

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

MATHEMATICAL JOURNAL

Том 13 № 1 (47) 2013

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, № 1 (47), 2013

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Главный редактор:

Н.К.Блиев

Заместители главного редактора:

А.Т.Асанова, Г.И.Бижанова

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Д.Б.Базарханов, Б.С.Байжанов, Р.Г.Бияшев, В.Г.Воинов,

Н.С.Даирбеков, Н.Т.Данаев, М.Т.Дженалиев, Д.С.Джумабаев,

А.С.Джумадильдаев, Т.Ш.Кальменов, А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев,

И.Т.Пак, М.Г.Перетягькин, М.А.Садыбеков, И.А.Тайманов (Россия),

М.И.Тлеубергенов, С.Н.Харин,

Г.К.Василина, Ж.К.Джобулаева, И.Н.Панкратова

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2013г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13

№ 1 (47)

2013

| | |
|---|-----|
| <i>Акишев Г.</i> Ортоподобная система и неравенство разных метрик в пространстве Лоренца–Зигмунда | 5 |
| <i>Алексеева Л.А.</i> Дифференциальная алгебра бикватернионов. 4. Твисторы и твисторные поля | 17 |
| <i>Бапаев К.Б.</i> Об одной теореме условной устойчивости разностно-динамических систем | 36 |
| <i>Беляев Е.К., Калтаев А., Найманова А.Ж.</i> Моделирование сверхзвуковых течений в интервале температур $T < 300$ К | 44 |
| <i>Есиркегенов Н.А., Садыбеков М.А.</i> Критерий сильной разрешимости в L_2 задачи Неймана–Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе | 63 |
| <i>Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д.</i> О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца | 73 |
| <i>Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И.</i> Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся диффузией и с возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями | 89 |
| <i>Канымгазиева И.А.</i> Обобщенные решения уравнений Максвелла при произвольных стационарных токах в одноосных кристаллах | 100 |
| <i>Маемерова Г.М., Минглибаев М.Дж.</i> О нарушении ориентации плоскости Лапласа в задаче трех тел с изменяющимися массами | 116 |

CONTENTS

Volume 13

No. 1 (47)

2013

| | |
|--|-----|
| <i>Akishev G.</i> Similar to orthogonal system and an inequality of different metrics in Lorentz–Zygmund space | 5 |
| <i>Alexeyeva L.A.</i> Differential algebra of biquaternions. 4. Twistors and twistor fields | 17 |
| <i>Bapaev K.B.</i> On one theorem of conditional stability of difference-dynamical systems | 36 |
| <i>Belyayev Ye., Kaltayev A., Naimanova A.</i> Modelling of supersonic flows in the temperature range $T < 300$ K | 44 |
| <i>Esirkegenov N.A., Sadybekov M.A.</i> Strong solvability criterion of Neumann-Tricomi problem in L_2 for Lavrent'ev-Bitsadze equation | 63 |
| <i>Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D.</i> On summability of Fourier coefficients of functions from Lorentz space | 73 |
| <i>Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I.</i> On the basic inverse problem for differential systems with degenerating diffusion and perturbations from a class of processes with independent increments | 89 |
| <i>Kanymgazieva I.A.</i> Generalized solutions of Maxwell equations for arbitrary stationary currents in uniaxial crystals | 100 |
| <i>Mayemerova G.M., Minglibayev M.Zh.</i> On disorientation of Laplace plane in three-body problem with varying masses | 116 |

УДК 517.51

Г. АКИШЕВ

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,
100028, Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

ОРТОПОДОБНАЯ СИСТЕМА И НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА–ЗИГМУНДА

В данной статье рассматриваются пространство Лоренца-Зигмунда, счетная ортоподобная система. Доказаны оценка коэффициентов Фурье по счетной ортоподобной системе элементов пространства Лоренца-Зигмунда и неравенство разных метрик для полиномов по этой системе.

Ключевые слова: *ортоподобная система, пространство Лоренца-Зигмунда, полином.*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X – σ -конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой ν . Будем считать $\nu(X) = 1$.

Пусть $q, \theta \in (1, +\infty), \alpha \in R = (-\infty, +\infty)$. Пространством Лоренца-Зигмунда $L_{q,\theta}(\log L)^\alpha$ называется множество всех ν -измеримых на X функций f , для которых

$$\|f\|_{q,\theta,\alpha} = \left\{ \int_0^1 (f^*(t))^\theta (1 + |\ln t|)^{\alpha\theta} \cdot t^{\frac{\theta}{q}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где f^* – невозрастающая перестановка функции $|f|$ [1].

© Г. Акишев, 2013.

Keywords: *similar to orthogonal system, Lorentz-Zygmund space, polynomial*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\alpha = 0$, то пространство Лоренца-Зигмунда совпадает с пространством Лоренца: $L_{q,\theta}(\log L)^\alpha = L_{q,\theta}$ (см. [2], гл. 1, п. 1.3), кроме того, если $q = \theta$, то $L_{q,\theta}(\log L)^\alpha = L_q$ – пространство Лебега с нормой (см. [3], гл. 1, п. 1.1)

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

В дальнейшем $C(q, r, p)$ означает положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Т.П. Лукашенко [4, 5] ввел определение системы разложения, подобной ортогональной, с неотрицательной мерой и исследовал свойства этого разложения. Будем рассматривать счетную ортоподобную систему $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_2(X)$ ([5], стр. 58), удовлетворяющую условию

$$\|\varphi_n\|_r \equiv \left(\int_X |\varphi_n(x)|^r d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq M_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

при некотором $r \in (2, +\infty]$. Здесь $M_n \uparrow$, $\hat{f}(n)$ – коэффициенты разложения по ортоподобной системе функции f и \mathbb{N} – множество натуральных чисел.

Известно, что любая ортонормированная система является ортоподобной [4]. Ортонормированная система, удовлетворяющая условию (1), ранее рассмотрена в [6].

Для тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{ixk}$$

известно следующее неравенство Джексона-Никольского (см. [3], с. 133):

$$\|T_n\|_q \leq 3n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_n\|_p, \quad 1 \leq p < q \leq +\infty. \quad (2)$$

В настоящее время имеются многочисленные обобщения неравенства (2) (см. библиографию в [7-16]). В частности, неравенство (2) на пространстве Лоренца распространено Н.В. Швелидзе [8], Л.А. Шерстневой [9]. В [9] доказано неравенство

$$\|T_n\|_{p,\theta} \leq C(p, q, \theta) (\ln(1+n))^{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q}} \|T_n\|_{p,q}, \quad (3)$$

где $0 < \theta < q \leq +\infty$, $0 < p < +\infty$.

Это неравенство на многопараметрическое пространство Лоренца обобщено К.А. Бекмаганбетовым, Е.Д. Нурсултановым [11], на многомерное пространство Лоренца – в [12, 14, 15].

В этой статье докажем обобщение неравенства (3) для полиномов по ортоподобной системе $\{\varphi_n\}$ в пространстве Лоренца-Зигмунда. Доказательство основано на следующем утверждении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Пусть ортоподобная система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ при некотором $r \in (2, +\infty]$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой функции $f \in L_{2,q}(\log L)^\alpha$, $2 < q \leq \infty$, имеют место неравенства

1) если $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{2,q,\alpha} \left[\ln(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2) \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha},$$

2) если $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{2,q,\alpha},$$

3) если $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left[\ln(1 + \ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2)) \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{2,q,\alpha}$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство. Пусть $f \in L_{2,q}(\log L)^\alpha$. Эту функцию можно представить в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \\ 0, & \text{если } |f(x)| > f^*(\tau), \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x), \quad 0 < \tau < \nu(X) = 1.$$

Тогда, в силу неравенства Минковского имеем

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Докажем, что каждая из функций $f_i, i = 1, 2$, удовлетворяет неравенству

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_i(k)|^2 \right]^{1/2} \leq C(q, r) \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha} \|f\|_{2, q, \alpha}. \quad (5)$$

В силу равенства Парсеваля для ортоподобной системы (см. [4]) и неравенства Гельдера $\theta = \frac{q}{2} > 1$, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, для функции f_1 имеем

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2 \leq \|f_1\|_2^2 \leq \int_{\tau}^1 f^{*2}(t) dt \leq \|f\|_{2, q, \alpha}^2 \left[\int_{\tau}^1 (1 + |\ln t|)^{-2\alpha\theta'} t^{-1} dt \right]^{\frac{1}{\theta'}}. \quad (6)$$

Если $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^1 (1 + |\ln t|)^{-2\alpha\theta'} t^{-1} dt &= \frac{1}{1 - 2\alpha\theta'} [(1 + |\ln \tau|)^{1-2\alpha\theta'} - 1] \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - 2\alpha\theta'} (1 + |\ln \tau|)^{1-2\alpha\theta'}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^1 (1 + |\ln t|)^{-2\alpha\theta'} t^{-1} dt &= \frac{1}{1 - 2\alpha\theta'} [(1 + |\ln \tau|)^{1-2\alpha\theta'} - 1] = \\ &= \frac{1}{2\alpha\theta' - 1} [1 - (1 + |\ln \tau|)^{1-2\alpha\theta'}] \leq \frac{1}{2\alpha\theta' - 1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\int_{\tau}^1 (1 + |\ln t|)^{-2\alpha\theta'} t^{-1} dt = \ln(1 + |\ln \tau|). \quad (9)$$

В силу неравенств (7)–(9) из формулы (6) получим

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2 \leq \|f_1\|_2^2 \leq \frac{1}{(1 - 2\alpha\theta')^{\frac{1}{\theta'}}} (1 + |\ln \tau|)^{\frac{1}{\theta'} - 2\alpha} \|f\|_{2,q,\alpha}^2$$

в случае $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$,

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2 \leq \|f_1\|_2^2 \leq \frac{1}{(1 - 2\alpha\theta')^{\frac{1}{\theta'}}} \|f\|_{2,q,\alpha}^2$$

– в случае $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$,

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2 \leq \|f_1\|_2^2 \leq \|f\|_{2,q,\alpha}^2 \ln(1 + |\ln \tau|)$$

– в случае $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

В этих формулах положим $\tau = \left(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2\right)^{-\frac{r}{r-2}}$. Тогда для функции f_1 имеем

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{(1 - 2\alpha\theta')^{\frac{1}{\theta'}}} \left(1 + \frac{r}{r-2} \ln\left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha} \|f\|_{2,q,\alpha}, \quad (10)$$

если $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$,

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{(2\alpha\theta' - 1)^{\frac{1}{\theta'}}} \|f\|_{2,q,\alpha} \quad (11)$$

в случае $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ и

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_1(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{2,q,\alpha} \left[\ln\left(1 + \frac{r}{r-2} \ln\left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \quad (12)$$

в случае $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

Для функции $f_2 \in L_{r'}$ по определению коэффициента разложения и неравенства Гельдера ($2 < r < +\infty$) имеем

$$|\hat{f}_2(k)| = \left| \int_X f_2(x) \varphi_k(x) d\nu \right| \leq \|f_2\|_{r'} \|\varphi_k\|_r \leq M_k \|f\|_{r'}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 \leq \|f_2\|_{r'}^2 \sum_{k=1}^n M_k^2. \quad (13)$$

Так как по условию $q \in (2, +\infty)$, то, учитывая, что f^* не возрастает и $(1 + |\ln t|)^{\alpha q t^{\frac{q}{2}-1}}$ не убывает, будем иметь

$$\|f\|_{2,q,\alpha} \geq \left[\int_{x/2}^x f^{*q}(t) (1 + |\ln t|)^{\alpha q t^{\frac{q}{2}-1}} dt \right]^{1/q} \geq f^*(x) (1 + |\ln \frac{x}{2}|)^{\alpha} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для любого $x \in (0, 1)$. Поэтому из оценки (13), с учетом условия $r \in (2, +\infty]$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 &\leq \sum_{k=1}^n M_k^2 \left[\int_0^\tau f^{*r'}(t) dt \right]^{2/r'} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n M_k^2 \|f\|_{2,q,\alpha}^2 \left[\int_0^\tau (1 + |\ln t|)^{-\alpha r'} t^{-\frac{r'}{2}} dt \right]^{\frac{2}{r'}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $0 < x < 1$, то функция $1 + |\ln x|$ убывает. Поэтому, если $\alpha > 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (1 + |\ln t|)^{-\alpha r'} t^{-\frac{r'}{2}} dt &\leq (1 + |\ln \tau|)^{-\alpha r'} \int_0^\tau t^{-\frac{r'}{2}} dt = \\ &= \frac{2}{2 - r'} \tau^{1 - \frac{r'}{2}} (1 + |\ln \tau|)^{-\alpha r'}. \end{aligned}$$

Если же $\alpha < 0$, то $(1 + |\ln x|)^{-\alpha r'}$ убывает на $(0, 1]$. Известно, что для любого числа $\varepsilon > 0$ функция $x^\varepsilon (1 + |\ln x|)^{-\alpha r'}$ возрастает на $(0, 1]$. Поэтому, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \frac{r'}{2})$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (1 + |\ln t|)^{-\alpha r'} t^{-\frac{r'}{2}} dt &\leq \tau^\varepsilon (1 + |\ln \tau|)^{-\alpha r'} \int_0^\tau t^{-\varepsilon - \frac{r'}{2}} dt = \\ &= \frac{4}{2 - r'} (1 + |\ln \tau|)^{-\alpha r'} \tau^{1 - \frac{r'}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^\tau (1 + |\ln t|)^{-\alpha r'} t^{-\frac{r'}{2}} dt \leq C(r) (1 + |\ln \tau|)^{-\alpha r'} \tau^{1 - \frac{r'}{2}} \quad (15)$$

для любого $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Из неравенств (14) и (15) получим

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{2,q,\alpha} \left[1 + |\ln \tau| \right]^{-\alpha} \tau^{\frac{1}{r} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n M_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В этом неравенстве положим $\tau = \left(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2 \right)^{\frac{r}{r-2}}$. Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(r) \|f\|_{2,q,\alpha} \left[1 + \left| \ln \left(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2 \right) \right| \right]^{-\alpha}.$$

Так как $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$, то отсюда получим

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}_2(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(r) \|f\|_{2,q,\alpha} \left[1 + \left| \ln \left(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2 \right) \right| \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha} \quad (16)$$

для любого $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

В силу неравенств (10)–(12) и (16) будем иметь неравенства: если $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{2,q,\alpha} \left[1 + \left| \ln \left(1 + \sum_{j=1}^n M_j^2 \right) \right| \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha},$$

если $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{2,q,\alpha},$$

если $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, то

$$\left[\sum_{k=1}^n |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r-2} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2 \right) \right) \right]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{2,q,\alpha}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ортоподобная система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1).

1) Если $1 < q < 2$, $0 \leq \alpha < \infty$, то для любого полинома

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$$

выполняется неравенство

$$\|f_n\|_{2,q,\alpha} \leq C(p) \|f_n\|_2 \left(\ln \left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2 \right) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \alpha}.$$

2) Если $1 < p < 2 < q < +\infty$, то

$$\|f_n\|_{2,p,\alpha} \leq C(p,q) \|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln \left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2 \right) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

3) Если $2 < p < q < +\infty$, то

$$\|f_n\|_{2,p,\alpha} \leq C(p,q) \|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln \left(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2 \right) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Для пространства Лоренца-Зигмунда известно соотношение (см., например, [17]):

$$\|f\|_{p,q,\alpha} \asymp \sup_{\|g\|_{p',q',-\alpha} \leq 1} \left| \int_X f(x)g(x) d\nu \right|, \quad (17)$$

где $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

В силу теоремы 1 [4] имеем

$$\int_X f_n(x)g(x) d\nu = \sum_{k=1}^n c_k \hat{g}(k)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Применяя неравенство Гельдера-Роджерса (см. [3], гл. 1, п. 1.3.4 и [18]) и теорему 1, получим

$$\left| \int_X f_n(x)g(x) d\nu \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |\hat{g}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|g\|_{2,q',-\alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q'} - (-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|g\|_{2,q',-\alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \alpha} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством Парсеваля [4] и соотношением (17) при $p = 2$, отсюда получим

$$\|f_n\|_{2,q} \leq C(p) \|f_n\|_2 \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \alpha}.$$

Первый пункт теоремы доказан.

Докажем второй пункт.

2) Пусть $1 < p < 2 < q < +\infty$. Так как $1 < p < 2$, то в силу пункта 1) будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{2,p,\alpha} &\leq C(p,q) \|f_n\|_2 \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \alpha} = \\ &= C(p,q) \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \alpha} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

По условию теоремы $2 < q < +\infty$. Поэтому, в силу теоремы 1, из (18) получим

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{2,p,\alpha} &\leq C(p,q) \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \alpha} \|f_n\|_{2,q,\alpha} = \\ &= C(p,q) \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f_n\|_{2,q,\alpha}. \end{aligned}$$

3) Пусть $2 < p < q < +\infty$. В пространстве Лоренца-Зигмунда $L_{p,\theta}(\log L)^\alpha$ справедливо неравенство (см. [17], с. 491):

$$\|g\|_{2,p,\alpha} \leq \|g\|_{2,q,\alpha}^{\frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}}} \|g\|_{2,\tau,\alpha}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}}} \quad (19)$$

при $1 < \tau < p < q < +\infty$. По условию теоремы $2 < p < q < +\infty$. Выберем число $\tau \in (1, 2)$. Тогда по доказанному второму пункту имеем

$$\|f_n\|_{2,\tau,\alpha} \leq C(p) \|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}}. \quad (20)$$

Теперь, в неравенстве (19) полагая $g = f_n$ и учитывая (20), получим

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{2,p,\alpha} &\leq C(p, q) \|f_n\|_{2,q,\alpha}^{\frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}}} \left\{ \|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}} \right\}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q}}} = \\ &= C(p, q) \|f_n\|_{2,q,\alpha} \left(\ln(1 + \sum_{k=1}^n M_k^2) \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

для $2 < p < q < +\infty$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Неравенство разных метрик в пространстве L_p для полиномов по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ при некотором $r \in (2, +\infty]$, удовлетворяющей условию*

$$\|\varphi_n\|_r \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

доказано в [19]. В случае $\alpha = 0$ теоремы 1 и 2 ранее доказаны в [20].

ЛИТЕРАТУРА

1 Sharpley R. Counterexamples for classical operators on Lorentz-Zygmund spaces // *Studia Mathematica*. – 1980. – Vol. 58. – P. 141-158.

- 2 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
- 3 Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
- 4 Лукашенко Т.П. Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вестник МГУ. Серия математика, механика. – 1997. – № 5. – С. 27-31.
- 5 Лукашенко Т.П. О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 12. – С. 57-72.
- 6 Marcinkiewicz J., Zygmund A. Some theorems on orthogonal systems // Fund. math. – 1937. – Vol. 28. – P. 309-335.
- 7 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. – 224 с.
- 8 Швелидзе Н.В. О теоремах вложения в некоторых функциональных пространствах // Сообщения АН Груз. ССР. – 1976. – Т. 83. – С. 289-292.
- 9 Шерстнева Л.А. Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вестник МГУ. Серия математика, механика. – 1984. – № 4. – С. 75-79.
- 10 Тазабеков С., Смаилов Е.С. О некоторых достаточных условиях вложения в пространствах Лоренца // Известия АН КазССР. Серия физико-матем. – 1989. – № 5. – С. 50-54.
- 11 Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. Метод многопараметрической интерполяции и теоремы вложения пространств Бесова B_p^α // Analysis mathematica. – 1998. – V. 24. – P. 241-263.
- 12 Нурсултанов Е.Д. Неравенства разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функций из пространства Лоренца // Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова РАН. – 2006. – Т. 255. – С. 1-18.
- 13 Радзиевский Г.В. Неравенства Джексона-Бернштейна для системы корневых функций оператора дифференцирования с нелокальным краевым условием // Докл. РАН. 1998. – Т. 363, № 1. – С. 20-23.
- 14 Смаилов Е.С. Неравенство разных метрик в пространствах Лоренца для полиномов по общим ортонормальным системам и теоремы вложения // Тезисы докладов межд. науч. конф. "Функц. анализ и его прилож. – Астана, 2-5 октября 2012. – С. 65-66.

15 Акишев Г. Неравенства разных метрик для полиномов в пространстве Лоренца со смешанной нормой // Материалы межд. науч. конф. "Первые Ержановские чтения". – Павлодар, 2004. – Т. 2. – С. 211-214.

16 Сихов М.Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона-Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 1. – С. 94-104.

17 Sharpley R. Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation // Journal of Functional analysis. – 1972. – Vol. 11. – P. 479-513.

18 Maligranda L. Equivalence of the Hol'der-Rogers and Minkowski inequalities // Math. Inequal. Appl. – 2001. – Vol. 4, № 2. – P. 203-207.

19 Мустахаева В.М., Акишев Г. Неравенство разных метрик для полиномов по ортонормированным системам // Материалы 2-й Респ. научно-практ. конф. "Молодежь и наука в совр. мире". – Талдыкорган, 2010. – С. 95-97.

20 Акишев Г. О коэффициентах разложения по ортоподобной системе и неравенство разных метрик // Математический журнал. – Алматы, 2011. – Т. 11, № 2. – С. 22-27.

Статья поступила в редакцию 20.02.13

Ақышев Г. ОРТОГОНАЛДЫҚҚА ҰҚСАС ЖҮЙЕ ЖӘНЕ ЛОРЕНЦ-ЗИГМУНД КЕҢІСТІГІНДЕ ӘРТҮРЛІ МЕТРИКАДАҒЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Мақалада Лоренц-Зигмунд кеңістігі, саналымды ортогоналдыққа ұқсас жүйе қарастырылған. Лоренц-Зигмунд кеңістігінің элементтерінің саналымды ортогоналдыққа ұқсас жүйе бойынша жіктеу коэффициенттерінің бағалауы және осы жүйе бойынша көпмүше үшін әртүрлі метрикадағы теңсіздіктер дәлелденген.

Akishev G. SIMILAR TO ORTHOGONAL SYSTEM AND INEQUALITY OF DIFFERENT METRICS IN LORENTZ-ZYGMUND SPACE

In this paper Lorentz-Zygmund space and countable similar to orthogonal system are considered. Estimation of Fourier coefficients on the countable similar to orthogonal system of elements of Lorentz-Zygmund space and inequality of different metrics for polynomials on the system are proved.

УДК 539.22

Л.А. АЛЕКСЕЕВА

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ. 4. ТВИСТОРЫ И ТВИСТОРНЫЕ ПОЛЯ

На основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций рассмотрено бикватернионное волновое (биволновое) уравнение общего вида при векторном представлении его структурного коэффициента. Это уравнение в матричном (тензорном) виде относится к классу уравнений Янга-Милса, которые используются в теоретической физике для математического описания элементарных частиц. Построены его обобщенные решения, описывающие нестационарные, гармонические и статические элементарные твисторы и твисторные поля.

Ключевые слова: *бикватернион, биволновое уравнение, векторный коэффициент, обобщенное решение, твистор.*

Настоящая статья является продолжением статей [1-3], где рассмотрены частные виды бикватернионных волновых уравнений, эквивалентные системам уравнений Максвелла и Дирака и их обобщениям, и построены их бикватернионные решения.

Здесь рассматривается бикватернионное волновое уравнение более сложного вида, которое, если записать его в матричном (тензорном) виде, относится к классу уравнений Янга-Милса [4]. Последние используются в теоретической физике для математического описания элементарных частиц.

© Л.А. Алексеева, 2013.

Keywords: *biquaternion, biwave equation, vector coefficient, generalized solution, twistor*
2010 Mathematics Subject Classification: 46S10, 53C80

На основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций получены обобщенные решения биволнового уравнения при векторном представлении его структурного коэффициента. Рассмотрены нестационарные, гармонические и статические элементарные твисторы и твисторные поля.

1 ТВИСТОРНОЕ БИВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим линейные бикватернионные дифференциальные уравнения вида

$$\nabla^\pm \mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in M, \quad (1)$$

где дифференциальные бикватернионные операторы $\nabla^\pm = \partial_\tau \pm i\nabla$ – взаимные биградиенты, действия которых определены алгеброй бикватернионов [1]:

$$\nabla^\pm \mathbf{B}(\tau, x) \triangleq (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (b(\tau, x) + B(\tau, x)) = \partial_\tau b \mp i \operatorname{div} B \pm i \operatorname{grad} b + \partial_\tau B \pm i \operatorname{rot} B$$

соответственно верхнему (или нижнему) знаку, ∇ – градиент, M – пространство Минковского, *структурный коэффициент* $\mathbf{F} = f + F$ – постоянный бикватернион,

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{B} = (f + F) \circ (b + B) = fb - (F, B) + fB + bF + [F, B],$$

$(\cdot, \cdot), [\cdot, \cdot]$ обозначают скалярное и векторное произведения соответствующих векторов.

Поскольку уравнения (1) эквивалентны системам уравнений гиперболического типа и приводят к решениям волновых уравнений, будем называть их *биволновыми уравнениями общего вида*.

Частные случаи этого уравнения, когда $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{F} = f$ – комплексное число, дают бикватернионное представление систем уравнений Максвелла [2] и Дирака [3].

Здесь исследуем случай, когда $\mathbf{F} = F$ – комплексный вектор. Тогда (1) имеет вид (для верхнего знака):

$$(\partial_\tau + i\nabla + F) \mathbf{B} = \mathbf{G}. \quad (2)$$

Рассмотрим взаимные операторы вида

$$\mathbf{D}_F^+ = \nabla^+ + F, \quad \mathbf{D}_F^- = \nabla^- - F.$$

Легко проверить, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством:

$$\mathbf{D}_F^+ \mathbf{D}_F^- = \mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ = (\nabla^+ + F) \circ (\nabla^- - F) = \square + (F, F) + 2i(F, \nabla), \quad (3)$$

где $\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$ – волновой оператор, Δ – оператор Лапласа. Используя это свойство, из (2) получим

$$\mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ \mathbf{B} = \{\square + (F, F) + 2i(F, \nabla)\} \mathbf{B} = \mathbf{D}_F^- \mathbf{G} = \mathbf{Q}.$$

То есть каждая компонента \mathbf{B} удовлетворяет уравнению

$$\square u + (F, F)u + 2i(F, \nabla u) = q(\tau, x) \quad (4)$$

с соответствующей \mathbf{Q} правой частью.

Далее построим решения уравнения (1) для верхнего знака (+). Решения (1) для нижнего знака (-) можно получить из них, используя операцию комплексного сопряжения. Для построения решений будем использовать операцию свертки обобщенных функций (см. [5]), которая берется покомпонентно в соответствии с бикватернионным умножением:

$$\mathbf{F} * \mathbf{B} = (f + F) * (b + B) = f * b - (F, *B) + f * B + b * F + [F, *B].$$

Здесь в скалярном и векторном произведениях компонент проводится свертка.

ТЕОРЕМА 1. *Решение обобщенного биволнового уравнения (2) можно представить в виде:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_F^- (\psi * \mathbf{G}) = \mathbf{D}_F^- \psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_F^- \mathbf{G} + \mathbf{B}^0, \quad (5)$$

где $\psi(\tau, x)$ – фундаментальное решение уравнения (4) (при $q = \delta(\tau)\delta(x)$), а $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ – решение однородного уравнения (2) (при $\mathbf{G} = 0$):

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^- \psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \mathbf{D}_F^- \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^- (\psi^0 * \mathbf{C}^0), \quad (6)$$

$\psi^0(\tau, x)$ – решения однородного уравнения (4), $\mathbf{C}^0(\tau, x)$ – произвольные бикватернионы, допускающие такую свертку.

Доказательство. В силу линейности уравнения достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (5). Подставим первое слагаемое в уравнение (2) и, используя (3), получим

$$\begin{aligned} & (\nabla^+ + F) (\nabla^- - F) (\psi * \mathbf{G}) = \\ & = (\square\psi + 2i(F, \nabla\psi) + (F, F)\psi) * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Для каждого слагаемого второй суммы имеем

$$(\nabla^+ + F) (\nabla^- - F) (\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{\square\psi^0 + 2i(F, \nabla\psi^0) + (F, F)\psi^0\} * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами свертков [5]. Очевидно, в силу линейности уравнения, любое решение можно представить в аналогичном виде.

Рассмотрим уравнение (4), которое, если положить $m^2 = (F, F)$, содержит оператор Клейна-Гордона-Фока $(\square + m^2)$ и дополнительное слагаемое $(2i(F, \nabla\psi))$. Интересно, что появление этого дополнительного члена значительно упрощает вид его фундаментального решения в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока, построенным В.С. Владимировым (см. в [6]).

ТЕОРЕМА 2. *Фундаментальные решения уравнения (4) имеют вид*

$$\psi(\tau, x) = \frac{e^{i(F,x)}}{4\pi \|x\|} ((1-a)\delta(\tau - \|x\|) + a\delta(\tau + \|x\|)) + \psi^0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где $\delta(\tau \mp \|x\|)$ – простой слой на световом конусе $\tau = \pm \|x\|$; a – произвольное комплексное число, $\psi^0(\tau, x)$ – решение однородного уравнения (при $q = 0$).

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x) , обозначаем (ω, ξ) соответственно.

Уравнение для ψ имеет вид

$$\square\psi + (F, F)\psi + 2i(F, \nabla\psi) = \delta(\tau)\delta(x), \quad (8)$$

а его преобразование Фурье –

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 + 2(F, \xi) + (F, F)\right) \bar{\psi}(\omega, \xi) = 1. \quad (9)$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega, \xi) = \frac{1}{(\xi + F, \xi + F) - \omega^2}. \quad (10)$$

Поскольку правая часть (10) имеет неинтегрируемые особенности, для построения обратного преобразования Фурье следует выбрать определенные регуляризации.

Для этого воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера:

$$\square\chi = \delta(\tau, x),$$

которое имеет вид

$$\chi = \frac{1-a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + \frac{a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau + \|x\|) \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $\delta(\tau \pm \|x\|)$ – простой слой на световом конусе, $\tau = \mp \|x\|$ – сингулярная обобщенная функция.

Поскольку преобразование Фурье слагаемых равно следующим регуляризациям:

$$\mathbb{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau \mp \|x\|)\right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - \omega^2 \pm i0}, \quad (11)$$

используя свойства сдвига преобразования Фурье [5], из (10) и (11) получим формулу теоремы (7). Теорема доказана.

Заметим, что ψ – это сферическая волна, распространяющаяся в R^3 с единичной скоростью (если τ – время). При $\text{Re } F \neq 0$ реальная и мнимая части плотности слоя на сфере колеблются с изменением x . $\text{Im } F$ дает экспоненциальное затухание или возрастание плотности в зависимости от направления x по отношению к F .

Скалярные потенциалы. Построим решения однородного уравнения (4):

$$\square\psi^0 + (F, F)\psi^0 + 2i(F, \nabla\psi^0) = 0. \quad (12)$$

Его преобразование Фурье имеет вид

$$((\xi + F, \xi + F) - \omega^2) \bar{\psi}^0 = 0.$$

Следовательно, $\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega, \xi) \delta_S(\omega, \xi)$, где $\delta_S(\omega, \xi)$ – простой слой на трехмерной поверхности S в R^4 :

$$S = \{(\omega, \xi) : (\xi + F, \xi + F) - \omega^2 = 0\}, \quad (13)$$

а $\varphi(\omega, \xi)$ – произвольная интегрируемая на S функция.

И формальное решение однородного уравнения имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau, x) = \int_S \varphi(\omega, \xi) \exp(-i\omega\tau - i(x, \xi)) dS(\omega, \xi) \quad \forall \varphi(\omega, \xi) \in L_1(S). \quad (14)$$

Рассмотрим, при каких F такая поверхность существует и какой вид она имеет.

Пусть F – действительный вектор, $F = -E$. Тогда S – это конус в R^4 с вершиной в точке $(\omega, \xi) = (0, E)$. В этом случае (14) можно записать в виде

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{R^3} \chi(\xi) \exp(\pm i \|\xi - E\| \tau - i(x, \xi)) dV(\xi) \quad \forall \chi(\xi) \in L_1(R^3), \quad (15)$$

$$dV(\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Если F – мнимый вектор, $F = -iH$, тогда из (13) следует

$$(\xi - iH, \xi - iH) = \|\xi\|^2 - \|H\|^2 - 2i(H, \xi) = \omega^2.$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух множеств, задаваемых равенствами:

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi\|^2 - \|H\|^2 = \omega^2, \quad (H, \xi) = 0 \right\}.$$

В этом случае решением однородного уравнения будет интеграл по части плоскости, перпендикулярной вектору H , с выколотым кругом радиуса

$\|H\|$ с центром в точке $\xi = 0$:

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{\substack{\xi \perp H, \\ \|\xi\| \geq \|H\|}} \chi(\xi) \exp\left(\pm i\tau \sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right) dS_{\cap}(\xi) \quad (16)$$

$\forall \chi(\xi) \in L_1(S_{\cap}(\xi))$.

Если имеем комплексное $F = -E - iH$, тогда из (13) следует

$$(\xi - E - iH, \xi - E - iH) = \|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 - 2i(\xi - E, H) = \omega^2.$$

В этом случае решением однородного уравнения будет интеграл по части плоскости, проходящей через точку $\xi^* = E$ и перпендикулярной вектору H , с выколотым кругом радиуса $\|H\|$ с центром в ξ^* :

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{\substack{(\xi - E) \perp H, \\ \|\xi - E\| \geq \|H\|}} \phi(\xi) \exp\left(\pm i\tau \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right) dS_{\cap}(\xi) \quad (17)$$

$\forall \phi(\xi) \in L_1(S_{\cap}(\xi))$. Здесь

$$S_{\cap}(\xi) = \{\xi : (\xi - E) \perp H \cap \|\xi - E\| \geq \|H\|\}.$$

Выбор $\phi(\xi)$ позволяет строить широкий класс решений твисторных уравнений.

2 ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ξ -ТВИСТОР. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТВИСТОРНЫЕ ПОЛЯ

Назовем решения однородного уравнения (2) *твисторами*. Построим их бикватернионные представления.

Рассмотрим подынтегральные функции в формуле решения (17):

$$\psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \exp\left(\pm i\tau \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right), \quad \xi \in S_{\cap}(\xi). \quad (18)$$

Они являются решением однородного уравнения (4) и представляют собой две плоские гармонические волны, движущиеся в направлении волнового вектора ξ и противоположном направлении с фазовой скоростью $c = \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} / \|\xi\|$; длина волн $\lambda = 2\pi / \|\xi\|$.

При $\|\xi - E\| > \|H\|$ их

частота $\varpi = \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}$, период $T = 2\pi/\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}$.

Вычислим порождаемый ими элементарный ξ -твистор:

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}\|\xi - E\|} \mathbf{D}_F^{-} \psi_{\xi}^{\pm} = \\ &= \frac{\pm i \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - (\xi - E) + iH}{\sqrt{2}\|\xi - E\|} \psi_{\xi}^{\pm}, \quad \xi \neq E. \end{aligned} \quad (19)$$

Его норма и псевдонорма равны

$$\|\Psi_{\xi}^{\pm}\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = i \frac{\|H\|}{\|\xi - E\|}. \quad (20)$$

Бикватернион его энергии-импульса

$$\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) = W(\Psi_{\xi}^{\pm}) + iP(\Psi_{\xi}^{\pm}) = \Psi_{\xi}^{\pm} \circ (\Psi_{\xi}^{\pm})^*$$

равен

$$\begin{aligned} \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) &= 1 + i \frac{[e_{\xi-E}, H] \pm e_{\xi-E} \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}}{\|\xi - E\|}, \\ e_{\xi-E} &= \frac{\xi - E}{\|\xi - E\|}. \end{aligned} \quad (21)$$

Норма и псевдонорма Ξ_{ξ} равны

$$\begin{aligned} \|\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})\| &= \sqrt{1 + \frac{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 \cos^2 \gamma}{\|\xi - E\|^2}}, \\ \langle\langle \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) \rangle\rangle &= \sqrt{1 - \frac{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 \cos^2 \gamma}{\|\xi - E\|^2}}, \end{aligned}$$

где γ – угол между векторами $e_{\xi-E}, H$. Интересно, что при $\gamma = \pm\pi/2$

$$\langle\langle \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) \rangle\rangle = 0, \quad \|\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})\| = \sqrt{2}.$$

Наиболее простой вид Ψ_ξ^\pm и $\Xi(\Psi_\xi^\pm)$ имеют при $H = 0$:

$$\Psi_\xi^\pm = \frac{\pm i + e_{\xi-E}}{\sqrt{2}} \exp(\pm i\tau \|\xi - E\| - i(x, \xi)), \quad (22)$$

$$\|\Psi_\xi^\pm\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_\xi^\pm \rangle\rangle = 0, \quad \Xi(\Psi_\xi^\pm) = 1 \pm ie_{\xi-E}.$$

Элементарные ξ -твисторы описывают восьмимерные плоские гармонические волны, движущиеся вдоль вектора ξ с определенной амплитудой по каждой составляющей скалярной и векторной действительной и мнимой частей твистора. Направление движения определяется верхним, либо нижним знаком твистора и влияет на амплитуду волны.

Твисторные поля. Используя Ψ_ξ^\pm , можно представить $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ в виде суммы твисторов вида

$$\mathbf{B}^\xi(\tau, \mathbf{x}) = \Psi_\xi^+ * \mathbf{C}_1(\tau, \mathbf{x}) + \Psi_\xi^- * \mathbf{C}_2(\tau, \mathbf{x}),$$

которые описывают ξ -поляризованные твисторные поля.

Неполяризованные твисторные поля описываются бикватернионами вида

$$\mathbf{B}^0(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{C}_0, \phi} \Psi^\phi(\tau, \mathbf{x}) * \mathbf{C}^0(\tau, \mathbf{x}), \quad (23)$$

$$\Psi^\phi(\tau, x) = \int_{S_\Gamma} \phi(\xi) \Psi_\xi(\tau, x) dS_\Gamma(\xi) \quad \forall \phi \in L_1(S_\Gamma).$$

Скалярно-векторные поля $\mathbf{C}_j(\tau, x)$, произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

Заметим, что выше мы построили решения твисторного уравнения, допускающие обобщенное преобразование Фурье. Однако, существуют его решения, не принадлежащие обобщенным функциям медленного роста.

Экспоненциально затухающие и возрастающие по времени твисторы. При $\|\xi - E\| \leq \|H\|$ скалярный потенциал (18) преобразуется к виду

$$\alpha_\xi^\pm(\tau, x) = \exp\left(\pm\tau\sqrt{\|H\|^2 - \|\xi - E\|^2} - i(x, \xi)\right), \quad \xi - E \perp H,$$

и также является решением однородного уравнения (12). Это две стоячие гармонические волны с экспоненциально затухающей и возрастающей по времени амплитудами. При $\|\xi - E\| = \|H\|$ амплитуда не зависит от времени и они совпадают.

Вычислим порождаемый α_ξ^\pm элементарный твистор:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\xi^\pm(\tau, x) &= \frac{\mathbf{D}_F^- \alpha_\xi^\pm}{\|\xi - E\| \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pm \sqrt{\|H\|^2 - \|\xi - E\|^2} - (\xi - E) + iH}{\|\xi - E\| \sqrt{2}} \alpha_\xi^\pm(\tau, x), \quad \xi - E \perp H. \end{aligned}$$

Его норма и псевдонорма равны

$$\|\mathbf{r}_\xi^\pm\| = \frac{\|H\|}{\|\xi - E\|}, \quad \langle\langle \mathbf{r}_\xi^\pm \rangle\rangle = i.$$

Бикватернион его энергии-импульса равен

$$\Xi(\Psi_\xi^\pm) = 1 + \frac{i[e_{\xi-E}, H] \pm e_{\xi-E} \sqrt{\|H\|^2 - \|\xi - E\|^2}}{\|\xi - E\|}.$$

Аналогично (23), можно строить экспоненциально возрастающие или затухающие по времени твисторные поля из поляризованных вида

$$\mathbf{B}^\xi(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{r}_\xi^\pm * \mathbf{C}(\tau, \mathbf{x})$$

или неполяризованных вида

$$\mathbf{B}^0(\tau, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{C}, \phi} \mathbf{r}^\phi(\tau, \mathbf{x}) * \mathbf{C}(\tau, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{r}^\phi(\tau, x) = \int_{\dot{S}_n} \phi(\xi) \mathbf{r}_\xi(\tau, x) dS_n(\xi) \quad \forall \phi \in L_1(\xi \perp H).$$

Если $\xi = E$, из скалярного потенциала (18) получим элементарный H -твистор

$$\Psi_H^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}\|H\|} \mathbf{D}_F^- \exp(\mp \tau \|H\| - i(E, x)) =$$

$$= \frac{(\mp 1 + ie_H)}{\sqrt{2}} \exp(\mp \tau \|H\| - i(E, x)),$$

$$\|\Psi_H^\pm\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_H^\pm \rangle\rangle = 0, \quad \Xi(\Psi_H^\pm) = \sqrt{2}.$$

3 СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ТВИСТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим также важный для приложений класс решений уравнения (11) вида

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau},$$

которые описывают гармонические колебания с частотой ω . Предполагается, что правая часть (11) имеет ту же структуру. Тогда для комплексных амплитуд получим уравнение, которое приводится к виду

$$(\nabla_\omega^+ + F) \mathbf{B} = \mathbf{G}(x), \tag{24}$$

где $\nabla_\omega^\pm = \omega \pm \nabla$ — взаимные ω -градиенты. Решения соответствующего однородного уравнения назовем ω -твисторами.

Также прямым вычислением доказывается следующее свойство:

$$(\nabla_\omega^+ + F) \circ (\nabla_\omega^- - F) = \Delta + 2(F, \nabla) + \omega^2 + (F, F).$$

Используя его, получим

$$\begin{aligned} (\nabla_\omega^- - F) (\nabla_\omega^+ + F) \mathbf{B} &= [\Delta + 2(F, \nabla) + \omega^2 + (F, F)] \mathbf{B} = \\ &= (\nabla_\omega^- - F) \mathbf{G} = \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

То есть каждая компонента является решением уравнения

$$(\Delta + 2(F, \nabla) + \omega^2 + (F, F)) \psi_\omega = q(x) \tag{25}$$

(в соответствии верхнему или нижнему знакам) с соответствующей \mathbf{Q} правой частью.

Построим фундаментальное решение этого уравнения с помощью обобщенного преобразования Фурье по x . Его Фурье-трансформанта имеет вид

$$\bar{\psi}_\omega = \frac{1}{\omega^2 - \|\xi\|^2 - 2i(F, \xi) + (F, F)} = \frac{1}{\omega^2 - (\xi + iF, \xi + iF)}.$$

Используя фундаментальное решение уравнения Гельмгольца [5]

$$\begin{aligned}\Delta\chi + \omega^2\chi &= \delta(x), \\ \chi &= -\frac{1}{4\pi\|x\|} \left(ae^{i\omega\|x\|} + (1-a)e^{-i\omega\|x\|} \right), \\ \bar{\chi} &= -\frac{a}{\|\xi\|^2 - \omega^2 + i0} - \frac{1-a}{\|\xi\|^2 - \omega^2 - i0}\end{aligned}$$

и свойства преобразования Фурье, получим

$$\psi_\omega(x) = \frac{e^{-(F,x)}}{4\pi\|x\|} (ae^{i\omega\|x\|} + (1-a)e^{-i\omega\|x\|}). \quad (26)$$

На его основе аналогично, как в нестационарном случае, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Решения уравнения (24) можно представить в виде суммы бикватернионов*

$$\mathbf{B} = (\nabla_\omega^- - F) (\psi_\omega * \mathbf{G}) + \mathbf{T}_\omega, \quad (27)$$

где $\psi^\omega(x)$ имеет вид (26), а \mathbf{T}_ω – решение однородного уравнения

$$(\nabla_\omega^+ + F) \mathbf{T}^\omega = 0, \quad (28)$$

которое можно представить в виде

$$\mathbf{T}^\omega = (\nabla_\omega^- - F) (\psi_\omega^0 * \mathbf{C}(x)) \quad (29)$$

$\forall \mathbf{C}(x)$, допускающее эту свертку, ψ_ω^0 – решение однородного уравнения:

$$(\Delta + 2(F, \nabla) + \omega^2 + (F, F)) \psi_\omega^0 = 0, \quad (30)$$

либо в виде суммы решений вида (29).

Построим ω -твисторы \mathbf{T}^ω . Используя преобразования Фурье по x , из (30) получим

$$(\omega^2 - (\xi + iF, \xi + iF)) \bar{\psi}_\omega = 0. \quad (31)$$

Следовательно, $\bar{\psi}_\omega^0 = \varphi(\xi)\delta_{S^\omega}(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ – произвольная локально интегрируемая функция, а $\delta_{S^\omega}(\xi)$ – простой слой на поверхности S^ω в R^3 :

$$S^\omega = \{ \xi : (\xi + iF, \xi + iF) = \omega^2 \}.$$

И формальное решение однородного уравнения имеет вид интеграла

$$\psi^0(x) = \int_{S^\omega} \varphi(\xi) \exp(-i(x, \xi)) dS^\omega(\xi) \quad \forall \varphi(\xi) \in L_1(S^\omega). \quad (32)$$

Определим S^ω .

Если $\text{Im } F = 0$, т.е. F – действительный вектор, $F = E$, тогда

$$S^\omega = \{ \xi : \|\xi\|^2 = \omega^2 + \|E\|^2 \cap (\xi, E) = 0 \}.$$

В R^3 это – окружность, пересечение сферы радиуса $r^* = \sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}$ с плоскостью $(\xi, E) = 0$. В этом случае в формуле (32) интеграл контурный по этой окружности:

$$\psi^0(x) = \int_{\{e \perp E\}} \beta(e) \exp\left(-i(x, e)\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}\right) dl(e), \quad \|e\| = 1, \quad (33)$$

$\forall \beta(e) \in L_1 \{e \in R^3 : \|e\| = 1, e \perp E\}$.

Если F – мнимый вектор, $F = iH$, тогда из (31) следует, что S^ω – это сфера: $\|\xi - H\| = |\omega|$ с центром $\xi^* = H$, и интеграл (32) приводится к виду

$$\psi^0(x) = \exp(-i(x, H)) \int_{\|e\|=1} \alpha(e) \exp(-i\omega(x, e)) dS(e), \quad (34)$$

$\forall \alpha(e) \in L_1 \{e \in R^3 : \|e\| = 1\}$.

Если имеем комплексное $F = E + iH$, тогда

$$S^\omega = \{ \xi : \|\xi - H\|^2 = \omega^2 + \|E\|^2 \cap (E, \xi - H) = 0 \}.$$

В R^3 это – окружность пересечение сферы радиуса $r^* = \sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}$ с центром в точке $\xi = H$ с плоскостью $(\xi, E) = (H, E)$. В этом случае в формуле (33) интеграл контурный по этой окружности. Решение приводится к виду

$$\psi^0(x) = \exp(-i(x, H)) \int_{\{e \perp E\} \cup \{\|e\|=1\}} \gamma(e) \exp\left(-i(x, e)\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}\right) dl(e) \quad (35)$$

$\forall \gamma(e) \in L_1\{e \in R^3 : \|e\| = 1, e \perp E\}$. Выбор $\gamma(e)$ позволяет строить широкий класс ω -твисторов.

Элементарные ω -твисторы. Рассмотрим функцию

$$\psi^\omega(x, e) = \exp\left(-i(x, H + e\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2})\right), \quad e \perp E, \quad \|e\| = 1, \quad (36)$$

которая является решением однородного уравнения (30) и представляет собой комплексную амплитуду плоских гармонических волн (с учетом $e^{\pm i\omega\tau}$), движущихся в направлении волнового вектора $K = e\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2} + H$ или в противоположном (для $e^{i\omega\tau}$) со скоростью $v = \omega / \|K\|$; длина волн $\lambda = 2\pi / \|K\|$, частота $\varpi = \omega$, период колебаний $T = 2\pi / \omega$.

При $H = 0$ скорость $v = \omega / \sqrt{\omega^2 + \|E\|^2} \leq 1$ и не зависит от направления волны. С ростом $\|E\|$ длина волны $\lambda = 2\pi / \sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}$ уменьшается; при $\omega \rightarrow \infty$ $v \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$.

При $E = 0$ $v = \frac{\omega}{\|H\|}$, $\lambda = \frac{2\pi}{\|H\|}$; при $\|H\| \rightarrow \infty$ $v \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$.

Рассмотрим нормированный ω -твистор, порождаемый ψ^ω при $E \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Psi_+^\omega(x, e) &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}} (\nabla_\omega^- - F) \psi^\omega = \\ &= \frac{\omega - E + ie\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}} \psi^\omega, \quad e \perp E. \end{aligned} \quad (37)$$

Его амплитуда не зависит от H , норма и псевдонорма равны

$$\|\Psi_+^\omega\| = 1, \quad \langle\langle\Psi_+^\omega\rangle\rangle = \frac{i\|E\|}{\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}}. \quad (38)$$

Бикватернион его энергии-импульса равен

$$\Xi_\omega(\Psi_+^\omega) = W_\omega + iP_\omega = \Psi_+^\omega \circ (\Psi_+^\omega)^* = 1 + i \frac{\omega e + [e, E]}{\sqrt{\omega^2 + \|E\|^2}};$$

$$\|\Xi_\omega(\Psi_+^\omega)\| = \sqrt{2}, \quad \langle\langle\Xi_\omega(\Psi_+^\omega)\rangle\rangle = 0.$$

Используя Ψ_+^ω , можно представить $\mathbf{T}_\omega(x)$ в виде суммы твисторов типа

$$\mathbf{T}_\omega(x) = \sum_e \Psi_+^\omega(x, e) * \mathbf{C}(x),$$

$$\mathbf{T}_\omega(x) = \sum_{C, \phi} \Psi_\omega^\phi * \mathbf{C}(x), \quad \Psi_\omega^\phi = \int_{S_\omega} \phi(e) \Psi_+^\omega(e, x) dl(e) \quad (39)$$

$\forall \phi \in L_1\{e \perp E : \|e\| = 1\}$.

Скалярно-векторные поля $\mathbf{C}(x)$ тоже произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

Твисторы вида (39) описывают поляризованные колебания и волны скалярно-векторных полей, а (40) – неориентированные поля.

При $E = 0$ из (34) имеем

$$\Psi_+^\omega = (1 + ie) \exp(-i(x, H + e\omega)) \quad \forall e \in R^3 : \|e\| = 1;$$

$$\|\Psi_+^\omega\| = 1, \quad \langle\langle\Psi_+^\omega\rangle\rangle = 0.$$

Подставляя в (39), получим соответствующие твисторные поля, порождаемые H .

4 СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТВИСТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ. СТАТИЧЕСКИЕ ТВИСТОРЫ

Статический твистор – это решение однородного уравнения (1), независящее от времени,

$$(\nabla + F) \circ \mathbf{B} = 0. \quad (40)$$

Его легко получить из \mathbf{T}^ω при $\omega = 0$, $F = E + iH$.

Из (36)–(38) получим элементарный статический твистор при $E \neq 0$:

$$\psi^0(x, e) = \exp(-i(x, H + e\|E\|)), \quad e \perp E, \quad \|e\| = 1, \quad (41)$$

$$\Psi^0(x, e) = \frac{(-e_E + ie)}{\sqrt{2}} \psi^0, \quad e_E = E/\|E\|; \quad \|\Psi^0\| = 1, \quad \langle\langle \Psi^0 \rangle\rangle = i. \quad (42)$$

Бикватернион его энергии-импульса равен

$$\Xi_0(\Psi^0) = 1 + i[e, e_E],$$

$$\|\Xi_0(\Psi^0)\| = \sqrt{2}, \quad \langle\langle \Xi_0(\Psi^0) \rangle\rangle = 0.$$

При $E = 0$ из (34) имеем

$$\Psi^0 = (1 + ie) \exp(-i(x, H)) \quad \forall e \in R^3 : \|e\| = 1;$$

$$\|\Psi^0\| = 1, \quad \langle\langle \Psi^0 \rangle\rangle = 0.$$

Любой статический твистор можно представить в виде суммы твисторов (для поляризованных полей):

$$\mathbf{T}^0(x, e) = \sum_e \Psi^0(x, e) * \mathbf{C}(x);$$

(для неполяризованных полей):

$$\mathbf{T}^0(x) = \sum_{C, \phi} \Psi_\phi^0 * \mathbf{C}(x), \quad \Psi_\phi^0 = \int_{\|e\|=1} \phi(e) \Psi_\pm^0(x, e) dl(e)$$

$\forall \phi(e) \in L_1 \{e \in R^3 : \|e\| = 1, e \perp E \text{ при } E \neq 0\}$. Здесь $\mathbf{C}(x)$ - произвольные регулярные или сингулярные бикватернионы, допускающие такие свертки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь построены обобщенные решения биволнового уравнения с векторным структурным коэффициентом, которое эквивалентно системам уравнений из класса уравнений Янга-Милса [4]. Решения этих уравнений принято называть *твисторами*. Поэтому автор заимствовал это название для бикватернионных решений рассмотренного уравнения. Показано, что для решений этих уравнений существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые удовлетворяют уравнению (4). Наряду с нестационарными решениями построены гармонические по времени и статические решения. Решения представляются в виде поверхностных и контурных интегралов от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат также достаточно произвольные подынтегральные функции типа $\alpha(e), \gamma(e)$. От этих представлений можно перейти к представлению твисторов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник, если выбирать их соответственно интегральным разложениям этих специальных функций. В этом случае можно получить счетное число еще более элементарных твисторов, которые можно использовать в теории элементарных частиц. Однородное уравнение (1) также можно рассматривать, как частный случай уравнения трансформации масс-зарядов, электрических и гравимагнитных токов во внешнем электрогравимагнитном (ЭГМ) поле [7-9], напряженность которого описывается комплексным вектором F . В этом случае полученным решениям можно придать физическую трактовку согласно введенным там бикватернионам заряда-тока, мощности-силы ЭГМ-полей. Но наиболее полным такое представление будет при решении бикватернионного уравнения общего вида (1), когда \mathbf{F} содержит скалярную и векторную части ($\mathbf{F} = f + F$). С решением этой задачи автор познакомит читателя в последней статье этого цикла.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 1. Преобразования Лоренца // Математический журнал. – Алматы, 2010. – Т. 10, № 1. – С. 33-41.
- 2 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Обобщенные решения биволновых уравнений // Математический журнал. – Алматы, 2010. – Т. 10, № 4. – С. 5-13.
- 3 Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 3. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // Математический журнал. – Алматы, 2010. – Т. 11, № 1. – С. 30-38.
- 4 Yang C.N., Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance // Physical review. – 1954. – V. 96(1). – P. 191-195.
- 5 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1976. – 512 с.
- 6 Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- 7 Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-матем. – 2004. – № 3. – С. 45-53.
- 8 Алексеева Л.А. Преобразования Лоренца для одной модели электрогравимагнитного поля. Законы сохранения // Математический журнал. – Алматы, 2007. – Т. 7, № 4. – С. 12-24.
- 9 Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электрогравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 122-134.

Статья поступила в редакцию 17.01.13

Алексеева Л.А. БИКВАТЕРНИОНДАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ АЛГЕБРАСЫ. 4. ТВИСТОРЛАР ЖӘНЕ ТВИСТОРЛЫҚ ӨРІС

Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы және жалпыланған функциялар теориясының негізінде жалпы бикватерниондық

толқындық (битолқындық) теңдеуі оның векторлық түріндегі құрылымды коэффициенті кезінде қарастырылған. Бұл теңдеу матрицалық (тензорлық) түрінде Янг-Милс теңдеуінің класына жатады және элементарлы бөлшектерді сипаттау үшін теориялық физикада қолданылады. Стационарлы емес, гармоникалық және статикалық қарапайым твистор және твисторлы өрісті суреттейтін бұл теңдеудің жалпыланған шешімі құрастырылған.

Alexeyeva L.A. DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS. 4. TWISTORS AND TWISTOR FIELDS

On the base of differential biquaternion algebra and theory of generalized function the biquaternionic wave (biwave) equation of general type is considered under vector representation of its structural coefficient. This equation in matrix (tensor) form belongs to a class of Young-Mils equations, which are used in theoretical physics for mathematical description of elementary particles. There are built their generalized solutions describing nonstationary, harmonic and static elementary twistors and twistor fields.

УДК 517.91(61)+512

К.Б. БАПАЕВ

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При исследовании разностно-динамических систем (РДС) вводится понятие условной устойчивости; получено достаточное условие, при котором РДС является условно устойчивой.

Ключевые слова: *разностно-динамическая система, условная устойчивость.*

Для исследования асимптотического поведения решений разностно-динамических систем важную роль играют понятия устойчивости, впервые введенные О. Перроном [1], как аналоги таких же понятий, введенных А.М. Ляпуновым для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

Со времени О. Перрона эти понятия обобщались в различных формах в зависимости от исследуемых математических моделей эволюционных процессов, которые описываются разностными динамическими системами [1, 3-9].

Как мы знаем, одной из основ первого метода Ляпунова и теории гиперболических динамических систем является теорема об условной устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, доказанная

© К.Б. Бапаев, 2013.

Keywords: *difference-dynamical system, conditional stability*

2010 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10

А.М. Ляпуновым в [2] и развитая в [10-12]. Важность этой теоремы в гиперболических динамических системах заключается в том, что в современной теории грубых систем можно выделить два аспекта [13]. Первый из них, "геометрический", связан с описанием картины поведения траекторий. В центре второго, "аналитического", лежит метод решения функциональных уравнений для нахождения инвариантных многообразий, сопрягающих гомоморфизмы, которые являются следственным продолжением теоремы Ляпунова об условной устойчивости.

В предлагаемой работе для РДС доказывается аналог теоремы Ляпунова об условной устойчивости. При доказательстве используется один из вариантов метода последовательных приближений.

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = Ax_n + X(n, x_n), \quad (1)$$

где A – постоянная $m \times m$ -матрица, вектор-функция $X(n, x_n)$ удовлетворяет равенству $X(n, x_n) = o(x_n)$ равномерно по n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [2] *Говорят, что решение $\eta = \eta(n)$ РДС (1) условно устойчиво при $n \rightarrow \infty$, если в R^n существуют l -мерные многообразия $S_l \supset \eta_{n_0}$ начальных значений ($1 \leq l < n$) таких, что для всякого решения x_n , подчиненного условию*

$$x_{n_0} \in S_l, \|x_{n_0} - \eta_{n_0}\| < \delta(\varepsilon),$$

будет выполнено неравенство

$$\|x_n - \eta_n\| < \varepsilon \text{ при } n_0 \leq n.$$

Условная устойчивость называется асимптотической, если, кроме того,

$$\|x_n - \eta_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ где } \|x_{n_0} - \eta_{n_0}\| < \Delta$$

(Δ – некоторая положительная постоянная).

ТЕОРЕМА 1. (ОБ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ). *Пусть матрица A имеет l собственных чисел, по модулю меньших единицы, и $(m-l)$ собственных чисел, по модулю не меньших единицы, причем $X(n, x_n)$ непрерывна по n при $n \geq n_0$ и удовлетворяет по x_n условию Липшица:*

$$\begin{aligned} \|X(n, x'_n) - X(n, x''_n)\| &\leq L \|x'_n - x''_n\|, \\ (\|x'_n\| < \Delta, \|x''_n\| < \Delta, n \geq 0), \end{aligned} \quad (2)$$

где L достаточно мало и $L \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. Тогда тривиальное решение $x = 0$ РДС (1) условно асимптотически устойчиво относительно некоторого l -мерного многообразия S_l начальных значений.

Доказательство. Без нарушения общности рассуждения можно принять $n_0 = 0$. Положим

$$x_n = Cy_n,$$

где действительная неособенная матрица C такова, что

$$C^{-1}AC = B = \text{diag}(N, P),$$

причем $|\lambda_j(N)| < 1$ ($j = \overline{1, l}$), $|\lambda_\tau(P)| \geq 1$ ($\tau = \overline{l+1, m}$). Тогда РДС (1) примет вид

$$y_{n+1} = By_n + f(n, y_n), \quad (3)$$

где $f(n, y_n) = C^{-1}X(n, Cy_n)$.

Полагая $L_1 = \|C^{-1}\| \|C\| L$, очевидно, имеем

$$\|f(n, y'_n) - f(n, y''_n)\| \leq L_1 \|y'_n - y''_n\| \quad (4)$$

для $n \geq 0$, если только $\|y'_n\| < \Delta_1$ и $\|y''_n\| < \Delta_1$, где $\Delta_1 = \frac{\Delta}{\|C\|}$. Пусть $\beta > 0$ произвольно мало и $\alpha > 0$ такое, что $\alpha + \beta < \min[-\ln |\lambda_j(N)|]$. Тогда, очевидно, справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} |N|^n &\leq Me^{-(\alpha+\beta)n} \text{ при } n \geq 0, \\ |P|^n &\leq Me^{\beta n} \text{ при } n \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где M – некоторая достаточно большая положительная постоянная.

Положим

$$G(n) = \begin{cases} B^n \text{diag}(E_l, 0) & \text{при } n > 0, \\ -B^n \text{diag}(0, E_{m-l}) & \text{при } n < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где E_ν – единичные матрицы соответствующих порядков. Отсюда

$$G(0) = E_m.$$

Из неравенств (5), учитывая, что $B^n = \text{diag}(N^n, P^n)$, получаем

$$\|G(n)\| \leq \begin{cases} Le^{-(\alpha+\beta)n} & \text{при } n > 0, \\ Le^{\beta n} & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$G(n+1) = BG(n) \quad \text{при } n \neq 0.$$

Рассмотрим суммарную систему уравнений

$$y_n(a) = Y(n)a + \sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)f(s, y_s(a)) \quad (8)$$

где $Y(n) = B^n \text{diag}(E_l, 0) = \text{diag}(N^n, 0)$ и a – постоянный вектор, $m-l$ последних координат которого равны нулю. Для решения суммарного уравнения (8) применим метод последовательных приближений, полагая

$$y_n^{(0)}(a) = 0$$

и

$$y_n^{(P)}(a) = Y(n)a + \sum_{\tau=0}^{\infty} G(n-\tau)f(\tau, y_{\tau}^{(P-1)}(a)) \quad (P = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Выберем число Δ столь малым, чтобы было выполнено неравенство

$$L_1 < \frac{\beta}{4L},$$

и пусть $\|a\| < \frac{\Delta_1}{2L} = a_0$.

Тогда, учитывая первые из неравенств (5) при $t \geq 0$, будем иметь

$$\|y_n(a)\| < \|Y(n)\| \cdot \|a\| \leq Me^{-(\alpha+\beta)n} \|a\| \leq M \|a\| e^{-\alpha n}.$$

Пусть

$$\left\| y_n^{(p)}(a) - y_n^{(p-1)}(a) \right\| \leq \frac{M}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha n} \quad (10)$$

при $n \geq 0, (p \geq 1)$.

Из формулы (9), используя неравенства (7), выводим

$$\left\| y_n^{(p+1)}(a) - y_n^{(p)}(a) \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{s=0}^{\infty} \|G(n-s)\| \cdot \left\| f\left(s, y_n^{(p)}(a)\right) - f\left(s, y_{p-1}(s, a)\right) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{s=0}^n M \cdot e^{-(\alpha+\beta)(n-s)} \cdot \frac{\beta}{4M} \cdot \frac{M}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha s} + \\
&\quad + \sum_{s=n+1}^n L e^{\beta(n-s)} \cdot \frac{\beta}{4L} \cdot \frac{L}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha s} = \\
&= \frac{M\beta}{2^{p+1}} \|a\| \cdot e \cdot \frac{1 - e^{-(\alpha+\beta)(n+1)}}{1 - e^{-(\alpha+\beta)}} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha(n+1)}}{1 - e^{-\alpha}} + \\
&\quad + \frac{\beta M}{2^{p+1}} \cdot \|a\| \cdot \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \leq \frac{\beta M}{2^{p-1}} \|a\| \cdot e^{-\alpha n}
\end{aligned}$$

при $n > 0$.

Отсюда заключаем, что все приближения $y_n^{(p)}(a)$ имеют смысл, причем неравенство (10) выполнено для всех натуральных p . Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} y_n^{(p)}(a) = y_n(a),$$

причем предельная вектор-функция $y_n(a)$ непрерывна по совокупности переменных n и a при $0 \leq n < \infty$ и $\|a\| < a_0$. Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в формуле (9), будем иметь

$$y_n(a) = Y(n)a + \sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)f(s, a), \quad (11)$$

т.е. предельная функция $y_n(a)$ является решением суммарного уравнения (8). Варьируя последнее равенство по параметру n , находим

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= BY(n)a + \sum_{\tau=0}^{n-1} G(n+1-1-\tau)f(\tau, y_{\tau}(a)) + G(0)f(n, y_n(a)) + \\
&+ \sum_{\tau=n+1}^{\infty} G(n-1-1-\tau)f(\tau, y_{\tau}(a)) - G(-0)f(n, y_n(a)) = BY(n)a +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +G(0)f(n, y_n(a)) + B \sum_{\tau=0}^{\infty} G(n-1-\tau) f(\tau, y_{\tau}(a)) = \\
 & = By_n(a) + f(n, y_n(a))
 \end{aligned}$$

и, значит, $y_n(a)$ является решением РДС (3). Используя неравенства (10), получаем

$$\begin{aligned}
 \|y_n(a)\| & \leq y_n^{(0)}(a) + \sum_{p=1}^{\infty} \left\| y_n^{(p)}(a) - y_n^{(p-1)}(a) \right\| \leq \\
 & \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M}{2^{p-1}} \|a\| e^{-\alpha n} = 2M \|a\| e^{-\alpha n},
 \end{aligned}$$

отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n(a)\| = 0$, т.е. $y_n(a)$ при $\|a\| < a_0$ представляет собой многообразие решений РДС (3), непрерывно зависящее от k параметров a_1, a_2, \dots, a_l первых l координат вектора a , стремящихся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из уравнения (11), учитывая структуру (6) матрицы $G(n)$, для координат $y_{j,n}(a)$ решений при $n = 0$ будем иметь следующие выражения:

$$y_j(0, a) = a_j, \quad j = \overline{1, l},$$

и

$$y_j(0, a) = \left[\sum_{\tau=0}^{\infty} G(-1-\tau) f(\tau, y_{\tau}(a)) \right]_j, \quad j = \overline{l+1, m},$$

где $[\sum_{\tau=0}^{\infty} G(-1-\tau) f(\tau, y_{\tau}(a))]_j$ обозначает j -ю компоненту соответствующего вектора. Поэтому в окрестности начала координат 0 эти начальные значения удовлетворяют системе уравнений $y_{k+j,0} = \theta_j(y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{k,0})$ ($j = \overline{1, m-l}$), которые определяют в пространстве некоторые l -мерные многообразия S_l начальных значений, порождающих решения $y_n = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Возвращаясь к прежним переменным

$$x_n = Cy_n,$$

получим, что аналогичное утверждение справедливо для решений x_n исходной РДС (1). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Perron O. Jour. Ram. – 1929. – V. 161, № 1. – P. 41-64.
- 2 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
- 3 Бромберг П.В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. – М.: Оборонгиз, 1953. – 323 с.
- 4 Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
- 5 Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наукова Думка, 1972. – 246 с.
- 6 Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивость разностных систем. – Санкт-Петербург, 2003. – 112 с.
- 7 Agarwal R.P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. – Marcel Dekker, Inc., New York, 1992. – 777 p.
- 8 Holmgren R.A. A First Course in Discrete Dynamical Systems. – Springer, 1994. – 274 p.
- 9 Bobrowski D. Wprowadzenie do systemow dynamicznych z czasem dyskretnym. – Poznan: Uniwersytet Adama Mickiewicza, 1998. – 360 p.
- 10 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. Иностранной литературы, 1958. – 475 с.
- 11 Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
- 12 Демидович Б.П. Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1956. – Т. 40(82), вып. 1. – С. 73-94.
- 13 Аносов Д.В. Грубые системы // Тр. матем. инст. им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 7-31.

Статья поступила в редакцию 31.05.12

Бапаев Қ.Б. АЙЫРЫМДЫ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ
ШАРТТЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЫНДАҒЫ ТЕОРЕМА

Жұмыста айырымды-динамикалық жүйелерді зерттеуге шартты орнықтылық ұғымы енгізіліп жүйелердің сондай қасиетке ие болу шарттары алынған.

Baraev K.B. ON ONE THEOREM OF CONDITIONAL STABILITY OF
DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS

Notation of conditional stability is introduced and there is obtained sufficient condition under which difference-dynamical system is conditional stability.

УДК 533; 532.517.4; 536.46:533.6; 534.222.2

Е.К. БЕЛЯЕВ, А. КАЛТАЕВ, А.Ж. НАЙМАНОВА

Институт математики и математического моделирования МОН РК

050010, Алматы, ул. Пушкина 125, e-mail: ked@math.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

050040, Алматы, пр-т. аль-Фараби 71/13, e-mail: yerzhan.belyayev@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР $T < 300$ К

В работе определены термодинамические параметры, включающие в себя энтальпию, энтропию и удельную теплоемкость, при постоянном давлении в интервале температур $T < 300$ К с помощью полинома четвертой степени по температуре. В работе используются семь коэффициентов полинома, которые определяются методом LU декомпозиции на основе пакета прикладных программ Maple 11. С использованием полученных данных численно решена задача сверхзвукового потока воздуха ($T = 108$ К) с поперечным вдувом струи гелия ($T = 217$ К). Алгоритм численного решения основан на ENO-схеме третьего порядка точности. Турбулентная вязкость определяется с использованием модели Болдуина-Ломакса.

Ключевые слова: *сверхзвуковой поток, струя гелия, термодинамика, энтальпия, энтропия, удельная теплоемкость при постоянном давлении, ENO-схема.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из современных задач авиастроения является создание гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА), позволяющего за короткие сроки

© Е.К. Беляев, А. Калтаев, А.Ж. Найманова, 2013.

Keywords: *supersonic flow, helium jet, thermodynamics, enthalpy, entropy, specific heat at constant pressure, ENO-scheme*

2010 Mathematics Subject Classification: 93A30,80A25,80A17,80M20,76N15,76N17,76N20

покрывать самые дальние расстояния. Окислителем топлива в двигателях таких аппаратов является воздух из атмосферы (вернее, кислород в его составе), поэтому, в отличие от ракет, соотношение веса топлива к весу ГЛА примерно такое же, как и у обычных самолетов. В качестве топлива рассматривается как водород, так и углеводородные топлива [1]. Основным принципиальным отличием двигателя ГЛА от двигателей самолета и ракет является то, что в нем процессы смешения и горения топлива происходят на сверхзвуковых скоростях. Соответственно топливо находится в камере сгорания несколько миллисекунд, в течение которых необходимо перемешать его с окислителем, и должен осуществиться процесс горения. Это основное ограничение при организации процесса горения в камере сгорания предъявляет очень высокие требования к точности экспериментальных и расчетных (на моделях) измерений этого процесса [1-3]. Одной из основных задач при моделировании быстрого сжигания топлива в сверхзвуковом потоке воздуха является определение термодинамических характеристик, описывающих тепловые процессы, например, тепловыделение за счет химических реакций. В математическом плане для решения уравнений сохранения, описывающих процесс горения, необходимо знание ряда параметров. Такими параметрами являются и термодинамические свойства компонентов, т.е. энтальпия H , энтропия S и теплоемкости c_p каждого из компонентов, как функции температуры и давления [4]. Для определения данных параметров используется формула полиномиальной зависимости от температуры, где коэффициенты множества приведены в таблице термодинамических данных JANAF, входящих в пакет Chemkin II [1]. Данные коэффициенты множества приведены для интервала температур $300 < T < 5000$ К. На сегодняшний день существует множество работ по численному моделированию задачи сверхзвукового горения топлива в камере сгорания ГЛА, в которых в качестве термодинамических данных взяты величины из таблицы JANAF [1]. Как известно, очень сложно осуществить экспериментальные исследования по изучению процесса горения в сверхзвуковых камерах сгорания. Существует очень малое количество работ по экспериментальному изучению горения топлива в сверхзвуковом потоке. В основном, эксперименты проводятся для изучения взаимодействия инжектируемой струи топлива со сверхзвуковым потоком в интервале температур $T < 300$ К без горения [5-7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим перпендикулярный вдув звуковой струи газа в плоский воздушный сверхзвуковой турбулентный поток. Для удобства вычисления предположим, что вдув происходит с нижней стенки (рисунок 1).

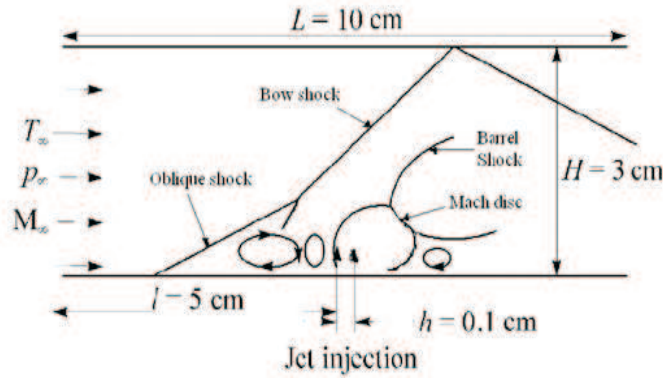


Рисунок 1 – Схема течения.

Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система двумерных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентных газов [8]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + P) u \\ \rho u Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P) w \\ \rho w Y_k \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + u\tau_{xz} - q_x \\ J_{kx} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \\ w\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z \\ J_{kz} \end{pmatrix},$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^N Y_k = 1, \quad (2)$$

$$E_t = \frac{\rho h}{\gamma_\infty M_\infty^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^N Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = C_{pk}/W, \quad C_{pk} = \sum_{i=1}^5 a_{ki} \bar{T}^{i-1}, \quad a_{jk} = a_{jk} T_\infty^{j-1}, \quad (3)$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{zk},$$

$$J_{kx} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{kz} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях; в качестве определяющих параметров приняты параметры потока воздуха $(\rho_\infty, u_\infty, w_\infty, T_\infty, h_\infty, W_\infty, R_\infty,)$, давление (p) и полная энергия (E_t) отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, удельная энтальпия (h_k) – к $R_0 T_\infty / W_\infty$, молярные удельные теплоемкости (C_{pk}) – к R_0 ; характерным параметром длины является ширина щели. Величина Y_k – массовая концентрация k -й компоненты, индекс массовой концентрации $k = 1, N$, W_k – молекулярный вес k -й компоненты, $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ – тензоры вязких напряжений, q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} – тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика), $\mu = \mu_l + \mu_t$ – коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкостей. Для определения μ_t используется модель Болдуина-Ломакса.

НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На входе

$$p = p_\infty, T = T_\infty, u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, w = 0, Y_k = Y_{k\infty}, \quad x = 0, 0 \leq z \leq H;$$

во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, при этом скорость и температура аппроксимируются степенным законом.

На щели

$$p = np_\infty, T = T_0, w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, u = 0, Y_k = Y_{k0}, \quad z = 0, L_b \leq z \leq L_b + h$$

($n = p_0/p_\infty$ – степень нерасчетности, p_0, p_∞ – давление в струе и в потоке, M_0, M_∞ – числа Маха струи и потока ($0, \infty$ относятся к параметрам струи и потока); на нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции, на верхней границе – условие симметрии, на выходной границе задаются условия неотражения [9]).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Численное решение уравнения (1) представляется в двух этапах. На первом этапе вычисляются газодинамические параметры и на втором – массовые концентрации. Аппроксимация конвективных членов представляется ENO-схемой третьего порядка точности. ENO-схема строится на основе метода Годунова, где кусочно-постоянная полиномиальная функция определяется полиномом Ньютона третьей степени. Для аппроксимации диффузионных членов приняты центрально-разностные схемы второго порядка точности. Для системы конечно-разностных уравнений был использован неявный алгоритм решения. Уравнения Навье-Стокса для компонент вычисляются скалярной прогонкой с использованием ENO-схемы.

Для неявного алгоритма требуется знание матриц Якоби векторов потоков, где необходимо вычислить частные производные от давления по всем независимым переменным. Точное вычисление этих производных в случае термически совершенного газа с неравновесными химическими реакциями представляет собой сложную задачу. Данная проблема связана

с явным представлением давления через неизвестные переменные. Здесь давление определяется введением параметра эффективной адиабаты газовой смеси [7]

$$\bar{\gamma} = \frac{h_{sm}}{e_{sm}}, \quad (4)$$

где $h_{sm} = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T_0}^T c_{p_i} dT$ и $e_{sm} = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T_0}^T c_{v_i} dT$ есть энтальпия и внутренняя энергия смеси за минусом образования тепла и энергии; $T_0 = 293K$ – стандартная температура образования, которая позволяет записать выражение для давления:

$$p = (\bar{\gamma} - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) - \rho \frac{h_0}{\gamma_\infty M_\infty^2} \right] + \frac{\rho T_0}{M_\infty^2 W}.$$

Температура вычисляется итерационно с использованием формулы Ньютона-Рафсона [9].

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Существуют два метода представления термодинамических и термохимических данных. В первом из них табличные значения необходимых термодинамических параметров даются через определенный интервал температур, а искомые значения вычисляются посредством интерполяции (интерполяционная схема). Однако, этот метод требует обработки больших массивов данных, трудоемких алгоритмов и больших объемов памяти. Кроме того, он не позволяет выйти за пределы затабулированного температурного интервала. Поэтому чаще используется второй метод, суть которого заключается в представлении термодинамических характеристик веществ в виде полиномов по степеням температуры.

Удельная теплоемкость при постоянном давлении представляется в виде полинома N -го порядка по температуре:

$$\frac{C_{pk}}{R} = \sum_{j=1}^N a_{jk} T^{(j-1)}. \quad (5)$$

Энтальпия и энтропия согласно первому закону термодинамики определяются из удельной теплоемкости при постоянном давлении интегральными соотношениями. Энтальпия вычисляется по формуле:

$$H_k = \int_0^T C_{p_k} dT,$$

так что

$$\frac{H_k}{RT} = \sum_{j=1}^N \frac{a_{jk} T^{(j-1)}}{j} + \frac{a_{N+1,k}}{T}, \quad (6)$$

где константа интегрирования $a_{N+1,k}R$ есть стандартная теплота образования при 298 К.

Энтропия определяется с использованием следующей интегральной формулы:

$$S_k = \int_0^T \frac{C_{p_k}}{T} dT,$$

так что

$$\frac{S_k}{R} = a_{1k} \ln(T) + \sum_{j=2}^N \frac{a_{jk} T^{(j-1)}}{(j-1)} + a_{N+2,k}, \quad (7)$$

где константа интегрирования $a_{N+2,k}R$ определяется из знания энтропии при стандартном состоянии 298 К.

В представленных полиномах N может быть произвольного порядка. В данной работе молярные теплоемкости представляются в виде полинома четвертого порядка, т.е. выбор порядка $N = 5$ обусловлен тем, что в работе Chemkin II [1] данные зависимости удельных теплоемкостей от температуры представлены в виде полинома четвертого порядка для интервала температур $300 < T < 5000$; здесь диапазон температуры дополняется для $0 < T < 300$. Полиномы в раскрытом виде представляются следующим образом:

$$\frac{C_p}{R} = a_{1k} + a_{2k}T + a_{3k}T^2 + a_{4k}T^3 + a_{5k}T^4,$$

$$\frac{H_k}{RT} = a_{1k} + \frac{a_{2k}}{2}T + \frac{a_{3k}}{3}T^2 + \frac{a_{4k}}{4}T^3 + \frac{a_{5k}}{5}T^4 + \frac{a_{6k}}{T}, \quad (8)$$

$$\frac{S_k}{R} = a_{1k} \ln(T) + a_{2k}T + \frac{a_{3k}}{2}T^2 + \frac{a_{4k}}{3}T^3 + \frac{a_{5k}}{4}T^4 + a_{7k}.$$

Другие термодинамические характеристики такие, как внутренняя энергия, энергия Гиббса и Гельмгольца, определяются из C_p , H и S . К примеру, удельная теплоемкость при постоянном объеме C_v вычисляется по формуле Майера:

$$C_v = C_p - R.$$

Для определения коэффициентов полиномов (8) a_{1k}, \dots, a_{7k} (где k – количество компонент газовой смеси) осуществляется построение системы линейных алгебраических уравнений, где значения удельной теплоемкости при постоянном давлении 1 атм принимаются из экспериментов в интервале температур $T < 300$. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом LU декомпозиции с использованием пакета прикладных программ Maple 11. В таблицах 1, 2 приведены полученные значения коэффициентов a_{1k}, \dots, a_{7k} в интервале температур $T < 300$ для H_2 , O_2 , N_2 и He .

На рисунке 2 приведено сравнение результатов, полученных с помощью построенного полинома, с экспериментальными данными для удельной теплоемкости при постоянном давлении. Сравнения по H_2 , O_2 , N_2 и He показывают точное согласование результатов.

На рисунках 3-6 приведены графические представления термодинамических характеристик для интервала температур $T < 300$ К для случаев водорода H_2 , кислорода O_2 , азота N_2 и гелия He .

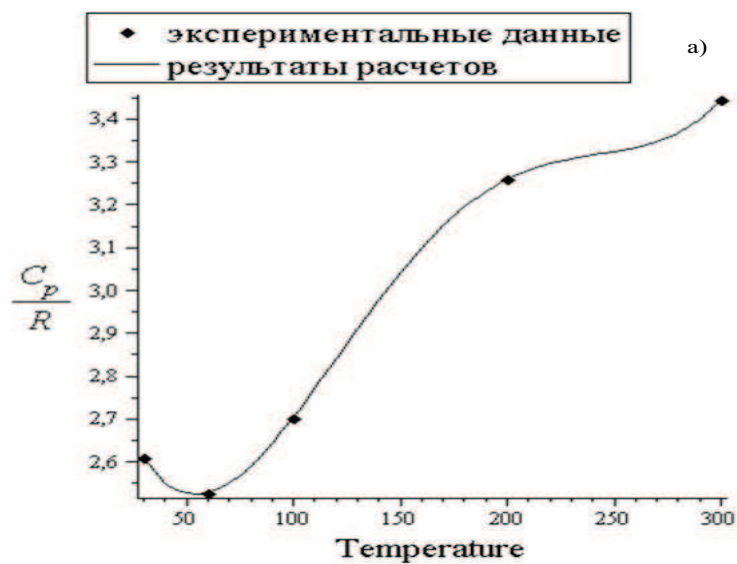


Рисунок 2 – Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для удельной теплоемкости при постоянном давлении для а) H_2 .

Таблица 1 – Значения коэффициентов полинома в интервале температур $T < 300$ К для H_2 и O_2

| | H_2 | O_2 |
|----------|-----------------|-----------------|
| a_{1k} | 0.30351933E+01 | 0.40915187E+01 |
| a_{2k} | -0.21771706E-01 | -0.88389973E-02 |
| a_{3k} | 0.28737433E-03 | 0.52354326E-04 |
| a_{4k} | -0.11919548E-05 | -0.14243799E-06 |
| a_{5k} | 0.16372325E-08 | 0.15291835E-09 |
| a_{6k} | -0.89230540E+03 | -0.10796833E+04 |
| a_{7k} | -0.56284830E+00 | 0.26320417E+01 |

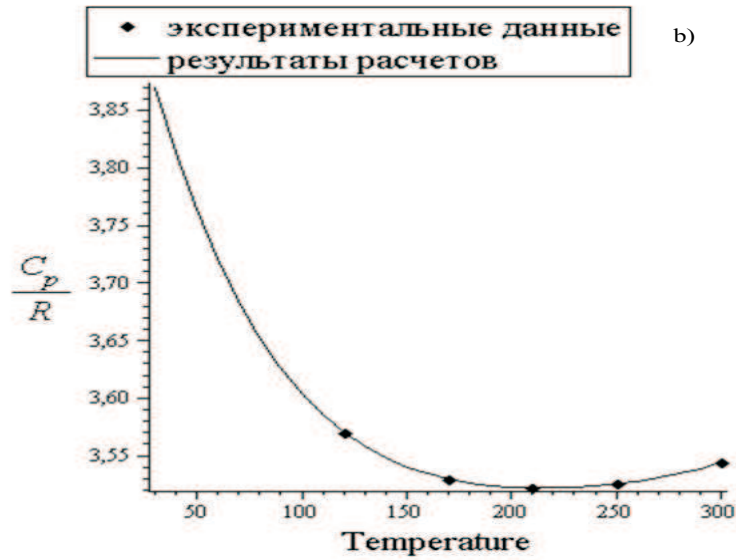


Рисунок 2 (продолжение) – Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для удельной теплоемкости при постоянном давлении для б) O_2 .

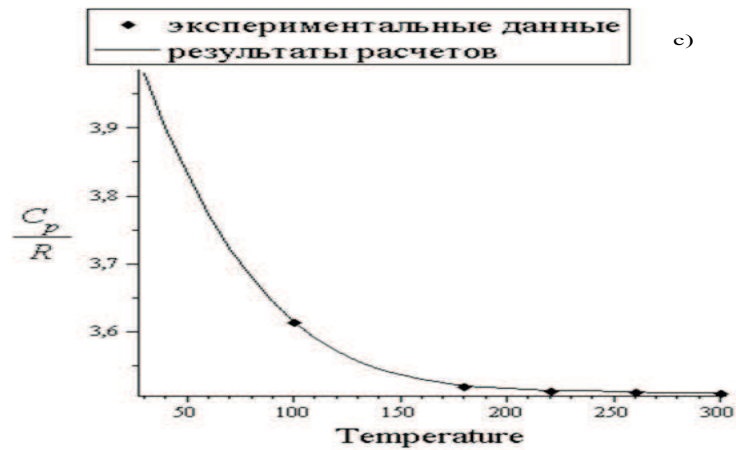


Рисунок 2 (продолжение) – Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для удельной теплоемкости при постоянном давлении для с) N_2 .

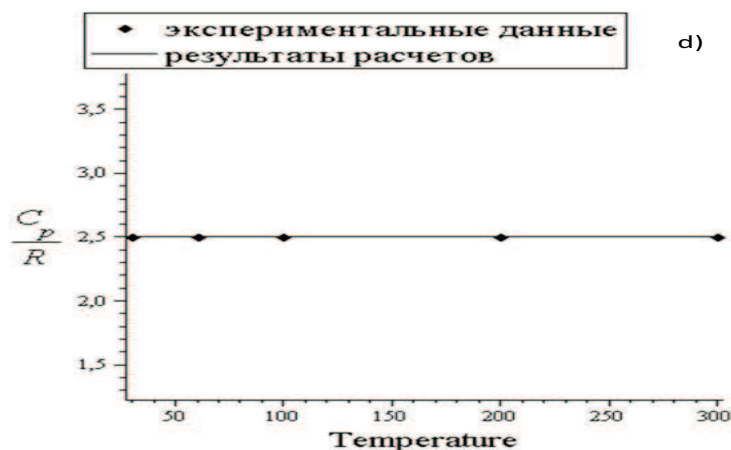


Рисунок 2 (продолжение) – Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными для удельной теплоемкости при постоянном давлении для d) He .

Таблица 2 – Значения коэффициентов полинома в интервале температур $T < 300$ К для N_2 и He

| | N_2 | He |
|----------|-----------------|-----------------|
| a_{1k} | 0.42963076E+01 | 0.25000000E+01 |
| a_{2k} | -0.12671067E-01 | 0.00000000E+00 |
| a_{3k} | 0.77738446E-04 | 0.00000000E+00 |
| a_{4k} | -0.21329707E-06 | 0.00000000E+00 |
| a_{5k} | 0.21950566E-09 | 0.00000000E+00 |
| a_{6k} | -0.10860728E+04 | -0.74537500E+03 |
| a_{7k} | 0.19739738E+01 | 0.91534883E+00 |

Параметры струи и потока следующие: $M_0 = 1$, $T_0 = 217$ К, $p_0 = 1.24$ МПа, $M_{infty} = 2.9$, $T_{infty} = 108$ К, $p_{infty} = 0.0663$ МПа, $n = 18.7$. Высота канала 7,62 см, длина – 25,4 см, ширина струи – 0,0559 см. Струя расположена на расстоянии 17,8 см от входного участка. Данная конфигурация соответствует экспериментальной работе Крамера и Роджерса с поперечным вдувом гелия [7].

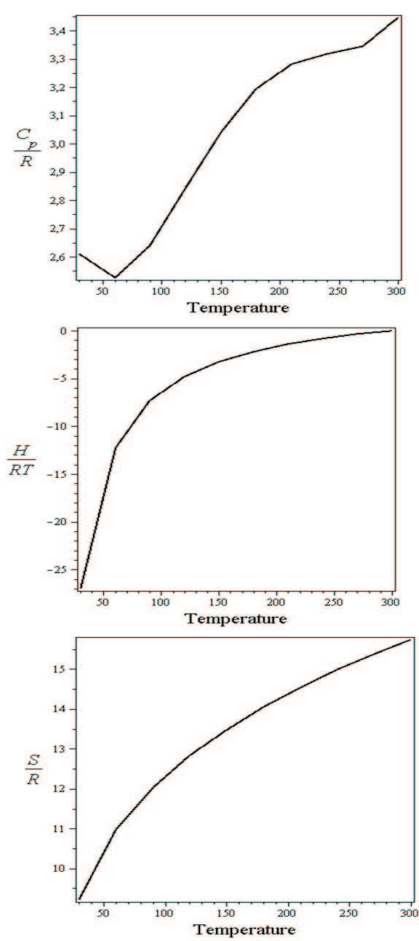
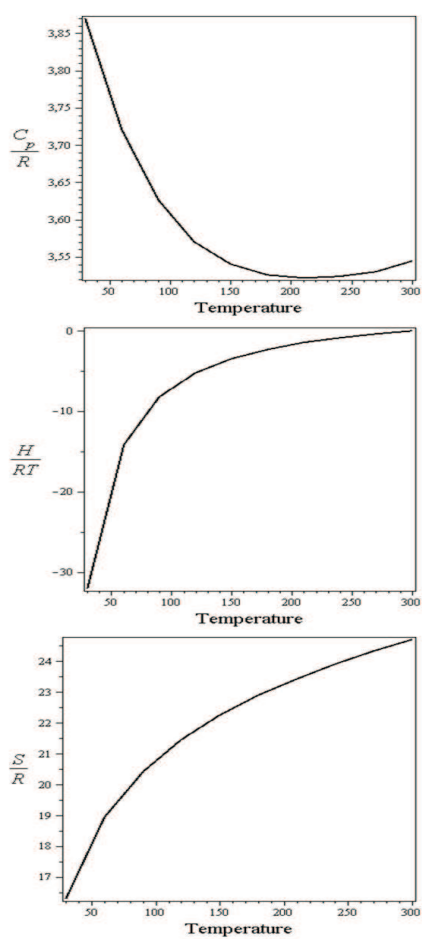


Рисунок 3 – Термодинамические характеристики для H_2 .

Рисунок 4 – Термодинамические характеристики для O_2 .

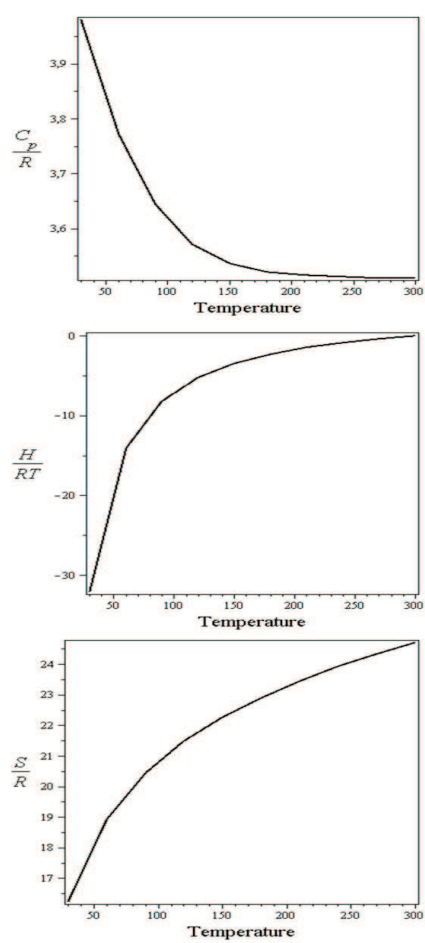
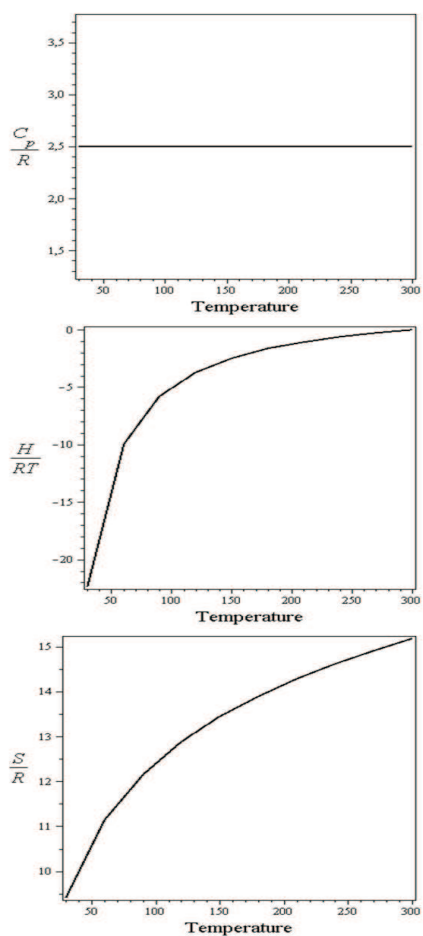
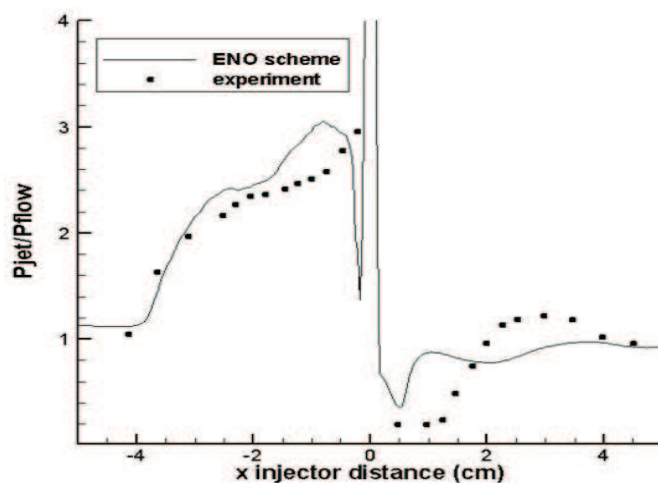


Рисунок 5 – Термодинамические характеристики для N_2 .

Рисунок 6 – Термодинамические характеристики для *He*.



- – экспериментальные данные Крамера и Роджерса [7]
- – результаты расчетов по ENO схеме

Рисунок 7 – Распределение давления на стенке.

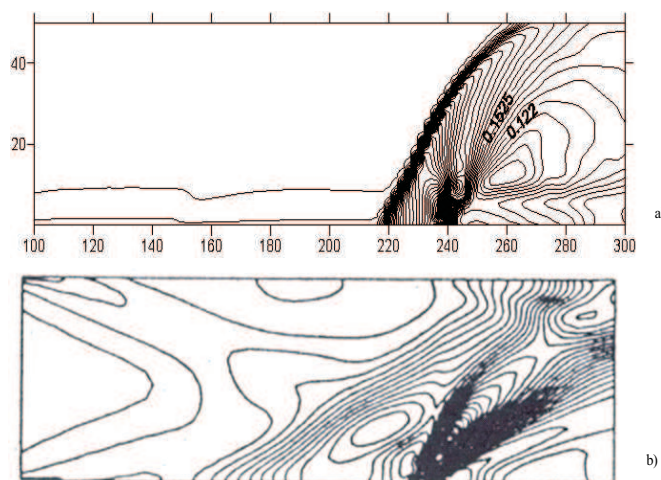
АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

С использованием построенной полиномиальной зависимости от температуры для удельной теплоемкости в интервале температур $T < 300\text{K}$ численно моделируется задача взаимодействия сверхзвукового потока воздуха ($T = 108\text{ K}$) с поперечно вдуваемой струей гелия ($T = 217\text{ K}$).

На рисунке 7 представлен график сравнения распределения давления на стенке с экспериментальными данными Крамера и Роджерса [7].

Численный эксперимент с использованием ENO-схемы показывает хорошее согласование результатов расчетов с экспериментальными данными Крамера и Роджерса [7] перед струей и за ней.

На рисунке 8 представлена ударно-волновая структура течения: а) результаты расчета авторов с использованием ENO-схемы третьего порядка точности и б) результаты расчетов Шунь и Юнь [7]. Физика образования системы ударных волн в данном потоке такова: вследствие торможения набегающего потока давление перед струей повышается и образуется головной скачок уплотнения; от головного скачка уплотнения вверх по потоку отходит косой скачок уплотнения; за косым скачком уплотнения, кроме



а) – результаты счета авторов по ENO схеме

б) – результаты счета Шунь и Юнь [7]

Рисунок 8 – Распределение изобар при поперечном вдуве He.

отрывной области, существует участок сверхзвуковой зоны; последующее торможение потока сопровождается появлением второго скачка, замыкающего скачка, параллельного оси струи. Отошедший головной скачок, косой и замыкающий скачки уплотнения, пересекаясь в одной точке, формируют сложную λ -образную систему скачков уплотнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определены термодинамические параметры, включающие в себя энтальпию, энтропию и удельную теплоемкость, при постоянном давлении в интервале температур $T < 300$ К с помощью полинома четвертой степени по температуре. С использованием полученных данных численно решена задача сверхзвукового потока воздуха ($T = 108$ К) с поперечным вдувом струи гелия ($T = 217$ К). Получено хорошее согласование численных результатов с экспериментальными данными Крамера и Роджерса [7] по распределению давления на стенке перед струей и за ней, также по изобарам.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что коэффициенты полиномов для термодинамических характеристик в интервале температур

$T < 300$ К позволяют численно моделировать задачи газовой динамики с большим диапазоном параметров. Используемая в работе математическая модель и численный алгоритм, основанный на ENO-схеме третьего порядка точности, позволяют моделировать горение в сверхзвуковом потоке при больших температурных режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1 Robert J. Kee, Fran M. Rupley and James A. Miller Chemkin II: A Fortran chemical kinetics package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // Sandia National Laboratories, Livermore CA 94551.

2 Скассия, Кеннеди. Расчет двумерных химически реагирующих течений // Расчетная техника и космонавтика. – 1974. – Т. 12, № 9. – С. 130-136.

3 Роджерс Р.К., Чайнитц У. Использование глобальной модели окисления водорода в воздухе для расчетов турбулентных течений с химическими реакциями // Аэрокосмическая техника стр. 77-85.

4 Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р. Горение (физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ). – Москва: ФизМатЛит, 2003. – 351 с.

5 Spaid F.W., Zukoski E.E. A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows // AIAA Journal. – 1968. – P. 205-212.

6 Gerlinger P., Algermissen J. and Bruggemann D. Numerical simulation of mixing for turbulent slot injection // AIAA Journal. – 1996. – V. 34, № 1. – P. 73-78.

7 Шунь Дж.Ш., Юнь С. Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосмическая техника. – 1990. – С. 102-113.

8 Belyayev Ye., Naimanova A. Two-Dimensional Supersonic Flow with Perpendicular Injection of the Gas. Chapter 2 in Book "Advanced Methods in Practical Application in Fluid Mechanics", March 2012, Rijeka, Croatia. <http://www.intechopen.com/books/advanced-methods-for->

practical-applications-in-fluid-mechanics/two-dimensional-supersonic-flow-with-perpendicular-injection-of-the-gas.

9 Beketaeva A.O., Naimanova A.Zh. Numerical simulation of a supersonic flow with transverse injection of jets // J. of Applied Mechanics and Technical physics. – 2004. – V. 45, № 3. – P. 367-374.

Статья поступила в редакцию 11.02.13

Беляев Е.К., Калтаев А., Найманова А.Ж. $T < 300$ К ТЕМПЕРАТУРАЛАР ИНТЕРВАЛЫНДА ДЫБЫС ЖЫЛДАМДЫГЫНАН ЖОҒАРЫ АҒЫНДАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ.

Осы жұмыста ағынның энтальпия, энтропия және қысым тұрақты болғандағы меншікті жылу сыйымдылығы сияқты термодинамикалық қасиеттері $T < 300$ К температуралар интервалында температура бойынша төртінші ретті полиноммен анықталған. Полиномның жеті коэффициенті алынған және олар LU декомпозиция әдісімен Maple 11 қолданбалы бағдарламасымен анықталған. Алынған нәтижелерге сүйене отырып, дыбыс жылдамдығынан жоғары ауа ағынының ($T = 108$ К) көлденең бағыттағы гелий ағыншасы ($T = 217$ К) есебі сандық түрде шешілген. Сандық түрде шешу алгоритмі үшінші ретті дәлдікпен аппроксимациялайтын ENO-схемасына негізделген. Турбуленттілік тұтқырлығы Болдуин-Ломакс моделі көмегімен анықталады.

Belyayev Ye., Kaltayev A., Naimanova A. MODELLING OF SUPERSONIC FLOWS IN THE TEMPERATURE RANGE $T < 300$ K

In this paper thermodynamic properties such as enthalpy, entropy and specific heat at constant pressure for the temperature range $T < 300$ K are determined by fourth degree polynomial in temperature. Seven coefficients of polynomial which are defined by the LU decomposition on the basis of Maple 11 application package are selected. By using obtained results the interaction of supersonic air flow with transverse injection of the helium jet are numerically studied. Numerical solution algorithm is based on the ENO-scheme of the third order. The turbulent viscosity is determined with the help of the model of Baldwin-Lomax.

УДК 517.956.6

Н.А. ЕСИРКЕГЕНОВ, М.А. САДЫБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: makhmud-s@mail.ru

**КРИТЕРИЙ СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В L_2 ЗАДАЧИ
НЕЙМАНА–ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ**

Доказан критерий сильной разрешимости задачи Неймана-Трикоми в пространстве L_2 . Показано, что сильная разрешимость задачи зависит только от одного угла подхода эллиптической части границы к линии изменения типа. При этом задача Неймана-Трикоми в классической области, когда эллиптическая часть области совпадает с полукругом, не является сильно разрешимой в L_2 .

Ключевые слова: *уравнение Лаврентьева-Бицадзе, задача Неймана-Трикоми, сильное решение.*

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset R^2$ – конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой σ , а при $y < 0$ – характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv -sgny u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \quad (1)$$

ЗАДАЧА НЕЙМАНА–ТРИКОМИ. *Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = 0, \quad (2)$$

© Н.А. Есиркегенов, М.А. Садыбеков, 2013.

Keywords: *Lavrent'ev-Bitsadze equation, Neumann-Tricomi problem, strong solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35B05, 35D05

$$u|_{AC} = 0, \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к σ .

Пусть W – множество функций $u \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих (2)–(3). Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют *сильным решением* задачи Неймана-Трикоми (1)–(3), если существует последовательность $u_n \in W$ такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

Существование и единственность регулярного решения задачи (1)–(3) доказаны А.В. Бицадзе [1, с. 34–37]. В [2] исследована полнота собственных функций задачи Неймана-Трикоми. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми (где вместо условия (2) задается условие $u|_{\sigma} = 0$) в случае симметричного контура $\sigma : (2x - 1)^2 + 4(y + \delta)^2 = 1 + 4\delta^2$ получен в [3–4], а в случае общего контура – в [5].

Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$. Предположим, что σ – кривая Ляпунова и оканчивается сколь угодно малой длины прямолинейными отрезками или дугами некоторых окружностей, обращенных вогнутостью к области Ω_1 . Внутренние по отношению к Ω_1 углы в точках A и B обозначим α и β соответственно.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ $\nu(x) = u_y(x, 0)$ И $\tau(x) = u(x, 0)$

Через $\vartheta(x, y)$ обозначим такое решение уравнения (1) в Ω_1 , что $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}|_{\sigma} = 0$ и $\vartheta \in W_2^2(\Omega_1)$ для всех $f \in L_2(\Omega_1)$. Существование такой функции нетрудно обосновать. Тогда любое решение уравнения (1) из класса W представимо в виде

$$u(x, y) = \begin{cases} \vartheta(x, y) - \int_0^1 G(z, t)\mu(t)dt, & z = x + iy, y > 0; \\ \int_0^{\xi} \nu(t)dt + \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 \int_0^{\xi} f_1(\xi_1, \eta_1)d\xi_1 + 2 \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} f_1(\xi_1, \eta_1)d\xi_1, & y < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\xi = x + y, \eta = x - y; 4f_1(\xi, \eta) = f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}), \nu(x) = u_y(x, 0); G(z, t)$ – функция Грина задачи Неймана в Ω_1 для уравнения Пуассона.

Из (4), пользуясь условием неразрывности решения $u \in W$ при $y = 0$, относительно функций $\mu(x), \nu(x)$ и $\tau(x) = u(x, 0)$ получаем систему

$$\nu(x) = \vartheta_y(x, 0) + \mu(x), \quad \tau'(x) = F_2(x) + \nu(x), \quad (5)$$

$$\mu(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) \mu(t) dt = \Phi(x), \quad (6)$$

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad F_1(x) = [\vartheta_x - \vartheta_y](x, 0), \quad F_2(x) = 2 \int_0^x f_1(t, x) dt. \quad (7)$$

Пусть $w = \omega(z)$ – конформное отображение области Ω_1 на полукруг $|2w - 1| < 1, \operatorname{Im} w > 0$, при котором отрезок AB переходит в себя, $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$. В силу условий, наложенных на σ , для функции $\omega(x)$ в некоторых полных ε -окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ имеет место представление [6, с. 41]:

$$\omega^{(j)}(x) = \begin{cases} x^{\frac{\pi}{2\alpha} - j} \omega_{j0}(x), & |x| < \varepsilon, \\ (1 - j) - (1 - x)^{\frac{\pi}{2\beta} - j} \omega_{j1}(x), & |1 - x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (8)$$

где $\omega_{ji}(x)$ – функции из класса Гельдера и $\omega_{ji}(i) \neq 0$, $i, j = 0, 1$.

Используя $\omega(z)$, легко можно получить вид функции Грина задачи Неймана в Ω_1 [6]:

$$G(z, t) = \frac{1}{\pi} \left[\ln |\omega(z) - \omega(t)| + \ln |\omega(z) + \omega(t) - 2\omega(z)\omega(t)| \right] + C. \quad (9)$$

Производя в (6) замену переменных: $\omega(x) = x_1$, $\omega(t) = t_1$, получаем интегральное уравнение

$$\mu_1(x_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{1}{t_1 - x_1} - \frac{1 - 2t_1}{x_1 + t_1 - 2x_1 t_1} \right] \mu_1(t) dt = \Phi_1(x_1), \quad \begin{cases} \mu_1(\omega(x)) = \mu(x), \\ \Phi_1(\omega(x)) = \Phi(x). \end{cases} \quad (10)$$

Решение этого уравнения выписывается в явном виде [7, с. 10]. Производя обратную замену переменных, получаем

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \Phi(x) - \frac{1}{2} S\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Phi(x), \quad (11)$$

где через $S(a, b)$ обозначен сингулярный интегральный оператор

$$S(a, b)\varphi(x) = \int_0^1 \left[\frac{\omega(x)}{\omega(t)} \right]^a \left[\frac{1 - \omega(x)}{1 - \omega(t)} \right]^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Используя указанную замену переменных, из [7, с. 99] получаем следующий критерий ограниченности в $L_2(0, 1)$ оператора $S(a, b)$.

ЛЕММА 1. Оператор $S(a, b)$ ограничен в $L_2(0, 1)$, если и только если

$$\frac{\alpha}{\pi} - 1 < a < \frac{\alpha}{\pi} + 1, \quad \frac{\beta}{\pi} - 1 < b < \frac{\beta}{\pi} + 1.$$

Отсюда, с учетом (8) и (11), получаем следующий результат.

ЛЕММА 2. Для всех углов $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ справедливо неравенство

$$\|\mu(x)\|_{L_2(0,1)} \leq C\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (12)$$

ЛЕММА 3. Функция $\Phi(x)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq C\|f\|_{L_2} \quad (13)$$

и, если $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2)$, то $\Phi(x) \in C^1[0, 1]$ и $[x(1-x)]^{\varepsilon-\frac{3}{2}}\Phi(x) \in L_2(0, 1) \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство для $F_2(x)$ получается непосредственным вычислением, а для $F_1(x)$ – использованием результата В.А. Кондратьева [8] и теорем вложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех углов $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ имеет место оценка

$$\|\nu(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq C\|f\|_{L_2} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (14)$$

Доказательство следует из формул (5), (12) и (13).

3 ВЫВОД АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ

ТЕОРЕМА 1. Сильное решение $u(x, y)$ задачи Неймана-Трикоми (1)-(3) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (15)$$

Доказательство. Применяя формулу Гаусса–Остроградского, получаем для всех $u \in W$

$$(Lu, u)_{L_2(\Omega_1)} = \|u_x\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|u_y\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \int_0^1 \nu(x)\overline{\tau(x)}dx. \quad (16)$$

Так как $\tau(0) = 0$, то $\tau(x) = \int_0^x \tau'(t) dt$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\nu(x)\tau(x)| dx &\leq \int_0^1 |\nu(x)| \left[\int_0^x |\tau'(t)| dt \right] dx \leq \\ &\leq \|\nu(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17), используя неравенство типа Фридрикса, по стандартной методике получаем

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}^2 \leq C\{\|f\|_{L_2}^2 + \|\nu(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)}^2\}. \quad (18)$$

Непосредственным вычислением из представления (4) находим

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_2)}^2 \leq C\{\|f\|_{L_2(\Omega_2)}^2 + \|(1-x)^{\frac{1}{2}}\nu(x)\|_{L_2(0,1)}^2\}. \quad (19)$$

Теперь на основании неравенств (18) и (19), принимая во внимание (14) и условия склеивания $u(x, y)$ на AB , получаем для сильного решения задачи (1)–(3) неравенство (15).

4 ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

ТЕОРЕМА 2. *Задача Неймана-Трикоми (1)–(3) сильно разрешима для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$, если и только если выполнены условия*

$$\alpha \leq \frac{\pi}{4}. \quad (20)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Задача Неймана-Трикоми в классической области, когда эллиптическая часть области совпадает с полукругом, не является сильно разрешимой в L_2 .*

Доказательство необходимости условий (20).

ЛЕММА 4. (Необходимое условие сильной разрешимости). *Существуют такие линейные функционалы A и B , определенные на линейном многообразии $C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2)$, что*

а) если $u \in W_2^2(\Omega)$ – решение задачи (1)–(3), то функция $f(x, y) = (Lu)(x, y)$ необходимо обладает свойством

$f \in \text{Ker } \bar{A}$ при $\alpha > \frac{\pi}{4}$, $f \in \text{Ker } \bar{B}$ при $\beta > \frac{3\pi}{4}$;

б) функционал A ограничен в $L_2(\Omega)$, если и только если $\alpha > \frac{\pi}{4}$;

в) функционал B неограничен в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Формулу (11) перепишем в виде

$$2\mu(x) = \Phi(x) - \omega'(x) \sqrt{\frac{1-\omega(x)}{\omega(x)}} \Phi_1(x), \quad (21)$$

где

$$\Phi_1(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{\omega(t)}{1-\omega(t)}} \frac{\partial G}{\partial \omega(x)}(x, t) \Phi(t) dt. \quad (22)$$

Из (8) имеем

$$\omega'(x) \sqrt{\frac{1-\omega(x)}{\omega(x)}} = \begin{cases} x^{\frac{\pi}{4\alpha}-1} \omega_0(x), & |x| < \varepsilon, \\ -(1-x)^{\frac{3\pi}{4\beta}-1} \omega_1(x), & |1-x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (23)$$

где $\omega_j(x)$ – функции класса Гельдера и $\omega_j(j) \neq 0$.

Так как $u \in W_2^2(\Omega)$, то из теорем вложения получаем, что $\nu(x) \in L_p(0, 1)$, $p < \infty$. Учитывая гладкость функций $\vartheta(x, y)$, из (5) заключаем, что необходимо $\mu(x) \in L_p(0, 1)$, $p < \infty$. Это означает, что $\mu(x)$ не может иметь особенностей степенного порядка в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Анализируя (23), получим из (21), что, если $u \in W_2^2(\Omega)$, то необходимо $\Phi_1(0) = 0$ при $\alpha > \frac{\pi}{4}$ и $\Phi_1(1) = 0$ при $\beta > \frac{3\pi}{4}$. Отсюда и из (22), с учетом (9), имеем

$$\int_0^1 \left[\frac{1-\omega(t)}{\omega(t)} \right]^{\frac{1}{2}} \Phi(t) dt = 0 \text{ при } \alpha > \frac{\pi}{4}, \quad (24)$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\omega(t)}{1-\omega(t)} \right]^{\frac{3}{2}} \Phi(t) dt = 0 \text{ при } \beta > \frac{3\pi}{4}. \quad (25)$$

Подставляя сюда значение $\Phi(t)$ из (7), получаем доказательство п. а) леммы 4.

Рассмотрим равенство (24). Так как $W_2^2(\Omega_1) \hookrightarrow W_p^1(0, 1)$, если и только если $p < \infty$, то из (7) нетрудно видеть, что оператор $A_1 : L_2(\Omega_1) \rightarrow L_p(0, 1)$, действующий по формуле $(A_1 f)(x) = F_1(x)$, ограничен, если и только если $p < \infty$. Поэтому функционал A_{11} , определенный на $L_2(\Omega_1)$ и действующий по закону

$$A_{11} f = \int_0^1 \left[\frac{1-\omega(t)}{\omega(t)} \right]^{1/2} (A_1 f)(t) dt,$$

ограничен, если и только если $[(1 - \omega(t))/\omega(t)]^{1/2} \in L_1(0, 1)$. А это в силу (8) эквивалентно условию $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

Обозначим через A_2 функционал, определенный на $L_2(\Omega_2)$ выражением

$$A_2 f = - \int_0^1 \left[\frac{1 - \omega(t)}{\omega(t)} \right]^{1/2} F_2(t) dt \equiv -2 \int_0^1 d\eta \int_0^\eta \left[\frac{1 - \omega(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{1/2} f_1(\xi, \eta) d\xi.$$

Как легко видеть, A_2 ограничен на $L_2(\Omega_2)$, если и только если $[(1 - \omega(\eta))/\omega(\eta)]^{1/2} \in L_2(\Omega_2)$, что в силу (8) эквивалентно условию $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

Формула (24) определяет ядро некоторого функционала $A : L_2(\Omega) \rightarrow C$, который является прямым произведением функционалов A_{11} и A_2 . Поэтому A ограничен, если и только если $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

Аналогично рассматривается функционал B , ядро которого задается равенством (25). Лемма 4 доказана.

В силу леммы 4 при нарушении условий (20) функционал A является ограниченным и, следовательно, его ядро – замкнутое, неплотное в $L_2(\Omega)$ многообразие, что противоречит определению сильной разрешимости задачи для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$. Необходимость условий (20) доказана.

Доказательство достаточности условий (20). Покажем, что при выполнении (20) существует плотное в $L_2(\Omega)$ линейное многообразие M такое, что для всех $f \in M$ решение задачи (1)–(3) будет принадлежать W . Пусть $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2)$. Из (4) и свойств решений уравнения Пуассона с учетом (5) имеем, что $u(x, y) \in W$, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\mu'(x)[1 - x]^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \in L_2(0, 1). \quad (26)$$

В силу леммы 3 $\Phi(x) \in C^1[0, 1]$. Поэтому из (11) получаем, что $\mu(x) \in C^1(0, 1)$, и для доказательства (26) достаточно показать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mu(x)x^{-1-\varepsilon}[1 - x]^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \in L_2(0, 1). \quad (27)$$

Таким образом, из (27) для $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2)$ будет следовать $u \in W$.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\alpha < \frac{\pi}{6}$, $\beta < \frac{3\pi}{4}$, $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2)$;

- 2) $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, $\beta < \frac{3\pi}{4}$, $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2) \cap \text{Ker} A$;
 3) $\alpha < \frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \pi$, $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2) \cap \text{Ker} B$;
 4) $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \beta \leq \pi$, $f \in C_0^1(\Omega_1) \cap C_0^1(\Omega_2) \cap \text{Ker} A \cap \text{Ker} B$.
 Тогда решение задачи (1)–(3) принадлежит классу W .

Доказательство. 1) Из лемм 2 и 3 сразу получаем (27), что и доказывает п. 1).

2) Так как $f \in \text{Ker} A$, то $\Phi_1(0) = 0$. Поэтому $\Phi_1(x) = \Phi_1(x) - \Phi_1(0)$. Тогда из (21) имеем

$$\Phi(x) - 2\mu(x) = M_1(x) + M_2(x), \quad (28)$$

где

$$M_1(x) = S\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\Phi(x);$$

$$M_2(x) = \frac{4\omega'(x)}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{\omega(x)}{\omega(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1-\omega(x)}{1-\omega(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega(t)(1-\omega(t))}{\omega(t) + \omega(x) - 2\omega(t)\omega(x)}\right] \Phi(t) dt.$$

Согласно лемме 1 и (8) получаем, что оценка

$$\|M_1(x)x^a(1-x)^b\|_{L_2(0,1)} \leq C\|\Phi(x)x^a(1-x)^b\|_{L_2(0,1)}$$

имеет место, если и только если $1/2 - 5\pi/4\alpha < a < 1/2 - \pi/4\alpha$ и $1/2 - 3\pi/4\beta < b < 1/2 + \pi/4\beta$. Значит, всегда можно выбрать $a < -1$, $b < -1/2$, что вместе с леммой 3 влечет за собой

$$M_1(x)x^{-1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \in L_2(0,1), \quad \varepsilon > 0. \quad (29)$$

Рассмотрим $M_2(x)$. Так как $0 \leq ([\omega(x)]^{1-\varepsilon}[\omega(t)]^\varepsilon(1-\omega(t)))/(\omega(t) + \omega(x) - 2\omega(t)\omega(x)) \leq 1$, то

$$|M_2(x)| \leq \frac{4}{\pi} |\omega'(x)| [\omega(x)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} [1-\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{|(2\omega(t)-1)\Phi(t)|}{(1-\omega(t))^{\frac{1}{2}}(\omega(t))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} dt,$$

где интеграл в правой части сходится в силу леммы 3. Отсюда с учетом (8) получаем, что всегда можно выбрать такие $a < -1$, $b < -1/2$, что $M_2(x)x^a(1-x)^b \in L_2(0,1)$. Последнее вместе с (28) и (29) дает (27), что и доказывает п. 2) леммы. Пункты 3) и 4) доказываются аналогично.

Обозначим через M линейное многообразие функций f , удовлетворяющих одному из условий 1) - 4) леммы 6. Тогда в силу п. б) леммы 4 множество M плотно в $L_2(\Omega)$. Поэтому для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность $f_n \in M$ такая, что $f_n \rightarrow f$ в $L_2(\Omega)$.

Обозначим через $u_n \in W$ решение задачи (1)–(3) для уравнения (1) с правой частью f_n . В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ последовательность f_n фундаментальна. Тогда неравенство (15) обеспечивает фундаментальность последовательности u_n в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Поэтому из полноты $W_2^1(\Omega)$ следует существование единственной функции $u \in W_2^1(\Omega)$ – предела последовательности u_n , которая и будет искомым сильным решением задачи Неймана–Трикоми. Доказательство теоремы 2 закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК (проект № 0743/ГФ).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1953. – Т. 41. – 60 с.
- 2 Моисеев Е.И., Могими М. О полноте собственных функций задачи Неймана-Трикоми для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1789-1791.
- 3 Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в L_2 // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 261, № 2. – С. 265-268.
- 4 Кальменов Т.Ш., Базарбеков А.Б. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в L_p // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 268-280.
- 5 Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А., Ержанов Н.Е. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Общий случай // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 870-875.
- 6 Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. – Казань, 1986.
- 7 Ержанов Н.Е., Садыбеков М.А. Критерий сильной разрешимости одного класса краевых задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в обла-

сти с отходом от характеристики. – Алма-Ата, 1992. – Деп. в КазНИИНКИ 04.02.92. № 3616.

8 Кондратьев В.А. О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений // Тр. Моск. мат. общества. – 1967. – Т. 16. – С. 293-318.

9 Фуфаев В.В. О конформных преобразованиях областей с углами и дифференциальных свойствах решений уравнения Пуассона в областях с углами // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 152, № 4. – С. 838-840.

10 Никольский С.М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных // УМН. – 1961. – Т. 16, № 5. – С. 63-114.

Статья поступила в редакцию 20.02.13

Есиркегенов Н.А., Садыбеков М.А. НЕЙМАН-ТРИКОМИ ЕСЕБІНІНІҢ ЛАВРЕНТЬЕВ-БИЦАДЗЕ ТЕНДЕУІ ҮШІН L_2 КЕҢІСТІГІНДЕГІ ӘЛДІ ШЕШІЛУ КРИТЕРИЙІ

Нейман-Трикоми есебінің L_2 кеңістігінде әлді шешілу критерийі дәлелденді. Есептің әлді шешілуі тек типтің өзгеру сызығына шекараның эллипстік бөлігіндегі бір бұрышқа ғана тәуелді екені көрсетілді. Нейман-Трикоми есебі классикалық облыста, яғни облыстың эллипстік бөлігі жарты дөңгелегімен беттескен жағдайда L_2 кеңістігінде әлді шешілу болмайды.

Esirkegenov N.A., Sadybekov M.A. STRONG SOLVABILITY CRITERION OF NEUMANN-TRICOMI PROBLEM IN L_2 FOR LAVRENT'EV-BITSADZE EQUATION

The strong solvability criterion of the Neumann-Tricomi problem in L_2 is proved. Here it is shown that strong solvability of the Neumann-Tricomi problem depends on only one angle of the approach of elliptic part of the bound to a changing type line. In addition, we show that Neumann-Tricomi problem is not strongly solvable in L_2 in the classical domain, when the elliptic part of the domain coincides with semi-circle.

УДК 517.5

А.М. ЖАНТАКБАЕВА, Е.Д. НУРСУЛТАНОВ

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: er-nurs@yandex.ru

О СУММИРУЕМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

В статье получены неравенства типа Харди-Литтлвуда-Стейна для усреднений типа Беллмана и обобщенных средних типа Харди коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца. Таким образом, доказаны оценки нормы снизу функции из пространства Лоренца, показывающие необходимые условия принадлежности функции пространству $L_{p,q}$. Введены пространства $\mathbf{n}_{p,q,\alpha}$ и $\mathbf{n}_{p,q}(\lambda)$, рассмотрены их интерполяционные свойства, которые используются для получения основных результатов данной работы.

Ключевые слова: ряды Фурье, коэффициенты Фурье, неравенство Харди-Литтлвуд-Стейна.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$. Множество всех измеримых 1-периодических функций определенных на $[0, 1]$, называется пространством Лоренца $L_{p,q}[0, 1]$, если конечны величины при $0 < q < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,q}[0,1]} = \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

© А.М. Жантакбаева, Е.Д. Нурсултанов, 2013.

Keywords: Lorentz space, Fourier coefficients, Hardy-Littlewood-Stein inequality

2010 Mathematics Subject Classification: 42B05, 42B08

при $q = \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]} = \sup_{0 \leq t \leq 1} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

Здесь $f^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x : |f(x)| > \sigma\} \leq t\}$ – невозрастающая перестановка функции $f(t)$.

Условимся обозначать через C постоянные, зависящие только от параметров $p, q, p_i, q_i, \alpha, \beta$, где $i = 0, 1$. Эти постоянные могут быть различными в разных случаях.

В работе изучается следующая задача: пусть для функции $f \in L_1[0; 1]$ соответствует ряд Фурье $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$ по тригонометрической системе; если $f \in L_{pq}$, то какими свойствами обладают ее коэффициенты Фурье.

Хорошо известно неравенство Харди-Литтлвуда: если $1 < p < 2$ и $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_{L_p[0,1]}. \quad (1)$$

Его аналог для пространства Лоренца доказан Стейном [1].

Если $1 < p < 2$, $0 < q \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0, 1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} (a_k^*)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}. \quad (2)$$

Отметим, что в случае $2 < p < \infty$ неравенства (1) и (2) не имеют места. В работе [2] была получена следующая

ТЕОРЕМА 1. Если $2 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,q}[0; 1]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} (\bar{a}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}, \quad (3)$$

при $q = \infty$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k \leq C \|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]}, \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{a}_k = \frac{1}{k} \left| \sum_{m=1}^k a_m \right|.$$

В работе доказаны теоремы, где показаны методы суммирования по средним типа Беллмана и по обобщенным средним. Например, если в качестве \bar{a}_k взять средние вида $\tilde{a}_k = \left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right|$, то неравенство типа (3) сохраняется для $1 < p < \infty$. Некоторые результаты были анонсированы в [3].

2 ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{n}_{p,q,\alpha}$ И $\mathbf{n}_{p,q}(\lambda)$

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > \frac{1}{p}$. Определим пространство

$$n_{p,q,\alpha} = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \|a\|_{n_{p,q,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p}} \tilde{a}_k(\alpha) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\};$$

при $q = \infty$,

$$\|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} = \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \tilde{a}_k(\alpha) < \infty,$$

где $\tilde{a}_k(\alpha) = \sup_{m \geq k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left| \sum_{s=m}^{\infty} \frac{a_s}{s^\alpha} \right|$, $\alpha > \frac{1}{p}$ для любого $k \in N$.

ЛЕММА 1. Если $0 < p < \infty$ и $0 < q \leq q_1 \leq \infty$, то

$$n_{p,q,\alpha} \hookrightarrow n_{p,q_1,\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $q_1 = \infty$, тогда из монотонности $\tilde{a}_k(\alpha)$ получим

$$\begin{aligned} \|a\|_{n_{p,\infty,\alpha}} &= \sup_{k \in N} k^{\frac{1}{p}} \tilde{a}_k(\alpha) = \sup_{k \in N} \left(k^{\frac{q}{p}} \tilde{a}_k^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \sim \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^k m^{\frac{q}{p}-1} \tilde{a}_m^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C \sup_{k \in N} \left(\sum_{m=1}^k m^{\frac{q}{p}-1} \tilde{a}_m^q(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|a\|_{n_{p,q,\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 < q \leq q_1 < \infty$, тогда

$$\|a\|_{n_{p,q_1,\alpha}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p} + \varepsilon - \varepsilon} \tilde{a}_k(\alpha) \right)^{q_1} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Учитывая

$$k^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \asymp c \left(\sum_{m=1}^k m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{q}}$$

и монотонность последовательности $\{\tilde{a}_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\|a\|_{n_p, q_1, \alpha} \leq c \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1} \left(\sum_{m=1}^k \tilde{a}_m^q m^{(\frac{1}{p}+\varepsilon)q} \frac{1}{m} \right)^{\frac{q_1}{q}} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|a\|_{n_p, q_1, \alpha} \leq C \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{q}{p}} \tilde{a}_m^q \frac{1}{m} m^{\varepsilon q} \left(\sum_{k=m}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1} \frac{1}{k} \right)^{\frac{q}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q}} = C \|a\|_{n_p, q, \alpha}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$, тогда

$$\|a\|_{n_p, q, \alpha} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\frac{k}{p}} \tilde{a}_{2^k}(\alpha) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Из монотонности $\tilde{a}_k(\alpha)$ имеем

$$(\ln 2)^{\frac{1}{q}} 2^{-\frac{1}{p}} 2^{\frac{k+1}{p}} \tilde{a}_{2^{k+1}}(\alpha) \leq \left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \left(m^{\frac{1}{p}} \tilde{a}_m(\alpha) \right)^q \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{q}} \leq (\ln 2)^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{k}{p}} \tilde{a}_{2^k}(\alpha).$$

Возведя неравенства в степень q и суммируя по k , получим требуемое утверждение.

Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств [4],

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1,$$

– функционал Петре, $0 < t < \infty$.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, a) < \infty \right\}.$$

ЛЕММА 3. Если $0 < p_0 < p_1 < \infty$ и параметры $0 < q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, то

$$(n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow n_{p, q, \alpha},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Доказательство. В силу вложения

$$n_{p_i, q_i, \alpha} \hookrightarrow n_{p_i, \infty, \alpha}, \quad i = 0, 1,$$

имеем

$$\|a_i\|_{n_{p_i, \infty, \alpha}} \leq C_i \|a_i\|_{n_{p_i, q_i, \alpha}}, \quad i = 0, 1,$$

тогда для $0 < t < \infty$

$$\begin{aligned} K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha}) &= \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{n_{p_0, \infty, \alpha}} + t\|a_1\|_{n_{p_1, \infty, \alpha}}) \leq \\ &\leq C \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{n_{p_0, q_0, \alpha}} + t\|a_1\|_{n_{p_1, q_1, \alpha}}) = K(t, a; n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha}), \\ &a \in n_{p_0, q_0, \alpha} + n_{p_1, q_1, \alpha}, \end{aligned}$$

и

$$\|a\|_{(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha}))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = C \|a\|_{(n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha})_{\theta, q}}.$$

Следовательно,

$$(n_{p_0, q_0, \alpha}, n_{p_1, q_1, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow (n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q}.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q} \hookrightarrow n_{p, q, \alpha}.$$

Пусть $k \in N$, $a_k = a_k^0 + a_k^1$ – некоторое произвольное представление элементов a_k последовательности $(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q}$, где $a_0 = \{a_k^0\}_{k \in N} \in n_{p_0, \infty, \alpha}$ и $\{a_1\} = \{a_k^1\}_{k \in N} \in n_{p_1, \infty, \alpha}$. Так как

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(\alpha) &= \sup_{m \geq k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left| \sum_{s=m}^\infty \frac{a_s}{s^\alpha} \right| \leq \sup_{m \geq k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left| \sum_{s=m}^\infty \frac{a_s^0}{s^\alpha} \right| + \sup_{m \geq k} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \left| \sum_{s=m}^\infty \frac{a_s^1}{s^\alpha} \right| = \\ &= \tilde{a}_k^0(\alpha) + \tilde{a}_k^1(\alpha), \end{aligned}$$

то, обозначив через $v(t) = t^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{v(t) \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s &\leq \sup_{s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s^0 + \sup_{v(t) \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1}} \tilde{a}_s^1 \leq \sup_{s \in N} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s^0 + t \sup_{s \in N} s^{\frac{1}{p_1}} \tilde{a}_s^1 = \\ &= \|a_0\|_{n_{p_0, \infty, \alpha}} + t \|a_1\|_{n_{p_1, \infty, \alpha}}. \end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $a = a_0 + a_1$, имеем

$$K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha}) \geq \sup_{v(t) \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha).$$

Поэтому при $0 < q \leq \infty$ будем иметь

$$\|a\|_{(n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{p_0, \infty, \alpha}, n_{p_1, \infty, \alpha})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t) \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сделаем замену $t = u^{\frac{p_1 - p_0}{p_0 p_1}}$ и, так как $p_0 < p_1$, то

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v(t) \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ & = \left(\int_0^\infty \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{u \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha) \right)^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ & = \left(\sum_{r=1}^\infty \int_{2^{r-1}-1}^{2^r-1} \left(u^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{u \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha) \right)^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ & \geq C \left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \sup_{2^r \geq s \geq 1} s^{\frac{1}{p_0}} \tilde{a}_s(\alpha) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ & \geq C \left(\sum_{r=1}^\infty \left(2^{-\theta r(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} 2^{\frac{r}{p_0}} \tilde{a}_{2^r}(\alpha) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_{n_{p,q,\alpha}}. \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\|a\|_{n_{p,q,\alpha}} \leq C \|a\|_{(n_{p_0,\infty,\alpha}, n_{p_1,\infty,\alpha})_{\theta,q}}.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > \frac{1}{p}$. Для последовательности $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что $\sum_{k=1}^m \lambda_k \neq 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$, определим пространство

$$n_{p,q}(\lambda) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^\infty : \|a\|_{n_{p,q}(\lambda)} = \left(\sum_{k=1}^\infty \left(k^{\frac{1}{p}} \bar{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

при $q = \infty$

$$\|a\|_{n_{p,\infty}(\lambda)} = \sup_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{p}} \bar{a}_k(\lambda) < \infty,$$

где

$$\bar{a}_k(\lambda) = \sup_{m \geq k} \frac{1}{\left| \sum_{s=1}^m \lambda_s \right|} \left| \sum_{s=1}^m \lambda_s a_s \right|.$$

Аналогично доказываются следующие леммы.

ЛЕММА 4. Если $q_1 > q$, то $n_{p,q}(\lambda) \hookrightarrow n_{p,q_1}(\lambda)$.

ЛЕММА 5. Пусть $0 < p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$, тогда

$$\|a\|_{n_{p,q}(\lambda)} \sim \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{k}{p}} \bar{a}_{2^k}(\lambda) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

ЛЕММА 6. Если $0 < p_0 < p_1 < \infty$ и параметры $0 < q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, то

$$(n_{p_0,q_0}(\lambda), n_{p_1,q_1}(\lambda))_{\theta q} \hookrightarrow n_{p,q}(\lambda),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

3 СУММИРУЕМОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ СРЕДНИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $L_{pq}[0; 1]$

ЛЕММА 7. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L_1[0; 1]$ и $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$, $x \in [0, 1]$, то

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} \leq c \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta a_m|.$$

В работе неравенства понимаются так: если правая сторона имеет смысл, то и левая сторона имеет смысл.

Доказательство. По соотношению двойственности

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} = \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x} g(x) dx = \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g}(k).$$

Рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g}(k)$. Учитывая, что коэффициенты Фурье $a_k \rightarrow 0$,
имеем $a_k = \sum_{m=k}^{\infty} \Delta a_m$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \widehat{g}(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \Delta a_m \right) \widehat{g}(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta a_m \sum_{k=1}^m \widehat{g}(k) \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |m \Delta a_m| \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{g}(k) \right| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta a_m| \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{p'}-1} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \widehat{g}(k) \right|. \end{aligned}$$

Используя (3) при $q = 1$, получим

$$\|f\|_{L_{p',\infty}} \leq C \sup_{\|g\|_{p,1}=1} \left\{ \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta a_m| \|g\|_{L_{p,1}} \right\} = C \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta a_m|.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leq \infty$ и $f \in L_{p,q}$,
 $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$. Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ удовлетворяет
условию при $\alpha > \frac{1}{p'}$:

$$\sup_{1 \leq m \leq k} m^{2-\alpha} |\lambda_m - \lambda_{m+1}| \leq D \frac{1}{k^\alpha} \left| \sum_{m=1}^k \lambda_m \right|,$$

где $D > 0$ – некоторая константа, независящая от индекса k . Тогда
имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{L_{p,q}[0,1]},$$

где $\bar{a}_k(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum_{m=1}^k \lambda_m \right|} \left| \sum_{m=1}^k \lambda_m a_m \right|$, $k \in \mathbb{N}$.

При $q = \infty$, $\sup_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k(\lambda) \leq c \|f\|_{L_{p,\infty}}$.

Доказательство. Оценим

$$\begin{aligned} \frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right|} \left| \sum_{m=1}^n \lambda_m a_m \right| &= \frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{m=1}^n \lambda_m \right|} \left| \sum_{m=1}^n \lambda_m \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| \left| \frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{m=1}^n \lambda_m \right|} \sum_{m=1}^n \lambda_m e^{-2\pi i m x} \right| dx. \end{aligned}$$

Положим $\frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{r=1}^n \lambda_r \right|} \sum_{m=1}^n \lambda_m e^{-2\pi i m x} = \Phi_n(x)$ и по неравенству Гельдера при $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ имеем

$$\|a(\lambda)\|_{l_{p',\infty}} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 |f(x)| |\Phi_n(x)| dx \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{L_{p,1}} \|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}}.$$

Оценим норму $\|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}}$. Коэффициенты Фурье этой функции равны

$$b_m(\Phi_n) = \begin{cases} \frac{n^{\frac{1}{p'}} \lambda_m}{\left| \sum_{r=1}^n \lambda_r \right|}, & \text{если } m \leq n; \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Из леммы 7 получим

$$\|\Phi_n\|_{L_{p',\infty}} \leq c \sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta b_m|.$$

Рассмотрим $I = m^{\frac{1}{p}} |m \Delta b_m|$.

Пусть $m \leq n$, тогда, используя условие теоремы, имеем

$$I = m^{\frac{1}{p}} (m \Delta b_m) = \frac{m^{\frac{1}{p}} m n^{\frac{1}{p'}} |\lambda_m - \lambda_{m+1}|}{\left| \sum_{r=1}^n \lambda_r \right|} \leq$$

$$\leq \frac{n^{\frac{1}{p'}} m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{r=1}^n \lambda_r \right|} \sup_{1 \leq k \leq n} k^{2-\alpha} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \leq \frac{n^{\frac{1}{p'}} m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{r=1}^n \lambda_r \right|} \frac{D}{n^\alpha} \left| \sum_{m=1}^n \lambda_m \right| = D \frac{m^{\alpha - \frac{1}{p'}}}{n^{\alpha - \frac{1}{p'}}} \leq D.$$

При $m > n$ $I = m^{\frac{1}{p}} |m \Delta b_m| = 0$.

Таким образом, имеем

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} m^{\frac{1}{p}} |m \Delta b_m| \leq D.$$

Следовательно,

$$\|\Phi_n\|_{p', \infty} \leq cD = C.$$

Итак, мы получили

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^{\frac{1}{p'}}}{\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right|} \left| \sum_{m=1}^n \lambda_m a_m \right| \leq C \|f\|_{L_{p,1}}.$$

Тогда верно неравенство

$$\|a\|_{n_{p', \infty}(\lambda)} \leq C \|f\|_{L_{p,1}}.$$

И, наконец, воспользуемся леммой 6 и интерполяционной теоремой Марцинкевича-Кальдерона [4]. Так как $\alpha > \frac{1}{p'}$, то найдутся p_0, p_1 , что $1 - \alpha < \frac{1}{p_1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_0}$, которые также удовлетворяют условию теоремы. Следовательно, найдется $\theta \in (0, 1)$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ и $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p'_0} + \frac{\theta}{p'_1}$. Из доказанного имеем

$$\|a\|_{n_{p'_0, \infty}(\lambda)} \leq C_0 \|f\|_{L_{p_0,1}}$$

и

$$\|a\|_{n_{p'_1, \infty}(\lambda)} \leq C_1 \|f\|_{L_{p_1,1}}.$$

Тогда

$$\|a\|_{n_{p', q}(\lambda)} \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|f\|_{L_{p,q}}$$

для любого $0 < q \leq \infty$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 \leq \beta < \frac{1}{p}$, $0 < q \leq \infty$ и $f \in L_{p,q}[0, 1]$. Тогда верно

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\beta - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{m^{\beta}} \right| \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

При $q = \infty$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{\beta - \frac{1}{p}} \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\beta}} \right| \leq c \|f\|_{L_{p,\infty}[0,1]}.$$

Доказательство. Пусть $\beta < 1/p$, тогда $1/p' < 1 - \beta$ и, следовательно найдется α , что $1/p' < \alpha < 1 - \beta$. Покажем, что $\lambda = \{\frac{1}{m^{\beta}}\}_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы-1 с параметром α . Действительно,

$$\sup_{1 \leq m \leq n} m^{2-\alpha} \left(\frac{1}{m^{\beta}} - \frac{1}{(m+1)^{\beta}} \right) \sim \sup_{1 \leq m \leq n} m^{1-\alpha-\beta} = n^{1-\alpha-\beta}.$$

Здесь учитывалось, что $1 - \alpha - \beta > 0$. С другой стороны,

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \left| \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{\beta}} \right| \sim n^{1-\alpha-\beta}.$$

Учитывая

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\beta - \frac{1}{p}} \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{m^{\beta}} \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}} \bar{a}_k(\lambda) \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}},$$

получим требуемое неравенство.

4 СУММИРУЕМОСТЬ УСРЕДНЕНИЙ ТИПА БЕЛЛМАНА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности из теоремы 1 имеем: если $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ и $f \in L_{p,p'}[0, 1]$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$, тогда верно

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k} \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|f\|_{L_{p,p'}[0,1]}.$$

Целью нашей работы является получение более общего неравенства.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $0 < q \leq \infty$. Если $f \in L_{p,q}[0, 1]$ и $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x}$, $\alpha > \frac{1}{p}$, тогда верно

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\alpha}} \right| \right)^q \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|f\|_{L_{p,q}[0,1]}.$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{\alpha - \frac{1}{p}} \left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\alpha}} \right| \right)^{p'} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left\| m^{\alpha-1} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\alpha}} \right\|_{l_{p'}}.$$

Используя теорему о двойственности для пространства l_p и меняя порядок суммирования, получим

$$\left\| m^{\alpha-1} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\alpha}} \right\|_{l_{p'}} = \sup_{\|b\|_{l_p}=1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-1} b_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\alpha}} = \sup_{\|b\|_{l_p}=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\alpha}} \sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m.$$

Рассмотрим конечную сумму $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^{\gamma}} \sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m$, где $\gamma : 0 < \alpha - \gamma < \frac{1}{p}$.

Применим преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^{\gamma}} \sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^{\gamma}} \sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m - \frac{1}{(k+1)^{\gamma}} \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} b_m \right) \times \\ &\times \sum_{r=1}^k \frac{a_r}{r^{\alpha-\gamma}} + \frac{1}{n^{\gamma}} \sum_{m=1}^n m^{\alpha-1} b_m \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{r^{\alpha-\gamma}}. \end{aligned}$$

Сумму $\sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m$ запишем следующим образом:

$$\sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m = \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} b_m - (k+1)^{\alpha-1} b_{k+1},$$

подставляя, получим

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{\alpha-\gamma}} \frac{1}{k^\gamma} \sum_{m=1}^k m^{\alpha-1} b_m \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k^\gamma} - \frac{1}{(k+1)^\gamma} \right| \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} |b_m| \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{k^\gamma} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{m=1}^n m^{\alpha-1} |b_m| \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Для оценки I_1 используем неравенство Гельдера, следствие 1 при $q = p'$ и обобщенное неравенство Харди:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{1-\beta}} \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{m^\beta} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \|b\|_p, \quad \beta < \frac{1}{p'}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1}{k^\gamma} - \frac{1}{(k+1)^\gamma} \right| \sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} |b_m| \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq \gamma \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^{k+1} m^{\alpha-1} |b_m| \right) \times \\ &\quad \times \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \frac{1}{k^{\gamma+1}} = \gamma \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^{k+1} \frac{|b_m|}{m^{1-\alpha}} \right) \left(k^{\alpha-\gamma-1} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \right) \leq \\ &\leq \gamma \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^{k+1} \frac{|b_m|}{m^{1-\alpha}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{\alpha-\gamma-1} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|b\|_{l_p} \|f\|_{L_{p,p'}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Также оценивается I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{k^\gamma} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| k^{\alpha-1-\gamma} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq \\ &\leq c \|b\|_{l_p} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{\alpha-\gamma-1} \left| \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|b\|_{l_p} \|f\|_{L_{p,p'}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Оценим I_3 . Используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{n^\gamma} \sum_{m=1}^n m^{\alpha-1} |b_m| \frac{1}{n^\gamma} \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq \|b\|_{l_p} \left(\sum_{m=1}^n m^{(\alpha-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \frac{1}{n^\gamma} \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq \\ &\leq c \|b\|_{l_p} n^{\alpha-1+\frac{1}{p'}} n^{-\gamma} \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right|. \end{aligned}$$

Из следствия 1 при $q = \infty$, учитывая, что пространство $L_{p,q}$ по второму параметру сужается, имеем

$$I_3 \leq c \|b\|_{l_p} \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{\alpha-\gamma-\frac{1}{p}} \left| \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s^{\alpha-\gamma}} \right| \leq c \|b\|_{l_p} \|f\|_{L_{p,\infty}} \leq c \|b\|_{l_p} \|f\|_{L_{p,p'}}. \quad (7)$$

Собирая оценки (5), (6), (7) и переходя к пределу, получим следующее неравенство:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(m^{\alpha-\frac{1}{p}} \left| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right| \right)^{p'} \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \|f\|_{L_{p,p'}}.$$

Тогда верно

$$\|a\|_{n_{p',p',\alpha}} \leq c \|f\|_{L_{p,p'}}.$$

Воспользуемся леммой 3 и интерполяционной теоремой Марцинкевича-Кальдерона [4]; аналогично доказательству теоремы 1 получим требуемое неравенство.

ЛИТЕРАТУРА

1 Stein Elias M. Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 83. – P. 482-492.

2 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. математика. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 93-122.

3 Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д. О суммируемости коэффициентов Фурье функций из пространства Лоренца // Вестник МГУ. Сер. матем., механика. – 2004. – № 2. – С. 64-66.

4 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. – Москва, 1980. – 261 с.

Статья поступила в редакцию 11.02.13

Жантакбаева А.М., Нурсултанов Е.Д. ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНДЕГІ
ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ ҚОСЫНДЫ-
ЛАНУЫ

Мақалада Лоренц кеңістігіндегі функциялардың Фурье коэффициенттерінің Беллман және жалпыланған Харди типті орталандыруларының Харди-Литтлвуд-Стейн типті теңсіздіктері алынған. Яғни функцияның $L_{p,q}$ кеңістігіне тиісті болуының қажетті шартын көрсететін функция нормасының төменгі бағалаулары дәлелденген. $\mathbf{n}_{p,q,\alpha}$ және $\mathbf{n}_{p,q}(\lambda)$ кеңістіктері енгізіліп, олардың интерполяциялық қасиеттері қарастырылған. Олар негізгі нәтижелерді дәлелдеуге қолданылды.

Zhantakbayeva A.M., Nursultanov E.D. ON SUMMABILITY OF
FOURIER COEFFICIENTS OF FUNCTIONS FROM LORENTZ SPACE

In this paper we obtain the estimates for Hardy-Littlewood-Stein inequalities with the averages of Bellman type, and generalized means of Hardy type of Fourier coefficients of functions from Lorentz space. Thus there are proved the estimates of norm of functions from Lorentz space, indicating necessary conditions of belonging of a function to the space $L_{p,q}$. The spaces $\mathbf{n}_{p,q,\alpha}$ and $\mathbf{n}_{p,q}(\lambda)$ are introduced, their interpolation properties, which are used for obtaining the main results of this work, are considered.

УДК 517.925.5:519.216

Г.Т. ИБРАЕВА, М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

Военный ин-т СВВ им. Т. Бегельдинова

030000, Актобе, пр. А. Молдагуловой, 16, e-mail: gulmira_ibraeva@mail.ru

Институт математики и математического моделирования МОН РК

050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: marat207@mail.ru

**ОБ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ
ДИФФУЗИЕЙ И С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ИЗ КЛАССА
ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ**

Методом квазиобращения получены необходимые и достаточные условия разрешимости основной по классификации А.С. Галиуллина обратной задачи в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями и вырождающейся относительно части переменных диффузией.

Ключевые слова: *обратная задача, стохастическое дифференциальное уравнение, интегральное многообразие.*

ВВЕДЕНИЕ

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1-7] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1]

© Г.Т. Ибраева, М.И. Тлеубергенов, 2013.

Keywords: *inverse problem, stochastic differential equation, integral manifold*

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2-7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ, метод квазиобращения, позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости, предложен в работе [7].

В работах [8-10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены: 1) *основная обратная задача динамики*: построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) *задача восстановления уравнений движения*: построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) *задача замыкания уравнений движения*: построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано множество

$$\Lambda(t) : \lambda(y, z, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(y, z, t) \in C_{yzt}^{121}. \quad (1)$$

Требуется построить уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y, z, t), \\ \dot{z} = f_2(y, z, t) + \sigma(y, z, t)\dot{\xi} \end{cases} \quad (2)$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием уравнения (2). Здесь $y \in R^l$, $z \in R^p$, $l + p = n$; $\xi \in R^k$, $\sigma(x, \dot{x}, t)$ – матрица размерности $(p \times k)$; $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ – система случайных процессов с

независимыми приращениями, которую, следуя [11], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(x)P^0(t, dx)$, ξ_0 – винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t, dx)$ – число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество dx ; $c(x)$ – векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t .

Будем говорить, что некоторая функция $g(y, z, t)$ из класса K , т.е. $g \in K$, если g непрерывна по t и липшицева по y и z в области

$$U_H(\Lambda) = \{x = (y, z) : \rho(x, \Lambda(t)) < H, \quad H > 0\}. \quad (3)$$

Предполагается, что вектор-функции f_1, f_2 и $(p \times k)$ -матрица σ из класса K , что обеспечивает в (3) существование и единственность стохастической эквивалентности решения $(y(t)^T, z(t)^T)^T$ уравнения (2) с начальным условием $(y(t_0)^T, z(t_0)^T)^T = (y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [11].

Поставленная задача

- 1) в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2-7];
- 2) обобщает рассмотренную в [8] задачу построения

$$\Lambda(t) : \quad \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C_{x\dot{x}t}^{121} \quad (1')$$

стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \quad (2')$$

по заданному множеству так, чтобы множество (1') было интегральным многообразием уравнения (2') со случайными возмущениями из класса винеровских процессов;

3) со случайными возмущениями из класса винеровских процессов исследована методом квазиобращения в [12];

4) иным методом, а именно: методом разделения решена в [13] в предположении, что случайные возмущения принадлежат классу винеровских процессов.

В данной работе стохастическая основная обратная задача, задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка

типа Ито по заданным свойствам движения, решается методом квазиобращения. В терминах коэффициентов получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия у построенного множества стохастических дифференциальных уравнений.

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [7], в основе которого лежит

ЛЕММА 1. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad v = (v_k), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}, \quad m \leq n, \quad (4)$$

где матрица H имеет ранг, равный m , определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu. \quad (5)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n , $v^\tau = (v_k^\tau)$, где

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad v^\nu = H^+g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T – матрица транспонированная к H .

Для решения поставленной задачи построения множества систем уравнений вида (2) по заданному интегральному многообразию (1) по правилу Ито дифференцирования сложной функции в случае процесса с независимыми приращениями [11, с. 201] вычислим дифференциал вектор-функции $\lambda = \lambda(y, z, t)$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + S_1 + S_2 + S_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma \dot{\xi}, \quad (6)$$

где $S_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : \sigma \sigma^T$, $S_2 = \int \{ \lambda(y, z + \sigma c(x), t) - \lambda(y, z, t) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma c(x) \} dx$, $S_3 = \int [\lambda(y, z + \sigma c(x), t) - \lambda(y, z, t)] P^0(t, dx)$, а под $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : D$, следуя [11], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y, z, t)$ вектора $\lambda(y, z, t)$ по компонентам z на матрицу D :

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : D = \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z \partial z} D \right) \\ \vdots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial^2 \lambda_m}{\partial z \partial z} D \right) \end{bmatrix}.$$

Введем далее произвольные типа Н.П.Еругина [1] m -мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$ -матрицу B , обладающие свойством $A(0, y, z, t) \equiv 0$, $B(0, y, z, t) \equiv 0$,

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, z, t) + B(\lambda, y, z, t) \dot{\xi}. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (6) и (7), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + S_1 + S_2 + S_3 = A, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma = B. \end{cases} \quad (8)$$

Если ввести вектор $x = (y^T, z^T)^T$ и обозначить через $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) f$ выражение

$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) f = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) f_1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) f_2$, то соотношения (8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) f = A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - S_1 - S_2 - S_3, \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) \sigma = B. \end{cases} \quad (9)$$

Из соотношений (9) по формуле (5) леммы 1 определим вектор-функцию f и матрицу σ в виде

$$f = s_1 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) C \right] + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) \right)^+ \left(A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - S_1 - S_2 - S_3 \right), \quad (10)$$

$$\sigma_i = s_2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) C \right] + \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) \right)^+ B_i, \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} C \right] = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n} \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^T$ – i -ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$ ($\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$); $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{mi})^T$ – i -ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ ($\mu = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, k}$).

Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы дифференциальное уравнение типа Ито (2) имело заданное интегральное многообразие (1), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f и матрица σ уравнения (2) имели соответственно вид (10) и (11).

2 СКАЛЯРНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ (стохастическая задача Еругина на плоскости с вырождающейся диффузией)

Пусть $\varphi \in R^1$ и интегральная кривая задана в виде

$$\Lambda(t) : \eta(x_1, x_2, t) = 0, \text{ где } \eta \in R^1, \quad (12)$$

по которой требуется построить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, t) + \gamma(x_1, x_2, t)\dot{\xi}, \end{cases} \quad (13)$$

где $\xi = \xi(t, \omega)$ – скалярный процесс с независимыми приращениями [11].

Задача заключается в определении скалярных функций $g_1(x_1, x_2, t)$, $g_2(x_1, x_2, t)$ и $\gamma(x_1, x_2, t)$ по заданной скалярной функции $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ так, чтобы множество (12) было интегральным многообразием уравнения (13).

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [11], в случае процесса с независимыми приращениями имеем

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} g_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma \dot{\xi} + \int \{ \eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \\ & - \eta(x_1, x_2, t) + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma c(\alpha) \} d\alpha + \int [\eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t)] P^0(t, d\alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a = a(\eta, x_1, x_2, t)$ и $b = b(\eta, x_1, x_2, t)$ такие, что $a(0, x_1, x_2, t) \equiv b(0, x_1, x_2, t) \equiv 0$ и имеет место равенство

$$\eta = a + b\dot{\xi}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следуют соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} g_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 + \int \{ \eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t) + \\ + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \gamma c(\alpha) \} d\alpha + \int [\eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t)] P^0(t, d\alpha) = a, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma = b. \end{array} \right. \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$D = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^T = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right), \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Df = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^T g = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} g_2$$

и систему (16) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} Df = a - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 - \int \{ \eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t) + \\ + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \gamma c(\alpha) \} d\alpha - \int [\eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t)] P^0(t, d\alpha), \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \gamma = b. \end{array} \right. \quad (17)$$

Из (17) в предположении, что $\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \neq 0$, и на основе формулы (5) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} g = s_1 [DC] + D^+ \left(a - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 - \int \{ \eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \gamma c(\alpha) \} d\alpha - \int [\eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t)] \dot{P}^0(t, d\alpha) \right), \\ \gamma = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^{-1} b. \end{array} \right.$$

По лемме 1

$$\begin{aligned}
 [DC] &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \vec{e}_1 - \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \vec{e}_2, \\
 D^+ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{pmatrix} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\left\{ \begin{aligned}
 g_1 &= s_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{-1} \left(a - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \gamma^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \int \{ \eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \gamma c(\alpha) \} d\alpha - \right. \\
 &\quad \left. - \int [\eta(x_1, x_2 + \gamma c(\alpha), t) - \eta(x_1, x_2, t)] P^0(t, d\alpha) \right), \\
 g_2 &= s_1 \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{-1}, \\
 \gamma &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^{-1} b.
 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Соотношения (18) представляют собой решение стохастической задачи Еругина с вырождающейся диффузией, задачи построения множества систем уравнений вида (13) по заданному интегральному многообразию (12).

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в общем и скалярном нелинейных случаях построены множества

стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией, обладающих заданным интегральным многообразием.

ЛИТЕРАТУРА

1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. 10, вып. 16. – С. 659-670.

2 Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения. – М., 1971. – 352 с.

3 Галиуллин А.С. Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. ХУІІ, № 8. – С. 1487-1489.

4 Галиуллин А.С. Об определении силовой функции по заданному интегралу уравнений движения // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. ХУІІІ, № 5. – С. 744-748.

5 Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М., 1986. – 224 с.

6 Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник РУДН. Сер. прикл. математика и информатика. – 1994. – № 1. – С. 5-21.

7 Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М., 1986. – 88 с.

8 Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Серия физ.-мат. – Алматы, 1998. – № 3. С. 55-61.

9 Тлеубергенов М.И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 5. – С. 714-716.

10 Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. – Алматы, 1999. – № 1. – С. 53-60.

11 Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М., 1990. – 632 с.

12 Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. Об основной обратной задаче дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией // Математический журнал. – Алматы, 2004. – Т. 4, № 4(14). – С. 86-92.

13 Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. О решении основной обратной задачи дифференциальных систем с вырождающейся диффузией методом разделения // Математический журнал. – Алматы, 2011. – Т. 11, № 2(40). – С. 37-41.

Статья поступила в редакцию 03.09.12

Ибраева Г.Т., Тлеубергенов М.И. ТӘУЕЛСІЗ ӨСІМШЕЛІ ҮРДІСТЕР КЛАСЫНАН ТҮРТКІЛЕРМЕН ЖӘНЕ АЗҒЫНДАҒАН ДИФФУЗИЯЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ НЕГІЗГІ КЕРІ ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Тәуелсіз өсімшелі үрдістер класынан кездейсоқ түрткілермен және айнмалыларының бөлігіне қатысты азғындаған диффузиялы бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық жүйелер класында А.С. Галиуллин топтамасы бойынша негізгі кері есептің шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары квазиайналым әдісі арқылы алынған.

Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. ON THE BASIC INVERSE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DEGENERATING DIFFUSION AND PERTURBATIONS FROM A CLASS OF PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS

There are obtained necessary and sufficient conditions of solvability of basic inverse problem by A.S. Galiullin's classification in a class of stochastic differential Ito systems of the first order with random perturbations from a class of processes with independent increments and degenerating diffusion with respect to a part of variables with the help of quasi-inverse method.

УДК 539.22

И.А. КАНЫМГАЗИЕВА

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мунайтпасова, 5, e-mail: Imira_69@mail.ru

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКАХ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В данной работе построены аналитические решения уравнений Максвелла в одноосных анизотропных средах, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей которых имеют диагональный вид. Рассмотрен случай стационарных колебаний, порождаемых токами, комплексные амплитуды которых принадлежат классу обобщенных вектор-функций.

Ключевые слова: *электромагнитная волна, уравнение Максвелла, вектор Пойнтинга, анизотропная среда.*

В настоящее время развиваются различные методы решения задач электродинамики. Но более подробно изучены процессы распространения электромагнитных волн (ЭМ) в изотропных средах. Дифракция электромагнитных волн в анизотропных средах гораздо менее изучена.

В анизотропной диэлектрической среде (монокристаллы) линейная связь между индукцией и напряженностью электрического поля имеет более сложный вид, не сводящийся к простой пропорциональности, характерной для изотропных сред, что существенно усложняет построение аналитических решений уравнений Максвелла (УМ).

Исследования процессов распространения электромагнитных волн в одноосных анизотропных средах проводились в работах Ф.И. Федорова

© И.А. Канымгазиева, 2013.

Keywords: *electromagnetic wave, Maxwell equation, Poynting's vector, anisotropic media*
2010 Mathematics Subject Classification: 78A45

[1, 2], Л.А. Вайнштейна [3], Е.И. Нефедова [4], А.И. Потехина [5], А.О. Савченко, О.Я. Савченко [6] и др. авторов. Для построения частных аналитических решений УМ использовались, в основном, методы полного или неполного разделения переменных и численные методы. Классические решения системы уравнений Максвелла строятся с применением потенциалов, теория которых разработана для классов гладких функций.

Обобщенные решения системы уравнений Максвелла при произвольных токах для одноосных кристаллов при электрической, либо магнитной анизотропиях получены С.С. Саутбековым и автором [7, 8]. При этом использовался подход, разработанный Л.А. Алексеевой, С.С. Саутбековым в [9, 10], где на основе преобразования Фурье обобщенных функций построены фундаментальные решения уравнений Максвелла для изотропных ЭМ-сред, описывающие нестационарные, стационарные и пространственно-периодические ЭМ-поля, порождаемые регулярными и сингулярными токами.

В данной работе строятся аналитические решения уравнений Максвелла в одноосных анизотропных средах, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей которых имеют диагональный вид. Рассмотрен случай стационарных колебаний, порождаемых токами, комплексные амплитуды которых принадлежат классу обобщенных вектор-функций.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения электродинамики удобно записать в следующем симметричном виде [11]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{j}^\mu - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}^\varepsilon + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} – электрический и магнитный векторы электромагнитного поля, \mathbf{j}^ε , \mathbf{j}^μ – векторы плотности электрического и магнитного токов проводимости, \mathbf{D} , \mathbf{B} – векторы электрической и магнитной индукций, ρ – объемная плотность заряда.

Рассматриваются стационарные электромагнитные волны в одноосном кристалле:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}(x) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(x) \exp(-i\omega t), \end{cases} \quad (5)$$

порождаемые переменными электрическими токами вида $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x) \exp(-i\omega t)$, где ω – частота колебаний, $\mathbf{E}(x), \mathbf{H}(x)$ – комплексные амплитуды напряженности электромагнитного поля, модуль которых определяет амплитуду колебаний электромагнитных волн, а угол – сдвиг фаз.

Дифференцирование по времени в системах уравнений Максвелла приводит к замене $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ в (1)–(4) и после сокращения на $\exp(-i\omega t)$ (1)–(2) приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{j}^\mu + i\omega \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}^\varepsilon - i\omega \mathbf{D}. \end{cases} \quad (6)$$

Векторы электрической и магнитной индукций \mathbf{D}, \mathbf{B} и напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны между собой материальными уравнениями в одноосном кристалле [12]:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mu_0 \mathbf{H}. \quad (7)$$

В одноосных кристаллах одна из главных осей тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ совпадает с осью симметрии кристалла – оптической осью; направления других главных осей произвольны [13]. В данной задаче элементы $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ выбираются в виде диагональной матрицы: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon, \varepsilon_{33} = \varepsilon_z, \mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \mu_{33} = \mu_z$. Ось кристалла направлена вдоль оси z .

2 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для решения поставленной задачи используем метод обобщенного прямого и обратного преобразований Фурье. Метод Фурье является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Для регулярных \mathbf{E} преобразования Фурье $\tilde{\mathbf{E}}$ имеют вид [14]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}[\mathbf{E}(\mathbf{r})] = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})) dV, \quad (8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})] = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) \exp(-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z, \quad dV = dx dy dz, \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad t \rightarrow \omega.$$

С помощью прямого преобразования Фурье (8) система (6) приводится к виду [7]:

$$\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{J}}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} i\varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \omega \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{G}}_0 \\ \tilde{\mathbf{G}}_0 & -i\mu_0 \hat{\mu} \omega \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -ik_z & ik_y \\ ik_z & 0 & -ik_x \\ -ik_y & ik_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \tilde{j}^\varepsilon \\ \tilde{j}^\mu \end{pmatrix},$$

$$\tilde{j}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{j}_x^\varepsilon \\ \tilde{j}_y^\varepsilon \\ \tilde{j}_z^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \tilde{j}^\mu = \begin{pmatrix} \tilde{j}_x^\mu \\ \tilde{j}_y^\mu \\ \tilde{j}_z^\mu \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

$\omega = const$, \mathbf{I} – единичная матрица 3×3 , μ_0 – магнитная постоянная, ε_0 – электрическая постоянная.

$\tilde{\mathbf{U}}$ определяется с помощью обратной матрицы $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}. \quad (11)$$

Изображения компонент напряженности электрического поля найдены с помощью Фурье-трансформант $\tilde{\Psi}_1^\varepsilon, \tilde{\Psi}_1^\mu, \tilde{\Psi}_2^\varepsilon, \tilde{\Psi}_2^\mu$:

$$\tilde{E}_x = \frac{i}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} (k_x(\mathbf{k}, \tilde{j}^\varepsilon) \tilde{\Psi}_1^\varepsilon - k_m^2 (\tilde{\Psi}_1^\mu \tilde{j}_x^\mu - k_x(\mathbf{k}, \tilde{j}_\perp^\varepsilon) \tilde{\Psi}_2^\varepsilon)) +$$

$$+i\frac{\mu z}{\mu}k_z(\tilde{j}_y^\mu\tilde{\Psi}_1^\mu + k_x(k_y\tilde{j}_x^\mu - k_x\tilde{j}_y^\mu)\tilde{\Psi}_2^\varepsilon) - ik_y\tilde{\Psi}_1^\mu\tilde{j}_z^\mu, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y = & \frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(k_y(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\varepsilon)\tilde{\Psi}_1^\varepsilon - k_m^2(\tilde{\Psi}_1^\mu\tilde{j}_y^\varepsilon - k_y(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon)\tilde{\Psi}_2^\varepsilon)) - \\ & -i\frac{\mu z}{\mu}k_z(\tilde{j}_x^\mu\tilde{\Psi}_1^\mu - k_y(k_y\tilde{j}_x^\mu - k_x\tilde{j}_y^\mu)\tilde{\Psi}_2^\varepsilon) + ik_x\tilde{\Psi}_1^\mu\tilde{j}_z^\mu, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(k_z(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\varepsilon) - k_0^2\tilde{j}_z^\varepsilon)\tilde{\Psi}_1^\varepsilon + i(k_y\tilde{j}_x^\mu - k_x\tilde{j}_y^\mu)\tilde{\Psi}_1^\varepsilon. \quad (14)$$

Составляющие вектора напряженности магнитного поля в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x = & i\frac{\varepsilon z}{\varepsilon}k_z(k_x(k_y\tilde{j}_x^\varepsilon - k_x\tilde{j}_y^\varepsilon)\tilde{\Psi}_2^\mu + \tilde{j}_y^\varepsilon\tilde{\Psi}_1^\varepsilon) - \\ & - ik_y\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{j}_z^\varepsilon - \frac{i}{\mu\mu_0\omega}(k_x(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\mu)\tilde{\Psi}_1^\mu - k_n^2(\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{j}_x^\mu - k_x(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu)\tilde{\Psi}_2^\mu)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y = & i\frac{\varepsilon z}{\varepsilon}k_z(k_y(k_y\tilde{j}_x^\varepsilon - k_x\tilde{j}_y^\varepsilon)\tilde{\Psi}_2^\mu - \tilde{j}_x^\varepsilon\tilde{\Psi}_1^\varepsilon) + \\ & + ik_x\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{j}_z^\varepsilon - \frac{i}{\mu\mu_0\omega}(k_y(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\mu)\tilde{\Psi}_1^\mu - k_n^2(\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{j}_y^\mu - k_y(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu)\tilde{\Psi}_2^\mu)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tilde{H}_z = i(k_y\tilde{j}_x^\varepsilon - k_x\tilde{j}_y^\varepsilon)\tilde{\Psi}_1^\mu - \frac{i}{\mu\mu_0\omega}(k_z(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\mu) - k_0^2\tilde{j}_z^\mu)\tilde{\Psi}_1^\mu. \quad (17)$$

Фурье-трансформанты волновых функций имеют вид

$$\tilde{\Psi}_1^\varepsilon = \frac{1}{k_n^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\frac{\varepsilon z}{\varepsilon}}, \quad (18)$$

$$\tilde{\Psi}_1^\mu = \frac{1}{k_m^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\frac{\mu z}{\mu}}, \quad (19)$$

$$\tilde{\Psi}_2^\mu = \left(\frac{\mu z \varepsilon}{\mu \varepsilon z} - 1\right)\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{\Psi}_1^\mu, \quad (20)$$

$$\tilde{\Psi}_2^\varepsilon = \left(\frac{\mu \varepsilon z}{\mu z \varepsilon} - 1\right)\tilde{\Psi}_1^\varepsilon\tilde{\Psi}_1^\mu, \quad (21)$$

где

$$k_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \mu_0 \varepsilon_0, \quad k_n^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}, \quad k_m^2 = k_0^2 \frac{\mu_z}{\mu},$$

$$\tilde{\mathbf{j}}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\varepsilon + \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\varepsilon = (0, 0, \tilde{j}_z^\varepsilon), \quad \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon = (\tilde{j}_x^\varepsilon, \tilde{j}_y^\varepsilon, 0),$$

$$\tilde{\mathbf{j}}^\mu = \tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\mu + \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu, \quad \tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\mu = (0, 0, \tilde{j}_z^\mu), \quad \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu = (\tilde{j}_x^\mu, \tilde{j}_y^\mu, 0).$$

В пространстве изображений векторы напряженности электромагнитного поля в одноосной анизотропной среде:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{i}{\varepsilon \varepsilon_0 \omega} (k_m^2 ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_z)(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon) \tilde{\Psi}_2^\varepsilon - (\tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon \tilde{\Psi}_1^\mu)) + \mathbf{k}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\varepsilon) \tilde{\Psi}_1^\varepsilon - k_0^2 (\tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\varepsilon \tilde{\Psi}_1^\varepsilon)) -$$

$$-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_z) k_z [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu \tilde{\Psi}_2^\mu]_z + i \mathbf{e}_z [(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu) (\tilde{\Psi}_1^\mu \frac{\mu_z}{\mu} - \tilde{\Psi}_1^\varepsilon)]_z - i[\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\mu \tilde{\Psi}_1^\mu], \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = -i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_z) k_z [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon \tilde{\Psi}_2^\varepsilon]_z + i \mathbf{e}_z [(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\varepsilon) (\tilde{\Psi}_1^\varepsilon \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} - \tilde{\Psi}_1^\mu)]_z - i[\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\varepsilon \tilde{\Psi}_1^\varepsilon] -$$

$$- \frac{i}{\mu \mu_0 \omega} (k_n^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_z)(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu) \tilde{\Psi}_2^\mu - (\tilde{\mathbf{j}}_\perp^\mu \tilde{\Psi}_1^\varepsilon)) + \mathbf{k}(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{j}}^\mu) \tilde{\Psi}_1^\mu - k_0^2 (\tilde{\mathbf{j}}_\parallel^\mu \tilde{\Psi}_1^\mu), \quad (23)$$

где

$$\mathbf{k}_z = \mathbf{e}_z k_z = \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z, \mathbf{k}),$$

\mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z .

3 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Используя свойство свертки преобразования Фурье

$$\mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}] = \mathbf{M}^{-1} * \mathbf{J}, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{M}}^{-1}], \quad \mathbf{J} = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{J}}], \quad (25)$$

можно получить явное аналитическое решение уравнений Максвелла (11):

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1} * \mathbf{J}, \quad (26)$$

где символ "*" обозначает свертку по координатам x, y, z , которая для регулярных функций представляется в интегральном виде [14]:

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{R^3} (g)(\mathbf{y})f(\mathbf{x}-\mathbf{y})dy_1dy_2dy_3, \quad (27)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Записывая выражение (26) в развернутом виде, получим напряженности электромагнитного поля по компонентам:

$$\begin{aligned} E_x = & -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla, (\mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)) + k_m^2 (\Psi_1^\mu * j_x^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon)) \right) + \\ & + \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_1^\mu * j_y^\mu - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial(j_x^\mu * \Psi_2^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\mu * \Psi_2^\mu)}{\partial x})) - \frac{\partial(j_z^\mu * \Psi_1^\mu)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} E_y = & -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\nabla, \mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) + k_m^2 (\Psi_1^\mu * j_y^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon)) \right) - \\ & - \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_1^\mu * j_x^\mu + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial(j_x^\mu * \Psi_2^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\mu * \Psi_2^\mu)}{\partial x})) + \frac{\partial(j_z^\mu * \Psi_1^\mu)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$E_z = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial z} (\nabla, \mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) + k_0^2 (j_z^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) \right) + \frac{\partial(j_x^\mu * \Psi_1^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\mu * \Psi_1^\mu)}{\partial x}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} H_x = & \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_1^\varepsilon * j_y^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial(j_x^\varepsilon * \Psi_2^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\varepsilon * \Psi_2^\mu)}{\partial x})) - \frac{\partial(j_z^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)}{\partial y} + \\ & + \frac{i}{\mu\mu_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\nabla, \mathbf{j}^\mu * \Psi_1^\mu + k_n^2 (\Psi_1^\varepsilon * j_x^\mu + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\mu))) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} H_y = & -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi_1^\varepsilon * j_x^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial(j_x^\varepsilon * \Psi_2^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\varepsilon * \Psi_2^\mu)}{\partial x})) + \frac{\partial(j_z^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)}{\partial x} + \\ & + \frac{i}{\mu\mu_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\nabla, \mathbf{j}^\mu * \Psi_1^\mu) + k_n^2 (\Psi_1^\varepsilon * j_y^\mu + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\mu)) \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$H_z = \left(\frac{\partial(j_x^\varepsilon * \Psi_1^\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(j_y^\varepsilon * \Psi_1^\mu)}{\partial x} \right) + \frac{i}{\mu\mu_0\omega} \left(\frac{\partial}{\partial z} (\nabla, \mathbf{j}^\mu * \Psi_1^\mu) + k_0^2 (j_z^\mu * \Psi_1^\mu) \right). \quad (33)$$

Здесь волновые потенциалы для одноосных анизотропных сред

$$\Psi_1^\mu \equiv -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_z}} \frac{\exp(ik_m r'')}{r''}, \quad (34)$$

$$\Psi_1^\varepsilon \equiv -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}} \frac{\exp(ik_n r')}{r'}, \quad (35)$$

$$\Psi_2^\mu \equiv \left(\frac{\varepsilon\mu_z}{\varepsilon_z\mu} - 1 \right) \Psi_1^\varepsilon * \Psi_1^\mu, \quad (36)$$

$$\Psi_2^\varepsilon \equiv \left(\frac{\varepsilon_z\mu}{\varepsilon\mu_z} - 1 \right) \Psi_1^\varepsilon * \Psi_1^\mu \quad (37)$$

определяются через радиус-векторы r'' и r' :

$$r'' = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\mu_z}{\mu} z^2}, \quad r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} z^2}.$$

Из (28)–(33) можно получить векторы напряженности электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} (\nabla(\nabla, \mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) + k_m^2 (\Psi_1^\mu * \mathbf{j}_\perp^\varepsilon + \nabla_\perp(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon)) + k_0^2 (\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)) + \\ & + \nabla_\perp \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\varepsilon]) + \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * (\Psi_1^\mu \frac{\mu_z}{\mu} - \Psi_1^\varepsilon)]) - [\nabla, (\mathbf{j}^\mu * \Psi_1^\mu)], \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \nabla_\perp \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon]) + \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * (\Psi_1^\varepsilon \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} - \Psi_1^\mu)]) - [\nabla, (\mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)] + \\ & + \frac{i}{\mu\mu_0\omega} (\nabla(\nabla, \mathbf{j}^\mu * \Psi_1^\mu) + k_n^2 (\Psi_1^\varepsilon * \mathbf{j}_\perp^\mu + \nabla_\perp(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\mu)) + k_0^2 (\mathbf{j}_\parallel^\mu * \Psi_1^\mu)), \quad (39) \end{aligned}$$

где $\nabla_\perp = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Если применить соответствующий предельный переход $\mu_1 \rightarrow \mu$ и векторы плотности магнитного тока приравнять к нулю: $\mathbf{j}^\mu = 0$, то из (38) найдем вектор напряженности электрического поля для одноосных электрических анизотропных сред [8]:

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(\nabla(\nabla, \mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) + k_0^2(\Psi_0 * \mathbf{j}_\perp^\varepsilon + \nabla_\perp(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon) + \mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)), \quad (40)$$

а если в (39) применить предельный переход $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon$ и также векторы плотности магнитного тока приравнять к нулю: $\mathbf{j}^\mu = 0$, то из этого решения получится вектор напряженности магнитного поля для одноосных магнитных анизотропных сред:

$$\mathbf{H} = \nabla_\perp \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon]) + \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * (\Psi_1^\varepsilon \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} - \Psi_1^\mu)]) - [\nabla, (\mathbf{j}^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)]. \quad (41)$$

Вычислив свертку, можно выразить функции $\Psi_2^\varepsilon, \Psi_2^\mu$ через специальные функции:

$$\begin{aligned} \Psi_2^\varepsilon = & -\frac{\mu_z}{\mu} \frac{1}{8i\pi k_0} [\exp(ik_0z)(\text{Ci}(k_n r' - k_0z) + i\text{si}(k_n r' - k_0z)) + \\ & + \exp(-ik_0z)(\text{Ci}(k_n r' + k_0z) + \\ & + i\text{si}(k_n r' + k_0z)) - \exp(ik_0z)(\text{Ci}(k_m r'' - k_0z) + i\text{si}(k_m r'' - k_0z)) - \\ & - \exp(-ik_0z)(\text{Ci}(k_m r'' + k_0z) + i\text{si}(k_m r'' + k_0z))], \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^\mu = & \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{1}{8i\pi k_0} [\exp(ik_0z)(\text{Ci}(k_n r' - k_0z) + i\text{si}(k_n r' - k_0z)) + \\ & + \exp(-ik_0z)(\text{Ci}(k_n r' + k_0z) + \\ & + i\text{si}(k_n r' + k_0z)) - \exp(ik_0z)(\text{Ci}(k_m r'' - k_0z) + i\text{si}(k_m r'' - k_0z)) - \\ & - \exp(-ik_0z)(\text{Ci}(k_m r'' + k_0z) + i\text{si}(k_m r'' + k_0z))], \quad (43) \end{aligned}$$

где используются интегральные косинус и синус:

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2},$$

$\gamma = 0.5772$ – число Эйлера.

Полученные решения (40) и (41) можно представить в виде суммы двух независимых решений:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \quad (44)$$

Первые слагаемые из (42) определяются с помощью волновых потенциалов $\Psi_1^\varepsilon, \Psi_1^\mu$ и векторов плотностей электрических $\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon$ и магнитных токов \mathbf{j}_\parallel^μ вдоль оси кристалла:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(\nabla(\nabla, (\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)) + k_0^2(\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)) - [\nabla, (\mathbf{j}_\parallel^\mu * \Psi_1^\mu)], \quad (45)$$

$$\mathbf{H}_1 = -[\nabla, (\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)] + \frac{i}{\mu\mu_0\omega}(\nabla(\nabla, (\mathbf{j}_\parallel^\mu * \Psi_1^\mu)) + k_0^2(\mathbf{j}_\parallel^\mu * \Psi_1^\mu)); \quad (46)$$

вторые слагаемые из (38) и (39) выражаются через перпендикулярную составляющую плотностей электрических $\mathbf{j}_\perp^\varepsilon$ и магнитных токов \mathbf{j}_\perp^μ и четыре волновые потенциала $\Psi_2^\varepsilon, \Psi_2^\mu$ и $\Psi_1^\varepsilon, \Psi_1^\mu$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = & -\frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}(\nabla(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon) + k_m^2(\Psi_1^\mu * \mathbf{j}_\perp^\varepsilon + \nabla_\perp(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\varepsilon)) + k_0^2(\mathbf{j}_\parallel^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)) + \\ & + \nabla_\perp \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\varepsilon]) + \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * (\Psi_1^\mu \frac{\mu_z}{\mu} - \Psi_1^\varepsilon)]) - [\nabla, (\mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_1^\mu)], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 = & \nabla_\perp \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_2^\mu]) + \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z, [\nabla, \mathbf{j}_\perp^\varepsilon * (\Psi_1^\varepsilon \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} - \Psi_1^\mu)]) - [\nabla, (\mathbf{j}_\perp^\varepsilon * \Psi_1^\varepsilon)] + \\ & + \frac{i}{\mu\mu_0\omega}(\nabla(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_1^\mu) + k_n^2(\Psi_1^\varepsilon * \mathbf{j}_\perp^\mu + \nabla_\perp(\nabla, \mathbf{j}_\perp^\mu * \Psi_2^\mu)) + k_0^2(\mathbf{j}_\parallel^\mu * \Psi_1^\mu)). \end{aligned} \quad (48)$$

4 ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ К ПОЛУЧЕННЫМ РЕШЕНИЯМ

Возвращаясь к основным уравнениям (45)–(48), легко заметить, что одно из них переходит в другое при перестановке [11]:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, & \varepsilon \rightarrow \mu, & \mathbf{j}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{j}^\mu, \\ \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}, & \mu \rightarrow \varepsilon, & \mathbf{j}^\mu \rightarrow -\mathbf{j}^\varepsilon. \end{cases} \quad (49)$$

Это свойство решений (45)–(48) сохранять свой вид при перестановке (49) называется перестановочной инвариантностью.

5 ЭНЕРГИЯ, ВЕКТОР ПОЙНТИНГА, ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ

Наиболее полную информацию о характере излучения дает пространственная диаграмма направленности (ДН) – угловое распределение поля излучения или излучаемой мощности антенны, или эквивалентного ей устройства. При ее изучении обычно исследуют различные сечения этой диаграммы плоскостями $\theta = const$ или $\phi = const$ в сферических координатах [8]. Для передающей антенны используют ДН по напряженности поля: $\text{Re}(\mathbf{E}(x), \mathbf{e}_r)$ и $\text{Re}(\mathbf{H}(x), \mathbf{e}_r)$, $\mathbf{e}_r = x/\|x\|$ или по уровню мощности излучения: $P_r = \text{Re}(\mathbf{P}(x), \mathbf{e}_r)$. Для построения ДН составлено уравнение баланса мощности для комплексных амплитуд [3]:

$$\frac{1}{2} \text{div}[\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} i\omega((\mathbf{B}, \bar{\mathbf{H}}) - (\bar{\mathbf{D}}, \mathbf{E})) - \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{j}}, \mathbf{E}), \quad (50)$$

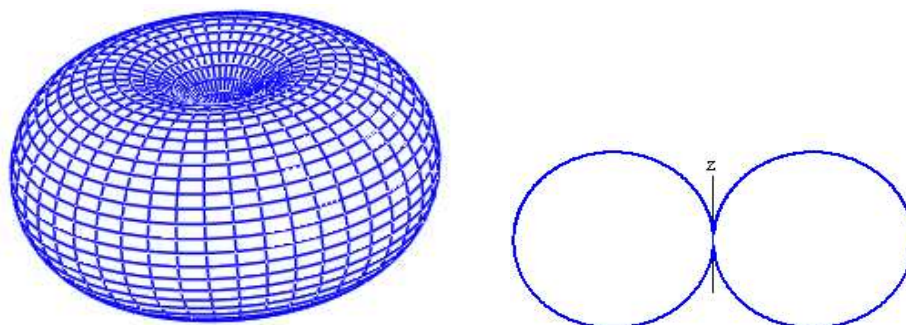
где

$$(\mathbf{B}, \bar{\mathbf{H}}) = \mu\mu_0(|H_1|^2 + |H_2|^2 + |H_3|^2), (\bar{\mathbf{D}}, \mathbf{E}) = \varepsilon_0(\varepsilon_1|E_1|^2 + \varepsilon(|E_2|^2 + |E_3|^2)),$$

или в интегральной форме:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \int_V \text{div}[\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}] dV(x) = \frac{1}{2} \text{Re} \oint_S (\mathbf{P}, d\mathbf{S}), \quad (51)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}$ – вектор Пойнтинга.

Рисунок 1 – ДН электрического вибратора Герца $\epsilon_1/\epsilon = 1$.

6 ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ДИПОЛЕМ ГЕРЦА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

На основании полученных результатов построены диаграммы направленности при параллельном и перпендикулярном направлениях (рис. 1, 2). При построении ДН электрического излучателя Герца магнитная проницаемость учтена, как скалярная величина, и вектор плотности магнитного тока равен нулю (рис. 3). А на рисунках 4 и 5 показаны ДН точечного электрического диполя, перпендикулярного оси магнитного одноосного кристалла z , и электрическая проницаемость среды равна единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для проверки достоверности полученных результатов использовались соответствующие предельные переходы $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon$ и $\mu_1 \rightarrow \mu$, а также закон сохранения энергии [3]. При предельном переходе $\mu_1 \rightarrow \mu$ получается решение уравнений Максвелла для одноосной анизотропной среды с тензором диэлектрической проницаемости, рассмотренном в [7,8]. А при применении предельного перехода $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon$ – решение уравнений Максвелла для одноосной анизотропной среды с диагональным тензором магнитной проницаемости. Если применить оба предельных перехода, то получится решение уравнений Максвелла для изотропной среды [9].

Достоверность полученных результатов проверена также с помощью принципа двойственности.

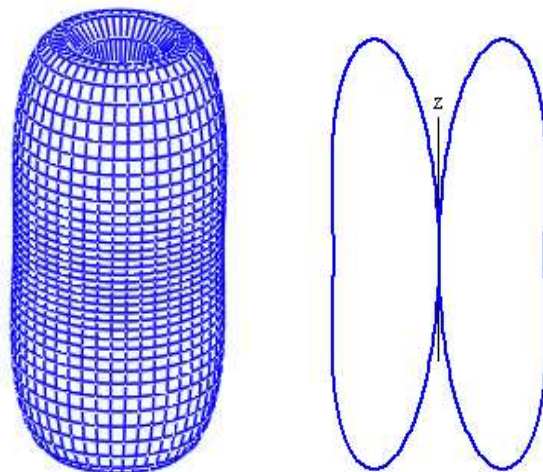


Рисунок 2 – ДН электрического вибратора Герца, расположенного параллельно к оси кристалла z , $\varepsilon_1/\varepsilon = 7$.

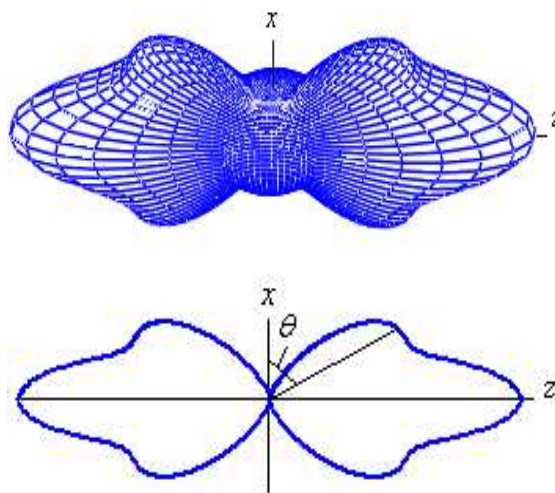


Рисунок 3 – ДН электрического вибратора Герца, перпендикулярного к оси кристалла $\varepsilon_1/\varepsilon = 7$, $r = 5$.

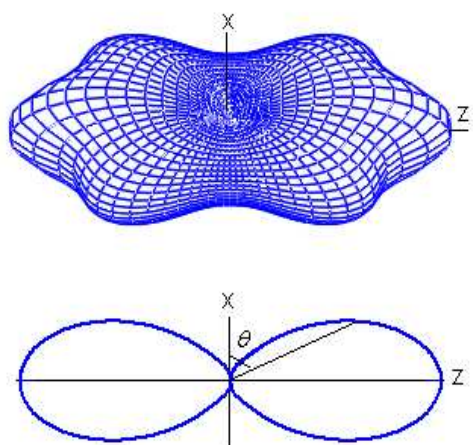


Рисунок 4 – ДН точечного электрического диполя, перпендикулярного к оси магнитного кристалла z , $\mu_1/\mu = 9$, $\varphi = \pi/2$, $r = 3$.

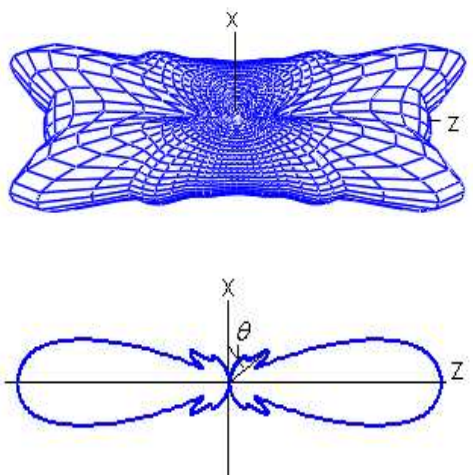


Рисунок 5 – ДН точечного электрического диполя, перпендикулярного оси магнитного кристалла z , $\mu_1/\mu = 9$, $\varphi = \pi/2$, $r = 9$.

Построенные новые обобщенные решения системы уравнений Максвелла для одноосного кристалла могут быть использованы для описания электромагнитных полей, порождаемых антеннами различного назначения, и для решения краевых задач в анизотропных электромагнитных средах.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Федоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. – М.: УРСС, 2004. – 380 с.
- 2 Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965. – 386 с.
- 3 Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
- 4 Нефедов Е.И. Техническая электродинамика. – М.: Академия, 2008. – 416 с.
- 5 Потехин А.И. Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде. – М.: Наука, 1971. – 76 с.
- 6 Савченко А.О., Савченко О.Я. Электромагнитное поле диполя в анизотропной среде // Журнал технической физики. – 2005. – Т. 75, вып. 10. – С. 118-121.
- 7 Саутбеков С.С., Канымгазиева И.А. Фундаментальные решения уравнений Максвелла для одноосного кристалла // Математический журнал. – Алматы, 2007. – Т. 7, № 3 (25). – С. 62-68.
- 8 Sautbekov S., Kanymgazieva I., Frangos P. The generalized solutions of Maxwell equations for the uniaxial crystal // J. of Applied Electromagnetism. – 2008. – V. 10, № 2. – P. 43-55.
- 9 Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 1. – С. 76-88.
- 10 Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 125-127.
- 11 Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Основы теории антенн. – М.: Дрофа, 2007. – 491 с.

12 Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1961. – 370 с.

13 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – Т. VIII. – 620 с.

14 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528 с.

Статья поступила в редакцию 10.09.12

Қанымғазиева И.А. БІРӨСТІ КРИСТАЛДАРДАҒЫ МАКСВЕЛЛ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ КЕЗ КЕЛГЕН СТАЦИОНАР ТОКТАР БОЙЫНША ЖАЛПЫЛАУ ШЕШІМДЕРІ

Берілген жұмыста диэлектрлік және магниттік өтімділіктерінің тензорлары диагоналды түрде болатын біресті анизотроптық орталардағы Максвелл теңдеулерінің аналитикалық шешімдері құрылды. Комплексті амплитудалары жалпылау вектор-функциялар класына жататын токтар туғызған стационар тербелістер жағдайы қарастырылды.

Kanymgazieva I.A. GENERALIZED SOLUTIONS OF MAXWELL EQUATIONS FOR ARBITRARY STATIONARY CURRENTS IN UNIAXIAL CRYSTALS

In this work we construct analytical solutions of Maxwell equations in uniaxial anisotropic media with diagonal tensors of dielectric and magnetic permeabilities. There is considered the case of stationary vibrations generated by the currents with complex amplitudes from the class of generalized vector-functions.

УДК 521.1

Г.М. МАЕМЕРОВА, М.ДЖ. МИНГЛИБАЕВ

КазНУ им. аль-Фараби

050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: maumerova@gmail.com

Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова

050020, Алматы, Обсерватория, 23, e-mail: minglibayev@mail.ru

О НАРУШЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ

В проблеме трех тел с переменными массами получены новые уравнения в оскулирующих элементах – аналогах второй системы элементов Пуанкаре. Возмущающая функция в модифицированных оскулирующих переменных вычислена с помощью системы аналитических вычислений Mathematica. На основе выведенной возмущающей функции впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений. Путем численного анализа уравнений вековых возмущений установлено, что из-за изменения масс в различных темпах неизменность плоскости Лапласа нарушается, восходящий узел "тела с массой" μ_1 не совпадает с нисходящим узлом "тела с массой" μ_2 .

Ключевые слова: *задача трех тел, переменные массы, вековые возмущения, плоскость Лапласа, система аналитических вычислений Mathematica.*

1 ВВЕДЕНИЕ

В реальных протопланетных и планетных гравитирующих системах на сегодняшний день основными диссипативными факторами считаются

© Г.М. Маемерова, М.Дж. Минглибаев, 2013.

Keywords: *three-body problem, variable masses, secular perturbations, Laplace plane, the system of analytical calculations Mathematica*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F07

приливная эволюция, трения ядро – мантия и трение атмосфера – небесное тело. Например, экзотическое поступательно-вращательное движение планеты Венера пытаются объяснить этими факторами [1-3]. Однако, на определенных этапах эволюции гравитирующих систем диссипация и обмен масс могут быть ведущими факторами динамической эволюции [4-9] и исследование эволюционных эффектов переменности масс – интересная задача.

Простейшая модель реальных небесных тел – это сферическое тело, гравитационная сила которого на внешней области моделируется гравитационной силой материальной точки, находящейся в центре этой сферы с соответствующей массой. Рассмотрим три сферических тела с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, взаимогравитирующие по закону Ньютона, что приводит к задаче трех точек с переменными массами. В этой проблеме эффекты диссипации масс не исследованы, по-видимому, из-за сложности задачи и отсутствия математических разработок. В такой постановке отсутствуют десять классических первых интегралов [7], т.е. интеграл энергии, шесть интегралов движения центра масс и три интеграла сохранения момента количества движения. В нашем случае из-за изменения массы в различных темпах происходит диссипация энергии системы в целом. Так как законы изменения масс известны и заданы, то дифференциальные уравнения системы замкнутые и не появляются дополнительные степени свободы. Однако, в связи с диссипацией количества движения, момента количества движения и энергии не сохраняются классические интегралы.

В настоящей работе, используя наши разработки [7], модифицируя классическую схему [10], получено новое разложение в ряд возмущающей функции в задаче трех тел с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, в принципе. Возмущающая функция выражена через аналоги второй системы элементов Пуанкаре, с точностью до второй степени включительно малых величин e_i , i_i . Эта громоздкая и трудоемкая задача алгебры, конкретное выполнение которой возможно только с использованием компьютерной системы символьных вычислений.

С помощью системы аналитического вычисления *Mathematica* фактически нами получено полное выражение возмущающей функции, которое состоит из 537 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции

впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений. Путем численного анализа уравнений вековых возмущений установлено, что из-за изменения масс в различных темпах неизменность плоскости Лапласа нарушается, линии узлов "тела с массой" μ_1 не совпадают с линией узлов "тела с массой" μ_2 .

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1 ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим движение трех тел T_0 , T_1 , и T_2 , взаимогравитирующих по закону Ньютона в системе координат Якоби в случае, когда

- 1) массы тел изменяются изотропно, т.е. не возникают дополнительные реактивные силы, законы изменения масс известны и заданы;
- 2) массы m_0 , m_1 первых двух тел изменяются в одинаковом темпе, а темп изменения массы m_2 третьего тела отличается от них:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \quad \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}; \quad (1)$$

- 3) численные значения масс тел в ходе эволюции остаются сравнимыми между собой;
- 4) элементы орбит e_i , i_i достаточно малые ($i = 1, 2$).

Исследуется динамическая эволюция такой гравитирующей системы с переменными массами.

2.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При условиях 1-4 в п. 2.1 уравнения движения тел в системе координат Якоби (рис. 1) имеют классический вид [5-6]:

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \text{grad}_{\vec{r}_1} U, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{grad}_{\vec{r}_2} U,$$

однако, здесь $\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}$, $\mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq \text{const}$. Знак "·" обозначает первую производную по вре-

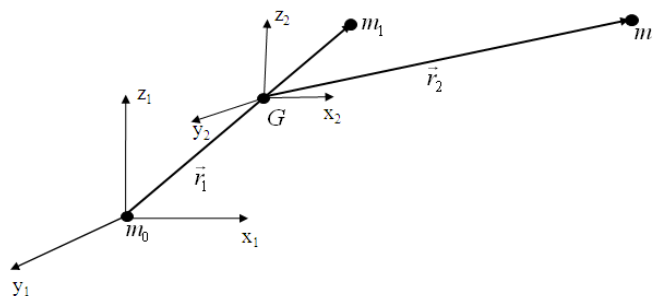


Рисунок 1 – Система координат Якоби.

мени. Другие обозначения также общепринятые [5]:

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right),$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$r_{01}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2,$$

$$r_{02}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2,$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} = \text{const}, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq \text{const}.$$

Исследуем задачу Коши в такой постановке, используя теорию возмущений на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5].

3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ТРУДНОСТИ

3.1 ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для исследования задачи используем методы канонической теории возмущений. При этом используются индивидуально подобранные исходные нестационарные движения [7]. Они описывают соответствующие апериодические движения по квазиконическому сечению. Эти невозмущенные движения описываются незамкнутыми кривыми второго порядка, что соответствует природе нестационарных задач гравитирующих систем. Проблема заключается в выражении возмущающей функции через орбитальные

элементы. Из-за этого приходится иметь дело, в общем случае, с шестимерными бесконечными рядами. Эта трудность в настоящей работе преодолевается при помощи системы аналитических вычислений *Mathematica* с точностью до второй степени малых величин e_i, i_i . Возмущающая функция вычисляется на компьютере в аналитическом символьном виде.

3.2 УРАВНЕНИЯ ВЕКОВОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В АНАЛОГАХ ВТОРОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПУАНКАРЕ

Как и в классическом случае, в нашей задаче предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре [7], [10], которые могут применяться только для описания движений квазиэллиптического типа

$$\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

представленные посредством формул

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \beta_i^* \sqrt{a_i}, & \lambda_i &= n_i [\phi(t) - \phi(\tau)] + \pi_i = l_i + \Omega_i + \omega_i, \\ \xi_i &= \sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i, & \eta_i &= -\sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i, \\ p_i &= \sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - e_i^2) (1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, & q_i &= -\sqrt{2\beta_i^* \sqrt{a_i} (1 - e_i^2) (1 - \cos i_i)} \sin \Omega_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где Ω_i – долгота восходящего узла, ω_i – аргумент перицентра, i_i – наклонение, $\phi_i(\tau_i)$ – первообразные функции $\gamma_i^{-2}(t)$, $n_i = \beta_i^* / \mu_{i0} a_i^{3/2}$ – аналоги кеплеровского среднего движения, a_i – аналоги большой полуоси, e_i – аналоги эксцентриситетов,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1^* &= \sqrt{f \cdot \mu_1(t_0) m_1(t_0) m_0(t_0)}, & \tilde{\beta}_2^* &= \sqrt{f \cdot \mu_2(t_0) m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)]}, \\ \gamma_1 &= \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)}, & \gamma_2 &= \gamma_2(t_0) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}, \\ \mu_1 &= \mu_1(t) = \frac{m_0(t) m_1(t)}{m_0(t) + m_1(t)}, & \mu_{10} &= \mu_1(t_0) = \frac{m_0(t_0) m_1(t_0)}{m_0(t_0) + m_1(t_0)}, \\ \mu_2 &= \mu_2(t) = \frac{m_2(t) [m_0(t) + m_1(t)]}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}, & \mu_{20} &= \mu_2(t_0) = \frac{m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)]}{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}, \end{aligned}$$

f – гравитационная постоянная. Соответственно в нерезонансном случае вековые возмущения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= 0, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R_{1\text{век}} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{(\beta_1^*)^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1} \left[-\frac{b_1}{2} \frac{\gamma_1^2 \Lambda_1^4}{(\beta_1^*)^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{\Lambda_1} \right) + f F_{\text{век}} \right], \quad (5)$$

$$R_{2\text{век}} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{(\beta_2^*)^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \frac{1}{\psi_2} \left[-\frac{b_2}{2} \frac{\gamma_2^2 \Lambda_2^4}{(\beta_2^*)^4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{\Lambda_2} \right) + f F_{\text{век}} \right], \quad (6)$$

$$\psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)}, \quad b_i = b_i(t) = \mu_i \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i}, \quad i = 1, 2.$$

4 РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Главная проблема заключается в разложении величины

$$F_{\text{век}} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}} \quad (7)$$

в выражениях (5)–(6). Это громоздкая и трудоемкая задача алгебры. Используем систему аналитических вычислений *Mathematica* [12]. Нами выведено аналитическое выражение формул (5)–(6) через элементы (2) в виде ряда. Схема разложения имеет классическую структуру [10]. Элементы ξ_1, η_1 имеют величину порядка оскулирующего эксцентриситета (для малых эксцентриситетов), а переменные ξ_2, η_2 – величину порядка наклона оскулирующей орбиты (для малых наклонов), поэтому вторая система элементов Пуанкаре удобна для получения явного разложения возмущающей функции в задачах астрономии. Выражение возмущающей функции (7) через канонические переменные (2), с точностью до второй степени включительно относительно малых величин e_i, i_i , имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{534} \Pi_i^*(t) P_i(\varepsilon_k) + \sum_{j=1}^3 \Pi_j^{**}(\Lambda_1, \Lambda_2, t), \quad (8)$$

где $P_i(\partial_k) = P_i(\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \xi_2, \eta_2, p_2, q_2)$. В частности, когда массы постоянные, полученные соотношения (8) совпадают с известными классическими формулами [10].

5 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В уравнениях (2) переходим к безразмерным величинам:

$$\frac{\Lambda_i}{\Lambda_{0i}} = \tilde{\Lambda}_i, \quad \frac{\xi_i}{\xi_{0i}} = \tilde{\xi}_i, \quad \frac{\eta_i}{\eta_{0i}} = \tilde{\eta}_i, \quad \frac{p_i}{p_{0i}} = \tilde{p}_i, \quad \frac{q_i}{q_{0i}} = \tilde{q}_i, \quad (9)$$

$$\frac{t}{T_0} = \tau, \quad \frac{m_i}{P_0} = \tilde{m}_i, \quad \frac{a_i}{S_0} = \tilde{a}_i, \quad T_{01} = 2\pi \frac{\mu_{10} a_{01}^{3/2}}{\beta_1^*}, \quad T_{02} = 2\pi \frac{\mu_{20} a_{02}^{3/2}}{\beta_2^*},$$

$$P_0 = \frac{\sum m_{i0}}{3} = const, \quad S_0 = \frac{\sum a_{0i}}{2} = const, \quad T_0 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} = const. \quad (10)$$

Далее знак " ' " обозначает первую производную по времени в безразмерных величинах. Напишем уравнения движения в безразмерных переменных (9):

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_i &= 0, & \tilde{\xi}'_i &= \frac{T_{0i}}{\xi_{0i}\eta_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\text{век}}}{\partial \tilde{\eta}_i}, & \tilde{p}'_i &= \frac{T_{0i}}{p_{0i}q_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\text{век}}}{\partial \tilde{q}_i}, \\ \tilde{\lambda}'_i &= -\frac{T_{0i}}{\lambda_{0i}\Lambda_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\text{век}}}{\partial \tilde{\Lambda}_i}, & \tilde{\eta}'_i &= \frac{T_{0i}}{\xi_{0i}\eta_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\text{век}}}{\partial \tilde{\xi}_i}, & \tilde{q}'_i &= \frac{T_{0i}}{p_{0i}q_{0i}} \frac{\partial \tilde{R}_{i\text{век}}}{\partial \tilde{p}_i}, \end{aligned} \quad (11)$$

которые в раскрытом виде имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}'_1 &= 0, \quad \tilde{\Lambda}'_2 = 0, \\ \tilde{\lambda}'_1 &= \frac{P_0 T_0 \tilde{\mu}_{10}}{64 \lambda_{01} \Lambda_{01}^3} \left\{ \frac{64 f^2 P_0^4 \tilde{m}_{00}^2 \tilde{m}_{10}^2}{\tilde{\gamma}_1^2 \tilde{\Lambda}_1^3} - \frac{\Lambda_{01}}{S_0 \tilde{\mu}_1} \left[\frac{48 S_0^3 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{a}_1^2 \tilde{\mu}_1 (\eta_{01}^2 \tilde{\eta}_1^2 + \xi_{01}^2 \tilde{\xi}_1^2)}{T_0^2 \tilde{\Lambda}_1^2} + \right. \right. \\ &+ f \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 P_0 \left(\frac{4 \tilde{B}_1 \tilde{k}_2 (p_{01}^2 \tilde{p}_1^2 + q_{01}^2 \tilde{q}_1^2)}{\tilde{\Lambda}_1^2} - \frac{4 \Lambda_{01}^{1/2} \tilde{B}_1 \tilde{k}_2 (p_{01} p_{02} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + q_{01} q_{02} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2)}{\tilde{\Lambda}_1^{3/2} \sqrt{\Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_2}} \right) \\ &\left. \frac{2(12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2 [-4 \tilde{B}_1 + 3 \tilde{k}_2 (10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2)]) (\eta_{01}^2 \tilde{\eta}_1^2 + \xi_{01}^2 \tilde{\xi}_1^2)}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1^2} \right. \\ &\left. \frac{\Lambda_{01}^{1/2} \tilde{k}_2 (6(\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2) (\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2(\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 \tilde{k}_2 (4 + 3 \tilde{k}_1)])}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \tilde{\Lambda}_1^{3/2} \sqrt{\Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_2}} \right\} \times \\ &\left. \times (\eta_{01} \eta_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \xi_{01} \xi_{02} \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\lambda}'_2 = \frac{P_0 T_0 \tilde{\mu}_{10}}{64 \lambda_{02} \Lambda_{02}^3} \left\{ \frac{64 f^2 P_0^4 (\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_1 0)^2 \tilde{m}_{20}^2}{\tilde{\gamma}_2^2 \tilde{\Lambda}_2^3} - \frac{\Lambda_{02}}{S_0 \tilde{\mu}_2} \left[\frac{48 S_0^3 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_2 (\eta_{02}^2 \tilde{\eta}_2^2 + \xi_{02}^2 \tilde{\xi}_2^2)}{T_0^2 \tilde{\Lambda}_2^2} - \frac{4 \Lambda_{02}^{1/2} \tilde{B}_1 (p_{01} p_{02} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + q_{01} q_{02} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2)}{\tilde{\Lambda}_2^{3/2} \sqrt{\Lambda_{01} \tilde{\Lambda}_1}} - \frac{f \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 P_0 \tilde{k}_2}{2 (12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2 [-4 \tilde{B}_1 + 3 \tilde{k}_2 (10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2)])} \times \frac{\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^4 \tilde{\Lambda}_2^2}{\tilde{\gamma}_2^2 \tilde{\Lambda}_2^2} - \frac{\Lambda_{01}^{1/2} \tilde{k}_2 (6 (\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2) (\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2 (\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 \tilde{k}_2 (4 + 3 \tilde{k}_1)])}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \tilde{\Lambda}_2^{3/2} \sqrt{\Lambda_{01} \tilde{\Lambda}_1}} \times (\eta_{01} \eta_{02} \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 + \xi_{01} \xi_{02} \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}'_1 &= \eta_{01} [\eta_{01} \Pi_1(\tau) \tilde{\eta}_1 + \eta_{02} \Pi_2(\tau) \tilde{\eta}_2], \tilde{\eta}'_1 = -\xi_{01} [\xi_{01} \Pi_1(\tau) \tilde{\xi}_1 + \xi_{02} \Pi_2(\tau) \tilde{\xi}_2], \\ \tilde{\xi}'_2 &= \eta_{02} [\eta_{02} \Pi_3(\tau) \tilde{\eta}_2 + \eta_{01} \Pi_4(\tau) \tilde{\eta}_1], \tilde{\eta}'_2 = -\xi_{02} [\xi_{02} \Pi_3(\tau) \tilde{\xi}_2 + \xi_{01} \Pi_4(\tau) \tilde{\xi}_1], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_1 &= q_{01} [q_{01} \Pi_5(\tau) \tilde{q}_1 + q_{02} \Pi_6(\tau) \tilde{q}_2], \tilde{q}'_1 = -p_{01} [p_{01} \Pi_5(\tau) \tilde{p}_1 + p_{02} \Pi_6(\tau) \tilde{p}_2], \\ \tilde{p}'_2 &= q_{02} [q_{02} \Pi_7(\tau) \tilde{q}_2 + q_{01} \Pi_8(\tau) \tilde{q}_1], \tilde{q}'_2 = -p_{02} [p_{02} \Pi_7(\tau) \tilde{p}_2 + p_{01} \Pi_8(\tau) \tilde{p}_1], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1(\tau) &= \left(\frac{[12 \tilde{a}_1^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_1^2 - 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2 (-4 \tilde{B}_1 + 3 (10 \tilde{C}_0 - 3 \tilde{C}_2) \tilde{k}_2)] \tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} - \frac{24 S_0^3 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_1''}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} \right) \frac{f T_0 P_0^2 \tilde{\mu}_{10}}{16 \xi_{01} \eta_{01} S_0 \Lambda_{01}}, \\ \Pi_2(\tau) &= \frac{6 (\tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^3 + \tilde{a}_2^2 \tilde{k}_2^2) (\tilde{C}_2 - 6 \tilde{C}_0) + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1 [2 (\tilde{B}_2 + 18 \tilde{B}_0) \tilde{k}_1 + 3 \tilde{C}_1 (4 + 3 \tilde{k}_1) \tilde{k}_2]}{32 \xi_{01} \eta_{01} S_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \sqrt{\Lambda_{01} \Lambda_{02} \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2} \tilde{\mu}_1} \times \\ &\quad \times f T_0 P_0^2 \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{k}_2 \tilde{\mu}_{10}, \\ \Pi_3(\tau) &= \left(\frac{[-12 \tilde{a}_2^2 \tilde{C}_0 \tilde{k}_2^3 + 12 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{k}_1^2 \tilde{k}_2 (\tilde{B}_0 + \tilde{C}_1 \tilde{k}_2) + \tilde{a}_1^2 \tilde{k}_1^4 (4 \tilde{B}_1 + 3 (3 \tilde{C}_2 - 10 \tilde{C}_0) \tilde{k}_2)]}{\tilde{a}_1^2 \tilde{\Lambda}_2 \tilde{k}_1^4 \tilde{\mu}_2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \tilde{k}_2 + \frac{24 S_0^3 \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_2^2 \tilde{\mu}_2 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_2''}{\tilde{a}_2^2 \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mu}_1} \right) \frac{f T_0 P_0^2 \tilde{\mu}_{20}}{16 \xi_{02} \eta_{02} S_0 \Lambda_{02}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_4(\tau) &= \frac{fT_0P_0^2\{6(\tilde{a}_1^2\tilde{k}_1^3+\tilde{a}_2^2\tilde{k}_2^3)(\tilde{C}_2-6\tilde{C}_0)+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{k}_1[2(\tilde{B}_2+18\tilde{B}_0)\tilde{k}_1+3\tilde{C}_1(4+3\tilde{k}_1)\tilde{k}_2]\}}{32\xi_{01}\eta_{01}S_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{k}_1^2\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_2} \times \\ &\quad \times \tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{k}_2\tilde{\mu}_{20}, \\ \Pi_5(\tau) &= -\frac{fT_0P_0^2}{8p_{01}q_{01}\Lambda_{01}S_0}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{10}}{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\mu}_1}, \\ \Pi_6(\tau) &= \frac{fT_0P_0^2}{8p_{01}q_{01}S_0\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}}}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{10}}{\sqrt{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_1}, \\ \Pi_7(\tau) &= -\frac{fT_0P_0^2}{8p_{02}q_{02}\Lambda_{02}S_0}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{20}}{\tilde{\Lambda}_2\tilde{\mu}_2}, \\ \Pi_8(\tau) &= \frac{fT_0P_0^2}{8p_{02}q_{02}S_0\sqrt{\Lambda_{01}\Lambda_{02}}}\frac{\tilde{B}_1\tilde{k}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{\mu}_{20}}{\sqrt{\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2}\tilde{\mu}_2}, \end{aligned}$$

а величины

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \frac{4}{\tilde{a}_2\pi}F(\tilde{\alpha}), \quad \tilde{A}_1 = \frac{4}{\tilde{a}_2\tilde{\alpha}\pi}[F(\tilde{\alpha}) - E(\tilde{\alpha})], \quad \tilde{A}_2 = \frac{2}{3}\left(\tilde{\alpha} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)\tilde{A}_1 - \frac{1}{3}\tilde{A}_0, \\ \tilde{B}_0 &= \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1, \quad \tilde{B}_1 = \frac{2\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1, \\ \tilde{B}_2 &= \frac{(1+\tilde{\alpha}^2)\tilde{\alpha}}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2(1+\tilde{\alpha}^2)^2-6\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1, \\ \tilde{C}_0 &= \frac{(3+10\tilde{\alpha}^2+3\tilde{\alpha}^4)\tilde{\alpha}^2}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2(1+\tilde{\alpha}+\tilde{\alpha}^3)}{(1-\tilde{\alpha}^2)^2}\tilde{A}_1, \\ \tilde{C}_1 &= \frac{8\tilde{\alpha}^3(1+\tilde{\alpha}^2)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_0 - \frac{\tilde{\alpha}^2(1+14\tilde{\alpha}^2+\tilde{\alpha}^4)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_1, \\ \tilde{C}_2 &= \frac{(1+22\tilde{\alpha}^2+\tilde{\alpha}^4)\tilde{\alpha}^2}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_0 - \frac{2\tilde{\alpha}^2(1+5\tilde{\alpha}^2+5\tilde{\alpha}^4+\tilde{\alpha}^6)}{3(1-\tilde{\alpha}^2)^4}\tilde{A}_1, \end{aligned}$$

– коэффициенты Лапласа [10], $F(\tilde{\alpha})$ – эллиптический интеграл первого рода, $E(\tilde{\alpha})$ – эллиптический интеграл второго рода и

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\tau) = \tilde{\alpha}_0 \cdot \frac{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10}}{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10} + \tilde{m}_{20}} \cdot \frac{\tilde{m}_0(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)}{(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_2)}, \quad \tilde{\alpha}_0 = \frac{\tilde{a}_{01}}{\tilde{a}_{02}} = const,$$

$$\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(\tau) = \frac{\tilde{m}_0(\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10})}{(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_2)}, \quad \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(\tau) = \tilde{k}_1 \frac{\tilde{m}_{00} + \tilde{m}_{10} + \tilde{m}_{20}}{\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}.$$

Таким образом, мы доказали следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть в задаче трех тел с массами m_0 , m_1 и m_2 , изменяющимися изотропно, в различных темпах выполняется условие $\frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}$. Тогда эволюционные уравнения – уравнения вековых возмущений описываются восемью линейными неавтономными дифференциальными уравнениями первого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если массы m_0 , m_1 и m_2 постоянные, а также малые величины, тогда системы (12)–(13) превращаются в известные уравнения вековых возмущений для классической двухпланетной задачи трех тел [10].

Решения уравнений (12)–(13) можно получить аналитическими и численными методами и с помощью этих решений проанализировать величины, характеризующие эволюцию системы:

$$\tilde{e}_i^2 = (\xi_{0i}^2 \tilde{\xi}_i^2 + \eta_{0i}^2 \tilde{\eta}_i^2) / \Lambda_{0i} \tilde{\Lambda}_i, \quad \sin^2 \tilde{i}_i = (p_{0i}^2 \tilde{p}_i^2 + q_{0i}^2 \tilde{q}_i^2) / \Lambda_{0i} \tilde{\Lambda}_i, \quad (14)$$

$$\tilde{\Omega}_i = -\arctg(q_{0i} \tilde{q}_i / p_{0i} \tilde{p}_i), \quad \tilde{\pi}_i = -\arctg(\eta_{0i} \tilde{\eta}_i / \xi_{0i} \tilde{\xi}_i), \quad \tilde{\omega}_i = \tilde{\pi}_i - \tilde{\Omega}_i. \quad (15)$$

6 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть законы изменения масс описываются законом Эдингтона-Джинса

$$dm_i/dt = \varepsilon_i m_i^{n_i}.$$

а) Физические начальные условия (M_Θ – масса Солнца, *a.e.* – астрономическая единица):

$$m_0 = m_0(t) = \frac{m_{00}}{1 - \frac{\dot{m}_{00}}{m_{00}} t}, \quad m_{00} = m_0(t_0) = 2M_\Theta, \quad \dot{m}_0(t_0) = -10^{-4,2} M_\Theta / год, \quad (16)$$

$$m_1 = m_1(t) = \frac{m_{10}}{1 - \frac{\dot{m}_{10}}{m_{10}} t}, \quad m_{10} = m_1(t_0) = 2M_\Theta, \quad \dot{m}_1(t_0) = -10^{-4,2} M_\Theta / год, \quad (17)$$

$$m_2 = m_2(t) = \frac{m_{20}}{\sqrt{1 - 2 \frac{\dot{m}_{20}}{m_{20}} t}}, \quad m_{20} = m_2(t_0) = 0,7 M_\Theta, \quad \dot{m}_2(t_0) = -10^{-6} M_\Theta / \text{год}, \quad (18)$$

$$l_{01} = 0^0, \quad \Omega_{01} = 10^0, \quad \omega_{01} = 5^0, \quad \pi_{01} = \Omega_{01} + \omega_{01} = 15^0, \quad i_{01} = 36', \quad e_{01} = 0,01, \\ \Lambda_{01} = \beta_1^* \sqrt{a_{01}}, \quad a_{01} = 3 a.e., \quad \beta_1^* = \sqrt{f \mu_1(t_0) m_{10} m_{00}}, \quad \mu_{10} = \mu_1(t_0) = \frac{m_{00} m_{10}}{m_{10} + m_{00}}, \quad (19) \\ l_{02} = 0^0, \quad \Omega_{02} = 15^0, \quad \omega_{02} = 10^0, \quad \pi_{02} = \Omega_{02} + \omega_{02} = 25^0, \quad i_{02} = 48', \quad e_{02} = 0,02, \\ \Lambda_{02} = \beta_2^* \sqrt{a_{02}}, \quad a_{02} = 12 a.e., \quad \beta_2^* = \sqrt{f \mu_2(t_0) m_{20} (m_{00} + m_{10})},$$

$$\mu_{20} = \mu_2(t_0) = \frac{m_{20} (m_{00} + m_{10})}{m_{00} + m_{10} + m_{20}}, \quad (20)$$

$$\Lambda_{01} = 21,8 \frac{a.e.^2 \cdot M_\Theta}{zod}, \quad \xi_{01} = 0,045 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}}, \quad \eta_{01} = -0,012 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}},$$

$$p_{01} = 0,065 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}}, \quad q_{01} = -0,011 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}},$$

$$\Lambda_{02} = 28,1 \frac{a.e.^2 \cdot M_\Theta}{zod}, \quad \xi_{02} = 0,096 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}}, \quad \eta_{02} = -0,045 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}},$$

$$p_{02} = 0,072 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}}, \quad q_{02} = -0,019 \frac{a.e. \cdot M_\Theta^{1/2}}{zod^{1/2}},$$

$$T_0 = \pi \left(\frac{\mu_{10} a_{01}^{3/2}}{\beta_1^*} + \frac{\mu_{20} a_{02}^{3/2}}{\beta_2^*} \right) \approx 10,9 zod, \quad f = 39,43 \frac{a.e.^3}{M_\Theta \cdot zod^2}.$$

б) Безразмерные начальные условия.

В явном виде примем

$$\tilde{m}_0 = \frac{\tilde{m}_{00}}{1 - \frac{\tilde{m}'_{00}}{\tilde{m}_{00}} \tau}, \quad \tilde{m}_1 = \frac{\tilde{m}_{10}}{1 - \frac{\tilde{m}'_{10}}{\tilde{m}_{10}} \tau}, \quad \tilde{m}_2 = \frac{\tilde{m}_{20}}{\sqrt{1 - 2 \frac{\tilde{m}'_{20}}{\tilde{m}_{20}} \tau}}$$

$$\tilde{m}_{00} = 1,28, \quad \tilde{m}_{10} = 1,28, \quad \tilde{m}_{20} = 0,45,$$

$$\tilde{m}'_{00} = \tilde{m}'_{10} = -6,95 \cdot 10^{-4,2}, \quad \tilde{m}'_{20} = -6,95 \cdot 10^{-6},$$

$$\tilde{a}_{01} = 1,5, \quad \tilde{a}_{02} = 6,$$

$$\tilde{\Lambda}_{0i} = 1, \quad \tilde{\xi}_{0i} = \tilde{\eta}_{0i} = \tilde{p}_{0i} = \tilde{q}_{0i} = 1, \quad \Delta\tau = \frac{1}{10},$$

где $\Delta\tau$ – шаг, т.е. примерно 10 шагов определяют один оборот.

7 ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И СРАВНЕНИЯ С СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЗАДАЧЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ МАССАМИ

Пользуясь системой *Mathematica*, можно получить решения дифференциальных уравнений (12)–(13) при начальных условиях (16)–(20).

Для сравнения и выявления эффектов изменения масс рассмотрим соответствующую задачу с постоянными массами. В этом случае в формулах (1) $\dot{m}_i(t) = 0$, $\dot{m}_i(t_0) = 0$, тогда имеют место интегралы площадей и энергии:

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \sin i_1 \sin \Omega_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \sin i_2 \sin \Omega_2 = 0, \quad (21)$$

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \sin i_1 \cos \Omega_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \sin i_2 \cos \Omega_2 = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{\beta}_1^* \sqrt{\tilde{a}_{01}(1 - \tilde{e}_1^2)} \cos i_1 + \tilde{\beta}_2^* \sqrt{\tilde{a}_{02}(1 - \tilde{e}_2^2)} \cos i_2 = C = const, \quad (23)$$

$$T = \frac{1}{2} [\mu_{10} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \mu_{20} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)], \quad (24)$$

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right),$$

$$T - U = h_0 = const. \quad (25)$$

Для того, чтобы проверить нашу теорию в случае постоянной массы, можно проверить сохранение постоянного значения интегралов в ходе численного интегрирования. Эти расчеты имеют следующие ошибки: первый – 0,0005%, второй – 0,0005%, третий – 0,00002% и интеграл энергии – 0,6%. Сохранение значений интегралов площадей и энергии показывает, что выражения (8) и уравнения вековых возмущений (11) в случае постоянной массы дают высокую точность. Выше отмеченные отклонения постоянных интегралов приведены на рисунках 2-5.

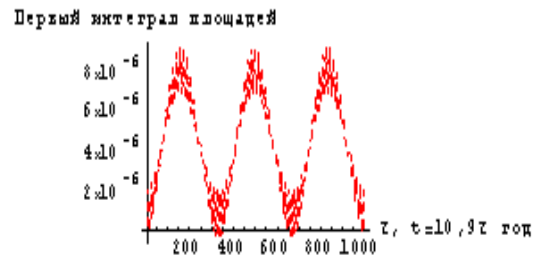


Рисунок 2 – Первый интеграл площадей в случае постоянной массы.

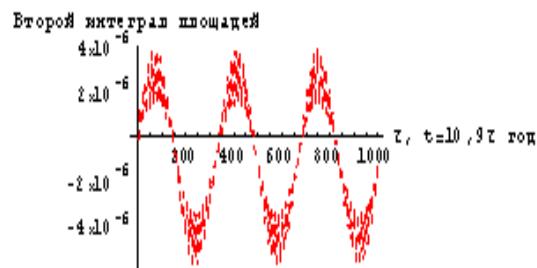


Рисунок 3 – Второй интеграл площадей в случае постоянной массы.

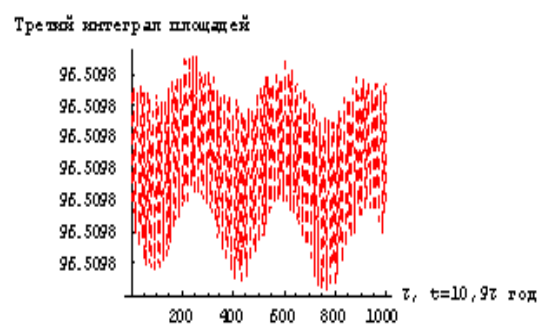


Рисунок 4 – Третий интеграл площадей в случае постоянной массы.

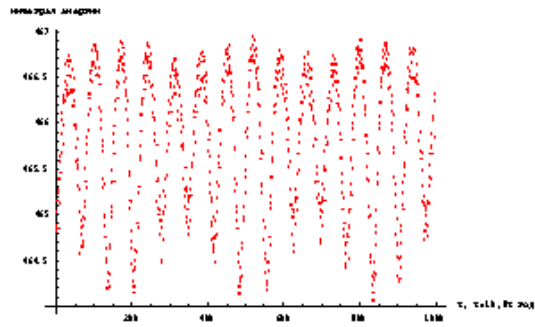


Рисунок 5 – Интеграл энергии в случае постоянной массы.

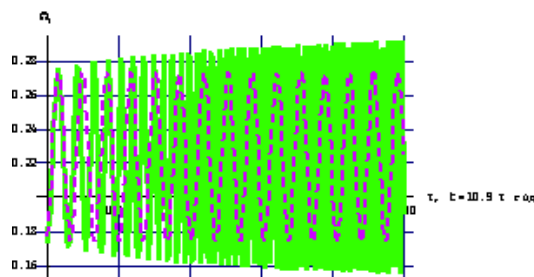


Рисунок 6 – Долгота восходящего узла \tilde{Q}_1 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

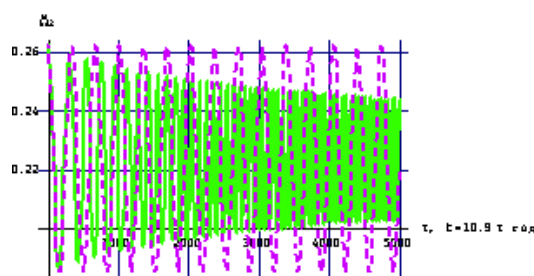


Рисунок 7 – Долгота восходящего узла \tilde{Q}_2 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

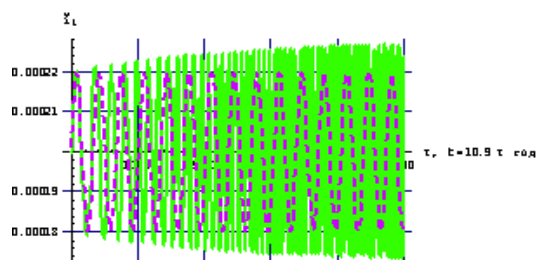


Рисунок 8 – Наклонность \tilde{i}_1 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

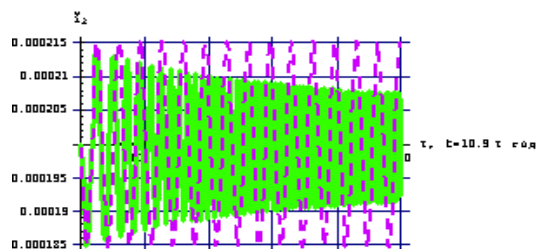


Рисунок 9 – Наклонность \tilde{i}_2 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией – переменная масса.

На основе численных решений системы дифференциальных уравнений (12)–(13) по формулам (14)–(15) можно получить графики изменения аналогов кеплеровских элементов (рисунки 6-9), где $\tilde{i}_i(\text{градус}) = 57,3 \cdot \tilde{i}_i$, $\tilde{\Omega}_i(\text{градус}) = 57,3 \cdot \tilde{\Omega}_i$.

С помощью численных решений системы дифференциальных уравнений (12)–(13) по формулам (14)–(15) можно также получить графики изменения аналогов эксцентриситетов (рисунки 10-11).

В связи с тем, что рисунки 6-11 плохообозримы, приведем отрезки рисунков орбитальных элементов на коротком интервале, где тенденции эволюции элементов будут четко видны (рисунки 12-17).

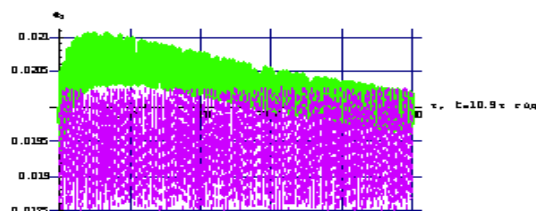


Рисунок 10 – Эксцентриситет \tilde{e}_1 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – линией переменная масса.

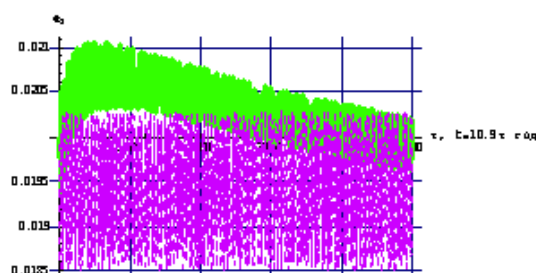


Рисунок 11 – Эксцентриситет \tilde{e}_2 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной линией переменная масса.

Расчеты показывают, что в случае постоянной массы (интервал времени – 545 000 лет) амплитуды колебаний орбитальных элементов $\tilde{\Omega}_i, \tilde{i}_i, \tilde{e}_i$ постоянны. В то же время, в нашей задаче с переменными массами в отличие от задачи с постоянными массами амплитуды меняются со временем. Характер изменения амплитуд приведен на рисунках 18-23, где четко прослеживается эволюционная тенденция.

Из выше проведенного численного анализа систем уравнений вековых возмущений следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть в задаче трех тел с массами m_0, m_1 и m_2 , изменяющимися изотропно, в различных темпах выполняется условие $\frac{\dot{m}_0}{m_0} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}$. Тогда

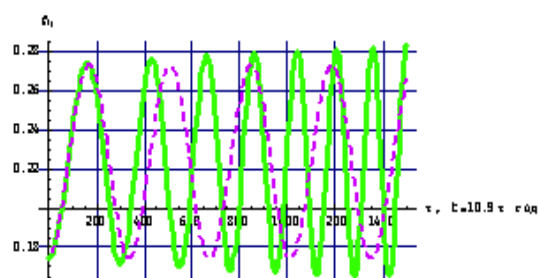


Рисунок 12 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

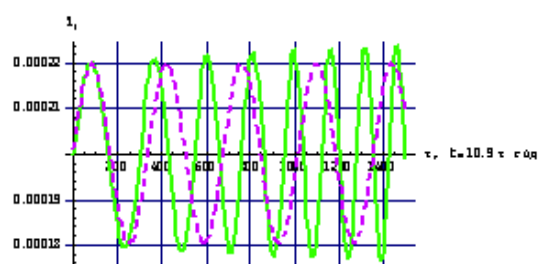


Рисунок 13 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

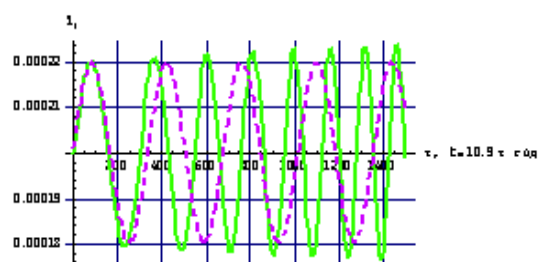


Рисунок 14 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

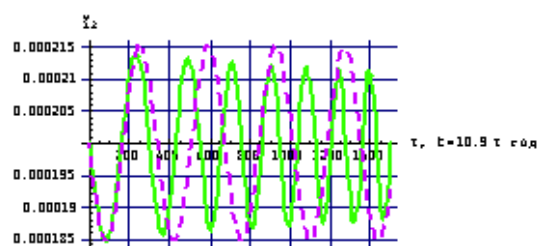


Рисунок 15 – Интервал времени 163 500 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

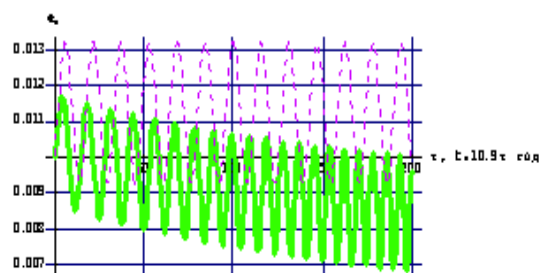


Рисунок 16 – Интервал времени 21 800 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

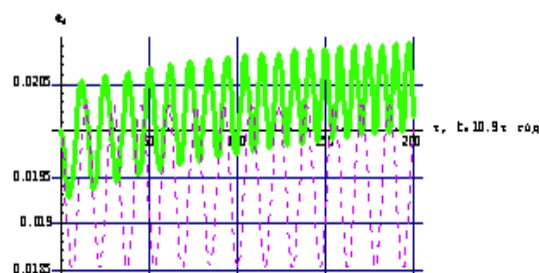


Рисунок 17 – Интервал времени 21 800 лет,
где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

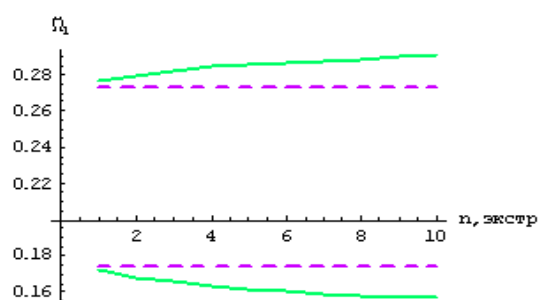


Рисунок 18 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\Omega}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

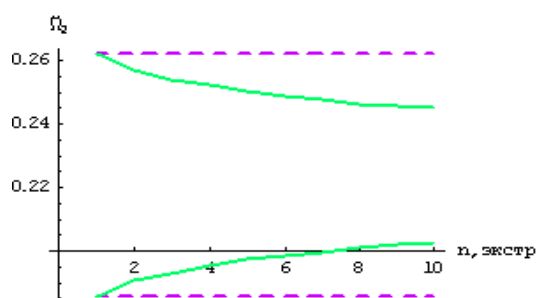


Рисунок 19 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\Omega}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

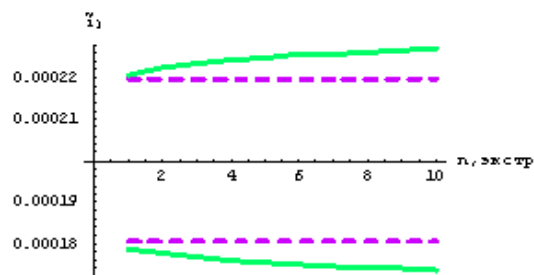


Рисунок 20 – Изменение max и min амплитуд \tilde{i}_1 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

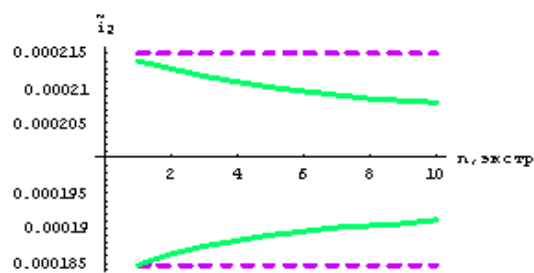


Рисунок 21 – Изменение max и min амплитуд \tilde{i}_2 , где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

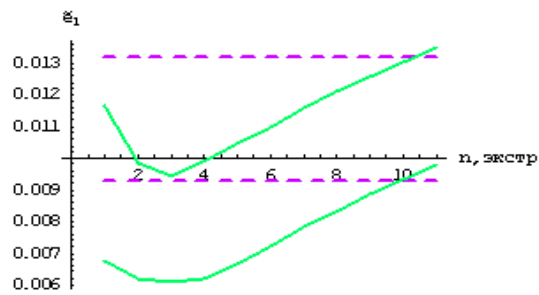


Рисунок 22 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\epsilon}_1$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной – переменная масса.

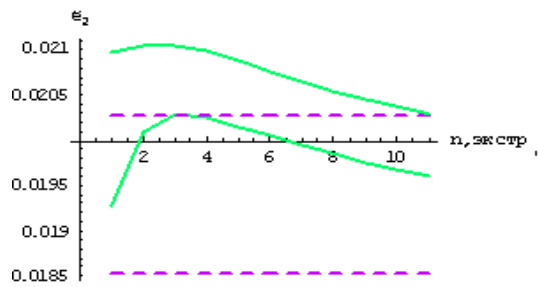


Рисунок 23 – Изменение max и min амплитуд $\tilde{\epsilon}_2$, где пунктиром обозначена постоянная масса, а сплошной переменная масса.

1. неизменность плоскости Лапласа нарушается;
2. восходящий узел орбиты Ω_1 тела μ_1 не совпадает с нисходящим узлом Ω_2 тела μ_1 на основной плоскости.

СЛЕДСТВИЕ 2. Нормаль к плоскости Лапласа эволюционирует по закону

$$c_1(t) = \beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \sin i_1(t) \sin \Omega_1(t) + \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \sin i_2(t) \sin \Omega_2(t),$$

$$c_2(t) = -\beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \sin i_1(t) \cos \Omega_1(t) - \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \sin i_2(t) \cos \Omega_2(t),$$

$$c_3(t) = \beta_1 \sqrt{a_{01}(1-e_1^2(t))} \cos i_1(t) + \beta_2 \sqrt{a_{02}(1-e_2^2(t))} \cos i_2(t).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы орбитальные элементы проблемы трех тел – точек с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. В качестве исходного невозмущенного промежуточного движения использовано аperiодическое движение по квазиконическому сечению. Эксцентриситеты и наклоны орбит тел считаются малыми величинами, а массы тел сравнимы между собой. При этих предположениях, применяя систему аналитических вычислений *Mathematica* [8], вычислены выражения вековой части возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре. Получена новая система из восьми линейных неавтономных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая вековые возмущения. На основе численных решений этих дифференциальных уравнений выявлены эволюционные тенденции орбитальных элементов. Впервые показано, что неизменность ориентации плоскости Лапласа нарушается и восходящий узел орбиты Ω_1 тела μ_1 не совпадает с нисходящим узлом Ω_2 тела μ_2 на основной плоскости.

Работа частично финансирована грантом 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК 2012-2014 гг.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. – Нижний Новгород: НИРФИ, 1985. – 430 с.
- 2 Ласкар Ж. Крупномасштабный хаос и маргинальная устойчивость в Солнечной системе. - в кн.: Резонансы в небесной механике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 247-305.
- 3 Коррейя А., Ласкар Ж. Четыре конечных положения оси вращения Венеры. - в кн.: Резонансы в небесной механике. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – С. 305-316.
- 4 Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алматы: Наука, 1975. – 143 с.
- 5 Omarov T.B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. – New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. – 248 с.
- 6 Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions. – 2003. – Т. 22. – P. 145.
- 7 Минглибаев М.Ж. Динамика нестационарных гравитирующих систем. – Алматы: Изд. КазНУ, 2009. – 209 С.
- 8 Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars. – UK: Cambridge University Press, 2006. – 332 p.
- 9 Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журнал. – 2008. – Т. 85, № 8. – С. 755-768.
- 10 Шарлье К. Небесная механика. – Москва, 1966. – 628 С.
- 11 Minglibayev M., Mayemerova G. Secular perturbations in the three-body problem with variable masses // The Sixth Int. Workshop. Computer algebra systems in teaching and research. – Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2011. – P. 198-204.
- 12 Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы *MATHEMATICA*. – Брест: Изд. БГТУ, 2005. – 260 с.

Статья поступила в редакцию 01.09.12

Мамерова Г.М., Минглибаев М.Дж. МАССАЛАРЫ АЙНЫМАЛЫ
ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНДЕГІ ЛАПЛАС ЖАЗЫҚТЫҒЫ ОРИЕНТАЦИ-
ЯСЫНЫҢ БҰЗЫЛУЫ

Пуанкаре элементтерінің екінші жүйесінің аналогтары – оскуляциялаушы айнымалыларда массалары айнымалы үш дене мәселесінің жаңа теңдеулері алынды. Модификацияланған оскуляциялаушы айнымалылар жүйесінде түрткілеуші функцияның өрнегі Mathematica аналитикалық есептеу жүйесі арқылы қорытып шығарылды. Түрткілеуші функцияның негізінде алғаш рет мәселенің эволюциялық теңдеулері – ғасырлық түрткілеудің канондық автономды емес теңдеулері табылды. Ғасырлық түрткі теңдеулерін сандық тәсілдермен талдау нәтижесінде тұрақты Лаплас жазықтығының массалардың әр түрлі қарқында өзгеру салдарынан осы жазықтықтың ориентациясы өзгеретіні көрсетілді. "Массасы μ_1 дененің" жоғарылау түйіні "массасы μ_2 дененің" құлдырау түйінімен сәйкес келмейтіндігі анықталды.

Mayemerova G.M., Minglibayev M.Zh. ON DISORIENTATION OF
LAPLACE PLANE IN THREE-BODY PROBLEM WITH VARYING
MASSES

In three-body problem with variable masses there are obtained new equations in osculating elements – the analogues of the second system of Poincare elements. Perturbing function in the modified osculating variables is calculated by the system of analytical calculations Mathematica. On the basis of the derived perturbing function there are obtained for the first time the evolution equations of the problem, which are non-autonomous canonical equations of the secular perturbations. By numerical analysis of the equations of secular perturbations it is found that due to changes of masses in different rates the immutability of Laplace plane is broken, the ascending node "of the body with mass" μ_1 does not coincide with the descending node "of the body with mass" μ_2 .

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе \LaTeX -2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf-файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми ад-

ресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, №1 (47), 2013

Подписано в печать 28.05.2013 г.
Тираж 300 экз. Объем 143 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: <http://www.math.kz>