

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*MATHEMATICAL JOURNAL*

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, № 4 (62), 2016

Номер посвящается 80-летию академика НАН РК У.М. Султангазина

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

*Главный редактор: М.А. Садыбеков*

*Заместитель главного редактора: А.Т. Асанова*

*Ответственная за выпуск: Л.А. Алексеева*

*Редакционная коллегия:*

Л.А. Алексеева, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов, Г.И. Бижанова, Н.К. Блиев,  
В.Г. Воинов, Н.С. Даирбеков, М.Т. Дженалиев, Д.С. Джумабаев,  
А.С. Джумадильдаев, Т.Ш. Кальменов, К.Т. Мынбаев, А.Ж. Найманова,  
М. Отелбаев, И.Н. Панкратова, М.Г. Перетятыкин, И.А. Тайманов (Россия),  
М.И. Тлеубергенов, С.Н. Харин.

*Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева*

*Адрес редакции:*

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

© Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2016 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 16

№ 4 (62)

2016

---

---

<i>Султангазин Умирзак Махмутович</i> (к 80-летию со дня рождения) .....	7
<i>Международная научная конференция "Математические методы и современные космические технологии"</i> .....	13
<i>Акыш А.Ш.</i> Методы функции Ляпунова для некоторых дискретных моделей уравнения Больцмана .....	16
<i>Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Сулеев Т.А.</i> 3D-модель наноспутника "Политех-1" и расчет его физико-механических параметров с использованием ПО "SolidWorks" ..	31
<i>Ахмедов Д.Ш., Богуспаев Н.Б., Раскалиев А.С., Аверьянов А.А.</i> Имитационное моделирование одноканального коррелятора приемника GPS на базе технологии SDR ..	42
<i>Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.</i> Об однородной параболической задаче в бесконечной угловой области .....	60
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М., Утешова Р.Е.</i> Об аппроксимации задачи нахождения ограниченного решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с существенными особенностями на концах конечного интервала .....	77
<i>Жилисбаева К.С., Саспаева А.Д.</i> Об асимптотической устойчивости программного движения космического аппарата .....	86
<i>Жумабек Т.М., Минглибаев М.Дж.</i> Об одном частном случае плоской ограниченной задачи трех тел .....	99
<i>Иванов К.С., Тулеkenова Д.Т.</i> Адаптивный привод для космической техники-привод солнечных батарей .....	121
<i>Kairatkyzy D., Mukasheva S.N., Toyshiev N.S.</i> Features of diurnal variations of the total electron content in the years of maximum and minimum solar activity .....	130
<i>Мартынов Н.И., Рамазанова М.А.</i> Статические краевые задачи плоской теории упругости неоднородной анизотропной среды .....	140
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Свойства потоков галактических космических лучей в период минимума солнечной активности .....	153
<i>Peretyat'kin M.G.</i> Invertible multi-dimensional interpretations versus virtual isomorphisms of first-order theories .....	166

<i>Сералиев А.М., Хасанов Э.Р.</i> Соответствие пространственного расположения районов глубокофокусной сейсмичности и экстремальных значений в вековых вариациях углов геомагнитного наклона .....	204
<i>Суйменбаев Б.Т., Алексева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р.</i> Компьютерное моделирование управления движением КА в гравимагнитном поле Земли в системе Matlab-Simulink .....	213
<i>Темирбекова Л.Н.</i> Параллельные алгоритмы решения многомерных коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений .....	232
<i>Тойшиев Н.С., Калдыбаев А.А., Нуракынов С.М.</i> Сильные ( $M \geq 7.0$ ) землетрясения на территории Альпийско-Гималайского орогенного пояса: связь с вариациями солнечной активности .....	239
<i>Турметов Б.Х., Абдуллаев Ж.</i> Операторный метод решения одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка .....	246
<i>Хайруллин Е.М., Наукенова М.Д.</i> О разрешимости одной граничной задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом	259
<i>Хачикян Г.Я., Кайраткызы Д., Андреев А.Б.</i> Долговременные тренды в вариациях продолжительности земных суток и частоты возникновения на планете землетрясений	270
<i>Цычуева Н.Ю., Акназарова Р.Б., Малахов Д.В., Витковская И.С.</i> Мониторинг природных биоопасностей с использованием данных дистанционного зондирования Земли	279
<i>Джаугаштин Казбек Есенжанович</i> (к 80-летию со дня рождения) .....	291

---

---

---

## CONTENTS

---

---

**Volume 16**

**No. 4 (62)**

**2016**

---

---

<i>Sultangazin Umirzak Makhmutovich</i> (to his 80-th anniversary) .....	7
<i>International Scientific Conference "Mathematical methods and modern space technology"</i> .....	13
<i>Akysh A.Sh.</i> Methods of Lyapunov functions for some discrete models for Boltzmann equation .....	16
<i>Alexeyeva L.A., Suimenbayeva Z.B., Suleyev T.A.</i> 3D-model of nano-satellite "Polytech-1" and calculation of its physico-mechanical parameters by software "SolidWorks" .....	31
<i>Akhmedov D.Sh., Boguspaev N.B., Raskaliyev A.S., Averyanov A.A.</i> Simulation modeling of a single-channel backend for GPS receiver based on SDR technology .....	42
<i>Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.</i> On the homogeneous parabolic problem in infinite corner domain .....	60
<i>Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M., Uteshova R.E.</i> On approximation of the problem of finding bounded on a finite interval solutions of the system of nonlinear ordinary differential equations with singularities at endpoints of the interval .....	77
<i>Zhilisbayeva K.S., Saspayeva A.D.</i> About asymptotical stability of programmed motion of spacecraft .....	86
<i>Zhumabek T.M., Minglibayev M.Zh.</i> About the particular case of the planar restricted three-body problem .....	99
<i>Ivanov K.S., Tulekenova D.T.</i> Adaptive drive for space technology-solar power .....	121
<i>Kairatkyzy D., Mukasheva S.N., Toyshiev N.S.</i> Features of diurnal variations of the total electron content in the years of maximum and minimum solar activity .....	130
<i>Martynov N.I., Ramazanova M.A.</i> Static boundary-value problems of the plane theory of elasticity of non-uniform anisotropic environment .....	140
<i>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</i> Properties of fluxes of galactic cosmic rays during minimum of solar activity .....	153
<i>Peretyat'kin M.G.</i> Invertible multi-dimensional interpretations versus virtual isomorphisms of first-order theories .....	166

<i>Seraliyev A., Khassanov E.</i> Correspondence of spatial location of deep seismicity and extreme values of secular variations of geomagnetic inclination's angles .....	204
<i>Suimenbayev B.T., Alexeyeva L.A., Suimenbayeva Z.B., Gusseinov S.R.</i> Computer modeling of control of spacecraft motion in gravimagnetic field of the Earth in Matlab-Simulink system .....	213
<i>Temirbekova L.N.</i> Parallel algorithms for solving multidimensional coefficient inverse problem for hyperbolic equations .....	232
<i>Toishiyev N., Kaldybaev A., Nurakynov S.</i> Strong ( $M \geq 7.0$ ) earthquakes on the territory of the Alpine-Himalayan orogenic belt: connection to solar activity variations .....	239
<i>Turmetov B.Kh., Abdullaev J.</i> Operator method of solving a class of linear fractional order differential equations .....	246
<i>Khairullin E.M., Naukenova M.D.</i> On solvability of one boundary-value problem for parabolic integro-differential equation with discontinuous coefficient .....	259
<i>Khachikyan G.Ya., Kairatkyzy D., Andreyev A.</i> The long-term trends in variations of the day length and frequency of earthquake occurrence at the globe .....	270
<i>Tsychuyeva N.Yu., Aknazarova R.B., Malahov D.V., Vitkovskaya I.S.</i> Natural biological hazard monitoring using Earth's remote sensing data .....	279
<i>Dzhaugashtin Kazbek Esenzhanovich</i> (to his 80-th anniversary) .....	291

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## УМИРЗАК МАХМУТОВИЧ СУЛТАНГАЗИН

(к 80-летию со дня рождения)



Султангазин Умирзак Махматович родился 4 октября 1936 года в пос. Кара-Оба Урицкого района Кустанайской области. С 1944 г. по 1953 г. учился в Кара-Обинской средней школе.

В 1953 г. он поступил на физико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова, который окончил с отличием в 1958 г. по специальности "Математика" и был рекомендован на преподавательскую деятельность

в том же университете, где проработал более двадцати лет, пройдя путь от ассистента до заведующего кафедрой Вычислительной математики.

В период с 1964 г. по 1965 г. Султангазин У.М. являлся стажером-исследователем Вычислительного центра Сибирского отделения Академии наук СССР в г. Новосибирске, а в 1968-1970 г.г. работал в этом научном центре в должности старшего научного сотрудника. В 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности "Вычислительная математика" на тему: "Метод расщепления для кинетического уравнения переноса" на Ученом совете Института математики Сибирского отделения Академии наук СССР, а в 1972 г. в этом же совете защитил докторскую диссертацию по специальности "Дифференциальные и интегральные уравнения" на тему: "Метод сферических гармоник для нестационарного кинетического уравнения переноса".

В 1974 г. Султангазину У.М. присвоено звание профессора, в 1975г. он избран членом-корреспондентом, в 1983 г. – академиком Академии наук Казахской ССР.



С 1978 года научная и организационная деятельность Султангазина У.М. неразрывно связана с Национальной Академией наук Казахстана.

С 1978 по 1989 годы, находясь на посту директора Института математики и механики Академии наук Казахской ССР, Султангазин У.М. внес весомый вклад в развитие теоретической и прикладной математики в Казахстане. Под руководством У.М. Султангазина Институт математики и механики в то время представлял собой крупный научный центр с актуальными направлениями в области математики, механики, вычислительной и прикладной математики; был организован Вычислительный центр коллективного пользования (ВЦКП) для всех академических институтов.

Академик У.М. Султангазин – талантливый организатор науки, что подтверждает его активная деятельность в Академии наук, снискавшая ему заслуженное уважение и огромный авторитет среди казахстанских ученых и зарубежных коллег. В 1985-1986 г.г. Султангазин У.М. – академик-секретарь Отделения физико-математических наук и член Президиума Академии наук Казахской ССР; в 1986-1988 г.г. – вице-президент Академии наук Казахской ССР.

В 1988-1994 г.г. Султангазин У.М. – Президент Национальной академии наук Республики Казахстан. Возглавляя науку Казахстана, он внес существенный вклад в коренную перестройку научно-организационной деятельности Академии наук, разработку концепции развития академических институтов, создание опытно-экспериментальной и укрепление материально-технической баз исследований, в процесс демократизации управления наукой. Под его непосредственным руководством были открыты три региональных отделения Академии наук в Южном, Западном и Восточном Казахстане, ряд новых институтов и научных центров. В 2002 году Султангазин У.М., как руководитель рабочей группы Межведомственной комиссии для выработки предложений по совершенствованию деятельности Национальной академии наук РК, провел большую организационную работу по сохранению статуса НАН РК в рамках Закона Республики Казахстан "О науке".

В 1996-1998 г.г. Султангазин У.М. – первый заместитель министра, вице-президент Министерства науки – Академии наук Республики Казахстан; в 2002-2003 г.г. – вице-президент Национальной Академии наук Республики Казахстан. В 1991 году был создан Институт космических ис-

следований, основателем и первым директором которого в течение 15 лет являлся академик Султангазин У.М., возглавляя его до последних дней жизни. Под его непосредственным руководством в 1994 году в Институте был организован Центр приема и обработки спутниковой информации, а в 2003 году на базе Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева был создан филиал Института – Центр космического мониторинга с лицензионным приемом и обработкой данных с индийских спутников серии IRS и данных с канадского спутника RADARSAT-1.

Высока роль академика Султангазина У.М. в становлении казахстанской космической отрасли. Султангазин Умирзак Махматович являлся научным руководителем четырех казахстанских программ научных исследований и экспериментов на борту орбитального комплекса "Мир" с участием космонавтов Т.О. Аубакирова и Т.А. Мусабаева (1991 г., 1994 г., 1998 г.) и Программы научных исследований и экспериментов Республики Казахстан на борту Международной космической станции с участием Т.А. Мусабаева (2001 г.), которые были разработаны учеными и специалистами ведущих академических и отраслевых институтов.

Султангазин У.М. внес большой вклад в разработку проекта Государственной Программы развития космической отрасли в Казахстане на 2005-2007 годы, утвержденной в 2005 году Указом Президента Республики Казахстан Назарбаева Н.А.

Академик НАН РК Султангазин У.М. – выдающийся ученый-математик с мировым именем, создатель казахстанской научной школы в области кинетической теории переноса. Под его руководством подготовлено 6 докторов и более 30 кандидатов наук. Академиком Султангазиным У.М. опубликовано более 300 научных работ. Его научные результаты получили практическое воплощение в решении задач расчета ядерных реакторов, атмосферной оптики, дистанционного зондирования, устойчивого развития и других актуальных для республики задач.

Много сил Султангазин У.М. уделял подготовке высококвалифицированных научных кадров для республики. Он являлся руководителем широко известных научных семинаров "Математическое моделирование и космические исследования" и "Научные проблемы дистанционного зондирования" при Институте космических исследований, городского научного семинара "Современные научные проблемы математики и механики" в

Казахском национальном университете им. Аль-Фараби, а также научных семинаров в АГУ им. Абая, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева и др.

С большим вниманием Умирзак Махмутович относился к работе с одаренными детьми. Будучи Президентом Малой академии наук Казахстана, а также возглавляя конкурсы, проводимые Центром "Дарын", и интеллектуальные конкурсы "Лидер XXI века", он с большой ответственностью подходил и к этой деятельности.

Научная и педагогическая деятельность У.М. Султангазина получили широкую известность и признание не только в Казахстане, но и за рубежом. Он был избран член-корреспондентом Российской Академии космонавтики, член-корреспондентом URSI (Международного союза научных работников радио, Бельгия). Являлся членом Управляющего совета IASA (Международного института прикладного системного анализа, Австрия) от Республики Казахстан, членом Канадского научного общества по дистанционному зондированию. В 2001 г. решением Исполкома Международной Ассоциации участников космических полетов (ASE) за заслуги в развитии новой отрасли – космических исследований в Казахстане академик Султангазин У.М. был награжден Большой бронзовой медалью международной Ассоциации. В 2002 г. решением Бюро Президиума Российской Академии космонавтики им. К.Э. Циолковского за большие заслуги в области космонавтики награжден Почетной грамотой. С 2004 года Султангазин У.М. работал в качестве национального эксперта по линии INTAS.

В качестве приглашенного профессора он читал лекции в ведущих зарубежных университетах и научных центрах: Карлов университет (г. Прага, 1972 г.), Электротехнический институт (г. Пльзень, 1972 г.), Стэнфордский и Мэрилендский университеты (США, 1978-1979 г.г.), Международная математическая школа им. Банаха (г. Варшава, 1985 г.), Парижский университет, Парижский институт автоматики и кибернетики, Колледж де Франц (г. Париж, 1986 г.), Киото университет (г. Киото, Япония, 1994-1995 г.г., 1999-2000 г.г.). В 1999 г. был приглашен Департаментом науки и новых технологий Правительства Индии в университеты г. Дели и г. Мадрас для чтения лекций по математическим проблемам нелинейного уравнения Больцмана и научным основам дистанционного зондирования, а также для участия в качестве Почетного гостя и выступления с пленарным докладом на VI Симпозиуме Рамануджан по алгебре и ее применению. В 1999 г. был

приглашен в Университет Западной Богемии и Академию наук Чехии (г. Пльзень) для участия в работе Летней математической школы и выступления с лекциями по проблемам математического моделирования.

В 1987 г. за цикл работ по теории переноса Султангазин У.М. в составе авторского коллектива был удостоен Государственной премии СССР, а в 1989 г. – премии Академии наук СССР и Чехословацкой академии наук в области естественных наук. Султангазин У.М. – лауреат Премии "Тарлан-2002". Академик Султангазин У.М. проводил большую общественную работу, неоднократно избирался депутатом Верховного Совета Казахской ССР, народным депутатом СССР, являлся членом Совета президентов Академий наук СНГ, председателем Казахского республиканского Фонда мира.

За выдающиеся заслуги Султангазин У.М. был награжден орденом Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом "Парасат", юбилейной медалью к 10-летию независимости Казахстана, Почетными грамотами Президиума Верховного Совета Казахской ССР. Научно-организационная деятельность академика Султангазина У.М. отмечена медалью им. С.П. Королева и медалью им. П.Л. Капицы.

Султангазин У.М. скончался 23 мая 2005 года ...

Работы Султангазина У.М., посвященные созданию научных основ космических и информационных технологий и применению методов дистанционного зондирования в исследовании природных ресурсов Земли, остаются востребованными и в настоящее время. Начатые академиком Султангазиным У.М. научные исследования сегодня активно развиваются его учениками. Полученные новые результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение для дальнейшего развития космической отрасли, эффективно используются при решении задач космического мониторинга сельскохозяйственного производства, чрезвычайных ситуаций (паводков, наводнений, лесных и степных пожаров, нефтяных разливов в акватории Каспийского моря) и других важнейших для республики природно-ресурсных и экологических проблем.

Проведенная 4-5 октября 2016 года в г. Алматы Международная научная конференция "Математические методы и современные космические технологии", посвященная 80-летию академика Султангазина У.М., свидетельствует об успешном продолжении сформированных им научных на-

правлений. На пленарных и секционных заседаниях Конференции с участием ведущих ученых и специалистов из России и стран СНГ, Республики Казахстан, были обсуждены актуальные проблемы в области дифференциальных уравнений и их приложений, космических исследований и современных технологий, малых космических аппаратов и космической энергетики.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
"МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И СОВРЕМЕННЫЕ  
КОСМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ"**

В Алматы 4-5 октября 2016 года проведена Международная научная конференция "Математические методы и современные космические технологии", посвященная 80-летию академика У.М. Султангазина, основателя и первого директора казахстанского Института космических исследований (1991-2005 г.г.), президента Национальной академии наук Республики Казахстан (1988-1994 г.г.).

Организаторами и участниками конференции выступили целый ряд казахстанских и российских институтов и организаций: Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК, Научно-производственное объединение имени С.А. Лавочкина, Московский авиационный институт, Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, Национальный центр космических исследований и технологий Казкосмоса.

Программный и организационный комитеты Конференции возглавил академик НАН РК Кальменов Т.Ш.

Конференция была посвящена актуальным проблемам в области дифференциальных уравнений и их приложений, космических исследований и современных технологий, малых космических аппаратов и космической энергетики.

На пленарных и секционных заседаниях Конференции приняли участие крупные ученые и специалисты из Новосибирска и Москвы: Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирского государственного университета, НПО имени С.А. Лавочкина, а также известные ученые ведущих научных центров и ВУЗов Казахстана: Института математики и математического моделирования, Института информационных

---

и вычислительных технологий, Казахского национального университета имени аль-Фараби, Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Национального центра космических исследований и технологий и др.

К Конференции была приурочена выставка научных трудов академика Султангазина У.М., организованная сотрудниками Научной библиотеки "Ғылым Ордасы".

Открытие Конференции состоялось под председательством академика НАН РК Сагадиева К.А., который подчеркнул выдающийся вклад академика, лауреата Государственной премии СССР, создателя казахстанской научной школы в области теории переноса излучения У.М. Султангазина в развитие казахстанской науки в целом.

С приветственным словом выступил Президент Национальной академии наук РК академик Журинов М.Ж., огласивший пожелание плодотворной работы и интересных научных дискуссий участникам Конференции от Министра образования и науки Республики Казахстан Сагадиева Е.К.

Пленарное заседание открылось докладом о научной и организационной деятельности академика Султангазина У.М., с которым выступил один из первых учеников Умирзака Махмутовича, доктор физико-математических наук, профессор Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева Сакабеков А.С.

Огромный интерес вызвали пленарные доклады: "Задача протекания для уравнений Навье-Стокса" (член-корр. РАН Пухначев В.В., Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН), "Перспективы развития космической энергетики" (доктор технических наук Сысоев В.К., НПО имени С.А. Лавочкина), "Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах" (академик НАН РК Блиев Н.К., Институт математики и математического моделирования), "Современные космические исследования в Казахстане" (член-корр. НАН РК Жантаев Ж.Ш., Национальный центр космических исследований и технологий), "On the classical solvability of the multidimensional two-phase free boundary problems for the system of the parabolic equations" (доктор физико-математических наук, профессор Бижанова Г.И., Институт математики и математического моделирования).

На секциях "Дифференциальные уравнения и их приложения", "Информационные и космические технологии, фундаментальные космические исследования", "Малые космические аппараты. Космическая энергетика" были представлены 49 устных докладов, вызвавшие большой интерес и оживленную дискуссию участников Конференции. Также было заявлено 38 стендовых докладов. Все доклады были предварительно опубликованы в Сборнике тезисов докладов.

Завершилась Конференция Пленарным заседанием под председательством академика Кальменова Т.Ш. На заседании были представлены чрезвычайно интересные пленарные доклады: "Прямые и обратные задачи природоохранного прогнозирования с усвоением данных наблюдений" (кандидат физико-математических наук Пененко А.В., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН), "Вращение Вселенной и космологический принцип" (член-корр. НАН РК Чечин Л.М., Астрофизический институт имени В.Г. Фесенкова Национального центра космических исследований и технологий), "Международный молодежный центр по запуску малых космических аппаратов с космодрома Байконур" (доктор технических наук Суйменбаев Б.Т., Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева).



**МЕТОДЫ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ  
ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА**

А.Ш. АКЫШ

Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: akysh41@mail.ru

Аннотация: В работе методом функций Ляпунова изучены вопросы устойчивости решений дискретных моделей Годунова-Султангазина и Карлемана, а также некоторых пространственно-однородных моделей уравнения Больцмана. Получены неравенства для асимптотического поведения решений и равновесное распределение по времени при  $t \rightarrow \infty$  и установлены необходимые априорные оценки для существования и единственности решения.

Ключевые слова: Модели Годунова-Султангазина для уравнения Больцмана, методы функций Ляпунова, асимптотическое поведение решений, существование и единственность решения моделей уравнения Больцмана.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Со времен появления работы [1] изучается качественная теория разнообразных дискретных моделей нелинейного уравнения Больцмана [3], среди которых наиболее распространенными являются дискретные модели Карлемана и Бродуэлла. Как известно, системы Карлемана и Бродуэлла обладают некоторыми общими свойствами, но последняя, будучи содержательной с физической точки зрения, трудно изучаема с математической стороны. Современное состояние теории дискретных моделей уравнения Больцмана и библиография содержатся, например, в работах [1]–[5] и др. Теоремы существования глобальных решений систем Бродуэлла доказывались для узких классов начальных функций.

---

Keywords: *Godunov-Sultangazin model for Boltzmann equation, methods of Lyapunov functions, asymptotic behavior of solutions, existence and uniqueness of solutions of models Boltzmann equations.*

2010 Mathematics Subject Classification: 27.31; 27.35; 27.41.

Funding: Комитет науки Министерства образования и науки РК, Грант № 4056/GF4.

© А.Ш. Акыш, 2016.

В работах [6], [7] обнаружены ранее неизвестные свойства систем нелинейных уравнений Карлемана, представляющие определенный интерес с точки зрения математической теории этих систем и при разработке класса двухслойных разностных схем, устойчивы в пространстве  $\ell_p$ ,  $\forall p \geq 2$ , для обобщенной многоскоростной трехмерной модели Карлемана. В [4] построены априорные оценки в пространстве  $L_p$  для решений шести-скоростной модели Бродуэлла методом расщепления и показана разрешимость в целом по времени  $t$ .

В последующем [8], на основе схемы метода расщепления для полного нелинейного уравнения Больцмана получена ограниченность положительных решений в пространстве  $C$ . С помощью последнего и установленных априорных оценок доказаны сходимость схемы метода расщепления и единственность предельного элемента. Найденный элемент удовлетворяет эквивалентному интегральному уравнению Больцмана. И, тем самым, показана разрешимость полного нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени  $t$ . Причем максвелловское распределение достигается в точках локального максимума решения.

Цель данной работы: выписать функционал Ляпунова для модели Годунова-Султангазина и получить положительные ответы на некоторые актуальные математические вопросы (теорема существования и единственности, асимптотическое поведение решения, равновесное распределение по времени при  $t \rightarrow \infty$  и разработка вычислительных методов).

В результате развития данной методологии найдены функции Ляпунова для модели Карлемана и для других пространственно-однородных моделей уравнения Больцмана.

2. Задача Коши для дискретной модели Годунова-Султангазина [1] в области  $Q = (0, \infty) \times G$  относительно вектор-функции  $f = (f_1, f_2, f_3)$  запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + c \frac{\partial f_1}{\partial x} = f_2^2 - f_1 f_3 \equiv F(f), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = -2(f_2^2 - f_1 f_3), \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} - c \frac{\partial f_3}{\partial x} = f_2^2 - f_1 f_3 \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$f_k(0, x) = \varphi_k(x) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$f_k(t, 0) = f_k(t, 1), \quad k = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где  $G = [0, 1]$ ,  $x \in G$ ,  $t \in (0, \infty)$ .

Начальные функции  $\{\varphi_k\}$  являются такими, что

i)  $\varphi_k(x) > 0 \wedge \varphi_k(x) \in L_1(G)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,

ii) функции  $\varphi_k(x)$  являются периодическими функциями по  $x$ , т. е. удовлетворяют граничному условию (3).

Множество вектор-функций  $f = (f_1, f_2, f_3)$  обладающих свойствами i) – ii), и начальных функций  $\{\varphi_k\}$  обозначим через  $I$ .

Если решение задачи (1)–(3) существует, тогда решения  $f_1, f_2, f_3$  являются положительными. Действительно, если проинтегрируем систему уравнений (1) вдоль траектории, то имеем

$$f_1(t, x) = f_1(t', x') \exp\left(-\int_{t'}^t f_3(\tau, x - (t - \tau))d\tau\right) + \\ + \int_{t'}^t \exp\left(-\int_s^t f_3(\tau, x - (t - \tau))d\tau\right) f_2^2(s, x - (t - s))ds, \quad (4)$$

$$f_3(t, x) = f_3(t', x') \exp\left(-\int_{t'}^t f_1(\tau, x + (t - \tau))d\tau\right) + \\ + \int_{t'}^t \exp\left(-\int_s^t f_1(\tau, x + (t - \tau))d\tau\right) f_2^2(s, x + (t - s))ds, \quad (5)$$

где  $(t', x')$  – координаты точки пересечения характеристической линии с границей области  $Q$ .

Отсюда следует, что  $f_1, f_3$  являются положительными почти всюду в  $G$ . Из второго уравнения системы (1) находим  $f_2$ :

$$f_2(t, x) = \varphi_2(x) \exp\left(-\int_0^t f_2(\tau, x)d\tau\right) +$$

$$+ \int_0^t \exp\left(-\int_s^t f_2(\tau, x) d\tau\right) f_1(s, x) f_3(s, x) ds. \quad (6)$$

Откуда, с учетом (4), (5), следует положительность  $f_2$  почти всюду в  $G$ .

Далее будем пользоваться элементарным неравенством для положительной функции  $W(x) \in L_2(0, 1)$ :

$$\left(\int_0^1 W(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 W^2(x) dx \quad (7)$$

и неравенством Чебышева [9], которое сформулируем ниже.

Если  $U(x)$  – неубывающая (невозрастающая), а  $V(x)$  – невозрастающая (неубывающая) суммируемые функции, заданные на  $[0, 1]$ , то

$$\int_0^1 U(x)V(x) dx \leq \int_0^1 U(x) dx \int_0^1 V(x) dx. \quad (8)$$

Из (4) и (5) нетрудно заметить, что если в окрестности произвольной точки  $M$  области  $G$  при каждом  $t \in (0, \infty)$  функция  $f_1(t, x)$  – неубывающая (невозрастающая), то функция  $f_3(t, x)$  – невозрастающая (неубывающая) в той же окрестности точки  $M$ , тем самым, функции  $f_1(t, x)$  и  $f_3(t, x)$  обладают этим свойством в окрестности любой точки области  $G$  при каждом  $t \in (0, \infty)$ .

Уравнения системы (1) проинтегрируем по области  $G$  и, с учетом (3), переходим к системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_0^1 f_1(t, x) dx = \int_0^1 (f_2^2 - f_1 f_3) dx \equiv \int_0^1 F(f) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 f_2(t, x) dx = -2 \int_0^1 F(f) dx, \\ \frac{d}{dt} \int_0^1 f_3(t, x) dx = \int_0^1 F(f) dx \end{cases} \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\int_0^1 f_k(0, x) dx = \int_0^1 \varphi_k(x) dx, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

Складывая уравнения системы (9), получим закон сохранения массы

$$\sum_{k=1}^3 \int_0^1 f_k(t, x) dx = \sum_{k=1}^3 \int_0^1 \varphi_k(x) dx = \rho = \text{const.} \quad (11)$$

Приведем известную теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = F(y), \quad \text{где } y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_n). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. Если для системы уравнений (12) существует знакоопределенная функция Ляпунова  $V(y)$ , производная по времени  $\frac{dV}{dt}$  которой, составленная в силу уравнений (12), является также знакоопределенной функцией и имеет знак, противоположный знаку функции  $V(y)$ , то нулевое решение системы уравнений (12) асимптотически устойчиво.

Обозначим  $\tilde{f}_k(t) = \int_0^1 f_k(t, x) dx$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , и введем функционал

$$P(\tilde{f}) = \left( (\tilde{f}_2(t))^2 - (\tilde{f}_1(t)\tilde{f}_3(t)) \right)^2 \equiv \tilde{F}^2 \quad (13)$$

для задачи (9)-(10) со свойствами функции Ляпунова  $V(y)$ .

Действительно, выполняя вычисление производной функционала  $P(\tilde{f})$  по времени  $t$  и используя уравнения системы (9), находим

$$\frac{dP(\tilde{f})}{dt} = 2\tilde{F} \frac{d\tilde{F}}{dt} = -2\tilde{F}(t) \left( (4\tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 + \tilde{f}_1) \int_0^1 F dx \right). \quad (14)$$

Производя оценку интеграла

$$- \int_0^1 F(t, x) dx,$$

из правой части (14) с помощью неравенств (7), (8) найдем

$$- \int_0^1 F(t, x) dx = - \int_0^1 (f_2^2 - f_1 f_3) dx \leq - \left( \int_0^1 f_2 dx \right)^2 + \int_0^1 f_1 dx \int_0^1 f_3 dx = -\tilde{F}. \quad (15)$$

Соотношение (14) с учетом (15) перепишем:

$$\frac{dP(\tilde{f})}{dt} \leq -2\tilde{F}^2(t)(4\tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 + \tilde{f}_1) \leq -2P(\tilde{f})(4\tilde{f}_2 + \tilde{f}_3 + \tilde{f}_1).$$

Отсюда после некоторого усиления правой части, учитывая (11), имеем

$$\frac{dP(\tilde{f})}{dt} \leq -2\rho P(\tilde{f}) < 0.$$

Откуда, с учетом положительности  $P(\tilde{f})$ , запишем:  $\frac{d \ln P(\tilde{f})}{dt} \leq -2\rho$ . Интегрируя это неравенство по времени от 0 до  $t$ , находим

$$P(\tilde{f}) \leq P(\tilde{\varphi}) \exp(-2\rho t) \quad \forall t \in (0, \infty), \tag{16}$$

где  $P(\tilde{\varphi}) = \left( (\tilde{\varphi})^2 - \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_3 \right)^2$ .

В итоге показали, что введенный функционал (13)  $P(\tilde{f})$  обладает основными свойствами функции Ляпунова  $V(y)$  и по Теореме 1 нулевое решение задачи (9)–(10) в пространстве  $L_1(G)$  асимптотически устойчиво.

Кроме того, из (13) следует предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{f}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( (\tilde{f}_2(t))^2 - \tilde{f}_1(t) \tilde{f}_3(t) \right)^2 = 0.$$

Отсюда при  $t \rightarrow \infty$  получим равновесное распределение в пространстве  $L_1(G)$ , т. е.

$$\tilde{f}_2(t) = \sqrt{\tilde{f}_1(t)} \sqrt{\tilde{f}_3(t)}.$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Установленное неравенство (16) для функционала (13) позволяет получить необходимые априорные оценки для существования и единственности решения задачи (9)–(10) в пространстве  $C^1(0, \infty; L_1(G))$ .

В самом деле, возведем в квадрат обе части второго уравнения системы (9):

$$\left( \frac{d\tilde{f}_2(t)}{dt} \right)^2 = 4 \left( \int_0^1 (f_1 f_3 - f_2^2) dx \right)^2,$$

Отсюда, оценивая правую часть с помощью неравенств (7), (8), получим цепочку соотношений:

$$4\left(\int_0^1 f_1 f_3 dx - \int_0^1 f_2^2 dx\right)^2 \leq 4\left(\tilde{f}_1 \tilde{f}_3 - \tilde{f}_2^2\right)^2 = 4P(f).$$

Откуда на основании (16) имеем оценку

$$\left(\frac{d\tilde{f}_2(t)}{dt}\right)^2 \leq 4P(\tilde{\varphi})\exp(-2\rho t)$$

или

$$\left|\frac{d\tilde{f}_2(t)}{dt}\right| \leq 2\sqrt{P(\tilde{\varphi})}\exp(-\rho t). \quad (17)$$

Отсюда следует двустороннее неравенство

$$-2\sqrt{P(\tilde{\varphi})}\exp(-\rho t) \leq \frac{d}{dt}\tilde{f}_2(t) \leq 2\sqrt{P(\tilde{\varphi})}\exp(-\rho t) = C(t).$$

Это соотношение проинтегрируем по времени от 0 до  $t$  и в итоге, с учетом положительности  $f_2$ , получим

$$\tilde{f}_2(t) \leq \tilde{\varphi}_2 - \frac{2}{\rho}\sqrt{P(\tilde{\varphi})}(1 - \exp(-\rho t)) = C_2(t) \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (18)$$

Далее, возведя в квадрат обе части первого и третьего уравнений системы (9), запишем

$$\left(\frac{d\tilde{f}_k(t)}{dt}\right)^2 = \left(\int_0^1 (f_1 f_3 - f_2^2) dx\right)^2, \quad k = 1, 3.$$

Отсюда, используя неравенства (7) и (8), получим

$$\left(\frac{d\tilde{f}_k(t)}{dt}\right)^2 \leq P(\tilde{\varphi})\exp(-2\rho t), \quad \text{или} \quad \left|\frac{d\tilde{f}_k(t)}{dt}\right| \leq \sqrt{P(\tilde{\varphi})}\exp(-\rho t), \quad k = 1, 3. \quad (19)$$

Откуда найдем оценки

$$\tilde{f}_k(t) \leq \tilde{\varphi}_k + \frac{1}{\rho}\sqrt{P(\tilde{\varphi})}(1 - \exp(-\rho t)) = C_k(t), \quad (20)$$

где  $k = 1, 3; \forall t \in (0, \infty)$ .

Теперь снова из второго уравнения системы (9) находим

$$\int_0^1 f_2^2 dx \leq \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \tilde{f}_2 \right| + \int_0^1 f_1 f_3 dx.$$

Откуда, с учетом неравенства (8) и оценок (17), (20), получим

$$\begin{aligned} \|f_2(t)\|_{C(0,\infty;L_2(0,1))}^2 &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \tilde{f}_2 \right| + \int_0^1 f_1 f_3 dx \leq \\ &\leq \max_t \left( \frac{1}{2} C(t) + C_1(t) C_3(t) \right) = C_4. \end{aligned} \quad (21)$$

В итоге с помощью оценок (17)–(21) можно прийти к теореме существования и единственности при  $t \in (0, \infty)$ .

3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КАРЛЕМАНА в области  $Q = (0, \infty) \times G$ ,  $G = [0, 1]$  запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = f_2^2 - f_1^2 \equiv F(f), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = -F(f) \end{cases} \quad (22)$$

с начальными условиями

$$f_1(0, x) = \varphi_1(x); \quad f_2(0, x) = \varphi_2(x) \quad (23)$$

и краевыми условиями

$$f_1(t, 0) = f_1(t, 1); \quad f_2(t, 0) = f_2(t, 1). \quad (24)$$

Для задачи (22)–(24) имеет место закон сохранения массы

$$\tilde{f}_1(t) + \tilde{f}_2(t) = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 = \rho = const, \quad \text{где} \quad \tilde{f}(t) = \int_0^1 f(t, x) dx.$$

Начальные функции  $\{\varphi_k\}$  являются такими, что

$$i) \varphi_k(x) > 0 \wedge \varphi_k(x) \in L_p(G), \quad k = 1, 2; \quad 1 < p \leq \infty;$$



ii) функции  $\varphi_k(x)$  являются периодическими функциями по  $x$ , т. е. удовлетворяют граничному условию (24).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [6]. При условиях i), ii) на начальные функции  $\{\varphi_k\}$  решения задачи (22)–(24) положительные и имеют место оценки

$$\|f_k\|_{L_p(G)} \leq (\|\varphi_1\|_{L_p(G)} + \|\varphi_2\|_{L_p(G)}), \quad k = 1, 2; \quad 1 < p < \infty; \quad (25)$$

$$\|f_k\|_{L_\infty(G)} \leq (\|\varphi_1\|_{L_\infty(G)} + \|\varphi_2\|_{L_\infty(G)}) = C_5, \quad k = 1, 2; \quad p = \infty; \quad (26)$$

Из (22) переходим к системе функциональных уравнений в пространстве  $L_2(G)$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{f}_1^2(t) = 2 \int_0^1 f_1 F(f) dx, \\ \frac{d}{dt} \tilde{f}_2^2(t) = -2 \int_0^1 f_2 F(f) dx \end{cases} \quad (27)$$

с начальными условиями

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{\varphi}_1; \quad \tilde{f}_2(0) = \tilde{\varphi}_2. \quad (28)$$

Функционал для задачи (27)–(28) запишем в виде

$$P(f) = \left( \int_0^1 F(f) dx \right)^2 \equiv \tilde{F}^2(f). \quad (29)$$

Откуда, с учетом (26), найдем

$$\frac{d}{dt} P(f) = 2\tilde{F} \frac{d}{dt} \tilde{F}(f) \leq -4\delta_0 P(f) < 0, \quad (30)$$

где  $0 < \delta_0 = \inf_{t,x} (f_2(t,x) + f_1(t,x)) < \rho$ , т. е. функционал (29) обладает свойствами функции Ляпунова  $V(y)$  и по Теореме 1 нулевое решение задачи (27)–(28) в пространстве  $L_1(G) \cup L_2(G)$  асимптотически устойчиво.

Из (30) имеем

$$P(f) \leq P(\varphi) \exp(-4\delta_0 t) \quad \forall t \in (0, \infty), \quad (31)$$

где  $P(\varphi) = \left( \int_0^1 (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) dx \right)^2$ .

Откуда получаем равновесное распределение в пространстве  $L_2(G)$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{f}_1^2(t) = \tilde{f}_2^2(t).$$

Из системы (22) имеем

$$\frac{d}{dt} \tilde{f}_k(t) = (-1)^{(3-k)} \int_0^1 F(f) dx, \quad k = 1, 2.$$

Откуда, с учетом (31), получим оценку:

$$\left( \frac{d}{dt} \tilde{f}_k(t) \right)^2 = \left( \int_0^1 F(f) dx \right)^2 \leq P(\varphi) \exp(-4\delta_0 t)$$

или

$$\begin{aligned} -\sqrt{P(\varphi)} \exp(-2\delta_0 t) &\leq \frac{d}{dt} \tilde{f}_k(t) \leq \\ &\leq \sqrt{P(\varphi)} \exp(-2\delta_0 t), \quad k = 1, 2; \quad t \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{32}$$

Отсюда

$$\left\| \frac{df_k(t, x)}{dt} \right\|_{L_1(G)} \leq \sqrt{P(\varphi)} \exp(-2\delta_0 t), \quad k = 1, 2; \quad t \in (0, \infty).$$

Интегрируя (32) по времени от 0 до  $t$ , с учетом положительности  $f_k$  получаем

$$\begin{aligned} \| f_k(t) \|_{L_1(G)} &\leq \| \varphi_k \|_{L_1(G)} - \\ &- \frac{(-1)^k}{2\delta_0} \sqrt{P(\varphi)} (1 - \exp(-2\delta_0 t)) = C_k(t), \quad k = 1, 2; \quad \forall t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

4. Функции Ляпунова для некоторых пространственно-однородных моделей уравнения Больцмана.

4а. Задача Коши для пространственно-однородной модели Бродуэлла относительно вектор-функции  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = \sigma(f_3 f_4 - f_1 f_2) \equiv \sigma F(f), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = \sigma F(f), \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} = -\sigma F(f), \\ \frac{\partial f_4}{\partial t} = -\sigma F(f), \quad 0 < \sigma = \text{const}; \quad \forall t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (33)$$

с начальными данными

$$f_k(0) = \varphi_k, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (34)$$

Если решения задачи (33)–(34) существуют при положительных данных  $\{\varphi_k\}$ , то  $\{f_k\}$  являются положительными.

Складывая уравнения системы (33) и интегрируя по времени от 0 до  $t$ , получим закон сохранения массы

$$\sum_{k=1}^4 f_k(t) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k = \rho = \text{const}.$$

Введем функцию Ляпунова для задачи (33)–(34) в следующем виде  $P(f) = F^2(f)$  и вычислим производную функции  $P(f)$  по времени  $t$ , используя уравнения системы (33). Имеем

$$\frac{d}{dt} P(f) = 2F(f) \frac{d}{dt} F(f) = -2\sigma\rho P(f) < 0, \quad (35)$$

т. е. введенная функция  $P(f)$  удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова, тем самым, нулевое решение задачи (33)–(34) асимптотически устойчиво.

Из (35) имеем

$$P(f) = P(\varphi) \exp(-2\sigma\rho t).$$

Отсюда получаем равновесное распределение при  $t \rightarrow \infty$  :

$$f_3(t)f_4(t) = f_1(t)f_2(t).$$

Из уравнений системы (33) с помощью функции Ляпунова получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} &= \sigma \sqrt{P(\varphi)} \exp(-\sigma \rho t), \quad k = 1, 2; \\ \frac{\partial f_k}{\partial t} &= -\sigma \sqrt{P(\varphi)} \exp(-\sigma \rho t), \quad k = 3, 4. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \varphi_k - \sqrt{P(\varphi)}/\rho(1 - \exp(-\sigma \rho t)); \quad k = 1, 2; \\ f_k(t) &= \varphi_k + \sqrt{P(\varphi)}/\rho(1 - \exp(-\sigma \rho t)); \quad k = 3, 4. \end{aligned}$$

4b. Задача Коши для пространственно-однородной модели Годунова-Султангазина относительно вектор-функции  $f = (f_1, f_2, f_3)$  запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_2^2 - f_1 f_3 \equiv F(f), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = -2F(f), \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} = F(f) \quad \forall t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (36)$$

с начальными данными

$$f_k(0) = \varphi_k, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (37)$$

Откуда имеем закон сохранения массы

$$\sum_{k=1}^3 f_k(t) = \sum_{k=1}^3 \varphi_k = \rho = const.$$

Функция Ляпунова для задачи (36)–(37) запишется:  $P(f) = F^2(f)$ ; производная  $P(f)$  по времени  $t$ :

$$\frac{d}{dt}P(f) = 2F(f) \frac{d}{dt}F(f) = -2F^2(f_1 + 4f_2 + f_3) \leq -2\rho P(f) < 0, \quad (38)$$

т. е. функция  $P(f)$  удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова и нулевое решение задачи (36)–(37) асимптотически устойчиво.

Из (38) имеем

$$P(f) \leq P(\varphi) \exp(-2\rho t).$$

Откуда следует равновесное распределение при  $t \rightarrow \infty$  :

$$f_2(t) = \sqrt{f_1(t)}\sqrt{f_3(t)}.$$

Из уравнений (36) с помощью функции Ляпунова получаем оценки:

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial t} \right| \leq \sqrt{P(\varphi)} \exp(-\rho t), \quad k = 1, 3; \quad \left| \frac{\partial f_2}{\partial t} \right| \leq 2\sqrt{P(\varphi)} \exp(-\rho t).$$

Отсюда имеем оценки для решений:

$$f_k(t) \leq \varphi_k + \sqrt{P(\varphi)}/\rho(1 - \exp(-\rho t)); \quad k = 1, 3;$$

$$f_2(t) \leq \varphi_2 - 2\sqrt{P(\varphi)}/\rho(1 - \exp(-\rho t)).$$

4с. Задача Коши для пространственно-однородной модели Карлемана относительно вектор-функции  $f = (f_1, f_2)$  записывается

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_2^2 - f_1^2 \equiv F(f), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = -F(f) \quad \forall t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (39)$$

с начальными данными

$$f_k(0) = \varphi_k, \quad k = 1, 2. \quad (40)$$

Закон сохранения массы:

$$f_1(t) + f_2(t) = \varphi_1 + \varphi_2 = \rho = const.$$

Функция Ляпунова для задачи (39)–(40):  $P(f) = F^2(f)$ ; производная  $P(f)$  по времени  $t$ :

$$\frac{d}{dt}P(f) = -4\rho P(f) < 0, \quad (41)$$

т. е. функция  $P(f)$  удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова и нулевое решение задачи (39)–(40) асимптотически устойчиво.

Из (41) следует, что

$$P(f) = \sqrt{P(\varphi)} \exp(-4\rho t).$$

Равновесное распределение при  $t \rightarrow \infty$  :

$$f_1^2(t) = f_2^2(t).$$

Производные решений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \sqrt{P(\varphi)} \exp(-2\rho t); \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\sqrt{P(\varphi)} \exp(-2\rho t).$$

Точные решения:

$$f_1(t) = \varphi_1 - \sqrt{P(\varphi)}/(2\rho)(1 - \exp(-2\rho t));$$

$$f_2(t) = \varphi_2 + \sqrt{P(\varphi)}/(2\rho)(1 - \exp(-2\rho t)).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, № 3. – С. 3-51.

2 Nishida T., Mimura M. On the Broadwell's model for a simple discrete velocity gas // Proc. Japan Acad. – 1974. – V. 50. – P. 812-817.

3 Studies in Statistical Mechanics // No equilibrium phenomena // The Boltzmann equation // E.W. Montroll, J.L. Lebowitz General Editors, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, – 1983. – 269 p.

4 Sultangazin U.M. Discrete Nonlinear Models of the Boltzmann Equation. – Moscow: Nauka, 1987. – 191 p.

5 Акишев (Акыш) А.Ш. Глобальная теорема существования и единственности для трехмерной модели Бродуэлла для уравнения Больцмана // ЖВМ и МФ. – 1997. – Т. 37, № 3. – С. 367-377 (Akishev (Akysh) A.Sh. A Global Existence and Uniqueness Theorem for the Three-Dimensional Broadwell Model // Computational Mathematics and Mathematics Physics. – 1997. – V. 37, № 3. – P. 359-369.)

6 Акишев (Акыш) А.Ш., Султангазин А.У. Новые априорные оценки решения для нелинейных систем уравнения Карлемана // Вестник АН КазССР. – 1991. – № 11. – С. 40-47.

7 Ақыш (Акишев) А.Ш. Об устойчивости в  $\ell_p, \forall p \geq 2$  некоторых разностных схем для уравнения переноса // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 199-214.

8 Ақыш (Акишев) А.Ш. Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 123-131 (Akysh (Akishev) A.Sh. Convergence of Splitting Method for the Nonlinear Boltzmann Equation // Numerical Analysis and Application. – 2013. – V. 6, № 2. – P. 111-118).

9 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

*Статья поступила в редакцию 02.12.2016*

#### Akysh A.Sh. METHODS OF LYAPUNOV FUNCTIONS FOR SOME DISCRETE MODELS FOR BOLTZMANN EQUATION

The problems of stability of solutions of discrete Godunov-Sultangazin and Carleman models and also some spatially-homogeneous models for Boltzmann equations, are studied by the method of Lyapunov functions. The inequalities for the asymptotic behavior of the solutions and equilibrium time distribution when  $t \rightarrow \infty$  as well as necessary a priori estimations for the existence and uniqueness of the solution are established.

#### Ақыш Ә.Ш. БОЛЬЦМАН ТЕҢДЕУІНІҢ КЕЙБІР ДИСКРЕТТІ МОДЕЛДЕРІ ҮШІН ЛЯПУНОВ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ӘДІСТЕРІ

Жұмыста Больцман теңдеуінің Годунов-Сұлтанғазин және Карлеман дискретті моделдерінің, сонымен бірге кейбір кеңістіктік-біртекті моделдерінің шешімдерінің орнықтылығы мәселелері Ляпунов функцияларының әдісімен зерттелген. Шешімдердің асимптоталық тәртібі мен уақыт бойынша  $t \rightarrow \infty$  болғанда тепе-теңдікті таралуының теңсіздіктері алынған және шешімнің бар болуы мен жалғыздығы үшін қажетті априорлық бағалаулар тағайындалған.

**3D-МОДЕЛЬ НАНОСПУТНИКА "ПОЛИТЕХ-1" И РАСЧЕТ ЕГО ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПО "SOLIDWORKS"**Л.А. АЛЕКСЕЕВА<sup>1</sup>, Ж.Б. СУЙМЕНБАЕВА<sup>2</sup>, Т.А. СУЛЕЕВ<sup>3</sup><sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: <sup>1</sup>alexeeva@math.kz<sup>2,3</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева  
050013, Алматы, ул. Сатпаева, 22 а, e-mail: <sup>2</sup>zbs115@mail.ru, <sup>3</sup>suleev\_timur@mail.ru

Аннотация: Разработана технология моделирования массо-габаритных параметров наноспутника на примере студенческого спутника Политех-1, приведены результаты разработки 3D -модели солнечных батарей и конструкции наноспутника. Показана возможность комплектации наноспутника с учетом ограничений на весовые и габаритные параметры наноспутника, а также центровки спутника, излагается методика конструирования КА с использованием программного обеспечения "SolidWorks". Полученные результаты позволяют моделировать различные варианты центровки наноспутника для построения алгоритмов управления при полунатурных испытаниях.

Ключевые слова: Моделирование, физико-механические параметры, космический аппарат, солидворкс.

Для описания движения КА, как абсолютно твердого тела, используются уравнения движения центра масс в гравитационном поле Земли и система уравнений Эйлера, описывающая вращение КА вокруг центра масс под действие внешних сил и управляющего момента. Уравнения Эйлера записываются в главных осях инерции, где тензор инерции имеет диагональный вид.

Тензор инерции КА:

$$J^c = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}; \quad (1)$$

Keywords: *Modeling, physico-mechanical parameters, spacecraft, solidworks.*

2010 Mathematics Subject Classification: 00A71.

Funding: № 757 МОН ГФ. 15. ИИТ. 8

© Л.А. Алексеева, Ж.Б. Суйменбаева, Т.А. Сулеев, 2016.



кинетический момент ротирующего элемента:

$$\vec{h} = J * \vec{\omega}; \quad (2)$$

уравнение Эйлера:

$$J^c \vec{\Omega}_\alpha^c = \vec{M}_{\text{упр}}^c + \vec{M}_{\text{воз}}^c - \vec{\Omega}_\alpha^c \times (J^c \vec{\Omega}_\alpha^c + \vec{h}_\alpha^c). \quad (3)$$

Нахождение этих физико-механических параметров для сборной конструкции из разнородных элементов, каким является КА, является достаточно сложной инженерно-технической задачей, решению которой посвящена настоящая работа. Помимо этого, здесь излагается методика конструирования КА с использованием программного обеспечения "SolidWorks" с целью ознакомления и приобретения студентами технических вузов практического опыта конструирования наноспутников подобного класса и определения их физико-механических параметров.

#### 1. НАЗНАЧЕНИЕ КА. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КА

Научно-образовательный студенческий наноспутник "Политех-1" предназначен для исследования магнитного поля Земли. КА "Политех-1" должен решать следующие задачи:

- измерение магнитного поля Земли,
- формирование телеметрических кадров с целевой информацией,
- формирование телеметрических кадров служебной информации,
- передача телеметрической информации по радиолинии "борт-Земля",
- прием командной информации,
- отработка циклограммы на каждый виток.

"Политех-1" состоит из служебной платформы и полезной нагрузки. Полезной нагрузкой является научный высокоточный трехкомпонентный феррозондовый магнитометр для измерения параметров постоянного магнитного поля Земли. Элементы служебных блоков и систем платформы максимально унифицированы с элементами служебных блоков стандарта CubeSat.

В состав служебной платформы входят:

- конструкция платформы, которая представляет собой алюминиевый каркас с необходимыми технологическими отверстиями,
- антенно-фидерное устройство (АФУ) диапазона УВЧ/ОВЧ – система из четырех антенн для связи с центром управления полетами,
- бортовой приемопередатчик диапазона УВЧ/ОВЧ – внутренний компонент КА, подключаемый к бортовому цифровому вычислительному комплексу, отвечающий за прием-передачу данных,
- бортовая цифровая вычислительная машина с интерфейсами для работы со служебными блоками и системами, полезной нагрузкой,
- солнечные батареи стандарта CubeSat 3U, обеспечивающие КА электроэнергией,
- приборы системы управления движением; в нашем случае электромагнитные магнитно-исполнительные органы (ЭМИО), представленные в виде металлических рамок.

## 2. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ "SOLIDWORKS"

SolidWorks (Солидворкс) – программный комплекс САПР для автоматизации работ на этапах конструкторской и технологической подготовки изделия. Он обеспечивает разработку изделий высокой степени сложности и назначения, обладает большим набором средств для конструирования различных деталей и их сборки, анализа их физико-механических свойств.

Выбор данного программного обеспечения обусловлен не только его широкими функциональными возможностями, но и его распространенностью, что обеспечивает большое количество справочной литературы, а также наличие крупного интернет-сообщества для получения оперативной консультации по вопросам работы с программой. Также знание и владение этим программным обеспечением желательно для молодых специалистов и несомненно найдет применение и в их дальнейшей деятельности.

## 3. СБОРКА КА В SOLIDWORKS

Принцип работы SolidWorks подразумевает создание сложных механизмов из более мелких, заранее построенных отдельных деталей. Рассмотрим алгоритм на примере построения модели солнечной батареи. Чертежи, как правило, находятся в свободном доступе на сайте производителей или содержатся в сопроводительной документации компонентов.

### 3.1. КОНСТРУИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ

Шаг 3.1.1. Начинаем, как было сказано выше, с создания простых элементов, в программе называемых "Деталь". Процесс создания детали начинается с "эскиза". Чертим контуры детали (чертежи взяты с сайта производителя панели). В итоге получаем вот такой рисунок (Рис. 3.1.1.).

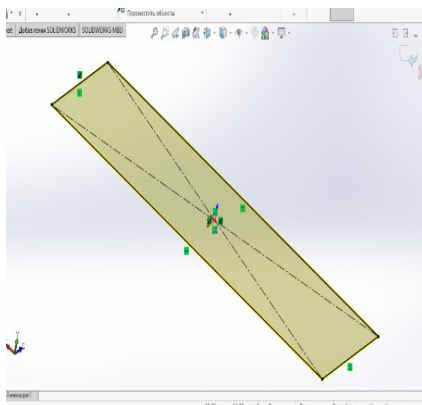


Рисунок 3.1.1 – Эскиз основы солнечной батареи КА

Шаг 3.1.2. Далее с помощью команды "вытянутая бobbyшка" придаем детали объем, выбирая: на какое расстояние и в каком направлении необходимо ее вытянуть (Рис. 3.1.2).

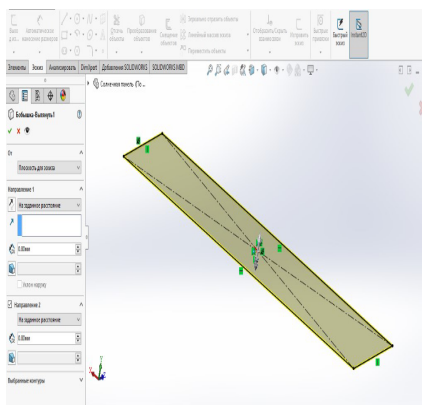


Рисунок 3.1.2 – Придание объема основе солнечной батареи КА

Шаг 3.1.3. После этой операции получаем объемное тело, которое предстоит превратить в основание солнечной батареи, сделав необходимые вырезы и углубления по аналогии с приданием объема. Для этого после нанесения эскиза на поверхность детали необходимо проделать операцию, обратную проведенной выше, "вытянутый вырез". После чего получим готовое основание для нашей солнечной батареи (Рис. 3.1.3).

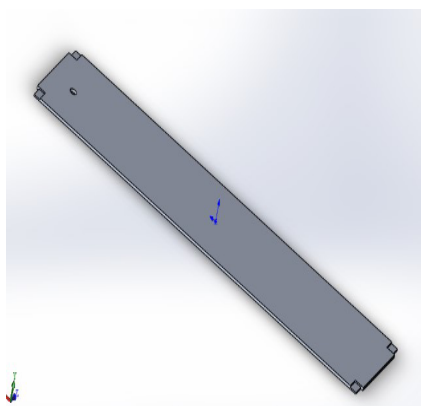


Рисунок 3.1.3 – Общий вид основы солнечной батареи КА

Шаг 3.1.4. Далее подобным образом чертим второй элемент нашей солнечной панели – фотоэлемент (Рис. 3.1.4).

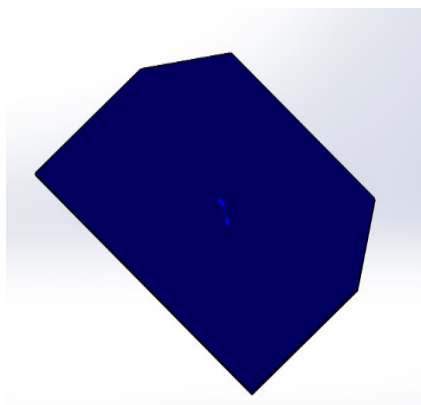


Рисунок 3.1.4 – Общий вид фотоэлемента

Имея все составляющие компоненты, сохраняем их в отдельных файлах.

### 3.2. СБОРКА ДЕТАЛЕЙ

Далее создаем новый файл – "сборку", в котором соединим их вместе.

Шаг 3.2.1. Вначале размечаем расположение фотоэлементов на основании с помощью эскиза (Рис. 3.2.1).

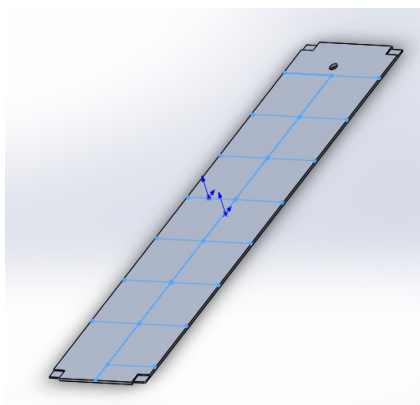


Рисунок 3.2.1 – Определение расположения фотоэлементов

Шаг 3.2.2. Далее с помощью "условий сопряжения" задаем точки и линии соприкосновения элементов сборки. Для данной сборки используем такие условия сопряжения, как "совпадение" и "параллельность". В результате получаем модель нашей солнечной панели (Рис.3.2.2).

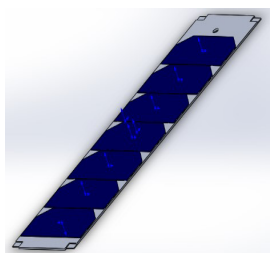


Рисунок 3.2.2 – Общий вид солнечной панели КА

Шаг 3.2.3. Остальные компоненты чертим аналогично.

Шаг 3.2.4. Готовые сборки деталей собираем в финальную сборку наноспутника (сборку сборок). Действия необходимы для выполнения данного шага и полностью аналогичны действиям, описанным в шаге 3.2.2.

#### 4. 3D МОДЕЛЬ КА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Итак, здесь спутник имеет вид, изображенный на Рис. 4.1.

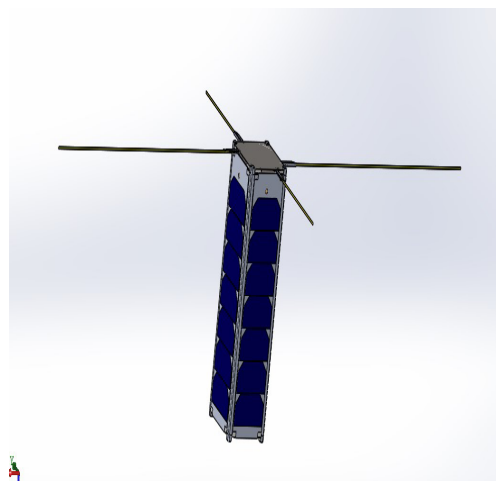


Рисунок 4.1 – Общий вид КА

#### 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КА

Необходимой нам функцией является функция, позволяющая определять массовые характеристики моделей с заданной плотностью массы  $\rho(x)$  ( $x = (x_1, x_2, x_3)$ ) в декартовой системе координат  $X_1, X_2, X_3$ .

Для определения центра масс  $x^C = (x_1^C, x_2^C, x_3^C)$  используется формула:

$$x^C = \begin{pmatrix} x_1^C \\ x_2^C \\ x_3^C \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (5.1)$$

где  $V$  – занимаемая область пространства,  $M$  – масса КА,

$$M = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.2)$$

Компоненты тензора инерции  $J_{kl}$  в исходной системе  $X_1, X_2, X_3$  вычисляются по формулам:

$$I_{ij} = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3)(\delta_{ij}\|x\|^2 - x_i x_j) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (5.3)$$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Это – симметрическая, положительно определенная матрица. Для определения главных осей инерции КА определяются три положительных характеристических числа матрицы  $\{I_{kl}\}_{3 \times 3}$  по формуле:

$$\det\{I_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}\}_{3 \times 3} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.4)$$

Собственные векторы этой матрицы

$$\xi^k = \sum_{i=1}^3 \xi_i^k e_i \quad (5.5)$$

определяются соотношениями

$$\sum_{i=1}^3 I_{ij} \xi_j^k = \lambda_k \xi_i^k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

Они дают направление главных осей инерции КА:

В главных осях инерции  $e_1, e_2, e_3$  искомым тензор инерции  $J_{km}$  имеет диагональный вид:

$$\{J_{km}\}_{3 \times 3} = \left\{ \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} e_k^i e_m^j \right\}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad k, m = 1, 2, 3, \quad (5.8)$$

где  $e_k^i$  – декартовы координаты ортов  $e_k$ ,  $A, B, C$  – главные моменты инерции КА, которые всегда положительные.

## 6. РАСЧЕТ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В "SOLIDWORKS"

Для созданной конструкции произведен расчет необходимых параметров в "SolidWorks".

Шаг 6.1. Вначале обратимся к вкладке "Анализ" на панели инструментов, где представлены все доступные виды анализа. Выбираем "Массовые характеристики". Данный инструмент позволит рассчитать координаты центра масс и моменты инерции в любой заданной системе координат на основе вышеприведенных формул. Результаты расчетов выводятся в отдельном окне (Рис. 6.2), дополнительно центр масс КА и направление основных осей инерции изображаются на модели КА (Рис. 6.1).

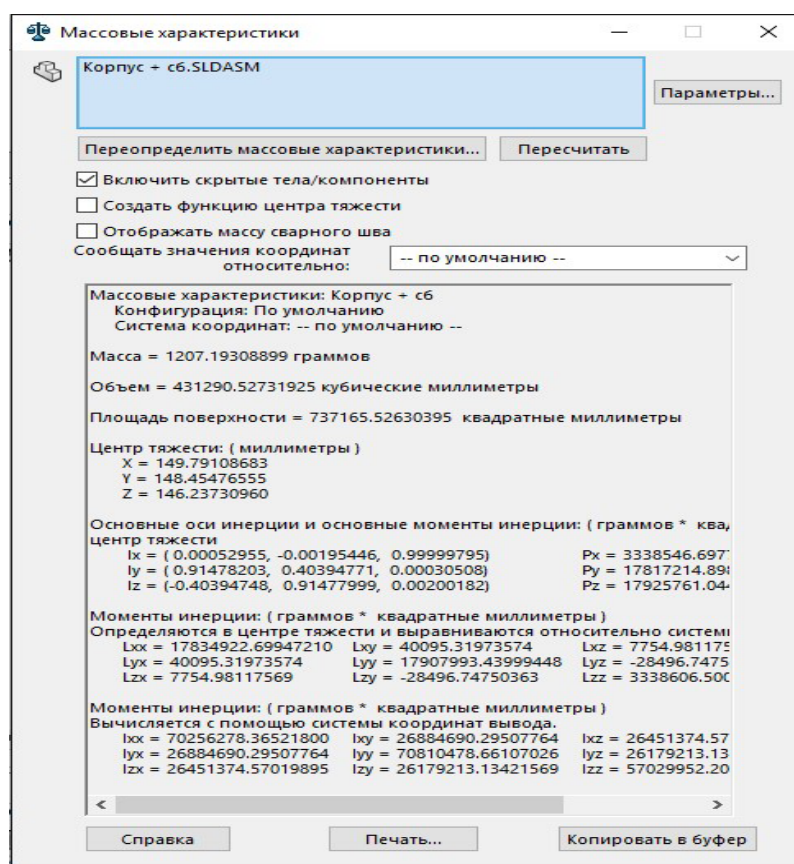


Рисунок 6.1 – Центр масс и основные оси инерции, показанные на модели КА



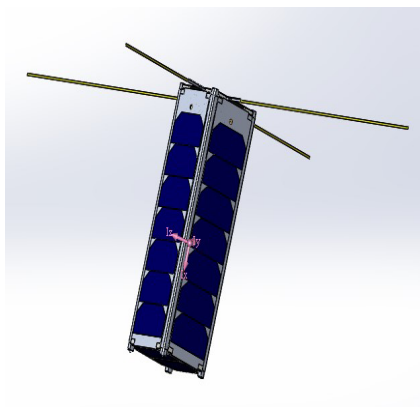


Рисунок 6.2 – Данные расчетов, выполненных программой

Построены 3D-модели комплектующих изделий космического аппарата, а также модель космического аппарата в сборе в среде Solidworks. С использованием полученных моделей вычислены физико-механические параметры космического аппарата "Политех-1" при помощи ПО Solidworks. Приведено описание математического аппарата, используемого программой Solidworks для вычислений.

*Статья поступила в редакцию 29.11.2016*

Alexeyeva L.A., Suimenbayeva Z.B., Suleyev T.A. 3D-MODEL OF NANOSATELLITE "POLYTECH-1" AND CALCULATION OF ITS PHYSICO-MECHANICAL PARAMETERS BY SOFTWARE SOLIDWORKS

A simulation technology of weight and size parameters of nanosatellite is developed on the sample of student's satellite Politech-1, the results of the development of 3D-model of solar batteries and nanosatellite design are given. The possibility of nanosatellite's configuration with the restrictions on weight and size parameters of nanosatellite has shown, as well as the alignment of satellite, the technique of the construction of spacecraft using software "SolidWorks" is presented. The results allow to simulate various options for alignment nanosatellite so that to develop control algorithms during seminatural testing.

Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Сулеев Т.А. "ПОЛИТЕХ-1" НАНОСЕРІГІНІҢ 3D-МОДЕЛІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ-МЕХАНИКАЛЫҚ ПАРАМЕТРЛЕРІН "SOLIDWORKS" ПҚ ПАЙДАЛАНА ОТЫРЫП ЕСЕПТЕУ

"Политех-1" студенттік жер серігінің үлгісінде наносеріктің массалық-габариттік параметрлерін моделдеу технологиясы әзірленген, күн батареяларының және наносеріктің құрылымының 3D-моделдерін әзірлеудің нәтижелері келтірілген. Наносеріктің салмақтық және габариттік параметрлеріне қойылатын шектеулерді, әрі жер серігін орталықтандыруды ескере отырып наносерікті жинақтаудың мүмкіндігі көрсетілген, "SolidWorks" программалық қамсыздандыруын пайдаланып Ғарыштық аппаратты құрастыру әдістемесі берілген. Алынған нәтижелер жартылай болмыстық тәжірибелер кезіндегі басқару алгоритмдері құрастыру үшін наносерікті орталықтандырудың әртүрлі нұсқаларын моделдеуге мүмкіндік береді.

**ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОДНОКАНАЛЬНОГО КОРРЕЛЯТОРА ПРИЕМНИКА GPS  
НА БАЗЕ ТЕХНОЛОГИИ SDR**

Д.Ш. АХМЕДОВ<sup>1</sup>, Н.Б. БОГУСПАЕВ<sup>2</sup>, А.С. РАСКАЛИЕВ<sup>3</sup>, А.А. АВЕРЬЯНОВ<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup>Институт космической техники и технологий

050061, Алматы, ул Кисловодская, 34

e-mail: <sup>1</sup>lacr@mail.ru, <sup>2</sup>nurlanbsv@mail.ru

<sup>3</sup>almat.raskaliyev@gmail.com, <sup>4</sup>alexaverin58@mail.ru

Аннотация: Предлагается описание имитационной модели цифрового коррелятора, которая предназначена для последовательного поиска спутниковых сигналов, излучаемых разными навигационными спутниками орбитальной группировки GPS. Разработанная имитационная модель цифрового коррелятора выделяет из навигационного сигнала информацию, которая в дальнейшем поступает в процессор, где производится поиск навигационного решения и его выдача потребителю.

Ключевые слова: Цифровая обработка сигналов, GPS, имитационное моделирование, Software Defined Radio.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Быстро развивающаяся технология Software Defined Radio (SDR) получила широкое признание и привлекает постоянно растущий интерес в области разработки радиоэлектронного оборудования. Технология SDR направлена на создание приемников с гибкой открытой архитектурой, которая способствует построению SDR с изменяемой конфигурацией, где возможен динамический выбор параметров для отдельных модулей [1]–[2]. Приемник на базе технологии SDR использует широкополосный аналого-цифровой преобразователь (А/D-конвертер), который способен захватывать все каналы программируемых радиопередающих узлов. Приемник

---

Keywords: *Digital signal processing, GPS, simulation modeling, Software Defined Radio.*

2010 Mathematics Subject Classification: 94A20

Funding: Аэрокосмический комитет МИР РК, Договор № 18 от 16 февраля 2016 г.

© Д.Ш. Ахмедов, Н.Б. Богуспаев, А.С. Раскалиев, А.А. Аверьянов 2016.

затем выделяет, преобразует с понижением частоты и демодулирует входной сигнал в канале, используя программное обеспечение универсального микропроцессора. Технологическая идея состоит в размещении широкополосного аналого-цифрового преобразователя (А/D-конвертера) настолько близко к антенне, насколько это технологически целесообразно, а также в передаче получаемых сэмплов в программируемый элемент и в применении технологий цифровой обработки сигнала для получения желаемого результата. SDR приемник является идеальной платформой для создания и проверки алгоритмов, а также для возможной интеграции разработанных алгоритмов в другие устройства [3]–[4].

Программируемый приемник GPS на базе SDR вызывает явный интерес у исследователей в области теории спутниковых навигационных систем. GPS приемник, который описывается в данном разделе, является одночастотным приемником, использующим код C/A в диапазоне L1. Подобное устройство было выбрано для исследования в связи с тем, что оно позволяет сохранять архитектуру приемника очень простой и понятной для случая реализации одноканального коррелятора.

В данном докладе представлена имитационная модель коррелятора для программируемого приемника GPS, которая реализована на программном обеспечении в среде MATLAB. В качестве языка программирования выбран программный продукт MATLAB, потому что он является де-факто средой разработки и проектирования в научно-технических институтах и университетах. Это гибкий язык, его очень легко изучить. Кроме того, он предоставляет хорошие средства для отображения графических результатов [5].

Описываемая имитационная модель коррелятора способна осуществлять получение навигационного сигнала, слежение за кодом и несущей частотой, выделение навигационного бита, декодирование навигационных данных, определение псевдодальности, а также вычисление местоположения с помощью решения основной навигационной задачи. Кроме того, имитационная модель позволяет изменять ключевые параметры коррелятора такие, как контур ширины шумовой полосы частот, коэффициент затухания и декремент для DLL (DLL – цикл синхронизации по задержке, delay lock loop) и/или PLL (система фазовой автоподстройки частоты – ФАПС) составляющих, границы выделения и сэмплирования сигнала, промежу-

точную частоту (ПЧ), маску высоты спутника над горизонтом, полосу пропускания сигнала и т.д.

В заключительном разделе доклада приводятся результаты тестирования и верификации имитационной модели одночастотного коррелятора для входных данных модели, которые были записаны с помощью фронтенда (frontend) спутниковых навигационных сигналов в режиме статического положения антенны приемника GPS. Данные результаты подтверждают приемлемую работоспособность разработанной имитационной модели.

## 2. СТРУКТУРА ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Исходный одноканальный приемник GPS, разрабатываемый на основе технологии Software Defined Radio, представлен на рисунке 1.



Рисунок 1 – Одноканальный коррелятор приемника GPS

Поиск и прием (захват) сигнала дает грубое определение параметров навигационного сигнала. Эти параметры уточняются двумя блоками отслеживания сигналов (трекинга). После отслеживания выделяются (декодируются) навигационные данные и вычисляется псевдодалность.

Обрабатываемый коррелятором поток данных и функции MATLAB, которые составляют имитационную модель приемника, отображены на рисунке 2.

Ниже приведены краткое описание единой структуры имитационной модели и переменные, которые наделяют модель необходимыми свойствами одноканального коррелятора.

При запуске модели небольшая секция (несколько миллисекунд) в начале файла входных данных глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) считывается и передается в файл `acquisition.m` для имитации захвата сигнала; `m`-файл захвата просматривает ее на присутствие сиг-

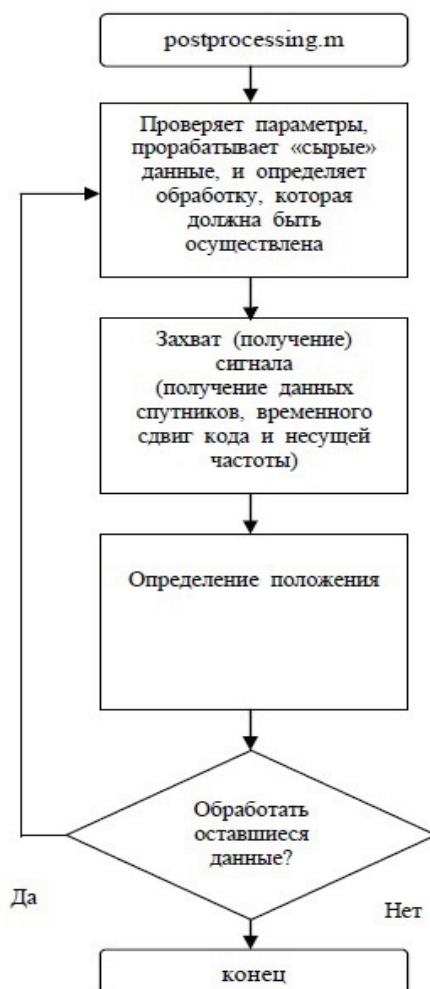


Рисунок 2 – Диаграмма обработки потока данных в имитационной модели

налов GPS. Он определяет частоту и временной сдвиг кода C/A (coarse acquisition, грубый захват) для каждого номера обнаруженного сигнала GPS. Данные результаты обработки сохраняются в массиве acqResults.

Затем функция preRun считывает результаты захвата и инициирует

запуск всех каналов программного обеспечения. Если число доступных спутников меньше, чем число каналов, то ненужные каналы отключаются. Кроме того, эта функция удаляет все результаты обработки от возможных предыдущих запусков. Таким образом, она подготавливает чистую среду для последующего запуска.

После инициализации каналов блок сэмплов сигнала считывается из записанного файла и передается функции слежения за сигналом `track.m`. Функция слежения осуществляет отслеживание сигналов по всем возможным каналам, определяет границы битов, сохраняет биты навигационных данных и декодирует данные. Декодированные эфемериды сохраняются в массиве эфемерид (Эф – `eph`). Результаты слежения (выходные данные с корреляторов, дискриминаторов и т.д.) сохраняются в массиве `trackResults`. В настройках можно указать, как долго должно осуществляться отслеживание.

После окончания отслеживания запускается функция `postNavigation` для обработки сигнала. Она идентифицирует начало субфрейма, определяет время передачи сигнала и все псевдодальности.

Затем этот же `m`-файл вычисляет координаты ECEF антенны приемника GPS, после чего координаты ECEF преобразуются в задаваемую систему координат, например, UTM или WGS84.

### 3. МАССИВ НАСТРОЕК ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ (SETTINGS)

Все переменные, присущие сразу всем блокам имитационной модели, равно как присущие конкретному блоку, сохраняются в одном массиве настроек (Settings). Этот подход обеспечивает централизованное и гибкое управление имитационной моделью. Например, сэмплирование основанных на частоте параметров используется многими файлами: от получения (захвата) до вычисления псевдодальностей. Поскольку параметры обновляются в настраиваемых переменных, все файлы будут использовать измененные значения.

Еще одним преимуществом является то, что список параметров функций не зависит от того, сколько параметров функция фактически использует. Изменения внутри функции не сказываются на коде вызова функции.

Наиболее часто используемыми переменными в массиве настроек имитационной модели являются:

`IFrequency` – промежуточная частота сигнала GPS, Гц;  
`samplingFrequency` – частота, на которой сигнал GPS сэмплируется, Гц;  
`msToProcess` – эта переменная установлена равной 37000 для того, чтобы обеспечить обработку всех пяти шестисекундных субфреймов, причем первые 1000 мс могут быть исключены из-за перехода в состояния слежения за сигналом;

`processBlockSize` – в этой переменной указаны размеры блоков для обработки функцией слежения за сигналом;

`numberOfChannels` устанавливает число последовательно обрабатываемых каналов имитационной модели коррелятора.

Функция `initSettings` создает массив настроек (`Settings`). В первый раз данная функция выполняется скриптом `init`. Функция должна исполняться каждый раз, когда изменяются переменные. Опытный пользователь может изменять некоторые переменные напрямую в массиве настроек. Однако, делать это следует осторожно, так как некоторые переменные имеют внутренние зависимости и пересчитываются автоматически. Поэтому наиболее безопасным способом является изменение переменных через функцию `initSettings`, которая должна быть после этого повторно исполнена.

Переменные, чья зависимость прописана в основных блоках обработки цифрового сигнала, описаны в следующих разделах доклада.

#### 4. ФУНКЦИЯ ЗАХВАТА И ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛА (ACQUISITION FUNCTION)

Функция захвата и выделения сигнала использует алгоритм выделения параллельным поиском по временному сдвигу кода. Целью является установление параметров сигнала для всех доступных спутников в записи данных длиной нескольких мс (миллисекунд). Блок-диаграмма исполнения реализованного алгоритма представлена на рисунке 3.

Функция захвата и выделения ищет сигнал GPS с шагом частоты 0.5 кГц. Для каждого шага частоты осуществляется параллельный поиск фазы кода. Результаты корреляции сохраняются и функция переходит к следующему шагу частоты. Таким образом, функция пошагово проходит через все частотные диапазоны (в определенном пользователем пространстве Доплера). Затем функция ищет величину максимальной корреляции (пик корреляции) в результатах всех элементов разрешения по частоте.



После того как пик обнаружен, функция ищет следующий по высоте пик корреляции на этом же элементе разрешения по частоте, в котором расположен максимальный по высоте пик. Затем соотношение этих двух пиков используется для установления правила обнаружения сигнала. Соотношение сравнивается с величиной, предварительно указанной в настройках имитационной модели, `acqthreshold`. Это пороговое значение не зависит от частоты сэмпирования и, таким образом, не зависит от размера пика и уровня шума.

Если величина соотношения пиков больше, чем указанная величина, уточненная частота захвата сигнала устанавливается через предварительно коррелированный FFT подход. Это необходимо сделать для того чтобы задать входные значения для функции PLL в блоке трекинга для начала слежения за сигналом. Точность частоты 0,5 кГц является слишком грубой для того, чтобы PLL начала процедуру слежения.

Параметрами функции захвата и выделения являются начальные записанные данные, таблица с предварительно генерированными C/A кодами и массив настроек.

Список специальных переменных из функции получения (захвата) сигнала, содержащийся в массиве настроек, имеет следующий вид:

`acq_satelliteList` – в этой переменной указан PRN спутника. Захват будет осуществляться только по конкретным спутникам. Пустой список в переменной (по умолчанию) запускает поиск для всех доступных спутников;

`acq_searchBand` указывает полосу частот, в которой необходимо осуществлять поиск сигналов, и является целым числом кГц. Она центрирована около ПЧ (Intermediate Frequency). Во время поиска доступных сигналов функция захвата использует шаги по 0.5 кГц;

`acq_threshold` определяет порог срабатывания при обнаружении сигнала.

Результатом исполнения блока захвата и выделения является строчный массив `acqResults`, содержащий результаты поиска для всех спутников, указанных в `acq_satelliteList`. Если сигнал спутника обнаружен, поле `signalDetected` устанавливается на единичку для данного конкретного спутника.

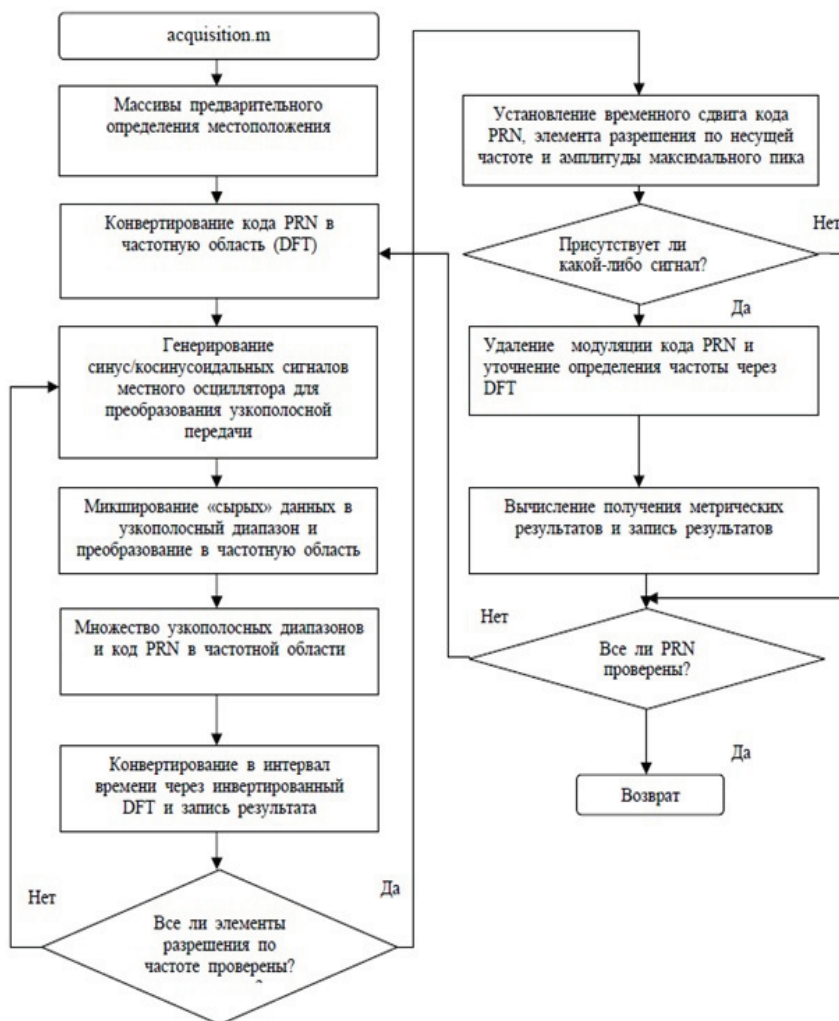


Рисунок 3 – Блок-схема последовательности операций параллельного алгоритма захвата сигнала с временным сдвигом кода

## 5. ФУНКЦИЯ СЛЕЖЕНИЯ ЗА СИГНАЛОМ (TRACKING FUNCTION)

Данный блок имитационной модели осуществляет слежение за сигналами GPS, расположенными в каждом из каналов согласно рисунку 4.

Функция на входе принимает следующие параметры: файл с записанным сигналом с фронта, массив `channel`, синусоидальные, косинусоидальные таблицы и таблицы кодов C/A. Функция обрабатывает блок сэмплов и возвращает два массива: результаты слежения за сигналом `trackResults` и обновленный массив `channel`.

Массив `channel` используется для передачи начальной информации для каждого канала, а также для сохранения информации по текущему каналу. Вторая цель данного массива – обеспечение непрерывного слежения за сигналом. Таким образом, обработка двух и более блоков сигналов может производиться непрерывно. Данный массив содержит текущую (из последней обработанной миллисекунды, мс) информацию по несущей частоте, временному сдвигу кода, номеру PRN отслеживаемого спутника, временные значения циклических фильтров и информацию по опорным генераторам сигналов.

Следующие параметры для слежения за сигналом несущей содержатся в массиве настроек:

`PLL_dampingRatio` – коэффициент затухания;

`PLL_noiseBandwidth` – ширина шумовой полосы частот PLL.

Следующий список представляет специфические переменные, содержащиеся в структуре установки:

`DLL_CACorrellatorSpacing` – расстояние между сигналами упреждающего и запаздывающего коррелятора в единицах сэмплов C/A кода;

`DLL_dampingRatio` – коэффициент затухания для цикла синхронизации по задержке;

`DLL_noiseBandwidth` – ширина шумовой полосы частот для цикла синхронизации по задержке.

Массив `trackResults` является основным результатом исполнения функции слежения. Она содержит результаты для всех каналов и для каждой миллисекунды (мс) обработанного блока: информацию о свойствах сигнала (несущая частота и временной сдвиг кода), а также выходы со всех шести корреляторов и цикла дискриминатора.

Результат работы блока слежения за сигналом используется как входное значение для функции навигации в постобработке (`postNavigation function`). Дополнительная информация используется для построения графика результатов слежения и для анализа производительности имитации.

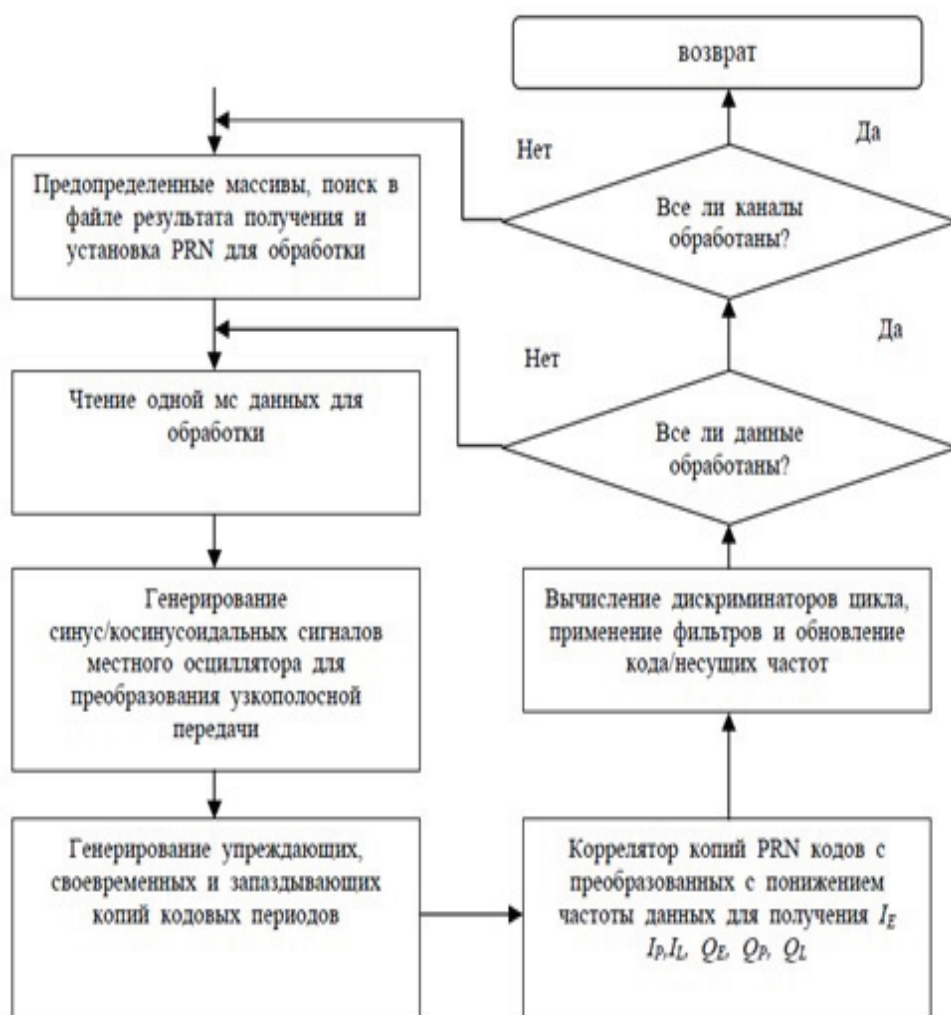


Рисунок 4 – Блок-схема последовательности операций в имитационной модели

онной модели приемника GPS. Например, можно воспользоваться функцией `plotTracking` для построения графика слежения за сигналом по любому отдельному каналу.

6. ФУНКЦИЯ НАВИГАЦИИ В ПОСТОБРАБОТКЕ (POSTNAVIGATION FUNCTION)

Функция запускается при обнаружении смены битов и местоположений преамбул, затем получает значения битов, далее декодирует эфемериды. В этом участвует только информация из субфреймов 1, 2 и 3. Также может быть произведено декодирование субфреймов 4 и 5, как представлено на рисунке 5.

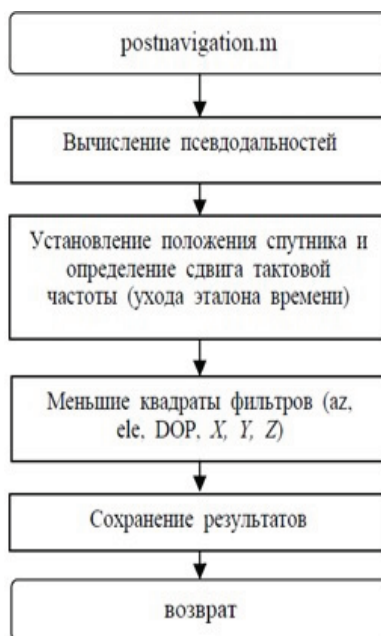


Рисунок 5 – Блок-схема последовательности операций вычисления местоположения антенны GPS

После декодирования данная функция вызывает функцию измерения псевдодальности, а также функцию для вычисления координат антенны GPS. Вычисления псевдодальности и местоположения производятся в период времени, которое указано в массиве настроек имитационной модели.

Входом для функции postNavigation являются результаты слежения за сигналом и текущий массив настроек, а выходом являются псевдодальности и полученные координаты. Функция postNavigation считывает следу-

ющие переменные:

`navSolPeriod` – указывает имитационной модели частоту вычислений псевдодалности и координат антенны GPS;

`elevationMask` – маска восхождения спутника. Устанавливает минимальный угол восхождения для спутника, информация по которому используется при решении основной навигационной задачи. Это ограничение вводится, потому что сигналы от спутников с низкими углами восхождения подвержены большим атмосферным ошибкам;

`UTMzone` – зона UTM, которая должна использоваться при преобразовании координат из ECEF в UTM. Это целочисленное значение, которое зависит от местоположения антенны приемника;

`truePosition` – если точное положение антенны приемника известно, тогда в настройках могут быть указаны топоцентрические координаты антенны в системе East-North-Up (ENU - Восток, Север и Вверх). Эти координаты будут вычтены из координат, вычисленных имитационной моделью коррелятора, затем результат будет показан на графике. Можно ввести параметры имитационной модели как приблизительные координаты или же приравнять их к нулям.

#### 6.1 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПСЕВДОДАЛЬНОСТЕЙ (PSEUDORANGE COMPUTATION)

Эта функция вычисляет псевдодалности по всем спутникам, обработанным функцией слежения. Псевдодалности не вычисляются для навигационных каналов, необработанных функцией слежения, для каналов, которые имеют необнаруженные преамбулы, или для каналов, которые имеют обнаруженную ошибку, выявленную контролем по четности в навигационных данных в соответствии с рисунком 6.

Входом для функции является выход синфазной составляющей коррелятора. Функции также нужна уточненная информация по временному сдвигу кода. Обычно обе эти входные переменные считываются из массива `trackResults`.

Выходом данной функции является список псевдодалностей и соответствующие им длительности передачи сигнала (SOW) для измеренных псевдодалностей.

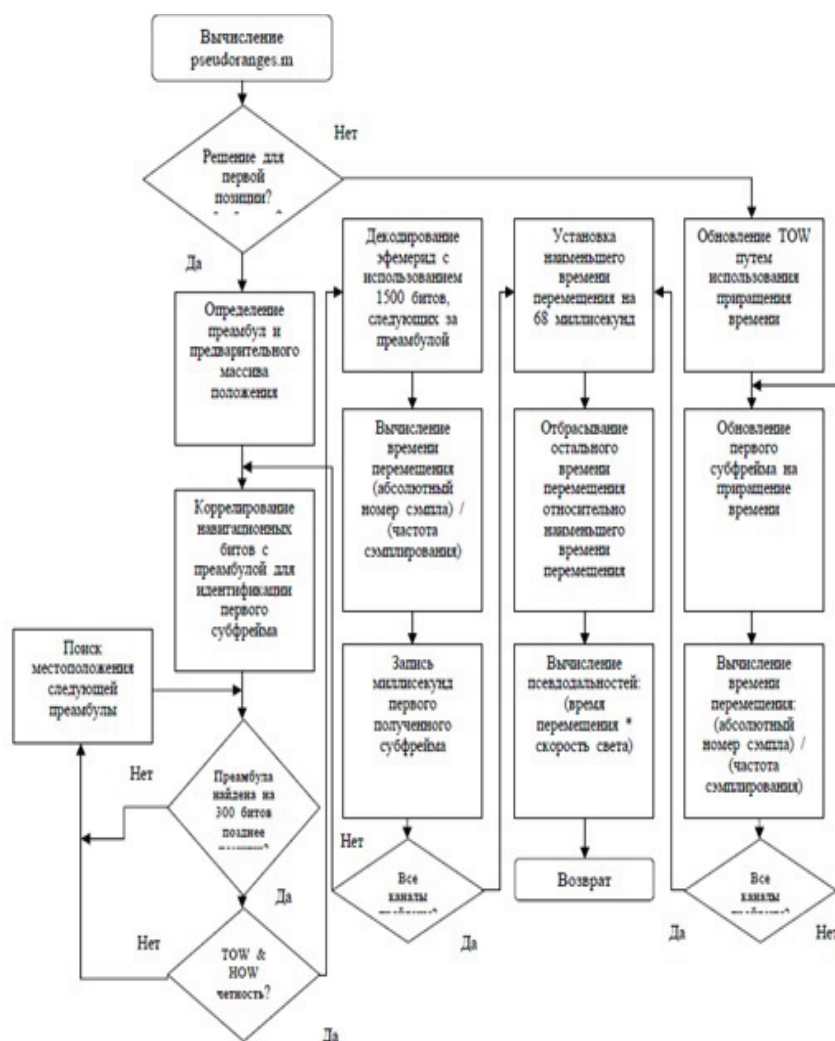


Рисунок 6 – Блок-схема последовательности операций вычисления псевдодальностей

## 6.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ (POSITION COMPUTATION)

Функция `leastSquaresPos` вычисляет положение антенны GPS из ранее вычисленных измерений псевдодальностей. Если по какой-либо при-

чине полные эфемериды спутника недоступны, то соответствующая псевдодальность исключается из вычисления согласно рисунку 7.

При первом вычислении углы восхождения всех спутников устанавливаются на максимум. Это необходимо для определения координат антенны и для вычисления истинных углов восхождения всех спутников. Все последующие вычисления положения антенны будут исключать измерения псевдодальностей от спутников с углами восхождения ниже, чем маска восхождения (`elevationMask`).

На финальной стадии функция `postNavigation` преобразует координаты ECEF в геодезическую систему координат UTM. Результаты сохраняются в массиве `navSolutions`.

#### 7. ТЕСТИРОВАНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯТОРА В РЕЖИМЕ ПОСТОБРАБОТКИ

Для проверки адекватности имитационной модели цифрового коррелятора проведены численные эксперименты. Для этого в среду моделирования MATLAB импортированы входные данные для имитационной модели, которые представляют собой файл с сохраненными дискретными отчетами сигналов GPS на промежуточной частоте. В данном файле хранится последовательность оцифрованных отчетов, которые принимают одно из четырех шестнадцатеричных значений, а именно: `0x01`, `0xFF`, `0xFD` и `0x03` в соответствии с рисунком 8. Входные данные были записаны с помощью фронтенда (`front-end`) и ГНСС антенны, расположенной в точке с хорошо известными координатами для верификации результатов обработки данных на основе имитационной модели. Результаты численных экспериментов представлены на рисунке 9. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными измерениями, полученными с помощью высокоточного двухчастотного ГНСС приемника Novatel 628.

В верхней части рисунка 9 представлен график, на котором в режиме постобработки с помощью имитационной модели цифрового коррелятора были рассчитаны координаты антенны GPS. Входные данные с фронтенда поступали на вход имитационной модели в течение 500 мс. На графике представлено отклонение рассчитанных координат антенны от истинных значений местоположения в системе координат ENU (Восток-Север-Вверх).



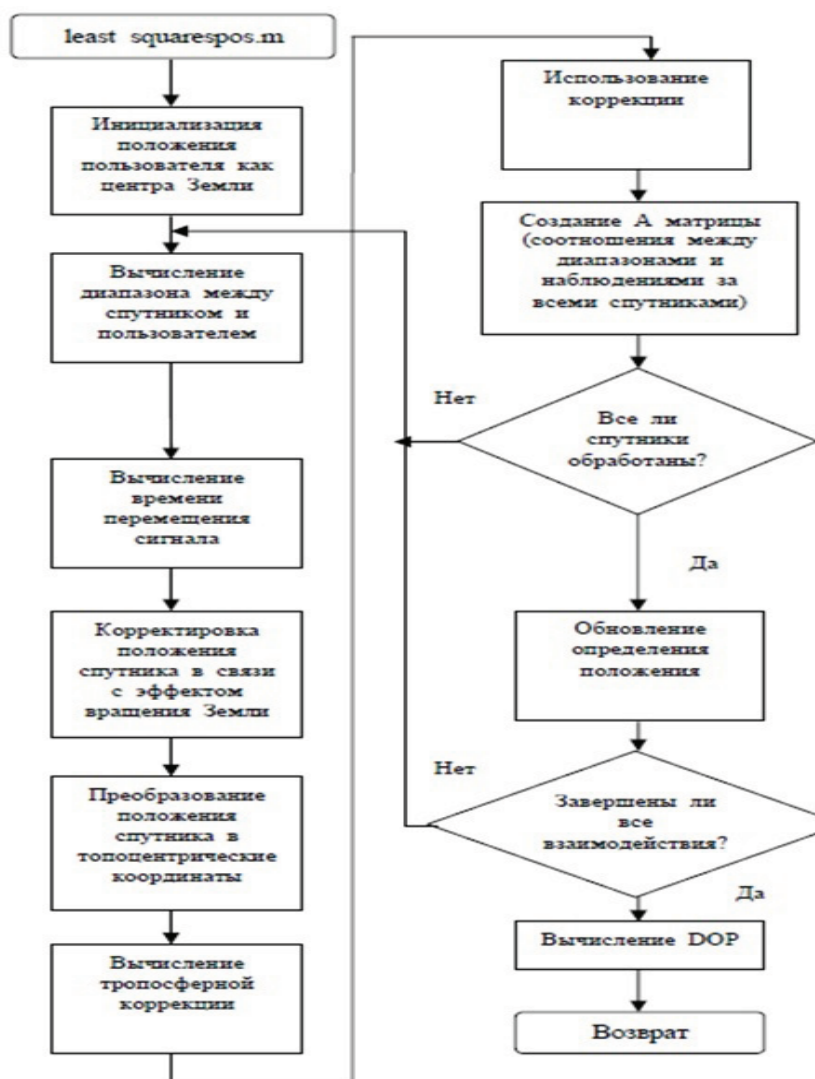


Рисунок 7 – Блок-схема последовательности операций вычисления местоположения методом наименьших квадратов

На втором графике в нижней левой части рисунка 9 представлены ре-

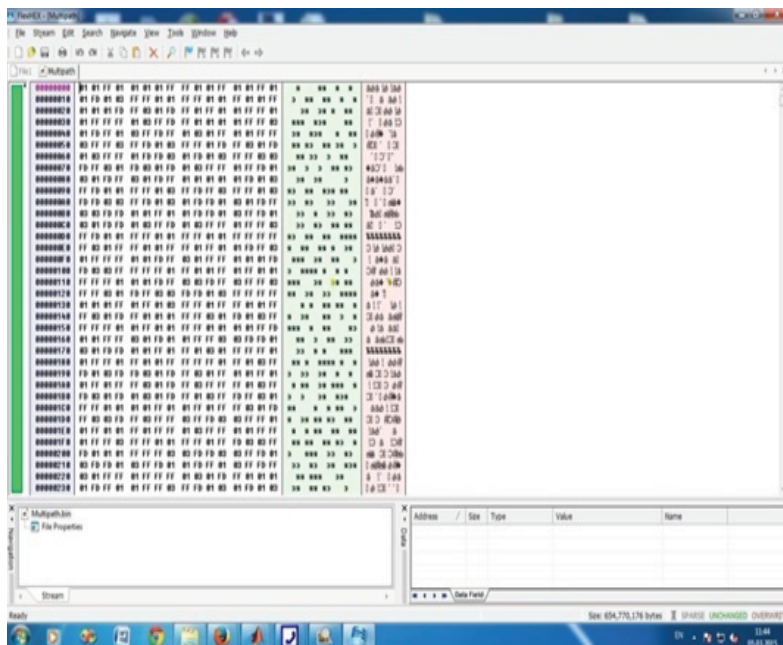


Рисунок 8 – Входные данные для имитационной модели цифрового коррелятора

зультаты того же эксперимента, в котором все расчетные координаты и координаты истинного местоположения антенны (красный крестик) спроецированы на плоскость Север (North) Восток (East).

В нижней правой части рисунка 9 приведен график расположения GPS спутников при проецировании на плоскость горизонта относительно точки наблюдения, которая находится в центре антенны ГНСС.

Тестирование экспериментального образца цифрового коррелятора проходило в Лаборатории спутниковых навигационных технологий Института космической техники и технологий в соответствии с методикой испытаний.

Результаты испытаний подтвердили соответствие разработанной имитационной модели цифрового коррелятора требованиям ТЗ на разработку имитационной модели цифрового коррелятора модуля обработки радиосигналов ГНСС для использования в космических аппаратах (КА) и функциональных дополнениях. Разработанная имитационная модель поз-

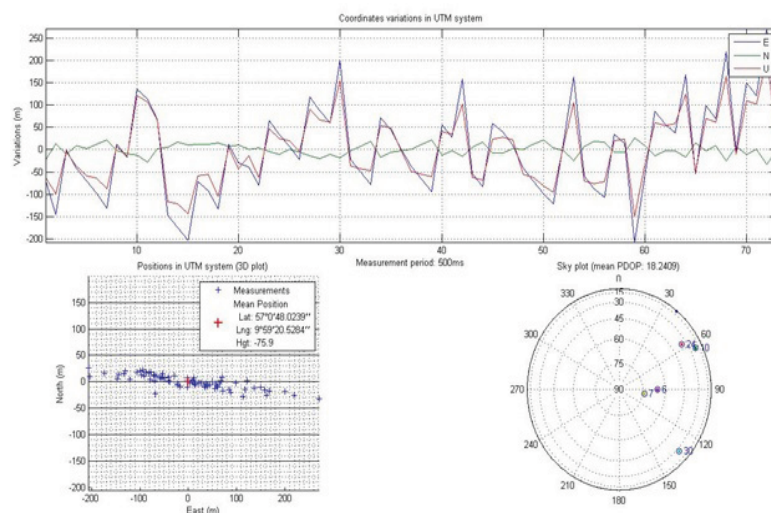


Рисунок 9 – Результаты решения навигационной задачи с помощью имитационной модели

воляет вести параллельное слежение за спутниковыми сигналами разных КА и вычислять время задержки между спутниковыми сигналами разных КА, а также синхронизировать время для параллельного выделения (демодуляции) навигационных сообщений отслеживаемых КА.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Tsui J. Fundamentals of Global Positioning System Receivers: A Software Approach. — New York: John Wiley & Sons, 2000. — P. 159-165.
- 2 Winkel J.O. Modeling and Simulating GNSS Signal Structures and Receivers: PhD thesis: 07.00.03. — Neubiberg, Germany: Universitat der Bundeswehr Munchen, 2000. — P. 159-165.
- 3 Akos D.M., Stockmaster M., Tsui J.B., Caschera J. Direct bandpass sampling of multiple distinct RF signals // IEEE Transactions on Communications. 1999. — V. 47, No. 7. — P. 983-988.
- 4 Kaplan E.D., Hegarty C.J. Understanding GPS, Principles and Applications. — Boston: Artech House, 2006. — P. 148-154.
- 5 Borre K. The GPS easy suite – MATLAB code for the GPS newcomer // GPS Solutions. — 2003. — No. 7. — P. 47-51.

Статья поступила в редакцию 17.12.2016

Ахмедов Д.Ш., Богуспаев Н.Б., Раскалиев А.С., Аверьянов А.А. SDR ТЕХНОЛОГИЯСЫ НЕГІЗІНДЕГІ GPS ҚАБЫЛДАҒЫШЫНЫҢ БІР-ЖЕЛЛІ КОРРЕЛЯТОРЫН ИМИТАЦИЯЛЫҚ МОДЕЛДЕУ

GPS орбиталдық тобының әртүрлі навигациялық жерсеріктерінің тарататын жерсеріктік сигналдарын біртіндеп іздестіруге арналған цифрлық коррелятордың имитациялық моделінің сипаттамасы ұсынылады. Цифрлық коррелятордың жасалған имитациялық моделі навигациялық сигналдан одан әрі навигациялық шешімді іздестіру және оны тұтынушыға жеткізу жүзеге асырылатын процессорға түсетін ақпаратты бөліп шығарады.

Akhmedov D.Sh., Boguspaev N.B., Raskaliyev A.S., Averyanov A.A. SIMULATION MODELING OF A SINGLE-CHANNEL BACKEND FOR GPS RECEIVER BASED ON SDR TECHNOLOGY

Description of simulation model of software backend designed for sequential search of satellite signals transmitted by different navigation satellites of the orbital GPS constellation is proposed. The simulation model of software backend decodes information from navigational signal, which is then fed into processor that searches for the navigation solution and delivers it to consumer.

**ОБ ОДНОРОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ В  
БЕСКОНЕЧНОЙ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ**М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ<sup>1</sup>, М.И. РАМАЗАНОВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, ул. Пушкина, 125,

e-mail: <sup>1</sup>muwasharkhan@gmail.com, jenaliyev@math.kz

Аннотация: В работе мы рассматриваем для уравнения теплопроводности однородную граничную задачу с производной по времени в граничном условии. Установлено, что наряду с тривиальным решением существует нетривиальное решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с заданным весом.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, однородная граничная задача, угловая область, нетривиальное решение.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается однородная граничная задача

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \{x, t\} \in G = \{x, t : 0 < x < t, t > 0\}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0, \quad (2)$$

где  $\tilde{u}(t) = u(t, t)$ .

Отметим, что задача (1)–(2) является однородным случаем задачи, изученной в работе [1], причем для простоты коэффициенты из указанной работы приняты равными:  $k = b = 1$ . Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в работе [1], случай неоднородной граничной задачи "... оказывается полезным при изучении некоторых

---

Keywords: *Heat equation, homogeneous boundary value problem, corner domain, non-trivial solution.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K02, 35K20.

Funding: Номера грантовых проектов МОН РК: 0052/ПЦФ-14; 0823/ГФ4.

© М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, 2016.

задач со свободными границами". Например, для однофазной задачи "... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой  $u(x, t)$  занимает отрезок  $0 < x < s(t)$ , при  $x = 0$  задается положительный поток тепла, а свободная граница  $x = s(t)$  начинается у твердой стенки  $x = 0$ , т.е. выполняется условие  $s(0) = 0$ ". В работе [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гильберовских пространствах.

В настоящей работе наряду с тривиальным решением мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого. Введем этот класс следующим образом:

$$(x + t^{1/2})^{-1} u(x, t) \in L_\infty(G), \text{ т.е. } u(x, t) \in L_\infty(G; (x + t^{1/2})^{-1}). \quad (3)$$

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(2) И СВЕДЕНИЕ ЕЕ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Преобразуем задачу (1)–(2). Для этого введем функцию  $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ . Далее, формально дифференцируя по переменной  $x$  уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < t, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$v(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{2}{a^2} v(x, t) \right) |_{x=t} = 0. \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) ищем в виде суммы потенциалов двойного и простого слоев [2, с. 476–479]:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где функции  $\nu(t)$  и  $\varphi(t)$  являются неизвестными и подлежат определению.

Удовлетворим решение (6) первому из условий (5). Имеем

$$v(x, t)|_{x=0} = \frac{\nu(t)}{2a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Отсюда выразим функцию  $\nu(t)$  через  $\varphi(t)$ :

$$\nu(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Используя представление (6) и равенство (8), получим следующее выражение для решения задачи (4)–(5):

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[ -\exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \right] \varphi(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Для того, чтобы удовлетворить второму граничному условию из (5), найдем из (9) производную от  $v(x, t)$  по переменной  $x$ :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[ \frac{x+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \right] \varphi(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Согласно второму граничному условию из (5) имеем

$$\left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{2}{a^2} v(x, t) \right) \Big|_{x=t} = \frac{\varphi(t)}{2a^2} + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau - \\
& -\frac{1}{a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau + \\
& +\frac{1}{a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Используя равенства

$$t + \tau = 2t - (t - \tau), \quad (t + \tau)^2 = (t - \tau)^2 + 4t\tau,$$

из (11) получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau - \\
-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau + \\
+\frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t > 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения (12) мы будем искать в классе

$$\sqrt{t} \exp\{t/(4a^2)\} \varphi(t) \in L_\infty(G), \quad \text{т.е.} \quad \varphi(t) \in L_\infty\left(G; \sqrt{t} \exp\{t/(4a^2)\}\right). \quad (13)$$

Отметим, что подобные интегральные уравнения Вольтерра второго рода нами были исследованы в работах [3]–[5].



## 3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (12)

Если ввести новую неизвестную функцию

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\},$$

то из (12) следует

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} \right\} \varphi_1(\tau) d\tau - \\ - \frac{5}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} \right\} \varphi_1(\tau) d\tau + \\ + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \varphi_1(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В интегральном уравнении (14) произведем замену независимой переменной и введем новую неизвестную функцию:

$$t = \frac{1}{t_1}, \quad \tau = \frac{1}{\tau_1}, \quad \varphi_2(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \varphi_1(1/t_1),$$

в результате этого из (14) получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{1/2}} \left[ 5 \exp \left\{ -\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} - 3 \right] \frac{1}{\tau_1} \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что из решения интегрального уравнения (15), возвращаясь к первоначальному независимому переменному и исходной неизвестной функции, мы можем получить решение исходного интегрального уравнения (12).

Для решения уравнения (15) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \hat{\varphi}_2(p) - \\ & - \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[ 5 \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} - 3 \right] \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [6, с.472.] и [7, с.158.]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \int_{t_1}^\infty k(t_1 - \tau_1) \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 \right] &= \hat{k}(-p) \cdot \hat{\varphi}_2(p), \\ \mathcal{L} \left[ \frac{1}{t_1} \cdot \varphi_2(t_1) \right] &= \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq, \end{aligned}$$

Перейдем от интегрального уравнения (16) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\hat{\psi}(p) = \int_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq, \quad \text{т.е.} \quad \hat{\varphi}_2(p) = -\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp}, \quad (17)$$

$$\left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \frac{d\hat{\psi}(p)}{dp} + \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[ 5 \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} - 3 \right] \hat{\psi}(p) = 0$$

или

$$\frac{d\hat{\psi}(p)}{\hat{\psi}(p)} = -\frac{5 \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} - 3}{2a\sqrt{-p} \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right]} dp. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18), получаем

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{\hat{\psi}(p)}{C} \right) &= - \int \frac{5 \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} - 3}{2a\sqrt{-p} \left[ 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right]} dp = \\ &= \left\| -\frac{2}{a} \sqrt{-p} = z, \quad dz = \frac{dp}{a\sqrt{-p}} \right\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \frac{(5 \exp\{z\} + 5) - 8}{1 + \exp\{z\}} dz = -\frac{5}{2}z + 4 \int \frac{\exp\{-z\} dz}{1 + \exp\{-z\}} = \\
&= -\frac{5}{2}z - 4 \int \frac{d(1 + \exp\{-z\})}{1 + \exp\{-z\}} = -\frac{5}{2}z - 4 \ln(1 + \exp\{-z\}) = \\
&= \left\| z = -\frac{2}{a}\sqrt{-p}, \right\| = \frac{5}{a}\sqrt{-p} + \ln \left[ \left( 1 + \exp \left\{ \frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^{-4} \right]. \quad (19)
\end{aligned}$$

Из (19) будем иметь

$$\hat{\psi}(p) = C \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{5}{a}\sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ \frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^4} = C \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a}\sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^4}. \quad (20)$$

Используя формулу (17), из равенства (20) находим решение интегрального уравнения (16):

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_2(p) &= -\frac{3}{2a\sqrt{-p}} \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a}\sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^4} + \\
&+ 4 \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a}\sqrt{-p} \right\}}{\left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^5} \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\}}{a\sqrt{-p}} = \\
&= \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a}\sqrt{-p} \right\}}{a\sqrt{-p} \left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^5} \times \\
&\times \left[ -\frac{3}{2} \left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right) + 4 \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right] = \\
&= \left[ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right] \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a}\sqrt{-p} \right\}}{a\sqrt{-p} \left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\} \right)^5}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Далее для нахождения оригинала для функции  $\hat{\varphi}_2(p)$  будем пользоваться следующим разложением:

$$\frac{1}{(1+z)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k z^k, \quad z = \exp \left\{ -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\}, \quad |z| < 1, \quad (22)$$

где

$$A_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}.$$

Отметим, что если  $z = 1$ , то верно равенство

$$\frac{1}{(1+z)^5} \Big|_{z=1} = \frac{1}{32}.$$

Используя разложение (22), из (21) получим представление функции  $\hat{\varphi}_2(p)$  в виде ряда:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_2(p) = & \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[ \frac{5}{\sqrt{-p}} \exp \left\{ - \left( k + \frac{5}{2} \right) \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{\sqrt{-p}} \exp \left\{ - \left( k + \frac{3}{2} \right) \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \quad \forall p \in \{p : \operatorname{Re} \{\sqrt{-p}\} > 0\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как имеет место формула обращения для образа Лапласа [6, с. 497]:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp\{-\alpha\sqrt{q}\}}{\sqrt{q}} \right] = \frac{\exp\{-\alpha^2/(4t_1)\}}{\sqrt{\pi t_1}}, \quad 0 < t_1 < \infty,$$

то из (23) имеем функцию-оригинал  $\varphi_2(t_1)$  для всех  $0 < t_1 < \infty$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2(t_1) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi t_1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[ 5 \exp \left\{ - \left( k + \frac{5}{2} \right)^2 \frac{1}{a^2 t_1} \right\} - \right. \\ & \left. - 3 \exp \left\{ - \left( k + \frac{3}{2} \right)^2 \frac{1}{a^2 t_1} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Далее отсюда, возвращаясь к исходной независимой переменной  $0 < t < \infty$ , получаем

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \varphi_{1,k}^{(1)}(t) - \varphi_{1,k}^{(2)}(t) \right], \quad (24)$$

где

$$\varphi_{1,k}^{(1)}(t) = \frac{5A_k}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left( k + \frac{5}{2} \right)^2 \frac{t}{a^2} \right\}, \quad \varphi_{1,k}^{(2)}(t) = \frac{3A_k}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left( k + \frac{3}{2} \right)^2 \frac{t}{a^2} \right\}. \quad (25)$$

Таким образом, искомое решение исходного интегрального уравнения (12) определяется по формуле:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \varphi_k^{(1)}(t) - \varphi_k^{(2)}(t) \right], \quad 0 < t < \infty, \quad (26)$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(t) = \varphi_{1,k}^{(1)}(t) \exp \left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\}, \quad \varphi_k^{(2)}(t) = \varphi_{1,k}^{(2)}(t) \exp \left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\}. \quad (27)$$

Решение (26) действительно принадлежит классу  $L_{\infty}(G; \sqrt{t} \exp \{t/(4a^2)\})$  (13).

#### 4. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Решение  $v(x, t)$  граничной задачи (4)–(5) определяется согласно формулам (9) и (26)–(27), а решение исходной граничной задачи (1)–(2) будет иметь вид

$$u(x, t) = C_2 \int_0^x v(\xi, t) d\xi + C_1 = C_2 \tilde{u}(x, t) + C_1, \quad (28)$$

так как ее решение находится с точностью до постоянного множителя  $C_2$  и постоянного слагаемого  $C_1$ , где  $v(x, t)$  определяются согласно формуле (9).

Для установления ограниченности полученного решения  $u(x, t)$  (28) задачи (1)–(2) нам необходимо изучить свойства решения  $v(x, t)$  (9) задачи (4)–(5). Так как  $\varphi(t) \in L_{\infty}(\mathbb{R}_+, \sqrt{t} \exp \{t/(4a^2)\})$  (13), то нам необходимо оценить и показать ограниченность интеграла  $I(x, t)$  для всех  $\{x, t\} \in G$ :

$$I(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t I_1(x, t, \tau) \frac{\exp \left\{ -\frac{\tau}{4a^2} \right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \quad (29)$$

где

$$I_1(x, t, \tau) = \int_0^x \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[ -\exp \left\{ -\frac{(x_1 + \tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] dx_1. \quad (30)$$

Вычислим интеграл (29). Для этого после замены

$$\left\| z = \frac{x_1 \pm \tau}{2a\sqrt{t - \tau}}, \quad dz = \frac{dx_1}{2a\sqrt{t - \tau}} \right\|$$

из (30) имеем

$$I_1(x, t, \tau) = a\sqrt{\pi} \left[ -\operatorname{erf} \left( \frac{x + \tau}{2a\sqrt{t - \tau}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \tau}{2a\sqrt{t - \tau}} \right) \right]. \quad (31)$$

И далее, подставляя значение интеграла  $I_1(x, t, \tau)$  (31) в (29), получаем

$$I(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ -\operatorname{erf} \left( \frac{x + \tau}{2a\sqrt{t - \tau}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \tau}{2a\sqrt{t - \tau}} \right) \right] \frac{\exp \left\{ -\frac{\tau}{4a^2} \right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (32)$$

Отсюда непосредственно получаем оценку для интеграла (32):

$$I(x, t) \leq 4a \int_0^{\sqrt{t}/(2a)} \exp\{-\xi^2\} d\xi = 2a\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right). \quad (33)$$

Таким образом, мы установили равномерную ограниченность интеграла (29) по переменным  $\{x, t\} \in G$ , т.е. мы показали, что решение  $\tilde{u}(x, t)$  (27) граничной задачи (1)–(2) принадлежит классу  $L_\infty(G)$ . Заметим, что решение  $\tilde{u}(x, t)$  определяется с точностью до постоянного множителя  $C_2$ , т.е. формула

$$u(x, t) = C_2 \tilde{u}(x, t) + C_1, \quad u(x, t) \in L_\infty(G),$$

определяет общее решение граничной задачи (1)–(2). Оценка (33) также позволяет получить его порядок малости при любых  $\{x, t\} \in G$ , т.е. имеет место включение

$$\tilde{u}(x, t) \in L_\infty(G; (x + t^{1/2})^{-1}).$$

Это следует из асимптотики для функции  $\operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right)$  при малых значениях переменной  $t$  (имеющее место и для малых значений  $x$ ), а для больших значений переменных  $\{x, t\} \in G$  получается из свойства ограниченности решения  $u(x, t)$  на  $G$  и ограниченности выражения  $(x + \sqrt{t})^{-1} \tilde{u}(x, t)$ .

## 5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Граничная задача (1)–(2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение  $u(x, t) = C_2 \tilde{u}(x, t) + C_1$ , где  $\tilde{u}(x, t) \in L_\infty(G; (x + \sqrt{t})^{-1})$  и  $C_1, C_2 - \text{const}$ .

ТЕОРЕМА 2. В классе функций  $L_\infty(G; [x^{1+\alpha} + t^{(1+\alpha)/2}]^{-1})$  граничная задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение  $u(x, t) \equiv 0$ .

## 6. ПРИЛОЖЕНИЕ

$$v(x, t) = -v_1(x, t) + v_2(x, t), \quad (34)$$

где

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \quad (35)$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \quad (36)$$

Для функции  $v_1(x, t)$  (35) будем иметь вид

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp\left\{\frac{2x+t}{4a^2}\right\} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x+t)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau. \quad (37)$$

Сделаем следующие замены:

$$z = \frac{x+t}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad \tau = t - \frac{(x+t)^2}{4a^2z^2} = \frac{t}{z^2} \left[ z^2 - \frac{(x+t)^2}{4a^2t} \right], \quad d\tau = \frac{(x+t)^2}{2a^2z^3} dz,$$

в результате из (37) получим

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x+t}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{2x+t}{4a^2}\right\} \int_{\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}\right)^2}} \cdot \frac{dz}{z} =$$

$$= \left\| \xi^2 = z^2 - \frac{(x+t)^2}{4a^2t}, \xi d\xi = z dz \right\| =$$

$$= \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x+t}{\sqrt{t}} \exp \left\{ \frac{2x+t}{4a^2} - \frac{(x+t)^2}{4a^2t} \right\} \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2 + \left(\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \exp \{-\xi^2\} d\xi,$$

т.е. имеем

$$v_1(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp \left\{ \frac{2x+t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( \frac{x+t}{2a\sqrt{t}} \right). \quad (38)$$

При выводе равенства (38) для вычисления интеграла использована формула из [8, 3.466.1].

Теперь для получения первой части решения (1)–(2)  $u_1(x, t) = - \int_0^x v_1(\xi, t) d\xi$  имеем

$$-u_1(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^x \exp \left\{ \frac{2\xi+t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi+t}{2a\sqrt{t}} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^x \exp \left\{ \frac{2\xi+t}{4a^2} \right\} \int_{\frac{\xi+t}{2a\sqrt{t}}}^\infty \exp \{-z^2\} dz d\xi = \text{||меняем порядок интегрирования||} =$$

$$= 2a \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \left[ \int_{\frac{\sqrt{t}}{2a}}^{\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}} \exp \{-z^2\} \int_0^{2a\sqrt{t}z-t} \exp \left\{ \frac{\xi}{2a^2} \right\} d \left( \frac{\xi}{2a^2} \right) dz + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\xi+t}{2a\sqrt{t}}}^\infty \exp \{-z^2\} \int_0^x \exp \left\{ \frac{\xi}{2a^2} \right\} d \left( \frac{\xi}{2a^2} \right) dz \right] =$$

$$= 2a \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \left\{ \int_{\frac{\sqrt{t}}{2a}}^{\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}} \exp \{-z^2\} \left[ \exp \left\{ \frac{\sqrt{t}}{a} z - \frac{t}{2a^2} \right\} \right] dz + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\{-z^2\} \left[ \exp\left\{\frac{x}{2a^2}\right\} - 1 \right] dz \Bigg\} = \\
& = 2a \cdot \exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\} \int_{\frac{\sqrt{t}}{2a}}^{\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}} \exp\left\{-z^2 + \frac{\sqrt{t}}{a}z\right\} dz - \\
& - a\sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{z+t}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) \right] + \\
& + a\sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \left[ \exp\left\{\frac{x}{2a^2}\right\} - 1 \right] \operatorname{erf}\left(\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Так как интеграл в последнем выражении вычисляется по формуле (1.3.17) из [9, Т. 1, С. 115], то получаем

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = a\sqrt{\pi} \Bigg\{ & - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) - \\
& - \exp\left\{\frac{2x+t}{4a^2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{x+t}{2a\sqrt{t}}\right) \Bigg\}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Далее, аналогично предыдущему, для функции  $v_2(x, t)$  (36) будем иметь вид

$$v_2(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{2x-t}{4a^2}\right\} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau. \quad (40)$$

Сделаем следующие замены:

$$z = -\frac{x-t}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad \tau = t - \frac{(x-t)^2}{4a^2z^2} = \frac{t}{z^2} \left[ z^2 - \frac{(x-t)^2}{4a^2t} \right], \quad d\tau = \frac{(x-t)^2}{2a^2z^3} dz,$$

в результате из (40) получим

$$v_2(x, t) = \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-(x-t)}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{2x-t}{4a^2}\right\} \int_{-\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}\right)^2}} \cdot \frac{dz}{z} =$$

$$= \left\| \xi^2 = z^2 - \frac{(x-t)^2}{4a^2t}, \quad \xi d\xi = z dz \right\| =$$

$$= \frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-(x-t)}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{2x-t}{4a^2} - \frac{(x-t)^2}{4a^2t} \right\} \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2 + \left(\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \exp \{-\xi^2\} d\xi,$$

т.е. имеем

$$v_2(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp \left\{ -\frac{2x-t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( -\frac{x-t}{2a\sqrt{t}} \right). \quad (41)$$

При выводе равенства (41) для вычисления интеграла использована формула из [8, 3.466.1].

Теперь для получения второй части решения (1)–(2)  $u_2(x, t) = \int_0^x v_2(\xi, t) d\xi$  имеем

$$u_2(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{2\xi-t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( -\frac{\xi-t}{2a\sqrt{t}} \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{2\xi-t}{4a^2} \right\} \int_{-\frac{\xi-t}{2a\sqrt{t}}}^\infty \exp \{-z^2\} dz =$$

$$= \left\| \text{меняем порядок интегрирования} \right\| =$$

$$= 2a \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \left[ \int_{-\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp \{-z^2\} dz \int_{-2a\sqrt{t}z+t}^x \exp \left\{ -\frac{\xi}{2a^2} \right\} d \left( \frac{\xi}{2a^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\sqrt{t}}{2a}}^\infty \exp \{-z^2\} dz \int_0^x \exp \left\{ -\frac{\xi}{2a^2} \right\} d \left( \frac{\xi}{2a^2} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2a \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \left\{ \int_{-\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp \{-z^2\} \left[ \exp \left\{ \frac{\sqrt{t}}{a} z - \frac{t}{2a^2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{x}{2a^2} \right\} \right] dz - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\frac{\sqrt{t}}{2a}}^{\infty} \exp \{-z^2\} \left[ \exp \left\{ -\frac{x}{2a^2} \right\} - 1 \right] dz \right\} = \\
&= 2a \cdot \exp \left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\} \int_{-\frac{x-t}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp \left\{ -z^2 + \frac{\sqrt{t}}{a} z \right\} dz - \\
&\quad - a\sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{2x-t}{4a^2} \right\} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right) - \operatorname{erf} \left( -\frac{x-t}{2a\sqrt{t}} \right) \right] - \\
&\quad - a\sqrt{\pi} \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \left[ \exp \left\{ -\frac{x}{2a^2} \right\} - 1 \right] \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right).
\end{aligned}$$

Так как интеграл в последнем выражении вычисляется по формуле (1.3.17) из [9, Т. 1, С. 115], то получаем

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = a\sqrt{\pi} \left\{ -\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \exp \left\{ -\frac{2x-t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( -\frac{x-t}{2a\sqrt{t}} \right) + \right. \\
\left. + \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right) \right\}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Из выражений для составляющих решения  $u_1(x, t)$  (39) и  $u_2(x, t)$  (42) окончательно получаем

$$\begin{aligned}
u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = a\sqrt{\pi} \left\{ -2\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + 2 \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{t}}{2a} \right) - \right. \\
\left. - \exp \left\{ \frac{2x+t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( \frac{x+t}{2a\sqrt{t}} \right) - \exp \left\{ -\frac{2x-t}{4a^2} \right\} \operatorname{erfc} \left( -\frac{x-t}{2a\sqrt{t}} \right) \right\}. \quad (43)
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Солонников В.А., Фазано А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 269. – С. 322-338.
- 2 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
- 3 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. – 2015 (March). – V. 2015: 71. – 14 p.
- 4 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // *Boundary Value Problems*. – 2014. – V. 213. – 21 p.
- 5 Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. С.1234–1248.
- 6 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 679 с.
- 7 Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.:Наука, 1975. – 703 с.
- 8 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. – М.: Физматлит, 1963. – 1108 с.
- 9 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. (2-е изд.). – М.: Физматлит, 2002. – 632 с.

*Статья поступила в редакцию 16.11.2016*

Жиенәлиев М.Т., Рамазанов М.И. ШЕКСІЗ БҰРЫШТЫҚ ОБЛЫСТАҒЫ БІРТЕКТІ ПАРАБОЛАЛЫҚ ЕСЕП ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста біз жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шекаралық шартында уақыт бойынша туындысы бар біртекті шекаралық есепті қарастырамыз. Осы есептің тривиалды шешімімен қатар, елеулі түрде шектелген берілген салмақты функциялар класында тұрақты көбейтіндіге дейінгі дәлдікпен анықталған тривиалды емес шешімінің де бар екендігі тағайындалды.

Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. ON THE HOMOGENEOUS PARABOLIC PROBLEM IN INFINITE CORNER DOMAIN

In this paper we consider the heat equation for a homogeneous boundary value problem with a time derivative in the boundary condition. It was established that in addition to the existence of a trivial solution there exists nontrivial solution, up to a constant factor in the space of essentially bounded functions with a given weight function.

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ  
ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С СУЩЕСТВЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ  
КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА**

Д.С. ДЖУМАБАЕВ<sup>1,3</sup>, С.М. ТЕМЕШЕВА<sup>1,2</sup>, Р.Е. УТЕШОВА<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: <sup>1</sup>dzhumabaev@list.ru

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби  
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: <sup>2</sup>nur15@mail.ru

<sup>3</sup>Международный университет информационных технологий  
050040, Алматы, ул. Манаса, 8"А", e-mail: <sup>3</sup>ruteshova@mail.ru

Аннотация: Рассматривается задача нахождения ограниченного на интервале  $(0, T)$  решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью, имеющей существенные особенности на концах интервала. Построена аппроксимирующая регулярная двухточечная краевая задача.

Ключевые слова: Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярные краевые задачи, аппроксимация.

Уравнения с особенностями в конечной точке часто возникают в приложениях. Различные задачи для таких уравнений рассмотрены многими авторами, обзор работ которых содержится в [1].

Нелинейность дифференциальных уравнений, рассматриваемых в работе, приводит к принципиальным трудностям при исследовании поведения решения в существенно особых точках конечного интервала. Такого рода трудности возникают также при аппроксимации решения сингулярной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений решениями регулярных краевых задач.

---

Keywords: *Nonlinear ordinary differential equations, singular boundary value problems, approximation.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B16, 34L30.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта № 4057/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© Д.С. Джумабаев, С.М. Темешева, Р.Е. Утешова, 2016.

В работе решена задача аппроксимации ограниченного на конечном интервале решения и решения с предельными значениями для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с существенными особенностями на концах конечного интервала.

Построены регулярные двухточечные краевые задачи, аппроксимирующие ограниченные решения и решения с предельными значениями для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказательства утверждений основаны на использовании итерационных методов для нелинейных уравнений с неограниченными операторами.

ЗАДАЧА 1. На  $(0, T)$  рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max |x_i|, \quad (1)$$

где  $f(t, x) : (0, T) \times R^n \rightarrow R^n$  – непрерывная функция, имеющая существенную особенность в начальной и конечной точках интервала  $(0, T)$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{\delta}^{T/2} \|f(t, x)\| dt = \infty,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{T/2}^{T-\delta} \|f(t, x)\| dt = \infty.$$

Ограниченное решение уравнения (1) называется решением Задачи 1.

Выберем  $x_0 \in R^n$  и введем следующие обозначения:

$C(J, R^n)$  – множество непрерывных на  $J \subseteq (0, T)$  функций;

$\tilde{C}(J, R^n)$  – пространство непрерывных и ограниченных на  $J$  функций  $x : J \rightarrow R^n$  с нормой  $\|x\|_1 = \sup_{t \in J} \|x(t)\|$ ;

$S(x_0, J, r) = \{x(t) \in \tilde{C}(J, R^n) : \|x - x_0\|_1 < r\}$ ;

$G(x_0, J, r) = \{(t, x) : t \in J; \|x(t) - x_0\| < r\}$ .

Задачу 1 рассмотрим в следующих предположениях относительно правой части.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Функция  $f(t, x)$  непрерывна и имеет равномерно непрерывную производную  $f'_x(t, x)$  в  $G(x_0, (0, T), r)$ .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Функция  $\alpha_0(t) = \|f'_x(t, x_0)\|$  удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{\delta}^{T/2} \alpha_0(t) dt = \infty,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{T/2}^{T-\delta} \alpha_0(t) dt = \infty.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для всех  $x \in S(x_0, (0, T), r)$  имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(t, x)}{\alpha_0(t)} = f_0(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \frac{f(t, x)}{\alpha_0(t)} = f_T(x).$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Собственные значения матриц  $A_0 = \frac{df_0}{dx}(x_-)$ ,  $A_T = \frac{df_T}{dx}(x_+)$ , где  $x_-$  и  $x_+$  — нули функций  $f_0(x)$  и  $f_T(x)$  соответственно, имеют отличные от нуля действительные части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непрерывно дифференцируемая на  $(0, T)$  функция  $x_0(t)$  называется предельным с весом  $1/\alpha(t)$  при  $t \rightarrow 0+0$ ,  $t \rightarrow T-0$  решением уравнения (1), если

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\|\dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t))\|}{\alpha(t)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \frac{\|\dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t))\|}{\alpha(t)} = 0.$$

Возьмем  $\delta \in (0, T/2)$  и по  $x_{\mp}$  построим ограниченную и непрерывно дифференцируемую на  $(0, T)$  функцию  $x_0(\delta, t)$  следующим образом:

$$x_0(\delta, t) = \begin{cases} x_- & \text{при } t \in (0, \delta], \\ \frac{x_+ - x_-}{4(T - 2\delta)^3} (T - 2t)^3 - \frac{3(x_+ - x_-)}{4(T - 2\delta)} (T - 2t) + \frac{x_+ + x_-}{2} & \text{при } t \in (\delta, T - \delta), \\ x_+ & \text{при } t \in [T - \delta, T). \end{cases}$$



Очевидно, что в Предположениях 3, 4 функция  $x_0(\delta, t)$  является предельным с весом  $1/\alpha_0(t)$  при  $t \rightarrow 0+0$ ,  $t \rightarrow T-0$  решением уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция  $x^*(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n)$  называется "изолированным" решением Задачи 1, если существует число  $\rho_0 > 0$ , при котором функция  $f(t, x)$  в  $G_{\rho_0}^* = G(x^*, (0, T), \rho_0)$  имеет равномерно непрерывную производную по  $x$  и линеаризованная задача

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y + \varphi(t), \quad t \in (0, T), \quad y \in R^n, \quad (2)$$

$$y(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n), \quad (3)$$

для любой функции  $\varphi(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n)$  имеет единственное решение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены Предположения 1-4 и при всех  $\hat{x}(t) \in S(x_0(\delta, t), (0, T), \rho)$  сингулярная краевая задача для линеаризованного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, \hat{x}(t))y + \varphi(t), \quad y \in R^n, \quad \varphi(t)/\alpha_0(t) \in \tilde{C}((0, T), R^n), \quad (4)$$

корректно разрешима с константой  $\gamma$ .

Тогда при выполнении неравенства

$$\gamma \sup_{t \in (0, T)} \frac{\|\dot{x}_0(\delta, t) - f(t, x_0(\delta, t))\|}{\alpha_0(t)} < \rho$$

в  $S(x_0(\delta, t), (0, T), \rho)$  существует  $x^*(t)$  – "изолированное", ограниченное на  $(0, T)$  решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее предельным соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} x^*(t) = x_-, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} x^*(t) = x_+. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция  $x_0(\delta, t)$  является предельным с весом  $1/\alpha_0(t)$  при  $t \rightarrow 0+0$ ,  $t \rightarrow T-0$  решением уравнения (1), то существование  $x^*(t)$  – решения уравнения (1), удовлетворяющего предельным соотношениям (5), вытекает из теоремы 8 из [2, с. 23].

"Изолированность" решения  $x^*(t)$  следует из равномерной непрерывности  $f'_x(t, x(t)) \in \tilde{C}((0, T), R^n)$  и корректной разрешимости сингулярной краевой задачи (4) для линеаризованного уравнения.

Перейдем к вопросу аппроксимации ограниченного решения уравнения (1).

Через  $S_0, S_T$  обозначим вещественные неособые  $(n \times n)$ -матрицы, приводящие соответственно  $A_0, A_T$  к обобщенно-жордановой форме:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= S_0 A_0 S_0^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{array} \right\|, \\ \tilde{A}_T &= S_T A_T S_T^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^T & 0 \\ 0 & A_{22}^T \end{array} \right\|,\end{aligned}$$

где  $A_{11}^0$  и  $A_{22}^0$  ( $A_{11}^T$  и  $A_{22}^T$ ) состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матрицы  $A_0$  ( $A_T$ ) с отрицательными и положительными действительными частями. Пусть  $n_1$  – количество собственных значений матрицы  $A_0$  с отрицательными действительными частями;  $n_2$  – количество собственных значений матрицы  $A_T$  с положительными действительными частями. Составим  $(n \times n)$ -матрицы

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cc} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad P_2 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{array} \right\|,$$

здесь  $I_{n_r}$  – единичные матрицы порядка  $n_r$ ,  $r = 1, 2$ .

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [\delta, T - \delta], \quad x \in R^n, \quad (6)$$

$$P_1 S_0 f_0(x(\delta)) + P_2 S_T f_T(x(T - \delta)) = 0. \quad (7)$$

Обозначим сужение ограниченного на  $(0, T)$  решения уравнения (1) на интервал  $[\delta, T - \delta]$  через  $x_\delta^* t$ .

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5.** *Функции  $f_0(x)$ ,  $f_T(x)$  в  $S(x_-, (0, T), \rho)$ ,  $S(x_+, (0, T), \rho)$  соответственно имеют производные  $f'_0(x)$ ,  $f'_T(x)$  и равномерно относительно  $x$  справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f'_x(t, x)}{\alpha_0(t)} = f'_0(x), \quad x \in S(x_-, (0, T), \rho),$$

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \frac{f'_x(t, x)}{\alpha_0(t)} = f'_T(x), \quad x \in S(x_+, (0, T), \rho).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1, Предположение 5 и  $x^*(t) \in S(x_0(\delta, t), (0, T), \rho)$  – "изолированное" решение уравнения (1), удовлетворяющее предельным соотношениям (5). Тогда существуют числа  $\delta_0 > 0$ ,  $\rho^* > 0$  такие, что для всех  $\delta \in (0, \delta_0]$  регулярная двухточечная краевая задача (6), (7) в  $S(x_\delta^*(t), [\delta, T - \delta], \rho^*)$  имеет единственное решение  $x_\delta(t)$  и справедлива оценка

$$\max_{t \in [\delta, T - \delta]} \|x_\delta(t) - x^*(t)\| \leq 2\gamma \{ \|S_- \| \cdot \|f_-(x^*(\delta))\| + \|S_+ \| \cdot \|f_+(x^*(T - \delta))\| \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения нелинейная двухточечная краевая задача (6), (7) записывается в виде операторного уравнения

$$A(x) \equiv Hx + F(x) = 0, \quad (8)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0(t)} \frac{d}{dt} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_0(t)} f(t, x(t)) \\ P_1 S_0 f_0(x(\delta)) + P_2 S_T f_T(x(T - \delta)) \end{pmatrix}.$$

Оператор  $A$  отображает банахово пространство  $X = C([\delta, T - \delta], R^n)$  с нормой  $\|x\|_\delta = \max_{t \in [\delta, T - \delta]} \|x(t)\|$  в банахово пространство  $Y = \widetilde{C}([\delta, T - \delta], R^n) \dot{+} R^n$  с нормой  $\|y\|_Y = \max\{\|f\|_\delta, \|d\|\}$ .

Из условия теоремы следует, что существует  $\rho_0 > 0$  такое, что  $S(x^*(t), (0, T), \rho_0) \subset S(x_0(\delta, t), (0, T), \rho)$  и функции  $f(t, x)$ ,  $f_0(x)$ ,  $f_T(x)$  соответственно в  $G(x^*, (0, T), \rho_0)$ ,  $S(x_-, (0, T), \rho_0)$ ,  $S(x_+, (0, T), \rho_0)$  имеют равномерно непрерывные производные  $f'_x(t, x)$ ,  $f'_-(x)$ ,  $f'_+(x)$ . Отсюда вытекают существование и равномерная непрерывность производной Фреше  $F'(x)$  в  $S(x_\delta^*(t), [\delta, T - \delta], \rho^*)$ .

Из корректной разрешимости Задачи 1 для линейризованного уравнения (4) следует существование  $\delta_1 > 0$  такого, что линейная регулярная

двухточечная краевая задача

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(t, x^*(t))z + \varphi(t), \quad t \in [\delta_1, T - \delta_1], \quad z \in R^n,$$

$$P_1 S_0 A_0 z(\delta_1) + P_2 S_T A_T z(T - \delta_1) = d, \quad d \in R^n,$$

для всех  $\delta \in (0, \delta_1)$  корректно разрешима с независимой от  $\delta$  константой  $K$ . Это эквивалентно обратимости линейного оператора  $H + F'(x_\delta^*) : X \rightarrow Y$  и выполнению неравенства

$$\|(H + F'(x_\delta^*))^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq K.$$

Применим к операторному уравнению (8) теорему 6 [2, с. 18], взяв в качестве  $x_0$  функцию  $x_\delta^*(t)$ .

Первое условие теоремы выполняется с  $\gamma_0 = K$ . Возьмем число  $\varepsilon = \frac{1}{2K}$  и в силу равномерной непрерывности производной Фреше выберем  $\rho^* \in (0, \rho_0]$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|F'(x) - F'(x_0)\|_{L(Y, X)} \leq \varepsilon = \frac{1}{2K}.$$

Тогда  $\varepsilon\gamma_0 = \frac{1}{2K} \cdot K = \frac{1}{2} < 1$ . Так как  $x^*(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех  $t \in (0, T)$ , то

$$\|Hx_0 + F(x_0)\|_Y = \|P_1 S_0 f_0(x^*(\delta)) + P_2 S_T f_T(x^*(T - \delta))\|.$$

Учитывая предельные соотношения (5), выберем  $\delta_0 \in (0, \delta_1)$  такое, что

$$2K\|Hx_0 + F(x_0)\|_Y < \rho^*.$$

Все условия теоремы 6 [2, с. 18] выполнены, откуда следует утверждение теоремы.

При Предположениях 1-4 предельное с весом при  $t \rightarrow 0 + 0$ ,  $t \rightarrow T - 0$  решение уравнения (1) обладает притягивающим свойством, т.е. справедливо следующее утверждение: для любого решения  $x(t)$  уравнения (1), принадлежащего  $S(x_0(t), (\delta_0, T - \delta_0), r_0)$ , имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \|x(t) - x_0(t)\| = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \|x(t) - x_0(t)\| = 0.$$

Так как при выполнении условий Теоремы 1 "изолированное" ограниченное решение уравнения (1) – функция  $x^*(t)$  – принадлежит множеству  $S(x_0(\delta, t), (0, T), \rho)$ , то, используя притягивающее свойство предельного при  $t \rightarrow 0+0$  и  $t \rightarrow T-0$  решения уравнения (1), получим предельные соотношения (5). В этом случае регулярная двухточечная краевая задача (6), (7) будет аппроксимировать сингулярную краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения (1) с предельными условиями (5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНТИ, 1987. – Т. 30. – С. 105-201.

2 Джумабаев Д.С. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 1. – С. 13-29.

*Статья поступила в редакцию 20.12.2016*

Джумабаев Д.С., Темешева С.М., Утешова Р.Е. АҚЫРЛЫ ИНТЕРВАЛДЫҢ ШЕТКІ НҮКТЕЛЕРІНДЕ ЕЛЕУЛІ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ШЕКТЕЛГЕН ШЕШІМІН ТАБУ ЕСЕБІН АППРОКСИМАЦИЯЛАУ ТУРАЛЫ

Сызықты емес жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесінің  $(0, T)$  аралығындағы шектелген шешімін, жүйенің оң жағының осы аралықтың шеттерінде елеулі ерекшеліктері бар болғанда табу есебі қарастырылады. Аппроксимациялаушы екінүктелік регулярлы шеттік есеп құрылған.

Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M., Uteshova R.E. ON APPROXIMATION OF THE PROBLEM OF FINDING BOUNDED ON A FINITE INTERVAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES AT ENDPONTS OF THE INTERVAL

The problem of finding bounded on the interval  $(0, T)$  solutions of the system of nonlinear ordinary differential equations with singularities at endpoints of the interval is considered. An approximating regular two-point boundary value problem is constructed.

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

К.С. Жилисбаева<sup>1</sup>, А.Д. Саспаева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>АО "Национальный центр космических исследований и технологий"  
050010, ул. Шевченко, 15, e-mail: <sup>1</sup>zhilisbaeva@mail.ru

<sup>2</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
050040, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: <sup>2</sup>asem.saspaeva@mail.ru

**Аннотация:** В данной работе исследована устойчивость программного движения симметричного спутника по полярной плоской круговой орбите в геомагнитном поле. Предполагается, что постоянный магнитный момент спутника направлен по оси его динамической симметрии. Вращательное движение спутника обусловлено взаимодействием магнитного момента спутника и магнитного поля Земли, которое моделируется прямым диполем. Построены уравнения программного движения намагниченного спутника в полусвязанной системе координат. Получены управляющие моменты, обеспечивающие заданное программное движение. При различных значениях программное движение возмущенного спутника неустойчиво. Построено стабилизирующее управление для программного движения спутника, а также определена асимптотическая устойчивость программного движения исходной управляемой системы.

**Ключевые слова:** Намагниченный спутник, геомагнитное поле, управляющий момент, программное движение, асимптотическая устойчивость.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях космических аппаратов (КА) и исследование свойств и устойчивости таких движений являются актуальными [1]–[2].

Программное движение КА вокруг центра масс может быть осуществлено различными способами, например: приложением дополнительных

---

Keywords: *Magnetized satellite, geomagnetic field, control moment, program motion, asymptotic stability.*

2010 Mathematics Subject Classification: 70E15+83C50+ 90C90.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта № 0091/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© К.С. Жилисбаева, А.Д. Саспаева, 2016.

сил (управляющих моментов) к КА, построением специальных управляющих устройств (регуляторов), изменением его кинематических и динамических параметров в процессе движения, а также сочетанием этих и других возможностей.

В данной работе рассматривается задача построения программного движения полярного намагниченного искусственного спутника Земли (ИСЗ) в геомагнитном поле и исследуется его устойчивость. Построены уравнения возмущенного вращательного движения полярного намагниченного ИСЗ в геомагнитном поле. Найдены управляющие моменты, обеспечивающие движение ИСЗ с заданными свойствами движения и исследована устойчивость программного движения.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается вращательное движение динамически намагниченного симметричного спутника Земли по полярной плоской круговой орбите в геомагнитном поле, которое моделируется прямым диполем. В спутнике установлен сильный магнит, тогда вращательное движение спутника в магнитном поле Земли определяется, в основном, взаимодействием магнитного момента спутника и геомагнитного поля. В этом случае на спутник действует магнитный момент

$$M = m \times B, \quad (1)$$

где  $m$  – магнитный момент спутника,  $B$  – индукция магнитного поля Земли, которая согласно модели прямого диполя индукция магнитного поля Земли имеет вид

$$B = \mu_0 \frac{3\mu E_3 E_3 - \mu}{4\pi R^3}, \quad (2)$$

а в инерциальной системе координат записывается в виде

$$B = B_0 \begin{pmatrix} -3r_1 r_3 \\ -3r_2 r_3 \\ 1 - 3r_3^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $B_0 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^3}$ . В формуле (2) приняты следующие обозначения:  $\mu = (0, 0, -\mu)^T$  – магнитный момент Земли,  $E_3 = (r_1, r_2, r_3)$  – вектор местной



вертикали в проекциях на инерциальные оси, которые имеют вид

$$\begin{aligned} r_1 &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ r_2 &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ r_3 &= \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $u$  – аргумент широты,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $i$  – наклонение орбиты.

Для обеспечения равенства нулю проекции механического магнитного момента  $M_3$  на ось симметрии будем считать, что магнитный момент спутника направлен по оси симметрии  $m = (0, 0, m)^T$  [3]-[4].

Необходимо решить задачу о стабилизации программных движений полярного намагниченного спутника, т.е. для выбранного произвольного движения спутника надо построить программное управляющее воздействие, которое реализует это заданное движение, и для обеспечения асимптотической устойчивости программного движения надо создать позиционное стабилизирующее управление.

В данной работе программное движение означает задачу определения активных сил и моментов, приложенных к спутнику, при которых движение с заданными свойствами является одним из его возможных движений [5].

### 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

Для описания вращательного движения спутника используются следующие системы координат: связанная с Землей инерциальная система координат  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ , связанная со спутником система координат  $O x_1 x_2 x_3$  и полусвязанная система координат  $O \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$ . Начало инерциальной системы координат  $O_a$  совпадает с центром масс Земли, ось  $O_a Y_3$  направлена на Северный Полюс Мира, а оси  $O_a Y_1$  и  $O_a Y_2$  лежат в экваториальной плоскости Земли, причем ось  $O_a Y_1$  направлена в точку Весеннего равноденствия. Связанную систему координат вводим с началом  $O$  в центре масс спутника, а оси совпадают с его главными осями инерции. Начало полусвязанной системы координат также совпадает с центром масс спутника, оси направлены следующим образом: одна из осей этой системы совпадает с осью системы  $O x_1 x_2 x_3$ , две другие вращаются относительно аппарата с некоторой угловой скоростью. Таким образом, полусвязанная система координат не участвует в осевом вращении спутника.

Движение спутника описывается кинематическими и динамическими уравнениями Эйлера [5]:

$$\omega_x = \dot{\theta}, \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta, \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta = M_x, \\ A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta} = M_y, \\ r = r_0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость вращения спутника относительно системы  $x_1, y_1, z_1$ ;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости  $\vec{\omega}$  спутника на оси  $x_1, y_1, z_1$ ;  $M_x, M_y$  – проекции механического магнитного момента  $\vec{M}$  на полусвязанные оси;  $A, C$  – главные моменты инерции спутника,  $\psi$  – угол прецессии вокруг оси  $OY_3$ ;  $\theta$  – угол нутации и  $\varphi$  – угол собственного вращения вокруг оси  $Ox_3$ .

Проекции механического магнитного момента на полусвязанные оси определяются из уравнений

$$\begin{cases} M_x = B_0 m [(-3r_1 r_3 \sin \psi + 3r_2 r_3 \cos \psi) \cos \theta + (3r_3^2 - 1) \sin \theta], \\ M_y = B_0 m [-3r_1 r_3 \cos \psi - 3r_2 r_3 \sin \psi]. \end{cases} \quad (7)$$

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим построение программного управления для заданных движений спутника, описанного в этой работе. В качестве программного движения выберем вращение спутника вокруг собственной оси с постоянной угловой скоростью  $\dot{\psi}_{pr} = k_2$ , сохраняя при этом постоянную величину угла отклонения оси  $\theta_{pr} = k_1$ , тогда имеем

$$\begin{cases} \theta_{pr} = k_1, \\ \psi_{pr} = k_2 t. \end{cases} \quad (8)$$

Для реализации заданного движения (8) добавим управляющие моменты  $M_1$  и  $M_2$  в правую часть уравнений движения спутника (6) и при этом учтем полярность спутника  $i = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta = -B_0 m \sin \theta + M_1, \\ A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta} = M_2. \end{cases} \quad (9)$$

Управляющие моменты  $M_1$  и  $M_2$  и являются программным управлением. Для их определения подставим в уравнения движения значения  $\theta_{pr} = k_1$  и  $\psi_{pr} = k_2 t$ , соответствующие заданному движению. Тогда получим выражения для определения управляющих моментов:

$$\begin{cases} M_1 = Ak_2^2 \sin k_1 \cos k_1 + Crk_2 \sin k_1 + B_0 m \sin k_1, \\ M_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом (10) уравнения движения управляемой системы примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1 - \frac{C}{A} r (\dot{\psi} \sin \theta - k_2 \sin k_1) - \frac{B_0 m}{A} (\sin \theta - \sin k_1), \\ \ddot{\psi} = 2\dot{\psi} \dot{\theta} \cot \theta + \frac{Cr \dot{\theta}}{A \sin \theta}. \end{cases} \quad (11)$$

Исходное программное движение является одним из решений полученной системы и будет возможным для физической реализации только тогда, когда оно будет асимптотически устойчивым по Ляпунову [7]–[8]. Если это движение будет неустойчиво, то возможен неограниченный рост отклонений величин от их заданных значений. Это фактически означает, что система будет совершать неконтролируемые движения. В этом случае программные движения не реализуются полученными управляющими моментами  $M_1$  и  $M_2$ .

Чтобы записать полученную систему уравнений в нормальном виде, введем новые переменные согласно равенствам

$$\begin{cases} y_1 = \theta, \\ y_2 = \dot{\theta}, \\ y_3 = \dot{\psi}. \end{cases} \quad (12)$$

В параметрах  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) уравнения управляемого движения в нормальной форме будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = (y_3^2 \sin y_1 \cos y_1 - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1) - \frac{B_0 m}{A} (\sin y_1 - \sin k_1), \\ \dot{y}_3 = -2y_3 y_2 \coth y_1 + \frac{Cr y_2}{A \sin y_1}. \end{cases} \quad (13)$$

### 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Для анализа устойчивости по Ляпунову заданного движения управляемой системы выпишем для уравнений (13) соответствующие уравнения возмущенного движения. Для этого введем отклонения  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для переменных  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) согласно равенствам

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + k_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + k_2. \end{cases} \quad (14)$$

Запишем уравнения (13) в отклонениях и получим уравнения возмущенного движения в нормальном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ((x_3 + k_2)^2 \sin(x_1 + k_1) \cos(x_1 + k_1) - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1 - \\ - \frac{Cr}{A} r((x_3 + k_2) \sin(x_1 + k_1) - k_2 \sin k_1) - \frac{B_0 m}{A} (\sin(x_1 + k_1) - \sin k_1)), \\ \dot{x}_3 = -2(x_3 + k_2)x_2 \coth(x_1 + k_1) + \frac{Cr x_2}{A \sin(x_1 + k_1)}. \end{cases} \quad (15)$$

Для линеаризации уравнений (15) разложим правые части уравнений в ряд по степеням отклонений и оставим члены только первого порядка малости.

Получим линейную систему дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 = a_{32}x_2. \end{cases} \quad (16)$$

Систему уравнений (16) можно записать в матричном виде, где элементы  $a_{ij}$  соответствующей матрицы  $A$  определяются равенствами

$$\begin{cases} a_{12} = 1, \\ a_{21} = k_2^2 \cos(2k_1) - \frac{Cr}{A} k_2 \cos k_1 - \frac{B_0 m}{A} \cos k_1, \\ a_{23} = k_2 \sin(2k_1) - \frac{Cr}{A} \sin k_1, \\ a_{32} = -2 \frac{k_2 \cos k_1}{\sin k_1} + \frac{Cr}{A \sin k_1}. \end{cases} \quad (17)$$

Составим характеристическое уравнение для этой системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

решая которую, имеем один нулевой корень и соответственно два ненулевых.

При выполнении неравенства

$$a_{21} + a_{32}a_{23} > 0 \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} & k_2^2 \cos(2k_1) - \frac{Cr}{A} k_2 \cos k_1 - \frac{B_0 m}{A} \cos k_1 - \\ & - \left( \frac{2k_2 \cos k_1}{\sin k_1} + \frac{Cr}{A \sin k_1} \right) (k_2 \sin(2k_1) - \frac{Cr}{A} \sin k_1) > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

один из корней имеет положительную вещественную часть. Тогда согласно теореме о неустойчивости системы уравнений по ее линейному приближению имеем неустойчивость заданных программных движений.

Получить аналитическое решение неравенства (20) очень сложно. Однако, можно проверить его выполнение для заданных программных движений при соответствующих значениях  $k_1$  и  $k_2$ .

Рассмотрим вопрос о реализации программного движения спутника для значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3}$  рад,  $k_2 = 0.5$  рад/с. При этих значениях неравенство (20) выполнено, следовательно, соответствующее программное движение является неустойчивым. Значит, это программное движение фактически не может быть реализовано одним лишь программным управлением.

## 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Численное решение уравнений программного движения спутника проведено методом Рунге-Кутты с помощью программного пакета MatLab.

Для иллюстрации полученного результата построены графики отклонений программного движения управляемой системы для значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3}$  рад,  $k_2 = 0.5$  рад/с. Из графиков на Рис. 1 видно, что наблюдается

неограниченный рост отклонений  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), что подтверждает аналитические результаты о неустойчивости программного движения, реализованного полученным программным управлением. Неравенство (20) не выполняется для значений  $k_1 = \frac{\pi}{3}$  рад и  $k_2 = 5$  рад/с. В этом случае все три корня характеристического уравнения имеют нулевую действительную часть. Тогда на основании анализа уравнений линейного приближения делать выводы об устойчивости или неустойчивости решений исходной нелинейной системы нельзя (Рис. 2).

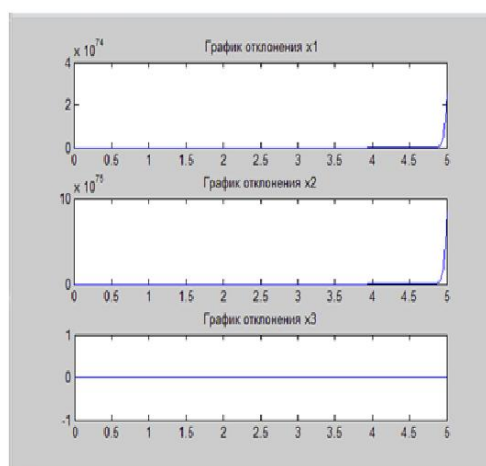
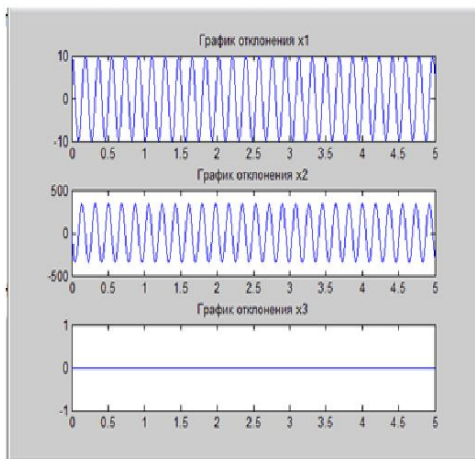


Рисунок 1 – График отклонения  $x_i(t)$

Добавим к системе уравнений первого приближения (17) стабилизирующее управление, чтобы сделать ее тривиальное решение асимптотически устойчивым при любых значениях параметров  $k_1$  и  $k_2$ . Выберем управление следующим образом:

$$u = Bx, \quad (21)$$

где  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , и составим систему (17), которая с управлением

Рисунок 2 – График отклонения  $x_i(t)$ 

(22) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = (b_{21} + a_{21})x_1 + a_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 = b_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases} \quad (22)$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ b_{21} + a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

После раскрытия определителя получим уравнение третьей степени относительно  $\lambda$ .

Для того, чтобы тривиальное решение системы (22) было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

По методу неопределенных коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях уравнений, получим систему уравнений

$$\begin{cases} b_{11} = -3, \\ b_{21} = -(3 + a_{23}a_{32} + a_{21}), \\ b_{31} = -\frac{3a_{23}a_{32} + 1}{a_{23}}. \end{cases} \quad (24)$$

Согласно критерию управляемости автономных систем, чтобы система вида (17) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы ранг соответствующей матрицы управляемости равнялся размерности пространства, то есть трем [9]–[10]. Легко проверить, что при выборе управления (24) с элементами матрицы, вычисленными по формулам (25), этот критерий выполнен. Тем самым, получили еще одно подтверждение того, что с помощью выбранного управления система (23) полностью управляема, следовательно, стабилизируема.

Добавив полученное управление в систему возмущенного движения (16), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b_{11}x_1, \\ \dot{x}_2 = ((x_3 + k_2)^2 \sin(x_1 + k_1) \cos(x_1 + k_1) - k_2^2 \sin k_1 \cos k_1 - \\ - \frac{C}{A}r((x_3 + k_2) \sin(x_1 + k_1) - k_2 \sin k_1) - \\ - \frac{B_0 m}{A}(\sin(x_1 + k_1) - \sin k_1) + b_{21}x_1, \\ \dot{x}_3 = -2(x_3 + k_2)x_2 \coth(x_1 + k_1) + \frac{Cr x_2}{A \sin(x_1 + k_1)} + b_{31}x_1. \end{cases} \quad (25)$$

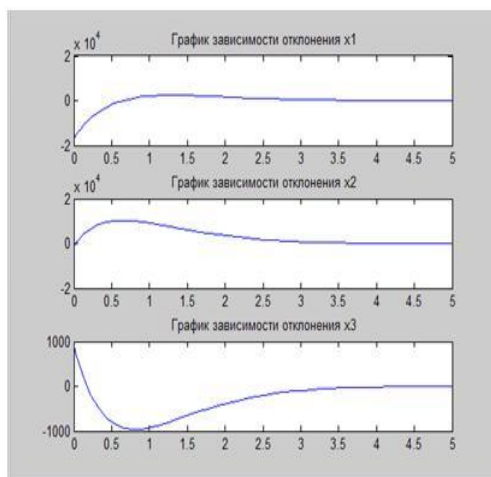
Решив систем (25), получили, что имеет место тривиальное решение  $x = 0$ , соответствующее программному движению исходной управляемой системы.

Установили, что при выборе управления вида (22) с коэффициентами (24) система (23) является ее линейным приближением и имеет все три отрицательных корня характеристического уравнения.

Тогда по теореме об устойчивости по линейному приближению приходим к выводу, что управление (22) с коэффициентами (24) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы возмущенного движения (25). Следовательно, программное движение исходной управляемой системы асимптотически устойчиво.

Для иллюстрации полученного результата построим графики отклонений численного решения системы (25) с коэффициентами (24) для значений  $k_1 = \frac{2\pi}{3}$  рад,  $k_2 = 0.5$  (ранее эти управляемые движения были неустойчивы) (Рис. 3). Аналогичные результаты получены в [11]–[12].



Рисунок 3 – График зависимости отклонения по  $x_i(t)$ 

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована устойчивость программного движения симметричного спутника по полярной плоской круговой орбите в геомагнитном поле.

Построены уравнения программного движения намагниченного спутника в полусвязанной системе координат. Получены управляющие моменты, обеспечивающие заданное программное движение.

При различных значениях программное движение возмущенного спутника неустойчиво. Построено стабилизирующее управление для программного движения спутника, а также определена асимптотическая устойчивость программного движения исходной управляемой системы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Галиуллин А. С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
- 2 Sidi M.J. Spacecraft dynamics and control. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2002. – 409 p.
- 3 Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
- 4 Хентов А.А. Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. // Космические исследования. – 1967. – Т. 5, № 4. – С. 540-553.

- 5 Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд. РУДН, 1986.
- 6 Аппель П. Теоретическая механика. – М.: Физматгиз, 1960. – 487 с.
- 7 Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. – Л.: Судостроение, 1980. – 375 с.
- 8 Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.
- 9 Безгласный С.П. Стабилизация и управление движением динамических систем. Электронное учебное пособие. – Самара, 2010. – 102 с.
- 10 Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 1. – С. 127-139.
- 11 Жилисбаева К.С. О колебаниях намагниченного спутника в окрестности стационарного движения // Сб. Методы экспериментальной физики. – 2010. – С. 49-52.
- 12 Zhilisbayeva K.S., Ismailova A. Passive Magnetic Stabilization of the Rotational Motion of the Satellite in its Inclined Orbit // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, No. 16. – P. 791-802.

*Статья поступила в редакцию 02.12.2016*

Zhilisbayeva K.S., Saspayeva A.D. ABOUT ASYMPTOTIC STABILITY OF PROGRAM MOTION OF SPACECRAFT

This paper focuses on the research of stability of program motion of symmetric satellite in a polar circular plane orbit in geomagnetic field. It is assumed that the permanent magnetic moment of the satellite is directed along the axis of its dynamic symmetry. The rotational motion of the satellite is caused by interaction of the magnetic moment of the satellite and the Earth's magnetic field, which is modeled by the direct dipole. Equations of programmed motion of the magnetized satellite in the semi-combined coordinate system are derived. The control moments that ensure the specified programmed motion are obtained. Under different values the programmed motion of perturbed satellite is unstable. For program motion of satellite stabilizing control is constructed and asymptotic stability of program motion of initial control system is defined.

Жылысбаева Қ.С., Саспаева Ә.Д. ҒАРЫШТЫҚ АППАРАТТЫҢ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ АСИМПТОТАЛЫҚ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Бұл мақалада геомагниттік өрістегі симметриялық жер серігінің полярлық жазық орбита бойынша бағдарламалық қозғалысының орнықтылығы зерттелген. Жер серігінің тұрақты магниттік моменті оның динамикалық симметрия өсі бойынша бағытталған деп жорамалданады. Жер серігінің айналмалы қозғалысы жер серігінің магниттік моменті мен тура дипольмен моделденген магниттік өрістің өзара әрекеттестігімен шарттастырылған. Магниттелген жер серігінің бағдарламалық қозғалыс теңдеуі жартылайбайланысқан координаталар жүйесінде құрылған. Берілген бағдарламалық қозғалысты қамтамасыз ететін басқарушы моменттер табылған. Ұйытқымалы жер серігінің бағдарламалық қозғалысы әр алуан мәндер үшін орнықсыз болады. Жер серігінің бағдарламалық қозғалысы үшін тұрақтандырушы басқару құрылған, әрі бастапқы басқарушы жүйенің бағдарламалық қозғалысының асимптоталық орнықтылығы анықталған.

**ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ**Т.М. ЖУМАБЕК<sup>1</sup>, М.Дж. МИНГЛИБАЕВ<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби  
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: <sup>1</sup>torebekzhumabek@gmail.com<sup>2</sup>Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова  
050020, Алматы, ул. Обсерватория, 23, e-mail: <sup>2</sup>minglibayev@mail.ru

Аннотация: В настоящей работе рассмотрена классическая плоская ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат. В этой задаче аналитически найдены начальные значения координат и начальные значения скорости, при которых три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Такой частный случай плоской ограниченной задачи трех тел нами назван равнобедренной ограниченной задачей трех тел. Показано, что в плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел, в общем случае, суммарная ньютоновская сила притяжения основных тел – центральная. Исходя из общих дифференциальных уравнений движения плоской ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат, получены дифференциальные уравнения движения плоской равнобедренной ограниченной задачи трех тел. Решение дифференциальных уравнений движения плоской круговой равнобедренной ограниченной задачи трех тел сведено к квадратурам. Численным методом решены исходные дифференциальные уравнения круговой ограниченной задачи трех тел (Земля + Луна + безмассовое тело) при найденных начальных условиях. Результаты численного решения показывают, что при этих начальных условиях три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Ключевые слова: Ограниченная задача трех тел, барицентрическая система координат, равнобедренные решения, точки либрации.

Keywords: *Restricted three-body problem, barycentric reference frame, isosceles solutions, libration points.*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F07.

Funding: Работа частично финансирована грантами МОН РК, № 0069/ГФ4, № 0003-1/ПЦФ

© Т.М. Жумабек, М.Дж. Минглибаев, 2016.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Движение малого естественного или искусственного небесного тел в поле тяготения двух больших небесных тел (далее – основные тела) хорошо описывается математической моделью широко известной ограниченной задачи трех тел [1]–[8]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации: точные частные решения. Две из них – решение Лагранжа, когда три тела во время движения образуют *равносторонний треугольник*. Три – *коллинеарные* решения Эйлера, когда три тела во время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенных на основании *равнобедренного треугольника*, равны между собой [5], [6], [8]. Общее аналитическое решение задачи в конечной форме неизвестно. Многие аспекты задачи изучены с помощью различных качественных и численных методов [1]–[8]. Поиск новых точных частных аналитических решений представляется актуальным.

Целью настоящей работы является нахождение начальных условий в плоской ограниченной задаче трех тел, при которых во время движения три тела образуют равнобедренный треугольник, и получение дифференциальных уравнения движения в этом частном случае. В работе рассмотрена классическая плоская ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат. Аналитически найдены начальные значения координат и начальные значения скоростей (далее – начальные условия), при которых три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело, то есть равнобедренная ограниченная задача трех тел. При этом массы основных тел – произвольные. Показано, что в равнобедренной ограниченной задаче трех тел, в общем случае, суммарная ньютоновская сила притяжения основных тел (на единицу массы) – центральная. Исходя из общих дифференциальных уравнений движения плоской ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат, получены дифференциальные уравнения движения равнобедренной ограниченной задачи. Решение дифференциальных уравнений движения круговой равнобедренной ограниченной задачи трех тел сведены к квадратурам. Численным методом решена круговая ограниченная задача трех тел (Земля + Луна + безмассовое тело) при найден-

ных начальных условиях. Результаты численного решения показывают, что при этих начальных условиях три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ В НЕВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим движение малого тела с исчезающе малой массой  $m_2$  (далее – безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами  $m_1$  и  $m_3$  в плоском случае. При этом тела рассматриваются, как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1]–[5] могут быть записаны в виде

$$m_2 \ll m_1, \quad m_2 \ll m_3, \quad m_2 \approx 0. \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения движения этих трех тел в невращающейся инерциальной барицентрической системе координат  $Gxy$  (см. Рис. 1) имеют известный вид

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = f m_3 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = f m_1 \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3}, \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad (2.3)$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2, \quad (2.4)$$

$$\vec{F}_2 = f \left( m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right), \quad (2.5)$$

где  $\Delta_{ij}$  – расстояния между безмассовым и основными телами

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12}, \quad (2.6)$$

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}. \quad (2.7)$$

В барицентрической системе координат имеет место инвариант центра масс задачи двух основных тел:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 = 0. \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.2), (2.3) следует

$$\frac{d^2 \vec{r}_{31}}{dt^2} = -f \frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) есть хорошо известное уравнение классической задачи двух тел в относительной системе координат с началом в точке  $m_3$ . Интеграл площадей имеет вид

$$\vec{r}_{31} \times \frac{d\vec{r}_{31}}{dt} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const}. \quad (2.10)$$

Орбита – плоская. Будем считать, что орбита лежит на плоскости  $Gxy$ . Решение дифференциального уравнения движения задачи двух тел (2.9) запишем в виде [5], [6], [9]:

$$r_{31} = r_{31}(t) = r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_{31} = const, \quad (2.11)$$

$$c_{31} = \sqrt{\mu p}, \quad \mu = f(m_1 + m_3). \quad (2.12)$$

В барицентрической системе координат, с учетом инварианта центра масс (2.8), имеем

$$\vec{r}_1 = \frac{m_3}{m_1 + m_3} \vec{r}_{31}, \quad \vec{r}_3 = -\frac{m_1}{m_1 + m_3} \vec{r}_{31}. \quad (2.13)$$

Для определенности будем считать  $m_3 \geq m_1$ . В настоящей работе рассмотрен наиболее интересный случай, когда

$$c_{31} \neq 0, \quad c_{31} = const > 0. \quad (2.14)$$

В случае (2.14) траектория в задаче двух тел (2.9) может быть окружностью ( $e = 0$ ), эллипсом ( $0 < e < 1$ ), параболой ( $e = 1$ ) или гиперболой ( $e > 1$ ). Случай  $c_{31} = 0$  будет рассмотрен в отдельной работе.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ В ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ, ПРИВОДЯЩИХ К РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Рассмотрим задачу Коши для дифференциальных уравнений (2.4)–(2.5). Выясним, при каких начальных условиях в рассматриваемой плоской ограниченной задаче трех тел во время движения три тела образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Сначала докажем следующую теорему об условиях расположения безмассового тела относительно основных тел в рассматриваемой плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел (см. Рис. 1).

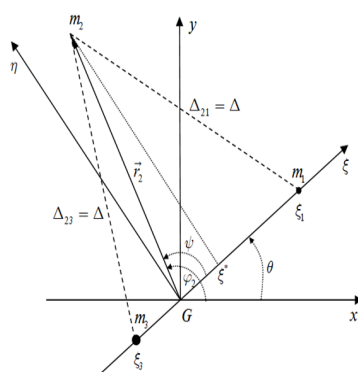


Рисунок 1 – Плоская равнобедренная ограниченная задача трех тел в барицентрической системе координат

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть координаты двух основных тел в плоской ограниченной задаче трех тел в невращающейся инерциальной барицентрической системе координат заданы равенствами

$$x_1 = \frac{m_3}{m_3 + m_1} r \cos \theta, \quad y_1 = \frac{m_3}{m_3 + m_1} r \sin \theta, \quad (3.1)$$

$$x_3 = -\frac{m_1}{m_3 + m_1} r \cos \theta, \quad y_3 = -\frac{m_1}{m_3 + m_1} r \sin \theta, \quad (3.2)$$

где  $r$  – расстояние между основными телами,  $\theta$  – истинная аномалия от носительного движения двух основных тел.



Тогда для того, чтобы треугольник, образованный тремя телами, во время движения был равнобедренным, на вершине которого находится безмассовое тело, то есть

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta, \quad (3.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы координаты безмассового тела определялись уравнениями

$$x_2 = \xi^* r \cos \theta - hr \sin \theta, \quad y_2 = \xi^* r \sin \theta + hr \cos \theta, \quad (3.4)$$

где

$$\xi^* = \frac{m_3 - m_1}{2(m_3 + m_1)} = \text{const}, \quad m_3 \geq m_1 \quad (3.5)$$

$h = h(t)$  – безразмерная дифференцируемая функция времени – высота равнобедренного треугольника.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** *Необходимость.* Допустим, что во время движения имеет место равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta. \quad (3.6)$$

Докажем, что координаты безмассового тела определяются формулами:

$$x_2 = \xi^* r \cos \theta - hr \sin \theta, \quad y_2 = \xi^* r \sin \theta + hr \cos \theta. \quad (3.7)$$

Рассмотрим координаты точки  $m_2$  во вращательной системе координат  $G\xi\eta$ , связанной с основными телами. Пусть ось абсциссы  $G\xi$  проходит все время через точки  $m_3$  и  $m_1$ . Используя известные формулы

$$x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \quad y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta,$$

получим

$$x_2 = \xi_2 \cos \theta - \eta_2 \sin \theta, \quad y_2 = \xi_2 \sin \theta + \eta_2 \cos \theta. \quad (3.8)$$

Далее переходим к безразмерным координатам:

$$\frac{\xi}{r} = \xi^*, \quad \frac{\eta}{r} = \eta^*. \quad (3.9)$$

Тогда в системе координат  $G\xi^*\eta^*$  имеем

$$\xi_2 = r\xi_2^*, \quad \eta_2 = r\eta_2^*. \quad (3.10)$$

В системе координат  $G\xi^*\eta^*$  точки  $m_3$  и  $m_1$  – неподвижные. Из условий равнобедренности треугольника (3.6), образованного тремя телами, с учетом выполненных преобразований находим

$$\xi_2^* = \frac{m_3 - m_1}{2(m_3 + m_1)} = \xi^* = \text{const}. \quad (3.11)$$

Очевидно, что в системе координат  $G\xi^*\eta^*$  ордината точки  $m_2$  является высотой равнобедренного треугольника, которую обозначим  $h$ ,

$$\eta_2^* = h. \quad (3.12)$$

Из соотношений (3.11), (3.12), (3.10) и (3.8) получим

$$x_2 = \xi^* r \cos \theta - hr \sin \theta, \quad y_2 = \xi^* r \sin \theta + hr \cos \theta. \quad (3.13)$$

Необходимость теоремы доказана.

*Достаточность.* Пусть координаты безмассового тела во время движения определяются формулами

$$x_2 = \xi^* r \cos \theta - hr \sin \theta, \quad y_2 = \xi^* r \sin \theta + hr \cos \theta. \quad (3.14)$$

Докажем, что во время движения имеет место равенство

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta. \quad (3.15)$$

Используя соотношения (3.1) и (3.14), вычислим  $\Delta_{21}$ . В результате получим

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = \left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{1/2} r. \quad (3.16)$$

Аналогично из равенств (3.2) и (3.14) получим

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{1/2} = \left(\frac{1}{4} + h^2\right)^{1/2} r. \quad (3.17)$$

Из равенств (3.16), (3.17) следует

$$\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta. \quad (3.18)$$

Достаточность теоремы доказана.

### 3.2. СЛЕДСТВИЯ.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** В невращающейся инерциальной барицентрической системе координат скорость и координаты безмассового тела в плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел во время движения удовлетворяют равенствам

$$x_2 = \xi^* r \cos \theta - hr \sin \theta, \quad y_2 = \xi^* r \sin \theta + hr \cos \theta, \quad (3.19)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \xi^* \frac{dr}{dt} \cos \theta - \left( \frac{dh}{dt} r + h \frac{dr}{dt} \right) \sin \theta - (\xi^* \sin \theta + h \cos \theta) r \frac{d\theta}{dt}, \quad (3.20)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \xi^* \frac{dr}{dt} \sin \theta + \left( \frac{dh}{dt} r + h \frac{dr}{dt} \right) \cos \theta + (\xi^* \cos \theta - h \sin \theta) r \frac{d\theta}{dt}, \quad (3.21)$$

где  $h = h(t)$  – высота равнобедренного треугольника.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** В невращающейся инерциальной барицентрической системе координат в любой фиксированной начальный момент времени  $t = t_0 = \text{const}$  в плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел координаты и скорости безмассового тела имеют вид

$$x_{20} = \xi^* r_0 \cos \theta_0 - h_0 r_0 \sin \theta_0, \quad y_{20} = \xi^* r_0 \sin \theta_0 + h_0 r_0 \cos \theta_0, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 &= \xi^* \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \cos \theta_0 - \left( \left( \frac{dh}{dt} \right)_0 r_0 + h_0 \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \right) \sin \theta_0 - \\ &\quad - (\xi^* \sin \theta_0 + h_0 \cos \theta_0) r_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 &= \xi^* \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \sin \theta_0 + \left( \left( \frac{dh}{dt} \right)_0 r_0 + h_0 \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \right) \cos \theta_0 + \\ &\quad + (\xi^* \cos \theta_0 - h_0 \sin \theta_0) r_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $\theta_0 = const$ ,  $h_0 = const > 0$ ,  $\left(\frac{dh}{dt}\right)_0 = const$  – параметры начальных условий.

В уравнениях (3.22)–(3.24) и далее нижним индексом нуль обозначены начальные значения соответствующих величин в фиксированный начальный момент времени  $t = t_0$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.** В невращающейся инерциальной барицентрической системе координат начальные координаты и скорости, определяющие решения Лагранжа  $L_4$  ограниченной задачи трех тел в форме равностороннего треугольника, как решения плоской равнобедренной ограниченной задачи трех тел, задаются равенствами

$$x_{L0} = \xi^* r_0 \cos \theta_0 - h_L r_0 \sin \theta_0,$$

$$y_{L0} = \xi^* r_0 \sin \theta_0 + h_L r_0 \cos \theta_0, \quad h_L = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx_L}{dt}\right)_0 &= \xi^* \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \cos \theta_0 - h_L \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \sin \theta_0 - \\ &- (\xi^* \sin \theta_0 + h_L \cos \theta_0) r_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy_L}{dt}\right)_0 &= \xi^* \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \sin \theta_0 + h_L \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 \cos \theta_0 + \\ &+ (\xi^* \cos \theta_0 - h_L \sin \theta_0) r_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.3. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ В СЛУЧАЕ РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

В рассматриваемой ограниченной задаче трех тел в барицентрической системе координат ньютоновская сила притяжения двух основных тел (на единицу массы) имеет вид (2.5). Преобразуем аналитическое выражение (2.5) с учетом (3.18) и (2.8):

$$\vec{F}_2 = f \left( m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} \right) =$$

$$= f \left( \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3}{\Delta^3} - \frac{m_1 + m_3}{\Delta^3} \vec{r}_2 \right) = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.28)$$

Таким образом, в плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел суммарная ньютоновская сила притяжения двух основных тел (на единицу массы)  $\vec{F}_2$  – центральная.

Поэтому уравнение движения равнобедренной ограниченной задачи трех тел в барицентрической системе координат (2.4), (2.5) можно написать в виде

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{f}{\Delta^3} (m_1 + m_3) \vec{r}_2. \quad (3.29)$$

Из уравнения (3.29) следует интеграл площадей:

$$\vec{r}_2 \times \vec{u}_2 = \vec{c}_2 = \overrightarrow{const}, \quad \vec{u}_2 = \frac{d \vec{r}_2}{dt}, \quad (3.30)$$

$$c_2 = r_{20} u_{20} \sin \delta_0 = const \neq 0, \quad u_{20} = |\vec{u}_2(t_0)|. \quad (3.31)$$

где  $\delta_0$  – угол между векторами  $\vec{r}_{20}$  и  $\vec{u}_{20}$  ( $0 < \delta_0 < 180^\circ$ ).

Далее, используя теорему Пифагора, выразим  $\Delta^3$  через  $r_{31}$ ,  $r_2$ ,  $m_1$  и  $m_3$ . Из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$r_2^2 = \Delta^2 - \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} r_{31}^2. \quad (3.32)$$

Из равенства (3.32) следует

$$\Delta^3 = (\sigma^2 r_{31}^2 + r_2^2)^{3/2}, \quad \sigma^2 = \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} = const > 0. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.29), окончательно получим дифференциальное уравнение движения плоской ограниченной равнобедренной задачи трех тел в барицентрической системе координат в векторной форме:

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}_2}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}}, \quad \mu = f(m_1 + m_3) = const > 0. \quad (3.34)$$

В скалярной форме уравнение движения (3.34) имеет вид

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\mu \frac{x_2}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\mu \frac{y_2}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}}. \quad (3.35)$$

Соответственно в скалярной форме интеграл площадей имеет вид

$$x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} = c_2, \quad (3.36)$$

$$c_2 = x_{20} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 - y_{20} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 = \text{const} \neq 0. \quad (3.37)$$

#### 4. РАВНОБЕДРЕННАЯ КРУГОВАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Пусть в решениях задачи двух тел (2.11), (2.12)  $e = 0$ . В этом частном случае

$$r_{31} = a = \text{const}, \quad c_2 \neq 0. \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в уравнение движения (3.34), получим уравнение движения плоской равнобедренной круговой ограниченной задачи трех тел. Плоская круговая равнобедренная ограниченная задача трех тел – интегрируемая. Покажем, что решение круговой равнобедренной ограниченной задачи трех тел в соответствующей полярной системе координат  $r_2, \phi_a$ , сводится к квадратурам. Учитывая (4.1), перепишем уравнение движения (3.34) в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu \frac{\vec{r}_2}{(N^2 + r_2^2)^{3/2}} = \text{grad}_{\vec{r}_2} U, \quad (4.2)$$

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{N^2 + r_2^2}}, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 = r_a^2, \quad N^2 = \sigma^2 a^2 = \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} a^2 = \text{const}.$$

На плоскости орбиты в полярных переменных  $r_a, \phi_a$  уравнение движения имеет вид

$$\ddot{r}_a - r_a \dot{\phi}_a^2 = -\mu \frac{r_a}{(N^2 + r_a^2)^{3/2}} = \frac{\partial U}{\partial r_a}, \quad r_a^2 \dot{\phi}_a = c_{2a} = \text{const} \neq 0. \quad (4.3)$$

Систему дифференциальных уравнений (4.3) перепишем в виде

$$\ddot{r}_a = -\mu \frac{r_a}{(N^2 + r_a^2)^{3/2}} + \frac{c_{2a}^2}{r_a^3}. \quad (4.4)$$

Дифференциальное уравнение (4.4), по виду совпадает с уравнением движения симметричной задачи двух неподвижных центров, когда во время

движения материальная точка находится на плоскости, перпендикулярной к отрезку (плоскость проходит через середину отрезка), на конце которого лежат неподвижные центры [8]. Дифференциальное уравнение (4.4) также похоже, но отличается от соответствующего дифференциального уравнения движения задачи Ситникова [5], [6] наличием второго слагаемого в правой части.

Из уравнения (4.4) получим интеграл энергии

$$\dot{r}_a^2 = \frac{2\mu}{\sqrt{N^2 + r_a^2}} - \frac{c_{2a}^2}{r_a^2} + 2h_1, \quad h_1 = \text{const}. \quad (4.5)$$

Из интеграла (4.5) следует

$$\frac{dr_a}{dt} = \pm \frac{\sqrt{2\mu r_a^2 - c_{2a}^2 \sqrt{N^2 + r_a^2} + 2h_1 r_a^2 \sqrt{N^2 + r_a^2}}}{\left(r_a^2 \sqrt{N^2 + r_a^2}\right)^{1/2}},$$

поэтому

$$t - t_0 = \mp \int_{r_{a0}}^{r_a} \frac{r_a \left(\sqrt{N^2 + r_a^2}\right)^{1/2} dr_a}{\sqrt{2\mu r_a^2 - c_{2a}^2 \sqrt{N^2 + r_a^2} + 2h_1 r_a^2 \sqrt{N^2 + r_a^2}}}. \quad (4.6)$$

Можно показать, что квадратура в правой части уравнении (4.6) – эллиптическая.

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРА СКОРОСТИ БЕЗМАССОВОГО ТЕЛА В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ В РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Из постоянных интегралов площадей (2.10) и (3.30) определим направления вектора скорости безмассового тела в начальный момент времени:

$$\vec{u}_{20} = \vec{u}_2(t_0) = \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)_0. \quad (5.1)$$

Формально возможны два случая:

$$\vec{c}_{31} \uparrow \uparrow \vec{c}_2, \quad \vec{c}_{31} \uparrow \downarrow \vec{c}_2. \quad (5.2)$$

Однако, по определению равнобедренной ограниченной задачи трех тел (три тела все время образуют равнобедренный треугольник) фактически реализуется только один случай:

$$\vec{c}_{31} \uparrow\uparrow \vec{c}_2. \quad (5.3)$$

Из равенств (3.31) и (3.37) получим

$$c_2 = r_{20} u_{20} \sin \delta_0 = x_{20} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 - y_{20} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 = \text{const} > 0, \quad (5.4)$$

где

$$r_{20} = (x_{20}^2 + y_{20}^2)^{1/2}, \quad u_{20} = \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0^2 + \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0^2 \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Скалярное произведение двух векторов  $\vec{r}_{20}$  и  $\vec{u}_{20}$  имеет вид

$$\vec{r}_{20} \cdot \vec{u}_{20} = r_{20} u_{20} \cos \delta_0 = x_{20} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 + y_{20} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0. \quad (5.6)$$

Соотношения (5.4)–(5.6) однозначно определяют вектор  $\vec{u}_{20}$  в случае (5.3). Из уравнений (5.6) получим

$$\delta_0 = \arccos \left\{ \left[ x_{20} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 + y_{20} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 \right] / r_{20} \cdot u_{20} \right\}. \quad (5.7)$$

В настоящей работе ограничимся определением направления вектора скорости безмассового тела в начальный момент времени. Подробный анализ начальных условий в плоской равнобедренной ограниченной задаче трех тел будет выполнен в отдельной работе.

## 6. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЫ

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Пусть уравнения движения плоской ограниченной задачи трех тел заданы в невращающейся инерциальной барицентрической системе координат в следующем виде:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = f \left( m_1 \frac{x_1 - x_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_2}{\Delta_{23}^3} \right),$$



$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = f \left( m_1 \frac{y_1 - y_2}{\Delta_{21}^3} + m_3 \frac{y_3 - y_2}{\Delta_{23}^3} \right), \quad (6.1)$$

$$x_1 = \frac{m_3}{m_3 + m_1} r \cos \theta, \quad y_1 = \frac{m_3}{m_3 + m_1} r \sin \theta, \quad m_3 \geq m_1, \quad (6.2)$$

$$x_3 = -\frac{m_1}{m_3 + m_1} r \cos \theta, \quad y_3 = -\frac{m_1}{m_3 + m_1} r \sin \theta, \quad (6.3)$$

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}, \quad \Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Пусть в дифференциальных уравнениях движения (6.1) начальные значения координат и скоростей определены равенствами

$$x_{20} = \xi^* r_0 \cos \theta_0 - h_0 r_0 \sin \theta_0, \quad y_{20} = \xi^* r_0 \sin \theta_0 + h_0 r_0 \cos \theta_0, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 &= \xi^* \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \cos \theta_0 - \left( \left( \frac{dh}{dt} \right)_0 r_0 + h_0 \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \right) \sin \theta_0 - \\ &\quad - (\xi^* \sin \theta_0 + h_0 \cos \theta_0) r_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 &= \xi^* \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \sin \theta_0 + \left( \left( \frac{dh}{dt} \right)_0 r_0 + h_0 \left( \frac{dr}{dt} \right)_0 \right) \cos \theta_0 + \\ &\quad + (\xi^* \cos \theta_0 - h_0 \sin \theta_0) r_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где  $\xi^* = (m_3 - m_1)/2(m_3 + m_1) = \text{const} \geq 0$  – параметр, зависящий от масс основных тел,  $\theta_0 = \theta(t_0) = \text{const}$ ,  $h_0 = h(t_0) = \text{const} > 0$ ,  $\left( \frac{dh}{dt} \right)_0 = \text{const}$  – параметры начальных условий.

Тогда

1) три тела, во время движения образуют равнобедренный треугольник ( $\Delta_{21} = \Delta_{23} = \Delta$ ), на вершине которого находится безмассовое тело, то есть имеем равнобедренную ограниченную задачу трех тел;

2) в равнобедренной задаче трех тел суммарная ньютоновская сила притяжения основных тел (на единицу массы) – центральная;

3) уравнения движения упрощаются и имеют вид

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -f \frac{(m_1 + m_3)}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}} x_2, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -f \frac{(m_1 + m_3)}{(\sigma^2 r_{31}^2(t) + r_2^2)^{3/2}} y_2, \quad (6.8)$$

$$x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} = c_2 = \text{const} = x_{20} \left( \frac{dy_2}{dt} \right)_0 - y_{20} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)_0 \neq 0. \quad (6.9)$$

7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ НАЙДЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ, ПРИВОДЯЩИХ К РАВНОБЕДРЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В случае, когда относительная орбита основных тел – круговая, имеем  $e = 0$ ,  $r_{31} = p = a(1 - e^2) = a$ . Следуя [1], [2], введем следующие безразмерные величины:

$$\frac{x_2}{a} = \tilde{x}_2 = \tilde{x}, \quad \frac{y_2}{a} = \tilde{y}_2 = \tilde{y}, \quad \frac{r_{31}}{a} = \tilde{r}_{31} = \tilde{r} = 1, \quad (7.1)$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_3} = \tilde{m}_1 = m, \quad \frac{m_3}{m_1 + m_3} = \tilde{m}_3 = 1 - m, \quad 0 < m \leq \frac{1}{2}, \quad (7.2)$$

$$\tau = nt = \theta, \quad n = \frac{\sqrt{f(m_3 + m_1)}}{a^{3/2}} = \text{const}. \quad (7.3)$$

Тогда уравнение движения плоской круговой ограниченной задаче трех тел (6.1) в невращающейся инерциальной барицентрической системе координат в безразмерных переменных  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tau$  имеют вид

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tau^2} = m \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}}{\tilde{\Delta}_{21}^3} + (1 - m) \frac{\tilde{x}_3 - \tilde{x}}{\tilde{\Delta}_{23}^3}, \quad (7.4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{d\tau^2} = m \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{y}}{\tilde{\Delta}_{21}^3} + (1 - m) \frac{\tilde{y}_3 - \tilde{y}}{\tilde{\Delta}_{23}^3}, \quad (7.5)$$

где

$$\tilde{x}_1 = (1 - m) \cos \tau, \quad \tilde{y}_1 = (1 - m) \sin \tau, \quad (7.6)$$

$$\tilde{x}_3 = -m \cos \tau, \quad \tilde{y}_3 = -m \sin \tau, \quad (7.7)$$

$$\tilde{\Delta}_{21} = [(\tilde{x}_1 - \tilde{x})^2 + (\tilde{y}_1 - \tilde{y})^2]^{1/2}, \quad \tilde{\Delta}_{23} = [(\tilde{x}_3 - \tilde{x})^2 + (\tilde{y}_3 - \tilde{y})^2]^{1/2}.$$

Уравнение движения плоской круговой ограниченной задаче трех тел (7.4), (7.5) имеет интеграл Якоби [1], [2]:

$$\left( \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{y}}{d\tau} \right)^2 - 2 \left( \tilde{x} \frac{d\tilde{y}}{d\tau} - \tilde{y} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right) - 2 \left( \frac{m}{\tilde{\Delta}_{21}} + \frac{1 - m}{\tilde{\Delta}_{23}} \right) = J_0 = \text{const}. \quad (7.8)$$

Начальные условия преобразуются к виду

$$\tilde{x}(0) = \xi^* \cos \tau_0 - h_0 \sin \tau_0, \quad (7.9)$$

$$\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\right)_0 = -(\xi^* + s_0) \sin \tau_0 - h_0 \cos \tau_0, \quad (7.10)$$

$$\tilde{y}(0) = \xi^* \sin \tau_0 + h_0 \cos \tau_0, \quad (7.11)$$

$$\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)_0 = (\xi^* + s_0) \cos \tau_0 - h_0 \sin \tau_0. \quad (7.12)$$

Параметры начальных условий (7.9)-(7.12) определяются следующим образом:

$$\xi^* = \frac{1 - 2m}{2} = \text{const}, \quad m = \frac{k}{k + 1}, \quad k = \frac{m_1}{m_3} = \text{const} > 0, \quad (7.13)$$

$$h_0 = \text{const}, \quad (7.14)$$

$$\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_0 = s_0 = \text{const}, \quad (7.15)$$

$$\tau_0 = nt_0 - \text{значение } \tau \text{ при } t_0 = \text{const}. \quad (7.16)$$

Численно интегрируем уравнения движения (7.4)–(7.5) при найденных начальных условиях (7.9)–(7.12) и покажем, что три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник.

Обозначим

$$\tilde{x} = z_1, \quad \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = z_2, \quad \tilde{y} = z_3, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = z_4, \quad (7.17)$$

тогда система дифференциальных уравнений (7.4), (7.5) имеет вид

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2, \quad (7.18)$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = m \frac{\tilde{x}_1 - z_1}{\tilde{\Delta}_{21}^3} + (1 - m) \frac{\tilde{x}_3 - z_1}{\tilde{\Delta}_{23}^3}, \quad (7.19)$$

$$\frac{dz_3}{d\tau} = z_4, \quad (7.20)$$

$$\frac{dz_4}{d\tau} = m \frac{\tilde{y}_1 - z_3}{\tilde{\Delta}_{21}^3} + (1 - m) \frac{\tilde{y}_3 - z_3}{\tilde{\Delta}_{23}^3}, \quad (7.21)$$

где

$$\tilde{x}_1 = (1 - m) \cos \tau, \quad \tilde{y}_1 = (1 - m) \sin \tau, \quad (7.22)$$

$$\tilde{x}_3 = -m \cos \tau, \quad \tilde{y}_3 = -m \sin \tau, \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{21} &= [(\tilde{x}_1 - z_1)^2 + (\tilde{y}_1 - z_3)^2]^{1/2}, \\ \tilde{\Delta}_{23} &= [(\tilde{x}_3 - z_1)^2 + (\tilde{y}_3 - z_3)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Начальные условия (7.9)–(7.12) задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (7.18)–(7.21) преобразуются к виду

$$z_1(0) = \xi^* \cos \tau_0 - h_0 \sin \tau_0, \quad (7.25)$$

$$z_2(0) = -(\xi^* + s_0) \sin \tau_0 - h_0 \cos \tau_0, \quad (7.26)$$

$$z_3(0) = \xi^* \sin \tau_0 + h_0 \cos \tau_0, \quad (7.27)$$

$$z_4(0) = (\xi^* + s_0) \cos \tau_0 - h_0 \sin \tau_0. \quad (7.28)$$

Интеграл Якоби (7.8) имеет вид

$$z_2^2 + z_4^2 - 2(z_1 z_4 - z_3 z_2) - 2 \left( \frac{m}{\tilde{\Delta}_{21}} + \frac{1 - m}{\tilde{\Delta}_{23}} \right) = J_0 = \text{const}, \quad (7.29)$$

$$\tilde{\Delta}_{21} = [(\tilde{x}_1 - z_1)^2 + (\tilde{y}_1 - z_3)^2]^{1/2}, \quad \tilde{\Delta}_{23} = [(\tilde{x}_3 - z_1)^2 + (\tilde{y}_3 - z_3)^2]^{1/2}.$$

Интеграл (7.29) использован в качестве контроля вычисления.

Рассмотрим систему Земля+Луна+безмассовое тело ( $r_{31} = a = 384000$  км,  $e = 0$ ). Параметры начальных условий определяется следующим образом:

$$k = \frac{m_1}{m_3} = \frac{m_{\text{луна}}}{m_{\text{земля}}} = 0.01230002, \quad m = \frac{k}{k + 1}, \quad \xi^* = \frac{1}{2}(1 - 2m), \quad (7.30)$$

$$\tau = \tau_0 = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0 = 0. \quad (7.31)$$

$$h_0 = 4.4, \quad s_0 = -2.05. \quad (7.32)$$

Тогда из соотношений (7.25)–(7.28) имеем следующие начальные условия:

$$\tilde{x}_0 = z_1(0) = 0.487849, \quad \left(\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\right)_0 = z_2(0) = -4.4,$$

$$\tilde{y}_0 = z_3(0) = 4.4, \quad \left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)_0 = z_4(0) = -1.56215, \quad (7.33)$$

$$\tilde{r}_{20} = 4.42696, \quad \tilde{u}_{20} = 4.66908, \quad \delta_0 = 115.873 \text{ градус},$$

$$\tilde{\Delta}_{21}(0) = 4.42832, \quad \tilde{\Delta}_{23}(0) = 4.42832. \quad (7.34)$$

Эти начальные условия находятся в области возможных движений, определяемых интегралом Якоби (7.8), и удовлетворяют условию (5.4).

Система дифференциальных уравнений (7.18)–(7.21) при начальных условиях (7.33) решена численным методом с использованием пакета Mathematica.

Графики функций

$$\tilde{\Delta}_{21} = \tilde{\Delta}_{21}(\tau), \quad \tilde{\Delta}_{23} = \tilde{\Delta}_{23}(\tau), \quad \text{eps} = \tilde{\Delta}_{21}(\tau) - \tilde{\Delta}_{23}(\tau) \quad (7.35)$$

в интервале  $\tau \in [0, 2\pi A]$ ,  $\pi \approx 3, 14$ ,  $A = 100$  приведены на Рис. 2, 3.

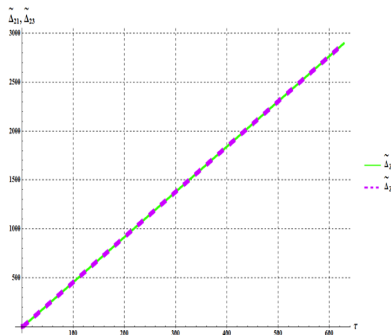
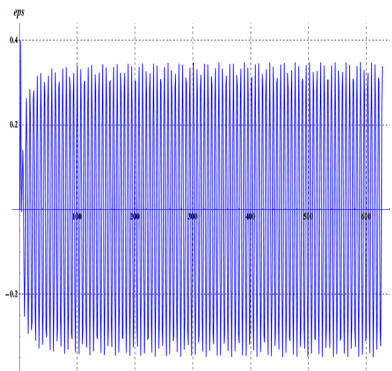


Рисунок 2 – Графики функции  $\tilde{\Delta}_{21}(\tau)$  и  $\tilde{\Delta}_{23}(\tau)$

Рисунок 3 – График функции  $eps = \tilde{\Delta}_{21}(\tau) - \tilde{\Delta}_{23}(\tau)$ 

Из этих графиков видно, что (в промежутке времени 100 оборотов основных тел) три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник. Аналогично можно рассмотреть и другие начальные условия, согласно (7.25)–(7.28) из области возможных движений, определяемых интегралом Якоби (7.8) и удовлетворяющих условию (5.4).

## 8. ОБСУЖДЕНИЯ

Таким образом, в барицентрической системе координат  $Gxy$  может быть рассмотрен такой частный вариант плоской ограниченной задачи трех тел, в котором во время движения три тела образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Такой частный случай ограниченной задачи трех тел назван нами *равнобедренной ограниченной задачей трех тел*. Плоская равнобедренная ограниченная задача трех тел описана в общем случае. В зависимости от решений задачи двух основных тел (2.11)–(2.12) задача может быть круговой, эллиптической, параболической или гиперболической плоской равнобедренной ограниченной задачей трех тел.

С учетом интеграла площадей (3.36) равнобедренная ограниченная задача трех тел, как динамическая система, имеет одну степень свободы. В работах [10]–[11], исходя из другой концепции, нами было показано, что равнобедренная ограниченная задача трех тел интегрируема.

По схеме исследования, принятой в настоящей работе, также можно

показать, что задача интегрируема. Интеграл площадей (6.9), преобразованный в переменные  $\theta$  и  $h(\theta)$ , определяет простое дифференциальное уравнение первого порядка. Это дифференциальное уравнение интегрируемо и, в зависимости от начальных условий, имеет три типа решения. Детальный анализ решения равнобедренной ограниченной задачи трех тел в терминах формул (3.19)–(3.21) будет выполнен в отдельной работе.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены начальные условия, при которых классическая плоская ограниченная задача трех тел во время движения образует плоский равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело. Такой частный случай классической плоской ограниченной задачи трех тел назван плоской равнобедренной ограниченной задачей трех тел.

Плоская равнобедренная ограниченная задача трех тел является динамической системой с одной степенью свободы. Отмечено, что равнобедренная плоская ограниченная задача трех тел интегрируема.

Исходные общие уравнения плоской круговой ограниченной задачи трех тел численно решены при найденных начальных условиях, приводящих к равнобедренной ограниченной задаче трех тел. Показано, что при этих начальных условиях три тела во время движения образуют равнобедренный треугольник, на вершине которого находится безмассовое тело.

Решение плоской равнобедренной ограниченной задачи трех тел, по сути, обобщает решение Лагранжа ( $L_4$ ,  $L_5$ ) ограниченной задачи трех тел в виде равностороннего треугольника. По видимому, многие решения плоской ограниченной задачи трех тел устойчивы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
- 2 Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
- 3 Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. – М.: Наука, 1990. – 295 с.
- 4 Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 256 с.
- 5 Маршал К. Задача трех тел. – М., Ижевск: Инст. комп. иссл., 2004. – 640 с.

6 Dvorak R., Lhotka Ch. *Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems.* – WILEY-VCH Verlag GmbH&Co.KGаA, 2013. – 309 p.

7 Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. – М., Ижевск: Институт комп. иссл., 2014. – 432 с.

8 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 456 с.

9 Celletti A. *Stability and Chaos in Celestial Mechanics.* – Chichester, Springer Praxis Publishing Ltd, 2010. –261 p.

10 Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М. Новые уравнение движение ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат // Вестник Каз.НПУ им. Абая Сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 1(49). – С. 62-68.

11 Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М. Новые точные частные решения ограниченной задачи трех тел // Тезисы докладов межд. научн. конф. "Актуальные проблемы матем. и информ.", посв. 80-летию со дня рождения акад. НАН РК Касымова К.А. – Алматы, 2015. – С. 86-88.

*Статья поступила в редакцию 30.09.2016*

#### Zhumabek T.M., Minglibayev M.Zh. ON ONE PARTICULAR CASE OF A PLANAR RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

In this work, there has been considered classical planar restricted three-body problem in the barycentric coordinate system. In this problem, through analytical ways, there have been found initial coordinates and initial velocities at which three bodies form isosceles triangle during all the time of motion. A massless body is on the vertex of this isosceles triangle. We nominated such particular case of the planar restricted three-body problem as the isosceles restricted three-body problem. In general, it has been proved that for the planar isosceles restricted three-body problem the total Newtonian force of attraction of primary bodies is central. From general differential equations of motion of the planar restricted three-body problem in the barycentric reference frame, there have been obtained differential equations of motion of the planar isosceles restricted three-body problem. The solution of differential equations of motion of the planar circular isosceles restricted three-body problem is reduced to quadratures. Using numerical methods, the initial differential equations of the circular restricted three-body problem (the Earth + the Moon + massless body) have been solved for the obtained initial conditions. The results of numerical solutions show that at these initial conditions three bodies form isosceles triangle and a massless body is on the vertex of this isosceles triangle.



**Жұмабек Т.М., Минглибаев М.Дж. ҮШ ДЕНЕ ЖАЗЫҚ ШЕКТЕЛГЕН ЕСЕБІНІҢ БІР ДЕРБЕС ЖАҒДАЙЫ ТУРАЛЫ**

Бұл жұмыста классикалық жазық үш дене есебі координаталардың барицентрлік жүйесінде қарастырылды. Бұл есепте үш дене қозғалыс кезінде төбесінде массасы жоқ дене орналасатын теңбүйірлі үшбұрыш құрайтын жағдай үшін координаталардың бастапқы мәндері мен жылдамдықтың бастапқы мәндері аналитикалық түрде табылды. Үш дене жазық шектелген есебінің осындай дербес жағдайын біз үш дене теңбүйірлі жазық шектелген есебі деп атадық. Жалпы жағдайда, үш дене жазық теңбүйірлі шектелген есебінде негізгі денелердің қосынды ньютондық тартылыс күші – орталық күш болатыны көрсетілген. Барицентрлік жүйедегі үш дене жазық шектелген есебінің қозғалысының жалпы дифференциалдық теңдеулеріне сүйене отырып, үш дене жазық теңбүйірлі шектелген есебінің қозғалысының дифференциалдық теңдеулері алынған. Барицентрлік жүйедегі үш дене жазық дөңгелектік теңбүйірлі шектелген есебінің қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің шешуі квадратураларға келтірілген. Табылған бастапқы шарттар үшін үш дене (Жер + Ай + массасы жоқ дене) дөңгелектік шектелген есебінің бастапқы дифференциалдық теңдеулері сандық әдістер арқылы шешілген. Сандық шешімдердің нәтижелері, осы бастапқы шарттар үшін үш дене қозғалыс кезінде төбесінде массасы жоқ дене орналасатын теңбүйірлі үшбұрыш құрайтынын көрсетеді.

**АДАПТИВНЫЙ ПРИВОД ДЛЯ КОСМИЧЕСКОЙ  
ТЕХНИКИ-ПРИВОД СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ**К.С. ИВАНОВ<sup>1</sup>, Д.Т. ТУЛЕКЕНОВА<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Алматинский университет энергетики и связи  
050013, Алматы, ул. Байтурсынова, 126, e-mail: <sup>1</sup>ivanovgreek@mail.ru, <sup>2</sup>danatul@mail.ru

Аннотация: В настоящее время появились принципиально новые саморегулирующиеся механические системы передачи движения при полностью отсутствующем управлении. Саморегулирующиеся механические системы созданы на основе научного открытия "Эффект силовой адаптации в механике". Сущность открытия – механизм с двумя степенями свободы и подвижным замкнутым контуром; имеет свойство самостоятельно, без системы управления адаптироваться к переменной внешней нагрузке. Доклад посвящен теоретическому описанию саморегулирующегося привода и созданию высокоэффективного привода исполнительного механизма космического аппарата.

Ключевые слова: Саморегулирующаяся система, силовая адаптация, механизм с двумя степенями свободы, замкнутый контур, привод солнечных батарей.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Приводы в космической технике используются для передачи движения исполнительным органам, для ориентации и стабилизации движения.

В настоящее время разработан привод солнечной системы. Эффективность использования солнечной батарей (СБ) определяется количеством электроэнергии, поступающей от СБ в систему электропитания КА. Эта величина зависит от освещенности активной поверхности СБ солнечным световым потоком. Саморегулирующийся привод содержит электродвигатель и саморегулирующийся передаточный механизм в виде зубчатого адаптивного вариатора. Зубчатый вариатор обеспечивает эффект силовой адаптации: при постоянной входной мощности выходной вал вращается с

---

Keywords: *Self-regulating system, power adaptation, mechanism with two degrees of freedom, closed loop drive solar panels.*

2010 Mathematics Subject Classification: 00A71.

© К.С. Иванов, Д.Т. Тулекенова, 2016.

угловой скоростью, которая обратно пропорциональна переменному моменту сопротивления. Явление силовой адаптации может быть доказано при выполнении силового анализа кинематической цепи с двумя степенями свободы. В ранее выполненных исследованиях [2], [3] было доказано, что замкнутый контур накладывает дополнительную связь на движение звеньев и приводит к определенности движения кинематической цепи с двумя степенями свободы при наличии только одного входа. Привод системы стабилизации для космоса должен иметь минимально возможный вес и размеры. Привод включает электродвигатель и передаточный механизм. Вес привода зависит от мощности двигателя. Мощность двигателя должна соответствовать максимальной нагрузке. Исследования приводов манипуляторов показали, что максимальная нагрузка связана с преодолением максимальных сил инерции [2]. Для уменьшения момента сопротивления, преодолеваемого двигателем, необходимо использовать привод с переменным передаточным отношением. В работе [2] было предложено использовать адаптивный привод манипулятора с переменным передаточным отношением, зависящим от нагрузки. Адаптивный зубчатый вариатор привода обеспечивает не только плавное регулирование передаточного отношения, но также и адаптацию к переменному моменту сопротивления. При этом зубчатый вариатор имеет простейшую конструкцию, малые размеры и вес, что очень важно для космических устройств.

## 2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ САМОРЕГУЛИРУЮЩЕГОСЯ ПРИВОДА

Саморегулирующийся привод содержит электродвигатель и саморегулирующийся передаточный механизм в виде зубчатого адаптивного вариатора. Зубчатый вариатор обеспечивает эффект силовой адаптации: при постоянной входной мощности выходной вал вращается с угловой скоростью, которая обратно пропорциональна переменному моменту сопротивления.

Явление силовой адаптации может быть доказано при выполнении силового анализа кинематической цепи с двумя степенями свободы.

В ранее выполненных исследованиях [2], [3] было доказано, что замкнутый контур накладывает дополнительную связь на движение звеньев и приводит к определенности движения кинематической цепи с двумя степенями свободы при наличии только одного входа.

Если такая закономерность действительно имеет место, то она должна проявиться также и при выполнении силового анализа обычного механизма, содержащего замкнутый контур. Обычный механизм – это механизм с двумя входными звеньями (Рис. 1).

Механизм содержит два входных звена (водила  $H_1$  и  $H_2$ ) и размещенный между ними подвижный замкнутый контур, содержащий колеса 1, 2, 3, 6, 5, 4. Колеса 3, 6 и 1, 4 объединены в блоки колес 3-6 и 1-4.

Задача силового анализа обычного механизма соответствует общепринятой постановке.

Постановка задачи силового анализа механизма с двумя степенями свободы (Рис. 1) и с двумя входами такова: по заданным внешним силам определить реакции в кинематических парах и обобщенные внешние силы  $F_{H1}$  и  $F_{H2}$  (или моменты  $M_{H1} = F_{H1}r_{H1}$  и  $M_{H2} = F_{H2}r_{H2}$ ) на двух входных водилах  $H_1$  и  $H_2$ .

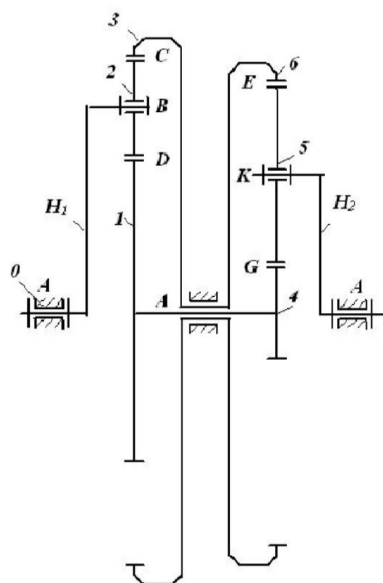


Рисунок 1 – Адаптивный зубчатый вариатор

Примем некоторое допущение. Будем считать, что на промежуточную

структурную группу Ассура активные силы не действуют (силами тяжести звеньев и силами инерции звеньев пренебрегаем из-за их малости по сравнению с силами на внешних водилах).

Силовой анализ следует начать с рассмотрения структурной группы 1-2-3-6-5-4 в виде четырехзвенного замкнутого контура, состоящего из зубчатых колес. Структурная группа содержит блок солнечных колес 1-4, сателлит 2, блок эпициклических колес 3-6 и сателлит 5. Такая структурная группа ранее никогда не рассматривалась. Из-за принятого допущения будем считать, что внешними силами для рассматриваемой структурной группы является реакция  $R_{H1-2} = F_{H1}$ , передаваемая со стороны водила  $H_1$  на сателлит 2 в шарнире В, и реакция  $R_{H1-5} = F_{H2}$ , передаваемая со стороны водила  $H_2$  на сателлит 5 в шарнире К. Внутренними неизвестными силами являются реакции в кинематических парах в точках D, C, G, E, а также реакции в неподвижном шарнире А. Замкнутый контур позволяет составлять уравнения статики.

Составим условия равновесия для звеньев контура 2 и 5:

$$\begin{cases} R_{12} + R_{32} = F_{H1}, \\ R_{45} + R_{65} = F_{H2}. \end{cases} \quad (1)$$

Эти условия можно представить в виде условий равновесия по принципу возможных перемещений.

Для сателлита 2 из уравнений моментов получим

$$\begin{cases} R_{12} = 0.5F_{H1}, \\ R_{32} = 0.5F_{H2}. \end{cases} \quad (2)$$

Работа внешних сил не может переходить в работу внутренних сил. Следовательно, работа (мощность) внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю:

$$-M_{21}\omega_1 - M_{23}\omega_3 - M_{54}\omega_1 - M_{56}\omega_3 = 0, \quad (3)$$

$$M_{21}\omega_1 + M_{23}\omega_3 + M_{54}\omega_1 + M_{56}\omega_3 = 0. \quad (4)$$

При выполнении условия (3) получим условие равновесия для внешних сил согласно принципу возможных перемещений:

$$M_{H1}\omega_{H1} + M_{H2}\omega_{H2} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) аналитически представляет собой дополнительную к условиям статики связь между параметрами кинематической цепи. Следовательно, замкнутый контур в обычной кинематической цепи с двумя степенями свободы и с двумя входными звеньями также накладывает дополнительную связь на движение звеньев.

Условие взаимосвязи внешних параметров (5) предопределяет наличие работ с разными знаками на внешних звеньях цепи (водилах  $H_1$  и  $H_2$ ). Звено с наличием отрицательной работы не может быть входным звеном, так как действующий на нем момент является моментом сопротивления.

Этот главный теоретический результат приводит к беспрецедентному выводу: кинематическая цепь с двумя начальными звеньями, соединенными замкнутым контуром, должна иметь только одно входное звено. Этот важнейший вывод характеризует принципиально новую научную реальность в механике. Несомненно, новая научная реальность создаст принципиально новый механический эффект.

Принципиально новый механический эффект характеризует появление следующих принципиально новых свойств:

1) замкнутый контур в кинематической цепи с двумя степенями свободы накладывает дополнительную связь на движение звеньев;

2) кинематическая цепь с двумя степенями свободы и только одним входным звеном является определенной механической системой (механизмом). Это свойство определяется наличием дополнительной связи (5), которая накладывается на движение звеньев в состоянии равновесия. Будем считать входным звеном водило  $H_1$ . Тогда водило  $H_2$  окажется выходным звеном. Уравнение дополнительной связи (5) примет вид

$$M_{H1}\omega_{H1} - M_{H2}\omega_{H2} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет определить выходную угловую скорость;

3) сочетание двух степеней свободы с дополнительной связью обеспечивает зависимость выходной угловой скорости от внешней нагрузки. Это свойство следует из формулы (6):

$$\omega_{H2} = \frac{M_{H1}\omega_{H1}}{M_{H2}}. \quad (7)$$

Здесь  $M_{H1}$  – входной движущий момент, а  $M_{H2}$  – выходной момент

сопротивления (внешняя нагрузка). Уравнение (7) выражает главный теоретический результат – эффект силовой адаптации в механике.

Эффект силовой адаптации имеет следующую сущность: при заданных постоянных параметрах входной мощности  $M_{H1}$ ,  $\omega_{H1}$  и заданном выходном моменте сопротивления  $M_{H2}$  выходная угловая скорость находится в обратной пропорциональной зависимости от переменного выходного момента сопротивления  $M_{H2}$ .

### 3. АДАПТИВНЫЙ ПРИВОД СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ КОСМОСА

Привод системы стабилизации для космоса должен иметь минимально возможный вес и размеры. Привод включает электродвигатель и передаточный механизм. Вес привода зависит от мощности двигателя. Мощность двигателя должна соответствовать максимальной нагрузке. Исследования приводов манипуляторов показали, что максимальная нагрузка связана с преодолением максимальных сил инерции [2]. Для уменьшения момента сопротивления, преодолеваемого двигателем, необходимо использовать привод с переменным передаточным отношением. В работе [2] было предложено использовать адаптивный привод манипулятора с переменным передаточным отношением, зависящим от нагрузки. Адаптивный зубчатый вариатор привода обеспечивает не только плавное регулирование передаточного отношения, но также и адаптацию к переменному моменту сопротивления. При этом зубчатый вариатор имеет простейшую конструкцию, малые размеры и вес, что очень важно для космических устройств. Как было доказано [2], замкнутый четырехзвенный контур накладывает дополнительное условие связи на движение кинематической цепи с двумя степенями свободы, обеспечивает определимость движения при наличии только одного входного звена и силовую адаптацию к переменной выходной нагрузке. Разработанные теоретические закономерности [2] позволяют выполнить силовой и кинематический анализ адаптивного вариатора для наиболее нагруженного положения привода (в момент начала движения) и выбрать двигатель.

Адаптивный зубчатый вариатор имеет заданное значение максимального передаточного отношения  $u_{max}$  ( $u_{max} = 3..10$ ) и максимального выходного момента сопротивления  $M_{H2}$  на выходном звене  $H_2$ . Требуется определить постоянные параметры мощности двигателя  $M_{H1}$ ,  $\omega_{H1}$  на вход-

ном звене  $H_1$ , силовые и кинематические параметры вариатора.

Определение мощности двигателя:

1) определяем минимальную выходную угловую скорость  $\omega_{H2} = \frac{\omega_{H1}}{u_{max}}$ , где  $\omega_{H1}$  – номинальная угловая скорость двигателей заданного типа;

2) определяем момент двигателя  $M_{H1} = \frac{M_{H2}}{\eta u_{max}}$ , где  $\eta$  – КПД вариатора ( $\eta = 0.9$ );

3) определяем мощность двигателя  $N = M_{H1}\omega_{H1}$ .

Потребная мощность двигателя при отсутствии вариатора оказалась бы больше полученной мощности примерно в  $n = \eta$  раз.

*Кинематический и силовой анализ зубчатого адаптивного вариатора.*

Исходные данные: постоянные параметры мощности двигателя  $M_{H1}$ ,  $\omega_{H1}$  на входном звене  $H_1$ ; заданное максимальное значение переменного выходного момента сопротивления  $M_{H2}$  на выходном звене  $H_2$ :  $\omega_{H1}$ ,  $M_{H1}$ ,  $M_{H2}$ ;

$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$  – числа зубьев колес;

$m$  – модуль зубчатого зацепления.

Требуется определить кинематические и силовые параметры механизма:

$\omega_{H2}$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_3$ ,  $M_{121}$ ,  $M_{32}$ ,  $M_{45}$ ,  $M_{65}$ .

Решение.

1) Радиусы зубчатых колес  $r_{H1} = \frac{m_i}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

2) Радиусы входного и выходного водил  $r_{H1} = \frac{r_1+r_3}{2}$ ,  $r_{H2} = \frac{r_4+r_6}{2}$ .

3) Передаточное отношение колес 1 и 3 при неподвижном водиле  $H_1$ :

$$u_{13}^{H1} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

4) Передаточное отношение колес 4 и 6 при неподвижном водиле  $H_2$ :

$$u_{46}^{H2} = -\frac{z_6}{z_4}.$$

5) Выходная угловая скорость  $\omega_{H2} = \frac{M_{H1}\omega_{H1}}{M_{H2}}$ .

6) Промежуточная угловая скорость звена 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_{H2}(1 - u_{46}^{H2}) - \omega_{H1}(1 - u_{13}^{H1})}{u_{13}^{H2} - u_{46}^{H2}}.$$



7) Промежуточная угловая скорость звена 1

$$\omega_1 = u_{13}^{H1}(u_3 - U - H1) + u_{H1}.$$

8) Реактивные моменты на зубчатых колесах:

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{0.5M_{H1}r_1}{r_{H1}}, \\ M_{32} = \frac{0.5M_{H1}r_3}{r_{H1}}, \\ M_{45} = \frac{0.5M_{H2}r_4}{r_{H2}}, \\ M_{65} = \frac{0.5M_{H2}r_6}{r_{H2}}. \end{cases} \quad (8)$$

9) Проверка достоверности полученных результатов:

$$(M_{21} - M_{54})\omega_1 = (M_{56} - M_{23})\omega_3.$$

Таким образом, все искомые параметры определены.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Саморегулирующиеся механические системы, созданные на основе научного открытия "Эффект силовой адаптации в механике", позволяют создавать принципиально новые адаптивные приводы, способные адаптироваться к переменной внешней нагрузке. Приведенное теоретическое описание саморегулирующегося привода дает возможность создания высокоэффективных приводов исполнительных механизмов и систем управления и стабилизации космических аппаратов. Главные достоинства адаптивных электроприводов: малые размеры, вес и высокая энергетическая эффективность. Адаптивные приводы являются принципиально новым видом высокоэффективной космической техники.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1986. – № 1. – 184 с.
- 2 Ivanov K.S. To the Discovery "Effect of Force Adaptation" 20-th Anniversary // Proc. of 2015 IFToMM Workshop on History of Mechanism and Machine Science, 2015. – P. 116-124.

3 Ivanov K.S. Toothed variators. Theory, analysis, synthesis, gear boxes, drives. – 2005. – 89 p.

4 Ceccarelli M., Balbaev G. Theory of a Novel Mechatronic System // Int. J. of Innovative Technology and Research – 2015. – V. 3, No. 3. – P. 2171-2174.

*Статья поступила в редакцию 02.12.2016*

Ivanov K.S., Tulegenova D.T. ADAPTIVE DRIVE FOR SPACE TECHNOLOGY-SOLAR POWER

Currently fundamentally new self-adjusting mechanical motion transmission systems with completely absent management are appeared. Intelligent mechanical systems are designed on the basis of scientific discovery "The effect of the power of adaptation in Mechanics". The essence of the discovery is a mechanism with two degrees of freedom and mobile closed circuit which has a property on its own, without control system to adapt to the variable external load. The report focuses on the theoretical description of self-regulating drive and on the creation of high effective spacecraft actuator.

Иванов К.С., Тулекенова Д.Т. ҒАРЫШТЫҚ ТЕХНИКАҒА АРНАЛҒАН БЕЙІМДЕЛГЕН ЖЕТЕК-КҮН БАТАРЕЯЛАРЫНЫҢ ЖЕТЕГІ

Қазіргі уақытта мүлдем басқарусыз болатын қозғалысты таратудың жаңа өзіндік реттегішті механикалық жүйелері пайда болды. Өзіндік реттегішті механикалық жүйелер "Механикадағы күштік бейімдеу әсері" ғылыми жаңалығының негізінде жасалған. Жаңалықтың мәні – қозғалмалы тұйықталған контуры бар еркіндік дәрежесі екіге тең механизм болып табылады; айнымалы сыртқы жүктемеге басқару жүйесі болмаса да өз бетімен бейімделу қасиеті бар. Мақала өзіндік реттегішті жетектің теориялық сипаттамасына және ғарыштық аппараттың орындаушы механизмдерінің жоғары тиімділікті жетекті жасауға арналған.

**FEATURES OF DIURNAL VARIATIONS OF THE TOTAL ELECTRON CONTENT IN THE YEARS OF MAXIMUM AND MINIMUM SOLAR ACTIVITY**D. КАИРАТКУЗЫ<sup>1</sup>, S.N. МУКАШЕВА<sup>2</sup>, N.S. ТОЙШЕВ<sup>3</sup><sup>1,2,3</sup>Institute of Ionosphere, National Center for Space Research and Technology  
050010, Kazakhstan, Almaty, Shevchenko St., 15e-mail: <sup>1</sup>kairatkyzy.dina@mail.ru, <sup>2</sup>snmukasheva@gmail.com, <sup>3</sup>totti\_tn11@mail.ru*Dedicated to the 80-th anniversary of academician U.M. Sultangazin*

Annotation: In this paper we studied variations of total electron content in the periods of anomaly low minimum (2007) and anomaly low maximum (2012) of solar activity with using GIM (Global Ionospheric Maps) technology. It was shown that global distribution of total electron content reaches the maximum of daily values during spring (autumn) equinox: 60+5 TECU in equatorial latitudes; 35+5 TECU at middle latitudes; 10+5 TECU at high latitudes. There was carried out a comparison of the diurnal variations of absolute values of total electron content, which were calculated on the base of IONEX maps under quiet geomagnetic conditions for different seasons, with variations of electron concentration in the ionosphere according to the data from the vertical sounding ionospheric station Almaty [76,55°E; 43,15° N].

Keywords: Global ionospheric maps, total electron content, solar activity.

## 1. INTRODUCTION

The development of global positioning system GPS (Global Positioning System) allows, in addition to solving navigation tasks, remote diagnostics of ionosphere. The global maps of total electron content (TEC), built on the basis of data of international geophysical GPS-receivers network (International GPS Service for Geodynamics), enable us to calculate the diurnal variations of TEC practically for all regions of our planet. Obviously, the TEC variations, obtained by using the GIM technology, are more precise for regions with bigger

---

Keywords: *Global ionospheric maps, total electron content, solar activity.*

2010 Mathematics Subject Classification: 86-05.

Funding: This paper was written with assistance of the grant project 079/GF4.

© D. Kairatkyzy, S.N. Mukasheva, N.S. Toyshiev, 2016.

amount GPS receivers (North hemisphere) and less precise for regions with less receivers (South hemisphere). The investigations in the last decade showed that the diurnal TEC variations had distinctive "winter", "equinoctial", and "summer", behavior types with peculiarities on different latitudes and longitudes (equatorial, middle-latitude, and high-latitude). The amplitudes of daily TEC variations (the difference between TEC<sub>max</sub> and TEC<sub>min</sub>) define known ionosphere "anomalies", such as seasonal and semiannual, whereas investigations of the regularities of annual and semiannual variations of ionospheric parameters are limited by midday variations of those parameters, and the ionosphere is described as a "stationary regime" (see reference [1]–[15]).

The goal of this work is to study morphological peculiarities of daily variations of the total electron content in the periods of anomaly low minimum (2007) and anomaly low maximum (2012) of solar activity with using GIM technology. In those years the solar activity index (solar radio emission flux with the wave-length 10.7 cm, F10.7) as from data of Space Weather Prediction Center (SWPC) of US National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) <http://www.swpc.noaa.gov>: in 2007 annual average values F10.7 was equal to 73.1; in 2012 annual average values F10.7 was equal to 119.9.

## 2. DATA SOURCE

In this work the GIM-maps, which were calculated by Swiss research center CODE (Center for Orbit Determination in Europe, University of Berne, Switzerland) based on data from more than 150 GPS signal reception centers, were used. The GIM-maps are available online in the IONEX format (<ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/pub/gps/products/ionex>). All the IONEX.dat-files contain the values of vertical total electron content (TEC),  $I_v$ , per calendar day on the scale of the Greenwich civil time with the time resolution of 2 hours. The spatial diapason of data: from 180 to 180 on longitude, from -87.5 to 87.5 on latitude. The spatial resolution was defined with the step (5°) on longitude and (2.5°) on latitude. The cell size on latitude is 279 km, and on longitude – 436 km. The vertical total electron content was calculated with consideration of the solar-geomagnetic conditions based on spherical harmonics [1]–[3]. TECU (total electron content unit) – the universally accepted measure of the total electron content (total electron content unit), eq. 10<sup>16</sup> el/m<sup>2</sup>.

### 3. THE DIURNAL VARIATIONS OF THE TOTAL ELECTRON CONTENT IN THE PERIOD OF ABNORMALLY DEEP MINIMUM (2007) AND WEAK MAXIMUM (2012) OF THE SOLAR ACTIVITY

We analyzed TEC variations on three longitudes near which there is the largest number of GPS receivers: -75 E (America), +15 E (Europe), +115 E (Asia). For selected magnetically quite days of the selected months the diurnal variations of TEC were estimated, and their averages were found for three latitudinal zones of the Northern hemisphere: equatorial (0-20), mid-latitude (40-52,5), high-latitude (60-85). Average values of TEC for the selected magnetically quiet days of all four months are shown in Fig. 1 and Fig. 2: equatorial latitudes (left), mid-latitudes (middle) and high-latitudes (right), for every latitude there were calculated average daily variations for selected months (March, June, September, December) of 2007 (Fig. 1) and 2012 (Fig. 2). The blue curve with the points corresponds to the longitude -75 E, the red curve with crosses – to the longitude +15 E, the green curve with triangles – to the longitude +115 E. In order not to overelaborate Fig. 1, we do not show the mean-square deviations. Depending on geographical latitude, season, and day time, they change from +2 TECU to +5 TECU for the period of anomaly low maximum of solar activity (2007) and change from +0,002 TECU to +0,005 TECU for the period of anomaly low minimum of Solar activity (2012). In Table 1 there are given the maximal daily variations of  $I_{vmax}$ , minimal daily variations of  $I_{vmin}$  and amplitudes of daily variations of  $A_{mmyyyy}$ , where the mmyyyy index stands for: mm – the month, yyyy – the year.

The detected peculiarities of TEC daily variations *for the equatorial latitudes of all investigated longitudes*: the amplitudes of daily variations are maximal in equatorial latitudes: The diurnal variations peak at equatorial latitudes: moreover, during the vernal equinoxes the amplitudes of daily variations for all investigated latitudes in 2012 overpass the amplitudes of daily variations in 2007 by factor of 1.51, i.e.,  $A_{032012}/A_{032007} \approx 1,51$ ; the ratio of maximal daily values  $I_{v032012max}/I_{v032007max} \approx 1,51$ ; during the autumnal equinox  $I_{v092012max}/I_{v092007max} \approx 1,31$ .

In the equatorial latitudes in the year of minimum of solar activity the maximal TEC values during the summer solstice do not overpass their values during the winter solstice  $I_{v062007max} - I_{v122007max} \approx 6,03$  TECU, whereas in the year of the maximum of solar activity  $I_{v062012max} - I_{v122012max} \approx -4,30$

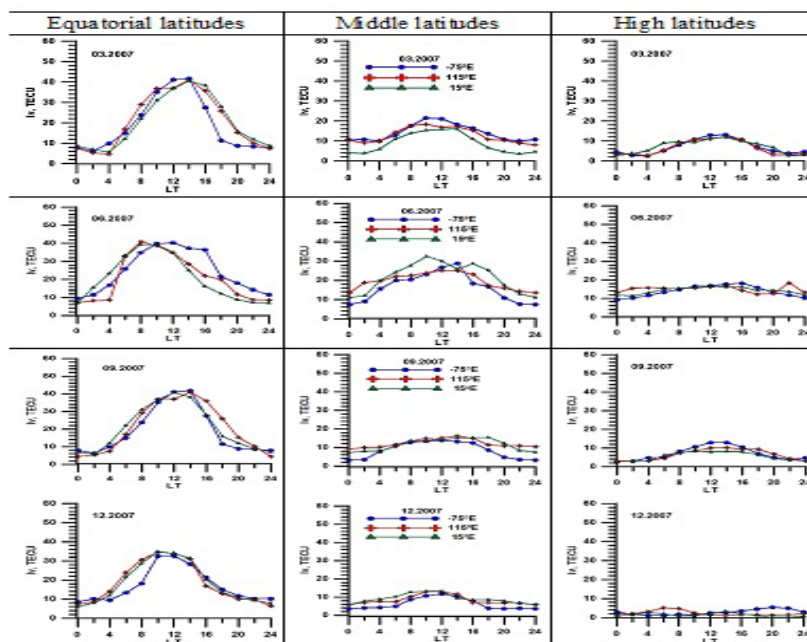


Figure 1 – Daily variation of "vertical" TEC for selected months (March, June, September, December) of 2007, calculated on base of GIM cards in magnetically quiet days for four seasons in the Northern hemisphere for the equatorial latitudes (left), medium (middle) and high (right). The blue dotted curves correspond to the longitude ( $-75^{\circ}E$ ), red curves with crosses – ( $+15^{\circ}E$ ), green curve with triangles – ( $+15^{\circ}E$ ).

TECU, except for longitude  $75^{\circ}E$ , where  $I_{v062012max} \approx 39,97$  TECU and  $I_{v122007max} \approx 37,06$  TECU.

In the periods of anomaly low minimum (2007) and anomaly low maximum (2012) on *mid-latitudes* the daily TEC variations have characteristic winter, equinoctical, and summer behavior types, which differ with amplitude of the daily variations (Fig. 1, Fig. 2 and Table 1).

Moreover, the winter and the vernal equinox behaviors have one day maximum, whose amplitude is dependent on solar activity, so  $A_{032012}/032007 \approx 1,97$ ;  $A_{122012}/A_{122007} \approx 1,91$ . As for the summer type, in the periods of anomaly low maximum (2012), and for the autumn equinox behavior, the

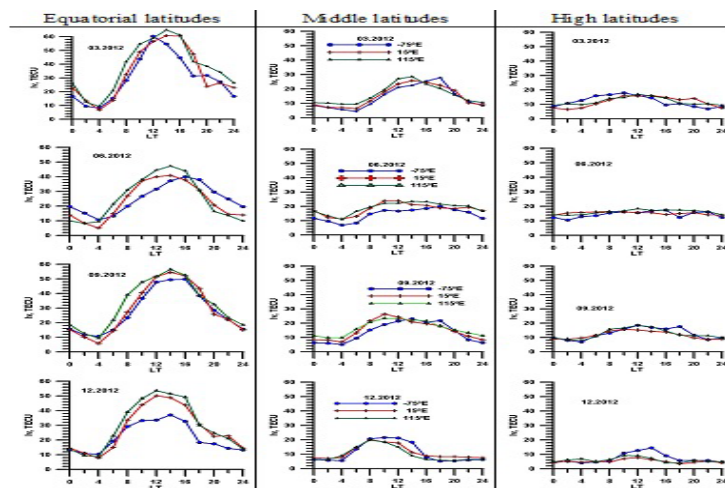


Figure 2 – Daily variation of "vertical" TEC for selected months (March, June, September, December) of 2012, calculated on base of GIM cards in magnetically quiet days for four seasons in the Northern hemisphere for the equatorial (left), medium (middle) and high (right) latitudes.

The blue dotted curves correspond to the longitude (-75 E), red curves with crosses - (+15 E), green curve with triangles - (+15 E).

continual growth of electron density after sunset hours until  $\sim 10$  LT was observed; then the level fluctuates only a little until  $\sim 20$  LT.

*In high latitudes* the diurnal variations in the summer, in 2007 and 2012 are similar: the electron concentration keeps at a level 10-16 TECU. In December 2007, the electron concentration keeps at  $\sim 1 - 6$  TECU. At other times, there is a small peak in the diurnal  $\sim 12 - 18$  TECU for anomaly low maximum solar activity year.

#### 4. STATE OF IONOSPHERE IN THE PERIODS OF ANOMALY LOW MINIMUM (2007) AND ANOMALY LOW MAXIMUM (2012) OF SOLAR ACTIVITY OVER THE KAZAKHSTAN REGION

We also compared the diurnal variations of TEC,  $I_q$ , which were calculated for the closest to the Almaty coordinates [ $43.38^\circ N$ ;  $77.38^\circ E$ ] GIM node

Table 1 – The main characteristics of daily variations

Season	Amplitude	Equatorial latitudes			Middle latitudes			High latitudes		
		-75°E	15°E	115°E	-75°E	15°E	115°E	-75°E	15°E	115°E
Spring	$I_{\nu 032007}^{max}$	41.66	40.62	40.96	21.43	16.07	18.30	12.98	11.88	11.88
	$I_{\nu 032007}^{min}$	6.31	5.72	4.55	9.92	6.45	8.00	2.60	2.70	2.50
	$A_{032007}$	35.35	34.90	36.41	11.51	9.62	10.30	10.38	9.18	9.38
	$I_{\nu 032012}^{max}$	60.24	60.76	64.86	27.90	25.90	28.50	17.90	16.17	17.11
	$I_{\nu 032012}^{min}$	8.10	6.70	9.50	4.60	6.40	9.40	6.80	6.50	9.38
	$A_{032012}$	52.14	54.06	55.36	23.30	19.50	19.10	11.10	9.67	7.73
Summer	$I_{\nu 062007}^{max}$	40.17	39.15	40.95	28.87	32.56	25.22	18.17	16.48	18.22
	$I_{\nu 062007}^{min}$	9.55	7.02	7.27	7.43	11.08	13.57	9.18	11.32	12.10
	$A_{062007}$	30.62	32.13	33.68	21.44	21.48	11.65	8.99	5.16	6.12
	$I_{\nu 062012}^{max}$	39.97	40.88	47.20	19.92	24.05	23.48	17.42	16.55	18.28
	$I_{\nu 062012}^{min}$	10.75	5.08	8.36	6.82	11.18	10.98	10.52	8.00	13.92
	$A_{062012}$	29.22	35.80	38.84	13.10	12.87	12.50	6.90	2.55	4.36
Autumn	$I_{\nu 092007}^{max}$	41.67	40.62	40.97	13.89	15.30	16.04	12.99	8.34	10.22
	$I_{\nu 092007}^{min}$	6.32	5.72	4.55	3.00	7.19	9.00	2.60	2.87	2.70
	$A_{092007}$	35.35	34.90	36.42	10.89	8.11	7.04	10.39	5.47	7.52
	$I_{\nu 092012}^{max}$	49.84	54.58	56.62	23.08	26.32	23.52	18.48	15.78	18.52
	$I_{\nu 092012}^{min}$	10.72	5.88	9.52	5.08	6.97	9.83	6.97	8.58	7.75
	$A_{092012}$	39.12	48.70	47.10	18.00	19.35	13.69	11.51	7.20	10.77
Winter	$I_{\nu 122007}^{max}$	32.75	35.04	34.40	11.82	13.15	13.00	5.45	3.20	5.05
	$I_{\nu 122007}^{min}$	8.50	6.09	6.19	3.57	5.74	5.95	1.10	0.20	1.14
	$A_{122007}$	24.25	28.95	28.21	8.25	7.41	7.05	4.35	3.00	3.91
	$I_{\nu 122012}^{max}$	37.06	50.24	53.64	21.57	28.12	19.78	14.53	7.73	9.32
	$I_{\nu 122012}^{min}$	10.32	7.70	8.62	5.32	7.05	5.63	4.13	3.48	4.13
	$A_{122012}$	26.74	42.54	45.02	16.25	13.07	14.15	10.40	4.25	5.19

[42.5°N; 75°E], with variations of critical frequencies of the layer  $F2$ ,  $foF2$ , obtained from vertical sounding station Almaty (Fig. 3).

In the periods of *anomaly low maximum (2012)* diurnal variations of critical frequencies of the  $F2$  layer,  $f0F2$  were averaged for the same periods as TEC. In diurnal variations of critical frequencies the same peculiarities as in TEC variations were observed, because main contribution to TEC is made from the part of ionosphere, which is located about maximum of ionization. In June in diurnal variations of TEC, as well as in diurnal variations of  $foF2$  there were two local maximums, which were observed at 11 and 20 LT. These effects are consequences of the system of atmospheric winds [5]. Pressure gradients of neutral gas at  $F$  layer cause intensive atmospheric winds. System of winds



induces vertical ionospheric drift, which is directed downward at 09-18 LT and causes a decrease in critical frequencies of the F2 layer,  $f_0F2$ , in summer. In evenings and nighttime this drift is directed upward and causes an increase in electron concentration [11]. During the period (2007) there is also a good coincidence, and the diurnal variations of the TEC and  $f_0F2$ ; the amplitude of the diurnal variations is less than 1.3 and 1.5 times higher than in 2012.

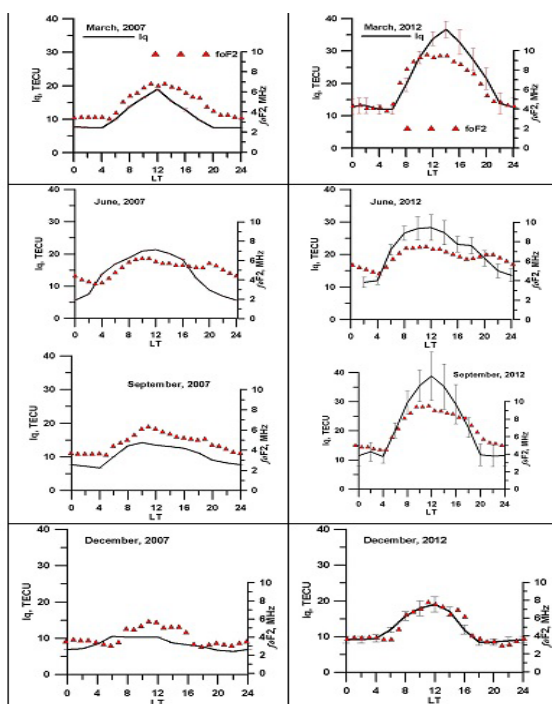


Figure 3 – The diurnal variations of the total electron content  $I_q$  in Almaty, which were calculated with use of GIM-technology and averaged for magnetic calm days.

Vertical lines indicate the mean square deviations.

The black triangles show the diurnal variations of the critical frequency of the F2 ionosphere layer, which were averaged for the same periods, as the TEC variations. The vertical lines indicate the mean square deviations.

## 5. ACKNOWLEDGEMENTS.

We are grateful to the Center for Orbit Determination in Europe, University of Berne, Switzerland, for providing IONEX data. We are grateful to the service of the Ionosphere and Geomagnetic Observatory of the Institute of Ionosphere.

## REFERENCES

- 1 Afraimovich E.L., Perevalova N.P. GPS-monitoring of the Earth's upper atmosphere. – Irkutsk: SC RRS SB RAMS, 2006. – 480 p. (in Russian).
- 2 Afraimovich E., Astafyeva E., Demyanov V., Edemsky I., Gavriilyuk N. et al. A review of GPS/GLONASS studies of the ionospheric response to natural and anthropogenic processes and phenomena // *J. Space Weather and Space Climate*. – 2013. – V. 3, A 27. – doi:10.1051/swsc2013049.
- 3 Ashkaliev J.F., Bibosinov A.Z., Breusov N.G., Zhumabaev B.T., Kurmanov B.K., Mukasheva S.N., Nurgaliyeva K.E., Sadykov K.A. Preparation of Global Navigation Satellite System GPS Data for Identification Of Seismic-Ionosphere Effects (Workbook). – Almaty: Gylm, – 2012. – 43 p. (in Russian).
- 4 Danilov A.D., Konstantinova A.V. Variations in foF2 Trends with Season and Local Time // *Geomagnetism and Aeronomy*. – 2015. – V. 55(1). – P. 51-58.
- 5 Libo Liu, Weixing Wan, Baiqi Ning, Pirog O.M., Kurkin V.I. Solar activity variations of the ionospheric peak electron density // *J. Geophys. Res.* – 2006. – V. 111. – P. A08304. – doi: 10.1029/2006JA011598.
- 6 Mannucci A.J., Wilson B.D., Yuan D.N., Ho C.M. Lindqwister U.J., Runge T.F. A global mapping technique for GPS derived ionosphere TEC measurements. *Radio Sci.* – 1998. – V. 33(3). – P. 565-582.
- 7 Perevalova N.P., Polyakova A.S., Zalizovsky A.V. Diurnal variations of the total electron content under quiet helio-geomagnetic conditions // *J. Atm. Sol.-Terr. Phys.* – 2010. – V. 72(13). – P. 997-1007.
- 8 Schaer S., Beutler G., Rothacher M. Mapping and predicting the ionosphere // *Proc. of the IGS AC Workshop*. – Darmstadt, Germany. – 1998 a. – No. 9-11. – P. 307-320.
- 9 Schaer S., Gurtner W., Feltens J. IONEX: The Ionosphere Map Exchange Format Version1 // *Proc. of the IGS AC Workshop*. – Darmstadt, Germany. – 1998b. – No. 9-11. – P. 233-247.
- 10 Titheridge J.E., Buonsanto M.J. Annual variations in the electron content and height of the F layer in the northern and southern hemispheres, related to neutral composition // *J. Atmos. Terr. Phys.* – 1983. – No. 45. – P. 683-696.
- 11 Vadas S.L., Liu H. Generation of large scale gravity waves and neutral winds in the thermosphere from the dissipation of convectively generated gravity waves // *J. Geophys. Res.* – 2009. – No. 114. – P. A10310. – doi:10.1029/2009JA014108.

12 Yonezawa T. The solar-activity and latitudinal characteristics of the seasonal, non-seasonal and semi-annual variations in the peak electron densities of the F2-layer at noon and at midnight in middle and low latitudes // J. Atmos. Terr. Phys. – 1971. – V. 33. – P. 889-907.

13 Zhang S.R., Foster J.C., Holt J.M., Erickson P. J., Coster A.J. Magnetic declination and zonal wind effects on longitudinal differences of ionospheric electron density at midlatitudes // J. Geophys. Res. – 2012. – No. 117. – P. A08329. – doi:10.1029/2012JA017954.

14 Zhao B., Wan W., Liu L., Mao T., Ren Z., Wang M., Christensen A.B. Features of annual and semiannual variations derived from the global ionospheric maps of total electron content // Ann. Geophys. – 2007. – No. 25. – P. 2513-2527.

15 Zolesi B, Cander LjR. Ionospheric Prediction and Forecasting. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Library of Congress Control. – 2014. – No. 2013942473.

*Received 15.11.2016*

Қайратқызы Д., Мукашева С.Н., Тойшиев Н.С. КҮН БЕЛСЕНДІЛІГІНІҢ МАКСИМУМЫ МЕН МИНИМУМЫ ЖЫЛДАРЫНЫҢ ТОЛЫҚ ЭЛЕКТРОНДЫ МАЗМҰНЫНЫҢ ТӘУЛІКТІК ВАРИАЦИЯЛАРЫНЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Осы жұмыста күн белсенділігінің аномалды төмен минимумы (2007 жыл) мен аномалды төмен максимумы (2012 жыл) аралығындағы толық электронды мазмұнының GIM-технологиясын қолдана отырып есептелген вариацияларын зерттеудің нәтижелері келтірілген. Толық электронды мазмұнының тәуліктік мәндері көктемгі (күзгі) күн мен түннің теңелуі аралығында: экваторлық ендіктерде 60+5 TECU; ортаңғы ендіктерде 35+5 TECU, жоғарғы ендіктерде 10+5 TECU шамаларында максималды екендігі көрсетілген. Алматы қ. [76,55°E; 43,15° N] әртүрлі маусымдар үшін магнитті тұрақты аралықтардағы толық электронды мазмұнының IONEX карталарын қолдана отырып есептелінген абсолюттік мәндерінің тәуліктік вариациялары ионосфераның электронды концентрациясының вертикалды зондтау станцияларының мәліметтері бойынша алынған вариацияларымен салыстырылған.

Кайраткызы Д., Мукашева С.Н., Тойшиев Н.С. ОСОБЕННОСТИ СУТОЧНЫХ ВАРИАЦИЙ ПОЛНОГО ЭЛЕКТРОННОГО СОДЕРЖАНИЯ В ГОДЫ МАКСИМУМА И МИНИМУМА СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

В этой работе представлены результаты исследования вариаций полного электронного содержания, рассчитанного с использованием GIM-технологии, в период аномально низкого минимума (2007 год) и аномально низкого максимума (2012 год) солнечной активности. Показано, что суточные значения полного электронного содержания максимальны в периоды весеннего (осеннего) равноденствия:  $60+5$  TECU на экваториальных широтах;  $35+5$  TECU на средних широтах;  $10+5$  TECU на высоких широтах. Суточные вариации абсолютных значений полного электронного содержания, рассчитанные с использованием IONEX карт в магнитоспокойные периоды для различных сезонов, сопоставлены с вариациями электронной концентрации ионосферы, полученными по данным станции вертикального зондирования г. Алматы [ $76,55^\circ\text{E}$ ;  $43,15^\circ\text{N}$ ].

**СТАТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ**Н.И. МАРТЫНОВ<sup>1</sup>, М.А. РАМАЗАНОВА<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул.Пушкина, 125, e-mail: <sup>1</sup>nikmar50@mail.ru, <sup>2</sup>mira52ram@mail.ru

Аннотация: Статические краевые задачи плоской теории упругости неоднородной анизотропной среды для односвязной области приведены к задаче Римана-Гильберта квазианалитического вектора, для решения которой получены соответствующие сингулярные интегральные уравнения по области. Для достаточно широкого класса анизотропии доказана их однозначная разрешимость. В случае однородного анизотропного тела решения первой и второй краевых задач получены в замкнутом виде. Для составных упругих сред с изменяющейся по области анизотропией (достаточно широкого класса) получены однозначно разрешимые интегральные уравнения, позволяющие сразу определять обобщенные решения, автоматически удовлетворяющие условиям сопряжения на границах контакта подобластей.

Ключевые слова: Квазианалитический вектор, задача Римана-Гильберта, индекс, упругие параметры.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время космические аппараты, самолеты, различные летательные изделия в аэрокосмической промышленности изготавливаются и состоят более, чем на 80% из композитов, углепластиков и современных материалов. Использование nano-технологий в "преднамеренном создании" неоднородных, анизотропных полей упругих параметров существенно повышает прочность материала и расширяет диапазон эксплуатации соответствующих оптимальных конструкций в агрессивных средах. В связи с

---

Keywords: *Quasianalytical vector, Riemana-Gilbert problem, index, elastic parameters.*

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05, 74K25.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта № 0826/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

© Н.И. Мартынов, М.А. Рамазанова, 2016.

этим выдвигается новый класс задач с изменяющейся по области анизотропией, с упругими коэффициентами из класса суммируемых функций и др.

Краевые задачи плоской статической теории упругости неоднородных анизотропных сред описываются линейной эллиптической системой уравнений с переменными коэффициентами. Теория решения таких систем достаточно полно разработана. В ней особое место занимает теория обобщенного аналитического вектора [1], [2] или квазианалитического вектора [2]–[4], которая представляет собой теорию решения эллиптических систем первого порядка на плоскости. Решения этих систем в общем случае являются обобщенными решениями в смысле Соболева, а по своим топологическим свойствам близки к аналитическим функциям.

Хорошо известен метод комплексных потенциалов (метод Н.И. Мусхелишвили и его модификации), используемый в плоской теории упругости для решения статических краевых задач однородных упругих сред. В настоящем исследовании излагаются и обобщаются результаты работ [5], [6], которые расширяют возможности применения метода комплексных потенциалов и логически переносят их применение на неоднородные анизотропные среды с позиции теории квазианалитического вектора.

В работах [5], [6] двумерные краевые задачи статики теории упругости неоднородных анизотропных сред приведены к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора. Это позволяет задействовать уже разработанный аппарат [1], [2], сводящий краевую задачу Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора к эквивалентной системе контурных сингулярных интегральных уравнений. Метод контурных сингулярных интегральных уравнений универсален и его целесообразно использовать при решении некоторых частных задач, а также в теоретических исследованиях. Для решения практически важных задач метод контурных интегральных уравнений не очень удобен [2], так как связан с трудоемкими дополнительными процедурами: приведением системы уравнений к каноническому виду, построением фундаментальных решений, резольвентных ядер и общего решения. Поэтому естественно встает вопрос о том, нельзя ли с помощью интегральных операторов по области, минуя все промежуточные звенья, решать краевые задачи? Оказывается, что во многих случаях это возможно. Теория, базирующаяся на таком под-

ходе, называется теорией квазианалитического вектора [1], [3]. При этом отпадают многие требования на гладкость упругих параметров, расширяется класс изучаемых уравнений и краевых задач. Такой подход разработан и обоснован в работах [5], [6], идейная сторона которого излагается в настоящем докладе.

## 2. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  в поле объемных сил  $f$  при условии плоской деформации рассмотрим равновесие анизотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего односвязную область  $D$  с границей  $\Gamma$ .

Перейдем в плоскость комплексных переменных и введем комплексные операторы:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} \equiv s = x_1 - ix_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

где  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ). Введем комплексные компоненты векторов перемещений  $W$  и объемных сил  $f$ , комплексные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ :

$$W = u_1 + iu_2, \quad f = f_1 + if_2 = f_1 + if_2, \quad T_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad T_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2i\sigma_{12},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = W_Z + \bar{W}_S, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + i\varepsilon_{12} = W_S,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_2, \varepsilon_1)^T, \quad T = (T_2, \bar{T}_2, T_1).$$

Индексы  $z, s$  означают соответствующие производные по  $z$  и по  $s$ . Тогда уравнения равновесия и закон Гука запишутся в виде:

$$\begin{aligned} T_{1S} + T_{2Z} + f &= 0, \\ \varepsilon &= \Omega T, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} b & d & \bar{c} \\ \bar{d} & b & \bar{c} \\ \bar{c} & c & a \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{8}(\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} + \beta_{66}), \quad a = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22} + 2\beta_{12}), \tag{2}$$

$$d = \frac{1}{8} ((\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12} - \beta_{66}) + 2i(\beta_{16} - \beta_{26})), \quad c = \frac{1}{4} ((\beta_{11} - \beta_{22}) + i(\beta_{16} + \beta_{26})),$$

где  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(x_1, x_2)$  – приведенные упругие параметры, зависящие от координат  $(x_1, x_2)$ . Матрица  $\Omega$  – эрмитова и положительно – определенная, поскольку упругий потенциал

$$V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{4} (T_1 \varepsilon_1 + \bar{T}_2 \varepsilon_2 + T_2 \bar{\varepsilon}_2) = \frac{1}{4} T^* \Omega T, \quad (T^* = (\bar{T}_2, T_2, T_1))$$

– положительно-определенная форма. Отсюда следует, что

$$a > 0, \quad b > 0, \quad b > |d|, \quad ab > |c|^2, \quad a(b + |d|) > 2|c|^2.$$

Введем "след" от объемных сил и функцию напряжений  $U(z, s)$ :

$$\theta_1 = \int_0^{x_1} f_1(x_1, x_2) dx_1, \quad \theta_2 = \int_0^{x_2} f_2(x_1, x_2) dx_2,$$

$$U_{ZS} = T_1 + (\theta_1 + \theta_2), \quad U_{SS} = -(T_2 + \theta_1 - \theta_2).$$

Вне области компоненты объемных сил полагаются равными нулю. Тогда уравнение (1) удовлетворяется автоматически, а закон Гука запишется в виде:

$$\begin{aligned} W_S &= -bU_{SS} - dU_{ZZ} + cU_{ZS} + F, \\ \bar{W}_Z &= -dU_{SS} - bU_{ZZ} + \bar{c}U_{ZS} + \bar{F}, \\ (W_Z + W_S) &= -\bar{c}U_{SS} - cU_{ZZ} + aU_{ZS} + F_0, \\ F &= -(b + d)(\theta_1 - \theta_2) - c(\theta_1 + \theta_2), \\ F_0 &= -(c + \bar{c})(\theta_1 - \theta_2) - a(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Исключая из (3) перемещения, получим уравнение совместности деформаций в "терминах" функции напряжений

$$(aU_{ZS} - \bar{c}U_{SS} - cU_{ZZ})_{ZS} + (bU_{SS} + dU_{ZZ} - cU_{ZZ})_{ZZ} +$$



$$+ (\bar{d}U_{SS} + bU_{ZZ} - \bar{c}U_{ZS})_{SS} = F_{ZZ} + \bar{F}_{SS} - F_{0ZS}. \quad (4)$$

Исключая из (3) функцию напряжений, получим уравнение равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} & (BW_S + D\bar{W}_Z + C(W_Z + \bar{W}_S) + G)_{Z+} \\ & (+\bar{C}W_S + C\bar{W}_Z + A(W_Z + \bar{W}_S) + G_0)_S = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A, B, C, D$  – упругие модули (компоненты обратной положительно-определенной эрмитовой матрицы  $\Omega^{-1}$ ),  $G, G_0$  – вполне определенные величины от упругих модулей и объемных сил. Таким образом, если рассматривается задача в напряжениях, то используется уравнение совместности деформаций (6); если в перемещениях – уравнение равновесия (7). К ним добавляются соответствующие граничные условия.

В [5], [6] показано, что комплексный закон Гука, который связывает между собой силовые и деформационные характеристики упругого тела, является общим интегралом уравнений (6), (7). Поэтому на соотношения (3) можно смотреть, как на систему уравнений первого порядка относительно  $W, \bar{W}, U_z, U_s$ , с дополнительным условием  $U_{sz} = U_{zs}$ . Присоединив соответствующие граничные условия основных задач теории упругости, получим соответствующие краевые задачи теории квазианалитического вектора.

### 3. ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА

Будем предполагать, что упругие параметры в (3) – непрерывно дифференцируемые функции, а вид анизотропии не изменяется во всей области  $D$ , включая границу  $\Gamma$ .

В работах [5], [6] система уравнений (3) с дополнительным условием с помощью определенной замены (для каждого вида анизотропии она своя) неизвестных функций приведена к каноническому (по И.Г. Петровскому) виду

$$\chi_s - Q\chi_z = A\chi + B\bar{\chi} + F^* \equiv F^{**}(z, \chi), \quad \|Q\| < 1, \quad (6)$$

а краевые условия основных задач статики записаны как

$$\operatorname{Re}(\bar{G}_i \cdot \chi(t))|_{\Gamma} = g_i(t), \quad \det |G_i| \neq 0, \quad \chi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Т.е. имеем задачу Римана-Гильберта для квазианалитического вектора  $\chi$ . Здесь  $Q, A, B, F^*, \bar{G}_i, g_i$  – известные матрицы, причем  $Q$  – нижняя (верхняя) треугольная матрица,  $G_i(t)$  и  $g_i(t)$  – непрерывные по Гельдеру на  $\Gamma$  матрицы (условия на  $\Gamma$  можно ослабить, рассматривая их в классе суммируемых функций), а  $I$  – номер краевой задачи. Для первой краевой задачи на границе области заданы усилия, для второй – перемещения. Для третьей (смешанной) краевой задачи матрица  $G_3$  принимает соответственно значения  $G_1$  – на одной части границы и  $G_2$  на другой части границы и терпит разрыв на множестве меры нуль. Там в [5], [6] показано, что индексы краевых задач равны нулю. Отметим также, что для неоднородного изотропного и трансверсально-изотропного тела матрицы  $Q, G_i$  – постоянные, а для ортотропного тела и плоскости упругой симметрии зависят от  $(x_1, x_2)$ . Из закона Гука, а также из (8) для однородного изотропного тела следует представление общего решения в форме Колосова-Мусхелишвили. Из (8) также следует представление общего решения для однородного анизотропного тела в форме Лехницкого и типа "Лехницкого".

#### 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО ОБЛАСТИ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При исследовании краевых задач эллиптических систем  $2m$  уравнений первого порядка,  $m > 1$ , для квазианалитического вектора предварительно производят конформное отображение односвязной области на единичный круг. Такое отображение не изменяет свойств решений системы уравнений, но позволяет упростить граничные условия. Рассмотрим операторы, действующие на функциях, определенных в круге  $K$  ( $|z| < 1$ ), которые используются в дальнейшем:

$$T_0 f = -\frac{1}{\pi} \iint_K \left[ \frac{f(t)}{t-z} + \frac{z \overline{f(t)}}{1-z\bar{t}} \right] dk_t, \quad S_0 f = -\frac{1}{\pi} \iint_K \left[ \frac{f(t)}{(t-z)^2} + \frac{\overline{f(t)}}{(1-z\bar{t})^2} \right] dk_t. \quad (8)$$

Для них справедливы соотношения

$$\frac{\partial T_0 f}{\partial s} = f, \quad S_0 f = \frac{\partial T_0 f}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} T_0 (f | e^{i\gamma}) = 0 \quad \text{при} \quad z = e^{i\gamma}, \gamma \in [0, 2\pi]. \quad (9)$$

Первый из них является регулярным, а второй – сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши ( $S_0 f$  существует при  $f \in L_p(K)$ )

и  $\|S_0 f\|_{L_p} \leq \lambda_p \|f\|_{L_p}$ , где  $\lambda_p$  – ограниченная постоянная, зависящая только от  $p$ , т.е. оператор  $S_0$  является линейным и ограниченным в  $L_p(K)$ ,  $p > 1$ .  $L_p$  – пространство функций, интегрируемых в  $K$  со степенью  $p$  [1]–[3].

Поскольку индексы краевых задач равны нулю, то решение (8), (9) в круге  $|z| < 1$  ищется в виде [1], [3]:

$$\chi = \Phi + T_0 \rho, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $\Phi$  – голоморфный вектор,  $T_0$  – оператор, определяемый (8). После подстановки (10) в (6), (7), получим

$$\rho - QS_0 \rho = Q\Phi' + A(\Phi + T_0 \rho) + B(\bar{\Phi} + \overline{T_0 \rho}) + F^*, \quad (11)$$

$$\operatorname{Re}(\bar{G}_i \Phi) = g. \quad (12)$$

Для решения интегрального уравнения (11) предварительно необходимо определить голоморфный вектор, удовлетворяющий краевому условию (12). То есть решить задачу Римана-Гильберта для голоморфного вектора. В работах [5], [6] показано, что для всех видов анизотропии голоморфный вектор  $\Phi$  в круге определяется в замкнутом виде, т.е. выражается известными функциями и контурными интегралами от известных функций. Достигается это путем сведения (12) к системе контурных интегральных уравнений, которые разрешимы в явном виде.

При конформном отображении  $z = \sigma(\eta)$  односвязной области на единичный круг дифференцирование по  $z$  заменяется дифференцированием по  $\eta$ . Матрицы  $Q$  в (2) умножаются на матрицу  $\bar{\sigma}'/\sigma'I$ , а ее правая часть – на  $\bar{\sigma}'I$ . Матрицы остаются прежними. Поэтому аналитические вектора определяются в  $G_1, G_2$  в замкнутом виде и для односвязной области.

Отметим, что разработана методика решения краевых задач в классе аналитических функций с суммируемыми (а не кусочно-гельдеровскими) функциями в граничных условиях [3]. К ним относится и задача Римана-Гильберта для аналитического вектора.

Система интегральных уравнений (11) в общем случае реализуется численным методом. Она может быть реализована, например, итерационным численным методом Аширалиева-Монахова [6] с геометрической скоростью сходимости.

## 5. ОДНОРОДНОЕ АНИЗОТРОПНОЕ ТЕЛО

Покажем, что в случае однородного анизотропного упругого тела при известном конформном отображении  $z = \sigma(\eta)$  односвязной области  $\bar{D}$  на единичный круг  $K$  решения краевых задач могут быть получены в замкнутом виде.

В уравнениях равновесия (6) и соответствующих им интегральных уравнениях (11) опустим члены, содержащие объемные силы, поскольку случай действия объемных сил достаточно просто сводится к случаю их отсутствия.

Рассмотрим изотропное (трансверсально-изотропное) тело. Тогда уравнения (6) на плоскости  $\eta$  запишутся как

$$u_{\bar{\eta}} = 0, \quad v_{\bar{\eta}} - \lambda_* u_{\eta} = 0, \quad (13)$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \lambda_* \Phi'_1(\eta), \quad (14)$$

где  $\lambda_* = \bar{\sigma}'/2\sigma'$  для первой краевой задачи и  $\lambda_* = b\bar{\sigma}'/2(a+b)\sigma'$  для второй краевой задачи [5], [6].

Матрицы  $G_1, G_2$  в граничных условиях при конформном отображении не изменяются и остаются постоянными. Следовательно, голоморфный вектор  $\Phi(\eta)$  определяется квадратурой, а неизвестные плотности, как видно из (14), определяются в явном виде. Переходя от плоскости переменных  $\eta$  к плоскости переменных  $z$  по соответствующим формулам, можно записать решение первой и второй краевых задач.

В отличие от метода Н.И. Мухелишвили, в данной ситуации не требуется конформное преобразование аппроксимировать рациональными функциями и выполнять связанные с этим дополнительные процедуры.

Для однородного ортотропного тела (при плоской деформации анизотропное тело в общем случае ведет себя как ортотропное тело) система уравнений (6) в главных осях анизотропии принимает следующий вид:

$$u_S - \lambda u_Z = 0, \quad v_S - \bar{\lambda} v_Z = 0, \quad \lambda = const. \quad (15)$$

Здесь  $\lambda$  – известный корень определенного характеристического уравнения, причем  $|\lambda| < 1$  [5], [6]. С помощью замены переменных  $\eta_1 = \lambda s + z$  уравнения (15) можно записать как

$$u_{\bar{\eta}_1} = 0, \quad v_{\bar{\eta}_1} + \mu_1 v_{\eta_1} = 0, \quad \mu_1 = \frac{(\lambda - \bar{\lambda})}{1 - \bar{\lambda}^2}, \quad |\mu_1| < 1.$$

Выполняя конформное отображение области на единичный круг, определим голоморфный вектор  $\Phi$  в единичном круге по граничным условиям задачи. Возвращаясь в плоскость переменной  $z$ , получим  $u = \Phi_1(\lambda s + z)$ , где  $\Phi_1$  – известная аналитическая функция.

Теперь сделаем замену переменных  $\eta_2 = \bar{\lambda}s + z$ . Тогда (13) запишется как

$$u_{\bar{\eta}_2} + \mu_2 u_{\eta_2} = 0, \quad v_{\bar{\eta}_2} = 0, \quad \mu_2 = \frac{(\bar{\lambda} - \lambda)}{1 - \lambda^2}, \quad |\mu_2| < 1.$$

Выполним конформное отображение области  $\bar{D}(\eta_2)$  на единичный круг и определим голоморфный вектор  $\Phi$  по граничным условиям. Вновь вернемся в плоскость переменной  $z$ . Тогда  $v = \Phi_2(\bar{\lambda}s + z)$ , где  $\Phi_2$  – известная аналитическая функция. Зная компоненты вектора  $\chi = (u, v)^T$ , по соответствующим формулам определим перемещения и компоненты тензора напряжений.

Отметим, что предложенный метод решения краевых задач для однородного ортотропного тела позволяет получить решение в замкнутом виде, не прибегая к решению контурных интегральных уравнений со сдвигом.

## 6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ

Для составных упругих тел с изменяющейся по области анизотропией необходимо в каждой подобласти привести систему уравнений (3) к каноническому виду, записать условия сопряжения на границе контакта подобластей (равенство сил и перемещений), получить решения в каждой подобласти с учетом граничных условий на границе области и затем провести процедуру сшивки решения. Громоздкость этих процедур ясно показывает, что такой подход не очень удобен для практических расчетов.

Введем неизвестные функции  $u, v$ , которые связаны с перемещением  $W$  и первыми производными от функции напряжений  $U$  следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \varepsilon(\omega \cdot u - \bar{v}), & \bar{W} &= \varepsilon(\omega \cdot \bar{u} - v), \\ U_S &= \omega \cdot u + \bar{v}, & U_Z &= \omega \cdot \bar{u} + v. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\varepsilon, \omega$  – действительные, пока неопределенные постоянные. Будем рассматривать случай, когда  $c=0$  во всей области  $\bar{D}$ . Отметим, что с помощью определенных гомеоморфизмов уравнений Бельтрами [7] (квазиконформных отображений) можно обнулить упругие параметры  $c$  или  $d$  в

законе Гука (3) во всей области  $\bar{D}$  (даже для составных неоднородных анизотропных упругих сред), что позволяет упрощать дальнейшие исследования. Подставляя (16) в систему уравнений (3) и выполнив ряд несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} \chi_s - \mu_1 \chi_z - \mu_2 \bar{\chi}_s &= N, & (17) \\ \chi &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}; \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1^{12} \\ \mu_1^{21} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2^{12} \\ \mu_2^{21} & 0 \end{pmatrix}, \\ N_1 &= \frac{F_1(\varepsilon + b) - \bar{F}_1 \omega d}{\omega(\varepsilon + b)((\varepsilon + b)^2 - |d|^2)}; \quad N_2 = \frac{F_0}{(2\varepsilon + a)(\varepsilon + b)}; \\ \Delta &= \left(\varepsilon + \frac{a}{2}\right)(\varepsilon + b + d), \quad \mu_1^{12} = -\frac{\varepsilon(2\varepsilon + a)|d|}{\omega(\varepsilon + b - |d|)\Delta}; \\ \mu_1^{21} &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + b + |d|)\omega}{\Delta}; \quad \mu_2^{12} = \frac{(\varepsilon + \frac{a}{2})(\varepsilon^2 - b^2 + |d|^2)}{\omega(\varepsilon + b - |d|)\Delta}, \\ \mu_2^{21} &= \frac{\omega(\varepsilon + b + |d|)}{2\Delta}. \end{aligned}$$

Подберем  $\varepsilon, \omega$  таким образом, чтобы выполнялось условие эллиптичности системы уравнений (17):

$$\max_i \sum_{j=1}^2 |\mu_1^{ij}| + \max_i \sum_{j=1}^2 |\mu_2^{ij}| \leq \mu_0 < 1. \quad (18)$$

В реальной ситуации упругие модули и объемные силы ограничены. Положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{b - |d|}{b_{\max}}; \quad \xi_{\min} = \frac{(b - |d|)_{\min}}{b_{\max}}; \quad \omega = \frac{1}{1 + \xi_{\min}}; \\ \mu_0 &= (1 - \xi_{\min}), \quad \varepsilon = 2b_{\max}. \end{aligned}$$

Тогда условия (18) при выбранных постоянных выполняются в силу того, что

$$\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \leq \frac{1 - \xi_{\min}}{1 + \xi_{\min}} < \omega < 1.$$

Хорошо известно, что решения эллиптических систем непрерывны, т.е. не могут иметь сильные разрывы. Следовательно, на границах раздела контактных подобластей вектор  $\chi$  непрерывен и тогда в силу подстановки (16) непрерывен вектор перемещений ( $W$  ( $\bar{W}$ )) и первые производные функции напряжений  $U_S, U_Z$ . Таким образом, для системы уравнений (17) автоматически выполняются условия сшивки решений.

Граничные условия для первой и второй краевых задач записываются в виде (5) с постоянными матрицами  $\bar{G}_i$ , поэтому голоморфный вектор определяется в явном виде. Соответствующая система интегральных уравнений по области имеет вид

$$\rho - \mu_1 S_0 \rho - \mu_2 \overline{S_0 \rho} = N + \mu_1 \Phi' + \mu_2 \bar{\Phi}', \quad (19)$$

которая при численных расчетах реализуется методом последовательных приближений по схеме:

$$\rho_{n+1} - \mu_1 S_0 \rho_{n+1} - \mu_2 \overline{S_0 \rho_{n+1}} = N + \mu_1 \Phi' + \mu_2 \bar{\Phi}'$$

с геометрической скоростью сходимости.

Для общего случая анизотропии, по всей видимости, могут быть получены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области, не содержащие производных от упругих параметров. Исследование в этом направлении сопряжено со значительными выкладками и требует более "тонких" оценок. Вопрос остается пока открытым.

В работах [5], [6] доказана однозначная разрешимость краевых задач (8),(9); (17),(9) и соответствующих им интегральных уравнений (11),(19) при условии:  $Q_i, A_i, B_i, F_i^* \in W_p^1, G_i, g_i \in SW_p^1, p > 2$  и  $\mu_1, \mu_2, N \in L_{p>2}(K), c=0$ . Отметим, что для третьей краевой задачи разрывная матрица в граничном условии с помощью определенной процедуры сводится к непрерывной матрице [3].

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [6] приведены примеры решения краевых задач и проведено сравнение с известными существующими решениями, что подтвердило эффективность предлагаемого здесь метода. Получены новые классы решения краевых задач для неоднородных анизотропных сред. В работах

[8], [9] предлагаемый здесь метод перенесен на краевые задачи кручения неоднородных анизотропных сред, на плоские статические краевые задачи неоднородных изотропных сред моментной теории упругости. Метод также переносится на задачи плоского напряженного состояния. С определенными модификациями метод может быть применен для исследования задач Соммильяна и Фойгта, задач изгиба призматических тел и соответствующих задач с криволинейной анизотропией.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
- 2 Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора // *Annales Polonici Mathematici*. – 1966. – V. 17. – P. 281-320.
- 3 Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – М.: Наука, 1977. – 424 с.
- 4 Монахов В.Н. Нелинейные диффузионные процессы // *Сиб. мат. журнал*. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1082-1097.
- 5 Мартынов Н.И. Краевые задачи теории упругости неоднородной среды как краевые задачи обобщенного аналитического вектора // *Математический журнал*. – 2007. – № 3(25). – С. 69-77.
- 6 Мартынов Н.И. Интегральные уравнения плоских статических краевых задач теории упругости неоднородной анизотропной среды // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2016. – № 4. – С. 94-117.
- 7 Мартынов Н.И. Квазиконформные отображения в плоской теории упругости неоднородной анизотропной среды // *Вестник НАН РК*. – 2012. – № 5. – С. 11-18.
- 8 Алексеева Л.А., Мартынов Н.И., Федоров И.О. Применение квазиконформного отображения в задачах кручения неоднородных анизотропных тел // *Математический журнал*. – 2009. – Т. 9, № 3(33). – С. 14-18.
- 9 Martynov N.I. Integral equations of plane static boundary value problems in the moment elasticity of inhomogeneous isotropic media // *J. Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 2014. – V. 54, No. 11. – P.1725-1736.

*Статья поступила в редакцию 03.11.2016*



Martynov N.I., Ramazanova M.A. STATIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY OF NON-UNIFORM ANISOTROPIC ENVIRONMENT

Static boundary-value problems of the plane theory of elasticity of non-uniform anisotropic environment for one-coherent area are brought to Riemann-Gilbert problem of a quasianalytical vector. The corresponding singular integrated equations for its solution are received. For rather wide class of anisotropy their unique solvability is proved. In the case of a uniform anisotropic body the solutions of the first and second boundary-value problems are received in the closed form. For compound elastic media, with anisotropy (of rather wide class) changing in area, the uniquely solvable integral equations allowing to define at once generalized solutions which automatically meeting conjugated conditions at the boundaries of contact of subareas, are received.

Мартынов Н.И., Рамазанова М.А. БІРТЕКТІ ЕМЕС АНИЗОТРОПТЫ ОРТАНЫҢ СЕРПІМДІЛІГІНІҢ ЖАЗЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ СТАТИКАЛЫҚ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ

Біртекті емес анизотропты ортаның серпімділігінің жазық теориясының бірбайланысты облыс үшін статикалық шеттік есептері квазианалитикалық вектордың Риман-Гильберт есебіне келтірілген, оны шешу үшін облыс бойынша сингулярлы интегралдық сәйкес теңдеулер алынды. Анизотропияның жеткілікті түрдегі ауқымды класы үшін олардың бірімәнді шешімділігі дәлелденген. Біртекті анизотропты дене жағдайында бірінші және екінші шеттік есептердің шешімдері түйық түрде алынған. Облыс бойынша өзгермелі анизотропиясы бар (жеткілікті түрдегі ауқымды класта) құрамды серпімді орта үшін, ішкіоблыстардың түйісулерінің шекараларында түйінділік шарттарын автоматты түрде қанағаттандыратын жалпыланған шешімдерді бірден табуға мүмкіндік беретін, бірімәни шешімді интегралдық теңдеулер алынған.

**СВОЙСТВА ПОТОКОВ ГАЛАКТИЧЕСКИХ  
КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ПЕРИОД МИНИМУМА  
СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ**Г.С. Минасянц<sup>1</sup>, Т.М. Минасянц<sup>2</sup>, В.М. Томозов<sup>3</sup><sup>1,2</sup>Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова  
050020, Алматы, Казахстан, ул. Обсерватория, 23, e-mail: gennadii\_minasya@mail.ru<sup>3</sup>Институт солнечно-земной физики СО РАН  
664033, Ирутск, Россия, ул. Лермонтова, 126-а, а/я 291, e-mail: tom@iszf.irk.ru

Аннотация: Для исследования потоков солнечного ветра в течение минимума 23-го цикла активности использовались энергетические спектры ионов различных элементов, в том числе железа и кислорода. С помощью наблюдательных данных, полученных на космических аппаратах ACE, STEREO, WIND для восьми отдельных участков энергии от 0.06 до 192.39 МэВ/н, рассчитаны значения отношения Fe/O в спокойном солнечном ветре. Описаны источники энергичных частиц различной природы, определяющие физические условия в солнечном ветре в период минимума активности. Минимальные значения Fe/O в диапазоне низких энергий  $\sim 2\text{--}30$  МэВ/н хорошо объясняются влиянием аномальной компоненты космических лучей. Действие этой компоненты приводит к усилению интенсивности потоков ионов с высоким первым потенциалом ионизации – FIP (H, He, N, O), а элементы с низким FIP (C, Mg, Si, Fe), показывают ослабление потоков. Что касается ионов более высоких энергий ( $E_k > 30$  МэВ/н), то рост значений Fe/O связан с определяющим влиянием галактических космических лучей на свойства солнечного ветра в условиях минимума активности. При спокойном солнечном ветре, вблизи магнитосферы Земли присутствуют ионы галактических космических лучей с энергией 30–500 МэВ/н, имеющие относительное содержание тяжелых элементов, подобное длительным всплесковым потокам, которые образуются при высокой активности Солнца.

Ключевые слова: Галактические космические лучи, энергетические спектры ионов, FIP-эффект, относительное содержание элементов.

Keywords: *Galactic cosmic rays, energy spectra of ions, FIP effect, relative abundance of elements.*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F07.

Funding: Работа финансирована грантами МОН РК, № 0073/ПЦФ-15.

© Г.С. Минасянц, Т.М. Минасянц, В.М. Томозов, 2016.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Самые мощные процессы активности на Солнце связаны с существованием групп солнечных пятен, соединенных между собой магнитным полем в форме петель различных масштабов, которые являются основными блоками структур активных областей. Активная область занимает некоторую часть солнечной атмосферы, где плотность магнитной энергии значительно превышает ее значения в окружающей невозмущенной атмосфере. В процессе развития активной области происходит усложнение топологии ее магнитных полей, сопровождаемое ростом свободной магнитной энергии. На определенном периоде эволюции активной области при возникновении в магнитной структуре областей диссипации, токовых слоев, в ней развиваются быстротекущие процессы освобождения свободной магнитной энергии – солнечные вспышки и корональные выбросы массы (КВМ). В ходе этих процессов накопленная свободная магнитная энергия преобразуется в энергию нагрева плазмы и ускоренных до высоких энергий частиц, а также в энергию быстрых движений вещества, порождая выбросы плазмы. В результате действия этих высокоэнергичных потоков солнечного ветра в магнитосфере Земли регистрируются различного рода возмущения.

Естественно, что в структуре и свойствах солнечного ветра наблюдаются изменения, связанные с фазой солнечного цикла. Продолжительный минимум 23-го цикла активности дал возможность в течение длительного интервала времени проследить за вариациями потоков ионов различных элементов в спокойном солнечном ветре. За всю историю регулярных наблюдений Солнца с 1700 года лишь 11-й и 14-й циклы активности в стадии минимума имели более низкие значения чисел Вольфа. Декабрь 2008 года был определен, как минимум предыдущего цикла активности. Для исследования свойств потоков солнечного ветра в период минимальной активности Солнца был выбран промежуток с 1 апреля 2007 г. по 31 декабря 2009 г. За этот период в течение 669 дней на Солнце вообще отсутствовали активные области. В остальные дни на Солнце существовали лишь пятна и поры с очень небольшими площадями, которые не привели к появлению заметных возмущений в солнечном ветре.

Все представленные ниже исследования свойств потоков частиц различных энергий были проведены с помощью построения энергетических спектров ионов, в том числе для Fe и O, и вычисления с их помощью зна-

чений  $Fe/O$ . Индекс  $Fe/O$  является хорошим индикатором физического состояния изучаемой среды [1]. Величина отношения элементов  $Fe/O$  является мерой проявления, так называемого FIP-эффекта, где FIP — это величина первого ионизационного потенциала (First Ionization Potential). Суть FIP-эффекта состоит в следующем. Состав элементов в фотосфере, достаточно надежно определяемый спектроскопическими методами, является вполне однородным по всей солнечной поверхности, однако, обилия примесных элементов в структурных образованиях короны Солнца и в солнечном ветре оказываются в разной степени зависящими от величины FIP по отношению к их концентрациям в фотосфере. Установлено, что фракционирование примесных элементов по признаку FIP осуществляется в верхней области хромосферы Солнца. Элементы с низким потенциалом ионизации FIP ( $< 10$  эВ — Fe, Mg, Si, K и т.д.) легко ионизируются и выносятся под действием пондеромоторной силы альвеновских волн в верхнюю атмосферу Солнца [2], где указанные ионы способны накапливаться в замкнутых магнитных структурах. Альвеновские волны генерируются в подножиях магнитных структур под влиянием случайных движений плазмы в фотосферных слоях. Элементы с высоким потенциалом FIP ( $> 10$  эВ — C, N, O и др.) остаются нейтральными и их содержание не изменяется. Железо относится к элементам с низким первым потенциалом ионизации (FIP  $< 10$  эВ), обилия которых в верхней атмосфере Солнца повышены в несколько раз, а содержание кислорода остается близким к фотосферному обилию, поскольку его потенциал ионизации превышает 10 эВ [1]. Ранее в работах [3], [4] приводились результаты определений значений  $Fe/O$  в потоках ускоренных частиц от различных вспышек. Измерения отношения  $Fe/O$  выполнялись лишь в одном или двух интервалах энергий ионов, что оказывается недостаточным для выявления зависимости  $Fe/O$  от энергии. Поэтому важно получение количественных оценок относительного содержания  $Fe/O$  в целом ряде интервалов энергии для различных событий, что позволит выявить новые свойства потоков частиц.

## 2. ОБРАБОТКА НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Влияние аномальной компоненты космических лучей на энергетические спектры ионов, структура и свойства потоков солнечного ветра определяются двумя основными факторами: генерацией энергичных частиц на

Солнце и условиями их распространения в межпланетной среде, а также приходом галактических космических лучей (ГКЛ) в гелиосферу. Основными причинами, влияющими на изменение условий распространения малоэнергичной части ГКЛ, является количество и характер распределения магнитных неоднородностей и флуктуации магнитного поля в гелиосфере Солнца. Отсутствие активных областей на Солнце приводит к минимизации источников рассеяния ГКЛ и соответственно к усилению влияния ГКЛ. По мере роста энергии ионов железа и кислорода значения  $Fe/O$  могут последовательно характеризовать основные характеристики солнечного ветра: а) при  $E_k < 2$  МэВ/н — преобладающее влияние Солнца; б) при  $E_k > 2-30$  МэВ/н — воздействие аномальной компоненты космических лучей (АКЛ) и, наконец, в) при  $E_k > 30$  МэВ/н — влияние самих ГКЛ [5].

Для трех временных интервалов с полным отсутствием пятен в разные годы минимума цикла построены спектры энергий ионов O и Fe (Рис.1). Были использованы данные наблюдений Солнца на КА ACE (приборы ULEIS, EPAM, SIS, CRIS), WIND (*EPACT/LEMT*). Общий интервал энергии для частиц и ионов составлял (0.06 – 500) МэВ/н. Было выбрано 8 интервалов энергии со средними значениями 0.06 МэВ/н, 0.23 МэВ/н, 1.81 МэВ/н, 5.30 МэВ/н, 13.00 МэВ/н, 30.90 МэВ/н, 75.69 МэВ/н и 192.39 МэВ/н.

Спектры энергии ионов O и Fe в потоках частиц были получены с помощью опции "Multisource spectral plots of energetic particle fluxes" на сайте "OMNI Web Plus Browser". Значения энергии ионов выражены в МэВ/н и соответственно потоки — в частицах/(с·см<sup>2</sup>·стер·МэВ/н).

Рассчитанные и представленные на Рис. 1 спектры энергий ионов Fe и O для солнечного ветра в условиях отсутствия пятен на Солнце обладают некоторыми особенностями. Обычно гладкие профили спектров в наших случаях демонстрируют "аномальное" поведение с довольно существенным провалом значений для ионов Fe в диапазоне энергии 2 – 30 МэВ/н; в то же время профили спектров ионов O, напротив, не показывают спада и демонстрируют слабое усиление. При  $E_k > 30$  МэВ/н вместо обычного падения для этого интервала энергии наблюдается устойчивый рост значений потоков O и Fe благодаря влиянию галактических космических лучей.

Частицы аномальных космических лучей (АКЛ) образуются при проникновении в гелиосферу из межзвездной среды нейтральных атомов с

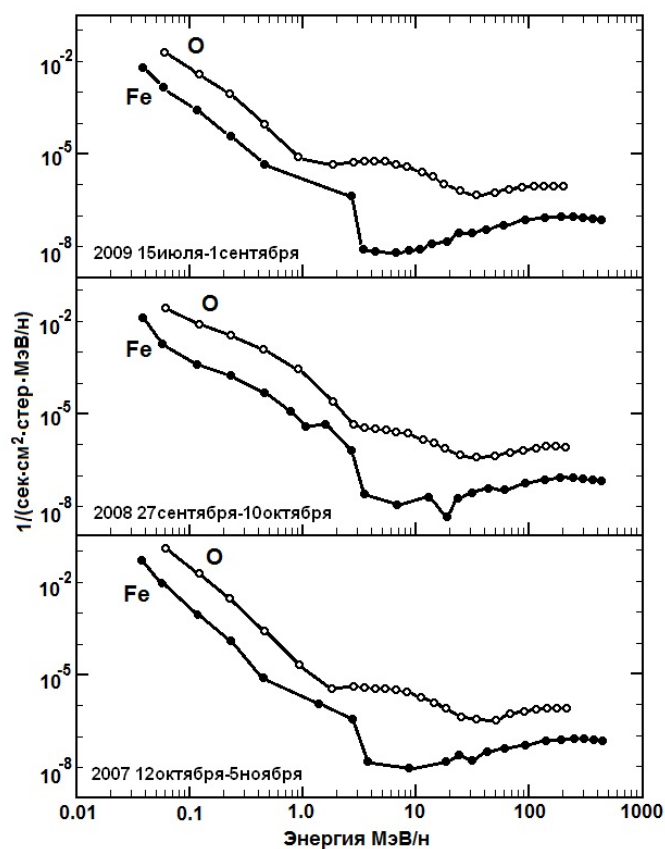


Рисунок 1 – Спектры энергии ионов кислорода и железа в солнечном ветре в интервалы времени с отсутствием активных областей на Солнце

высоким потенциалом ионизации FIP (H, He, N, O и Ne), которые ионизируются вследствие обмена зарядами с протонами солнечного ветра или под действием ультрафиолетового излучения Солнца и "захватываются" солнечным ветром [6], [7]. При приближении к Солнцу они выносятся в потоке солнечного ветра наружу и, достигнув границы гелиосферы, ускоряются на пограничной ударной волне (механизмом Ферми) до энергий  $\sim 10$  МэВ/н. Затем они могут вновь вернуться к Солнцу. Доказано, что этот

процесс может повторяться неоднократно. Отметим, что ионы элементов с низким потенциалом ГИР ионизируются уже в локальной межзвездной среде и не способны проникнуть внутрь гелиосферы. В результате действия предложенного механизма ускорения частиц АКЛ предполагается увеличение интенсивности потока элементов с высоким первым потенциалом ионизации, в том числе и кислорода. В то же время элементы с низким ионизационным потенциалом не должны показывать такого увеличения; это относится к ионам C, Mg, Si, Fe.

С использованием значений потоков ионов Fe и O было рассчитано их относительное содержание в солнечном ветре для восьми интервалов энергии в периоды отсутствия пятен (Таблица 1).

Таблица 1 – Значения Fe/O в солнечном ветре для восьми интервалов энергии в периоды отсутствия пятен на Солнце

Периоды отсутствия пятен	0.06 МэВ/н	0.23 МэВ/н	1.81 МэВ/н	5.30 МэВ/н	13.00 МэВ/н	30.90 МэВ/н	75.69 МэВ/н	192.39 МэВ/н
12.10 – 05.11.2007	0.076	0.052	0.188	0.005	0.009	0.040	0.087	0.097
27.09 – 10.10.2008	0.079	0.055	0.109	0.007	0.016	0.072	0.093	0.107
15.10 – 01.09.2009	0.075	0.045	0.152	0.001	0.005	0.048	0.086	0.099
Среднее	0.077± 0.001	0.051± 0.003	0.150± 0.023	0.004± 0.002	0.010± 0.003	0.053± 0.010	0.089± 0.002	0.101± 0.003

Влияние аномальной компоненты космических лучей приводит к низким, минимальным значениям отношения  $Fe/O = 0.004$  и  $0.010$  при энергиях ионов  $E_k = 5.3$  и  $13.0$  МэВ/н соответственно. Подчеркнем, что при появлении активных областей на Солнце ход спектров энергии для всех элементов становится подобным и показывает непрерывное быстрое падение потоков ионов, особенно при энергии в сотни МэВ/н.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОТОКОВ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

При исследовании свойств ГКЛ в представленной работе особое внимание было уделено поиску интервалов времени существования спокойного солнечного ветра с фоновыми значениями параметров. Кроме требований к выбору интервалов, изложенных в предыдущих работах [8], [9], был применен еще дополнительный, более тщательный подход. В итоге были выбраны шесть наблюдательных периодов солнечного ветра, в которых выполнялись условия не только полного отсутствия пятен на Солнце, но и влияния ускоренных потоков плазмы из корональных дыр, имеющих открытую структуру магнитных силовых линий. Также было исключено воздействие различных высокоскоростных потоков, которые образуются на границах секторов, разделяющих разнополярные области межпланетного магнитного поля при движении через них солнечного ветра. Таким образом, отсутствовало влияние различных высокоскоростных потоков ( $V_{sw} < 480$  км/с) и потоков частиц с высокими значениями плотности ( $Np < 16$  см<sup>-3</sup>). Значения усредненного вектора напряженности межпланетного магнитного поля и его вертикальной компоненты также не превышали величин, соответствующих плазме спокойного ветра. Такой тщательный учет возможных причин, приводящих к активизации потоков излучения, позволил исследовать достаточно спокойную плазму солнечного ветра. Исследования проводились не для спокойных периодов солнечной активности, а в интервалы времени отсутствия всякой активности (Таблица 1, 1-й столбец). При сведении к минимуму всех источников солнечного влияния на структуру ГКЛ появилась возможность для изучения их свойств вблизи внешних границ магнитосферы Земли. Для шести выбранных временных интервалов были построены энергетические спектры ионов тяжелых элементов и кислорода в области  $Ek = 30 - 500$  МэВ/н. На Рис. 2 приведены спектры ионов 25 июля-8 августа 2008 г. для одного из интервалов максимального присутствия галактических космических лучей в солнечном ветре. Используя значения потоков ионов, можно определить относительное содержание тяжелых элементов. Это было сделано для энергии  $Ek = 192.39$  МэВ/н, вблизи которой наблюдаются максимумы потоков тяжелых элементов ГКЛ, обладающих наибольшим относительным содержанием. Рассчитаны значения содержания восьми тяжелых элемен-



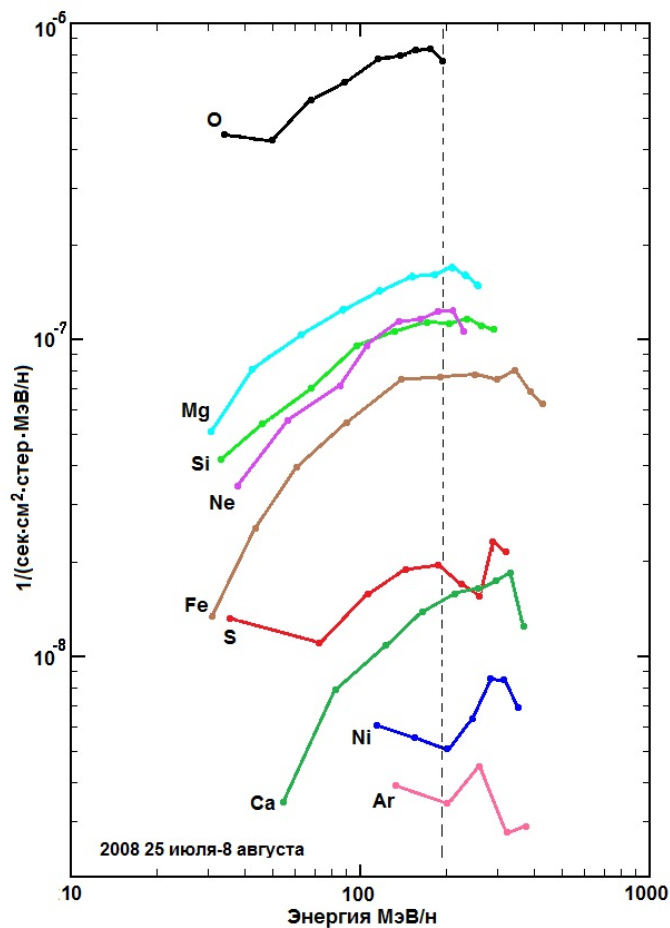


Рисунок 2 – Энергетические спектры тяжелых элементов, включая и ионы кислорода в период отсутствия активности. Значения потока солнечного ветра определяются влиянием галактических космических лучей. Вертикальная пунктирная линия соответствует энергии ионов 192.39 МэВ/н.

тов относительно обилия кислорода. В Таблице 2 представлены значения относительного содержания восьми тяжелых элементов в составе галактических космических лучей для энергии ионов 192.39 МэВ/н.

Таблица 2 – Значения содержания тяжелых элементов относительно ионов кислорода в потоках галактических космических лучей

Периоды спокойного ветра	Ne/O	Mg/O	Si/O	S/O	Ar/O	Ca/O	Fe/O	Ni/O
22.07 – 25.07.2007	0.130	0.225	0.134	0.0227	0.0106	0.0194	0.101	0.00546
13.10 – 17.10.2007	0.143	0.179	0.134	0.0212	0.00439	0.0192	0.0970	0.00454
25.07 – 08.08.2008	0.163	0.214	0.147	0.0247	0.0683	0.0193	0.100	0.00455
07.10 – 10.10.2008	0.156	0.185	0.149	0.0235	0.0113	0.0231	0.100	0.00463
10.08 – 20.08.2009	0.156	0.196	0.146	0.0207	0.00963	0.0180	0.0930	0.00412
05.09 – 13.09.2009	0.207	0.207	0.153	0.0279	0.0891	0.0174	0.104	0.00484
Среднее	0.153± 0.006	0.201± 0.007	0.144± 0.003	0.023± 0.0011	0.009± 0.00105	0.019± 0.0008	0.099± 0.0015	0.005± 0.00018

Значения относительного содержания тяжелых элементов от Ne/O до Ni/O для шести временных интервалов при энергии  $Ek = 192.39$  МэВ/н показывают очень хорошую сходимость. Ошибки определения средних значений составляют менее  $\pm 5\%$ .

В источниках ГКЛ преобладает ускорение тяжёлых ядер, а более лёгкие ядра возникают за счёт расщепления тяжёлых ядер при их взаимодействии с межзвёздным веществом. Результаты, представленные на Рис. 2, позволяют данные потоков ионов тяжелых элементов условно разделить на две группы: Ne, Mg, Si, Fe, имеющие содержание в потоках, близкое к ионам легких элементов (C и N), и S, Ar, Ca, Ni – с гораздо меньшими значениями. На Рис. 3 показано сравнение относительных содержаний тяжелых элементов в составе галактических космических лучей, в фотосфере и в потоках частиц от длительных вспышек [10]. Для удобства сравнения с разными структурными образованиями все значения содержания тяжелых элементов соотнесены к кислороду, обилие которого было принято за

1000.

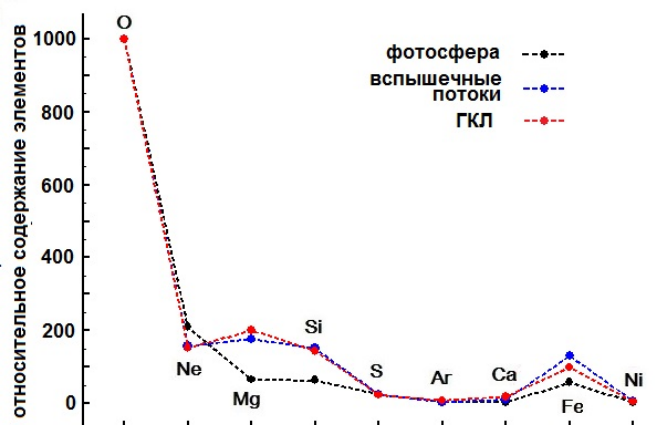


Рисунок 3 – Сопоставление относительного обилия элементов в фотосфере – ●, во вспышечных потоках – ● и в галактических космических лучах – ●

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ВЫВОДЫ

Сопоставление относительного обилия тяжелых элементов в ГКЛ и в длительных вспышечных потоках показало неплохое совпадение. В результате складывается такая картина: в минимуме солнечного цикла в условиях отсутствия активности вблизи магнитосферы Земли присутствуют ионы галактических космических лучей с энергиями (30–500 МэВ/н), имеющие относительное содержание тяжелых элементов, подобное длительным вспышечным потокам в условиях высокой активности Солнца. Что касается самого обилия, например, кислорода и железа, то данные наблюдений с КА ACE (SIS, CRIS) показывают, что при энергии ионов  $E_k \sim 200$  МэВ/н практически совпадает их количество в потоках длительных вспышек и в ГКЛ (при отсутствии пятен на Солнце). Более энергичные ионы представлены, в основном, только частицами ГКЛ. Для объяснения отсутствия заметных возмущений в магнитосфере Земли в тот период, когда вблизи ее внешней границы наблюдаются ионы высоких энергий ГКЛ, следует принять во внимание отсутствие направленных потоков солнечных частиц и усиленной напряженности магнитного поля при наличии южной

компоненты поля. При таких условиях пересоединения межпланетных и магнитосферных магнитных полей не происходит, что не позволяет частицам ГКЛ проникнуть внутрь геомагнитосферы. Далее ионы ГКЛ теряют энергию в процессе столкновений с другими частицами, в том числе и на переднем фронте магнитосферы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Томозов В.М. FIP – эффект как индикатор динамических процессов в солнечной атмосфере и межпланетной среде // Солнечно-земная физика. – 2012. – Вып. 19. – С. 19-35.
- 2 Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
- 3 Laming J.M. A unified picture of the first ionization potential and inverse first ionization potential effects // *Astrophys. J.* – 2004. – V. 614. – P. 1063-1072.
- 4 Reames D.V., Ng C.K. Heavy-element abundances in solar energetic particle events // *Astrophys. J.* – 2004. – V. 610. – P. 510-522.
- 5 Kahler S.W., Cliver E.W., Tylka A.J., Dietrich W.F. A comparison of ground level event e/p and Fe/O ratios with associated solar flare and CME characteristics // *Space Sci. Rev.* – 2011. – V. 171, Iss. 1-4. – P. 121-139.
- 6 Garrard T. L. et al. The Advanced Composition Explorer Mission // *Proc. 25th ICRC.* – 1997. – V. 1. – P. 105-108.
- 7 Fisk L.A., Kozlovsky B., Ramaty R. An interpretation of the observed oxygen and nitrogen enhancement in low energy cosmic rays // *Astrophys. J. (Lett.)*. – 1974. – V. 190. – P. 35-38.
- 8 Reames D.E. Energetic particle composition // *Solar and galactic composition: A Joint SOHO/ACE Workshop. AIP Conf. Proc.* – 2001. – V. 598. – P. 153-164.
- 9 Desai, M. I., Mason G. M., Mazur J.E., Dwyer J.R. Solar cycle variations in the composition of the suprathermal heavy-ion population near 1 AU // *Astrophys. J.* – 2006. – V. 645. – P. 81-84.
- 10 Зельдович М.А., Ишков В.Н., Логачёв Ю.И., Кечкемети К. Ионный состав потоков малоэнергичных частиц на 1 а.е. в спокойное время солнечной активности // 31-я ВККЛ. – Москва: МГУ, 2010. – С. 1-7.
- 11 Reames D.V. Element Abundances in Solar Energetic Particles and the Solar Corona // *Solar Physics.* – 2014. – V. 289, Iss. 3. – P. 977-993.

*Статья поступила в редакцию 20.11.2016*

Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M. PROPERTIES OF FLUXES OF GALACTIC COSMIC RAYS DURING MINIMUM OF SOLAR ACTIVITY

The energy spectra of ions of various elements, including iron and oxygen, were used to investigate solar wind fluxes during the minimum phase of the 23-rd activity cycle. Using observational data obtained on spacecrafts ACE, STEREO, WIND for eight different intervals of energy from 0.06 up to 192.39 MeV/n values of ratio Fe/O in a quiet solar wind are calculated. The energetic particle sources of a different origin which determine physical conditions in a solar wind during period of minimum activity are described. The minimum values of Fe/O ratio in a low energy region 2-30 MeV/n are quite well explained by anomalous component cosmic rays (CR) influence. The anomalous CR component effect leads to enhanced flux intensity of ions with high first ionization potential FIP (H, He, N and O) while elements with a low FIP (C, Mg, Si and Fe) show a flux attenuation. As for ions of higher energy ( $Ek > 30$  MeV/n), the increase of the Fe/O ratio is due to major influence of galactic cosmic rays on solar wind characteristics for the minimum activity conditions. In a quiet solar wind near the Earth's magnetosphere there exist ions of galactic cosmic rays with energies of 30-500 MeV/n having the relative abundance of heavy elements, similar to gradual flare fluxes that are formed during high solar activity.

Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М. КҮННІҢ БЕЛСЕН-  
ДІЛІК МИНИМУМЫ КЕЗЕҢІНДЕГІ ҒАЛАКТИКАЛЫҚ ҒАРЫШ СӘУ-  
ЛЕЛЕРІНІҢ АҒЫНЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Белсенділіктің 23-ші циклының минимумы кезеңіндегі күн желінің ағындарын зерттеуге әртүрлі элементтердің, оның ішінде темір мен оттегінің, иондарының энергиялық спектрлері қолданылды. ACE, STEREO, WIND ғарыш аппараттары арқылы алынған 0.06 дан 192.39 МэВ/н дейінгі сегіз дербес энергия бөліктері үшін бақылау мәліметтері көмегімен тыныштықтағы күн желіндегі Fe/O қатынасының мәні есептелген. Белсенділіктің минимумы кезеңіндегі күн желінің физикалық шарттарын анықтайтын, табиғаты әртүрлі энергиялық бөлшектердің шығу көздері сипатталған. Төменгі энергиялардың  $\sim 2 - 30$  МэВ/н диапазонындағы Fe/O минималды мәні ғарыш сәулелерінің аномальды құраушысының ықпалы арқылы жақсы түсіндіріледі. Бұл құраушының әрекеті FIP (H, He, N, O) – жоғарғы бірінші иондалу потенциалының иондар ағынының қарқындылығының күшейуіне әкелсе, ал FIP (C, Mg, Si, Fe) төмен болатын элементтер ағындардың әлсіреуіне әкеледі. Өте жоғарғы энергиялы ( $E_k > 30$  МэВ/н) иондарға қатысты айтар болса, Fe/O мәнінің өсуі белсенділіктің минимумы шарттарында күн желінің қасиеттеріне галактикалық ғарыштық сәулелердің айқындаушы әсерімен байланысты болады. Тыныш күн желі кезінде, Жер магнитосферасы маңында энергиясы 30-500 МэВ/н болатын галактикалық ғарыш сәулелерінің иондары болады, олар Күннің жоғарғы белсенділігі кезінде пайда болатын ұзақ жарқырауыштық ағындарға тән, салыстырмалы түрде ауыр элементтерді қамтиды.

**INVERTIBLE MULTI-DIMENSIONAL  
INTERPRETATIONS VERSUS VIRTUAL  
ISOMORPHISMS OF FIRST-ORDER THEORIES**

M.G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
050010, Almaty, Pushkin str. 125, e-mail: peretyatkin@math.kz

Annotation: In this work, we find a presentation of arbitrary invertible multi-dimensional quotient interpretations via the operation of a Cartesian-quotient extension of a theory and the relation of an algebraic isomorphism of theories. Similar decomposition takes place also for the versions without quotients. It is shown that the class of invertible multi-dimensional quotient interpretations exactly coincides with the class of virtual quotient isomorphisms of theories. Furthermore, the class of invertible multi-dimensional interpretations coincides with the class of virtual isomorphism of theories. A number of first-order properties of the operation of a Cartesian-quotient extension of a theory is studied that are immediately transferred to the class of invertible multi-dimensional interpretations.

Keywords: First-order logic, incomplete theory, virtual isomorphism of theories, Cartesian extension of a theory, multi-dimensional interpretation.

A regular presentation of multi-dimensional quotient interpretations in the class of Cartesian-quotient extensions of theories is described allowing us to transform definite properties from the latter class on the former one. The work [1] uses the concept of a multi-dimensional quotient interpretation to construct computable isomorphisms between the predicate calculi of finite rich signatures. In [2], the same problem is studied using a construction based on the finite-to-finite signature reduction procedures representing a particular case of the operation of a Cartesian extension of a theory. The obtained presentation gives us a possibility to compare main results of the works [1], [2], and some others in this direction.

---

Keywords: *Логика первого порядка, неполная теория, виртуальный изоморфизм теорий, декартово расширение теории, мультиразмерностная интерпретация.*

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10.

Funding: The work was supported by grant (0665/GF4) of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2015-2017).

© M.G. Peretyat'kin, 2016.

## PRELIMINARIES

We consider theories in first-order predicate logic *with equality* and use general concepts of model theory, algorithm theory, constructive models, and Boolean algebras that can be found in [3], [4], [5], [6]. Special concepts used in this paper are found in [7]. Generally, *incomplete theories* are considered. In the work, the signatures are considered only, which admit Gödel's numbering of the formulas. Such a signature is called *enumerable*. Normally, the notion of first-order definability is considered in model theory. Along with this, there is a thinner concept of first-order  $\exists \cap \forall$ -definability, that is, presentability via formulas that are equivalent to both an  $\exists$ -formula and a  $\forall$ -formula in the theory. The following notations are used:  $FL(\sigma)$  is the set of all formulas of signature  $\sigma$ ,  $FL_k(\sigma)$  is the set of all formulas of signature  $\sigma$  with free variables  $x_0, \dots, x_{k-1}$ ,  $SL(\sigma)$  is the set of all sentences (i.e., closed formulas) of signature  $\sigma$ .

Theories  $T$  and  $S$  of signatures  $\tau$  and  $\sigma$  such that  $\tau \cap \sigma = \emptyset$  are called *first-order  $\exists \cap \forall$ -equivalent* or *algebraically isomorphic*, written as  $T \approx_a S$ , if there is a theory  $H$  of signature  $\tau \cup \sigma$  such that  $T = H \upharpoonright \tau$ ,  $S = H \upharpoonright \sigma$ ; moreover,  $\sigma$ -symbols are  $\exists \cap \forall$ -definable in  $H$  relative to  $\tau$ -symbols via an effective scheme of expressions, while  $\tau$ -symbols are  $\exists \cap \forall$ -definable in  $H$  relative to  $\sigma$ -symbols via an effective scheme of expressions. The theories  $T$  and  $S$  are called *first-order equivalent* or *isomorphic*, written as  $T \approx S$ , if similar relations are satisfied with normal first-order definability instead of  $\exists \cap \forall$ -definability. It is obvious that  $T \approx_a S \Rightarrow T \approx S$ , for all theories  $T$  and  $S$ .

For a signature  $\sigma$  and a unary predicate  $U^1 \notin \sigma$ , the claim "outside of  $U(x)$  all  $\sigma$ -symbols are defined trivially" means the following set of formulas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \neg U(x_i) \rightarrow \neg P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad P^n \in \sigma, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \text{(b)} \quad & \neg U(x_j) \rightarrow f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) = x_1, \quad f^m \in \sigma, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned} \quad (0.1)$$

## 1. INTERPRETATIONS FOR FINITARY FIRST-ORDER COMBINATORICS

We specify a normal (simplest) concept of an *interpretation* of theory  $T_0$  in the region  $U(x)$  of theory  $T_1$ , cf. [8]. An interpretation  $I : T_0 \rightarrow T_1$  is defined by a mapping from signature symbols of theory  $T_0$  into formulas of theory  $T_1$ . The mapping must preserve the number of free variables restricting these variables in the region  $U(x)$ . An  $n$ -ary predicate is mapped into a formula with



$n$  free variables, an  $n$ -ary function into a formula with  $n+1$  free variables, while a constant into a formula with one free variable. Inductively, the pointed out mapping is expanded up to a mapping  $I : FL(\sigma_0) \rightarrow FL(\sigma_1)$ . An interpretation  $I$  is said to be *effective* if transformation  $\varphi \mapsto I(\varphi)$  is defined by a computable function in Gödel numbers. Any interpretation  $I$  has to satisfy the following conditions for all  $\varphi \in SL(\sigma_0)$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & T_1 \vdash (\exists x)U(x), \\ \text{(b)} \quad & T_0 \vdash \varphi \Rightarrow T_1 \vdash I(\varphi). \end{aligned} \tag{1.1}$$

An interpretation  $I$  is said to be *faithful* if the following extra condition takes place for all  $\varphi \in SL(\sigma_0)$ :

$$T_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow T_1 \vdash I(\varphi). \tag{1.2}$$

Let  $I$  be an interpretation of theory  $T_0$  of signature  $\sigma_0$  in the region  $U(x)$  of theory  $T_1$ , and  $\mathfrak{M}$  be an arbitrary model of theory  $T_1$ . By virtue of the interpretation  $I$ , it is possible to determine all predicates, functions, and constants of signature  $\sigma_0$  in the first-order definable set  $U(\mathfrak{M})$  obtaining a model

$$\mathfrak{N} = \langle U(\mathfrak{M}), \sigma_0 \rangle, \tag{1.3}$$

that is said to be the *model kernel* of  $\mathfrak{M}$  with respect to  $I$ , using the notation  $\mathfrak{N} = \mathbb{K}_I(\mathfrak{M})$ , or a short notation  $\mathfrak{N} = \mathbb{K}(\mathfrak{M})$ , when  $I$  is clear from context. It is possible to check that the following natural condition

$$\text{Mod}(T_0) = \{\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)\} \tag{1.4}$$

is stronger than (1.2). Interpretation  $I$  is called *model-free* if (1.4) is satisfied.

LEMMA 1.1. *Let  $I$  be an interpretation of theory  $T_0$  in theory  $T_1$ , and  $J$  be an interpretation of theory  $T_1$  in theory  $T_2$ . Then,  $J \circ I$  is an interpretation of theory  $T_0$  in theory  $T_2$ .*

PROOF. By immediate checking.  $\square$

An interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in theory  $T_1$  is said to be *isostone*, if (1.2) takes place; moreover, the following condition is satisfied:

$$\mathbb{K}(\mathfrak{M}_0) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}_1) \Rightarrow \mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}_1, \text{ for all } \mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1 \in \text{Mod}(T_1). \tag{1.5}$$

Give a few equivalent reformulations of the requirement (1.5).

LEMMA 1.2. *Let  $I$  be an interpretation of theory  $T_0$  of signature  $\sigma_0$  in theory  $T_1$ . The following assertions are equivalent:*

- (a)  $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ , for all  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$ ,
- (b)  $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \equiv \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Leftrightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ , for all  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$ ,
- (c)  $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \cong \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ , for all  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$ ,
- (d) the set  $\{I(\varphi) \mid \varphi \in SL(\sigma_0)\}$  is a generating set for the Tarski-Lindenbaum algebra  $\mathcal{L}(T_1)$ .

PROOF. Cf. Lemma 5.2.2 in [9]. □

Consider principal properties of isostone interpretations.

LEMMA 1.3. *Let  $I$  be an isostone interpretation of theory  $T_0$  of signature  $\sigma_0$  in theory  $T_1$ . Then, the mapping  $\mu$  from  $\mathcal{L}(T_0)$  into  $\mathcal{L}(T_1)$  defined by the rule*

$$\mu([\varphi]_{T_0}) = [I(\varphi)]_{T_1}, \quad \varphi \in SL(\sigma_0), \tag{1.6}$$

*is an isomorphism between these Tarski-Lindenbaum algebras. Moreover, if  $I$  is effective, the rule (1.6) defines a computable isomorphism  $\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$  between the Tarski-Lindenbaum algebras of theories  $T$  and  $S$ .*

PROOF. Conditions (1.2) and (1.5) for  $I$  ensure that the mapping  $\mu$  is an isomorphic embedding of  $\mathcal{L}(T_0)$  into  $\mathcal{L}(T_1)$ . By Lemma 1.2 (a,d), the set  $\{I(\varphi) \mid \varphi \in SL(\sigma_0)\}$  is a generating set for the Tarski-Lindenbaum algebra  $\mathcal{L}(T_1)$ . Thus,  $\mu$  is a mapping "onto". Therefore, it is an isomorphism. It is a computable isomorphism whenever  $I$  is effective. □

An interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in the region  $U(x)$  of theory  $T_1$  is said to be *auto-free*, if the following condition is satisfied:

$$(\forall \mathfrak{M} \in \text{Mod}T_1) (\forall \mu \in \text{Aut}\mathbb{K}(\mathfrak{M})) (\exists \mu^* \in \text{Aut}\mathfrak{M}) [\mu = \mu^* \upharpoonright U(\mathfrak{M})]. \tag{1.7}$$

Give an important technical fact.

LEMMA 1.4. *Let  $I$  be an isostone interpretation of theory  $T_0$  of signature  $\sigma_0$  in the region  $U(x)$  of theory  $T_1$  of signature  $\sigma_1$ , such that,  $I$  is an auto-free interpretation. Let  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  be a formula of signature  $\sigma_1$  such that*

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow U(x_1) \& \dots \& U(x_n).$$

Then, there is a formula  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  of signature  $\sigma_0$  such that

$$T_1 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow I\psi(x_1, \dots, x_n).$$

PROOF. Given a formula  $\varphi(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , of signature  $\sigma_1$  satisfying in theory  $T_1$  the following condition

$$\varphi(\bar{x}) \rightarrow \bar{x} \subseteq U. \quad (1.8)$$

Suppose that there is a type  $p(\bar{x})$  in a complete extension  $T'$  of theory  $T_0$ , such that  $T_1 \cup Ip(\bar{x}) \not\vdash \varphi(\bar{x})$  and  $T_1 \cup Ip(\bar{x}) \not\vdash \neg\varphi(\bar{x})$ ; in particular, both sets  $Ip(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$  and  $Ip(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$  are consistent with  $T_1$ . The set  $p(\bar{x})$  is a complete type in  $T_0$ . Therefore, each sentence  $\Phi$  of signature  $\sigma$  or its negation  $\neg\Phi$  must belong to  $p(\bar{x})$ . Since interpretation  $I$  is isostone,  $I$ -image of  $p(\bar{x})$  generates a complete theory  $T''$  extending the theory  $T_1$ ; i.e., any sentence of signature  $\sigma_1$  or its negation is provable from the set of formulas  $Ip(\bar{x})$ . By assumption, both sets  $Ip(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$  and  $Ip(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$  are consistent with complete theory  $T_1$ . Hence, in theory  $T_1$ , there are complete types  $q_1(\bar{x})$  and  $q_2(\bar{x})$ , such that  $q_1(\bar{x})$  extends  $Ip(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ , and  $q_2(\bar{x})$  extends  $Ip(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ . Consider a countable homogeneous model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T_1$  that realizes both types  $q_1(\bar{x})$  and  $q_2(\bar{x})$  on tuples, respectively,  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$ . By conditions, the tuples  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$  are located in the kernel region  $U(\bar{x})$  and realize the same type  $p(\bar{x})$  in theory  $\text{Th}\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ . Since the model  $\mathfrak{M}$  is homogeneous, its kernel  $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$  is also homogeneous. Since  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$  realize the same type in  $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ , there is an automorphism  $\mu : \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M})$  that maps  $\bar{c}_1$  into  $\bar{c}_2$ . This contradicts our assumptions because no automorphism  $\mu^* : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  extending  $\mu$  can exist since  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$  realize different types  $q_1(\bar{x})$  and  $q_2(\bar{x})$  in theory  $\text{Th}\mathfrak{M}$ . This shows that our assumption cannot take place; thus, the converse statement must be true; i.e., for any formula  $\varphi(\bar{x})$  satisfying (1.8) and any complete type  $p(\bar{x})$  of theory  $T_0$  either  $T_1 \cup Ip(\bar{x}) \vdash \varphi(\bar{x})$  or  $T_1 \cup Ip(\bar{x}) \vdash \neg\varphi(\bar{x})$  must hold. In the first case, we can find a formula  $\theta(\bar{x})$  in type  $p(\bar{x})$  such that  $T_1 \cup \{I\theta(\bar{x})\} \vdash \varphi(\bar{x})$ , while in the second case, we can find a formula  $\lambda(\bar{x})$  in the type  $p(\bar{x})$ , such that  $T_1 \cup \{I\lambda(\bar{x})\} \vdash \neg\varphi(\bar{x})$ .

By applying a standard construction based on application of the Maltsev Compactness Theorem, we can find finite sets of formulas  $\{\theta_0(\bar{x}), \dots, \theta_k(\bar{x})\}$

and  $\{\lambda_0(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})\}$  of signature  $\sigma_0$  such that

$$\begin{aligned} T_1 \vdash I\theta_0(\bar{x}) \vee \dots \vee I\theta_k(\bar{x}) &\rightarrow \varphi(\bar{x}), \\ T_1 \vdash I\lambda_0(\bar{x}) \vee \dots \vee I\lambda_t(\bar{x}) &\rightarrow \neg\varphi(\bar{x}), \\ T_1 \vdash (\forall \bar{x}) [I\theta_0(\bar{x}) \vee \dots \vee I\theta_k(\bar{x}) &\vee I\lambda_0(\bar{x}) \vee \dots \vee I\lambda_t(\bar{x})]. \end{aligned}$$

Thereby, by putting  $\theta(\bar{x}) = \theta_0(\bar{x}) \vee \dots \vee \theta_k(\bar{x})$ , we obtain the required relation  $T_1 \vdash I\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})$ .  $\square$

An interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in theory  $T_1$  is called *model-bijective*, if the following relations are held:

Reference\_Block (1.9)

- (a)  $\text{Mod}(T_0) = \{\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)\}$ ,
- (b)  $\mathbb{K}(\mathfrak{M}) \cong \mathbb{K}(\mathfrak{M}') \Rightarrow \mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ , for all  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \text{Mod}(T_1)$ .

End\_Ref

Consider simple properties of this class of interpretations.

LEMMA 1.5. *Let  $I$  be a model-bijective interpretation of theory  $T_0$  in theory  $T_1$ . Then,  $I$  is faithful, model-free and isostone. Moreover, the following assertions hold:*

- (a)  $\|\mathbb{K}(\mathfrak{M})\| < \omega \Leftrightarrow \|\mathfrak{M}\| < \omega$ , for all  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$ ,
- (b)  $\|\mathbb{K}(\mathfrak{M})\| = \|\mathfrak{M}\|$ , for any infinite model  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$ .

PROOF. Condition (1.9)(a) establishes (1.4) ensuring also the weaker demand (1.2), while (1.9)(b) together with Lemma 1.2 (a,c) provide condition (1.5). Thus,  $I$  is faithful, model-free and isostone. Claims (a) and (b) follow from the fact that interpretation  $I$  is model-bijective ensuring that the region  $U(x)$  of the interpretation is a non-two-cardinal in  $T_1$  formula.  $\square$

Consider a common statement concerning compositions.

LEMMA 1.6. *Let  $I : T_0 \rightarrow T_1$  and  $J : T_1 \rightarrow T_2$  be interpretations. If both  $I$  and  $J$  are model-bijective or isostone interpretations, their composition  $J \circ I : T_0 \rightarrow T_2$  is also model-bijective or, respectively, isostone.*

PROOF. Immediately.  $\square$

## 2. CARTESIAN-TYPE INTERPRETATIONS

Given a signature  $\sigma$  and a finite sequence of formulas of this signature of either of the following forms:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varkappa &= \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_s^{m_s} \rangle, \\ \text{(b)} \quad \varkappa &= \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \dots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where  $\varphi_k$  is a formula with  $m_k$  free variables,  $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$  is a formula with  $2m_k$  free variables such that  $\text{Len } \bar{y}_k = \text{Len } \bar{z}_k = m_k$ ; moreover, (2.1)(a) is just a simpler notation instead of the common entry (2.1)(b) in the case when  $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$  coincides with  $\bar{y}_k = \bar{z}_k$  for all  $k \leq s$ .

Starting from a model  $\mathfrak{M}$  of signature  $\sigma$  together with a tuple  $\varkappa$  of any of the forms (2.1)(a,b), we are going to construct a new model  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$  of signature

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{U^1, U_1^1, U_2^1, \dots, U_s^1\} \cup \{K_1^{m_1+1}, \dots, K_s^{m_s+1}\} \quad (2.2)$$

as follows. As the universe, we take

$$|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s,$$

where all specified parts are pairwise disjoint sets. On the set  $|\mathfrak{M}|$ , all symbols of signature  $\sigma$  are defined exactly as they were defined in  $\mathfrak{M}$ ; in the remainder, they are defined trivially; predicate  $U(x)$  distinguishes  $|\mathfrak{M}|$ ; predicate  $U_k(x)$  distinguishes  $A_k$ ; the other predicates are defined by specific rules depending on the case. In the case (2.1)(a), each predicate  $K_k$  in (2.2) should be defined so that it would represent a one-to-one correspondence between the set of tuples  $\{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}$  and the set  $A_k = U_k(\mathfrak{M}_1)$ . Turn to the most common case (2.1)(b). Denote by  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  a sentence stating that  $\varepsilon_k$  is an equivalence relation on the set of tuples distinguished by the formula  $\varphi_k(\bar{x})$  in  $\mathfrak{M}$ . In this case,  $(m_k + 1)$ -ary predicate  $K_k$  should be defined so that it would represent a one-to-one correspondence between the quotient set  $\{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}/\varepsilon'_k$  and the set  $U_k(\mathfrak{M}_1)$ , where

$$\varepsilon'_k(\bar{y}, \bar{z}) = \varepsilon_k(\bar{y}, \bar{z}) \vee \neg \text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k). \quad (2.3)$$

Notice that, the aim of replacement of  $\varepsilon_k$  by  $\varepsilon'_k$  using  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  is to provide total definiteness of the operation of an extension  $\mathfrak{M}\langle \varkappa \rangle$  independently

of whether the formulas  $\varepsilon_k$  represent equivalence relations in corresponding domains or not. In the case (2.1)(b), the model  $\mathfrak{M}\langle\mathfrak{x}\rangle$  is said to be a *Cartesian-quotient extension of  $\mathfrak{M}$* , while in the case (2.1)(a), the model  $\mathfrak{M}\langle\mathfrak{x}\rangle$  is said to be a *Cartesian extension of  $\mathfrak{M}$  by a sequence of formulas  $\mathfrak{x}$* .

Expand the operation of an extension (initially defined for models) on theories. Given a theory  $T$  and a tuple  $\mathfrak{x}$  of the form (2.1). Using a fixed signature (2.2) for extensions of models, we define a new theory  $T' = T\langle\mathfrak{x}\rangle$  as follows

$$T' = \text{Th}(K), \quad K = \{\mathfrak{M}\langle\mathfrak{x}\rangle \mid \mathfrak{M} \in \text{Mod}(T)\}.$$

In the case (2.1)(b) it is called a *Cartesian-quotient extension of  $T$* , while in the case (2.1)(a) it is called a *Cartesian extension of  $T$  by a sequence  $\mathfrak{x}$* .

Normally, we consider passages  $T \mapsto T\langle\mathfrak{x}\rangle$  for which the sequence (2.1) satisfies the following technical condition:

$$(\forall k \leq s) [ \text{both } \varphi_k(\bar{x}_k) \text{ and } \varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k) \text{ are } \exists \cap \forall\text{-presentable in } T ], \quad (2.4)$$

although, in definite situations, we also accept the following extra demand:

$$\text{formulas } \varepsilon'_i(\bar{x}, \bar{y}), \quad i = 1, 2, \dots, s, \text{ are } \exists \cap \forall\text{-presentable in } T. \quad (2.5)$$

Denote by  $\mathcal{KC}(\sigma)$  and  $\mathcal{KD}(\sigma)$  the sets of tuples of formulas of signature  $\sigma$  of the forms, respectively, (2.1)(a) and (2.1)(b), while  $\mathcal{KC}$  and  $\mathcal{KD}$  are unions of the pointed out sets for all possible (enumerable) signatures  $\sigma$ . We denote by  $\mathcal{KC}_{\exists \cap \forall}$  the set of all tuples (2.1)(a) satisfying (2.4). Furthermore,  $\mathcal{KD}_{\exists \cap \forall}^\varepsilon$  is the set of all tuples (2.1)(b) satisfying (2.4), while  $\mathcal{KD}_{\exists \cap \forall}^{\varepsilon, \varepsilon'}$  is the set of all tuples (2.1)(b) satisfying both (2.4) and (2.5).

The following claim allows us to pass from  $\forall \cap \exists$ -definability in a theory  $T$  to a more fundamental concept of  $\exists \cap \forall$ -definability in predicate calculus of corresponding signature  $\sigma$ .

LEMMA 2.1. *Let  $T$  be a theory of signature  $\sigma$  and  $\varphi(\bar{x}) \in FL(\sigma)$  be a formula that is  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T$ . There is a formula  $\psi(\bar{x}) \in FL(\sigma)$  such that  $T \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$  and  $\psi(\bar{x})$  is  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $PC(\sigma)$ .*

PROOF. Immediately. □

In theory  $T\langle\mathfrak{x}\rangle$ , the region  $U(x)$  represents a model of theory  $T$ . Particularly, the transformation  $T \mapsto T\langle\mathfrak{x}\rangle$  defines a natural interpretation

$I_{T,\varkappa}$  of the source theory  $T$  in the target theory  $T\langle\varkappa\rangle$ . It is called a *special Cartesian-quotient* interpretation. Similar definition applies to the other case of the tuple  $\varkappa$ ; thereby, the concept of a *special Cartesian* interpretation is also defined.

We mention some properties of special Cartesian-quotient interpretations.

LEMMA 2.2. *Given a theory  $T$  of an enumerable signature  $\sigma$  and a sequence of formulas  $\varkappa \in \mathcal{KD}(\sigma)$ . Special Cartesian-quotient interpretation  $I_{T,\varkappa} : T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$  is effective, faithful, auto-free, model-bijective, and isostone. In particular, interpretation  $I_{T,\varkappa}$  determines a computable isomorphism  $\mu_{T,\varkappa} : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(T\langle\varkappa\rangle)$  between the Tarski-Lindenbaum algebras.*

PROOF. Construction of a Cartesian-quotient extension provides that interpretation  $I_{T,\varkappa}$  is effective, auto-free, and model-bijective. By applying Lemma 1.5 together with Lemma 1.3, we obtain the other demanded properties.  $\square$

Now, we pass to a class of interpretations of a more common form.

An interpretation  $J$  of a theory  $T$  in a theory  $S$  is called *Cartesian-quotient* if, up to an algebraic isomorphism of theories, it looks like  $I_{T,\varkappa} : T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ ; in other words, there is an algebraic isomorphism of theories  $E : T\langle\varkappa\rangle \mapsto S$  such that  $J = E \circ I_{T,\varkappa}$ ; i.e., the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{J} & S \\ & \searrow I_{T,\varkappa} & \nearrow E \\ & & T\langle\varkappa\rangle \end{array}$$

Similar definition also applies to the concept of a *Cartesian interpretation*.

LEMMA 2.3. *Any Cartesian-quotient interpretation  $J : T \mapsto S$  is effective, auto-free, model-bijective, and isostone; moreover,  $J$  determines a computable isomorphism  $\mu_J : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S)$  between the Tarski-Lindenbaum algebras.*

PROOF. By applying Lemma 2.2.  $\square$

Study some combinatorial properties of Cartesian-type interpretations.

LEMMA 2.4. [Combinatorial Lemma for finitary first-order combinatorics] *Given a theory  $T$  of signature  $\sigma$  and a sequence  $\varkappa$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}(\sigma)$ . Let  $\sigma'$  be the signature of theory  $T\langle\varkappa\rangle$ . The following claims hold, where all transformations are effective in Gödel numbers of signatures and sequences of formulas:*

- (a) For any  $\varkappa'$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}(\sigma)$ , there is  $\varkappa''$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}(\sigma')$  such that the following algebraic isomorphism takes place:

$$T\langle \varkappa \hat{\ } \varkappa' \rangle \approx_a (T\langle \varkappa \rangle)\langle \varkappa'' \rangle. \quad (2.6)$$

- (b) For any  $\varkappa''$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}(\sigma')$ , there is  $\varkappa'$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}(\sigma)$  such that the algebraic isomorphism (2.6) takes place.
- (c) The same statements take place for the more common case of Cartesian-quotient extensions with the following changes:
- ( $\alpha$ ) just model isomorphism  $\approx$  stands in (2.6) for the tuples in  $\mathcal{KD}$ ,
  - ( $\beta$ ) algebraic isomorphism  $\approx_a$  remains in (2.6) for the tuples in  $\mathcal{KD}_{\exists\forall}^\varepsilon$ , provided that, these passages are applied for complete theories only.

PROOF. (a,b) Immediately, by applying a routine construction based on expressive possibilities of first-order logic. (c) The member  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  in (2.3) has a negative influence on the quantifier prefixes within (2.6). As for the case of complete theories, we have that any occurrence of  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  is reduced to either **true** or **false**, thus, preventing negative influence of the quantifier prefixes of the members with  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$ .  $\square$

LEMMA 2.5. *The following relation defined on the class of all theories*

$$T \approx_a S \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \varkappa' \varkappa'' \in \mathcal{KC}_{\exists\forall}) [ T\langle \varkappa' \rangle \approx_a S\langle \varkappa'' \rangle ] \quad (2.7)$$

*is reflexive, symmetric, and transitive (i.e., it is an equivalence relation).*

PROOF. Obviously,  $\approx_a$  is both reflexive and symmetric. Now, suppose that  $T \approx_a H$  and  $H \approx_a S$ . By definition, there are tuples  $\xi_i \in \mathcal{KC}_{\exists\forall}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , such that  $T\langle \xi_1 \rangle \approx_a H\langle \xi_2 \rangle$  and  $H\langle \xi_3 \rangle \approx_a S\langle \xi_4 \rangle$ . By applying Lemma 2.4(a,b), we can find tuples  $\xi'_2$  and  $\xi'_3$  in  $\mathcal{KC}_{\exists\forall}$  such that the following isomorphisms take place:

$$T\langle \xi_1 \hat{\ } \xi'_3 \rangle \approx_a H\langle \xi_2 \hat{\ } \xi'_3 \rangle \approx_a H\langle \xi_3 \hat{\ } \xi_2 \rangle \approx_a S\langle \xi_4 \hat{\ } \xi'_2 \rangle.$$

Thereby, we obtain  $T \approx_a S$  ensuring the transitivity property.  $\square$

REMARK 2.6. By virtue of Lemma 2.4(c. $\beta$ ), the following relation defined on the class of all *complete theories* is reflexive, symmetric, and transitive:

$$T \approx_a S \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \varkappa' \varkappa'' \in \mathcal{KD}_{\exists\forall}^\varepsilon) [ T\langle \varkappa' \rangle \approx_a S\langle \varkappa'' \rangle ]. \quad (2.8)$$



## 3. FIRST-ORDER PROPERTIES OF CARTESIAN-TYPE INTERPRETATIONS

In this section, we fix a theory  $T$ , a tuple  $\varkappa$  of the form (2.1)(a) or (2.1)(b) satisfying (2.4), and a signature (2.2) for the operation  $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$  of a Cartesian-quotient extension of a theory. Our purpose is to study first-order properties of the operation  $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ .

By Lemma 2.2, the interpretation  $I_{T,\varkappa}$  is auto-free, model-bijective, and isostone. Moreover, we have the following property:

*the mapping  $\mathfrak{N} \mapsto \mathfrak{N}\langle\varkappa\rangle$  is a one-to-one correspondance between isomorphism types of the models of theories  $T$  and  $T\langle\varkappa\rangle$ .* (3.1)

We study types of quantifier prefixes of the formulas involved.

LEMMA 3.1. *The following estimates of the quantifier prefix take place for all  $k$  satisfying  $1 \leq k \leq s$ :*

- (a)  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$  is an  $\exists$ -formula in theory  $T$ ,
- (b)  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$  is  $\exists \cap \forall$ -presentable whenever the sentence  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  is either identically true or identically false in theory  $T$ .

PROOF. (a) By definition,  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  is a conjunction of the formulas:

- (a)  $(\forall \bar{x})[\varphi_k(\bar{x}) \rightarrow \varepsilon_k(\bar{x}, \bar{x})]$ ,
- (b)  $(\forall \bar{x}\bar{y})[\varphi_k(\bar{x}) \& \varphi_k(\bar{y}) \& \varepsilon_k(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \varepsilon_k(\bar{y}, \bar{x})]$ ,
- (c)  $(\forall \bar{x})[\varphi_k(\bar{x}) \& \varphi_k(\bar{y}) \& \varphi_k(\bar{z}) \& \varepsilon_k(\bar{x}, \bar{y}) \& \varepsilon_k(\bar{y}, \bar{z}) \rightarrow \varepsilon_k(\bar{x}, \bar{z})]$ .

According to (2.4), both  $\varepsilon_k$  and  $\varphi_k$  are  $\exists \cap \forall$ -formulas. From this, we obtain that  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  is a  $\forall$ -sentence. By (2.3), we obtain that the corrected formula  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$  is an  $\exists$ -formula. Part (b) represents an obvious statement.  $\square$

Let  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  be a formula and  $U(x)$  be a formula with one free variable of signature  $\sigma$  (in this section,  $U$  is a unary predicate). By  $(\psi)_U$ , we denote a formula obtained by relativization of all bounded variables of  $\psi$  in the region  $U(x)$ . If  $\Sigma$  is a set of formulas,  $(\Sigma)_U$  means  $\{(\psi)_U \mid \psi \in \Sigma\}$ . The following obvious assertion takes place for any formula  $\varphi$ :

$\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi)_U$ , if bounded variables of  $\varphi$  are already relativized in  $U(x)$ . (3.2)

Particularly, we have  $\vdash ((\varphi)_U)_U \leftrightarrow (\varphi)_U$ , etc. Also, it is possible to check that, in the case of Cartesian-quotient extensions, we have for all  $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$ :

$$\mathfrak{N} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{N}(\varkappa) \models (\psi)_U, \text{ for all } \psi \in SL(\sigma). \quad (3.3)$$

LEMMA 3.2. *For any formula  $\psi \in SL(\sigma)$ , quantifier prefix of  $(\psi)_U$  is of the same type as that of  $\psi$ .*

PROOF. Immediately. □

Now, we describe one more transformation of formulas.

For a sequence of variables  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t)$  we write shortly  $\bar{x} \subseteq U$  for the following formula:

$$U(x_1) \& U(x_2) \& \dots \& U(x_t).$$

Let  $\varphi(\bar{x})$  be a formula of signature  $\sigma$  of theory  $T$ . By  $\check{\varphi}(\bar{x})$ , we denote a formula of signature  $\sigma_1$  of theory  $T(\varkappa)$ , obtained from  $\varphi(\bar{x})$  by restriction of its free variables in  $U(x)$  and by relativization of bounded variables in  $U(x)$ . Namely, the following rule for this operation is meant:

$$\check{\varphi}(\bar{x}) =_{\text{dfn}} (\bar{x} \subseteq U) \& (\varphi(\bar{x}))_U. \quad (3.4)$$

By construction,  $\check{\varphi}(\bar{x})$  is a formula of signature  $\sigma_1$ ; moreover,

$$\check{\varphi} \text{ coincides with } (\varphi)_U, \text{ whenever } \varphi \in SL(\sigma). \quad (3.5)$$

Furthermore, it is possible to check that

$$\text{type of the quantifier prefix of } \check{\varphi} \text{ is the same as that of } \varphi. \quad (3.6)$$

The operation  $\varphi \mapsto \check{\varphi}$  satisfies the following property for all  $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$  and all finite tuples  $\bar{a}$  of corresponding length in the model:

$$\mathfrak{N}(\varkappa) \models \check{\varphi}(\bar{a}) \Leftrightarrow (\bar{a} \subseteq U) \& \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{a}), \text{ for all } \varphi(\bar{x}) \in FL(\sigma). \quad (3.7)$$

Specifically, we will apply the operation  $\varphi(\bar{x}) \mapsto \check{\varphi}(\bar{x})$  to the following formulas of signature  $\sigma$  obtaining the formulas of signature  $\sigma_1$  for  $k = 1, 2, \dots, s$ :

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_k(\bar{x}) &= (\bar{x} \subseteq U) \& (\varphi_k(\bar{x}))_U, \\ \check{\varepsilon}'_k(\bar{y}, \bar{z}) &= (\bar{y} \subseteq U) \& (\bar{z} \subseteq U) \& (\varepsilon'_k(\bar{y}, \bar{z}))_U. \end{aligned} \quad (3.8)$$

From (3.8), we have the following statements for  $k = 1, 2, \dots, s$ :

$$\begin{aligned} &\text{type of the quantifier prefix of } \check{\varphi}_k \text{ is the same as that of } \varphi_k, & (3.9) \\ &\text{type of the quantifier prefix of } \check{\varepsilon}'_k \text{ is the same as that of } \varepsilon'_k. \end{aligned}$$

Based on the fact that demand (2.4) is accepted, from (3.9) and Lemma 3.1 we have that  $\check{\varphi}_k(\bar{x})$  is an  $\exists \cap \forall$ -formula, while  $\check{\varepsilon}'_k(\bar{x}, \bar{y})$  is an  $\exists$ -formula for  $k = 1, 2, \dots, s$ .

System of axioms of theory  $T\langle \varkappa \rangle$  includes the following sentences (with extra remarks pointing out types of their quantifier prefixes):

- $\exists$ : 1°.  $(\exists x)U(x)$ ,
- $\exists$ : 2°.  $(\exists x)U_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,
- $\forall$ : 3°.  $(\forall x)[U(x) \rightarrow \neg U_i(x)]$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,
- $\forall$ : 4°.  $(\forall x)[U_i(x) \rightarrow \neg U_j(x)]$ ,  $1 \leq i < j \leq s$ ,
- $\forall$ : 5°. All  $\sigma$ -predicates are defined trivially outside the region  $U(x)$ ,
- $\forall$ : 6°. All  $\sigma$ -functions are defined trivially outside the region  $U(x)$ ,
- 7°.  $(\Phi)_U$ , for all  $\Phi \in SL(\sigma)$ , such that  $\Phi \in \Sigma$  ( $\Sigma$  is a set of axioms of  $T$ ),
- $\forall$ : 8°.  $K_k(x_1, \dots, x_{m_k}, z) \rightarrow U(x_1) \& \dots \& U(x_{m_k}) \& U_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall$ : 9°.  $(\forall \bar{x}z)[K_k(\bar{x}, z) \rightarrow \bar{x} \subseteq U \& \check{\varphi}_k(\bar{x}) \& U_k(z)]$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall \exists$ : 10°.  $(\forall \bar{x})[\bar{x} \subseteq U \& \check{\varphi}_k(\bar{x}) \rightarrow (\exists z)K_k(\bar{x}, z)]$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall \exists$ : 11°.  $(\forall z)[U_k(z) \rightarrow (\exists \bar{x})(\bar{x} \subseteq U \& \check{\varphi}_k(\bar{x}) \& K_k(\bar{x}, z))]$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall$ : 12°.  $\check{\varphi}_k(\bar{x}) \& \check{\varphi}_k(\bar{y}) \& \check{\varepsilon}'_k(\bar{x}, \bar{y}) \& K_k(\bar{x}, z) \& K_k(\bar{y}, u) \rightarrow z = u$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall \exists$ : 13°.  $(\forall \bar{x} \bar{y} z)[\check{\varphi}_k(\bar{x}) \& \check{\varphi}_k(\bar{y}) \& K_k(\bar{x}, z) \& K_k(\bar{y}, z) \rightarrow \check{\varepsilon}'_k(\bar{x}, \bar{y})]$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,
- $\forall$ : 14°.  $(\forall \bar{x} \bar{y} z)[\check{\varphi}_k(\bar{x}) \& \check{\varphi}_k(\bar{y}) \& K_k(\bar{x}, z) \& \check{\varepsilon}'_k(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow K_k(\bar{y}, z)]$ ,  $k = 1, \dots, s$ .

By  $FRM(\varkappa)$ , we denote the set of all sentences presented in Axioms 1°–6° and 8°–14°. The set  $FRM(\varkappa)$  is called a *frame* for the operation  $T \mapsto T\langle \varkappa \rangle$ . The formula  $FRM(\varkappa)$  expresses a formal description of the operation of a Cartesian-quotient extension of a theory that is adequate to the informal description in Section 2. Actually, the set  $FRM(\varkappa)$  depends not only on  $\varkappa$ , but also on the signature  $\sigma$  of theory  $T$  and on the signature (2.2) that is supposed to be fixed for the construction  $T\langle \varkappa \rangle$ . We use a short entry  $FRM(\varkappa)$  omitting these extra

parameters in context.

LEMMA 3.3. *The set  $FRM\langle\kappa\rangle$  is finite and consists of formulas whose quantifier prefixes are at most  $\forall\exists$ .*

PROOF. Immediately, from the system of axioms 1°–14°. □

LEMMA 3.4. *Given a theory  $T$  of signature  $\sigma$  and a tuple  $\kappa$  of the form (2.1)(b). A set  $\Sigma \subseteq SL(\sigma)$  is a system of axioms of theory  $T \Leftrightarrow FRM(\kappa) \cup (\Sigma)_U$  is a system of axioms of theory  $T\langle\kappa\rangle$ .*

PROOF. If  $\Sigma \subseteq SL(\sigma)$  is a system of axioms of  $T$ , in accordance with axioms 1°–14°,  $FRM(\sigma) \cup (\Sigma)_U$  is a system of axioms of  $T\langle\kappa\rangle$ . Conversely, suppose that  $\Sigma \subseteq SL(\sigma)$  and  $FRM(\sigma) \cup (\Sigma)_U$  defines the class  $K = \text{Mod}(T\langle\kappa\rangle)$ . By virtue of (3.1) and (3.3), the source system  $\Sigma$  must define class  $\text{Mod}(T)$  presenting the collection of all model-kernels defined in models from  $K$ . □

LEMMA 3.5. *Given a tuple of formulas  $\kappa$  of the form (2.1)(b) satisfying (2.4) and an integer  $n$  with  $2 \leq n < \omega$ . If theory  $T$  is  $\Pi_n$ -axiomatizable, i.e., has a system of axioms consisting of sentences with prefixes of type  $\Pi_n$ , the theory  $T\langle\kappa\rangle$  is also  $\Pi_n$ -axiomatizable.*

PROOF. Immediately, from Lemma 3.2, Lemma 3.3, and Lemma 3.4. □

Now, we will consider a back passage from  $T\langle\kappa\rangle$  to the source theory  $T$ .

The operation  $T \mapsto T\langle\kappa\rangle$  is defined by a simple construction based on a sequence (2.1) of formulas of  $T$ . In the target theory  $T\langle\kappa\rangle$ , the sequence (2.1) is presented by the following versions of these formulas:

$$\check{\varphi}_i(\bar{w}), \check{\varepsilon}'_i(\bar{u}, \bar{v}), \quad i = 1, 2, \dots, s. \tag{3.10}$$

By construction, the universe of  $T\langle\kappa\rangle$  consists of a union of the following disjoint regions

$$U(x) \vee U_1(x) \vee \dots \vee U_s(x), \tag{3.11}$$

where  $U(x)$  distinguishes the universe of the source theory  $T$ , while  $U_i(x)$  presents "codes" for sets of tuples in the source universe distinguished by formulas  $\check{\varphi}_i(\bar{w})$  modulo corresponding equivalence relations  $\check{\varepsilon}'_i(\bar{u}, \bar{v})$ . By construction, both predicate and function symbols of signature  $\sigma$  of theory  $T$  are defined trivially outside the region  $U(x)$ ; moreover, the added regions  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , as well as the new predicates  $K_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , have very simple

form determined via the formulas (3.10). This allows us to enclose the target theory  $T\langle\mathcal{A}\rangle$  into the source theory  $T$  obtaining a characterization of first-order definable relations of theory  $T\langle\mathcal{A}\rangle$ .

We turn to the back transformation of formulas in detail.

Let  $t$  be a term of signature  $\sigma \subseteq \sigma_1$  and  $u$  be either a constant or variable symbol having the most-left occurrence in  $t$ . Based on the fact that all functions of signature  $\sigma$  are defined in  $T\langle\mathcal{A}\rangle$  trivially outside the region  $U(x)$ , in accordance with demand (0.1)(b), the following property can be established by induction on the length of the term  $t$ :

$$T\langle\mathcal{A}\rangle \vdash [U(u) \rightarrow U(t)] \ \& \ [\neg U(u) \rightarrow (t = u)]. \quad (3.12)$$

In particular, in the case when  $u$  is a constant symbol in  $\sigma$  we obtain the following stronger property:

$$T\langle\mathcal{A}\rangle \vdash U(t), \text{ whenever } u \text{ is a constant symbol.} \quad (3.13)$$

The splitting (3.11) suggests an idea to use specialized (bounded) variables in separate regions  $U(x)$  and  $U_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq s$ , instead of unbounded variables taking their values in the whole universe of  $T\langle\mathcal{A}\rangle$ . In the case when a quantifier is bounded in one of the regions listed in (3.11), i.e., quantifier is applied as  $(\exists x)[U(x) \ \& \ \dots]$  or  $(\forall x)[U_i(x) \rightarrow \dots]$ ,  $i = 1, \dots, s$ , we say that this quantifier is *specialized* in the region  $U_i(x)$ . A quantifier can also be specialized in  $U(x)$ .

We study possibilities of occurrences of a  $U_i$ -specialized variable  $y$ ,  $1 \leq i \leq s$ , in the atomic formulas of theory  $T\langle\mathcal{A}\rangle$  formed with predicate symbols of signature  $\sigma_1$ . Three following cases

- (a)  $y = t$ ,  $t$  is a variable, (3.14)
- (b)  $t = y$ ,  $t$  is a variable,
- (c)  $K_i(\bar{w}, y)$ ,  $\bar{w}$  is a block of terms having no occurrences of  $y$ ,

are the expressions that must be considered, while the other cases represent trivial situations. For instance:  $U_i(y)$  is **true**;  $U_j(y)$  is **false** for  $j \neq i$ ;  $K_j(\bar{w}, y)$  is **false** for  $j \neq i$ ; any term  $t$  represents an essential expression just in  $U(x)$ , while it is reduced to a simpler expression or its value is estimated trivially whenever one of its variables takes a value outside the region  $U(x)$ ; etc.

LEMMA 3.6. For a  $U_i$ -specialized variable  $y$ ,  $1 \leq i \leq s$ , any of its occurrences in an atomic formula  $\mathcal{A}$  of signature  $\sigma_1$  (immediately, or as a part of a term) either has one of the forms (3.14)(a,b,c), or can be reduced to an expression without  $y$ , or the atomic formula  $\mathcal{A}$  has the value **true** or **false**.

PROOF. This statement follows from the definition of the operation of a Cartesian-quotient extension of a theory requiring that all predicates and functions of signature  $\sigma$  are defined trivially outside the region  $U(x)$ .  $\square$

The following statement reduces the theory  $T\langle\mathcal{K}\rangle$  to the source theory  $T$ :

LEMMA 3.7. Based on a specific form of theory  $T\langle\mathcal{K}\rangle$  of signature  $\sigma_1$ , cf. (2.2), it is possible to define an operation  $\Phi \mapsto [\Phi]$  on the set  $FL(\sigma_1)$  satisfying the following properties for all  $\Phi \in FL(\sigma_1)$ :

- (a) formulas  $\Phi$  and  $[\Phi]$  have the same set of free variables,
- (b)  $FRM(\mathcal{K}) \vdash \Phi(\bar{x}) \leftrightarrow [\Phi](\bar{x})$ , where  $\bar{x}$  is a sequence of free variable of  $\Phi$ ,
- (c) all quantifiers in the formula  $[\Phi]$  are  $U$ -specialized,
- (d) type of quantifier prefix of the formula  $[\Phi]$  in a prenex normal form is the same as that of  $\Phi$ , provided that (2.4) and (2.5) are satisfied.

PROOF. Given a formula  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  of signature of  $\sigma_1$  that has a quantifier prefix of a certain type in a prenex normal form. It is required to build a formula  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  that is equivalent to  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ ; moreover, all quantifiers in  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  are  $U$ -specialized. Besides, internal details of the transformation of  $\Phi \mapsto \Psi$  should give a chance to estimate type of the quantifier prefix of the target formula depending on the type of quantifier prefix of the source formula in a prenex normal form.

First, we consider common features of the procedure under construction.

0. *Reduction of a formula to DNF* (disjunctive normal form). It is a standard procedure, cf. [3, Ch.1, Ex.1.36]. We add in this algorithm an extra replacement rule based on specific dependencies between formulas of theory  $T\langle\mathcal{K}\rangle$ . As a consequence, after reduction to *DNF*, some types of atomic formulas will be included in the obtained matrix *positively*, i.e., without a negation mark.

1. *Reduction of a formula to the prenex normal form*. It is a standard procedure, cf. [3, Ch.2, Sec.10]. Performing this transformation, we obtain a formula whose quantifier prefix precedes a quantifier-free matrix; after that, the matrix is reduced to the form of *DNF*.

2. *Quasiatomic formulas involved in DNF*. A feature of the process we are

describing is that, while reducing to *DNF*, we can mark as atomic formulas some occurrences of the formulas of the form (3.10) having parameters  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , and  $\bar{w}$  built from free variables and terms of signature  $\sigma_1$ . At the beginning of the procedure  $\Psi \mapsto [\Psi]$ , no occurrences of these formulas are marked. During the process of transformation, some occurrences of formulas (3.10) are marked (one can say, as *quasiatomic*) in the matrix. Later, we have to operate with these marked occurrences as a whole, without passing to their subformulas. At most, we can either add or eliminate a preceding negation sign.

3. *Particular replacements in the quantifier-free matrix.* First, we notice that, by (3.9), formulas  $\tilde{\varepsilon}'_k$  are  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T(\varkappa)$  if and only if formulas  $\varepsilon'_k$  are  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T$ ,  $k = 1, \dots, s$ . It is possible to check that the following row of equivalences takes place in theory  $T(\varkappa)$ :

$$\begin{aligned} \neg K_i(\bar{w}, x) &\leftrightarrow \neg U_i(x) \vee \neg \check{\varphi}_i(\bar{w}), \\ \neg U_i(x) &\leftrightarrow U(x) \vee U_1(x) \vee \dots \vee U_{i-1}(x) \vee U_{i+1}(x) \vee \dots \vee U_s(x), \\ \neg U(x) &\leftrightarrow U_1(x) \vee \dots \vee U_s(x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

allowing us to do without negations before the pointed out types of atomic formulas in quantifier-free matrices in *DNF*-form. Having executed these replacements, reduce again the matrix to a *DNF*-form. We will obtain as atomic parts in the *DNF*-form the following formulas for different free variables  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , and blocks of terms  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , and  $\bar{w}$  of corresponding lengths:

$$\begin{aligned} &\text{Reference\_Block} \\ &\text{(a) } U(x), \\ &\text{(b) } U_i(y), \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ &\text{(c) } K_i(\bar{w}, z), \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ &\text{(d) } \textit{atomic formulas of signature } \sigma \textit{ with free variables bounded in the region} \\ &\quad U(x), \textit{ as well as their negations}, \\ &\text{(e) } \check{\varphi}_i(\bar{w}), \quad \neg \check{\varphi}_i(\bar{w}), \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ &\text{(f) } \tilde{\varepsilon}_i(\bar{u}, \bar{v}), \quad \neg \tilde{\varepsilon}_i(\bar{u}, \bar{v}), \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.16)$$

End\_Ref

All occurrences of formulas of the form (3.10) appeared as a result of the replacement are marked as *quasiatomic*. Notice that, in the obtained *DNF*-matrix, each atomic formula of the form (3.16)(a,b,c) is included in *DNF* positively.

4. *Reduction of quantifiers to specialized ones.* In view of splitting (3.11) of the universe, we have the following equivalences:

$$\begin{aligned}
 (\exists x)\psi(x, \dots) &\sim \\
 (\exists x)[U(x) \& \psi(x, \dots)] \vee (\exists x)[U_1(x) \& \psi(x, \dots)] \vee \dots \vee (\exists x)[U_s(x) \& \psi(x, \dots)] &\sim \\
 (\exists x_0 \in U)(\exists x_1 \in U_1)\dots(\exists x_s \in U_s) [\psi(x_0, \dots) \vee \psi(x_1, \dots) \vee \dots \vee \psi(x_s, \dots)], \\
 (\forall x)\psi(x, \dots) &\sim (\forall x)[U(x) \rightarrow \psi(x, \dots)] \& \\
 (\forall x) [U_1(x) \rightarrow \psi(x, \dots)] \& \dots \& (\forall x)[U_s(x) \rightarrow \psi(x, \dots)] &\sim (\forall x_0 \in U) \\
 (\forall x_1 \in U_1)\dots(\forall x_s \in U_s) [\psi(x_0, \dots) \& \psi(x_1, \dots) \& \dots \& \psi(x_s, \dots)].
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

From this, we have that any formula with arbitrary quantifiers is equivalent to a formula with quantifiers that are specialized in separate regions (3.11).

5. *Reduction of a  $U_i$ -specialized quantifier to a  $U$ -specialized one.* This procedure represents a key part of the transformation as a whole. As an input, a formula of theory  $T(\mathcal{A})$  of the form

$$\theta(x_1, \dots, x_t) = (Qy \in U_i) \underbrace{(Q\bar{z}_1 \subseteq U)\dots(Q\bar{z}_k \subseteq U)}_{U\text{-specialized quantifiers}} \theta(x_1, \dots, x_t, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)
 \tag{3.18}$$

is given, where  $1 \leq i \leq s$ ,  $Q$  is a quantifier binding a single  $U_i$ -specialized variable  $y$ , and  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , are quantifiers binding  $U$ -specialized blocks of variables. Moreover, the matrix  $\theta(x_1, \dots, x_t, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  is a quantifier-free formula that is a *DNF* relative to the atomic and marked quasiatomic formulas listed in (3.16). Atomic formulas of the form (3.16)(a,b,c) must be included in  $\theta$  just positively. Our purpose is to reduce this formula by equivalent transformations to a similar form, where the quantifier  $(Qy \in U_i)$  is replaced with a quantifier of the same type with a  $U$ -specialized block of variables  $\bar{z}$  of appropriate length.

We consider separately two possible cases.

*Case 1:  $Q$  is an  $\exists$  quantifier.* In this case, the formula (3.18) looks like this:

$$\theta(\bar{x}) = (\exists y \in U_i) \underbrace{(Q\bar{z}_1 \subseteq U)\dots(Q\bar{z}_k \subseteq U)}_{U\text{-specialized quantifiers}} \theta(x_1, \dots, x_t, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k).
 \tag{3.19}$$



First, replace in (3.19) quantifier  $(\exists y \in U_i)$  with  $(\exists \bar{z} \subseteq U)$ , where  $\bar{z}$  is a block of free variables with  $\text{Len}(\bar{z}) = m_i$ ; after that, we have to perform a replacement of subformulas in the matrix  $\theta(x_1, \dots, x_t, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  by the following rule:

**Reference\_Block** (3.20)

- (a) each occurrence of any subformula of the form  $y = t$  or  $t = y$  with a variable  $t$  other than  $y$  is replaced by  $K_i(\bar{z}, t)$ ,
- (b) each occurrence of any subformula of the form  $K_i(\bar{w}, y)$  with the block of terms  $\bar{w}$  having no occurrences of  $y$  is replaced with  $\varepsilon'_i(\bar{w}, \bar{z})$ .

**End\_Ref**

All occurrences of formulas of the form (3.10) appeared as a result of this replacement are marked as quasiautomic.

Let all these replacements be performed. Transform the obtained quantifier-free formula to a *DNF*-form. Perform replacements by the scheme (3.15), if these negative formulas exist. Again reduce the matrix to a *DNF*-form. As a result, we obtain a new quantifier-free formula  $\theta'(x_1, \dots, x_t, \bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  whose atomic formulas have forms listed in (3.16). In accordance with the description of the operation of a Cartesian-quotient extension of a theory given in Section 1 and by virtue of Axioms 1°-14°, the obtained formula  $\Theta'(x_1, \dots, x_t)$  has the following form

$$\underbrace{(\exists \bar{z} \subseteq U)(Q_1 \bar{z}_1 \subseteq U) \dots (Q_k \bar{z}_k \subseteq U)}_{\text{bounded in } U(x)} \theta'(x_1, \dots, x_t, \bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k); \quad (3.21)$$

moreover, it will be equivalent in  $T(\varkappa)$  to the formula (3.19).

*Case 2:  $Q$  is a  $\forall$  quantifier.* In this case, (3.18) have the following form:

$$\Psi(\bar{x}) = (\forall y \in U_i) \underbrace{(Q \bar{z}_1 \subseteq U) \dots (Q \bar{z}_k \subseteq U)}_{U\text{-specialized quantifiers}} \psi(x_1, \dots, x_t, y, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k). \quad (3.22)$$

We can transform quantifier  $(\forall y \in U_i)$  by passing to the case of a quantifier  $\exists$ . For this purpose, we set a negation sign  $\neg$  on the formula (3.22); move the negation through the quantifier prefix up to a quantifier-free matrix; reduce the changed matrix to a *DNF*-form. Now, all quantifiers are changed to the

opposite ones. In particular, the variable  $y$  becomes bounded with a quantifier  $\exists$ . Apply the described above construction to the quantifier  $(\exists y \in U_i)$ ; thus, we will transform this quantifier into  $(\exists \bar{z} \subseteq U)$ . Set again the negation mark  $\neg$  on the obtained formula; move the negation through the quantifier prefix up to a quantifier-free matrix; finally, we transform the quantifier-free matrix in a *DNF*-form. Apply replacements by rule (3.15) and transform again the quantifier-free matrix into a *DNF*-form. As a result, the quantifier  $(\forall y \in U_i)$ , will be transformed into a quantifier of the form  $(\forall \bar{z} \subseteq U)$ .

In both cases  $Q = \exists$  and  $Q = \forall$ , as a result of the transformation, we obtain a quantifier-free formula  $\psi'(x_1, \dots, x_t, \bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  in the form of a *DNF* with atomic formulas in the list (3.16), such that atomic formulas (3.16)(a,b,c) are included in  $\psi'$  just positively; moreover,

$$\Psi(x_1, \dots, x_t) \sim (Q\bar{z} \in U)(Q\bar{z}_1 \subseteq U)\dots(Q\bar{z}_k \subseteq U)\psi'(x_1, \dots, x_t, \bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k). \quad (3.23)$$

Thus, the  $U_t$ -specialized quantifier  $(Qy \in U_i)$  from (3.18) is transformed to a  $U$ -specialized quantifier  $Q$  of the same type on a  $U$ -specialized block of variables  $\bar{z}$  of appropriate length; this is exactly what is required.

Now, we can describe the algorithm as a whole.

6. *Algorithm of the transformation  $\Phi \mapsto [\Phi]$  as a whole.* Given an arbitrary formula  $\Phi(\bar{x})$  of signature  $\sigma_1$ . Reduce this formula to a prenex normal form. Transform the obtained formula to a prenex normal form with specialized quantifiers. Obviously, the former passage does not change type of the quantifier prefix; it just increases lengths of blocks of quantifiers of same type. Reduce the matrix of the obtained formula to *DNF*. Based on the dependencies (3.15), eliminate all negative occurrences of atomic formulas with predicates  $U, U_i$ , and  $K_i, 1 \leq i \leq s$ . Reduce again the quantifier-free matrix to *DNF*. As a result, the following equivalent expression for the source formula  $\Phi(\bar{x})$  will be obtained:

$$\Phi(\bar{x}) \sim (Q_1 y_1 \in U_{t_1})\dots(Q_n y_n \in U_{t_n}) \varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_n), \quad (3.24)$$

where  $Q_i, 1 \leq i \leq n, 0 \leq t_i \leq s$ , are quantifiers of types either  $\forall$  or  $\exists$  (we count that  $U_0$  means predicate  $U$ ). As for the matrix  $\varphi(\bar{x}, y_1, \dots, y_n)$ , it has the form of a *DNF* with atomic formulas of types (3.16)(a,b,c,d). No occurrences of formulas of the form (3.16)(e,f) are marked yet. They will appear on subsequent steps of the transformation.

Process of replacement of specialized quantifiers  $Q_k$  in formula (3.24) by suitable quantifiers  $\mathcal{Q}_k$  binding blocks of variables  $\bar{z}_k \subseteq U$  is performed in the order from the right to the left. At first step, we replace quantifier  $(Q_n y_n \in U_{t_n})$  by  $(\mathcal{Q}_n \bar{z}_n \subseteq U)$ ; after that, quantifier-free matrix  $\varphi$  should be corrected by the special rules. Then, we consider the next quantifier  $(Q_{n-1} y_{n-1} \in U_{t_{n-1}})$ , and so on. For  $n$  steps, the quantifier prefix specified in (3.24) will be transformed to the demanded form.

At an intermediate step  $r = n - k$  of the replacement process, the formula under consideration may have the following form:

$$\underbrace{(Q_1 y_1 \in U_{t_1}) \dots (Q_k y_k \in U_{t_k})}_{\text{specialized quantifiers}} \underbrace{(\mathcal{Q}_{k+1} \bar{z}_{k+1} \subseteq U) \dots (\mathcal{Q}_n \bar{z}_n \subseteq U)}_{\text{bounded in } U(x)} \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (3.25)$$

where the last  $(n - k)$  quantifiers are already transformed, while  $(Q_k y_k \in U_{t_k})$  is the quantifier to be considered currently.

If  $t_k = 0$ , i.e.,  $(Q_k y_k)$  is specialized in  $U(x)$ , the current step is performed trivially. Now we consider another case, when the quantifier  $(Q_k y_k)$  is specialized in a region  $U_{t_k}(x)$ ,  $1 \leq t_k \leq s$ . By omitting in (3.25) previous quantifiers

$$(Q_1 y_1 \in U_{t_1}) \dots (Q_{k-1} y_{k-1} \in U_{t_{k-1}}), \quad (3.26)$$

we obtain a formula of the following form:

$$\varphi^*(\bar{x}, y_1, \dots, y_{k-1}) = (Q_k y_k \in U_{t_k}) \underbrace{(\mathcal{Q}_{k+1} \bar{z}_{k+1} \subseteq U) \dots (\mathcal{Q}_n \bar{z}_n \subseteq U)}_{\text{bounded in } U(x)} \varphi'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \quad (3.27)$$

moreover, we have

$$\Phi(\bar{x}) \sim (Q_1 y_1 \in U_{t_1}) \dots (Q_{k-1} y_{k-1} \in U_{t_{k-1}}) \varphi^*(\bar{x}, y_1, \dots, y_{k-1}). \quad (3.28)$$

Apply the described earlier algorithm of replacement of a  $U_{t_k}$ -specialized quantifier  $Q_k y_k$  into a  $U$ -specialized quantifier  $\mathcal{Q}_k \bar{z}_k$  of the same type, cf. transformation from (3.18) to (3.23). As a result, we replace quantifier  $(Q_k y_k \in U_i)$  by  $(\mathcal{Q}_k \bar{z}_k \subseteq U)$ , where  $\bar{z}_k$  is a block of free variables with  $\text{Len}(\bar{z}_k) = m_{t_k}$ ; after that, we should perform a replacement of subformulas in the matrix as described above in subroutine 3; finally, we have to set the block of quantifiers

(3.26) back at the beginning of the formula. Thereby, the quantifier  $Q_k y_k$  is replaced by an  $U$ -specialized quantifier  $\mathcal{Q}_k \bar{z}_k$ .

Having performed transformations of quantifiers  $(Q_k x_k)$  into  $(\mathcal{Q}_k \bar{z}_k)$  by the described scheme in order from the right to the left, for  $k = n, n - 1, \dots, 1$ ; as a result, we obtain the following presentation with some matrix  $\varphi''$  of the described form:

$$\Phi(\bar{x}) \sim (\mathcal{Q}_1 \bar{z}_1 \subseteq U) \dots (\mathcal{Q}_n \bar{z}_n \subseteq U) \varphi''(\bar{x}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n). \quad (3.29)$$

We put  $[\Phi]$  to be the right-hand side of the expression in (3.29). By construction, the "quantifier-free" matrix  $\varphi''(\bar{x}, \bar{z})$  is formed from atomic formulas of the form (3.16)(a,b,c,d) and quasiatomic formulas of the form (3.16)(e,f). Notice that all quantifiers of the formulas (3.10) are  $U$ -specialized; however, there are definite possibilities to choose variants of presentations of the occurrences of formulas (3.10) in  $\varphi''$ , either in an  $\exists$ -form or in a  $\forall$ -form.

Description of the algorithm is complete.

Now, we pass to prove statements posed in Lemma 3.7.

(a) Immediately, from the algorithm.

(b) Immediately, from the algorithm.

(c) Algorithm transforms all quantifiers into  $U$ -specialized. There can be occurrences of the extra formulas (3.10) with quantifiers occurring in the quantifier-free matrix; however, by virtue of (3.9), their quantifiers are also  $U$ -specialized. Thereby, all quantifiers in the target formula indeed turn out to be  $U$ -specialized.

(d) Depending on the type of a quantifier prefix preceding the matrix  $\varphi''$  in (3.29), each occurrence of any of the formulas (3.10) must be presented in the matrix either in the form of a  $\forall$ -formula, or in the form of an  $\exists$ -formula, so that to preserve type of the quantifier prefix as a whole. Namely, we have to choose a variant of presentation that corresponds to the type of the last quantifier in the prefix (3.29). Thereby, it is shown that types of the quantifier prefix in the formulas  $\Phi(\bar{x})$  and  $[\Phi](\bar{x})$  can be chosen to be the same whenever the condition (2.5) is satisfied.

Lemma 3.7 is proved. □

The following basic fact takes place:

LEMMA 3.8. *For any sentence  $\varphi$  of signature  $\sigma_1$ , the following is satisfied:  $FRM(\sigma) \vdash \varphi \leftrightarrow [\varphi]$ .*

PROOF. This statement is a particular case of Part (b) of Lemma 3.7.  $\square$

By  $FL_U(\sigma_1)$ , we denote the set of formulas  $\varphi \in FL(\sigma_1)$  whose variables (both free and bounded) are  $U$ -specialized, while by  $SL_U(\sigma_1)$ , we denote the set  $SL(\sigma_1) \cap FL_U(\sigma_1)$ . By these formulas, we can express in a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T(\mathcal{K})$  first order properties of its kernel  $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$ .

We consider one more transformation of theories.

Based on axioms  $FRM(\mathcal{K})$  (describing the operation  $T \mapsto T(\mathcal{K})$ ), we are going to define an operation  $\varphi \mapsto \{\varphi\}_{\mathbb{K}}$  from  $FL_U(\sigma_1)$  to  $FL(\sigma)$ . By construction, signature  $\sigma_1 \setminus \sigma$  includes the following predicates

$$U_i^1, K_i^{m_i+1}, 1 \leq i \leq s, \quad (3.30)$$

as well as the predicate  $U(x)$  for the universe of the source theory  $T$ . It is possible to check that all predicates (3.30) are defined trivially (as generally false) within the region  $U(x)$ . Let  $\psi$  be a formula of signature  $\sigma_1$  whose quantifiers are  $U$ -specialized while free variables are restricted in the region  $U(x)$ . We transform  $\psi$  to a formula  $\{\psi\}_{\mathbb{K}}$  of signature  $\sigma$  performing the following replacements: (a) eliminate all occurrences of predicates (3.30) by replacing corresponding atomic formulas with the truth value **false**, (b) consider the region  $U(x)$  as the whole universe; for this, each occurrence in  $\psi$  of an atomic formula  $U(t)$ ,  $t$  is a term, should be replaced by  $t = t$ . It is simple to check that the following is satisfied for all  $\varphi \in FL_U(\sigma_1)$ :

$$\text{type of the quantifier prefix of } \{\varphi\}_{\mathbb{K}} \text{ is the same as that of } \varphi. \quad (3.31)$$

Furthermore, for any tuple  $\bar{e}$  of elements in a model  $\mathfrak{N}$  of signature  $\sigma$ , the following relations take place:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathfrak{N}(\mathcal{K}) \models \psi(\bar{e}) &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \{\psi\}_{\mathbb{K}}(\bar{e}), \quad \psi(\bar{x}) \in FL_U(\sigma_1), \\ \text{(b)} \quad \mathfrak{N}(\mathcal{K}) \models \varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \{\varphi\}_{\mathbb{K}}, \quad \varphi \in SL_U(\sigma_1), \end{aligned} \quad (3.32)$$

where Part (b) is a particular case of Part (a). Based on the fact that all quantifiers in  $[\varphi]$  are  $U$ -specialized for  $\varphi \in SL(\sigma_1)$ , we obtain the following relation for the formulas without free variables:

$$\mathfrak{N}(\mathcal{K}) \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \{[\varphi]\}_{\mathbb{K}}, \quad \varphi \in SL(\sigma_1). \quad (3.33)$$

Furthermore, using (3.32)(b) together with (3.3), we obtain

$$FRM(\varkappa) \vdash \varphi \leftrightarrow (\{\varphi\}_{\mathbb{K}})_U, \text{ for all } \varphi \in SL_U(\sigma_1). \quad (3.34)$$

Informally, the operation  $\{\varphi\}_{\mathbb{K}}$  eliminates predicates (3.30) obtaining a formula of signature  $\sigma$ , while the next operation  $(\cdot)_U$  returns the signature back to  $\sigma_1$ ; moreover, all these formulas express the same statement concerning the model-kernel  $\mathfrak{N}$  of a model  $\mathfrak{N}\langle\varkappa\rangle$ .

LEMMA 3.9. *Given a theory  $T$  of signature  $\sigma$  and a tuple  $\varkappa$  of the form (2.1)(b). If theory  $T\langle\varkappa\rangle$  is defined by a system of axioms  $\Sigma$ , the set  $\{[\Sigma]\}_{\mathbb{K}}$  is a system of axioms of the source theory  $T$ .*

PROOF. Suppose that  $\Sigma$  is a system of axioms of theory  $T\langle\varkappa\rangle$ ; then,  $FRM(\varkappa) + \Sigma$  is also a system of axioms of  $T\langle\varkappa\rangle$ . By Lemma 3.8, the set  $FRM(\varkappa) + [\Sigma]$  is a system of axioms of  $T\langle\varkappa\rangle$ ; moreover, by Lemma 3.7(c), the operation  $\psi \mapsto [\psi]$  ensures that all bounded variables of sentences in  $[\Sigma]$  are  $U$ -specialized. Applying (3.34), we obtain that the set  $FRM(\varkappa) + (\{[\Sigma]\}_{\mathbb{K}})_U$  is a system of axioms of the same theory  $T\langle\varkappa\rangle$ . By virtue of Lemma 3.4 we finally obtain that  $\{[\Sigma]\}_{\mathbb{K}}$  is a system of axioms of the source theory  $T$ .  $\square$

LEMMA 3.10. *Given a theory  $T$  of signature  $\sigma$  and a tuple  $\varkappa$  of the form (2.1)(b) satisfying (2.4). If all formulas  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$  are  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T$  and theory  $T\langle\varkappa\rangle$  is  $\Pi_n$ -axiomatizable for  $2 \leq n < \omega$ , theory  $T$  is also  $\Pi_n$ -axiomatizable.*

PROOF. Suppose that  $\Sigma$  is a system of axioms of theory  $T\langle\varkappa\rangle$ . By Lemma 3.9 we obtain that  $\{[\Sigma]\}_{\mathbb{K}}$  is a system of axioms of the source theory  $T$ . By Lemma 3.2 together with (3.31), the transformations  $\varphi \mapsto (\varphi)_U$  and  $\varphi \mapsto \{\varphi\}_{\mathbb{K}}$  preserve types of quantifier prefixes. As for the transformation  $\varphi \mapsto [\varphi]$ , by Lemma 3.7(d), it also preserves types of quantifier prefixes because formulas  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$  are supposed to be  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T$ . Thereby,  $\Pi_n$ -axiomatizability of  $T\langle\varkappa\rangle$  implies  $\Pi_n$ -axiomatizability of  $T$  for any  $n$  satisfying  $2 \leq n < \omega$ .  $\square$

LEMMA 3.11. *Given a theory  $T$  of signature  $\sigma$  and a tuple  $\varkappa$  of the form (2.1)(b) satisfying (2.4). Interpretation  $I_{T,\varkappa} : T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$  preserves locally the model-theoretic property of  $\Pi_n$ -axiomatizability for any fixed  $n \geq 2$ .*

PROOF. Let  $T'$  be a complete extension of  $T$  and  $S'$  be the corresponding complete extension of  $T\langle\varkappa\rangle$ . We notice that each sentence  $\text{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$  must be either true or false in  $T'$  because this theory is complete. Thereby, from (2.3)

and (2.4) we obtain that all formulas  $\varepsilon'_k(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $k \leq s$ , are  $\exists \cap \forall$ -presentable. Thus, by Lemma 3.5 and Lemma 3.10, we obtain:  $T'$  is  $\Pi_n$ -axiomatizable if and only if  $S'$  is  $\Pi_n$ -axiomatizable.  $\square$

We mention the following complementary fact:

LEMMA 3.12. *There is a finitely axiomatizable theory  $T$  of a finite signature  $\sigma$  and a tuple  $\varkappa$  of formulas of the form (2.1)(a) satisfying (2.4), such that the model-theoretic property of  $\exists\forall$ -axiomatizability is not preserved, both globally and locally, by the interpretation  $I_{T,\varkappa} : T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ .*

PROOF. Let  $\sigma = \{\leq^2\}$ . By  $T$ , we denote a theory of signature  $\sigma$  defined by axioms stating that  $\leq$  is reflexive and transitive, and there are both  $\leq$ -minimal and  $\leq$ -maximal classes modulo equivalence relation  $x \sim y \Leftrightarrow (x \leq y) \& (y \leq x)$  associated with the preorder  $\leq$ . Obviously,  $T$  is finitely axiomatizable and  $\exists\forall$ -axiomatizable. Fix an integer  $k_0 > 1$ . Let  $\Sigma$  be an extra set of axioms stating that there are exactly  $k_0$  classes modulo  $\sim$ ; moreover, each  $\sim$ -class is infinite. It is possible to check that  $\Sigma$  can be presented by a set of  $\forall$ -sentences together with a set of  $\exists$ -sentences. Thereby,  $T' = T + \Sigma$  is  $\exists\forall$ -axiomatizable; moreover, the theory  $T'$  is complete (and decidable) and has only infinite models.

Consider the following tuple of formulas  $\varkappa = \langle \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y) \rangle$ , where  $\varphi_1(x, y) = (x \leq y) \& (x \neq y)$  and  $\varphi_2(x, y) = \neg(x \leq y)$ . We are going to show that theory  $S = T\langle\varkappa\rangle$  is not  $\exists\forall$ -axiomatizable. Suppose contrary, let  $\Delta$  be a system of axioms for  $S$  consisting of  $\exists\forall$ -formulas only. Since  $\Delta$  is at most a countable set of  $\exists\forall$ -formulas, the following property of models of  $\Delta$  must take place:

$$(\forall \mathfrak{M} \models \Delta) (\exists \text{ countable } X \subseteq |\mathfrak{M}|) (\forall Z \subseteq |\mathfrak{M}|) [X \subseteq Z \Rightarrow \mathfrak{M} \upharpoonright Z \models \Delta]. \quad (3.35)$$

Consider a model  $\mathfrak{M}^*$  of the set  $\Delta$  of a power  $\alpha > \omega$  such that  $|U(\mathfrak{M}^*)| > \omega$  and  $|\mathfrak{M}^* \setminus U(\mathfrak{M}^*)| > \omega$ . Taking into consideration the fact that set  $X$  in (3.35) for  $\mathfrak{M}^*$  is at most countable while main fragments of  $\mathfrak{M}^*$  are non-countable, we can choose  $Z$  in (3.35) such that  $\Delta$ -model  $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^* \upharpoonright Z$  includes a pair  $(u, v)$  of different elements in  $U(\mathfrak{N})$  while its code-element  $a$  in  $|\mathfrak{N}| \setminus U(\mathfrak{N})$  is missing, that contradicts to definition of a Cartesian-quotient extension of a theory. This shows that  $\Delta$  cannot be a system of axioms of theory  $S = T\langle\varkappa\rangle$ . The same arguments are also applicable to show that complete theory  $S' \supseteq S$  presenting an  $I$ -image of complete theory  $T' \supseteq T$  cannot be  $\exists\forall$ -axiomatizable.

□

LEMMA 3.13. *Any Cartesian interpretation between theories of finite signatures preserves globally properties of being finitely axiomatizable and being  $\Pi_n$ -axiomatizable for any fixed  $n \geq 2$ .*

PROOF. Preservation of the property of finite axiomatizability of a theory is ensured by Lemma 3.3 together with Lemma 3.4 and Lemma 3.9. Preservation of  $\Pi_n$ -axiomatizability of a theory,  $n \geq 2$ , is ensured by Lemma 3.3 together with Lemma 3.5 and Lemma 3.10. Based on elementary properties of c.e. Boolean algebras, it is possible to involve all possible extensions of the theories.

□

#### 4. EXACT INTERPRETATIONS

An interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in the region  $U(x)$  of theory  $T_1$  is said to be an *exact* interpretation if the following conditions are satisfied:

Reference\_Block (4.1)

- (a) *interpretation  $I$  is model-bijective;*
- (b) *each element  $a$  in any model  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}(T_1)$  is first-order definable with constants in the set  $U(\mathfrak{M})$ ;*
- (c) *for any model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T_1$ , an arbitrary automorphism of the model-kernel  $\mu: \mathbb{K}(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M})$  can be extended upto an automorphism  $\mu^* : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  of the whole model.*

End\_Ref

LEMMA 4.1. *Any exact interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in theory  $T_1$  is auto-free, model-bijective, and isostone.*

PROOF. Condition (4.1)(a) provides that  $I$  is a model-bijective interpretation. Lemma 1.5 provides that this interpretation is isostone. Condition (4.1)(c) exactly states that  $I$  is auto-free. □

The following result establishes a close connection between the concepts of an exact interpretation and a Cartesian-quotient interpretation.

LEMMA 4.2. *The following assertions hold:*

- (a) *Any Cartesian-quotient interpretation is an exact interpretation.*
- (b) *Let  $J$  be an exact interpretation of a theory  $T$  of signature  $\tau$  in the region  $U(x)$  of a theory  $S$  of signature  $\sigma$ . There is a sequence of formulas of*



signature  $\tau$

$$\xi = \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \dots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle \quad (4.2)$$

together with an interpretation  $E$  from  $T\langle\xi\rangle$  to  $S$  that is a model isomorphism of theories, such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{J} & S \\ I_{T,\kappa} \searrow & & \nearrow E \\ & T\langle\kappa\rangle & \end{array}$$

PROOF. (a) One can check that all requirements from the definition of an exact interpretation are held for any Cartesian-quotient interpretation.

(b) Definition for interpretation  $J$  ensures that all predicate, function, and constant symbols of signature  $\tau$  are mapped into some formulas  $\Psi_t$ ,  $\Psi'_r$ , and  $\Psi''_s$  of signature  $\sigma$  of corresponding arities. Add to theory  $S$  all  $\tau$ -symbols together with their expressions via the formulas of signature  $\sigma$  defined by the interpretation  $J$  as follows:

$$\begin{aligned} P_t(\bar{x}) &\leftrightarrow \Psi_t(\bar{x}), & P_t \in \tau, \Psi_t(\bar{x}) \in FL(\sigma), \\ y = f_r(\bar{x}) &\leftrightarrow \Psi'_r(y, \bar{x}), & f_r \in \tau, \Psi'_r(\bar{x}) \in FL(\sigma), \\ x = c_s &\leftrightarrow \Psi''_s(x), & c_s \in \tau, \Psi''_s(x) \in FL(\sigma). \end{aligned} \quad (4.3)$$

We obtain a new theory  $S'$  of signature  $\tau \cup \sigma$  that is an extension of theory  $S$ .

Since any element  $a$  in any model  $\mathfrak{M}$  of theory  $S$  is first-order definable with constants from  $U(\mathfrak{M})$ , by Maltsev Compactness Theorem, there is a finite set of first-order formulas  $\lambda_1(x, \bar{z}_1), \lambda_2(x, \bar{z}_2), \dots, \lambda_m(x, \bar{z}_m) \in FL(\sigma)$ ,  $\text{Len}(\bar{z}_i) = k_i$ , realizing the first-order definability in such a manner that any element  $a$  in any model  $\mathfrak{M}$  of theory  $S$  is first-order definable with constants in  $U(\mathfrak{M})$  by means of one of these formulas. More precisely, the following conditions are satisfied for all  $i, j, 1 \leq i, j \leq m$ :

$$\begin{aligned} \lambda_i(x, z_1, \dots, z_{k_i}) &\rightarrow \neg U(x) \& U(z_1) \& \dots \& U(z_{k_i}), \\ \lambda_i(x, \bar{z}_i) \& \lambda_i(y, \bar{z}_i) &\rightarrow x = y, \\ (\forall x)[\neg U(x) &\rightarrow (\exists \bar{z}_1)\lambda_1(x, \bar{z}_1) \vee \dots \vee (\exists \bar{z}_m)\lambda_m(x, \bar{z}_m)], \\ (\exists \bar{z}_i)\lambda_i(x, \bar{z}_i) &\rightarrow (\forall \bar{z}_j) \neg \lambda_j(x, \bar{z}_j), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Initially, we have to choose a sequence of formulas  $\lambda'_i, i = 1, \dots, m$ , matching the first three requirements. After that, by correcting these temporary formulas  $\lambda'_i$ , we can obtain a sequence  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ , satisfying all demands in (4.4).

Let us extend the signature  $\tau \cup \sigma$  of theory  $S'$  with the following new predicate symbols

$$L_i^{k_i+1}, R_i^{k_i}, E_i^{2k_i}, U_i^1; 1 \leq i \leq m, \quad (4.5)$$

and add to theory  $S'$  the following new axioms, for all appropriate  $i$ , obtaining as a result a new theory  $S^*$  :

$$\begin{aligned} L_i(x, \bar{z}) &\leftrightarrow \lambda_i(x, \bar{z}), \\ R_i(\bar{z}) &\leftrightarrow (\exists x)\lambda_i(x, \bar{z}), \\ E_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &\leftrightarrow (\exists x)\lambda_i(x, \bar{z}_1) \& \lambda_i(x, \bar{z}_2), \\ U_i(x) &\leftrightarrow (\exists \bar{z})\lambda_i(x, \bar{z}), \\ R_i(\bar{z}) &\leftrightarrow I\varphi_i(\bar{z}), \quad \varphi_i \in FL(\tau), \\ E_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2) &\leftrightarrow I\varepsilon_i(\bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad \varepsilon_i \in FL(\tau). \end{aligned} \quad (4.6)$$

The formulas  $\varphi_i$  and  $\varepsilon_i$  are found by applying Lemma 1.4, taking into account the fact that interpretation  $J$ , by Lemma 4.1, is both auto-free and isostone. Notice that the block of requirements (4.6) exactly matches the definition of a Cartesian-quotient extension of a model of signature  $\tau$  defined in the region  $U(x)$ . Particularly, the restriction of theory  $S^*$  up to the signature

$$\pi = \tau \cup \{L_i^{k_i+1}, R_i^{k_i}, E_i^{2k_i}, U_i^1; 1 \leq i \leq m\} \quad (4.7)$$

is isomorphic to  $T\langle \xi \rangle$  with  $\xi = \langle \varphi_1/\varepsilon_1, \dots, \varphi_m/\varepsilon_m \rangle$ .

In the obtained theory  $S^*$ , both the  $\tau$ -symbols and the new predicates (4.5) are first-order definable relative to signature  $\sigma$ . Now, we are going to prove an inverse assertion, that in  $S^*$ , all symbols of signature  $\sigma$  are first-order definable relative to the symbols (4.7). Consider a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $S^*$ . Let  $\mathfrak{M}$  be the restriction of  $\mathfrak{M}^*$  up to signature  $\sigma$ , while  $\mathfrak{M}'$  be the restriction of  $\mathfrak{M}^*$  up to signature  $\pi$ . Since interpretation  $J$  is exact, any automorphism  $\mu$  of the kernel model  $\mathbb{K}(\mathfrak{M})$  of signature  $\tau$  can be extended up to an automorphism  $\mu'$  of the whole model  $\mathfrak{M}$ , and such an extension  $\mu'$  of  $\mu$  is unique by virtue of Part (b) in (4.1); moreover, any extra predicates in  $\pi$  are also preserved by  $\mu'$  because they are first-order definable relative to  $\tau$ . On the other hand, the pointed out automorphism  $\mu$  of the model  $\mathfrak{M}' \upharpoonright U$  of signature  $\tau$  can be extended up to an automorphism  $\mu''$  of the model  $\mathfrak{M}'$  of signature  $\pi$  in a unique way because

$\mathfrak{M}'$  represents a Cartesian-quotient extension over  $\mathfrak{M}' \upharpoonright U$ . The uniqueness property provides that, actually, we have  $\mu' = \mu''$  in this situation. This shows that the models  $\mathfrak{M}^*$  and  $\mathfrak{M}'$  admit the same collection of automorphisms. From this, it is possible to show that Beth's first-order Definability Theorem, [4, Th. 5.5.4], is applicable. Therefore, all predicates of signature  $\sigma$  are first-order definable in  $S^*$  with respect to the symbols of  $\pi$ . As a result, we have obtained a sequence of formulas (4.2) together with the required isomorphism  $E$ .  $\square$

Mention an important modification of Lemma 4.2.

LEMMA 4.3. *Suppose that formulas  $\lambda_i$  in the proof of Lemma 4.2 are chosen such that the following inverse uniqueness property takes place:*

$$\lambda_i(x, \bar{z}_1) \& \lambda_i(x, \bar{z}_2) \rightarrow \bar{z}_1 = \bar{z}_2, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.8)$$

*In this case, the tuple (4.2) has the form (2.1)(a); thereby, the interpretation  $I_{T,\xi}$  is a Cartesian interpretation.*

PROOF. From the extra demand (4.8) we obtain that the atomic formulas  $E_i(z_1, z_2)$  and thus the formulas  $\varepsilon_i(z_1, z_2)$  are equality relations on the tuples of corresponding lengths; i.e., the tuple (4.2) represents a Cartesian extension. Thereby, the interpretation  $I_{T,\xi}$  built in Lemma 4.2 is a special Cartesian interpretation.  $\square$

## 5. MULTI-DIMENSIONAL QUOTIENT INTERPRETATIONS

In the simplest case (when elements of  $T_0$  are presented by ordinary elements of  $T_1$ ), an interpretation  $I : T_0 \twoheadrightarrow T_1$  is said to be *simple*. If elements of  $T_0$  are presented by classes modulo a definable equivalence relation within a region in  $T_1$ , such an interpretation is called a *quotient* interpretation. Alternatively, if elements of  $T_0$  are presented by tuples of a fixed finite length  $k$  within a definable set of tuples, such an interpretation is called *k-dimensional* or simply *dimensional*. Interpretations of both quotient and dimensional type are also possible. Such an interpretation is called *dimensional-quotient*. Finally, the most common class of interpretations is also possible where the region of interpretation of  $T_0$  in  $T_1$  is presented by a finite union of definable sets of tuples of different finite lengths. Such an interpretation is called *multi-dimensional*, if no quotients are used, and *multi-dimensional quotient*, if elements of  $T_0$  are

presented by quotient classes modulo a definable equivalence relation on the region formed by the union of these sets of tuples of mixed dimensions.

Region of a multi-dimensional quotient interpretation  $I$  of theory  $T_0$  in theory  $T_1$  is presented by a quotient set  $D/E$ , where  $D$  is the union of a finite number of sets of tuples

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n, \quad (5.1)$$

of definite dimensions  $\dim(D_i) = m_i$ ,  $0 < m_i < \omega$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , while the equivalence relation  $E$  on  $D$  is presented by the union

$$E = \bigcup_{0 < i < j \leq n} E_{i,j}, \quad (5.2)$$

where  $D_i$  is defined in  $T_1$  by a first-order formula  $\psi_i(\bar{x}_i)$ ,  $\text{Len}(\bar{x}_i) = m_i$ , while  $E_{i,j}$  is defined in  $T_1$  by a formula  $\varepsilon_{i,j}(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ . Some block of first-order demands should be accepted that would guarantee  $D$  to be a non-empty set while the relation  $E$  to be an equivalence relation on the set  $D$ . Interpretation  $I$  maps predicates of theory  $T$  into their presentations in theory  $S$ . In detail, atomic formulas of theory  $T$  are mapped into definite piecewise first-order expressions in theory  $S$ . By induction, this map is expanded upto the set of all formulas of theory  $T$ . Let  $\mathcal{A}(v_1, \dots, v_k)$  be a formula of theory  $T_0$ . Its  $I$ -image is defined by a set-theoretic union of the family of definable sets in theory  $T_1$  of the form

$$I(\mathcal{A}) = \bigcup_{i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}} A_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \quad (5.3)$$

where  $A_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  is the relation defined in theory  $T_1$  by a formula of the form

$$\varphi_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}) \& \psi_{i_1}(\bar{x}_{i_1}) \& \dots \& \psi_{i_k}(\bar{x}_{i_k}). \quad (5.4)$$

Each part  $A_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  concerns a set of representatives; by passing to the union of these parts and then finding closure of all these cases up to full  $E$ -classes, we obtain the required  $n$ -ary relation  $I(\mathcal{A})$  on the quotient-set  $D/A$  in the target theory  $T_1$ . Again, some block of first-order demands should be accepted that would guarantee  $I(\mathcal{A})$  to be defined within the region  $D/A$ . Notice that the interpretation  $I$  itself is uniquely determined by the description of the region of interpretation  $D/E$  together with the mapping of each atomic formula  $\mathcal{A}(x_0, \dots, x_k)$  of  $T_0$  into its images  $I(\mathcal{A})$  in theory  $T_1$  as described above. Having these parts assigned, we can inductively define  $I(\varphi)$  for all formulas  $\varphi \in FL(\sigma_0)$ .

## 6. MULTI-DIMENSIONAL VERSUS CARTESIAN INTERPRETATIONS

We compare the two classes of interpretations.

LEMMA 6.1. *The following assertions are held:*

(a) *If  $I : T \rightsquigarrow S$  is an arbitrary Cartesian-quotient interpretation, then  $I$  is a multi-dimensional quotient interpretation; moreover, there is a multi-dimensional quotient interpretation  $J : S \rightsquigarrow T$  that is inverse relative to  $I$ ; i.e.,  $J \circ I : T \rightsquigarrow T$  is identical on  $T$ , while  $I \circ J : S \rightsquigarrow S$  is identical on  $S$ .*

(b) *If  $I : T \rightsquigarrow S$  is an arbitrary Cartesian interpretation, then  $I$  is a multi-dimensional interpretation; moreover, there is a multi-dimensional interpretation  $J : S \rightsquigarrow T$  that is inverse relative to  $I$ ; i.e.,  $J \circ I : T \rightsquigarrow T$  is identical on  $T$ , while  $I \circ J : S \rightsquigarrow S$  is identical on  $S$ .*

PROOF. Based on the definitions. □

Lemma 6.1 shows that the class of invertible multi-dimensional quotient interpretations studied in the work [1] is a natural extension of the class of Cartesian-quotient interpretations; the same is also true for the case without quotients.

The following lemma establishes a close link between these two classes of interpretations.

THEOREM 6.2. *Let  $T$  be a theory of an enumerable signature  $\tau$ , and  $S$  be a theory of an enumerable signature  $\sigma$ . Let  $I : T \rightsquigarrow S$  be a multi-dimensional quotient interpretation between  $T$  and  $S$  that is invertible in this class; i.e., there is a multi-dimensional quotient interpretation  $J : S \rightsquigarrow T$  such that  $J \circ I$  is identical on  $T$  and  $I \circ J$  is identical on  $S$ . There is a theory  $H$  and two Cartesian-quotient interpretations  $F : T \rightsquigarrow H$  and  $G : S \rightsquigarrow H$  such that  $I = G^{-1} \circ F$  and  $J = F^{-1} \circ G$ ; that is, the following diagram is commutative:*

$$\begin{array}{ccc} T & \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{J} \end{array} & S \\ & \begin{array}{c} \searrow F \\ \swarrow G \end{array} & \\ & & H \end{array}$$

PROOF. Consider the following signature

$$\eta = \tau \cup \sigma \cup \{A^1, B^1\} \cup \{P_1^{m_1+1}, \dots, P_p^{m_p+1}\} \cup \{R_1^{n_1+1}, \dots, R_q^{n_q+1}\}, \quad (6.1)$$

supposing that all listed in (6.1) parts are disjoint with each other.

The number  $p$  and the parameters  $m_1, \dots, m_p$  are defined from presentation (5.1) for the interpretation  $I$ , while  $q$  and  $n_1, \dots, n_q$  are defined from presentation (5.1) for the other interpretation  $J$ . Respectively, predicates  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , and  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , are intended to perform transformations of the model-kernels available in a multi-dimensional quotient form into a normal form with a standard equality relation.

Axioms of theory  $H$  include the following sentences:

$$1^\circ. (\exists x)A(x) \ \& \ (\exists x)B(x),$$

$$2^\circ. (\forall x)[A(x) \vee B(x)] \ \& \ (\forall x)[\neg A(x) \vee \neg B(x)],$$

3°. Axioms of  $T$  are satisfied in the region distinguished by  $A(x)$ ; moreover, all  $\tau$ -symbols are defined trivially outside  $A(x)$ ,

4°. Axioms of  $S$  are satisfied in the region distinguished by  $B(x)$ ; moreover, all  $\sigma$ -symbols are defined trivially outside  $B(x)$ ,

$$5^\circ. P_i(\bar{x}, z) \rightarrow \bar{x} \subseteq A \ \& \ z \in B,$$

$$6^\circ. R_i(\bar{x}, z) \rightarrow \bar{x} \subseteq B \ \& \ z \in A,$$

7°. Predicates  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , establish an isomorphism between the model-kernel  $\mathbb{K}_I(\mathfrak{M}')$  of a model  $\mathfrak{M}'$  of theory  $S$  located in the region  $B(x)$  (presented as a multi-dimensional quotient structure) and a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  defined within the region  $A(x)$  cf. left-hand side part in Fig. 6.1 (further details are specified below).

8°. Predicates  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , establish an isomorphism between the model-kernel  $\mathbb{K}_J(\mathfrak{M})$  of a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  located in the region  $A(x)$  (presented as a multi-dimensional quotient structure) and a model  $\mathfrak{M}'$  of theory  $S$  defined within the region  $B(x)$  cf. right-hand side part in Fig. 6.1 (further details are specified below).

List of axioms is complete.

In accordance with Axioms 1°–4°, a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$  consists of two disjoint regions  $A(x)$  and  $B(x)$ ; moreover, a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  is defined in the region  $A(x)$ , and a model  $\mathfrak{M}'$  of theory  $S$  is defined in the region  $B(x)$ . Predicates  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , realize in  $H$  an action from the model  $\mathfrak{M}'$  onto the model  $\mathfrak{M}$ , cf. Fig. 6.1(a), while predicates  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , realize in  $H$  a back action from the model  $\mathfrak{M}$  onto the model  $\mathfrak{M}'$ , cf. Fig. 6.1(b). Both schemes of interaction between the regions  $A(x)$  and  $B(x)$  act simultaneously; thus,

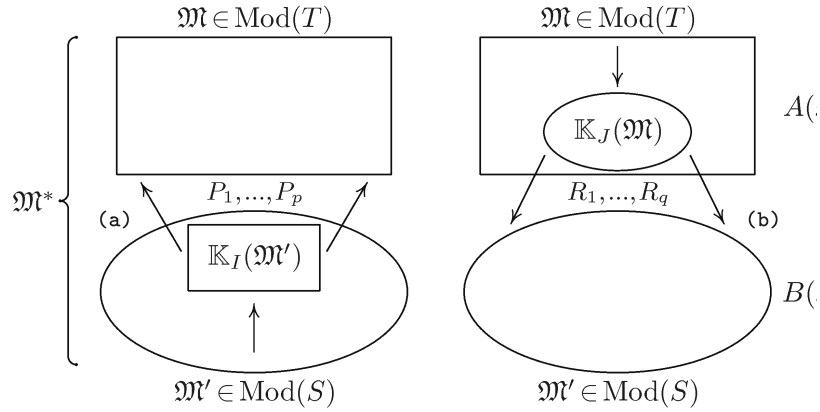


Figure 6.1 – A model  $\mathfrak{M}^* \in \text{Mod}(H)$  linking models of theories  $T$  and  $S$

division the scheme in Fig. 6.1 into two parts is done just for convenience of the description.

*Extra specifications for Axiom 7°* correspond to the scheme presented in Fig. 6.1(a). Given a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  that is defined by Axiom 3° in part  $A(x)$  of a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$ . In accordance with Section 1, a model kernel  $\mathbb{K}_I(\mathfrak{M}')$  is defined within  $\mathfrak{M}'$ , such that  $\mathbb{K}_I(\mathfrak{M}')$  is presented by a quotient structure in a multi-dimensional region of  $\mathfrak{M}'$ , similar to that given in (5.1), with a finite number  $p$  of parts whose dimensions are positive numbers, say,  $m_1, m_2, \dots, m_p$ ; moreover,  $\mathbb{K}_I(\mathfrak{M}')$  is a model of theory  $T$ . Respectively, predicates  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , in signature (6.1) have arities  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_p + 1$ . Each of these predicates is associated with a component of corresponding dimension. In essence, Axiom 7° claims that, as a whole, the collection of predicates  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , represents an isomorphism between the model-kernel  $\mathbb{K}_I(\mathfrak{M}')$  of the model  $\mathfrak{M}'$  of theory  $S$  in the region  $B(x)$  and a model  $\mathfrak{M}$  of theory  $T$  in the region  $A(x)$ .

*Extra specifications for Axiom 8°* are similar to those explained above for Axiom 7°, although they act in back direction, cf, Fig. 6.1(b).

CLAIM 6.3. *The pair of mutually inverse to each other interpretations  $I : T \rightarrow S$ , and  $J : S \rightarrow T$  define a computable isomorphism between the Tarski-Lindenbaum algebras:*

$$\mu : \mathcal{L}(T) \rightarrow \mathcal{L}(S). \quad (6.2)$$

PROOF. Immediately, from elementary properties of Boolean algebras.  $\square$

CLAIM 6.4. *For an arbitrary pair  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$  that is presented in a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$ , any element satisfying  $A(x)$  is first-order definable relative to a finite tuple  $\bar{c}$  of constants in  $B(x)$  consisting of not more than  $\max(m_1, \dots, m_p)$  elements; and vice versa, any element satisfying  $B(x)$  is first-order definable relative to a finite tuple  $\bar{c}$  of constants in  $A(x)$  consisting of not more than  $\max(n_1, \dots, n_q)$  elements.*

PROOF. First-order definability of elements in  $A(x)$  under finite tuples of elements in  $B(x)$  is provided by the properties of predicates  $P_1, \dots, P_p$  claimed in Axiom 7°. Definability of elements in  $B(x)$  under finite tuples in  $A(x)$  is provided by the properties of predicates  $R_1, \dots, R_q$  claimed in Axiom 8°.  $\square$

CLAIM 6.5. *The relation consisting of all pairs  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$  that can be presented in a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$  represents a one-to-one mapping between isomorphism types of models of theory  $T$  and models of theory  $S$ .*

PROOF. By description, a pair  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$  is presented in a model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$  if and only if  $\mathfrak{M}$  is a model of a complete extension  $T'$  of  $T$ , while  $\mathfrak{M}'$  is a model of a complete extension  $S'$  of  $S$ , such that,  $S' = \mu(T')$  with  $\mu$  defined in Claim 6.3; moreover, the models  $\mathfrak{M}$  and  $\mathfrak{M}'$  are linked in accordance with the mutually inverse interpretations  $I$  and  $J$ .  $\square$

Now, we specify the demanded interpretations  $F$  and  $G$ . By  $F : T \rightarrow H$ , we denote a natural interpretation of theory  $T$  in the region  $A(x)$  of theory  $H$  defined in accordance with Axiom 3°. By  $G : S \rightarrow H$ , we denote a natural interpretation of theory  $S$  in the region  $B(x)$  of theory  $H$  defined in accordance with Axiom 4°.

Let us study properties of these interpretations.

CLAIM 6.6. *The following assertions hold:*

- (a)  $F : T \rightarrow H$  is a Cartesian-quotient interpretation,
- (b)  $G : S \rightarrow H$  is a Cartesian-quotient interpretation.

PROOF. (a) By construction together with Claim 6.5, we obtain that  $F$  is model-bijective. Based on Claim 6.4, we can check that any element  $a$  in an arbitrary model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$  is first order definable with a finite tuple of elements in its model-kernel. We obtain that for any model  $\mathfrak{M}^*$  of theory  $H$ , an arbitrary automorphism of the kernel  $\mu: \mathbb{K}(\mathfrak{M}^*) \rightarrow \mathbb{K}(\mathfrak{M}^*)$  can be extended



up to an automorphism  $\mu' : \mathfrak{M}^* \rightarrow \mathfrak{M}^*$  of the whole model. Thereby, all parts of definition (4.1) are satisfied for  $F$ . By applying Lemma 4.2(b), we obtain that  $F$  is a Cartesian-quotient interpretation.

Similar arguments can be applied to show that  $G$  is also a Cartesian-quotient interpretation of theory  $S$  in the theory  $H$ .  $\square$

We pass to the final part of the proof of Theorem 6.2. Based on the description of the interpretations  $I$  and  $J$ , it is possible to check that  $I = G^{-1} \circ F$  is satisfied, and another relation  $J = F^{-1} \circ G$  is also satisfied; thus, we have obtained exactly what is required. Theorem 6.2 is proved.  $\square$

REMARK 6.7. A  $C$ -version of Theorem 6.2 is also valid; for this, we have to eliminate the demand of being a quotient, both for multi-dimensional interpretations and Cartesian interpretations. The only change we should insert is a modified demand in the proof stating that predicates  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , establish an isomorphism (non-quotient) between  $\mathbb{K}_J(\mathfrak{M}')$  and  $\mathfrak{M}$ , while predicates  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , establish an isomorphism (non-quotient) between  $\mathbb{K}_J(\mathfrak{M})$  and  $\mathfrak{M}'$ . Thus, Lemma 4.3 becomes applicable yielding a version without quotients.

There is a close link between the two classes of interpretations.

LEMMA 6.8. *Let  $T$  and  $S$  be arbitrary theories of enumerable signatures. The following assertions are satisfied:*

(a) *there is an invertible multi-dimensional quotient interpretation  $I$  of theory  $T$  in theory  $S \Leftrightarrow (\exists \varkappa_1 \varkappa_2 \in \mathcal{K}D)[T\langle \varkappa_1 \rangle \approx S\langle \varkappa_2 \rangle]$ ,*

(b) *there is an invertible algebraic multi-dimensional interpretation  $I$  of theory  $T$  in theory  $S \Leftrightarrow (\exists \varkappa_1 \varkappa_2 \in \mathcal{K}C_{\exists \cap \forall})[T\langle \varkappa_1 \rangle \approx_a S\langle \varkappa_2 \rangle]$ .*

PROOF. (a) Immediately, from Theorem 6.2. (b) Immediately, from the  $C$ -version of Theorem 6.2 that can be checked to be valid in algebraic mode. Lemma 2.5 and Remark 2.6 state that the relations in the class of theories pointed out in (a) and (b) are equivalence relations.  $\square$

REMARK 6.9. An algebraic version of Lemma 6.8(a) characterizing the case with quotients is possible. However, it would require to specify the algebraic type of multi-dimensional quotient interpretations with the limitation stating that any formula  $\varepsilon_i(\bar{y}_i, \bar{z}_i)$  in (2.1)(b) is an equivalence relation in the corresponding domain  $\varphi_i(\bar{x}_i)$  of theory  $T$ . The latter demand turns out being

outside of our approach; thus, we do not consider this version of the concept at all.

LEMMA 6.10. *Let  $T$  and  $S$  be theories of enumerable signatures and  $I : T \rightarrow S$  be an invertible  $\exists \cap \forall$ -presentable multi-dimensional interpretation. There is a theory  $T'$  of a finite signature satisfying  $T' \approx_a T$  if and only if there is a theory  $S'$  of a finite signature satisfying  $S' \approx_a S$ .*

PROOF. Immediately. □

THEOREM 6.11. *Given a theory  $T$  of an enumerable signature  $\sigma$  and a sequence of formulas  $\varkappa \in \mathcal{KC}(\sigma)$  satisfying (2.4). If there is a theory  $S'$  of a finite signature satisfying  $S' \approx_a T\langle\varkappa\rangle$ , it is possible to find a finite part  $\sigma^*$  of  $\sigma$  such that all  $\sigma$ -symbols are  $\exists \cap \forall$ -presentable in  $T$  relative to  $\sigma^*$ .*

PROOF. Immediately, from Lemma 6.1(b) together with Lemma 6.10. □

## 7. CONCLUSION

The operation of a Cartesian-quotient extension of a theory  $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$  can be considered as a method of addition of imaginary elements when a definable set or even a first-order definable set modulo a definable equivalence relation is joined to the universe of a model as a set of additional (it is possible to say, virtual) elements. There is a possibility, based on first-order language, to simulate the first-order formulas within the region containing the universe together with the added virtual regions. Accordingly, it is possible to name the relation (2.6) as *virtual isomorphism of theories*. Notice that, the concept of a virtual extension of a theory was considered in [7]. Results of Section 6 state that the class of invertible multi-dimensional quotient interpretations exactly coincides with the class of virtual quotient isomorphisms of theories, while the class of invertible multi-dimensional interpretations coincides with the class of virtual isomorphism of theories. Thereby, the properties proved for the operation of a Cartesian-quotient extension can be transferred to the class of invertible multi-dimensional interpretations of theories.

## REFERENCES

- 1 Myers D. An interpretive isomorphism between binary and ternary relations // Structures in Logic and Computer Science. – Lecture Notes in Computer Science. – 1997. – V. 1261. – P. 84-105.
- 2 Peretyat'kin M.G. Semantic universality of theories over the superlist // Algebra and Logic. – 1992. – V. 30, No. 5. – P. 517-539.
- 3 Mendelson E. Introduction to mathematical logic. – Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London, Second edition, 1979.
- 4 Hodges W. A shorter model theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 5 Rogers H.J. Theory of recursive functions and effective computability. – New York: Mc. Graw-Hill Book Co., 1967. – 472 p.
- 6 Ershov Yu.L., Goncharov S.S. Constructive models. – Siberian School of Algebra and Logic. New York, NY: Consultants Bureau. XII, 2000. – 293 p.
- 7 Peretyat'kin M.G. First-order combinatorics and model-theoretical properties that can be distinct for mutually interpretable theories // Siberian Advances in Mathematics. – 2016. – V. 26, No. 3. – P. 196-214.
- 8 Shoenfield J.R. Mathematical logic. – Addison-Wesley, Massachusetts, 1967.
- 9 Peretyat'kin M.G. Finitely axiomatizable theories. – New York: Plenum Publ. Co., New York, London, Moscow, 1997. – 294 p.

*Received 28.09.2016*

**Перетят'кин М.Г. ҚАЙТАРЫМДЫ КӨПӨЛШЕМДІ ТҮСІНДЕРМЕ-  
ЛЕР ЖӘНЕ БІРІНШІ РЕТТІ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ВИРТУАЛДЫ ИЗО-  
МОРФИЗМДЕРІ**

Кез келген қайтарымды факторлы көпөлшемелі түсіндірмелердің факторлы-декарттық кеңейтулер операциясы арқылы кейіптемесі және теориялардың алгебралық изоморфизм қатынасы табылған. Сонымен бірге факторлықты талап етпейтін нұсқалар үшін де осындай жіктеу орын алып отыр. Қайтарымды факторлық көпөлшемелі түсіндірмелер класының теориялардың факторлық виртуалды изоморфизмдер класымен дәлме-дәл беттесетіні, ал қайтарымды көпөлшемді түсіндірмелер класының теориялардың виртуалды изоморфизмдер класымен дәлме-дәл беттесетіні көрсетілген. Теориялардың факторлы-декарттық кеңейтулер операциясының бірқатар бірінші ретті қасиеттері зерттелген, олар қайтарымды көпөлшемді түсіндірмелер класына тікелей көшіріледі.

Перетягькин М.Г. ОБРАТИМЫЕ МУЛЬТИРАЗМЕРНОСТНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ТЕОРИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Найдено представление произвольных обратимых факторных многомерностных интерпретаций через операцию факторно-декартовых расширений и отношение алгебраического изоморфизма теорий. Аналогичное разложение имеет место также для версий с опущенным требованием факторности. Показано, что класс обратимых факторных многомерностных интерпретаций в точности совпадает с классом факторных виртуальных изоморфизмов теорий, а класс обратимых многомерностных интерпретаций совпадает с классом виртуальных изоморфизмов теорий. Изучен ряд свойств первого порядка операции факторно-декартовых расширений теорий, которые непосредственно переносятся на класс обратимых многомерностных интерпретаций.

**СООТВЕТСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
РАСПОЛОЖЕНИЯ РАЙОНОВ ГЛУБОКОФОКУСНОЙ  
СЕЙСМИЧНОСТИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ В  
ВЕКОВЫХ ВАРИАЦИЯХ УГЛОВ ГЕОМАГНИТНОГО  
НАКЛОНЕНИЯ**

А.М. СЕРАЛИЕВ<sup>1</sup>, Э.Р. ХАСАНОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ДТОО Институт ионосферы  
050020, Алматы, ул. Шевченко, 15, e-mail: <sup>1</sup>alibek-seraliev@mail.ru.  
<sup>2</sup>alfa.xq@gmail.com.

Аннотация: Проанализированы значения компонент главного геомагнитного поля в эпицентрах 205311 землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$ , произошедших на планете в 1973-2014 г.г. Получено распределение глубин гипоцентров в зависимости от географической широты и долготы и в зависимости от значений северной ( $X$ )-компоненты геомагнитного поля в эпицентре во время события. Показано, что глубины гипоцентров организованы в зависимости от  $X$ -компоненты главного геомагнитного поля. Землетрясения с  $M \geq 4.5$  практически отсутствуют в районах с отрицательными значениями  $X$ , в районах с  $X \lesssim 15000$  нТ происходят только мелкофокусные (коровые) землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 70$  км, в районах с  $15000 < X < \sim 25000$  нТ происходят и мелкофокусные и промежуточные землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 350$  км, а в районах со значениями  $X > 25000$  нТ происходят все три типа землетрясений: коровые, промежуточные и глубокофокусные с глубиной гипоцентров до 700 км. Сделан вывод о связи сейсмического процесса с вариациями главного магнитного поля Земли.

Ключевые слова: Главное магнитное поле Земли, глубина гипоцентров землетрясений.

Связь пространственного распределения сейсмически активных зон с пространственным распределением характеристик главного геомагнитно-

---

Keywords: *Main geomagnetic field, depth of earthquake epicenters.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта РБП-076 "Разработать методические основы оценки сейсмической опасности на основе данных о вариациях солнечной активности, геомагнитного поля и скорости вращения Земли". Регистрационный номер (РН) 0115РК01276.

© А.М. Сералиев, Э.Р. Хасанов, 2016.

го поля, генерируемого во внешнем жидком ядре Земли [1], обсуждается в последнее десятилетие [2]–[5]. В этих работах обнаружено структурное соответствие между географическим расположением на планете сейсмически активных зон и геометрией главного геомагнитного поля. Данная работа продолжает исследования [2]–[4], анализируя один из основных сейсмологических параметров – глубину залегания гипоцентров землетрясений. Используются данные глобального сейсмологического каталога NEIC для землетрясений представительной магнитуды  $M \geq 4.5$ , произошедших на планете в 1973-2014 г.г. (205311 событий). Гипоцентр есть центральная точка очага землетрясения, в которой начинается подвижка пород, а в случае протяженного очага под гипоцентром понимают точку начала вспарывания разрыва [6]. Глубина залегания гипоцентра обычно колеблется от нескольких километров до 700 км. В зависимости от глубины расположения гипоцентра все землетрясения подразделяют на три группы: мелкофокусные или поверхностные (от 0 до 70 км), среднефокусные или интервальные (от 70 до 300-350 км) и глубокофокусные (от 350 до 700 км). Наличие глубокофокусных землетрясений говорит о том, что зоны разломов проникают в мантию Земли намного ниже уровня земной коры. Статистика распределения на планете глубин гипоцентров очень важна, поскольку такие данные, особенно для глубокофокусных землетрясений, могут пролить свет на состояние пород в глубинах Земли, куда человек никогда не проникнет. В работе изучено распределение глубин гипоцентров в зависимости от величины северной (X)-компоненты главного геомагнитного поля в эпицентре во время события. Значения X-компоненты в эпицентрах были рассчитаны по международной справочной модели геомагнитного поля IGRF-10 [7]. IGRF – это набор математических моделей, которые описывают главное магнитное поле и его вековые вариации, обусловленные внутренними источниками, через отрицательный градиент скалярного потенциала  $V$ , который, в свою очередь, представлен усеченным рядом сферических гармоник в виде

$$V(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r}\right) \cdot (g_n^m(t) \cos m\lambda + h_n^m(t) \sin m\lambda) \cdot P_n^m(\cos \theta),$$

где  $r, \theta, \lambda, t$  – геоцентрические сферические координаты ( $r$  – расстояние от центра Земли),  $\lambda$  – долгота на восток от Гринвичского меридиана и

$\theta$  – коширота ( $90^0$  минус широта),  $R$  – среднее значение радиуса Земли (6372.1 км),  $g_n^m$  и  $h_n^m$  – коэффициенты Гаусса,  $P_n^m(\cos\theta)$  – присоединенные функции Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ . Среднеквадратическая ошибка определения модуля полного вектора геомагнитного поля по модели IGRF – наименьшая для 1979-1980 г.г., когда проводились измерения поля на спутнике MAGSAT, и после 1999 г. благодаря использованию данных спутников Ørsted и CHAMP. Для эпох 1980 и 2000 г.г. среднеквадратическая ошибка определения полного вектора поля составляет  $\sim 10$  нТл, а для других эпох, рассмотренных в данной работе,  $\sim 50$  нТл. Ошибка в 10 нТл для полного вектора дает ошибки для компонент магнитного поля примерно 5 нТл [<http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/>]. При увеличении ошибки определения модульного значения ошибка определения компонент поля пропорционально увеличивается. На Рис. 1 показано распределение глубин гипоцентров изучаемых землетрясений в зависимости от географической широты. В общем можно сказать, что в высоких широтах происходят только мелкофокусные землетрясения: глубина гипоцентров не превышает 70 км, а промежуточные и глубокофокусные происходят на средних и низких широтах.

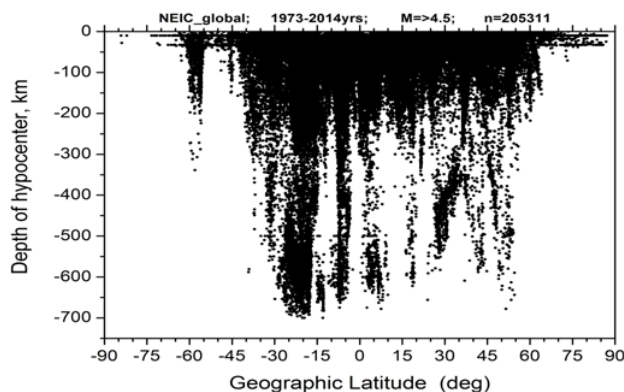


Рисунок 1 – Распределение глубин гипоцентров землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$ , произошедших на планете в 1973-2014 г.г. (205311 событий) в зависимости от географической широты

На Рис. 2 показано распределение глубин гипоцентров в зависимости от северной  $X$ -компоненты геомагнитного поля. Картина распределения гипоцентров на этом рисунке кардинально отличается от представленных на Рис. 2, позволяя провести систематизацию трех типов землетрясений (мелкофокусных, промежуточных и глубокофокусных) в зависимости от геомагнитного параметра. Видно, что землетрясения с  $M \geq 4.5$  практически отсутствуют в районах с отрицательными значениями геомагнитной  $X$ -компоненты, которые расположены в высоких широтах между географическим и геомагнитным полюсами. В районах с  $X < \sim 15000$  нТ происходят только мелкофокусные (коровые) землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 70$  км, в районах с  $15000 < X < \sim 25000$  нТ происходят и мелкофокусные и промежуточные землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 350$  км, а все три типа землетрясений: коровые, промежуточные и глубокофокусные происходят только в районах со значениями  $X > 25000$  нТл. Этот результат поддерживает предположение о связи пространственного распределения сейсмоактивных зон с пространственным распределением параметров геомагнитного поля.

В дополнение к вышесказанному из Рис. 2 можно увидеть, что в области перехода между мелкофокусными и среднефокусными землетрясениями выделяется район с наклонным падением линии гипоцентров. Такой же район выделяется и в переходной зоне между среднефокусными и глубокофокусными землетрясениями. Причина этого связана с тем, что землетрясения происходят внутри тектонических разломов, которые не всегда вертикальны, а могут быть наклонены под углом к земной поверхности. В этом случае географические координаты эпицентра (вертикальная проекция гипоцентра на земную поверхность) не будут совпадать с координатами выхода на поверхность тектонического разлома, процессы в котором спровоцировали землетрясение. В этой связи можно заключить, что компоненты геомагнитного поля следует рассчитывать в гипоцентрах землетрясений.

В течение изучаемых 42 лет (1973-2014 г.г.) на планете произошло 10314 глубокофокусных землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$  и глубиной гипоцентров более 350 км. Эпицентры этих землетрясений представлены на Рис. 3, где цветом указаны их глубины от 350 до 700 км. На Рис. 4 приведена глобальная карта вековых вариаций угла геомагнитного наклона



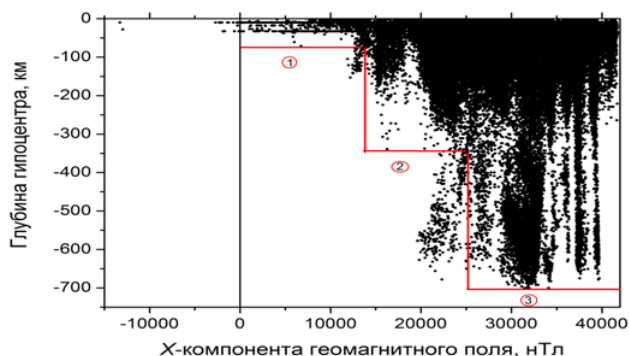


Рисунок 2 – Распределение глубин гипоцентров землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$ , произошедших на планете в 1973-2014гг (205311 событий), в зависимости от значения северной ( $X$ )-компоненты главного геомагнитного в эпицентре события, рассчитанного по модели IGRF-10

([http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/data/mag\\_maps/browse/I\\_map\\_sv\\_2020\\_large.jpeg](http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/data/mag_maps/browse/I_map_sv_2020_large.jpeg)). Сопоставляя карты на Рис. 3 и 4, можно заключить, что районы глубокофокусной сейсмичности территориально совпадают с районами экстремальных значений в вековых вариациях угла геомагнитного наклоения, что также говорит о связи пространственных вариаций сейсмичности и главного геомагнитного поля.

Статистика пространственного распределения гипоцентров землетрясений, выраженная в терминах северной  $X$ -компоненты главного геомагнитного поля, рассчитанной по международной справочной модели IGRF-10 в эпицентрах 205311 землетрясений с магнитудой  $\geq 4.5$ , произошедших на планете в 1973-2014 г.г., позволяет заключить:

- землетрясения практически отсутствуют в районах с отрицательными значениями геомагнитной  $X$ -компоненты, которые расположены в высоких широтах в районах между географическим и геомагнитным полюсами;
- в географических районах, где значение геомагнитной  $X$ -компоненты меньше, чем  $\sim 15000$  нТл, происходят только мелкофокусные (коровые) землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 70$  км;
- в географических районах, где значение геомагнитной  $X$ -компоненты

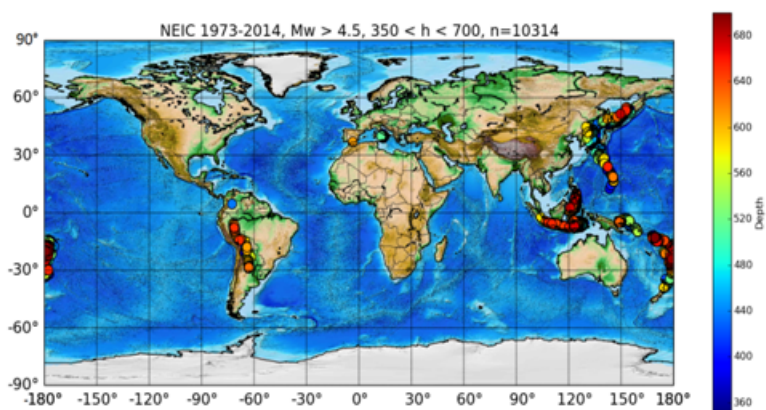


Рисунок 3 – Карта распределения на планете глубокофокусных землетрясений глубина гипоцентров более 350 км .

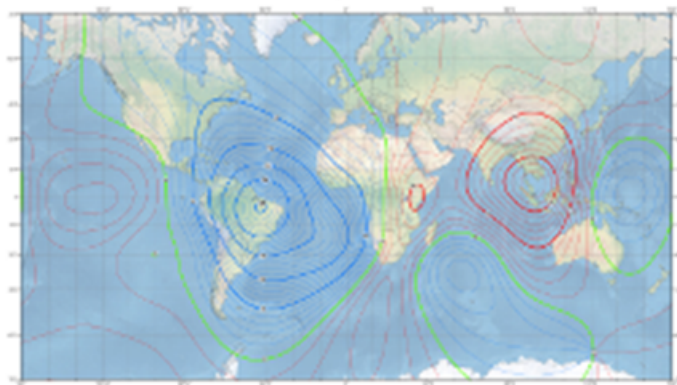


Рисунок 4 – Карта вековых вариаций угла геомагнитного наклонения.

находится в пределах  $15000 \text{ нТл} < X < 25000 \text{ нТл}$ , происходят как мелкофокусные, так и промежуточные землетрясения с глубиной гипоцентров до  $\sim 350 \text{ км}$ ;

- в географических районах, где значение геомагнитной  $X$ -компоненты превышает  $25000 \text{ нТл}$ , происходят все три типа землетрясений: коровые, промежуточные и глубокофокусные с глубиной гипоцентров до  $700 \text{ км}$ ;

- пространственное расположение глубокофокусных землетрясений территориально совпадает с районами экстремальных значений в вековых вариациях угла геомагнитного наклона.

Полученные результаты говорят о связи сейсмического режима планеты с пространственной структурой главного геомагнитного поля, что пока не учитывается при решении сейсмологических задач.

**БЛАГОДАРНОСТЬ!** Выражаем большую благодарность доктору физико-математических наук Хачикян Галине Яковлевне и кандидату физико-математических наук Жумабаеву Бейбиту Тенеловичу за постановку задачи и курирование работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Glatzmaier G. A., Roberts P.H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle // *Journal Physics Earth Planet Interior*. – 1995. – V. 91. – P. 63-75.

2 Khachikjan G.Ja., Stikhamaya G.G., Stikhamiy A.P., Solonitsina N.F. Spatial distribution of earthquake epicenters and geomagnetic declination angle // *Inland earthquake*. – 2008. – V. 22. – P. 264-270.

3 Khachikjan G. Spatial earthquake statistics in geomagnetic coordinates // *Proc. Int. earthquake symposium Kocaeli, Turkey, Kocaeli*. – 2009. – P. 407-413.

4 Khachikyan G., Inchin A., Lozbin A. Spatial distribution of seismicity: relationships with geomagnetic Z-component in geocentric solar magnetospheric coordinate system // *Int. J. of Geosciences*. – 2012. – V. 3. – No 5. – P. 1084-1088. (ISSN Print: 2156-8359), (ISSN Online: 2156-8367).

5 Chun-lei Gu, Zhang Yi, Zuo-wen Gu, Xing-zhou Wang, Lei Wang, Ru-gang Xu, Zhi-chun Zhu. Relationship between Zero-value-line of Abnormal Geomagnetic Field in Lithosphere and Strong-moderate Earthquake Epicenters in North China Seismic Region // *Northwestern Seismological Journal*. – 2012.

6 Rikitake T. *Earthquake Prediction*. – Elsevier, Amsterdam, 1979. – 357 p.

7 *The International Geomagnetic Reference Field*.

*Статья поступила в редакцию 30.11.2016*

Сералиев А.М., Хасанов Э.Р. ТЕРЕҢ ФОКУСТЫ СЕЙСМИКАЛЫҚ АУДАНДАРДЫҢ КЕҢІСТІКТІК ОРНАЛАСУЛАРЫ МЕН ГЕОМАГНИТТІК КӨЛБЕУДІҢ БҰРЫШТАРЫНЫҢ ҒАСЫРЛЫҚ ВАРИАЦИЯЛАРЫНДАҒЫ ЭКСТРЕМАЛЬДЫҚ МӘНДЕРДІҢ СӘЙКЕСТІГІ

Жер шарындағы 1973-2014 жылдар аралығында орын алған магнитудасы  $M \geq 4.5$  жоғары 205331 жер сілкіністерінің эпиорталықтарындағы басты геомагниттік өрістің компоненттерінің мәндері талданды. Жер сілкінісі орын алған кездегі эпиорталықтың геомагниттік өрісінің географиялық ендік пен бойлыққа тәуелді және солтүстік  $X$ -компонентінің мәндеріне тәуелді гипоорталықтарының тереңдіктерінің таратылуы алынды. Гипоорталықтардың тереңдігі басты геомагниттік өрістің  $X$ -компонентіне тәуелді ұйымдастырылатыны көрсетілген. Магнитудасы  $M \geq 4.5$  жоғары жерсілкіністер  $X$ -тің теріс мәндеріндегі аймақтарда болмайтыны, ал  $X < 15000$  nT аймақтарда гипоорталықтардың тереңдігі 70 км-ге дейін тек қана майдафокусті (қыртыстық) жерсілкіністер болатыны,  $15000 < X < 25000$  nT аймақтарында тереңдігі  $h \leq 350$  км-ге дейін майдафокусті (қыртыстық) және аралық жерсілкіністердің болатыны, ал  $X > 25000$  nT аймақтарында жерсілкіністерінің үш түрі де: қыртыстық, аралық және тереңдігі 700 км-ден жоғары тереңфокусты жерсілкіністер орын алатыны көрсетілген. Сейсмикалық процестердің жердің басты магниттік өрісінің вариацияларымен байланысы жайында қорытынды жасалды.

Seraliyev A., Khassanov E. CORRESPONDENCE OF SPATIAL LOCATION OF DEEP SEISMICITY AND EXTREME VALUES OF SECULAR VARIATIONS OF GEOMAGNETIC INCLINATION'S ANGLES

The values of the main geomagnetic field's components at the epicenter of 205311 earthquakes (with a magnitude of  $M \geq 4.5$ ) that happened during 1973-2014 y.y. have been analyzed. The distribution of hypocenter depths depending on the latitude and longitude, and the values of the north  $X$ -component of the main magnetic field is obtained. It is shown that the depth of the hypocenter is quite clearly arranged according to the  $X$ -component. Namely, the earthquakes with  $M \geq 4.5$  practically absent in areas with negative values of  $X$ ; in areas with  $X < \sim 15000nT$  only shallow-focus earthquakes occur ( $h \leq 70$  km), in areas of  $15,000 < X < 25.000nT$  occur both the shallow-focus and intermediate events ( $h \leq 350$  km), and in areas with values of  $X > 25,000 nT$ , the three types of earthquakes occur: shallow-focus, intermediate, and deep ( $h \leq 700$  km). It is concluded that the seismic process is related to the main geomagnetic field structure.

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ  
ДВИЖЕНИЕМ КА В ГРАВИМАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ В  
СИСТЕМЕ MATLAB-SIMULINK**

Б.Т. Суйменбаев<sup>1</sup>, Л.А. Алексеева<sup>2</sup>, Ж.Б. Суйменбаева<sup>3</sup>, С.Р. Гусейнов<sup>4</sup>  
<sup>1,3,4</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева  
050050, Алматы, пр. Сейфуллина, 122/22,  
e-mail: <sup>1</sup>bts49@mail.ru, <sup>3</sup>zbs115@mail.ru, <sup>4</sup>samir.gusseinov@gmail.com

<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул.Пушкина, 125, e-mail: <sup>2</sup>alexeeva@math.kz

Аннотация: Объектом исследования является математическое моделирование бортовой системы управления наноспутником "Политех-1" на стендовой базе центра управления полетами (ЦУП) Казахского национального исследовательского технического университета им. К.И. Сатпаева. В настоящей работе приводятся результаты математического моделирования в системе Matlab-Simulink динамики и управления наноспутника в гравимагнитном поле Земли с использованием модели абсолютно твердого тела, которое разделяется на два основных этапа: моделирование механики поступательного движения центра масс наноспутника в гравитационном поле и собственного вращательного движения вокруг его центра масс с учетом воздействия гравитационных и магнитных сил и намагниченности самого спутника. Программно реализована математическая модель и система управления моментом движения КА в гравимагнитном поле Земли, моделируемым магнитным диполем (стандартная модель Земли (WMM 2010)). Разработан имитатор орбитальной среды, описаны его составные блоки. На основе разработанной модели проведены многовариантные расчеты орбитального движения наноспутника с расчетными физико-механическими параметрами, близкими к параметрам научно-образовательного наноспутника "Политех-1".

Ключевые слова: Гравимагнитное поле, компьютерное моделирование, наноспутник "Политех-1", уравнения движения, углы Эйлера.

---

Keywords: *Gravimagnetic field, computer simulation, nanosatellite "Polytech-1", equations of motion, Euler angles.*

2010 Mathematics Subject Classification: 70E15+83C50+ 90C90.

Funding: ККУЦ, – № 757 МОН ГФ. 15. ИИТ.8

© Б.Т. Суйменбаев, Л.А. Алексеева, Ж.Б. Суйменбаева, С.Р. Гусейнов, 2016.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является компьютерное моделирование движения космического аппарата и управления его движением на стендовой базе центра управления полетами (ЦУП) Казахского национального исследовательского технического университета им. К.И. Сатпаева. Разрабатываемый в ЦУП наноспутник "Политех-1" является научно-образовательным космическим аппаратом, предназначенным для оперативного измерения магнитного поля Земли на высоте около 400 км и передачи измерительной информации на средства приема университетского центра управления полетами.

Для анализа технологических процессов эксплуатации орбитальных средств, разработки технологии полунатурного исследования систем бортового оборудования, а также в образовательных целях необходимо разработать математические модели движения, управления и стабилизации наноспутника в окрестности программного движения с учетом его конструктивных особенностей. В настоящей работе проводится моделирование с использованием системы программирования Matlab Simulink динамики наноспутника в гравимагнитном поле Земли на основе модели абсолютно твердого тела. Моделирование разделяется на два основных этапа: моделирование механики поступательного движения центра масс наноспутника и моделирование собственного вращательного движения вокруг его центра масс [1]–[2].

Для обеспечения программного движения космического аппарата (КА) на орбите, связанного с его назначением, необходим учет и оценка всех действующих сил. На космический аппарат помимо притяжения Земли действуют разнообразные силы: гравитационные силы тяготения небесных тел (Луны, Солнца, планет и др.), сила светового давления, электромагнитные силы, аэродинамические и др., которые в разной степени влияют на его движение. Эффект этого влияния зависит от типа КА и условий его движения: вид орбиты, ее наклонение, положение на орбите и др.

Магнитные эффекты могут быть использованы для контроля и стабилизации положения спутника на орбите. Пассивная магнитная стабилизация использует набор постоянных магнитов для того, чтобы ориентировать спутник по отношению к магнитному полю Земли. Кроме того, возникает намагниченность КА от действия бортовой электроники, его ра-

диокомплекса. Оболочка КА также быстро намагничивается магнитным полем Земли и, как следствие, возникает гистерезисная картина, которая создает эффект затухания угловой скорости вращения спутника.

Здесь разработана и программно реализована математическая модель движения наноспутника "Политех-1" в гравимагнитном поле Земли, моделируемым магнитным диполем (стандартная модель Земли WMM 2010), в системе Matlab Simulink.

## 2. РАЗРАБОТКА ИМИТАТОРА ОРБИТАЛЬНОЙ СРЕДЫ

Для разработки системы управления наноспутником построен иммитатор орбитальной среды, представленный на Рис. 1. Он состоит из восьми взаимосвязанных блоков:

1. ввод и расчет начальных данных: координаты, скорость центра масс, угловые координаты и скорость КА (Earth's gravity, 6DOF dynamics);
2. расчет орбиты КА, скорости и положения его центра масс (6DOF dynamics);
3. расчет угловой скорости вращения КА и углов Эйлера (6DOF dynamics);
4. расчет действующего гравитационного момента (Gravity Gradient Model);
5. расчет действующего магнитного момента (Torque Coils);
6. расчет магнитного гистерезисного момента (Hysteresis Material);
7. расчет управляющего момента (Control moment);
8. вывод параметров текущего положения КА: координаты и скорости центра масс, угловые координаты и скорость (6DOF dynamics, Position, Velocity, Attitude, 6DoF Animation).

### 1. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА 1. ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для описания движения наноспутника в качестве основной системы выбрана условно "неподвижная", т.е. *инерциальная система координат* (ИСК  $XUZY$ ), предназначенная для моделирования движения наноспутника по его орбите, и "движущаяся" система координат, жестко связанная с телом спутника и участвующая во всех его движениях, так называемая *бортовая система координат* (БСК  $X_1Y_1Z_1$ ). Для удобства расчетов начало БСК совмещено с центром масс КА, а оси направлены вдоль его главных осей инерции (оси Кенига), которые определяются геометрией распределе-



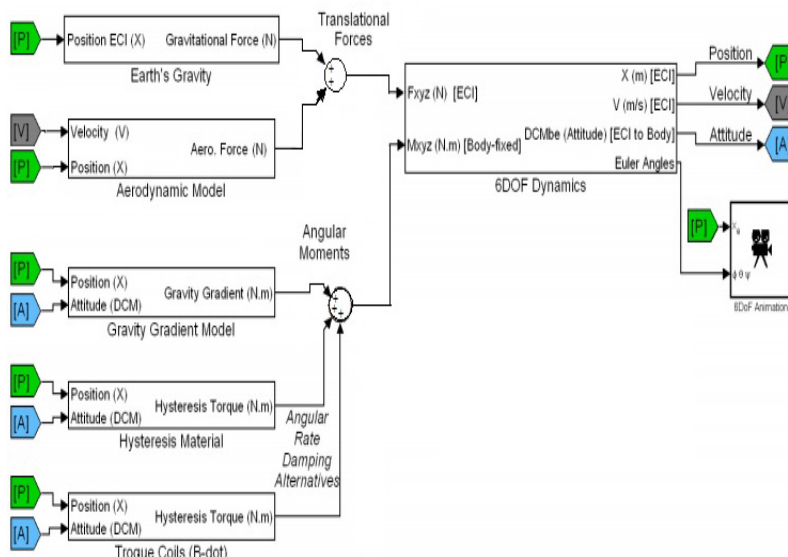


Рисунок 1 – Блок-схема имитатора орбитальной среды

ния масс в теле КА. В начальный момент времени  $t_0$  задаются координаты центра масс (ЦМ) КА и его скорость в ИСК  $(R_0, V_0)$ .

Для описания вращения наноспутника вокруг центра масс используем углы Эйлера  $\theta, \psi, \varphi$ : угол прецессии  $\psi$  – это угол между осью  $X$  и линией узлов (линией пересечения плоскостей  $XU$  и  $X_1Y_1$ ), угол нутации  $\theta$  – это угол между осями  $Z$  и  $Z_1$ , угол собственного вращения  $\varphi$  – угол между линией узлов и осью  $X_1$ . Проекции угловой скорости вращения КА в БСК  $(p, q, r)$  определяются через углы Эйлера и их скорости  $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$  формулами Пуассона. В начальный момент времени задаются углы Эйлера  $\theta(t_0), \psi(t_0), \varphi(t_0)$  и координаты угловой скорости в БСК:  $p(t_0), q(t_0), r(t_0)$  и рассчитываются начальные  $\dot{\theta}(t_0), \dot{\psi}(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$ .

## 2. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА 2. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС КА

Гравитационное поле Земли определяется его гравитационным потенциалом  $U(x, y, z)$ , который может быть различным в зависимости от выбора стандартной модели Земли. Их существует несколько. Здесь оно мо-

делируется гравитационным полем материальной точки (или однородного шара) с массой Земли ( $M$ ). В этом случае уравнения движения центра масс КА описываются уравнениями Ньютона. На Рис. 1 уравнения движения ЦМ КА представлены в виде блок-схемы Earth's gravity. На ее вход подаются координаты о положении центра масс наноспутника на орбите, а на выходе получается информация о равнодействующей гравитационных сил, действующих на КА. Далее информация о действующей силе поступает в блок интеграторов, где ведется расчет орбитальной скорости и положения КА на орбите. Орбита наноспутника в этой модели является кеплеровой. Плоскость орбиты проходит через центр Земли перпендикулярно орбитальному вектору  $n$ . В этом блоке рассчитываются параметры орбиты: фокальный радиус  $P_f$  и эксцентриситет  $\varepsilon$  характеризуют ее форму,  $v_{nep} = const$  – угловое расстояние перигея в плоскости орбиты от линии узлов, широта  $U = v_{nep} + v$ ,  $v$  – истинная аномалия.

Моделировалось движение КА на высоких круговых и эллиптических орбитах. На Рис. 2 показана расчетная орбита, на которой определялась также ориентация КА.

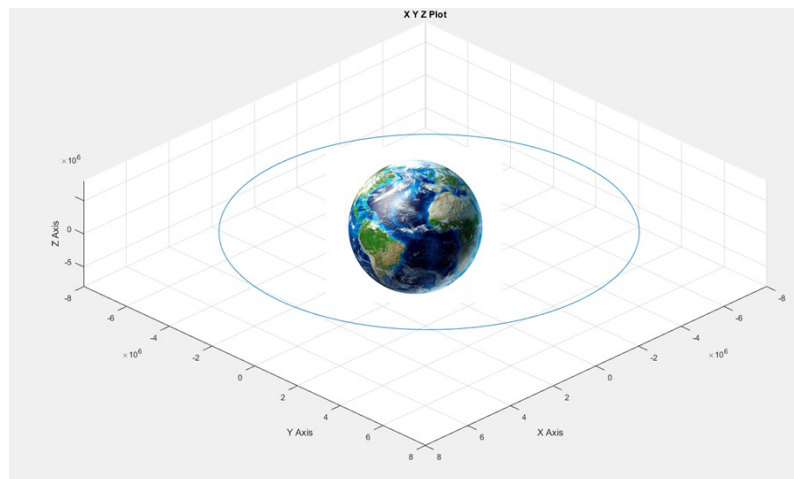


Рисунок 2 – Анимация траектории движения центра масс КА в гравитационном поле Земли, выполненная в программе Matlab-Simulink

## 3. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА 3. ВРАЩЕНИЕ КА

Уравнения движения КА вокруг центра масс описываются динамическими уравнениями Эйлера в системе координат, связанной с главными осями инерции [1], [2]:

$$A \cdot \frac{dp}{dt} = q \cdot r \cdot (B - C) + M_1,$$

$$B \cdot \frac{dq}{dt} = p \cdot r \cdot (C - A) + M_2,$$

$$C \cdot \frac{dr}{dt} = p \cdot q \cdot (A - B) + M_3,$$

где  $A, B, C$  – главные моменты инерции КА,  $M_1, M_2, M_3$  – проекции суммарного момента сил, действующих на КА,  $p, q, r$  – проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения  $\omega$  на оси Кенига.

В блоке 3 (6DOF Dynamics) проводится интегрирование системы уравнений Эйлера с учетом моментов действующих сил относительно центра масс. Их можно разделить на внешние, связанные с воздействием гравимагнитного поля Земли и аэродинамическими силами, и внутренние, которые зависят от намагниченности самого КА и действующего управляющего момента, обеспечивающего программное вращение КА на орбите, связанного с его назначением.

## 4. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА 4. МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА

Гравитационный момент ( $M_g$ ) является значительным источником углового момента для высокоорбитальных КА. Для того, чтобы вычислить гравитационный момент, действующий на спутник в текущий момент времени, необходимо знать положение КА на орбите, высоту и массовые характеристики спутника. Для принятой модели гравитационного поля Земли здесь он вычисляется по формуле В.В. Белецкого [1], [2]:

$$\vec{M}_g = \frac{3\mu}{R_0^3} \cdot \vec{e}_R \times J \cdot \vec{e}_R,$$

где  $e_R$  – единичный вектор в направлении ЦМ КА:  $e_R = r/R_0$ ,  $R_0$  – расстояние от центра масс Земли до центра масс спутника,  $J$  – тензор инерции

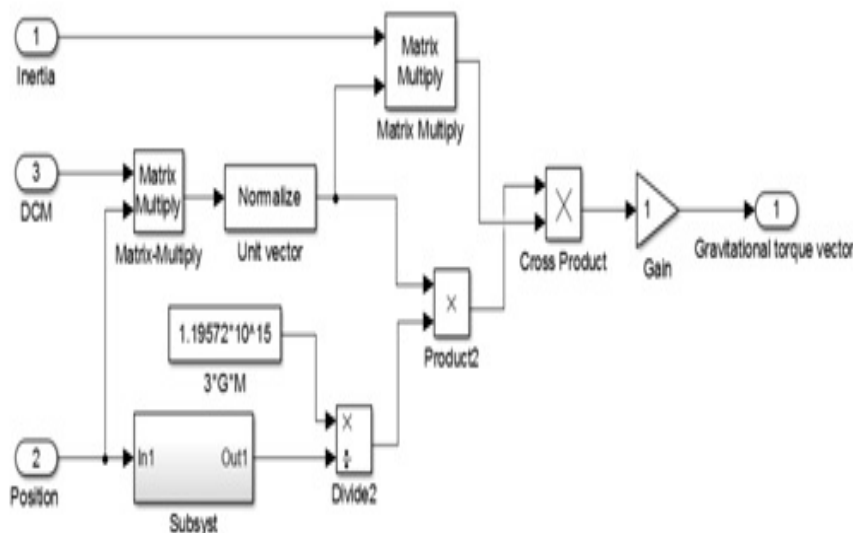


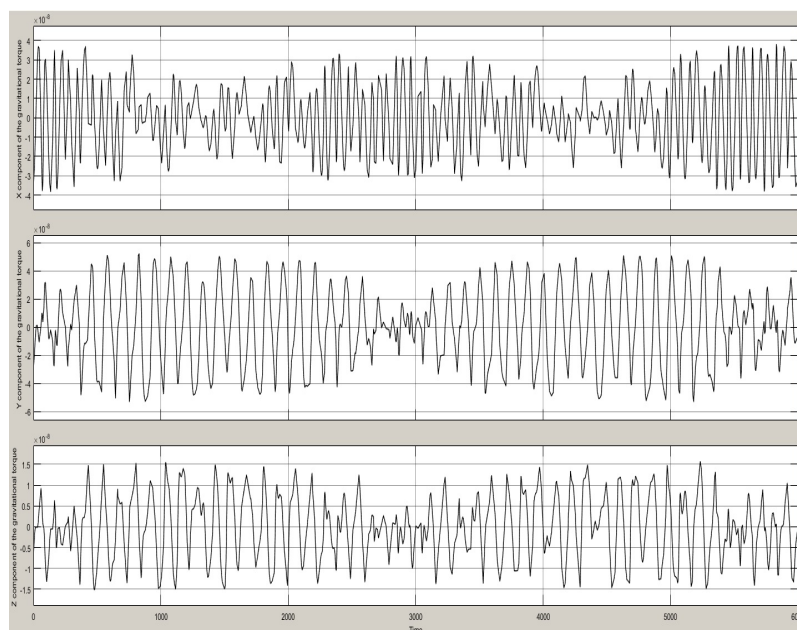
Рисунок 3 – Блок-схема расчета гравитационного момента Matlab-Simulink

КА. На Рис. 3 приведена блок-схема расчета гравитационного момента в системе Matlab (Simulink). На Рис. 4 приведены графики изменения компонент гравитационного момента в БСК на выше представленной расчетной траектории.

Как можно видеть из графика, на высоте 400 км от поверхности Земли компоненты вектора гравитационного момента колеблются в пределах от  $-4 \cdot 10^{-8}$  до  $4 \cdot 10^{-8}$ . Для различных высот гравитационный момент, действующий на спутник, принимает разные значения, ослабевая с увеличением высоты.

##### 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

На вращение КА на околоземной орбите также влияет взаимодействие магнитного поля Земли и собственного магнитного поля КА, которое зависит от наличия на нем электрических токовых систем, постоянных магнитов, а также от намагничивания материала его оболочки. В большинстве прикладных задач магнитное поле Земли на высотах до 5000 км модели-

Рисунок 4 – Компоненты  $(\tau_1\tau_2\tau_3)$  вектора гравитационного момента  $\vec{M}_g$ 

руется магнитным диполем. Вектор плотности магнитного потока в некоторой точке  $x$  на орбите определяется формулой (World Magnetic Model 2010):

$$B(\vec{X}) = \frac{\mu E^3}{\|\vec{X}\|} \cdot [3 \cdot (\vec{e}_m, \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x - \vec{e}_m],$$

где  $e_m$  – единичный вектор оси магнитного диполя,  $e_x = X/\|X\|$ . Для более точных моделей необходимо измерение магнитного поля вдоль орбиты.

Известно, что магнитная ось Земли не совпадает с осью вращения и смещается с течением времени. Если пренебречь отклонением географического и магнитного полюсов Земли (около  $11.5^\circ$ ), то  $e_m = E_z$ . Здесь при моделировании было учтено, что ось магнитного диполя может не совпадать с осью вращения Земли.

### 5.1. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА 5 (TORQUE COILS). ГЕОМАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

Здесь магнитный момент  $M_{mgn}$ , действующий на КА, обусловленный геомагнитным полем, моделируется взаимодействием дипольных магнитных моментов по формуле [2]:

$$\vec{M}_{mgn} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{X}_{mc}),$$

где  $m$  – магнитный дипольный момент КА [ $A \cdot m^2$ ],  $B(X_{mc})$  – вектор напряженности геомагнитного поля в центре масс КА. Блок-схема расчета геомагнитного момента показана на Рис. 5. На Рис. 6 приведены графи-

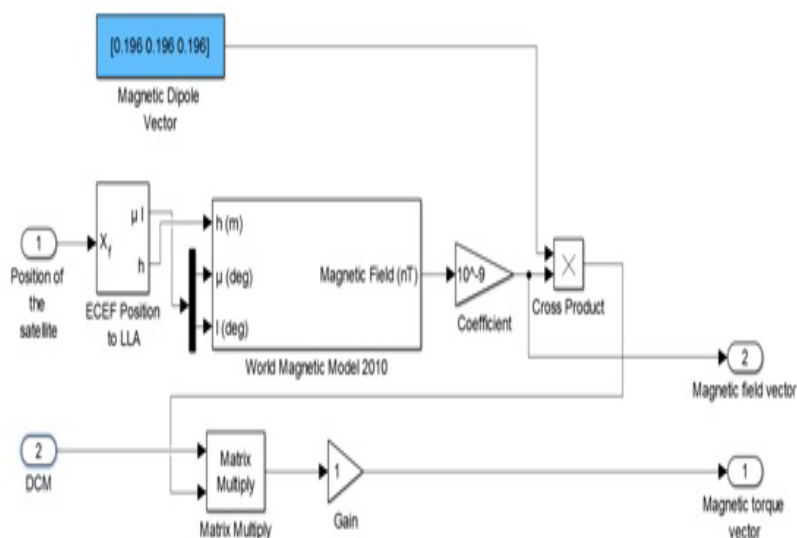


Рисунок 5 – Блок-схема расчета геомагнитного момента, действующего на КА (Matlab, Simulink)

ки изменения компонент вектора магнитного момента, действующего на спутник, в БСК на расчетной орбите для одного периода движения КА по орбите. Как можно видеть, компоненты вектора магнитного момента

на расчетной орбите колеблются, принимая максимальное значение ( $10^{-7}$  Н·м) в перигее и минимальное ( $2 \cdot 10^{-8}$  Н·м) – в апогее.

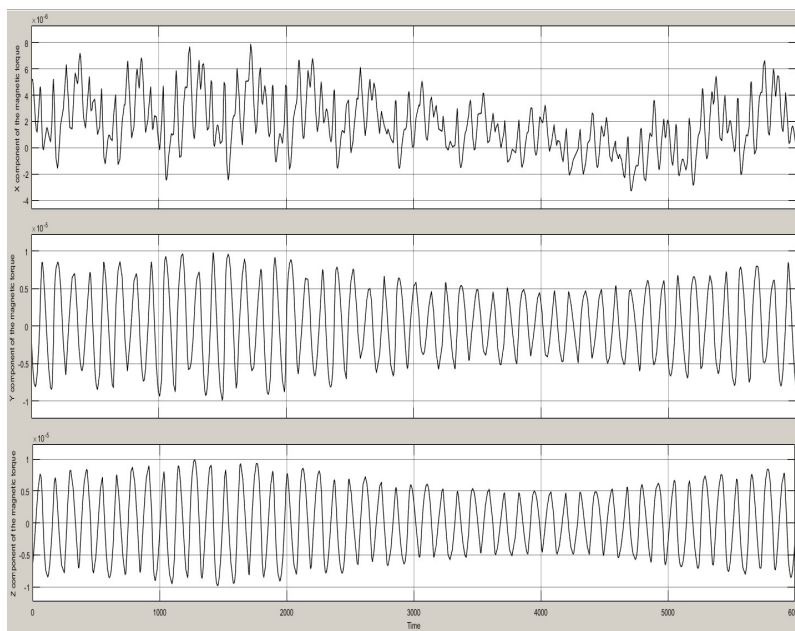


Рисунок 6 – Компоненты  $(\tau_1 \tau_2 \tau_3)$  вектора магнитного момента  $\vec{M}_{mgn}$  ( $h = 400$ ,  $T = 1.5$ ,  $\mu = 0$  градусов,  $\varepsilon = 0.026$ ,  $a = 6960$  км,  $b = 6957$  км)

## 5.2 МАГНИТНЫЙ ГИСТЕРЕЗИСНЫЙ МОМЕНТ

Явление магнитного гистерезиса связано с намагничиванием и размагничиванием магнитного материала при изменении напряженности внешнего магнитного поля. При движении и вращении КА в геомагнитном поле материал его оболочки намагничивается и размагничивается вдоль кривой гистерезиса, зависящей от его свойств. При этом возникает дополнительный магнитный момент, влияющий на вращение КА на орбите. Алгоритм расчета гистерезисного момента подробно описан в [3].

На Рис. 7 показаны компоненты вектора гистерезисного магнитного момента, действующего на спутник в БСК, в течении одного периода движения КА по орбите. На графике видно, что на высоте 400 км от поверх-

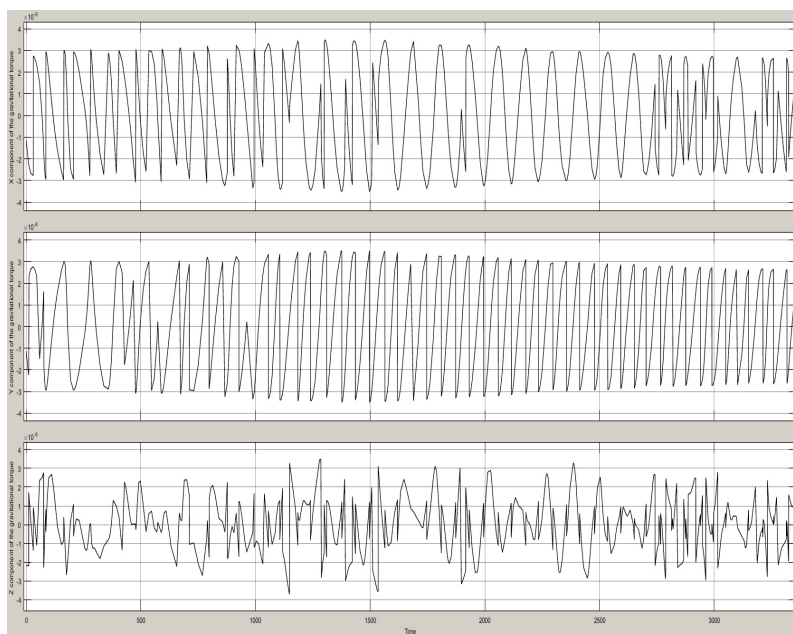


Рисунок 7 – Компоненты  $(\tau_1 \tau_2 \tau_3)$  вектора гистерезисного момента в БСК, действующего на КА

ности Земли компоненты вектора гистерезисного момента колеблются в пределах от  $-3.5 \cdot 10^{-6}$  до  $3.5 \cdot 10^{-6}$  Н м.

## 6. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА БЛОКА CONTROL МОМЕНТ

Будем называть движение, связанное с назначением спутника, *программным движением* и задавать его в виде заданных по времени углов Эйлера и их скоростей. Используя формулы Пуассона, получим программный вектор мгновенной угловой скорости и ускорения (проекции мгновенной угловой скорости вращения КА в БСК). А используя систему уравнений Эйлера, получим компоненты управляющего момента в осях Кенига

$$M_1^{control}(t) = A \cdot \frac{dp^{prog}(t)}{dt} + q^{prog}(t) \cdot r^{prog}(t) \cdot (C - B) - \sum_i M_{1i},$$



$$M_2^{control}(t) = B \cdot \frac{dq^{prog}(t)}{dt} + p^{prog}(t) \cdot r^{prog}(t) \cdot (A - C) - \sum_i M_{2i},$$

$$M_3^{control}(t) = A \cdot \frac{dr^{prog}(t)}{dt} + p^{prog}(t) \cdot q^{prog}(t) \cdot (B - A) - \sum_i M_{3i}.$$

Если КА в начальный момент времени находился на программной траектории, то реализуя на спутнике управляющий момент по этим формулам с учетом действующих внешних моментов, получим требуемое программное движение КА.

#### 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА НА ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Здесь приведены результаты, которые были получены на основе анализа и моделирования движения КА в среде Matlab-Simulink. При моделировании были учтены гравитационные, магнитный и гистерезисный моменты, действующие на движение КА. Здесь не учитывались аэродинамические силы и аэродинамический момент, которые на высотах уже выше 300 км несущественны, а на рассмотренной высоте практически нулевые (высокоорбитальный КА). В Таблицах 1 и 2 приведены данные, которые были использованы при моделировании динамики наноспутника "Политех-1". Значения главных моментов инерции относительно центра масс КА были получены путем математических расчетов, используя данные о массе и размерах спутника, в среде MathCad 14. На Рис. 8, 9 приведены результаты моделирования движения КА на эллиптической орбите. На Рис. 1 на первом графике показаны компоненты вектора орбитального положения спутника на второй скорости, абсолютное значение которой в момент времени  $t = 0$  равно приблизительно 7,7 км/с. Как и должно быть, компоненты скорости спутника изменяются периодически с периодом 1,5 часа. Движение происходит в плоскости  $XU$ , так как компонента  $V_z$  равна нулю в течении всего периода времени.

На Рис. 9, 10 представлены графики эйлеровых углов  $(\phi, \theta, \psi)$ , определяющие ориентацию спутника в ИСК. Начальные угловые скорости  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  и положения  $(\phi, \theta, \psi)$  КА во всех случаях были выбраны произвольно. Для сравнения воздействия на ориентацию спутника различных моментов расчеты ориентации провели отдельно для каждого момента, а

Таблица 1 – Расчетные характеристики наноспутника

№	Параметры КА	Значения
1	Масса	3 кг
2	Размеры	10×10×30 см <sup>3</sup>
3	Моменты инерции	(0.0815; 0.09; 0.11) кг·м <sup>2</sup>
№	Магниты	Значения
1	Полный объем	0.59 см <sup>3</sup>
2	Магнитный диполь	0.34 А·м <sup>2</sup>
№	Ферромагнитный материал	Значения
1	Объем ферромагнитного материала (по направлениям x и y)	0.20 см <sup>3</sup> (в направлении x) 0.20 см <sup>3</sup> (в направлении y)
2	Насыщение	0.73 Тесла
3	Коэффициентная сила	1.59 А/т

Таблица 2 – Параметры орбиты в ИСК

№	Параметры орбиты спутника в ИСК	Значения параметров
1	Высота орбиты	400 км
2	Орбитальная скорость движения (для эллиптической орбиты)	7,772 км/с
3	Период обращения (для эллиптической орбиты)	~1.5 часа
4	Наклонение орбиты	0° (градусов)
5	Эксцентриситет	0.026
6	Большая полуось орбиты	6960.5 км
7	Малая полуось орбиты	6957 км

затем – с учетом их суммарного воздействия. На Рис. 10 показан случай, когда суммарный внешний момент, действующий на КА, равен 0. Как можно увидеть из графика, КА вращается с почти постоянной угловой скоростью ( $\omega_3 \approx 0.05$  рад/с) вокруг оси  $X_3$ , которая жестко связана

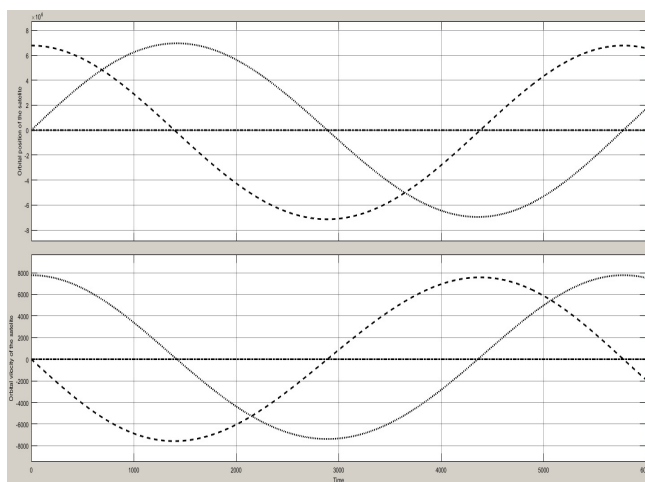


Рисунок 8 – Орбитальное положение КА (верхний график) и скорость КА (нижний график) на экваториальной орбите

$$V_0 = [07.7680] \text{ км/с}, R_0 = [677800] \text{ км}, T = 6000 \text{ с};$$

$Z$  – пунктирная кривая с точками,  $X$  – точечная кривая,  $Y$  – пунктирная кривая)

с КА, и в то же время прецессирует вокруг оси  $Z$  неподвижной системы координат сначала в одном направлении, потом – в обратном с периодом приблизительно 1,5 минуты. Одновременно с вращением и прецессией КА наблюдается колеблющаяся нутация (с периодом около 1,3 мин) около начального угла.

В случае учета всех действующих моментов на КА (Рис. 10) происходит значительное изменение углов  $\psi$  и  $\theta$ . КА вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_z \approx 0.05$  рад/с вокруг оси  $Z_1$  и прецессирует вокруг оси  $Z$  неподвижной системы координат с минимальным размахом  $\psi_{min} \approx 0,5$  рад на 33-й минуте и с максимальным размахом  $\psi_{max} \approx 2.75$  рад по завершению цикла. Также изменяется и угол нутации  $\theta$  с колебанием в окрестности  $\theta \approx 2$  рад.

На Рис. 11 приведены графики модулей векторов внешних моментов, действующих на КА, от времени. На графике видно, что наиболее значительным источником действующих на КА возмущений на высоте 400 км от

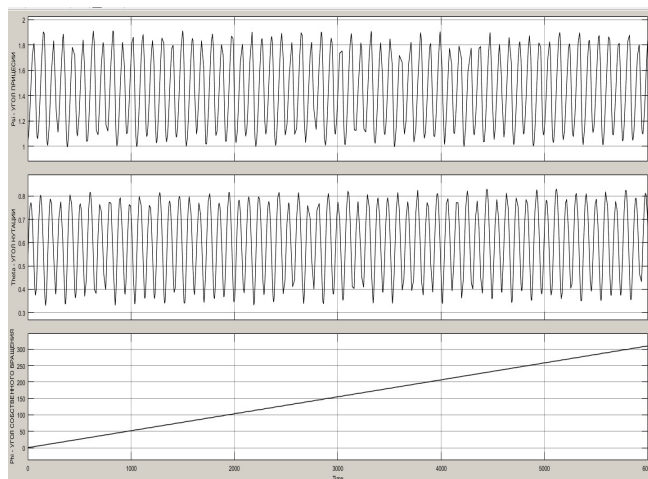


Рисунок 9 – Изменение  $\psi, \theta, \phi$  на экваториальной орбите в отсутствии внешнего момента

$(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = [0.01 - 0.010.05]$  рад/с,  $(\psi, \theta, \phi) = [\pi/3\pi/4\pi/6]$  рад,  $T = 6000$  с  
 ( $\psi$  – пунктирная кривая,  $\theta$  – кривая пунктир-точка,  $\phi$  – точечная кривая)

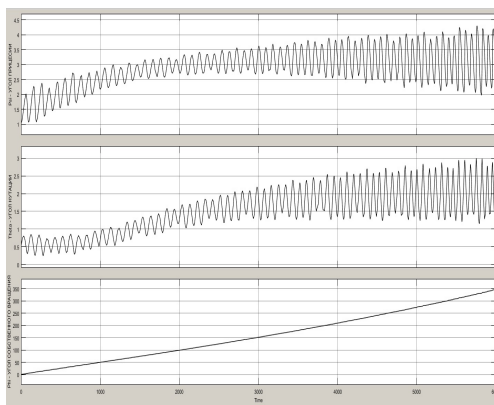


Рисунок 10 – Изменение эйлеровых углов  $\psi, \phi, \theta$  при движении КА на экваториальной орбите с учетом действующих моментов сил

$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} = [0.01 - 0.010.05]$  рад/с,  $(\psi, \phi, \theta) = [\pi/3\pi/4\pi/6]$  рад,  $T = 6000$  с  
 ( $\psi$  – пунктирная кривая,  $\theta$  – кривая пунктир-точка,  $\phi$  – точечная кривая)

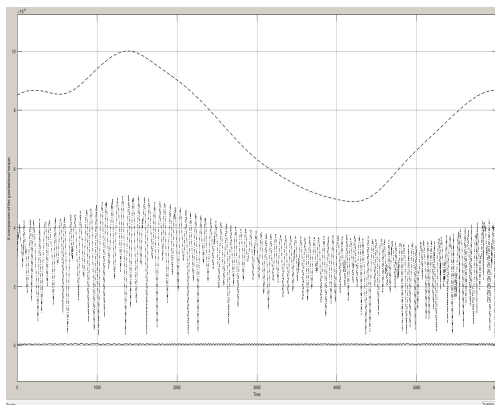


Рисунок 11 – Изменение модулей магнитного, гистерезисного и гравитационного моментов, действующих на КА со временем ( $M_{mgn}$  – пунктирная кривая,  $M_{mg}$  – кривая пунктир-точка,  $M_g$  – непрерывная кривая)

Таблица 3 – Средние значения моментов действующих сил на КА на высоте  $h = 400$  км

№	Внешние типы возмущений	Среднее значение моментов за полпериода в [Н·м]
1	Гравитационный момент	$7.4 \cdot 10^{-8}$
2	Магнитный момент	$8 \cdot 10^{-5}$
3	Гистерезисный момент	$3 \cdot 10^{-5}$

поверхности Земли являются магнитный и гистерезисный моменты. Для наноспутника гравитационный момент практически не влияет на его вращение. Геомагнитный момент, действующий на КА, в 2,5 раза превосходит гистерезисный момент и более, чем в 100 раз, превосходит гравитационный на этой орбите. В таблице 4 приведены средние значения моментов действующих сил на КА на высоте 400 км.

На Рис. 12, 13 приведен частный случай программного движения КА, гармонические колебания около углов начальной ориентации КА и обеспечивающий это движение управляющий момент КА.

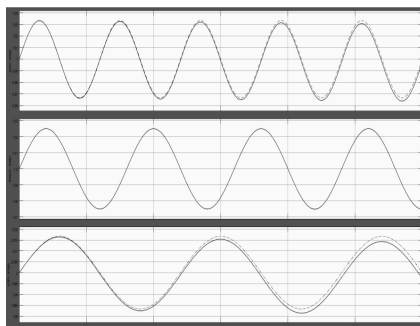


Рисунок 12 – Изменение углов Эйлера на программной траектории

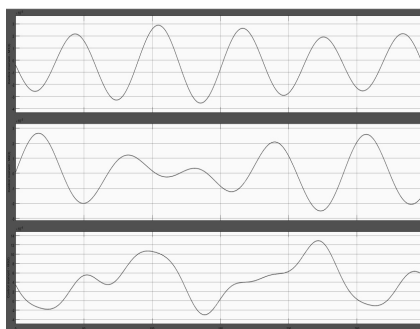


Рисунок 13 – Компоненты управляющего момента на программной траектории

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный программный комплекс позволяет моделировать орбитальное движение спутников вокруг центра масс на различных околоземных орбитах. Угол наклона орбиты к экватору, как и параметры орбиты, определяются начальной скоростью и начальным положением его центра масс. Характер вращения зависит от начальных угловых скоростей спутника и его положения на орбите. Варьирование этих параметров позволяет моделировать широкий класс орбитальных движений космических аппаратов с учетом их физико-механических свойств (массы, тензора инерции, свойств его намагничивания и наличия магнитных систем).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белецкий В.В. Движение спутника вокруг центра масс в гравитационном поле Земли. – М.: Наука, 1977. – 300 с.
- 2 Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1985. – 424 с.
- 3 Суйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р. Моделирование динамики космического аппарата в гравимагнитном поле Земли в системе "Matlab Simulink" // Известия НАН РК. Серия физико-матем. – 2016. – № 4(308). – С. 192-207.

*Статья поступила в редакцию 29.11.2016*

Suimenbayev B.T., Alexeyeva L.A., Suimenbayeva Z.B., Gusseinov S.R.  
COMPUTER MODELING OF CONTROL OF SPACECRAFT MOTION  
IN GRAVIMAGNETIC FIELD OF THE EARTH IN MATLAB-SIMULINK  
SYSTEM

The object of a research is mathematical modeling of an onboard control system of nanosatellite "Polytech-1" on the bench base of the control center of flights (CCF) of the Kazakh National Research Technical University after K.I. Satpayev. This paper presents the results of mathematical modeling of the system dynamics and control of nanosatellite in gravimagnetic field of the Earth in Matlab-Simulink using the model of a rigid body, which is divided into two main stages: modeling of mechanics of translational motion of the center of mass of nanosatellite in gravitational field and own rotate motion around its center of masses taking into account influence of gravitational and magnetic forces and satellite magnetization. Software for mathematical model and control system of the moment of spacecraft motion in gravitational and magnetic fields of the Earth modelled by a magnetic dipole, is developed (standard model of Earth (WMM 2010)). The simulator of the orbital environment is developed, its compound blocks are described. On the basis of the developed model multiple calculations of the orbital movement of nanosatellite with calculated physicommechanical parameters close to parameters of the scientific and educational nanosatellite "Polytech-1", are carried out.

Сүйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Сүйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р. ЖЕРДІҢ ГРАВИМАГНИТТІК ӨРІСІНДЕГІ ҒА ҚОЗҒАЛЫСЫН БАСҚАРУДЫ MATLAB-SIMULINK ЖҮЙЕСІНДЕ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛДЕУ

Зерттеу нысаны Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің ұшуды қару орталығының (ҰБО) студенттік базасында "Политех-1" наносерігін басқарудың бортық жүйесін математикалық модельдеуі болып табылады. Осы жұмыста Жердің гравимагниттік өрісінде абсолютті қатты дененің моделін пайдалана отырып наносеріктің динамикасы мен басқаруын Matlab Simulink жүйесінде математикалық модельдеу нәтижелері келтіріледі, ол басты екі кезеңге бөлінеді: гравитациялық өрістегі наносеріктің массалар орталығының үдемелі қозғалысының механикасын және оның массалар орталығының маңайындағы, гравитациялық және магниттік күштердің, әрі осы серіктің магниттелгендігінің әсерін ескере отырып, өзіндік айналмалы қозғалысын моделдеу. Математикалық модель мен ҒА Жердің гравимагниттік өрісіндегі қозғалысының магниттік дипольмен ((WMM 2010) Жердің стандарттық моделі) моделденген моментін басқару жүйесі программалық тұрғыдан жүзеге асырылған. Орбиталдық ортаның елі ктегіші жасалған, оның құрама блоктары сипатталған. Жасалған модель негізінде наносеріктің орбиталдық қозғалысының көп нұсқалы есептемелері "Политех-1" ғылыми-білім беру наносерігінің параметрлеріне жақын есептік физикалық-механикалық параметрлерімен бірге жасалған.



**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ  
МНОГОМЕРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ  
ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: laura-nurlan@mail.ru

Аннотация: Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения рассмотрены параллельные прямые и итерационные алгоритмы.

Ключевые слова: Параллельные алгоритмы, двумерные коэффициентные обратные задачи, метод регуляризации, метод сопряженных градиентов, метод квадратного корня, дискретизация, численное решение.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается двумерная обратная задача восстановления коэффициента для гиперболического уравнения. Известно, что для решения такого рода обратной задачи используется двумерный метод Гельфанда-Левитана для нахождения коэффициента. Двумерное уравнение Гельфанда-Левитана имеет вид двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [1].

В качестве примера можно рассмотреть структурные обратные задачи гравиметрии [2], которые сводятся к решению двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Уравнения гравиметрии и магнитометрии являются существенно некорректными задачами, решение которых обладает сильной чувствительностью к погрешностям правых частей,

---

Keywords: *Parallel algorithms, two-dimensional coefficient inverse problem, regularization method, conjugate gradient method, square-root method, discretization, numerical solution.*

2010 Mathematics Subject Classification: 65M32.

Funding: 1746/ГФ4 проекта "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

© Л.Н. Темирбекова, 2016.

полученных в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи гиперболического типа предложены и численно реализованы параллельные прямые и итерационные алгоритмы. Решены задачи с данными и проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов.

## 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим следующее семейство прямых задач [3]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \quad (1)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \quad (2)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \quad (3)$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1)–(3) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию  $q(x, y)$  по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t > 0, \quad k \in Z, \quad (4)$$

где  $R$  – множество вещественных чисел,  $Z$  – множество всех целых чисел,  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $k$  – некоторое фиксированное целое число,  $h(y) = e^{iky}$ . Обобщенное решение прямой задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2}\theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y)u^{(k)}(\xi, y, \tau)d\xi d\tau. \quad (5)$$

Здесь  $\theta(t)$  тэта – функция Хэвисайда. Так же известно, что

$$u^{(k)}(x, y, |x|) = \frac{h(y)}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, для решения прямой задачи в классе обобщенных функций имеем задачу Гурса (1), (6), решение которой определяет классическое решение задачи (1)–(3) [3]. Вводится последовательность вспомогательных прямых задач [3]:

$$\omega_{tt}^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x, y)\omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\omega^{(m)}(0, y, t) = e^{imy}\delta(t), \quad \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (8)$$

$$u^{(m)}|_{y=\pi} = u^{(m)}|_{y=-\pi}. \quad (9)$$

Задача Коши (7)–(9) с данными на времениподобной поверхности не является корректно-поставленной в классе функций конечной гладкости. Однако, возможно доказать однозначную разрешимость обратной задачи, используя подход Л. Гиренберга, Л. Овсянникова.

Решение задачи (7)–(9) по формуле Даламбера имеет следующий вид:

$$\omega^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y,t)} q(\xi, y)\omega(\xi, y, \tau)d\xi d\tau, \quad (10)$$

где

$$\Delta(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : 0 < \xi \leq x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\}$$

– треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку  $(x, y, t)$ , и осью  $t$ .

Нетрудно показать, что

$$\omega^{(m)}(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (11)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (10) для точек  $(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : x \geq |t|\}$  будут прямоугольники  $\Delta(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : |\tau| \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$ , образованные характеристиками, выходящими из точек  $(0, y, 0)$ ,  $(x, y, t)$ .

Обозначим

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \omega^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x-t) + \delta(x+t)]. \quad (12)$$

Кусочно-непрерывная функция  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$  есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = & \frac{h(y)}{4} \theta(x - |t|) \left[ \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi \right] + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы вычислить  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x - 0)$ , в (13) надо положить  $t = x$ , тогда

$$\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi = 0$$

и

$$\iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau = 0,$$

т.к.  $\Delta(x, y, t)$  превращается в отрезок при каждом фиксированном  $y$ .

Таким образом,

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{h(y)}{4} \int_0^x q(\xi, y) d\xi, \quad x > 0. \quad (14)$$

Продолжим нечетным образом функции  $u^{(k)}(x, y, t)$  и  $f^{(k)}(y, t)$  по переменной  $t$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(x, y, t - s) ds = \\ &= \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t) e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t - s) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, s) ds = \\ & = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds \end{aligned}$$

при  $x > 0, y \in R$  и  $k \in Z$ . Здесь  $f_m^{(k)}(t)$  – коэффициенты Фурье функции  $f_m^{(k)}(y, t)$  при  $\omega^{(m)} = e^{imy}\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} u^{(k)}(0, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(0, y, s) ds = \int_R f^{(k)}(y, s) e^{imy} \delta(t-s) ds = \\ &= \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(s) e^{imy} \right) e^{imy} \delta(t-s) ds = \int_R f_m^{(k)}(s) \delta(t-s) ds = f_m^{(k)}. \end{aligned}$$

В уравнении (1) обратной задачи (1)–(4) выражение  $q \cdot u$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} q \cdot u &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijy}, \\ q(x, y) \cdot u^k(x, y, t) &= \int_R \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(t) e^{ijy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t-s) ds = \\ &= \int_R \sum_{m=1}^{\infty} b_j(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \end{aligned}$$

Решение задачи (1), (4) может быть представлено в виде

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \quad (15)$$

Используя (6), получим

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \{ e^{imy} (\delta(x+t) + \delta(x-t)) \} + \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds.$$

Преобразуем формулу (15):

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds.$$

При  $x > |t|$  имеем

$$\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds = 0. \quad (16)$$

При каждом фиксированном  $x > 0$  соотношение (16) является интегральным уравнением Гельфанда-Левитана первого рода относительно функции  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$ ,  $t \in (-x, x)$ .

После дискретизации уравнения на сетке и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (16) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей. Так как уравнение (16) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающая в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду

$$f_{\gamma}^{(k)}(\mu E + A^{(k)})\tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)}$$

где  $\mu$  – параметр регуляризации.

Для решения уравнения (17) используются прямой метод квадратного корня и итерационные методы регуляризации. Численная реализация и распараллеливание итерационных методов и метода квадратного корня для решения двумерной коэффициентной обратной задачи выполнены с помощью библиотеки МРІ на языке Фортран.

*Распараллеливание итерационных методов градиентного типа* [4] основано на разбиении матрицы  $A^{(k)}$  горизонтальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $z$  и векторов правой части  $f_{\gamma}^{(k)}$  СЛАУ – на  $m$  частей так, что  $n = m \times L$ , где  $n$  – размерность системы уравнений,  $m$  – число процессоров,  $L$  – число строк матрицы в блоке.

*Распараллеливание метода квадратного корня, предложенного в работе* [5]. Матрица  $A^{(k)}$  разбивается вертикальными линиями на  $m$  блоков.

Диагональные элементы треугольной матрицы  $S$ . Обратный ход метода квадратного корня (нахождения СЛАУ) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.
- 2 Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000. // Вестник Нижегород. унив. им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 4. – С. 181-189.
- 3 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. научн. изд. 2009. – 457 с.

*Статья поступила в редакцию 30.09.2016*

Темирбекова Л.Н. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КӨП-ӨЛШЕМДІ КОЭФФИЦИЕНТТІК КЕРІ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬ АЛГОРИТМДЕРІ

Гиперболалық теңдеу үшін көпөлшемді коэффициенттік кері есепті шешуге арналған параллель тура және итерациялық алгоритмдер қарастырылған.

Temirbekova L.N. PARALLEL ALGORITHMS FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

In this article we used parallel direct and iterative algorithms to solve two-dimensional coefficient inverse problem for hyperbolic equation.

**СИЛЬНЫЕ ( $M \geq 7.0$ ) ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ НА  
ТЕРРИТОРИИ АЛЬПИЙСКО-ГИМАЛАЙСКОГО  
ОРОГЕННОГО ПОЯСА: СВЯЗЬ С ВАРИАЦИЯМИ  
СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ**

Н.С. ТОЙШИЕВ<sup>1</sup>, А.А. КАЛДЫБАЕВ<sup>2</sup>, С.М. НУРАКЫНОВ<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>ДТОО Институт ионосферы  
050020, Алматы, e-mail: <sup>1</sup>toyshiev@yandex.ru.

Аннотация: Исследованы вариации сильнейших землетрясений ( $M \geq 7.0$ ), произошедших на территории Альпийско-Гималайского орогенного пояса в 1973-2014 г.г. на территории, ограниченной координатами:  $30^{\circ}\text{N}$ - $45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}$ - $110^{\circ}\text{E}$ . За этот период здесь произошло 32 землетрясения с магнитудой 7.0 и более. Обнаружено, что территориальное распределение эпицентров 32 произошедших сильных землетрясений на территории разделились поровну, то есть: 16 случившихся событий произошли при пониженном уровне солнечной активности и 16 – при повышенном. При пониженном уровне солнечной активности сильные землетрясения преимущественно происходили на азиатской части территории, а при повышенной уровне солнечной активности сильные землетрясения происходили, в основном, на европейской части.

Ключевые слова: Солнечная активность, землетрясение, число солнечных пятен.

На планете, территории стран которых расположены в сейсмически активных зонах, имеется высокий социальный спрос на качественные методы прогноза сильных землетрясений и оценки сейсмической опасности.

Вопрос о связи сейсмической активности Земли с вариациями солнечной активности обсуждается уже более 150 лет [1]–[15]. Анализ экспериментальных данных показывает, что на территории внутриплитовой сейсмичности, ограниченной координатами  $30^{\circ}\text{N}$ - $45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}$ - $110^{\circ}\text{E}$ , в зоне

---

Keywords: *Solar activity, earthquake, the number of sunspots.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта РБП-076 "Разработать методические основы оценки сейсмической опасности на основе данных о вариациях солнечной активности, геомагнитного поля и скорости вращения Земли". Регистрационный номер (РН) 0115РК01276.

© Н.С. Тойшиев, А.А. Калдыбаев, С.М. Нурақынов, 2016.



Альпийско-Гималайского горного пояса долговременные тренды в вариациях солнечной и сейсмической активностей находятся в противофазе [2]–[7]; внутри 11-летних солнечных циклов сейсмическая активность возрастает, в основном, на фазе спада и минимума солнечной активности [8], [9], но может несколько повышаться в периоды солнечных максимумов [6], [10], [11] и во время солнечных протонных событий [2], [3]. Для анализа использованы данные о сильнейших землетрясениях ( $M \geq 7.0$ ), произошедших в 1973-2014 г.г. в зоне внутриконтинентальной сейсмичности на территории Альпийско-Гималайского орогенного пояса, ограниченной координатами  $30^{\circ}\text{N}-45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}-110^{\circ}\text{E}$ . Согласно глобальному сейсмологическому каталогу NEIC геологической службы США в эти годы на этой территории произошло 32 землетрясения с магнитудой 7.0 и более.

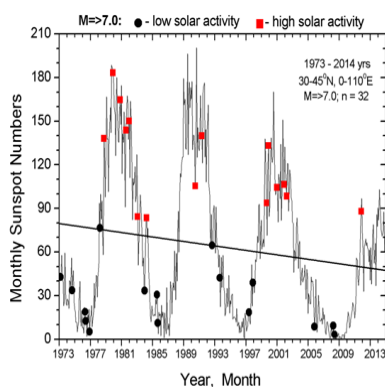


Рисунок 1 – Среднемесячные числа солнечных пятен (черная кривая) и их долговременный линейный тренд (черная прямая линия); черные круги и красные квадраты – даты землетрясений с ( $M \geq 7.0$ ) на территории  $30^{\circ}\text{N}-45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}-110^{\circ}\text{E}$ , приуроченные к пониженному и повышенному уровням солнечной активности соответственно

На основании Рис. 1 можно заключить, что данные, полученные при анализе землетрясений, подтверждают такое предположение, показывая, что в 1973-2014 г.г. на территории сейсмоактивных районов Альпийско-Гималайского орогенного пояса сильные землетрясения ( $M \geq 7.0$ ) происходили, в основном, при повышенной солнечной активности на евро-

пейской части, но при пониженной солнечной активности – на азиатской части, то есть создается впечатление, что связь между вариациями солнечной и сейсмической активностей отсутствует. Однако, впечатление изменится, если проанализировать пространственное распределение эпицентров этих событий. На Рис. 2 показаны эпицентры этих землетрясений, нанесенных на карту. Эпицентры некоторых землетрясений были расположены так близко, что слились на Рис. 2, поэтому визуально количество символов кажется меньше, чем 32.

### Intraplate Earthquakes, $M=7.0-7.9$ , 1973-2014 yrs, $n=32$

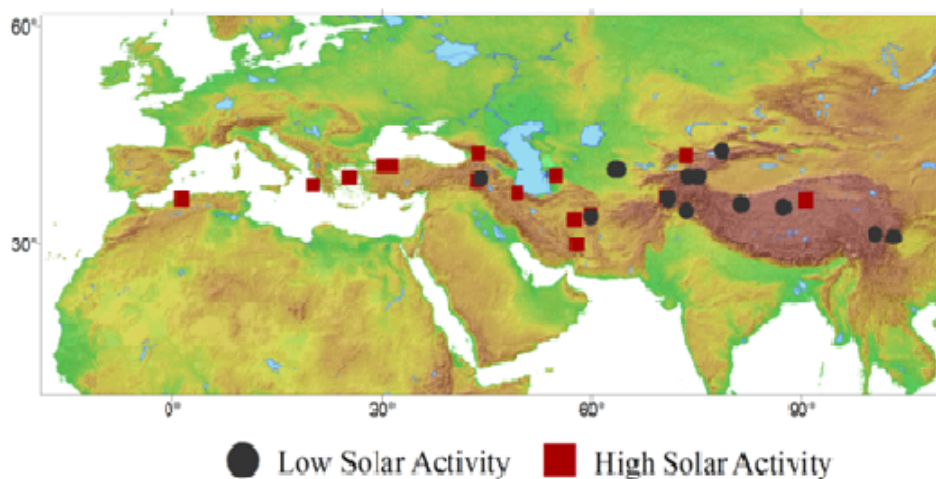


Рисунок 2 – Распределение эпицентров сильных землетрясений ( $M \geq 7.0$ ), произошедших в 1973-2014 г.г. на территории с координатами:  $30^{\circ}\text{N}-45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}-110^{\circ}\text{E}$ : черные круги – эпицентры событий, произошедших при пониженной солнечной активности, красные квадраты – при повышенной солнечной активности.

Анализируя Рис. 2, нетрудно заметить, что на европейской части Альпийско-Гималайского орогенного пояса сильные землетрясения с  $M \geq 7.0$  происходили, в основном, при повышенной солнечной активности (14 событий из 16, т.е. 87.5%, красные квадраты), а на азиатской части горного пояса сильные землетрясения происходили, в основном, при пониженной солнечной активности (13 событий из 16, т.е. 81.3%, черные круги). Этот результат говорит о том, что регионы с различным типом геологическим строением могут реагировать по-разному на вариации солнечной активности.

Тенденция приуроченности сильных землетрясений на территории высокой Азии к периодам низкой солнечной активности поддерживается данными о трех сильнейших землетрясениях недалекого прошлого, произошедших на территории Северного Тянь-Шаня (Таблица). Видно, что каждое из этих событий произошло при низком уровне солнечной активности. К этому можно также добавить, что из рассмотренных 32 землетрясений самым сильным было землетрясение в провинции Сычуань в Азии с магнитудой  $M=7.9$ , которое произошло 5 мая 2008 г. в период экстремально низкого уровня солнечной активности при среднегодовом числе солнечных пятен  $SSN=3.2$ . Сильнейшие землетрясения, произошедшие при экстремально низкой солнечной активности на Северном Тянь-Шане: 1807 г. – Алматинское ( $M=6.8$ ); 1887 г. – Верненское ( $M=7.3$ ); 1889 г. – Чиликское ( $M=8.3$ ) и 1911 г. – Кеминское ( $M=8.2$ ).

По данным о сильных ( $M \geq 7.0$ ) землетрясениях, произошедших в 1973-2014 г.г. на территории Альпийско-Гималайского орогенного пояса, ограниченной координатами:  $30^{\circ}N-45^{\circ}N$ ,  $0^{\circ}E-110^{\circ}E$  (32 события), показано, что 16 землетрясений произошли при пониженном уровне солнечной активности и 16 – при повышенном. Однако, при пониженной солнечной активности сильные землетрясения происходили, в основном, на азиатской части Альпийско-Гималайского пояса (13 событий из 16, т.е. 81.3%), а при повышенной солнечной активности сильные землетрясения происходили, в основном, на европейской части Альпийско-Гималайского пояса (14 событий из 16, т.е. 87.5%). Этот результат поддерживает идею о влиянии солнечной активности на сейсмическую активность Земли и показывает, что характер влияния может быть разным для геологических районов с различным структурно-вещественным составом, что должно быть принято во

внимание при разработке физического механизма солнечно-литосферных связей.

БЛАГОДАРНОСТЬ! Выражаем большую благодарность доктору физико-математических наук Хачикян Галине Яковлевне и кандидату физико-математических наук Жумабаеву Бейбиту Тенеловичу за постановку задачи и курирование работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Wolf R. On the periodic return of the minimum of sun-spots: The agreement between those periods and the variations of magnetic declination // *Philos. Magazine*. – 1853. – No. 5. – 67 p.
- 2 Zhang Gui-Qing Relationship between global seismicity and solar activities // *Acta Seismologica Sinica*. – 1998. – V. 11, iss. 4. – P. 495-500.
- 3 Shestopalov I.P., Kharin E.P. Secular variations of solar activity and seismicity of the earth // *Geophysical Journal*. – 2006. – V. 28, No. 4. – P. 59-70.
- 4 Рогожин Ю.А., Шестопалов И.П. Вековые циклы сейсмичности Земли и сейсмическая безопасность АЭС // *Атомная стратегия*. – 2007. – № 29.
- 5 Белов С.В., Шестопалов Л.П., Харин Е.П. О взаимосвязях эндогенной активности Земли с солнечной и геомагнитной активностью // *Доклады Академии Наук НАН*. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 104-108.
- 6 Хачикян Г.Я., Садыкова А.Б., Джанабилова С. Связь частоты повторяемости землетрясений и сейсмической энергии Земли с вариациями солнечной активности // *Научный журнал-приложение международного журнала "Высшая школа Казахстана Поиск-Izdenis*. – 2014. – № 2. – С. 55-61.
- 7 Жантаев Ж.Ш., Жумабаев Б.Т., Хачикян Г.Я., Тойшиев Н., Кайраткызы Д. Вариации солнечной и глобальной сейсмической активности в 21-24 солнечных циклах // *Известия НАН РК. Серия физическая*. – 2015. – № 4. – С. 63-70.
- 8 Simpson J.F. Solar activity as a triggering mechanism for earthquakes // *Earth Planet. Sci. Lett.* – 1967. – V. 3. – P. 417-425.
- 9 Huzaimy J.M., Yumoto K. Possible correlation between solar activity and global seismicity // *Proc. 2011 IEEE Int. Conf. Space Sci. Comm. Penang Malaysia*. – 2011. – P. 138-141.
- 10 Сытинский А.Д. О влиянии солнечной активности на сейсмичность Земли // *ДАН СССР*. – 1973. – Т. 208, № 5. – С. 1078-1081.
- 11 Odintsov S., Boyarchuk K., Georgiva K., Kirov B., Atanasov D. Long-period trends in global seismic and geomagnetic activity and their relation to solar activity // *Physics and Chemistry of the Earth*. – 2006. – P. 88-93.
- 12 Соболев Г.А., Шестопалов И.П., Харин Е.П. Геоэффективные солнечные вспышки и сейсмическая активность Земли // *Физика Земли*. – 1998. – № 7. – С. 85-90.

13 Khain V.E, Khalilov E.N. About Possible influence of solar activity upon seismic and volcanic activities: long-term forecast // Transactions of the International Academy of Science H&E. – 2007/2008. – P. 217-240.

14 Лурсманашвили О.В. О возможности влияния активности Солнца на распределение землетрясений Кавказа // Сообщения Академии наук Грузии. – 1972. – Т. 65, № 2. – С. 309-312.

15 Han Yanben, Guo Zengjian, Wu Jinbing and Ma Lihua Possible triggering of solar activity to big earthquakes ( $M_S \geq 8$ ) in faults with near west-east strike in China // Science in China. Ser. G Physics, Mechanics and Astronomy. – 2004. – No. 6. – P. 173-181.

*Статья поступила в редакцию 30.11.2016*

Toishiyev N., Kaldybaev A., Nurakynov S. STRONG ( $M \geq 7.0$ ) EARTHQUAKES ON THE TERRITORY OF THE ALPINE-HIMALAYAN OROGENIC BELT: CONNECTION TO SOLAR ACTIVITY VARIATIONS

Variations of the strongest earthquakes ( $M \geq 7.0$ ) which took place on the territory of the Alpine-Himalayan orogenic belt during 1973-2014 with coordinates:  $30^{\circ}\text{N}$ - $45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}$  - $110^{\circ}\text{E}$  are studied. During this period, there are 32 earthquakes with a magnitude of 7.0 or more. It is found that the spatial distribution of epicenters of 32 strong earthquakes which occurred on the territory, is equally divided, that is, 16 events are occurred when solar activity was at reduced levels and 16 – at elevated levels. When solar activity was reduced, the level of strong earthquakes were occurred mainly in the Asian part of the territory and at elevated levels of solar activity strong earthquakes were occurred mainly in the European part.

Тойшиев Н.С., Калдыбаев А.А., Нуракынов С.М. АЛЬПИ-ГИМАЛАЙ ТАУЛЫ ОРГЕН БЕЛДЕУІ ТЕРРИТОРИЯСЫНДАҒЫ КҮШТІ ( $M \geq 7.0$ ) ЖЕР СІЛКІНІСТЕРІ: КҮН БЕЛСЕНДІЛІГІНІҢ АУЫТҚУЛАРЫ-МЕН БАЙЛАНЫСЫ

Альпі-Гималай таулы ороген белдеуінің территориясында 1973-2014 жж. арасында болған,  $30^{\circ}\text{N}$ - $45^{\circ}\text{N}$ ,  $0^{\circ}\text{E}$  - $110^{\circ}\text{E}$  координаталарымен шектелген территориядағы күшті  $M \geq 7.0$  жер сілкіністерінің вариациялары зерттелген. Осы жылдар аралығында бұл жерде магнитудасы 7.0 және одан да жоғары болатын 32 жер сілкінісі болды. Осы аймақтағы күшті 32 жер сілкінісінің ошағының территориялық таралымы біркелкі теңдей бөлінген, яғни: 16 жер сілкінісі күн белсенділігінің төмендетілген деңгейінде орын алса, 16-сы күн белсенділігінің жоғарғы деңгейінде орын алғандығы анықталды. Күн белсенділігі төмендеген кезде күшті жер сілкіністері негізінен территорияның азиялық бөлігінде орын алған, ал күн белсенділігінің жоғары деңгейінде күшті жер сілкіністері негізінен территорияның еуропалық бөлігінде орын алған.

**ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА  
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**Б.Х. ТУРМЕТОВ<sup>1</sup>, Ж. АБДУЛЛАЕВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования  
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: <sup>1</sup>alibek-seraliev@mail.ru.<sup>2</sup>Международный казахско-турецкий университет имени А.Ясави  
Туркестан, проспект Б. Саттарханова, 29, e-mail: <sup>2</sup>jas\_bek777@mail.ru

Аннотация: Настоящая работа посвящена исследованию операторного метода построения решения линейных дифференциальных уравнений дробного порядка. Для специального класса дифференциальных уравнений дробного порядка разработан алгоритм построения точных решений. Данный метод основан на построении нормированных систем функций относительно операторов дробного дифференцирования. Изучены свойства обобщенно-однородных операторов, связанных с операторами дробного порядка. Для таких классов операторов предложен метод построения нормированных систем функций. Далее, используя свойства нормированных систем, построенных для обобщенно-однородных операторов, исследованы точные решения линейных дифференциальных уравнений дробного порядка. Рассмотрены однородные дифференциальные уравнения дробного порядка с производными в смысле Римана-Лиувилля. Найдены условия, при которых данные решения являются линейно независимыми. Рассмотрены также методы построения частных решений для неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка с квазиполиномами в правой части. Изучена задача типа Коши и доказана однозначная разрешимость этой задачи.

Ключевые слова: Дробная производная, операторный метод, нормированная система, задача Коши, функция Миттаг-Леффлера, явное решение

---

Keywords: *Fractional derivative, operator method, normalized system, Cauchy problem, Mittag-Leffler function, explicit solution.*

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 34A08, 34K06, 45J05.

Funding: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант №0819/ГФ4.

© Б.Х. Турметов, Ж. Абдуллаев, 2016.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был изучен метод построения решения дифференциального уравнения вида

$$D^\alpha y(t) = \lambda t^\beta y(t) + f(t), \quad 0 < t \leq d \leq \infty, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0, \lambda \neq 0, \beta \in R, D^\alpha$  – оператор дифференцирования порядка  $\alpha$  в смысле Римана-Лиувилля [1].

На основе найденных в работе [2] формул композиции оператора  $D^\alpha$  со специальной функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad c_0 = 1, \quad c_i = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\Gamma[\alpha(km+l)+1]}{\Gamma[\alpha(km+l+1)+1]}, \quad i \geq 1,$$

был предложен алгоритм построения решения уравнения (1) в случаях  $f(t) = 0$  и  $f(t)$  – квазиполином. В частности, доказано следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть в уравнении (1)  $f(t) = 0, \alpha > 0, \alpha$  – нецелая,  $\beta > -\alpha$ . Если  $0 < \alpha < 1$ , то уравнение (1) имеет решение

$$y(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,(\beta-1)/\alpha}(\lambda t^{\alpha+\beta}) \in I_{loc}[0,d). \quad (2)$$

Если  $m-1 < \alpha < m, m = 2, 3, \dots$ , и  $(\alpha + \beta)(i+1) = 1, 2, \dots, m-1, i = 0, 1, \dots$ , то уравнение (1) имеет  $m$  решений

$$y_j(t) = t^{\alpha-j} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,(\beta-j)/\alpha}(\lambda t^{\alpha+\beta}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

При этом  $y_j(t) \in B_{loc}[0,d), j = 1, 2, \dots, m-1, y_m(t) \in I_{loc}[0,d)$ . При  $\beta > -\{\alpha\}$  решения (3) линейно независимы.

Здесь  $I_{loc}(\Omega)$  и  $B_{loc}(\Omega)$  – пространства функций, соответственно локально интегрируемых и локально ограниченных на множестве  $\Omega$  действительной оси.

В настоящей работе мы предлагаем новый, более простой метод построения решения уравнения (1). Данный метод основан на построении нормированных систем относительно оператора  $D^\alpha$  (см. [3],[4]).



## 2. НОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – линейные операторы, действующие из пространства  $X$  в  $X$ ,  $L_k X \subset X, k = 1, 2$ . Пусть функции из  $X$  определены в области  $\Omega \subset R^n$ . Приведем определение нормированных систем [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность функций  $\{f_i(x)\}_{i=0}^{\infty}, f_i(x) \in X$ , называется  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1$  в  $\Omega$ , имеющей основание  $f_0(x)$ , если везде в этой области

$$L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_i(x) = f_{i-1}(x), i \geq 1.$$

Если  $f(x) = 0$ , то систему функций  $\{f_i(x)\}$  назовём просто нормированной.

Основные свойства системы функций,  $f$ -нормированной относительно  $L_1$  в  $\Omega$ , изложены в [3]. Приведем некоторые из них.

СВОЙСТВО 1. Если операторы  $L_1$  и  $L_2$  коммутируют, а система функций  $\{f_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$  является  $f$ -нормированной относительно  $L_1$  в  $\Omega$ , то функциональный ряд  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_2^k f_k(x), x \in \Omega$ , является формальным решением уравнения  $(L_1 - L_2)y(x) = f(x), x \in \Omega$ .

СВОЙСТВО 2. Пусть операторы  $L_1$  и  $L_2$  коммутируют, а система функций  $\{f_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$  является  $f$ -нормированной относительно  $L_1$  в  $\Omega$ . Тогда система функций  $\varphi_k(x) = \sum_{i=k}^{\infty} L_2^{i-k} f_i(x), x \in \Omega, \binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!}$ , является  $f$ -нормированной относительно оператора  $L_1 - L_2$  в  $\Omega$ .

Теперь приведем методику построения нормированных систем для одного класса операторов [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор  $D_\mu$  называется обобщенно-однородным порядка  $\mu$  относительно переменной  $t$ , если

$$D_\mu t^a = c_{\mu,a} t^{a-\mu}, \quad t > 0, \quad (4)$$

где  $\mu, a \in R, \mu, a > 0, c_{\mu,a}$  – постоянная. Из равенства (4) следует

$$t^{-a+\mu} D_\mu t^a = c_{\mu,a}. \quad (5)$$

Пусть  $s \in R$ ,  $D_\mu$  – обобщенно-однородный оператор порядка  $\mu$ . Предположим, что к одночлену  $t^{\mu k+s}$  можно применить оператор  $D_\mu$ . На основе равенства (5) введем следующие коэффициенты:

$$c(\mu, s, i) = \prod_{k=1}^i \left( t^{-\mu k-s+\mu} D_\mu t^{\mu k+s} \right), \quad i \geq 1, \quad c(\mu, s, 0) = 1. \quad (6)$$

Будем предполагать, что  $c(\mu, s, i) \neq 0, i \geq 1$ . Легко показать, что для коэффициентов  $c(\mu, s, i)$  справедливы равенства

$$\frac{1}{c(\mu, s, i)} = \frac{(t^{-\mu i-s} D_\mu t^{\mu i+s})}{c(\mu, s, i+1)}, \quad i \geq 1.$$

Рассмотрим систему функций  $f_{s,i}(t) = \frac{t^{\mu i+s}}{c(\mu, s, i)}, i = 0, 1, \dots$ . Справедливо следующее утверждение [4].

**ЛЕММА 1.** Пусть  $D_\mu$  является обобщенно-однородным оператором порядка  $\mu$  относительно переменной  $t$  и для некоторых значений  $s \in \{s_1, \dots, s_m\}, s_j \in R, j = 1, 2, \dots, m$ , выполняется равенство  $D_\mu t^{s_j} = 0$ . Тогда при всех  $1 \leq j \leq m$  система  $f_{s_j,i}(t)$  является 0-нормированной относительно оператора  $D_\mu$ .

Рассмотрим функцию

$$y_{s,p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{\mu i+s}}{c(\mu, s, i)}. \quad (7)$$

Справедливы следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $p = 0$ , ряд (7) сходится и к нему можно почленно применять оператор  $D_\mu$ . Если существуют значения параметра  $s$ , при которых выполняется равенство

$$(t^{-\mu i-s+\mu} D_\mu t^{\mu i+s})|_{i=0} = 0, \quad (8)$$

то функции  $y_{s,0}(t)$  при всех таких значениях параметра  $s$  удовлетворяют уравнению  $D_\mu y(t) = \lambda y(t), t > 0$ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть ряд (7) сходится и к нему можно почленно применять оператор  $D_\mu$ . Если существуют значения параметра  $s$ , при которых выполняется равенство (8), то функции  $y_{s,p}(t)$  при всех таких значениях параметра  $s$  и для всех  $p = 0, 1, \dots, n - 1$  удовлетворяют уравнению

$$(D_\mu - \lambda)^n y(t) = 0, t > 0, n \geq 1.$$

Доказательства этих теорем следуют из утверждения Леммы 1 и свойств нормированных систем.

### 3. ПРИМЕР ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНОГО ОПЕРАТОРА

Приведем некоторые свойства операторов  $I^\alpha$  и  $D^\alpha$ . Справедливы следующие равенства:

$$I^\alpha t^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1+\alpha)} t^{a+\alpha}, \quad a > -1,$$

$$D^\alpha t^a = 0, \quad a = \alpha - j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$D^\alpha t^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-\alpha)} t^{a-\alpha}, \quad a > \alpha - m. \quad (10)$$

Пусть  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ . Обозначим  $D_{\alpha,\beta} = t^{-\beta} D^\alpha$ . Из равенств (9) и (10) следует

$$D_{\alpha,\beta} t^a = \begin{cases} 0, & a = \alpha - j, j = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-\alpha)} t^{a-(\alpha+\beta)}, & a > \alpha - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, из (11) вытекает, что оператор  $D_{\alpha,\beta}$  является обобщенно-однородным порядка  $\alpha + \beta$  относительно переменной  $t$ . Исследуем коэффициенты  $c(\alpha + \beta, s, i)$ , связанные с оператором  $D_{\alpha,\beta} = t^{-\beta} D^\alpha$ . Из равенств (11) и (6) получаем

$$\begin{aligned} c(\alpha + \beta, s, i) &= \prod_{k=1}^i \left( t^{-(\alpha+\beta)k-s+\alpha+\beta} D_{\alpha,\beta} t^{(\alpha+\beta)k+s} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^i \frac{\Gamma[(\alpha + \beta)k + s + 1]}{\Gamma[(\alpha + \beta)k + s + 1 - \alpha]}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Отметим, что для того, чтобы использовать утверждение Теоремы 2, необходимо выполнение условий:  $(\alpha + \beta)k \neq j - q$ ,  $j = 2, \dots, m$ ,  $q = 1, 2, \dots, j - 1$ . Таким образом, для оператора  $D_{\alpha, \beta} = t^{-\beta} D^\alpha$  коэффициенты  $c(\alpha + \beta, s, i)$  имеют вид

$$c(\alpha + \beta, \alpha - j, i) = \prod_{k=1}^i \frac{\Gamma[(\alpha + \beta)k + \alpha - j + 1]}{\Gamma[(\alpha + \beta)k - j + 1]}, \quad i \geq 1,$$

$$c(\alpha + \beta, \alpha - j, 0) = 1.$$

Рассмотрим уравнение

$$(D_{\alpha, \beta} - \lambda)^n y(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t > 0. \quad (12)$$

Из Теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $m = 1, 2, \dots, \beta > -\alpha$ . Если  $0 < \alpha < 1$ , то уравнение (12) имеет  $n$  решений

$$y_{\alpha-1, p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-1}}{c(\alpha + \beta, \alpha - 1, i)}, \quad p = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (13)$$

Если  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , и  $(\alpha + \beta)i \neq j - q$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ ,  $q = 1, 2, \dots, j - 1$ ,  $i \geq 1$ , то уравнение (12) имеет  $mn$  - решений

$$y_{\alpha-j, p}(t) = \sum_{i=p}^{\infty} \lambda^{i-p} \binom{i}{p} \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, i)}, \quad (14)$$

где  $j = 1, \dots, m$ ,  $p = 0, \dots, n - 1$ .

Далее, если в уравнении (12)  $n = 1$ , то в области  $t > 0$

$$t^\beta (D_{\alpha, \beta} - \lambda) = t^\beta [t^{-\beta} D^\alpha - \lambda] = D^\alpha - \lambda t^\beta.$$

Следовательно, всякое решение уравнения (12) при  $n = 1$  является решением и однородного уравнения (1).

Если  $s_j = \alpha - j$ , то легко показать выполнение равенства

$$(\alpha + \beta)k + s_j - \alpha = \alpha [(1 + \beta/\alpha)(k - 1) + (\beta - j)/\alpha + 2] + 1.$$

Далее, если заменим индекс  $k - 1$  на  $k$ , то

$$\frac{1}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, i)} = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\Gamma[\alpha((1 + \beta/\alpha)k + 1 + (\beta - j)/\alpha) + 1]}{\Gamma[\alpha((1 + \beta/\alpha)k + (\beta - j)/\alpha + 2) + 1]}, \quad i \geq 1.$$

Следовательно, функции  $y_{\alpha-j,p}(t)$ , представимые в виде (13) и (14), в случае  $p = 0$  совпадают соответственно с функциями (2) и (3) из Теоремы 1. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть в уравнении (1)  $f(t) = 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  – нецелая,  $\beta > -\alpha$ . Если  $0 < \alpha < 1$ , то уравнение (1) имеет решение

$$y_{\alpha-1,0}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-1}}{c(\alpha + \beta, \alpha - 1, i)},$$

причем  $y_{\alpha-1}(t) \in I_{loc}[0, d)$ . Если  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , и  $(\alpha + \beta)i \neq j - q$ ,  $j = 2, 3, \dots, m$ ,  $q = 1, 2, \dots, j - 1$ ,  $i \geq 1$ , то уравнение (1) имеет  $m$  решений

$$y_{\alpha-j,0}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, i)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При этом  $y_{\alpha-j}(t) \in B_{loc}[0, d)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ,  $y_{\alpha-m}(t) \in I_{loc}[0, d)$ . Если  $\beta > -\{\alpha\}$ , то эти решения линейно независимы.

#### 4. ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть  $f_{s,i}(t) = \frac{t^{(\alpha+\beta)+s}}{c(\alpha + \beta, s, i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , где  $s = \mu + \alpha$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Для этой системы верны равенства

$$D^\alpha f_{s,i}(t) = t^\beta f_{s,i-1}(t), \quad i \geq 1, \quad (15)$$

$$D^\alpha f_{s,0}(t) = D^\alpha t^{\mu+\alpha} = \frac{\Gamma(\mu + \alpha + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} t^\mu. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$y_{\mu+\alpha}(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i f_{\mu+\alpha,i}(t).$$

Из равенств (15) и (16) легко следует  $D^\alpha y_{\mu+\alpha}(t) = t^\mu + \lambda t^\beta y_{\mu+\alpha}(t)$ , т.е. функция  $y_{\mu+\alpha}(t)$  является частным решением уравнения (1) при  $f(t) = t^\mu$ . Тогда из Теоремы 5 вытекает справедливость следующего утверждения.

**ТЕОРЕМА 6.** Пусть  $f(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k t^{\mu_k}$ ,  $\lambda_k \in R$ ,  $0 < \alpha$  – нецелая,  $\beta > -\alpha$ ,  $\mu_k > 1 - \alpha$ ,  $(\alpha + \beta)i + \mu_k \neq -1, -2, \dots, -m$ ,  $i = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, n$ . Тогда  $i$ ) частное решение уравнение (1) имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k \Gamma(\mu_k + 1)}{\Gamma(\mu_k + 1 + \alpha)} y_{\mu_k + \alpha}(t),$$

причем, если существует такое  $k_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$ , что  $\mu_{k_0} < -\alpha$ , то  $y(t) \in I_{loc}[0, d)$ , а если  $\mu_k > -\alpha$  для всех  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , то  $y(t) \in B_{loc}[0, d)$ ;  $ii$ ) при  $\beta > -\{\alpha\}$  ( $\beta > \alpha - (m - 1)$ ) общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y(t) = \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha+\beta, \alpha-j, i)} + \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k \Gamma(\mu_k + 1)}{\Gamma(\mu_k + 1 + \alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i t^{(\alpha+\beta)i+\alpha+\mu_k}}{c(\alpha+\beta, \alpha+\mu_k, i)},$$

где  $c_j$  – произвольные постоянные,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

##### 5. Задача типа Коши для однородного уравнения

В этом пункте мы рассмотрим задачу типа Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$D^{\alpha-k} y(t) \Big|_{t=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

где при  $k = m$  полагаем  $D^{\alpha-k} \equiv I^{m-\alpha}$ .

**ТЕОРЕМА 7.** Пусть в задаче (1) выполняются условия:  $f(t) = 0$ ,  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $\beta > -\{\alpha\}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $b_k \in R$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Тогда решение задачи типа Коши (1), (17) существует в классе  $I_{loc}[0, d)$ , единственно и представимо в виде

$$y(t) = \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, i)}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функция (18) удовлетворяет начальным условиям (17). Пусть  $i = 0$ . Тогда

$$I^{m-\alpha} t^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - j) t^{\alpha-j+m-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1 - j + m - \alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - j)}{\Gamma(m + 1 - j)} t^{m-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда

$$I^{m-\alpha} \frac{t^{\alpha-j}}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, 0)} \Big|_{t=0} = \begin{cases} \Gamma(\alpha + 1 - m), & j = m, \\ 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (19)$$

Далее, если  $m - 1 < \alpha < m$ , то при  $k = 1, 2, \dots, m - 1$  имеем  $m - m - k < \alpha - k < m - k$  и

$$D^{\alpha-k} t^{\alpha-j} = \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} I^{m-\alpha} t^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - j)}{\Gamma(m + 1 - j)} \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} t^{m-j}.$$

Отсюда, если  $m - k > m - j \Leftrightarrow j > k$ , то  $D^{\alpha-k} t^{\alpha-j} = 0$ . А если  $k \geq j$ , то

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k} t^{\alpha-j} &= \frac{\Gamma(\alpha + 1 - j)}{\Gamma(m + 1 - j)} (m - j) \dots (m - j - (m - k - 1)) t^{k-j} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1 - j)}{\Gamma(k + 1 - j)} t^{k-j}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D^{\alpha-k} \frac{t^{\alpha-j}}{c(\alpha + \beta, \alpha - j, 0)} \Big|_{t=0} = \begin{cases} \Gamma(\alpha + 1 - k), & j = k, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Пусть теперь  $i \geq 1$ . Тогда

$$I^{m-\alpha} t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j} = \frac{\Gamma((\alpha + \beta)i + \alpha + 1 - j)}{\Gamma((\alpha + \beta)i + 1 - j + m)} t^{(\alpha+\beta)i+m-j}.$$

Так как  $\alpha + \beta > 0, m - j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$ , то

$$I^{m-\alpha} \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha+\beta, \alpha-j, i)} \Big|_{t=0} = 0, \quad i \geq 1.$$

Далее при  $k = 1, 2, \dots, m - 1$  имеем

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k} t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j} &= \frac{\Gamma((\alpha+\beta)i + \alpha + 1 - j)}{\Gamma((\alpha+\beta)i + m + 1 - j)} \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} t^{(\alpha+\beta)i+m-j} = \\ &= \frac{\Gamma((\alpha+\beta)i + \alpha + 1 - j)}{\Gamma((\alpha+\beta)i + 1 + k - j)} t^{(\alpha+\beta)i+k-j}. \end{aligned}$$

Так как  $(\alpha + \beta)i > 0$ , то при  $k \geq j$  имеет место равенство  $t^{(\alpha+\beta)i+k-j} \Big|_{t=0} = 0$ . Пусть  $k > j$  и  $i = 1$ . Тогда

$$\alpha + \beta + k - j = m - 1 + \{\alpha\} + \beta + k - j = (m - j) + (\{\alpha\} + \beta) + k - 1.$$

Теперь видно, что при  $\beta > -\{\alpha\}$  для всех  $j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, m - 1, j > k$  выполняется равенство

$$t^{(\alpha+\beta)+k-j} \Big|_{t=0} = 0.$$

Если  $i \geq 2$ , то

$$(\alpha + \beta)i + k - j = i(\beta + \{\alpha\}) + (m - 1)(i - 1) + m - j + k - 1 > 0.$$

Поэтому при этих значениях

$$t^{(\alpha+\beta)i+k-j} \Big|_{t=0} = 0.$$

Итак, при  $k = 1, 2, \dots, m - 1$

$$D^{\alpha-k} \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha+\beta, \alpha-j, i)} \Big|_{t=0} = 0, \quad i \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$



Из равенств (19),(20) вытекает

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k}y(t)\Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i D^{\alpha-k} t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha+\beta, \alpha-j, i)} \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} \Gamma(\alpha-k+1) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

т.е. выполняются начальные условия (17). Теорема доказана.

#### 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{\alpha}y(t) = \lambda t^{\beta}y(t) + \sum_{k=0}^n \lambda_k t^{\mu_k}, \quad 0 < t < d \leq \infty, \quad (21)$$

$$D^{\alpha-k}y(t)\Big|_{t=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (22)$$

где  $D^{\alpha-m} = I^{m-\alpha}$ .

Из Теоремы 7 вытекает следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 8.** Пусть  $m-1 < \alpha < m$ ,  $m = 1, 2, \dots, \beta > -\{\alpha\}$ ,  $\mu_k \in R$ ,  $\mu_k > -1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda_k, b_k \in R$ . Тогда решение задачи типа Коши (21), (22) существует в  $I_{loc}[0, d)$ , единственно, и имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha-j}}{c(\alpha+\beta, \alpha-j, i)} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k \Gamma(\mu_k+1)}{\Gamma(\mu_k+1+\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{t^{(\alpha+\beta)i+\alpha+\mu_k}}{c(\alpha+\beta, \alpha+\mu_k, i)}. \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1 Килбас А. А., Сайго М. Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 195-204.

2 Килбас А.А., Сайго М. Дробные интегралы и производные от функции типа Миттаг-Леффлера // Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 4. – С. 22-26.

3 Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // J. Math. Anal., Appl. – 2003. – V. 287, No. 2. – P. 577-592.

4 Турметов Б.Х. Нормированные системы и их применение к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика". – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 28-33.

*Статья поступила в редакцию 22.11.2016*

**Турметов Б.Х., Абдуллаев Ж. БӨЛШЕК РЕТТІ, СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ**

Бұл жұмыс бөлшек ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің шешімін құрудың операторлық әдісін зерттеуге арналған. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің арнайы класы үшін дәл шешімдерді құрудың алгоритмі жасалған. Бұл әдіс бөлшек ретті дифференциалдау операторларына қатысты функциялардың нормаланған жүйелерін құруға негізделген. Бөлшек ретті дифференциалдау операторларымен байланысқан жалпылама-біртекті операторлардың қасиеттері зерттелген. Ары қарай, бөлшек ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің дәл шешімдері жалпылама-біртекті операторлар үшін құрылған нормаланған жүйелердің қасиеттерін пайдалана отырып, зерттелген. Риман-Лиувиль мағынасындағы туындылары бар бөлшек ретті біртекті дифференциалдық теңдеулер қарастырылған. Осы шешімдер сызықтық тәуелсіз болатын шарттар табылған. Сондай-ақ, оң жағында квазиполиномдар болатын біртекті дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін құру әдістері де қарастырылған. Коши тектес есеп зерттелген және осы есептің бірімәнді шешілімділігі дәлелденген.

Turmetov B.Kh., Abdullaev J. OPERATOR METHOD OF SOLVING  
A CLASS OF LINEAR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL  
EQUATIONS

This work is devoted to study of construction of operator method for solving linear fractional order differential equations. An algorithm is developed for constructing exact solutions for a special class of fractional order differential equations. This method is based on the construction of normalized functions systems with respect to the operators of fractional differentiation. The properties of generalized-homogeneous operators are associated with fractional order operators. A method for constructing normalized function systems is proposed for these classes of operators. Next, the exact solutions of linear fractional order differential equations are investigated by using the properties of normalized systems, which are built for generalized-homogeneous operators. The homogeneous fractional order differential equations are considered in the Riemann-Liouville sense. The conditions, under which these solutions are linearly independent, are found. Methods of constructing particular solutions for the non-homogeneous fractional order differential equations with quasipolynomials on the right side are also considered. Cauchy-type problem is studied and the unique solvability of this problem is proved.

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**Е.М. Хайруллин<sup>1</sup>, М.Д. Наукенова<sup>2</sup><sup>1,2</sup>Казахский национальный исследовательский университет имени К.И. Сатпаева  
050013, Алматы, ул. Сатпаева, 22 а, e-mail: khairullin\_42\_42@mail.ru

Аннотация: Рассматривается граничная задача для многомерного параболического интегро-дифференциального уравнения (ПИДУ) с разрывным коэффициентом, когда краевые условия содержат производные высокого порядка, превышающего порядок уравнения [1]–[3]. Решение ищется в виде суммы теплового потенциала и функции Коши ПИДУ. Приведена лемма о нахождении пределов производных от искомой функции в окрестности гиперплоскости. Используя граничные условия и условия сопряжения, получена система интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ), когда порядок производной под знаком интеграла выше, чем порядок производной вне интеграла. Характеристическая часть СИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа в классе обобщенных функций. Найдено алгебраическое условие перехода обобщенного решения в классическое. Получена теорема о разрешимости краевой задачи многомерного ПИДУ, когда заданные функции имеют частные производные второго порядка по пространственным переменным и выполнено условие разрешимости.

Ключевые слова: Краевая задача, многомерное параболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, регуляризация.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Требуется найти решение  $u(x, t) \in C_{x,t}^{m_i, [\frac{m_i}{2}]}(Q_T)$  многомерного параболического интегро-дифференциального уравнения (ПИДУ)

$$L(D_x, D_t)u(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, \tau) d\tau + f(x, t) \quad (1)$$

Keywords: *Boundary value problem, multidimensional, parabolic equation, integro-differential equation, regularization.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 35C05, 35B25.

© Е.М. Хайруллин, М.Д. Наукенова, 2016.

в области  $Q_T \equiv \{(x, t) = (x', x_{n,t}) : x' \in R^{n-1}, x_n \in ]0, l[, t \in ]0, T\}$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

граничным условиям

$$L_{m_i}(D_x)u(x, t)|_{\Gamma_i} = \varphi_i(x, t), \quad (x', t) \in Q_T^{(1)} = (Q, x_n) \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{cases} u(x, t)|_{\Gamma_3} = u(x, t)|_{\Gamma_4}, \\ h_1 D_{x_n} u(x, t)|_{\Gamma_3} = h_2 D_{x_n} u(x, t)|_{\Gamma_4}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $L(D_x, D_t) \equiv D_t - \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha}(x_n) D_{x_\alpha}^2$ ,  $L_{m_i}(D_x) = \sum_{k_n=0}^m b_{m_i-k_n}^{(i)}(D_{x'}) D_{x_n}^{k_n}$ ,  
 $b_{m_i-k_n}^{(i)}(D_{x'}) = \sum_{|k'|=m_i-k_n} b_{k',k_n}^{(i)}(D_{x'}) D$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа,

$$a_{\alpha\alpha}(x_n) = \begin{cases} a_{\alpha\alpha}^{(1)} > 0, & \text{при } 0 < x_n < x_0, \\ a_{\alpha\alpha}^{(2)} > 0, & \text{при } x_0 < x_n < l, \end{cases}$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_1 = x_n = 0, & \text{при } i = 1, \\ \Gamma_2 = x_n = l, & \text{при } i = 2, \\ \Gamma_3 = x_n = x_0 - 0, & \text{при } i = 3, \\ \Gamma_4 = x_n = x_0 + 0, & \text{при } i = 4, \end{cases}$$

$R^{n-1}$  –  $(n-1)$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, x_2, x_3)$  с нормой  $|x'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ ,  $k' = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$  – мультииндекс с неотрицательными координатами,  $|k'| = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}$ ,  $D_{x'}^{k'} = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \dots D_{x_{n-1}}^{k_{n-1}}$ ,  $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ),  $b_k^{(i)}$  – заданные постоянные,  $b_{0,0,\dots,0}^{(i)} \neq 0$ ,  $h_1$  и  $h_2$  – заданные положительные постоянные.  $f(x, t) \in C_x^{m_i}(Q_T)$  и продолжено на отрицательную полуось  $Ox_n$  так, чтобы функция  $\Phi_i(x, t) = \sum_{|k| \leq m_i} b_k^{(i)}(D_x^k) f(x, t)$  была нечетной по  $x_n$ ,  $\varphi_i(x, t) \in C_{x',t}^{2,1}(Q_T^{(1)})$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(4)

Решение задачи будем искать при  $0 < x_n, x_0$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_1(\xi', \tau) D_{x_n} G_0^{(1)}(x' - \xi', x_n, t - \tau) d\xi' + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_3(\xi', \tau) D_{x_n} G_0^{(1)}(x' - \xi', x_n - x_0, t - \tau) d\xi' + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^n} f(\xi, \tau) G^{(1)}(x - \xi, t - \tau) d\xi,
 \end{aligned} \tag{5}$$

а при  $x_0 < x_n < l$  – в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_2(\xi', \tau) D_{x_n} G_0^{(2)}(x' - \xi', l - x_n, t - \tau) d\xi' + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_4(\xi', \tau) D_{x_n} G_0^{(2)}(x' - \xi', x_n - x_0, t - \tau) d\xi' + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^n} f(\xi, \tau) G^{(2)}(x - \xi, t - \tau) d\xi,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $G^{(i)}(x - \xi, t - \tau)G^{(i)}$  – функция Коши для ПИДУ [2],

$$G^{(i)}(x - \xi, t - \tau) = G_0^{(i)}(x - \xi, t - \tau) + G_1^{(i)}(x - \xi, t - \tau),$$

$G_0^{(i)}(x - \xi, t - \tau)$  – фундаментальное решение параболического уравнения,

$$G_0^{(i)}(x, \tau) = \frac{2a_{nn}^{(i)} \exp \left[ -\frac{1}{4t} \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha, \alpha)} x_\alpha^2 \right]}{(4\pi t)^{n/2} (\det A_i)^{1/2}},$$

$A_i$  – диагональная матрица, состоящая из коэффициентов  $a_{\alpha\alpha}^{(i)}$  ( $\alpha = \overrightarrow{1, n}$ ,  $i = 1, 2$ ), а  $A_i^{(\alpha, \alpha)}$  – элементы обратной матрицы  $A_i^{-1}$ ,  $G_1^{(i)}(x - \xi, t - \tau)$  определяются в следующем виде:

$$G_1^{(i)}(x - \xi, t - \tau) = \int_T^t d\tau \int_{R^n} G_0^{(i)}(x - \xi, t - \tau) \Gamma_i(y - \xi, s - \tau) dy,$$

где  $\Gamma_i(y - \xi, s - \tau)$  – резольвента интегрального уравнения Вольтерра-Фредгольма второго рода  $\psi_i(x, t)$  ( $i = \overrightarrow{1, 4}$ ) – неизвестные функции.

### 3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(4) К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Непосредственной проверкой можно установить, что функция  $u(x, t)$  [4], определяемая формулами (5) и (6), удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Надо выбрать функции  $\psi_i(x', t)$ , ( $i = \overrightarrow{1, 4}$ ) так, чтобы функция  $u(x, t)$  при  $x \rightarrow 0$  удовлетворяла условиям (3) и (4).

Для нахождения предела производных функции  $u(x, t)$  при  $x_n \rightarrow 0$ , входящих в условия (3), сформулируем лемму.

**ЛЕММА.** Если функции  $\psi_i(x', t)$  и  $f(x, t)$  соответственно из классов  $C_{x', t}^{m_1, \frac{m_1}{2}}(Q_T^{(1)})$  и  $C_x^m(Q_T)$ , то

$$\begin{aligned} & \lim_{x_n \rightarrow 0} D_{x_n}^{2\alpha-1} D_{x'}^{k'} u(x, t) = \\ & = \frac{1}{\left(\sqrt{a_{nn}^{(1)}}\right)^{2\alpha}} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F_1^\alpha \left[ D_{\xi'}^{k'}, \psi_1(\xi', \tau) \right] G_0^{(1)}(x - \xi, 0, t - \tau) d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_3(\xi', \tau) \left\{ D_{x_n}^{2n-1} D_{x'}^{k'} G_0^{(1)}(x' - \xi', x_n - x_0, t - \tau) \right\} \Big|_{x_n=0} d\xi' + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{R^n} D_{3n}^{2\alpha-1} D_{\xi'}^{k'} G_0^{(1)} f(\xi, \tau) G^{(1)}(x' - \xi', \xi_n, t - \tau) \Big|_{x_n=0} d\xi', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow +0} D_{x_n}^{2\alpha} D_{x'}^{k'} u(x, t) &= \frac{1}{\left(\sqrt{a_{nn}^{(1)}}\right)^{2\alpha}} F_1^\alpha \left[ D_{\xi'}^{k'}, \psi_1(\xi', \tau) \right] + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_3(\xi', \tau) \left\{ D_{x_n}^{2n} D_{x'}^{k'} G^{(1)}(x' - \xi', x_n - x_0, t - \tau) \right\} \Big|_{x_n=0} d\xi' + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{R^n} D_{3n}^{2\alpha} D_{\xi'}^{k'} f(\xi, \tau) G^{(1)}(x' - \xi', \xi_n, t - \tau) d\xi'. \end{aligned}$$

Приведенная Лемма справедлива и для нахождения предела производных функции  $u(x, t)$  при  $x_n \rightarrow l - 0$  и  $x_0 - 0$ ,  $x_n \rightarrow x_0 + 0$ .

Подставляя функцию, определяемую формулами (5) и (6), соответственно в условия (3) и (4) и используя приведенную Лемму, получим систему интегральных ПИДУ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n F_\alpha^i \left[ b_{m_\alpha - 2i}^{(\alpha)} D_{x'} \psi_\alpha(x', t) \right] + (-1)^\alpha \sum_{i=1}^n \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F_\varepsilon^i \left[ b_{m_\alpha - 2i + 1}^{(\alpha)} (D_{x'}) \psi_\alpha(\xi', \tau) \right] \times \\ \times G_0^{(\alpha)}(x' - \xi', 0, t - \tau) d\xi' + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_{2+\alpha}(\xi', \tau) K_\alpha(x' - \xi', t - \tau) d\xi' = \\ = \varphi_\alpha(x', t), \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \psi_{5-\alpha}(x', t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} F_2^{\alpha-1} [\psi_{2+\alpha}(\xi', \tau)] G_0^{(\alpha)}(x' - \xi', 0, t - \tau) d\xi' + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_0^0 d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_i(\xi', \tau) K_{1i}^\alpha(x' - \xi', t - \tau) d\xi' + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_0^0 d\tau \int_{R^n} f(\xi, \tau) K_{2i}^\alpha(x - \xi', t - \tau) d\xi \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned}$$



где  $K_\alpha(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $K_{1i}^\alpha(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $K_{2i}^\alpha(x' - \xi', t - \tau)$  – регулярные ядра  $F_\alpha \equiv \left( D_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i}^{(\alpha)} D_{x_i}^2 \right), \dots, F_\alpha^n \equiv \left( D_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}^{(\alpha)} D_{x_i}^2 \right)$ ,  $F_\alpha^0 \equiv E$  – единичный оператор.

Для решения СПИДУ (7) и (8) сначала рассматривается СПИДУ (8), при этом временно считая известными функции  $\psi_\alpha(x', t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ), Исключая функцию  $\psi_4(x', t)$ , получим ПИДУ относительно функции  $\psi_3(x', t)$ :

$$K_0(x' - \xi', t - \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{(x_\alpha - y_\alpha)^2}{A_{\alpha\alpha}^2(z)(t-\tau)}\right]}{\prod_{\alpha=1}^{n-1} A_{\alpha\alpha}(z) \left(\frac{z^2 + a_{\alpha\alpha}^{(1)}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}^{(1)}}}\right)} dz,$$

причем  $A_{\alpha\alpha}(z) = \sqrt{a_{\alpha\alpha}^{(1)} \frac{z^2 + a_{\alpha\alpha}^{(2)}}{z^2 + a_{\alpha\alpha}^{(1)}}}$ ,  $\lambda = \frac{2a_{nn}^{(1)} h_2}{h_1 \pi}$ .

Теперь, воспользовавшись результатами работы [3], решение ИДУ (9) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_3(x', t) &= \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_1(\xi', \tau) H_1(x' - \xi', t - \tau) d\xi' + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_2(\xi', \tau) H_2(x' - \xi', t - \tau) d\xi' + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{R^n} F_2[f(\xi, \tau)] H_3(x' - \xi', t - \tau) d\xi', \end{aligned}$$

где  $H_1(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $H_2(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $H_3(x' - \xi', t - \tau)$  – регулярные ядра.

Подставляя функцию из (10) в (8), найдем функцию  $\psi_4(x', t)$ :

$$\psi_4(x', t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_1(\xi', \tau) H_{11}(x' - \xi', t - \tau) d\xi' +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_2(\xi', \tau) H_{12}(x' - \xi', t - \tau) d\xi' + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{R^n} \{F_2[f(\xi, \tau)] + f(\xi, \tau)\} H_{13}(x - \xi, t - \tau) d\xi,
 \end{aligned}$$

где  $H_{11}(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $H_{12}(x' - \xi', t - \tau)$ ,  $H_{13}(x - \xi, t - \tau)$  – регулярные ядра.

Далее для упрощения (7) относительно функций  $\psi_1(x', t)$ ,  $\psi_2(x', t)$  введем оператор  $F_i^{-n}$ , обратный к оператору  $F_i^n$ :

$$F_\alpha^{-n}[\psi] = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi(\xi', \tau) \frac{(t - \tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} G_1^{(\alpha)}(x' - \xi', t - \tau) d\xi',$$

где  $G_1^{(\alpha)}(x' - \xi', t - \tau) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} A_k^{(\alpha, \beta)} \frac{(x_k - \xi_k)^2}{t - \tau}\right]}{[2\sqrt{\pi(t - \tau)}]^{n-1} \sqrt{\det A_\alpha}}$ .

Непосредственным вычислением можно убедиться, что операторы взаимно обратные.

Применим к уравнению (7) обратный оператор  $F_i^{-n}$ , при этом временно считая функции  $\psi_{2+\alpha}(x', t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) известными, получим эквивалентные уравнения

$$\begin{aligned}
 & b_{0,0,\dots,m_\alpha}^{(\alpha)} \psi_\alpha(x', t) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sqrt{a_{nn}^{(\alpha)}}\right)^k \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} B_{m-k}^{(\alpha)}(D_{\xi'}) \psi_\alpha(\xi', \tau) \times \\
 & \times \frac{(t - \tau)^{k/2-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} G_1^{(\alpha)}(x' - \xi', t - \tau) d\xi' = \varphi_\alpha^{(1)}(x', t), \quad (\alpha = 1, 2), \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & \varphi_\alpha^{(1)}(x', t) = \left(\sqrt{a_{nn}^{(1)}}\right)^m F_\alpha^{-\frac{m}{2}}[\varphi] - \\
 & - \left(\sqrt{a_{nn}^{(\alpha)}}\right)^m F_\alpha^{-\frac{m}{2}} \left[ \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_{2+\alpha}(\xi', \tau) K_\alpha(x' - \xi', t - \tau) d\xi' \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Уравнения вида (12) изучены в работе [5], поэтому, используя результаты работы и применяя преобразование Фурье по пространственным переменным в классе обобщенных функций и преобразование Лапласа по переменной  $t$ , решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x', t) = & \varphi_\alpha^{(1)}(x', t) - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} H_\alpha(x' - y', t - \tau) \varphi_\alpha^{(1)}(y', t) dy' - \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \frac{\partial}{\partial y_k} H(x' - y', t - \tau) \frac{\partial}{\partial y_k} \varphi_\alpha^{(1)}(y', t) dy', \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$H_\alpha(x' - t) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} h_\alpha(s', t) \frac{\exp[-2\pi i(x', s')]}{1 + 4\pi^2 |s'|^2} ds', \quad (15)$$

причем

$$\begin{aligned} h_\alpha(s', t) = & \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{n_k} C_{k,\beta}^{(\alpha)}(\sigma') \beta (-2\pi i |s'|)^\beta (2\sqrt{t})^{\beta-1} \times \\ & \times \exp \left[ -4\pi^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_{jj}^{(\alpha)} + a_{nn}^{(\alpha)} (q_k^\alpha)^2 \right) s_\alpha^2 t \right], \end{aligned}$$

$q_k^{(\alpha)}$  ( $k = \overline{1, \nu}$ ) – корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{m_\alpha} b_k^{(\alpha)}(\sigma') \lambda^{m_\alpha - k} = 0, \quad \sigma' = \frac{s'}{|s'|}, \quad \sigma_i = \frac{s'_i}{|s'|} \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}_{k=1, \nu} \left( q_k^{(\alpha)} \right)^2 > -\frac{a_{\nu\nu}^{(\alpha)}}{a_{nn}^{(\alpha)}}, \quad (a_{\nu\nu}^{(\alpha)} > 0, \nu = \overline{1, n-1}), \quad (16)$$

$C_{k,\beta}^{(\alpha)}(\sigma')$  – определенный коэффициент, зависящий только от  $b_k^{(\alpha)}(\sigma')$ .

Подставляя теперь вместо  $\varphi_\alpha^{(1)}(x', t)$  ее выражение из (13) в (14), получим систему интегральных уравнений

$$\psi_\alpha(x', t) = \Phi_\alpha(x', t) - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_\alpha(\xi', \tau) K_\alpha(x' - \xi', t - \tau) d\xi' \quad (\alpha = 1, 2), \quad (17)$$

где функция  $\psi_\alpha(x', t)$  зависит от заданных функций  $\varphi_\alpha(\xi', t)$  и  $f(x, t)$ , ядро  $K_\alpha(x' - \xi', t - \tau)$  удовлетворяет оценке

$$|K_\alpha(x' - \xi', t - \tau)| \leq M \frac{\exp\left[-\delta^2 \frac{|x - \xi|^2}{t - \tau}\right]}{(\sqrt{t - \tau})^n}, \quad (18)$$

$M, \delta^2$  – некоторые положительные постоянные.

На основании оценки (18) систему интегральных уравнений (17) можно решить методом последовательных приближений. Итак, справедлива теорема.

**ТЕОРЕМА.** Если функции  $\varphi_\alpha(\xi', t)$  и  $f(x, t)$  соответственно из классов  $C_{x', t}^{2, l}(Q_T)$  и  $C_x^m(Q_T)$ , то существует функция  $u(x, t) \in C_x^{m_2, \left[\frac{m_\alpha}{2}\right]}(Q_T)$ , являющаяся решением краевой задачи (1)–(4) при условии (16), выраженная формулами (5) и (6), где неизвестные функции  $\psi_i(x', t)$  ( $i = 1, 2$ ) определяются из системы (17), а  $\psi_{i+2}(x', t)$  ( $i = 1, 2$ ) определяются формулами (10) и (11).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тихонов А.Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающих порядок уравнения // Матем. сб. – 1950. – Т. 26(68), № 1. – С. 35-56.
- 2 Ким Е.И. Об условиях разрешимости одной граничной задачи уравнения теплопроводности // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140, № 3. – С. 553-556.
- 3 Хайруллин Е.М., Тулешева Г.А. Решение одной мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности // Труды II межд. научн. конф. "Высокие технологии – залог устойчивого развития". – Алматы, 2013. – Т. 1. – С. 160-164.
- 4 Хайруллин Е.М., Халбаева Ж.А. Функция Коши для интегродифференциального уравнения параболического типа в многомерном пространстве // Материалы IV межд. научн. конф. "Актуальные проблемы машиностроения". Часть III. Алматы, 2014. – С. 311-316.

5 Хайруллин Е.М. Об одном подходе к решению граничной задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом // Межд. научн. конф. "Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения". – Алматы, 2015. – С. 141-144.

*Статья поступила в редакцию 30.09.2016*

Khairullin E.M., Naukenova M.D. ON SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

We consider boundary-value problem for multidimensional parabolic integro-differential equation (PIDE) with discontinuous coefficient, when the boundary conditions include higher order derivatives, higher than the order of the equation [1]–[3]. The solution is sought in the form of the sum of heat potential and Cauchy function (PIDE). Lemma of finding the limits of the derivatives of the unknown function in the neighborhood of hyperplane is formulated. Using the boundary conditions and conjugation conditions, the system of integro-differential equations (SIDE) is received, when the order of the derivative under the integral is higher than the order of the derivative outside of integral. Characteristic part of SIDE is solved by Fourier-Laplace integral transformations in the class of generalized functions. Algebraic condition for the transition of a generalized solution to the classic one is obtained. Theorem on the solvability of the boundary-value problem for multidimensional PIDE is proved when the given functions have second order partial derivatives on space variables and condition of solvability is fulfilled.

Хайруллин Е.М., Наукенова М.Д. КОЭФФИЦИЕНТІ ҮЗІЛІСТІ БОЛАТЫН ПАРАБОЛАЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ БІР ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Коэффициенті үзілісті болатын көпөлшемді параболалық интегралдық-дифференциалдық теңдеу (ПИДТ) үшін, шеттік шарттары теңдеудің ретінен асатын жоғарғы ретті туындыларды қамтитын шекаралық есеп қарастырылады [1], [2], [3]. Шешім жылулық потенциал мен ПИДТ Коши функциясының қосындысы түрінде ізделінеді. Ізделінді функцияның туындыларының шектерін гипержазықтық маңайында табу туралы лемма келтірілген. Шекаралық шарттар мен түйіндесу шарттарын пайдалана отырып, интеграл астындағы туындының реті интегралдан тыс туындының ретінен жоғары болатын интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін (ИДТЖ) аламыз. ИДТЖ характеристикалық бөлігі жалпыланған функциялар класында Фурье-Лаплас интегралдық түрлендірулер әдісі арқылы шешілген. Жалпыланған шешімнің классикалық шешімге көшуінің алгебралық шарты табылған. Көпөлшемді ПИДТ үшін шеттік есептің берілген функциялар кеңістіктік айнымалылар бойынша екінші ретті туындыларға ие болғанда және шешімділік шарты орындалғанда шешімділігі туралы теорема алынған.

**ДОЛГОВРЕМЕННЫЕ ТРЕНДЫ В ВАРИАЦИЯХ  
ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЗЕМНЫХ СУТОК И ЧАСТОТЫ  
ВОЗНИКНОВЕНИЯ НА ПЛАНЕТЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ**Г.Я. ХАЧИКЯН<sup>1</sup>, Д. КАЙРАТКЫЗЫ, А.Б. АНДРЕЕВ<sup>2</sup><sup>1,2</sup>ДТОО Институт ионосферы050020, Алматы, ул. Шевченко, 15, e-mail: <sup>1</sup>galina.khachikyan@gmail.com

Аннотация: Систематизированы современные знания об изменении угловой скорости вращения Земли и ее вкладе в вариацию энергии вращения Земли. Показано, что в результате прибавления величины угловой скорости и момента инерции, энергия вращения планеты возрастает и увеличивается ее сжатие, что может привести к усилению сейсмической активности. Проанализированы экспериментальные данные о вариациях продолжительности земных суток и частоты возникновения на планете землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$  за период 43 года (1973-2015 г.г.). Выделены долговременные тренды в вариациях этих параметров, которые показали, что в целом угловая скорость вращения Земли возросла с 1973 г. до 2015 г. и сейсмическая активность планеты также возросла, что находится в соответствии с теоретическими предсказаниями.

Ключевые слова: Угловая скорость вращения Земли, глобальная сейсмическая активность.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

В течение последних 50 лет активно обсуждается вопрос о возможном влиянии вариаций солнечной активности на сейсмическую активность Земли ([1]–[6] и ссылки внутри). Наличие такой связи демонстрирует, например, Рис. 1 из работы [6]: долговременные тренды в среднегодовом числе солнечных пятен и годовом количестве происходящих на планете землетрясений с магнитудой  $M \geq 4.5$  находятся в противофазе. Среднегодовое число солнечных пятен уменьшалось от 1973 к 2011 г., а количество землетрясений увеличивалось.

В работе [7] показано, что Земля и без землетрясений вращается неравномерно. Со второй половины XIX в. по настоящее время наблюдаются

Keywords: *Angular speed of rotation of the Earth, global seismic activity.*

2010 Mathematics Subject Classification: 86-05.

© Г.Я. Хачикян, Д. Кайраткызы, А.Б. Андреев, 2016.

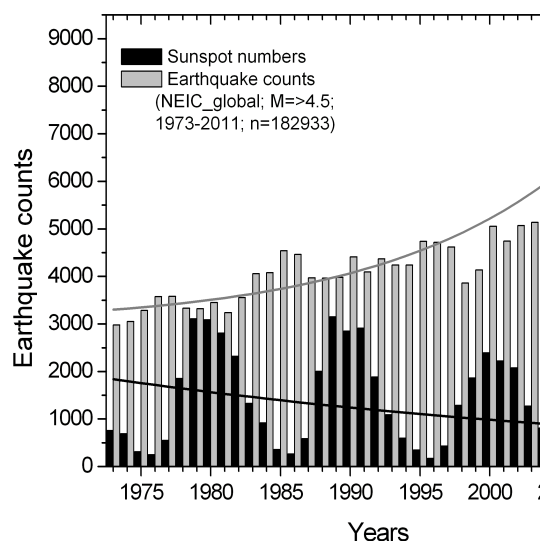


Рисунок 1 – Среднегодовые числа солнечных пятен за 1973-2011 г.г. (черные колонки) и годовое число землетрясений с  $M \geq 4.5$  (серые колонки), черные и серые кривые – долговременные экспоненциальные тренды [6]

значительные нерегулярные флуктуации угловой скорости вращения с характерными временами порядка 60-70 лет. Быстрее всего Земля вращалась в 1870 г., когда длительность суток была на 0.003 с короче эталонных 86400 секунд, а медленнее всего – в 1903 г. (земные сутки были длиннее эталонных на 0.004 с). С 1903 по 1934 г.г. происходило ускорение вращения Земли, с конца 30-х годов до 1972 г. наблюдалось замедление, а с 1973 г. по настоящее время Земля ускоряет свое вращение.

Лунно-солнечные приливы деформируют Землю. Приливные деформации Земли оказывают заметное влияние на скорость суточного вращения Земли. Напомним, что из-за суточного вращения Земля имеет форму эллипсоида вращения со сжатием  $1/298$ . Приливообразующая сила растягивает Землю вдоль прямой, соединяющей ее центр с центром возмущающего тела – Луны или Солнца. При этом величина сжатия Земли увеличи-



вается, когда ось растяжения совпадает с плоскостью экватора, и уменьшается, когда ось растяжения отклоняется к тропикам. Момент инерции сжатой Земли больше, чем недеформированной шарообразной планеты. А поскольку момент импульса Земли должен оставаться постоянным, то скорость вращения сжатой Земли меньше, чем недеформированной. Ввиду того, что склонения Луны и Солнца, а также расстояния от Земли до Луны и Солнца постоянно меняются, лунно-солнечная приливообразующая сила колеблется во времени. Соответствующим образом меняется сжатие Земли, что в конечном итоге и вызывает приливные колебания скорости вращения Земли.

Теория приливных колебаний скорости вращения Земли основана на теории лунно-солнечного приливого потенциала. В настоящее время для вычисления приливных колебаний скорости вращения Земли в службах времени используются 62 гармоники зонального прилива с периодами от 5 сут до 18.6 года [1], [2]. Наиболее значительными из них являются колебания с полумесячным, месячным и полугодовым периодами (рисунок). Скорость вращения Земли характеризуется относительной величиной

$$\nu \equiv \frac{\partial\omega}{\Omega} = \frac{\omega - \Omega}{\Omega} \approx \frac{L - T}{T} = \frac{\partial L}{T}, \quad (1)$$

где  $L$  – длительность земных суток;  $T$  – длительность стандартных (атомных) суток, которая равна 86400 с;  $\omega = 2\pi/L$  и  $\Omega = 2\pi/86400$  рад/с – угловые скорости, соответствующие земным и стандартным суткам [1], [2]. Поскольку величина  $\omega$  изменяется только в восьмом-девятом знаке, то значения  $\nu$  имеют порядок  $10^{-8} - 10^{-9}$ . На Рис. 2а представлены ежедневные числа продолжительности земных суток (Length Of Day) с 1973 по 2015 г.г., а на Рис. 2б приведены среднесуточные значения угловой скорости Земли за тот же период времени.

## 2. ДАННЫЕ

Для исследования использованы данные о продолжительности земных суток (Length Of Day) с 1973 по 2015 г.г., измеренные Международной службой вращения Земли <http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts>. На Рис. 3а представлены отклонения длительности земных суток от эталонного значения, равного 86400 сек., а на Рис. 3б приведена ошибка измерений.

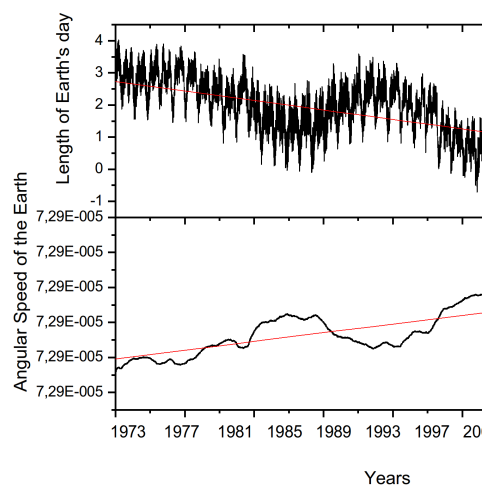


Рисунок 2 – Вариации среднесуточных значений  
угловой скорости Земли в 1973–2015 г.г.

Видно, что ошибка в измерениях существенно уменьшилась в 80-ые годы 20 века после введения в работу GPS-технологии.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На Рис. 4а представлены ежедневные числа солнечных пятен за 1973-2015 г.г., доступные на сайте <http://www.sidc.be/silso/datafiles>, а на Рис. 4б приведены ежедневные значения отклонения продолжительности земных суток за тот же период времени. Жирные черные линии демонстрируют долговременные линейные тренды в исходных данных. Видно, что долговременные тренды для анализируемых данных находятся в фазе. Число солнечных пятен в среднем уменьшалось от 1973 г. к 2015 г. и также уменьшалась длительность земных суток, то есть увеличивалась угловая скорость вращения Земли.

Как сказано, например, в [11], на скорость суточного вращения Земли оказывают заметное влияние лунно-солнечные приливы. Из-за суточного вращения Земля имеет форму эллипсоида вращения со сжатием  $1/298$ .

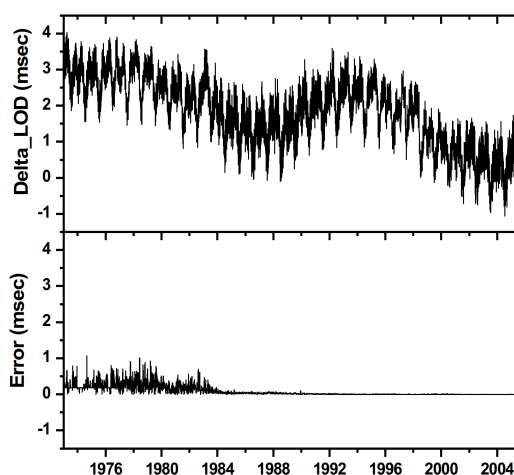


Рисунок 3 – Вариации отклонения продолжительности земных суток от эталонного значения 86400 сек. за период с 1973 по 2015 г.

Приливообразующая сила растягивает Землю вдоль прямой, соединяющей ее центр с центром возмущающего тела, при этом ее сжатие увеличивается, когда ось растяжения совпадает с плоскостью экватора, и уменьшается, когда ось растяжения отклоняется к тропикам. Момент инерции сжатой Земли больше, чем недеформированной, а поскольку момент импульса Земли (т.е. произведение ее момента инерции на угловую скорость) должен оставаться постоянным, то угловая скорость вращения сжатой Земли меньше, чем недеформированной. С учетом изложенного можно заключить, что на временном интервале 1973-2015 г.г., когда в среднем происходило увеличение угловой скорости вращения Земли (уменьшение продолжительности земных суток, Рис. 3), деформация планеты уменьшалась: ее форма стремилась к более шарообразной.

На Рис. 5 показан амплитудный спектр вариаций длительности земных суток, вычисленный как Фурье преобразование корреляционной функции. Годичные и месячные вариации, естественно, видны и на графике корреляционной функции, но информация о фазах этих колебаний при ее вы-

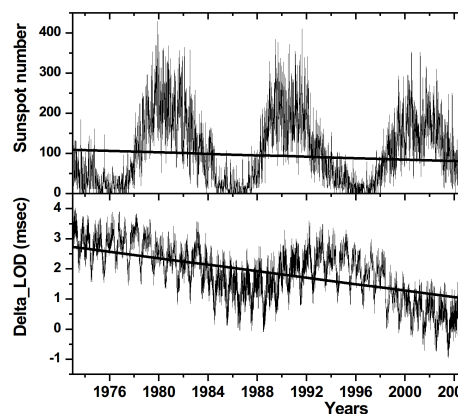


Рисунок 4 – Вариации среднесуточных значений числа солнечных пятен (а) и продолжительности земных суток (б) в 1973-2015 г.г.

числении исчезает. В расчетном спектре присутствуют небольшие отрицательные значения только в низкочастотной области допустимых ошибок. В спектре проявились узкие линии годовых (365,3 суток) и полугодовых (182,5 суток) колебаний, а также очень узкая линия на частоте  $83.30 \pm 0.07$  год<sup>-1</sup>, которая в точности соответствует периоду аномалистического месяца Луны  $T_a = 27.55$  сут. Не так отчетливо совпала линия, отвечающая периоду повторения лунных затмений. Этот период в 18 с небольшим лет, носящий название сарос, известен с глубокой древности. Его спектральная линия, впрочем, лишь наполовину превосходит область ошибок, расширяющуюся в сторону низких частот.

Как сказано в [11], колебания продолжительности земных суток (угловой скорости вращения) с полугодовым и годовым периодами обусловлены солнечными приливами из-за вариаций склонения и геоцентрического расстояния Солнца. За счет лунных приливов продолжительность земных суток (угловая скорость вращения) изменяется внутри сидерического месяца (27,3 суток). В течение этого периода времени Луна перемещается из своего крайнего положения в Северном полушарии, когда её положительное склонение максимально, к минимальному отрицательному склонению

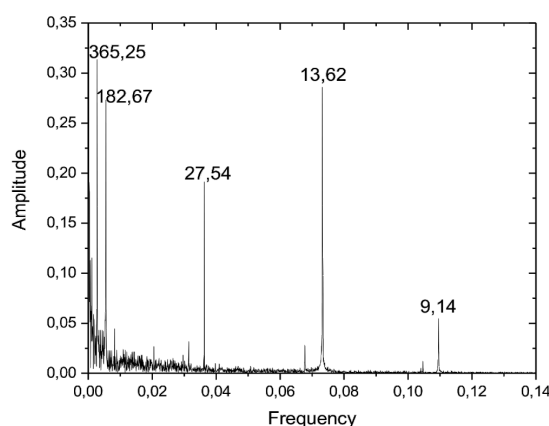


Рисунок 5 – Амплитудный спектр продолжительности земных суток по данным 1973-2015 г.г.

в Южном полушарии и затем снова возвращается в Северное полушарие к максимальному склонению. При этом скорость вращения Земли испытывает два полумесячных колебания с максимумами при максимальном удалении Луны от экватора Земли как в Северное, так и в Южное полушарие, и минимумами при пересечении Луной экватора.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для временного отрезка продолжительностью 42 года (1973-2014 г.г.) проанализированы вариации солнечной активности, продолжительности земных суток и глобальной сейсмической активности Земли и выделены их долговременные тренды. Показано, что долговременному повышению глобальной сейсмической активности Земли с 1973 до 2014 г.г. сопутствовали долговременное понижение уровня солнечной активности, долговременное увеличение угловой скорости вращения Земли (уменьшение продолжительности земных суток и, следовательно, долговременное уменьшение деформации планеты.) Методом спектрального анализа выделены приливные гармоники в вариациях продолжительности земных суток: годовая (365.3), полугодовая (182.5), 27-дневная (27.5), 13-дневная (13.6) и

9-дневная (9.1). Изучение долговременных вариаций амплитуд выделенных гармоник будет предметом наших дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Simpson J.F. Solar activity as a triggering mechanism for earthquakes // Earth Planet. Sci. Lett. – 1967. – No 3. – P. 417-425.
- 2 Сытинский А.Д. О влиянии солнечной активности на сейсмичность Земли // ДАН СССР. – 1973. – Т. 208, № 5. – С. 1078-1081.
- 3 Zhang Gui-Qing. Relationship between global seismicity and solar activities // Acta Seismologica Sinica. – 1998. – V. 11, issue 4. – P. 495-500.
- 4 Shestopalov I.P., Kharin E.P. Secular variations of solar activity and seismicity of the earth // Geophysical Journal. – 2006. – V. 28. – No 4. – P. 59-70.
- 5 Сычева Н.А., Богомолов Л.М., Сычев В.Н. Солнечные вспышки, вариации уровня сейсмического шума и сейсмический режим Северного Тянь-Шаня // Сб. Триггерные эффекты в геосистемах. Ред. В.В. Адушкина и Г.Г. Кочаряна. – М., 2010. – С. 326-334.
- 6 Хачикян Г.Я., Садыкова А.Б., Джанабилова С. Связь частоты повторяемости землетрясений и сейсмической энергии Земли с вариациями солнечной активности // Научный журнал-приложение международного журнала "Высшая школа Казахстана". Поиск-Izdenis. – 2014. – № 2. – С. 55-61.
- 7 Tsarev and Chechin The first results of observations of acoustic signals generated by cosmic ray muons in a seismically stressed medium. – 1988. – № 179.
- 8 Соболев Г.А., Закржевская Н.А., Харин Е.П. О связи сейсмичности с магнитными бурями // Физика Земли. – 2001. – № 11. – С. 62-72.
- 9 Соболев Г.А., Демин В.М. Механоэлектрические явления в Земле. – М.: Наука, 1980. – 215 с.
- 10 Горькавый Н.Н., Трапезников Ю.А., Фридман А.М. О глобальной составляющей сейсмического процесса и ее связи с наблюдаемыми особенностями вращения Земли // ДАН. – 1994. – Т. 338, № 4. – С. 525-527.
- 11 Сидоренков Н.С. Атмосферные процессы и вращение Земли. – С. Петербург: Гидрометеоздат, 2002. – 366 с.

*Статья поступила в редакцию 05.12.2016*

Хачикян Г.Я., Кайраткызы Д., Андреев А.Б. ЖЕР ТӘУЛІКТЕРІНІҢ ҰЗАҚТЫҒЫ МЕН ПЛАНЕТАДАҒЫ ЖЕРСІЛКІНІСТЕРІНІҢ ПАЙДА БОЛУ ЖИІЛІГІНІҢ ВАРИАЦИЯЛАРЫНЫҢ ҰЗАҚ МЕРЗІМДІ ҮРДІСТЕРІ

Жер айналысының бұрыштық жылдамдығының өзгерісі мен оның айналу энергиясының вариациясына қосатын үлесі туралы қазіргі заманғы білімдер жүйелендірілген. Бұрыштық жылдамдық пен инерция моментінің шамаларын қосу нәтижесінде планетаның айналу энергиясының өсетіні және оның сығылуы артатыны көрсетілген, бұл сейсмикалық белсенділіктің күшеюіне әкелуі мүмкін. Жер тәуліктерінің ұзақтығы мен планетадағы магнитудасы  $M \geq 4.5$  жерсілкіністерінің пайда болу жиілігінің 43 жыл (1973-2015жж) аралығындағы вариациялары туралы эксперименталдық мәліметтер талданған. Осы параметрлердің вариацияларындағы ұзақ мерзімді үрдістері айқындалған, олар тұтастай алғанда Жер айналысының бұрыштық жылдамдығы 1973 жылдан 2015 жылға дейін біртіндеп өскендігін және планетаның сейсмикалық белсенділігі де артқандығын көрсетіп отыр, бұл теориялық болжамдармен сәйкестікті дәлелдейді.

Khachikyan G.Ya., Kairatkyzy D., Andreyev A. LONG-TERM TRENDS IN VARIATIONS OF THE DAY LENGTH AND FREQUENCY OF EARTHQUAKE OCCURRENCE AT THE GLOBE

Modern knowledge on the change of Earth's angular velocity and its contribution to the variation of the energy of the Earth's rotation are analyzed. It is shown that increasing angular velocity leads to increasing energy of Earth's rotation and its compression, that can lead to increasing global seismic activity. The experimental data on variations in 1973-2014 years the length of day (LOD), and the frequency of occurrence at the globe the earthquakes with magnitude 4.5 and more are investigated. It is found that in total, the both the angular speed of rotation of the Earth and the frequency of earthquake occurrence at the globe increased that is in agreement with the theoretical predictions.

**МОНИТОРИНГ ПРИРОДНЫХ БИООПАСНОСТЕЙ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

Н.Ю. Цычуева<sup>1</sup>, Р.Б. Акназарова<sup>2</sup>, Д.В. Малахов<sup>3</sup>, И.С. Витковская<sup>4</sup>  
<sup>1,2,3,4</sup>АО "Национальный центр космических исследований и технологий"  
050010, Алматы, ул. Шевченко, 15, e-mail: raushaknazar55@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается задача создания научно-методических основ космического мониторинга биопасностей, разработки технологий геопространственной оценки вспышки численности биопасностей с помощью данных космической съемки и наземного мониторинга. В работе изучается влияние одного из наиболее опасных для сельского хозяйства Казахстана видов биопасностей – саранчовых. Описана методика проведения подспутниковых наблюдений за численностью саранчовых. Особое внимание уделено разработке базы спутниковых и статистических данных, данных наземных измерений и полевых исследований. На основе анализа полученных данных проведено моделирование благоприятных условий возникновения и распространения саранчовых.

Ключевые слова: Дистанционное зондирование, космический мониторинг, биопасности, саранчовые, модель экологической ниши.

В связи с глобальными изменениями климата и необходимостью своевременного прогнозирования, обнаружения и эффективного мониторинга возрастающей трансграничной угрозы со стороны природных биопасностей для защиты здоровья населения, снижения потерь урожая сельскохозяйственных культур и поражения лесов насекомыми-вредителями задача создания научно-методических основ космического мониторинга биопасностей, разработки технологий геопространственной оценки вспышки

---

Keywords: *Remote sensing, space monitoring, biological hazard, locust, ecological niche's model.*

2010 Mathematics Subject Classification: 94A20.

Funding: Работа выполнена в рамках проекта "Создание научно-методических основ мониторинга биопасностей на базе спутниковых данных дистанционного зондирования Земли" Республиканской бюджетной программы 076 "Прикладные научные исследования в области космической деятельности".

© Н.Ю. Цычуева, Р.Б. Акназарова, Д.В. Малахов, И.С. Витковская 2016.



численности биоопасностей с помощью данных космической съемки и наземного мониторинга является особенно актуальной для Республики Казахстан [1]–[3].

Выбор направления данных исследований также определен Межгосударственным соглашением по формированию Объединенной информационной системы государств-участников СНГ по защите от биоопасностей (ОИС "Биоопасность") [4], разработанной Постоянной комиссией Межпарламентской Ассамблеи государств-участников СНГ по аграрной политике, природным ресурсам и экологии. Целью создания ОИС "Биоопасность" является парирование угрозы возрастания природных биоопасностей.

По оценкам экспертов в последние десятилетия на территории Казахстана наблюдается повсеместное повышение средней годовой и сезонной температур приземного воздуха, особенно в летние месяцы [5]. Кроме того, отмечаются тенденции к росту увлажнения северной части республики и осушению юга страны. Климатические изменения способствуют расширению зон распространения и увеличению частоты засух, что приводит к изменениям традиционных сроков и условий потенциальных вспышек биоопасностей различной природы.

Использование спутниковой информации и методов космического мониторинга при дистанционной оценке биоопасностей является относительно новым направлением, разрабатываемым в последнее десятилетие. Это стало возможным в результате бурного развития методов тематического дешифрирования, расширения круга прикладных задач, решаемых на основе данных дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ).

В работе изучается влияние одного из наиболее опасных для сельского хозяйства Казахстана видов биоопасностей – саранчовых, в частности, азиатской саранчи и итальянского пруса.

В качестве тестового участка для подспутниковых наблюдений за азиатской саранчой выбран Нижнеилийский очаг Балхаш-Алакольского гнездилища на территории Алматинской области, примыкающей к южной границе озера Балхаш ( $74^{\circ}E$ ,  $45^{\circ}N$ ) и ограниченной Балхашским административным районом (Рис. 1). Методика проведения подспутниковых наблюдений за численностью саранчовых включает в себя два основных вида работ: наземные обследования и камеральная обработка спутниковых и наземных синхронных данных.

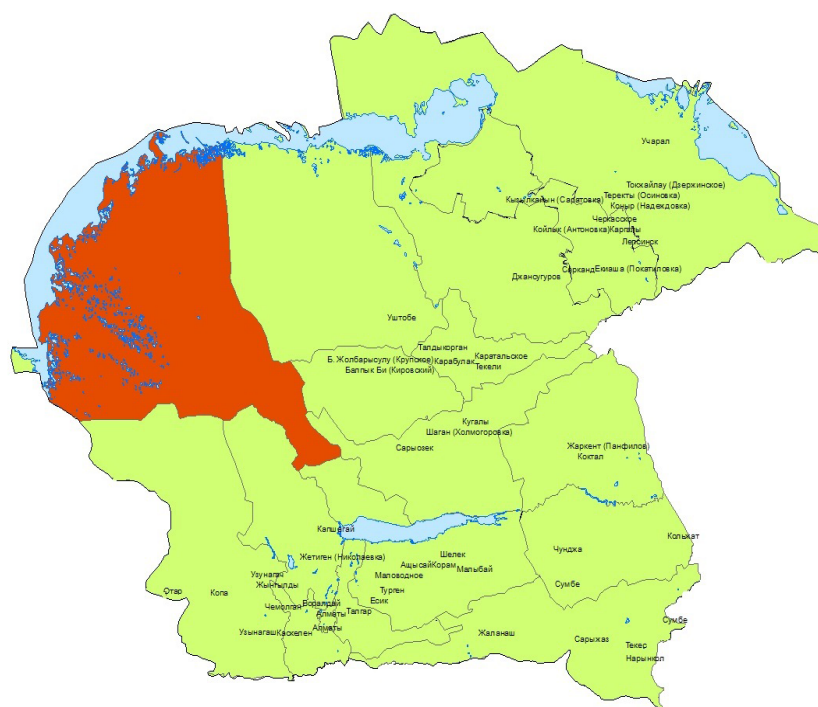


Рисунок 1 – Расположение тестового района для наблюдений за азиатской саранчой – Балхашский район Алматинской области

Определение мест обитания саранчовых по космоснимкам возможно лишь по косвенным признакам, позволяющим оценить условия отрождения и питания саранчи таких, как определение свободной от воды территории, наличие кормовой базы (ранневесенняя и тростниковая растительность), сочетание определенных метеопараметров, предшествующие засушливые годы.

Разработана база спутниковых и статистических данных, а также данных наземных измерений и полевых исследований с целью хранения и обработки информации. Сформирован архив данных дистанционного зондирования на территорию Казахстана, включающий снимки низкого и среднего пространственного разрешения со спутников Terra/MODIS (250 м разрешение), Landsat-7 (30 м разрешение), Landsat-8 (30 м и 15 м раз-

решение) с различной периодичностью съемки.

Метод дистанционной оценки территории по условиям обитания и размножения азиатской саранчи включает в себя несколько этапов. На первом этапе проводится анализ многолетних данных метеопараметров, либо значений рассчитанного вегетационного индекса  $IVI$  в границах исследуемой территории на предмет определения лет с наилучшими и наихудшими условиями вегетации. Затем на основе рассчитанных спектральных индексов  $NDWI$ ,  $NDVI$ ,  $SAVI$  проводится тематическое дешифрирование данных среднего пространственного разрешения. Формируются карты почвенно-растительного покрова  $LandCover/LandUse$  на ключевые годы. Расчет индексов проводится по следующим формулам:

$$NDWI \text{ (water index)} = (b4 - b7)/(b4 + b7), \quad (1)$$

где  $b4$  – NIR,  $b7$  – TIR;

$$NDVI \text{ (normalized veg.in.)} = (b4 - b3)/(b4 + b3), \quad (2)$$

где  $b3$  – Red,  $b4$  – NIR;

$$SAVI \text{ (soil adjusted veg.in.)} = ((b4 - b3)/(b4 + b3) - 0.5) * 1.5, \quad (3)$$

где  $b3$  – Red;  $b4$  – NIR.

На основе данных индексов выделяются водные объекты, песчаные поверхности, территории, покрытые тугайными лесами и различными растительными сообществами. Для выделения территорий с ранневесенней растительностью вычитаются значения индекса  $SAVI$ , рассчитанного по июльскому и майскому снимкам. Территории с отрицательными значениями представляют собой участки, покрытые растительностью весной, и песчаные поверхности – в летний период. В итоге получена карта почвенно-растительного покрова со следующими классами в легенде: водные объекты, песчаные поверхности (барханы), такыры и солончаки, травянистые тугаи (тростники, луга, кустарники), древесно-кустарниковые тугайные леса, ранневесенняя растительность на барханах, пустынная разреженная растительность, саксаульники, сельскохозяйственные поля. Подобные карты строятся на все исследуемые годы и подвергаются сравнению методом  $Change\ Detection$ , в ходе которого определяются изменения границ территорий с пригодными для питания и яйцекладки саранчи условиями.

Проведены полевые обследования мест отрождения саранчовых в Балхашском гнездилище: 3-13 июня 2015 года обнаружены 4 кулиги азиатской саранчи 3-5 возрастов, подтверждено ее раннее отрождение в этом году; 17-27 августа 2015 года выявлены периоды спаривания, начала яйцекладки, определены площади откладки кубышек.

По результатам тематического дешифрирования спутниковых данных на территорию южного Прибалхашья построены карты LandCover/LandUse по космоснимкам Landsat-5TM и Landsat-8OLI на ключевые годы. Ключевыми выбраны: 2008, 2011 и 2015 годы, как годы с максимальным (2011 год) и минимальным (2008 год) значениями зеленой биомассы в границах Балхашского района (по данным рассчитанного индекса IVI) и год, для которого проведены полевые обследования (2015 год). На Рис. 2 представлен график значений индекса IVI, рассчитанного по снимкам MODIS (250 м разрешение) для исследуемой территории. Обработаны безоблачные сцены Landsat-8OLI (30 м

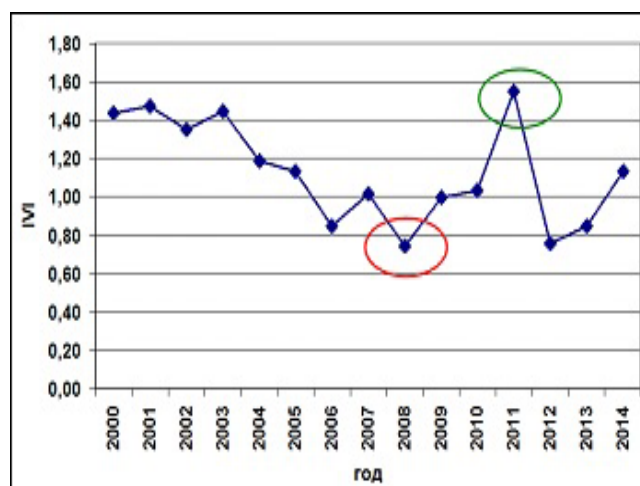


Рисунок 2 – Распределение значений индекса IVI в границах Балхашского района

разрешение) за май, июнь и август каждого ключевого года. Рассчитаны спектральные индексы: NDWI, NDVI, SAVI по формулам (1)-(3).

На основе индекса NDWI за май месяц выделены водные объекты. На

основе индекса SAVI за август месяц выделены территории с песчаными поверхностями и солонцы. По снимкам оцифрованы территории, относящиеся к сельскохозяйственным угодьям: сельскохозяйственные поля с орошением и богарным земледелием, а также бросовые поля. Вычитание значений индекса NDVI, рассчитанного по майскому снимку, из августовских значений позволило отделить территории с ранневесенней и тугайной растительностью. Построена карта подстилающей поверхности на 2015 год по данным ДЗЗ.

На основе построенных карт рассчитаны площади классов подстилающей поверхности на ключевые годы. На Рис. 3 представлены изменения рассчитанных классов подстилающей поверхности для определения разницы в границах классов, пригодных для питания саранчи: если разница в площадях незначительна, то можно использовать для модели любой год; если разница значительна, то за основу в модели будут взяты границы минимальных площадей. Как видно из Рис. 3, разница в площадях ключевых классов значительна. Предварительный анализ соотношения пло-

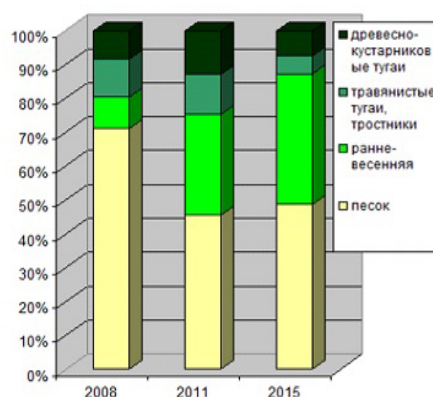


Рисунок 3 – Изменения площадей рассчитанных классов подстилающей поверхности

щадей классов подстилающей поверхности с количеством обнаруженных саранчовых представен на Рис. 4.

Анализ полученных данных лег в основу моделирования территорий, на которых можно ожидать увеличение численности азиатской саранчи в

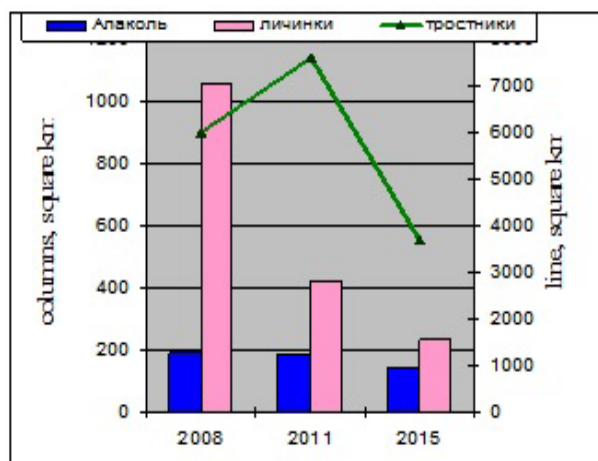


Рисунок 4 – График зависимости площадей, занимаемых тростниковой растительностью, заливом Алаколь (озера Балхаш) и количеством обнаруженных личинок саранчовых

определенные годы, а также моделирования экологической ниши саранчовых.

На основе данных многолетних полевых наблюдений по очагам гнездования построена пространственная модель экологических условий гнездования азиатской саранчи (*Locusta migratoria asiatica*). Следует отметить, что разработанные модели описывают именно оптимальные условия гнездования данного вида, а не его потенциальное распространение. Расселение саранчи зависит от многих факторов, среди которых наличие кормовой базы, погодные условия, направление преобладающих ветров и т.д. При этом расселение происходит стихийно, а выживает и дает потомство только та часть текущей генерации, которая оказалась в условиях, пригодных для размножения и, что немаловажно, для выживания кубышек до следующего вегетационного периода.

В качестве исходных данных использовались климатические (WorldClim, BioClim, Global-PET) и ландшафтные (цифровая модель рельефа с ее производными: аспект, экспозиция, вогнутость поверхности и т.п.) данные. На основании разработанной модели получен ряд карт,

описывающих оптимальные для гнездования саранчи условия и различающихся количеством включенных весомих признаков. Разработанная модель хорошо описывает известные очаги гнездования азиатской саранчи в Евразии и может служить основой для проведения детальных наблюдений на территориях, где сочетаются оптимальные факторы, представляющие потенциальные новые очаги развития вредителя.

Разработана базовая модель экологической ниши другого вида саранчовых – итальянского пруса (*Calliptamus italicus*). Основой модели послужили наборы климатических данных, включающие такие показатели, как среднемесячные температуры и осадки, среднемесячная эвапотранспирация, количество солнечной радиации, относительная влажность воздуха и ряд других (наборы климатических переменных BioClim, WorldClim, Global-PET, CCSM, CliMOND). Базовая модель строилась по данным наземных обследований, так называемый подход "presence-only". Наборы наземных точек регистрации проявления вида были разделены на две группы. Первая группа – 75 % всех точек – использовалась для определения оптимальных для вида диапазонов каждой климатической переменной. Вторая группа – 25 % общего количества точек – применялась для выделения значимых для вида климатических переменных. Моделирование проведено в среде ArcGIS 10.2, статистическая обработка данных – в программе StatSoft STATISTICA 10. На Рис. 5 представлен результат моделирования экологической ниши – карта благоприятных условий распространения итальянского пруса. Ранее построенная модель благоприятных условий распространения азиатской саранчи, основанная на климатических данных, была уточнена информацией о границах произрастания тростниковой растительности. Тростник выбран в связи с тем, что именно данный вид растительности является основой кормовой базы азиатской саранчи и имеет ключевое значение в определении мест ее обитания. В результате расчетов получена уточненная карта благоприятных условий распространения азиатской саранчи. На Рис. 6 приведена карта уточненной модели благоприятных условий распространения азиатской саранчи для территории Республики Казахстан, укрупненные вставки площадей Иле-Балхашского ареала.

Результаты уточненного моделирования показывают совпадение расположения территорий, выявленных в ходе данных исследований,

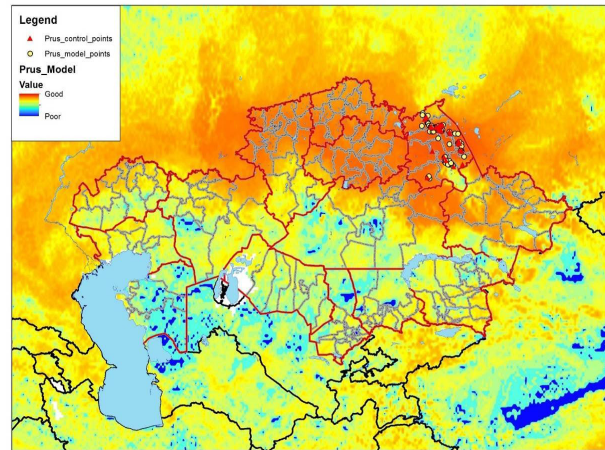


Рисунок 5 – Базовая модель экологической ниши итальянского пруса

с ареалами распространения азиатской саранчи, опубликованными в литературных источниках, но с более четкими границами и меньшими площадями. Это имеет логичное объяснение, связанное с уменьшением территорий, занятых тростниками за последние 50 лет. Также выявлен один очаг, на территории которого произрастает тростник и соблюдаются все климатические условия, необходимые для гнездования азиатской саранчи. В этой связи необходимы полевые обследования данного участка для подтверждения результатов. Результат данного исследования важен для обновления картографической информации и уточнения границ очагов гнездования.

Проведено тестовое моделирование возникновения благоприятных условий обитания и размножения азиатской саранчи по основным климатическим и ландшафтным параметрам для лет с различными погодными условиями. В результате моделирования получены границы территорий с благоприятными условиями для размножения и обитания азиатской саранчи на территории Балхашского района Алматинской области в годы с сухими (2008 г.) и влажными (2011 г.) погодными условиями. Для проведения дальнейшей верификации модели были рассчитаны и на текущий 2016 год.



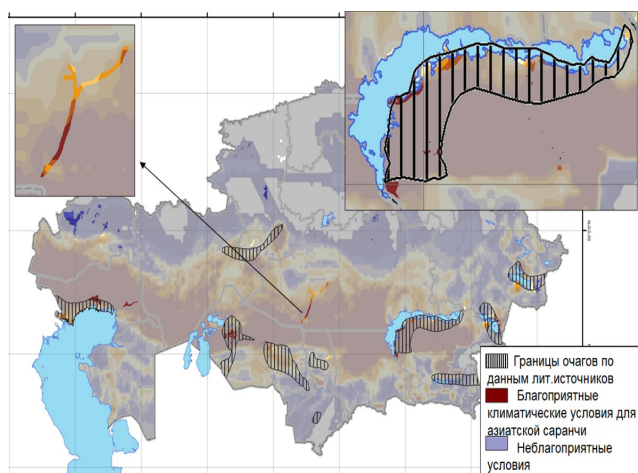


Рисунок 6 – Карта уточненной модели благоприятных условий распространения азиатской саранчи

Проведено тестовое моделирование возникновения благоприятных условий для обитания и размножения итальянского пруса по основным климатическим и ландшафтным параметрам для лет с различными погодными условиями. В результате моделирования получены границы территорий с благоприятными условиями для размножения и обитания итальянского пруса на территории Павлодарской области в годы с сухими (2010 г.) и влажными (2013 г.) погодными условиями. Как видно из Рис. 7, по условиям влажности и среднемесячных температур от года к году наблюдается смещение территории с благоприятными условиями на юг.

Результаты тестового моделирования обнаруживают высокую динамичность пространственного распределения погодных факторов, в результате которой оптимальные для развития той или иной биоопасности условия могут смещаться географически в широких пределах, что подразумевает значительную вариативность условий возникновения вспышек вредителей. Анализ тестовых моделей неплохо согласуется с реальной ситуацией, что хорошо видно на примере 2016 года. Так, ситуация с саранчовыми вредителями в текущем году не выходила за пределы нормального развития этих видов. Оптимальные для гнездова-

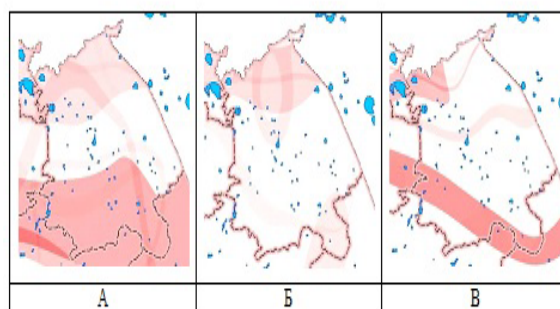


Рисунок 7 – Результат моделирования благоприятных условий обитания итальянского пруса в Павлодарской области (интенсивность красного - благоприятные условия):  
А – в 2010 году; Б – в 2013 году; В – в 2016 году

ния условия по набору параметров для тестового моделирования имеют очень ограниченное распространение на территориях Алматинской и Павлодарской областей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Камбулин В.Е., Ниязбеков Ж.Б., Муратова Н.Р., Цычуева Н.Ю. и др. Рекомендации по мониторингу саранчовых с использованием ГИС-технологий и дистанционного зондирования Земли. – Алматы: КазНИИЗКР, 2015. – 28 с.

2 Тронин А.А. Дистанционные методы при решении задач экологической безопасности // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 238-245.

3 McCulloch L., Hunter D.M. Identification and monitoring of Australian plague locust habitats from Landsat // Rem. Sens. Envir. – 1983. – V. 13. – P. 95-102.

4 [www.iki.rssi.ru/oct4/2011/ppt/s4/01gornyi.ppt](http://www.iki.rssi.ru/oct4/2011/ppt/s4/01gornyi.ppt) – описание инициативы Межпарламентской Ассамблеи СНГ по разработке проекта Межгосударственного соглашения по формированию "Объединенной информационной системы государств-участников СНГ по защите от биопасностей".

5 Изменение климата. Обобщающий доклад, 2007. Доклад Межправительственной группы экспертов по изменению климата. – 2007. – 104 с.

*Статья поступила в редакцию 26.12.2016*

Tsychuyeva N.Yu., Aknazarova R.B., Malahov D.V., Vitkovskaya I.S.  
NATURAL BIOLOGICAL HAZARD MONITORING USING EARTH'S  
REMOTE SENSING DATA

This article presents the object of creation of biological hazard remote setting methodological basis, the technology development of geospatial assessment of biological hazard outbreak number with the help of orbital survey and land monitoring. The article studies the impact of locusts, one of the most dangerous species of biological hazard for agriculture of Kazakhstan. The procedure of ground-truth observations for numbers of locusts is described herein. Particular attention is paid to the development of statistics and satellite databases, ground and field measurements data. The simulation of conducive environment for occurrence and spread of locusts was based on data analysis.

Цычуева Н.Ю., Акназарова Р.Б., Малахов Д.В., Витковская И.С. ТА-  
БИФИ БИОҚАУІПТІЛІКТЕРДІҢ ЖЕРДІ ҚАШЫҚТЫҚТАН БАРЛАУ  
ДЕРЕКТЕРІН ПАЙДАЛАНУ АРҚЫЛЫ МОНИТОРИНГІ

Мақалада ғарыштық түсірімдер және жерүсті мониторингі деректері көмегімен биоқауіптіліктердің ғарыштық мониторингінің ғылыми-әдістемелік негіздерін құру, биоқауіптіліктер санының ошақтарын геокеңістіктік бағалау технологияларын әзірлеу мәселесі қарастырылады. Жұмыста Қазақстанның ауыл шаруашылығы үшін барынша қатерлі биоқауіптіліктердің бірі – шегіртке тектестердің әсері зерттеледі. Шегіртке тектестердің санына ішкі жер серіктерінен бақылау жүргізу әдістемесі сипатталған. Жер серігі және статистикалық деректер қорын әзірлеуге, жерүсті өлшеулері мен далалық зерттеулер деректеріне ерекше көңіл бөлінген. Алынған деректерді талдау негізінде шегіртке тектестердің пайда болуы мен таралуының қолайлы жағдайларын моделдеу жүргізілген.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## КАЗБЕК ЕСЕНЖАНОВИЧ ДЖАУГАШТИН

(к 80-летию со дня рождения)



Эта статья посвящена юбилейной дате – 80-летию со дня рождения известного ученого-физика и механика, доктора технических наук, профессора Казбека Есенжановича Джаугаштина.

Работы Джаугаштина К.Е. являются классическими исследованиями, открытиями, стоящими у истоков больших современных научных направлений в области механики жидкости и газа.

В наших сердцах живет светлая память о нем не только как о большом ученом и заботливом наставнике, но и как о яркой личности с добрым сердцем и огромной любовью к людям, к жизни.

Джаугаштин Казбек Есенжанович родился 12 апреля 1936 года в поселке Денисовка Орджоникидзевского района Кустанайской области. В 1954 году, окончив среднюю школу в г. Актюбинск с золотой медалью, Казбек Джаугаштин поступает на математическое отделение физико-математического факультета Казахского государственного университета им. С.М. Кирова. Во время учебы Джаугаштин К.Е. знакомится с выдающимся физиком Львом Абрамовичем Вулисом, который предопределил дальнейшие научные интересы Казбека Есенжановича. Творческий дух лекций Льва Абрамовича, его высокая эрудиция и круг научных интересов настолько привлекли молодого К.Е. Джаугаштина, что он перевелся на физический факультет, который с отличием окончил в 1960 году. В эти годы зарож-

дается научный союз и большая человеческая дружба известного ученого Л.А. Вулиса и талантливой ученика К.Е. Джаугаштина.

После окончания аспирантуры в 1963 году он был приглашен на работу в лабораторию технической теплофизики Ленинградского Высшего военно-морского инженерного училища им. Ф.Э. Дзержинского. В 1964 г. К.Е. Джаугаштин защитил в Ленинградском государственном университете диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

В эти же годы К.Е. Джаугаштин знакомится с работами Н.И. Акатнова, связанными с задачами о плоской пристенной струе, и исследованиями Л.Д. Ландау задач о затопленной незакрученной струе. Его потрясает красота аналитических решений, полученных учеными. Вдохновленный интересными проблемами и их стройным решением, молодой ученый Казбек Джаугаштин решает три принципиально важные задачи в области струй: находит точные решения задач распространения ламинарной закрученной струи проводящей жидкости вдоль поверхности конуса (1963), распространения плоской струи проводящей жидкости (1965) и полуограниченной струи проводящей жидкости (1965). В эти годы Казбека Есенжановича интересовало все, что было связано с новыми направлениями в гидродинамике. Оригинальные труднодоступные зарубежные статьи он переписывал в свой толстый журнал, который называл "навигационным". Увлеченный научными расчетами, молодой КЕД, как его называли коллеги и друзья, допоздна засиживался в лаборатории.

На рубеже 60-х и 70-х годов бурно развивается теория турбулентности. К.Е. Джаугаштин с присущими ему напористостью и энтузиазмом берется за решение проблем в этой области. Вскоре появляются работы, посвященные турбулентным течениям и балансу пульсационных энергий в свободных турбулентных струях жидкости (1970). В дальнейшем полуэмпирическая теория турбулентности становится основным научным интересом К.Е. Джаугаштина. Полученные результаты в этой области плавно переходят в законченный труд в виде докторской диссертации, которую он успешно защищает в 1973 году в Институте высоких энергий (г. Москва).

В 1974 году К.Е. Джаугаштин получает фундаментальный результат в теории однородной турбулентности: им была найдена спектральная функция изотропной турбулентности.

В 1980 г. профессор К.Е. Джаугаштин по приглашению Академии наук Казахской ССР переезжает из Ленинграда в г. Алматы, где под его руководством создается лаборатория прикладной гидродинамики в Институте математики и механики Казахской Академии наук. Здесь К.Е. Джаугаштин проработал до конца своих дней...

Диапазон научных интересов К.Е. Джаугаштина был очень широк. Казбек Есенжанович является одним из основоположников локально-равновесной турбулентности. Им предложена полуэмпирическая теория турбулентности, основанная на уравнениях моментов второго порядка, которая позволяет рассчитывать турбулентные характеристики течений в различных средах. На основе данного подхода исследованы критические режимы течения МГД-струи, выявлены и описаны критические режимы магнитных полей, порождающих гидродинамическую неустойчивость потока.

Значительны его заслуги в создании и развитии теории струй вязкой жидкости, разработке математических моделей и методов исследования турбулентных струйных течений, течений в магнитном поле, в статифицированных средах. Профессор К.Е. Джаугаштин – автор более 100 научных работ, опубликованных в центральных изданиях бывшего СССР и зарубежных изданиях. Его труды вызывали огромный интерес научной общественности. Он неоднократно приглашался и выступал на международных форумах и конференциях.

К.Е. Джаугаштин принимал активное участие в подготовке аттестации научных кадров, под его руководством защищены 12 кандидатских и 2 докторских диссертации.

Одновременно с научной работой К.Е. Джаугаштин отдавал много сил и энергии научно-организационной работе, являясь членом Государственного аттестационного комитета Республики Казахстан, специализированного совета по защите диссертаций в КазГУ им. аль-Фараби, Ученого совета Института, и до последних своих дней оставался референтом журнала "Механика" Российской Академии наук.

Вся научно-творческая жизнь К.Е. Джаугаштина является ярким примером беспрецедентного служения человека науке, которая дарила ему яркие минуты озарения и радость творческого вдохновения.

Казбек Есенжанович был демократичен и прост в общении с людьми,

интеллигент в самом высоком значении этого слова. Полнейшее отсутствие прагматизма в делах карьеры, щедрость души и искренность в отношениях с коллегами снискали ему с их стороны большую любовь и уважение. Меньше всего в жизни Казбека Есенжановича интересовали высокие титулы, звания; ему чужда была манера поведения, соответствующая последним. Казбек Есенжанович был скромным и непретенциозным в достижении личных удобств, но, вместе с тем, не считал зазорным незамедлительно выполнить ту или иную просьбу студента или аспиранта, проявлял огромную заботу о своих сотрудниках. Казбек Есенжанович был добрым супругом и нежным отцом двух дочерей.

Память о Казбеке Есенжановиче навсегда останется в сердцах тех, кто его знал. Среди них его ученики, продолжающие его дело.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

## Правила "Математического журнала" для авторов статей

### *Общие положения*

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование.

Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте [www.math.kz](http://www.math.kz) Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), *Zentralblatt Math* (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

### *Требования к оформлению статей*

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе  $\LaTeX$ -2 $\epsilon$  и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru). Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК. На следующих



строках по центру: название статьи; инициалы и фамилии авторов; место работы; почтовые адреса организации и также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи.

Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, №4 (62), 2016

Собственник "Математического журнала":  
Институт математики и математического моделирования  
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать  
и выставлен на сайте <http://www.math.kz>  
Института математики и математического моделирования МОН РК  
29.12.2016 г.

Тираж 300 экз. Объем 297 стр.  
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:  
Институт математики и математического моделирования МОН РК  
г. Алматы, ул. Пушкина, 125  
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32  
e-mail: [zhurnal@math.kz](mailto:zhurnal@math.kz), [mat-zhurnal@mail.ru](mailto:mat-zhurnal@mail.ru)  
web-site: <http://www.math.kz>