctions w_{2k} and the associated functions w_{2k+1} of the problem form the Riesz basis in $L_2(0, \pi)$ and have the form:

$$w_{2k} = \sin\left((2k+1)\,\theta\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ w_{2k+1} = \theta\cos\left((2k+1)\,\theta\right).$$

We need to show that the series converges

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - w_k\|^2 < \infty.$$

It is evident that $\varphi_{2k} - w_{2k} = 0$. For odd numbers we have:

$$\varphi_{2k+1} = \frac{\sin(2\beta_k\theta) - \sin\left((2k+1)\,\theta\right)}{2\delta_k} = \frac{\sin(\delta_k\theta)}{\delta_k\theta}\theta\cos\left((2k+1+\delta_k)\,\theta\right).$$

Thus it is not difficult to get the estimate $|\varphi_{2k+1} - w_{2k+1}| \le C\delta_k$. From here and from the asymptotics (9) for δ_k we have the asymptotic inequality $|\varphi_{2k+1} - w_{2k+1}| \le C_1/k$ where C_1 does not depend on k.

The obtained inequality provides the quadratic closeness of the system $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ and the Riesz basis $\{w_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$. Lemma is proved.

Further on, by standard methods it is not difficult to justify that if the function $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$ and satisfies the boundary conditions of the problem (7), then its Fourier series by the system $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ converges uniformly.

We can calculate that

$$\begin{aligned} -\varphi''_{2k}(\theta) &= \lambda_k^{(1)}\varphi_{2k}(\theta), \\ -\varphi''_{2k+1}(\theta) &= \lambda_k^{(2)}\varphi_{2k+1}(\theta) + \tfrac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}\varphi_{2k}(\theta). \end{aligned} \tag{12}$$

4 Construction of the formal solution of the problem

Considering the section 3, we can write any solution of problem (1)–(4) in the form of a biorthogonal series

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\,\varphi_k(\theta), \tag{13}$$

where

$$R_k(r) = (u(r, \cdot), \psi_k(\cdot)) \equiv \int_0^\pi u(r, \theta)\, \psi_k(\theta)\, d\theta.$$

Functions (13) satisfy the boundary conditions (3) and (4).

Substituting (13) into equation (1) and the boundary conditions (2), taking into account (12), for finding unknown functions $R_k(r)$ we obtain following problems:

$$\begin{aligned} &r^2 R''_{2k+1}(r) + r R'_{2k+1}(r) - \lambda_k^{(2)} R_{2k+1}(r) = 0, \\ &r^2 R''_{2k}(r) + r R'_{2k}(r) - \lambda_k^{(1)} R_{2k}(r) = \tfrac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} R_{2k+1}(r), \end{aligned} \tag{14}$$

with the boundary conditions $R_k(1) = f_k$, where f_k are the Fourier coefficients of the expansion of the function $f(\theta)$ into the biorthogonal series by $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$.

The regular solution of (14) exists, is unique and can be written in the explicit form:

$$\begin{aligned} &R_{2k+1}(r) = f_{2k+1} r^{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}}, \\ &R_{2k}(r) = f_{2k} r^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}} + f_{2k+1} \tfrac{1}{2\delta_k} \left(r^{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}} - r^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Substituting (15) into (13), we obtain a formal solution of the problem:

$$\begin{aligned} &u(r, \theta) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} r^{2k+1} \sin((2k+1)\theta) + \\ &+ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} \tfrac{1}{2\delta_k} [r^{2\beta_k} \sin(2\beta_k \theta) - r^{2k+1} \sin((2k+1)\theta)]. \end{aligned} \tag{16}$$

5 Main Theorem

Here we state our main result.

Theorem 2. *If* $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -f'(\pi) + \alpha f(\pi)$, *then there exists a unique classical solution* $u(r, \theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ *of the problem* (1)–(4).

Proof. The uniqueness of the classical solution of the problem follows from Theorem 1. The formal solution of the problem is shown in the form of (16). In order to make sure that these functions are really the desired solutions we need to verify the applicability of the superposition principle. For it we need to show the convergence of the series, the possibility of termwise differentiation, and to prove the continuity of these functions on the boundary of the half-disk.

The possibility of differentiating the series (16) any number of times at $r < 1$ is an obvious consequence of the convergence of power series and two-sided estimates (9) for δ_k. Let us justify the uniform convergence of the series (13) at $r \leq 1$. For this we use the sign of the uniform convergence of Weierstrass. By direct calculation it is easy to see that the series (16) is majorized by the series $C_1(|f_0| + |f_1| + |f_2| + \ldots)$. This series converges [10] due to the requirements of the theorem imposed on $f(\theta)$. Since all the terms of the series (16) are continuous functions, then the function $u(r, \theta)$ is continuous in the boundary domain $\bar{D}$. The proof of the theorem is complete.

6 The conjugated problem: the uniqueness and the existence of the solution

Let us now formulate a problem conjugated to (1)–(4).

We look for a function $v(r, \theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ satisfying the equation

$$\Delta v = 0 \tag{17}$$

in D with the boundary conditions

$$v(1, \theta) = g(\theta), \ 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{18}$$

$$v(r, 0) + v(r, \pi) = 0, \ r \in [0, 1], \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \pi) + \alpha v(r, \pi) = 0, \ r \in (0, 1), \tag{20}$$

where $g(\theta) \in C^2[0, \pi], \ g(0) + g(\pi) = 0, \ g'(\pi) + \alpha g(\pi) = 0.$

We can easily verify the conjugacy of the problems (1)–(4) and (17)–(20) by direct calculation. The uniqueness of the solution of the problem (17)–(20) follows from the maximum principle and the Zaremba-Giraud principle [8, p.26] for the Laplace equation. The existence of the solution and its representation in the form of a biorthogonal series can be proved similar to Theorem 2.

Let us show this result without the proof.

Theorem 3. *If* $g(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $g(0) = g(\pi)$, $g'(\pi) + \alpha g(\pi) = 0$, *then there exists a unique classical solution* $v(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ *of the problem* (17)–(20).

Acknowledgements The authors express their gratitude to T.Sh. Kalmenov for valuable advices during the work. This work was supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1 Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem // Differential Equations. — 2010. — V. 46, №5. — P. 718–725.

2 Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem // Differential Equations. — 2010. — V. 46, №6. — P. 892–895.

3 Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. Solvability of some nonlocal boundary value problems for the Helmholtz equation in a half-disk // Doklady Mathematics. — 2010. - V. 82, №1. — P. 621–624.

4 Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the solvability of nonlocal boundary value problem for the Helmholtz equation with the equality of flows at the part of the boundary and its conjugated problem // Integral Transforms and Special Functions. — 2010. — V. 21, №12. — P. 897–906.

5 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On the solvability of one nonlocal boundary problem for the Laplace operator in a half-disk // Matem. zhurnal. — Almaty. — 2012. — V. 12, №2. — P. 59–66.

6 Besbaev G.A., Orazov I., Sadybekov M.A. A nonlocal boundary problem for the Laplace operator in a half disk // Electronic Journal of Differential Equations. — 2014. — V. 2014, №203. — P. 1–5.

7 Dildabek G., Tengayeva A., Sadybekov M.A. On the solvability of a nonlocal boundary problem for the Helmholtz operator in a half-disk //

Contemporary Analysis and Applied Mathematics. — 2014. — V. 2, №2. — P. 305–313.

8 Bitsadze A.V. Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh. — Moscow: Nauka, 1981. — 448 p. (In Russian)

9 Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 II. Analysis of case // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1990. — V. 146, №1. — P. 148–191.

10 Mokin A.Yu. On a family of initial-boundary value problems for the heat equation // Differential Equations. — 2009. — V. 45, №. 1. — P. 126–141.

11 Orazov I., Sadybekov M.A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Mathematics (Iz. VUZ). — 2012. — V. 56, №2. — P. 60–64.

Received 23.02.15

Садыбеков М., Ділдәбек Г., Тенгаева А. ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ ҮШІН ШЕКАРАНЫҢ БІР БӨЛІГІНДЕ ҚАРАМА-ҚАРСЫ АҒЫНДАРМЕН БЕРІЛГЕН БІР БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Жұмыста жартыдөңгелектегі Лаплас теңдеуі үшін шекараның бір бөлігінде қарама-қарсы ағындармен берілген бір бейлокал шеттік есеп зерттелінеді. Бұл есептің ерекшелігі Фурьенің айнымалыны ажырату әдісін тікелей қолданудың мүмкін еместігі болып табылады. Бұл мәселе, берілген есепке сәйкес жәй дифференциалдық теңдеулер үшін (айнымалыны ажырату кезінде пайда болатын) спектралдық есептің меншікті мәндері жүйесінің базис құрамайтындығымен байланысты. Жұмыста осы меншікті функцияларды негізге ала отырып, базис құрайтын арнайы (көмекші) функциялар жүйесі құрылады. Осы жаңа базис бейлокал шеттік есепті шешу үшін қолданылады. Есептің классикалық шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденген.

Садыбеков М., Дилдабек Г., Тенгаева А. О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ПОТОКАМИ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

В работе исследуется одна нелокальная краевая задача для уравнения Лапласа в полукруге, с противоположными потоками на части границы. Особенностью этой задачи является невозможность прямого применения метода разделения переменных Фурье. Это вызвано тем, что соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения (возникающего при методе разделения переменных) имеет систему собственных функций, не образующих базис. В работе, основываясь на этих собственных функциях, строится специальная (вспомогательная) система функций, которая уже образует базис. Этот новый базис используется для решения нелокальной краевой задачи. Доказаны существование и единственность классического решения задачи.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 1 (55). С.89–100*

УДК 517.95

Б.Т. Торебек

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: turebekb85@mail.ru

ФУНКЦИЯ ГРИНА ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ШАРЕ

Работа посвящена исследованию вопросов построения явного вида функции Грина третьей краевой задачи для многомерного шара. При построении этой функции используется представление фундаментального решения уравнения Лапласа в виде ряда. Получено интегральное представление функции Грина и для некоторых значений параметров задачи представления в элементарных функциях.
Ключевые слова: *уравнение Пуассона, третья краевая задача, гармоническая функция, фундаментальное решение, функция Грина.*

Введение

Задача Дирихле для уравнения Пуассон

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega,\ u(x) = \psi(x),\ x \in \partial\Omega,$$

в области $\Omega \subset R^n,\ n \geq 2$, с регулярной границей $\partial\Omega$ является классической и хорошо исследованной задачей. Ее решение существует, единственно и представляется с помощью функции Грина $G_D(x,y)$ в виде:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_D(x,y) f(y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D(x,y)}{\partial \nu_y} \psi(y) dS_y.$$

Keywords: *Poisson equation, third boundary value problem, harmonic function, fundamental solution, Green's function.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J08, 35J25, 65N80.

Здесь и далее $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. В случае, когда $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ является единичным шаром, функция Грина задачи Дирихле может быть построена методом отражений и имеет вид (см. например [1], стр.51):

$$G_D(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y) - \varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right)\right],$$

где $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь единичной сферы в R^n, а $\varepsilon(x-y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\varepsilon(x-y) = \begin{cases} \ln\frac{1}{|x-y|}, \ n=2, \\ \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, \ n \geq 3. \end{cases}$$

Наряду с задачей Дирихле, классической и хорошо исследованной является третья краевая задача для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega, \ \frac{\partial u(x)}{\partial\nu} + au(x) = g(x), \ x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Классическим решением задачи (1) назовем функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1).

Известно следующее утверждение (см. [2])

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1) существует. Тогда*

если $a > 0$, то оно единственно;

если $a \leq 0$, то

1) при a — нецелое, оно единственно;

2) при $a = -m$, $m = 0, 1, \ldots$, оно единственно с точностью до гармонических полиномов степени m.

Для дальнейшего исследования задачи (1) мы вводим понятие функции Грина. Как видно из утверждений теоремы 1, понятие функции Грина задачи (1), как в случае классической задачи Дирихле, можно ввести только для случаев $a > 0$ или $a < 0$ и a — нецелое.

В настоящей работе построен явный (интегральный) вид функции Грина $G_a(x,y)$ для случая $n \geq 3$ при $a > 0$ или $a < 0$ и a — нецелое. А также приведены примеры для частных случаев a, при которых функция $G_a(x,y)$ может быть представлена в терминах элементарных функций.

Отметим, что в последнее время возобновился интерес к построению в явном виде функций Грина классических задач. В [3], [4] с помощью гармонических функций Грина задач Дирихле, Неймана и Робина построены функции Грина бигармонических и полигармонических задач Дирихле, Неймана и Робина в двумерном круге. В [5], [6], [7] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре. Заметим также, что построению в явном виде функций Грина задачи Робена в круге посвящены работы [2], [8].

1 Определение функций Грина

Приведем следующее определение.

Функцией Грина задачи (1) в области Ω называется функция $G_a(x,y)$ двух точек $x, y \in \bar{\Omega}$ обладающая свойствами:

$$\Delta G_a(x,y) = \delta(x-y), \ (x,y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial G_a(x,y)}{\partial \nu_y} + aG_a(x,y) = 0, \ y \in \partial\Omega.$$

Если решение задачи (1) существует, то это решение может быть представлено в интегральном виде с помощью функции Грина $G_a(x,y)$ по формуле (см.[9], с.286):

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_a(x,y) f(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} G_a(x,y)\, g(y)\, dS_y.$$

Под функцией Грина задачи (1) понимают [9, с. 286] функцию, имеющую представление

$$G_a(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y) + h(x,y)\right],$$

где $h(x,y)$ — гармоническая в области Ω функция.

Хотя определение функции Грина задачи (1) введено в математической литературе, но построение явного вида этой функции является открытой задачей. Существуют различные способы построения функции Грина классических краевых задач. Для многих видов областей она построена в явном виде. А для задачи (1) в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей. Здесь имеются лишь примеры для простейших областей — круг [8], цилиндр [10], полуплоскость [11] и т.п.

2 Вспомогательные результаты

Следующая лемма доказана в работе [12].

Лемма 1. *Для фундаментального решения оператора Лапласа при $n \geq 3$ имеют место представления*

$$\varepsilon(x-y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right),\ |x|<|y|, \tag{2}$$

где $H_k^{(i)}(\cdot)$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k, обладающих свойством ортонормированности:

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}H_k^{(i)}(x)\,H_m^{(j)}(x)\,dS_x=\delta_{ij}\delta_{km},$$

h_k — количество этих полиномов, δ_{ij}, δ_{km} — символы Кронекера.

Число h_k определяется по формуле (см. [13])

$$h_k=\frac{(2k+n-2)(k+n-3)!}{k!\,(n-2)!}\ .$$

Лемма 2. *Для функций $\varepsilon\left(x\,|y|-\frac{y}{|y|}\right)$ справедливо равенство*

$$\varepsilon\left(x\,|y|-\frac{y}{|y|}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k\,|y|^k}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right), \tag{3}$$

Доказательство. Подставляя $x=x\,|y|$, $y=\frac{y}{|y|}$ в формулу (2), получим

$$\varepsilon\left(x\,|y|-\frac{y}{|y|}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\frac{|x\,|y||^k}{|y/\,|y||^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x\,|y|}{|x\,|y||}\right)\times$$

$$\times H_k^{(i)}\left(\frac{y/|y|}{|y/|y||}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|y|^{k+n-2}}{2k+n-2}\frac{|x|^k|y|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x|y|}{|x||y|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y|y|}{|y||y|}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k|y|^k}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Лемма доказана. □

3 Основные утверждения

Теорема 2. *Пусть $a > 0$ или $a < 0$ и a — нецелое, тогда функция Грина задачи (1) имеет вид*

1) Если $a > 0$, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{\omega_n}\int_0^1 s^{a-1}\varepsilon\left(sx|y| - \frac{y}{|y|}\right)ds. \tag{4}$$

2) Если $a < 0$ и a — нецелое, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{\omega_n}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{|x|^k|y|^k}{k+a}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)+\right.$$

$$\left.\int_0^1 s^{a-1}\left(\varepsilon\left(sx|y| - \frac{y}{|y|}\right) - \sum_{k=0}^{m}|x|^k|y|^k\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)\right)\right], \tag{5}$$

где $m = -[a]+1$, $H_k^{(i)}(\cdot)$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k.

Доказательство. Функцию $G_a(x,y)$ будем искать в следующем виде:

$$G_a(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y) + h(x,y)\right],$$

где функция $h(x,y)$ является гармонической и по x и по y, причем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y} + a\right)h(x,y)\Big|_{\partial\Omega} = -\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y} + a\right)\varepsilon(x-y)\Big|_{\partial\Omega},\ y\in\partial\Omega. \tag{6}$$

Для нахождения функции $h(x,y)$ мы используем представление этой функции в виде ряда (2). Согласно лемме 1 при всех $|x| < |y| \leq 1$, для функции $\varepsilon(x-y)$ имеет место равенство (2). Если применить оператор $\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)$ к функции $\varepsilon(x-y)$, то в силу равенства (9) при $|x| < |y| \leq 1$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)\varepsilon(x-y)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+n-2}\frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2-k-n+a)}{2k+n-2}\frac{|x|^k}{|y|^{k+n-2}}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Если $|y|=1$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)\varepsilon(x-y)\bigg|_{|y|=1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2-k-n+a)}{2k+n-2}|x|^k\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right). \tag{7}$$

Гармоническую функцию $h(x,y)$, удовлетворяющую условию (6), будем искать в виде ряда

$$h(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k|x|^k|y|^k\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right),$$

где b_k — неизвестные постоянные

Применяя оператор $\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)$ к функции $h(x,y)$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)h(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial\nu_y}+a\right)\sum_{k=0}^{\infty}b_k|x|^k|y|^k\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k+a)|x|^k|y|^k\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right)H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Если $|y| = 1$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} + a\right) h(x,y)\Big|_{|y|=1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (k+a) |x|^k \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right). \quad (8)$$

Используя равенство (6) с учетом разложений (7) и (8), найдем

$$b_k = -\frac{(2-k-n+a)}{2k+n-2}\frac{1}{k+a} =$$

$$= -\frac{(2-2k-n+k+a)}{2k+n-2}\frac{1}{k+a} = \frac{1}{k+a} - \frac{1}{2k+n-2}.$$

Таким образом, неизвестная гармоническая функция имеет вид

$$h(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{2k+n-2}\right)|x|^k |y|^k \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right). \quad (9)$$

Обозначим

$$h_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right),$$

$$h_2(x,y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k |y|^k}{2k+n-2} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right).$$

Легко показать, что справедливо равенство

$$h_2(x,y) = -\varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right).$$

Далее, для функции $h_1(x,y)$ в случае $a > 0$ имеем

$$h_1(x,y) = \int_0^1 s^{a-1}\left\{\varepsilon\left(sx|y| - \frac{y}{|y|}\right)\right\} ds, \quad (10)$$

т.е. функция $G_a(x,y)$ в этом случае имеет вид (4).

Если $a \leq 0$ и a — нецелое, то

$$h_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right),$$

где $m = -[a] + 1$.

Далее, для второго слагаемого в последнем равенстве имеем

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) =$$

$$= \int_0^1 s^{a-1}\left(\varepsilon\left(sx|y| - \frac{y}{|y|}\right) - \sum_{k=0}^{m} |x|^k |y|^k \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)\right). \quad (11)$$

В этом случае для $h_1(x,y)$ получаем

$$h_1(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{|x|^k |y|^k}{k+a} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right) +$$

$$\int_0^1 s^{a-1}\left(\varepsilon\left(sx|y| - \frac{y}{|y|}\right) - \sum_{k=0}^{m} |x|^k |y|^k \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right) H_k^{(i)}\left(\frac{y}{|y|}\right)\right).$$

Следовательно, если $a \leq 0$ и a — нецелое, то для функции $G_a(x,y)$ имеет место равенство (5). Теорема доказана. $\square$

4 Замечания и примеры

Замечание 1. *Отметим, что для некоторых конкретных значений параметра a вычисление интегралов* (10) *и* (11) *приводит к элементарным функциям.*

Замечание 2. *Для любых (даже целых) значений параметра a нахождение интегралов* (10) *и* (11) *требует довольно сложных вычислений.*

Замечание 3. *Пусть* $a = \frac{n-2}{2}$, $n \geq 3$. *Тогда функция Грина задачи* (1) *легко вычисляется и представляется в виде*

$$G_a(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon(x-y) + \varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right)\right].$$

Отметим, что данное представление очень похоже на функцию Грина задачи Дирихле.

Пример 1. *В случае* $a = 3$, n *— четное:*

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) - \frac{1}{\omega_n(2n-3)|x|^2|y|^2\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2n-2}} -$$

$$-\frac{2(n-2)(x,y)}{\omega_n(2n-2)(2n-3)|x|^4|y|^4}\left(\frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2n-2}} - 1\right) +$$

$$+\frac{1}{\omega_n(2n-1)(2n-3)|x|^2|y|^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2n-1)\dots(2n-2k-1)|x|^{2k}|y|^{2k}}{(n-1)\dots(n-k-1)2^{k+1}\left(|x|^2|y|^2 - (x,y)^2\right)^{k+1}}\times$$

$$\times\left(1 + \frac{2(n-2)(x,y)^2}{|x|^2|y|^2}\right)\left[\frac{|x|^2|y|^2 - (x,y)}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2n-2k-2}} + (x,y)\right] +$$

$$+\frac{(|x||y|)^{2n-2}(2n-1)!!\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}{1-(x,y)}}{\omega_n 2^n n!(2n-3)\left(|x|^2|y|^2 - (x,y)^2\right)}\left(1 + \frac{2(n-2)(x,y)^2}{|x|^2|y|^2}\right).$$

Пример 2. *Пусть $a = 2$, n — нечетное, тогда*

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) - \frac{1}{\omega_n (2n-1)|x|^2|y|^2}\left[\frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2n-2}} - 1\right] +$$

$$+\frac{(x,y)}{\omega_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k(n-1)!(2n-2k-3)!!(|x||y|)^{2k-2}}{(n-k-1)!(2n-1)!!\left(|x|^2|y|^2-(x,y)^2\right)^{k+1}}\times$$

$$\times\left[\frac{|x|^2|y|^2-(x,y)}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{n-k-\frac{1}{2}}} + (x,y)\right].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК. Проект № 0570/ГФ3, 2013г.–2015г.

Литература

1 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 295 с.

2 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. — 2014. — V.1611. — P. 255–260.

3 Begehr H. Biharmonic Green functions. //Le matematiche. — 2006. — V.LXI, № II. — P. 395–405.

4 Begehr H. Iterated Polyharmonic Green Functions for Plane Domains // Acta Mathematica Vietnamica. — 2011. — V.36, № 2. — P. 169–181.

5 Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский математический журнал. — 2008. — Т.49, № 3. — С. 305–307.

6 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т.48, № 3. — С. 435–438.

7 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Математический журнал. — 2008. — Т.8, № 1(27). — С. 50–58.

8 Begehr H., Vaitekhovich T. Some harmonic Robin functions in the complex plane // Advances in Pure and Applied Mathematics. — 2010. — V.1, № 1. — P. 19–34.

9 Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Differential Equations of Mathematical Physics. — Amsterdam, North-Holland Publ., 1964. — 712 p.

10 Carlos Perez-Arancibia, Mario Duran. On the Green's function for the Helmholtz operator in an impedance circular cylindrical waveguide // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — V.235, № 1. — P. 244–262.

11 Melnikov Yu.A. Construction of Green's Functions for the Two-Dimensional Static Klein-Gordon Equation // Journal of Partial Differential Equations. — 2011. — V.24, № 2. — P. 114–139.

12 Karachik V.V. On One Set of Orthogonal Harmonic Polynomials //Proceedings of the American Mathematical Society. — 1998. — V.126, № 12. — P. 3513–3519.

13 Bateman H. Higher transcendental functions. V.2. Mc-Graw-Hill Book Company Inc., 1953. — 414 p.

Статья поступила в редакцию 13.02.15

Төребек Б.Т. ШАРДА БЕРІЛГЕН ҮШІНШІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

Бұл жұмыс көпөлшемді шардағы үшінші шеттік есептің Грин функциясының айқын түрін құру мәселесін зерттеуге арналған. Осы функцияны құру кезінде Лаплас теңдеуінің іргелі шешімінің қатар түріндегі кейіптемесі қолданылады. Грин функциясының интегралдық кейіптемесі алынған және есеп параметрлерінің кейбір мәндерінде элементар функциялар арқылы жазуға болатындығы көрсетілген.

Torebek B.T. GREEN FUNCTION OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A BALL

The paper is devoted to the investigation of questions about constructing in the explicit form of the Green function of the third boundary value problem in a multi-dimensional ball. For constructing this function we use the representation of the fundamental solution of the Laplace equation in the form of a series. An integral representation of the Green function is obtained and for some values of the parameters the problem is presented via elementary functions.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 1 (55).*

ХРОНИКА

Вильжан Мавлютинович Амербаев

На 84 году жизни в г. Москве скоропостижно скончался видный ученый, Лауреат Государственной Премии СССР, академик Национальной Академии Наук Республики Казахстан, профессор Вильжан Мавлютинович Амербаев — главный научный сотрудник Института проблем проектирования в микроэлектронике Российской Академии Наук.

Вильжан Мавлютинович родился 25 апреля 1931г. в городе Талдыкургане Казахской ССР в семье известного математика-педагога. Высшее образование получил в стенах Казахского Государственного Университета, где он работал ассистентом с 1954–1957 годы. Аспирантуру закончил в 1960г. при Математическом институте им. Стеклова АН СССР. По его словам, здесь он получил настоящее математическое образование и стал профессиональным математиком, и без математики он уже не представлял свою жизнь. Первый серьезный результат по математике он получил в области численного обращения преобразования Лапласа в период учебы в аспирантуре (1958–1960 гг.) и работы в Лаборатории машинной и вычислительной математики АН КазССР (1960–1965 гг.). Здесь ему удалось разработать методы восстановления оригинала путем разложения его в ряд по ортогональным многочленам на конечном промежутке.

Вильжану Мавлютиновичу удается разработать теоретическую основу модулярной арифметики в кольце главных идеалов, уже работая в научном центре микроэлектроники в городе Москве (Зеленоград) (1966–1971 гг.). Им создана алгебраическая концепция параллельных вычислений, принципы арифметического самокорректирующего кодирования. Эти результаты легли в основу его докторской диссертации "Вычисление в кольце главных идеалов и их приложения в вычислительной технике".

Амербаевым В.М проводились работы по использованию модулярной арифметики в алгоритмах шифрования путем распараллеливания процедур арифметических операций в вычислительных системах. Им были исследованы модулярные вычислительные системы как прототип параллельных гомоморфных вычислений в кольце целых чисел. Развитие этой идеи привело к разработке новой концепции — построение интромодулярных вычислительных систем. Интромодулярные вычисления открывают пути эффективной реализации парадигмы гомоморфных облачных вычислений на однородной вычислительной среде с гибким управлением надежностью вычислений в целом.

Им также было введено понятие "левообратимой бинарной операции" , которое было использовано при создании блочных шифров, что позволяет существенно повысить скорость процедур шифрования, ориентированных на параллельную и конвейерную обработку данных.

Будучи заведующим Лабораторией машинной и вычислительной математики АН КазССР (1962–1965 гг.) Вильжан Мавлютинович Амербаев был одним из организаторов создания в 1965г. Института математики и механики Академии наук Казахской ССР. Он, проработав всего шесть месяцев, был приглашен в Москву в Центр микроэлектроники для участия в впервые разрабатываемых в Советском союзе ЭВМ высокой производительности на базе модулярной арифметики.

Вильжан Мавлютинович дважды возвращается в Институт математики и механики. В первый раз в 1971г. по приглашению Президиума АН КазССР в качестве заместителя директора по науке. Здесь он организовывает научные лаборатории больших систем, оптимального кодирования, методов оптимизации. Он избирается членом-корреспондентом АН КазССР, активно принимает участие в создании вычислительного центра коллективного пользования.

В 1976г. по семейным обстоятельствам возвращается в Москву, работает там же, в Центре микроэлектроники. Во второй раз в 1988г. академик У.М. Султангазин, став Президентом АН КазССР, приглашает члена-корр. АН КазССР В.М. Амербаева в свою команду в качестве члена Президиума и академика-секретаря отделения физико-математических наук. Вскоре, в 1989г., на очередных выборах членов Академии В.М. Амербаев избирается академиком АН КазССР. В 1994г., после ухода У.М. Султангазина с поста Президента, В.М. Амербаев возвращается снова в Москву.

Основные его научные публикации (более 150 статей, монографий и патентов) относятся к областям компьютерной алгебры и цифровых методов обработки сигналов, теории кодирования, параллельных вычислений, помехоустойчивого арифметического кодирования, криптографии, численных методов интегральных преобразований Лапласа, сверхточных вычислений. Под его руководством было защищено около 30 кандидатских и докторских диссертаций.

За цикл работ в области практического приложения методов модулярной арифметики в технических системах в составе авторского коллектива получает Государственную премию СССР. Имеет правительственные награды.

В Вильжане Мавлютиновиче сочеталось редкое качество незаурядного ученого с такой человеческой ценностью как готовность оказать помощь и относиться к людям с пониманием. С присущей ему проницательностью он умел замечать перспективных молодых сотрудников. Многие из них становились его учениками, которых он учил и опекал до последних дней своей жизни. Его авторитет помогал им в сложные моменты их жизни. Наиболее упорные из его учеников стали известными учеными.

Святая память о Вильжане Мавлютиновиче Амербаеве навсегда останется в сердцах многочисленных его учеников и близких соратников.

И. Пак, Р. Бияшев, С. Нысанбаева

ХРОНИКА

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ РАХИМБЕРДИЕВА МАРАТА ИСИМГАЛИЕВИЧА

ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРА, КРУПНОГО СПЕЦИАЛИСТА В ОБЛАСТИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

(30.01.1945 09.08.2008)

Рахимбердиев Марат Исимгалиевич родился в городе Зайсан Восточно-Казахстанской области. Отец — военнослужащий, мать медицинская сестра, в семье шесть сыновей, Марат — четвертый. В детстве, в связи с переводами по службе отца, жил и учился в разных городах Казахстана (Усть-Каменогорске, Караганде, Кокчетаве, Гурьеве). Любимым предметом в школе была математика, но он также активно занимался спортом, неоднократно побеждал на республиканских соревнованиях по спортивной гимнастике среди юниоров. Начал свою трудовую деятельность в 1962 году после окончания средней школы в Гурьеве. Два года работал на электростанции мотористом и машинистом котла.

В 1964 году поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Специализировался на кафедре дифференциальных уравнений под руководством профессора В.М. Миллионщикова. После окончания университета в 1969 году по рекомендации кафедры поступил в аспирантуру отделения математики мех-мата МГУ. В университете активно занимался как научной, так и общественной работой, сначала в интернациональном секторе комитета комсомола МГУ, а затем дважды избирался секретарем комсомольской организации мехмата (1970–1972 гг.). В 1970 году женился на студентке мех-мата Алексеевой Людмиле Алексеевне. В 1974 году у них родилась дочь Марина.

В аспирантуре под руководством В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова им была выполнена кандидатская диссертация "Об устойчивости особых показателей и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией", защита которой состоялась в марте 1975 года на диссертационном совете мех-мата МГУ. Известные ученые Д.В. Аносов и Ю.С.Богданов — его оппоненты — очень высоко оценили научные результаты молодого ученого и в дальнейшем их связывала теплая дружба и сотрудничество.

После окончания аспирантуры в 1974 году М.И.Рахимбердиев был распределен в Институт математики и механики АН Казахской ССР, где работал сначала в лаборатории дифференциальных уравнений (зав. акад. АН КазССР Жаутыков О.А.), а с 1978 года — в лаборатории численных методов теории переноса (зав. акад. АН КазССР Султангазин У.А.). С 1991 года с образованием Института космических исследований НАН РК он — заведующий лаборатории и заместитель директора по науке. В 1996 году вернулся в Институт теоретической и прикладной математики (позднее переименованный в Институт математики), где заведовал лабораторией динамических систем до последних дней своей жизни.

Докторскую диссертацию на тему "Устойчивость и распределение показателей Ляпунова" блестяще защитил в марте 1992 года в Минске на диссертационном совете Института математики АН Беларусской ССР. Научный консультант В.М.Миллионщиков. Оппоненты: Ю.Л. Далецкий, Н.А. Изобов, Е.Л. Тонков, ведущая организация — Санкт-Петербургский государственный университет.

Рахимбердиевым М.И. опубликовано более 130 научных работ. Наиболее существенные научные результаты получены в следующих направлениях: экспоненциально дихотомические системы [1, 2] и грубые свойства неоднородных линейных дифференциальных систем [3], критерий выполнимости условия Перрона [20, 22, 26, 29, 31]; введение и изучение классов линейных систем с различными свойствами грубости асимптотического поведения их решений [23], исследование центральных показателей как разрывных функций параметров системы [10, 13], изучение вопроса о бэровской классификации показателей Ляпунова как разрывных функций [11], описание распределения значений показателей Ляпунова вблизи их точек разрывов как функций системы в различных ситуациях. Им дано описание замыкания множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией в метрическом пространстве, систем с равномерной метрикой [1, 2], описано открытое ядро множества неоднородных систем, имеющих хотя бы одно ограниченное решение [3]; совместно с Н.Х. Розовым решена задача распределения показателей Ляпунова периодических систем относительно малых в среднем возмущений коэффициентов системы [6, 7]. Для ряда систем решены задачи о локализации спектра показателей на основе их векторного представления. Им установлена строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных дифференциальных систем и уравнений [11, 34]. Изучены экспоненциально разделенные и равномерно неразделенные гомоморфизмы векторных расслоений динамических систем, введено понятие сильно положительного гомоморфизма и установлена его эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом n-1 (n-размерность векторного расслоения), а для n-k -ой внешней степени гомоморфизма эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом k [19, 20, 26, 29]; получены коэффициентные признаки экспоненциальной разделенности линейных систем произвольного индекса [22]; показано, что замыкание множества систем с экспоненциальной близостью совпадает с множеством равномерно неразделенных систем [4, 23]. Им получены распределения показателей Ляпунова для линейных расширений динамической системы на торе [16, 24] и совместно со Т.И Смирновым та же задача решена для периодических аппроксимаций эргодический динамической системы на торе [25]. Установлены необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной разделенности линейного расширения динамической системы на векторном расслоении в терминах послойной сильной положительности семейства автоморфизмов,порождающего динамическую систему [27]; найдены достаточные условия устойчивости старшего показателя семейства автоморфизмов векторного расслоения [19]; установлены типичные свойства однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений при бифуркациях экспоненциальной устойчивости [30]; найдены условия разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений при их возмущении [35].

Под влиянием У.М. Султангазина и в сотрудничестве с ним существенные результаты получены совместно с их учениками Цаем М.Д, Калыбаевой А.А. при изучении свойств дискретных уравнений Больцмана в пространственно однородном случае, исследована устойчивость положения равновесия, дано описание инвариантных множеств, установлены условия топологической и дифференцируемой эквивалентности пространственно однородных моделей [9, 17, 26, 32]; совместно с Панкратовой И.Н. исследованы бифуркационные свойства многомерных аналогов нелинейных логистических уравнений, дано описание структуры инвариантных множеств дискретного аналога нелинейного логистического разностного уравнения [33]; разработаны некоторые математические модели биологических популяций, которые нашли применение при решении ряда прикладных задач, в частности, при изучении динамики популяции сайгаков и саранчи на территории Казахстана и др.

Много времени он уделял преподавательской деятельности. Более тридцати лет (с 1975 года) по совместительству преподавал на механико-математическом факультете Казахского государственного университета (КазНУ им. аль-Фараби). Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций. Постоянно занимался научной экспертизой: член Президиума ВАК РК (1998–2000), член диссертационного совета по защите докторских диссертаций при Институте математики МОН РК, с 2001 по 2004 — заместитель председателя, с 2004г. по 2008 г. — председатель этого совета. С 1978 года референт реферативных журналов "РЖ Математика", "Mathematical Review "(член AMS с 1978 г.), постоянный рецензент журналов "Дифференциальные уравнения", "Известия НАН РК. Серия физико-математическая"и др. Был одним из организаторов и заместителем главного редактора "Математического журнала".

Марат Исимгалиевич всегда активно занимался научно-организаторской деятельностью. В 1996–97 гг. исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук НАН РК. С 1997 по 2004 г. являлся председателем секции физико-математических наук рабочей группы Высшей научно-технической комиссии при Правительстве РК. В 1997–1999, 2000–2002, 2003–2005, 2006–2008 гг. — научный руководитель республиканских программ фундаментальных исследований по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики.

За научно-педагогическую и научно-организаторскую деятельность в 2005 году он был награжден медалью Республики Казахстан "Ерен еңбегі үшін".

В жизни Марат Исимгалиевич был замечательным человеком, высокоинтеллигентным, добрым, отзывчивым, всегда готовым помочь и словом и делом, и в то же время принципиальным и твердым, когда того требовали обстоятельства. Светлая память о нем — крупном ученом и педагоге, прекрасном организаторе и руководителе — навсегда останется в сердцах всех, с кем он соприкасался в течение своей яркой и многогранной научной, педагогической и общественной деятельности.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Список основных трудов М.И. Рахимбердиева

1 Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией. 1 // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т.10, №14. — С. 659–670.

2 Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией. 2 // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т.10, №10. — С. 1797–1807.

3 Некоторые топологические свойства линейных неоднородных систем // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т.12, №5. — С. 931–936.

4 О линейных системах, связанных отношением почти проводимости с системами скалярного типа // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т.13, №4. — С. 616–625.

5 Об одном отношении эквивалентности во множестве систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН Каз.ССР. Серия физ.-мат. — 1977. — №3. — С. 55–59.

6 Распределение показателей Ляпунова линейных систем с периодическими коэффициентами, близкими в среднем к постоянным // Диф-

ференц. уравнения. — 1978. — Т.14, №9. — С. 1710–1714 (совм. с Розовым Н.Х.).

7 Распределение показателей Ляпунова линейных стационарных систем при малых в среднем периодических возмущениях коэффициентов // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т.14, №10. — С. 1913–1914 (совм. с Розовым Н.Х.).

8 О локализации спектра линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН Каз.ССР. Серия физ-мат. — 1980. — №1. — С. 72–76 (совм.с Розовым Н.Х.).

9 Об устойчивости положения равновесия дискретного уравнения Больцмана // Известия АН Каз ССР. Серия физ.-мат. — 1981. — №1. — С. 42–46 (совм. с У.М.Султангазиным).

10 О свойстве неустойчивости центральных показателей линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1981. — Т.36, №4. — С. 277.

11 О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. — 1982. — Т.31, №6. — С. 925–931.

12 О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т.18, №11. — С. 2016–2017.

13 О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т.19, №2. — С. 253–259.

14 Об одном типичном свойстве показателей Ляпунова // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. — 1983. — №5. — С.71–73.

15 О представлении и изменениях при возмущении системы показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. — 1984. — Т.39, № 4. — С. 104.

16 О показателях Ляпунова линейных расширений динамической системы на торе // Матем. заметки. — 1984. — Т.36, №3. — С. 309–317.

17 Асимптотические свойства дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае // Известия АН Каз. ССР. Серия физ.-мат. — 1985. — №5 (совм. с Цаем М.).

18 Условия грубой экспоненциальной устойчивости // Успехи матем. наук. — 1987. — Т.42, №4. — С. 118.

19 Об условиях непрерывности старшего показателя линейного расширения динамической системы // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т.24,

№4. — С. 591–600.

20 Об экспоненциальной разделенности с максимальным индексом и равномерной сильной положительности семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т.25, №2. — С. 234–240.

21 Некоторые свойства старшего показателя Ляпунова как функции параметра // Успехи математических наук. 1989. Т.44. №4. С. 209

22 Критерий экспоненциальной разделенности линейной системы // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т.30, №7.— С. 70–72.

23 Об экспоненциальной разделенности линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1994. — Т.49, №4.— С. 141.

24 Соотношение классов семейств автоморфизмов векторного расслоения с различными свойствами грубости // Известия НАН РК. Серия физ.- мат. — 1994. — №1. — С. 73–77.

25 О свойствах линейных расширений сдвигов на торе, близких к эргодическим // Известия МН-АН РК. Серия физ.- мат. — 1997. — №3. — С. 47–57 (совм. с Смирновым Т.И.).

26 Инвариантные множества и предельные точки дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае // Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат. — 1997. — №5. — С. 24–33 (совм. с Калыбаевой А.А.).

27 Положительность и экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов векторного расслоения // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т.35, №1. — С. 121–124.

28 Об условии слабой экспоненциальной разделенности линейного расширения динамических систем // Труды Института математики АН Беларуси. — 2000. — С. 51–58.

29 Соотношение топологической структуры векторного расслоения и условия равномерной экспоненциальной разделенности семейства его морфизмов // Математический журнал. — 2002. — Т.1, №2. — С. 66–72.

30 Равномерная экспоненциальная разделенность семейства морфизмов векторного расслоения // Математический журнал. — 2001. — Т.1, №1. — С. 116–117.

31 Свойство старшего показателя Ляпунова как разрывной функции системы // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т.38, №6. — С. 855.

32 Пространственно однородная дискретная модель уравнения Больцмана. Интегрируемый случай // Математический журнал. — 2002. — Т.1, №1. — С. 56–60 (совм. с Калыбай А.А.).

33 Канонический вид многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Математический журнал. — 2003. — Т3, №1. — С. 54–58.

34 О разрывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т.4, №11. — С. 1570.

35 Об условии разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений при их возмущении // Математический журнал. — 2005. — Т.5, №2(16). — С. 71–73.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, №1 (55), 2015

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте http://www.math.kz
Института математики и математического моделирования МОН РК
10.04.2015 г.

Тираж 300 экз. Объем 114 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz