ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

Том 13   № 2 (48)   2013

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, № 2 (48), 2013

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 13 **№ 2 (48)** **2013**

CONTENTS

Volume 13 **No. 2 (48)** **2013**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.938

С.А. Айсагалиев, И.В. Севрюгин

КазНУ им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Предлагаются методы построения программного и позиционного управлений для процессов, описываемых линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений. Разработан алгоритм решения задачи оптимального быстродействия. Решены две задачи: существование решения задачи управляемости и построение множества всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из любого начального состояния в заданное конечное состояние.
Ключевые слова: *динамическая система, интегральные системы, программное управление, позиционное управление, оптимальное быстродействие.*

1 Введение

Теория управляемости берёт своё начало с работы Р.Е. Калмана [1]. Им построено управление с минимальной нормой и получен ранговый критерий управляемости для линейных систем с постоянными параметрами. Решение задачи управляемости на основе l-проблемы моментов было предложены Н.Н. Красовским [2]. Отдельные вопросы управляемости:

Keywords: *dynamic system, integral systems, program control, position control, optimal velocity*
2010 Mathematics Subject Classification: 34C05, 34C07, 34C25

наименьшая размерность вектора управления, управляемость нелинейных систем с малым параметром, управляемость линейных систем с последействием исследованы в работах [3, 4]. Обзор состояния проблемы управляемости до начала XXI века приведён в [5]. Общая задача управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений сформулирована в монографии [6]. В последние годы опубликован ряд научных статей, посвященных проблемам управляемости и оптимального быстродействия динамических систем. Синтезу ограниченного управления (позиционное управление) линейными динамическими системами на основе функций Ляпунова посвящена работа [7]. Геометрический подход к проблеме управляемости неавтономных линейных систем исследован в [8].

Проблема управляемости тесно связана с решением проблем стабилизации динамических систем. В работе [9] рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия билинейных и аффинных систем канонического вида. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем исследованы в [10]. Следует отметить, что в указанных работах [1-10] исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений. Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются: необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи оптимальности и быстродействия; конструктивный метод построения решения общей задачи управляемости и быстродействия для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решению указанных проблем посвящена данная работа, и она является продолжением научных исследований изложенных в [4, 5, 11-14].

Постановка задачи

Рассмотрим процессы, описываемые линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mu(t),\ t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t);\ G(t) = \{x \in R^n/\ \omega(t) \le L(t)x + l(t) \le \varphi(t), t \in I\}, \qquad (3)$$

интегральных ограничений

$$g_j(x,u) \le c_j,\ j = \overline{1, m_1};\ g_j(x,u) = c_j,\ j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \qquad (4)$$

$$g_j(x,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [< a_j(t), x > + < b_j(t), u >]dt,\ j = \overline{1, m_2}, \qquad (5)$$

и с ограничением на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)/\ u(t) \in V(t) \subset R^m \text{ п.в.}, t \in I\}. \qquad (6)$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, S_0, S_1 – заданные ограниченные выпуклые замкнутые множества, $L(t)$, $t \in I$, – заданная матрица порядка $s \times n$ с кусочно-непрерывными элементами, $l(t)$, $t \in I$, – известная вектор-функция $s \times 1$ с кусочно-непрерывными элементами, $\omega(t)$, $\varphi(t)$, $t \in I$, – заданные непрерывные вектор-функции $s \times 1$, $a_j(t)$, $b_j(t)$, $j = \overline{1,\ m_2}$ заданные кусочно-непрерывные вектор-функции порядков $n \times 1$, $m \times 1$ соответственно, c_j, $j = \overline{1, m_2}$ – известные постоянные, $V(t)$, $t \in I$, – заданное выпуклое замкнутое множество в R^m, $U = U(t)$, $t \in I$, – заданное выпуклое замкнутое множество из $L_2(I, R^m)$, $\mu(t)$, $t \in I$, – заданная вектор-функция с кусочно-непрерывными элементами.

Введем следующие определения для задачи (1)–(6).

Определение 1. *Если управление $u(t) \in U$, $t \in I$, переводит траекторию системы (1) из точки $x_0 \in R^n$ в точку $x_1 \in R^n$ при фиксированных t_0, $t_1 > t_0$ и условиях (2)–(6), то система (1) при условиях (2)–(6) называется управляемой, а управление $u(t)$, $t \in I$, – программным управлением. Если $u(t) = u(x(t), t) \in U$, то управление $u(x,t)$ называется позиционным.*

Определение 2. *Пусть t_0 – фиксирована, а величина t_1 не фиксирована. Пара $(u(t), x(t,u))$, $t \in I$, соответствующая наименьшему значению t_1, удовлетворяющая (1)–(6), называется решением задачи оптимального быстродействия.*

Задача 1. *Найти программное управление* $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, *которое переводит траекторию системы (1) из начальной точки* $x_0 = x(t_0) \in S_0 \subset R^n$ *в момент времени* t_0 *в точку* $x_1 = x(t_1) \in S_1 \subset R^n$, $t_1 > t_0$, *при этом решение системы (1)* $x(t) = x(t; t_0, x_0, u)$, $x_0 \in S_0$, $x_1 = x(t_1) \in S_1$, *находится на множестве* $G(t) \subset R^n$. *Вдоль решения системы (1) выполнены интегральные ограничения (4), (5).*

Задача 2. *Найти позиционное управление* $u(x,t) \in U$ *для системы (1) при условиях (2)–(6).*

Задача 3. *Пусть* t_0 *– заданный момент времени, величина* $t_1 > t_0$ *не фиксирована. Найти программное управление* $u(t) \in U$, *которое переводит траекторию системы (1) из начальной точки* $x_0 = x(t_0) \in S_0$ *в заданную точку* $x_1 \in S_1$ *за кратчайшее время* $t_{1*} - t_0$ *при условиях (2)–(6), где* t_{1*} *– наименьшее значение* t_1.

Задачи 1–3 являются актуальными как для математической теории управления, так и для решения многих прикладных задач: управление ядерными и химическими реакторами, управление движением космических аппаратов, управление многосекторными моделями экономики и другие [15].

Преобразование

Рассмотрим интегральные ограничения (4), (5). Введём вектор-функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$, следующим образом:

$$\eta_j(t) = \int_{t_0}^{t} [< a_j(\tau), x(\tau) > + < b_j(\tau), u(\tau) >] d\tau, \ j = \overline{1, m_2}, \ t \in I. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$\dot{\eta} = A_0(t)x + B_0(t)u(t), \ t \in I, \quad (8)$$

$$\eta(t_1) = \overline{c}, \ \overline{c} \in \Omega_1 = \{\overline{c} \in R^{m_2} / \ \overline{c}_j = c_j - d_j, \ j = \overline{1, m_1}, \ \overline{c}_j = c_j,$$
$$j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \ d_j \geq 0, \ j = \overline{1, m_1}\}, \ \eta(t_0) = 0. \quad (9)$$

Введём следующие векторы и матрицы:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \ A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{nm_2} \\ A_0(t) & O_{m_2m_2} \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ B_0(t) \end{pmatrix}, \ \mu_1(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_21} \end{pmatrix}$$

где O_{kq} – прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \ B_0(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_{m_2}(t) \end{pmatrix}, \ t \in I,$$

– матрицы порядков $m_2 \times n$, $m_2 \times m$ соответственно.

Теперь соотношение (1)–(6) запишется в виде

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u + \overline{\mu}_1(t), \ t \in I, \tag{10}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \eta(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_21} \end{pmatrix}, \ \xi(t_1) = \xi_1 = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ \eta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1, \ \xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_21}, \ \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times \Omega_1, \tag{12}$$

$$P\xi(t) = x(t) \in G(t); \ P = (I_n, O_{nm_2}), \ u(t) \in U(t), \ t \in I, \tag{13}$$

где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ – матрицы порядков $(n+m_2) \times (n+m_2)$, $(n+m_2) \times m$ соответственно, $\overline{\mu}(t)$ – известная вектор функция порядка $(n+m_2) \times 1$, функция $\eta(t)$, $t \in I$, – решение уравнения (8), множество Ω_1 из условий (9).

Заметим, что соотношения (1)–(6) равносильны (10)–(13). Тогда задачи 1–3 равносильны следующим задачам:

Задача $1'$. *Найти программное управление $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, которое переводит траекторию системы (10) из начальной точки $\xi_0 = \xi(t_0) \in S_0 \times O_{m_21}$ в момент времени t_0 в точку $\xi_1 = \xi(t_1) \in S_1 \times \Omega_1$, $t_1 > t_0$, при этом решение системы (10) функция $\xi(t) = \xi(t; t_0, \xi_0, u)$, $t \in I$, такая, что $P\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$.*

Задача $2'$. *Найти позиционное управление $u(P\xi, t) = u(P\xi(t), t) \in U$ для*

системы (10) при условиях (11)–(13).
Задача $3'$. *Найти программное управление $u(t) \in U$, которое переводит траекторию системы (10) из начальной точки $\xi_0 \in S_0 \times O_{m_2 1}$ в заданную точку $\xi_1 \in S_1 \times \Omega_1$ за кратчайшее время $t_{1_*} - t_0$ при условиях $P\xi(t) \in G(t)$, $t \in [t_0, t_{1_*}]$, где t_{1_*} – наименьшее значение t_1.*

Интегральные уравнения

Для решения задачи управляемости и быстродействия необходимы следующие теоремы о свойствах решений интегрального уравнения Фредгольма первого рода из работ [11, 12]. Рассмотрим интегральные уравнения следующего вида:

$$Ku \equiv \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \; t \in I = [t_0, t_1], \tag{14}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – известная матрица порядка $m \times n$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – искомая функция, $K : L_2(I, R^m) \to R^n$ – оператор, $a \in R^n$ – заданный вектор.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (14) при любом фиксированном $a \in R$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt \tag{15}$$

*порядка $n \times n$ является положительно определенной, где * – знак транспонирования, $t_1 > t_0$.*

Теорема 2. *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (14) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + v(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt, \; t \in I, \tag{16}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *– произвольная функция,* $a \in R^n$ *– произвольный вектор.*

Решения уравнения (14) обладают следующими свойствами:

1) функция $u(t)$, $t \in I$, определяемая формулой (16), может быть представлена в виде суммы $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, $t \in I$, где $u_1(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a$, $t \in I$, – частное решение интегрального уравнения (14), $u_2(t) = v(t) - K^*(t_0, t) \cdot C^{-1}(t_0, t_1) \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt$, $t \in I$, $\forall v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – общее решение однородного интегрального уравнения $\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u_2(t)dt = 0$;

2) функции $u_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $u_2(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ ортогональны, т.е. $u_1 \perp u_2 :\ < u_1, u_2 >_{L_2} = 0$;

3) функция $u_1(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a$, $t \in I$, – является решением интегрального уравнения (14) с минимальной нормой в $L_2(I, R^m)$.

Существование решения

Решение дифференциального уравнения (10) имеет вид

$$\xi(t) = \Phi(t, t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B_1(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mu_1(\tau)d\tau,\ t \in I,$$

где $\Phi(t, \tau) = \overline{\theta}(t)\overline{\theta}^{-1}(\tau)$, $\overline{\theta}(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{y} = A_1(t)y$. Поскольку $\xi(t_1) = \xi_1$, то

$$\xi_1 = \xi(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B_1(t)u(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\overline{\mu}(t)dt.$$

Отсюда следует, что искомое управление $u(t) \in U(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_1(t)u(t)dt = a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu_1(t)dt. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть матрица*

$$W(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt$$

порядка $(n+m_2)\times(n+m_2)$ *положительно определена. Тогда управление* $u(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ *переводит траекторию системы (10) из любой начальной точки* $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ *в любое конечное состояние* $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ *тогда и только тогда, когда*

$$u(t)\in\Lambda = \{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)/\ u(t) = v(t) + T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 +$$
$$+N_1(t)z(t_1,v) + \mu_2(t),\ \forall v,\ v(\cdot)\in L_2(I,R^m)\}, \tag{18}$$

где

$$T_1(t) = -B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1),\ T_2(t) = B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$
$$N_1(t) = -B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\ \mu_2(t) = -B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)$$
$$\times W^{-1}(t_0,t_1)(\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu_1(t)dt),$$

функция $z(t,v)$, $t\in I$, *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot z = A_1(t)z + B_1(t)v,\ z(t_0) = 0,\ v(\cdot)\in L_2(I,R^m). \tag{19}$$

Решение дифференциального уравнения (10), соответствующее управлению $u(t)\in\Lambda$, *определяется по формуле*

$$\xi(t) = z(t,v) + E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \mu_3(t) + N_2(t)z(t_1,v),\ t\in I, \tag{20}$$

где

$$E_1(t) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1),\ E_2(t) = \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$
$$\mu_3 = \int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu_1(\tau)d\tau - \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu_1(t)dt,$$
$$N_2(t) = -\Phi(t_1,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\ t\in I.$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (17) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица (см. (15))

$$C(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt=W(t_0,t_1)$$

порядка $(n+m_2)\times(n+m_2)$ является положительно определённой, где $K(t_0,t)=\Phi(t_0,t)B_1(t)$, $t\in I$. Следовательно, множество $\Lambda\neq\Phi$, где Φ - пустое множество. Из теоремы 2 следует, что общее решение интегрального уравнения (17) имеет вид (см. (16))

$$u(t)=B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)v(t)dt,\ \forall v,\ v(\cdot)\in L_2(I,R^m), \tag{21}$$

где $a=\Phi(t_0,t_1)\xi_1-\xi_0-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu_1(t)dt$.

Решение дифференциального уравнения (19) можно представить в виде

$$z(t,v)=\Phi(t,t_0)z(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau,$$

где $z(t_0)=0$. Следовательно,

$$z(t_1,v)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)B_1(t)v(t)dt=\Phi(t_1,t_0)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_1(t)v(t)dt \tag{22}$$

Из (21), (22) следует, что искомое управление $u(t)$, $t\in I$, определяется по формуле (18).

Пусть $u(t)\in\Lambda$. Тогда решение дифференциального уравнения (10) можно представить в виде (20). Теорема доказана. $\square$

Как следует из теоремы 3, множество всех возможных управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы (10) из ξ_0 в ξ_1, определяется по формуле (18). Для решения задачи 1 (либо задачи $1'$) следует найти управление $u(t) \in U \times \Lambda$ из пересечения множеств U и Λ.

Следовательно, необходимо решить следующие две задачи: 1) пересечение U и Λ – непустое множество т.е. $U \cap \Lambda \neq \Phi$; 2) найти точки из множества $\Sigma = U \cap \Lambda$, когда $\Sigma \neq \Phi$.

Решения указанных задач могут быть сведены к решению следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$I(v,u,x_0,x_1,d,w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [|v(t) + T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + N_1(t)z(t_1,v)+$$

$$+\mu_2(t) - u(t)|^2 + |w(t) - L(t)P\xi(t) - l(t)|^2]dt \to \inf \tag{23}$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v,\ z(t_0) = 0,\ v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{24}$$

$$x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1,\ d \in D = \{d \in R^{m_1} /\ d \geq 0\}, \tag{25}$$

$$u(t) \in U(t),\ w(t) \in W(t) = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^s) /\ \omega(t) \leq w(t) \leq \varphi(t),\ \text{п.в.},\ t \in I\}. \tag{26}$$

Заметим, что

$$T_1(t)\xi_0 = T_1(t)\begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix} = (T_{11}(t), T_{12}(t))\begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix} = T_{11}(t)x_0;$$

$$T_2(t)\xi_1 = T_2(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix} = (T_{21}(t), T_{22}(t))\begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix} = T_{21}(t)x_1 + T_{22}(t)\overline{c} =$$

$$= T_{21}(t)x_1 + (\Sigma_1(t), \Sigma_2(t))\begin{pmatrix} \overline{c}_1 - d \\ \overline{c}_2 \end{pmatrix} = T_{21}(t)x_1 - \Sigma_1(t)d + T_{22}\overline{c};$$

$$E_1(t)\xi_0 = (E_{11}(t), E_{12}(t))\begin{pmatrix} x_0 \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix} = E_{11}(t)x_0,\ E_2(t)\xi_1 = (E_{21}(t),$$

$$E_{22}(t))\begin{pmatrix} x_1 \\ \overline{c} \end{pmatrix} = E_{21}(t)x_1 + (F_1(t), F_2(t))\begin{pmatrix} \overline{c}_1 - d \\ \overline{c}_2 \end{pmatrix} = E_{21}(t)x_1 - F_1(t)d+$$

$$E_{22}\bar{c},\ \bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_{m_2}).$$

Теперь оптимизационная задача (23)–(26) запишется

$$I(v,u,x_0,x_1,d,w) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [|v(t) + T_{11}(t)x_0 + T_{21}(t)x_1 - \Sigma_1(t)d + \mu_4(t)+$$

$$+N_1(t)z(t_1,v) - u(t)|^2 + |w(t) - L(t)P[z(t,v) + E_{11}(t)x_0 + E_{21}(t)x_1-$$
$$-F_1(t)d + \mu_5(t) + N_2(t)z(t_1,v)] - l(t)|^2]dt \to \inf \qquad (27)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v(t),\ z(t_0) = 0,\ v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \qquad (28)$$

$$u(t) \in U(t),\ x_0 \in S_0,\ x_1 \in S_1,\ w(t) \in W(t),\ d \in D, \qquad (29)$$

где $\mu_4(t) = \mu_2(t) + T_{22}(t)\bar{c}$, $\mu_5(t) = \mu_3(t) + E_{22}(t)\bar{c}$.

Пусть

$$\theta(t) = (v(t), u(t), x_0, x_1, d, w(t)) \in X = L_2(I,R^m)\times U\times S_0\times S_1\times D\times W \subset H =$$
$$= L_2(I,R^m) \times L_2(I,R^m) \times R^n \times R^n \times R^{m_1} \times L_2(I,R^s),$$
$$q(t) = (\theta(t), z(t_1,v), z(t,v)),$$
$$F_0(q(t),t) = |v(t) + T_{11}(t)x_0 + T_{21}(t)x_1 - \Sigma_1(t)d + \mu_4(t) + N_1(t)z(t_1,v)-$$
$$-u(t)|^2 + |w(t) - L(t)P[z(t,v) + E_{11}(t)x_0 + E_{21}(t)x_1 - F_1(t)d + \mu_5(t)+$$
$$N_2(t)z(t_1,v)] - l(t)|^2.$$

Тогда оптимизационная задача (27)–(29) может быть сформулирована следующим образом: требуется минимизировать функционал

$$I(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q(t),t)dt \to \inf \qquad (30)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v,\ z(t_0) = 0,\ \theta(t) \in X \subset H,\ t \in I. \qquad (31)$$

Теорема 4. *Пусть* $S_0 \subset R^n$, $S_1 \subset R^n$, $U(t) \subset L_2(I, R^m)$ *– ограниченные выпуклые замкнутые множества и пусть, кроме того,*

$$d \in D_{\rho_0} = \{d \in R^{m_1} /\ d \geq 0,\ |d| \leq \rho_0\},\ v(\cdot) \in L_2^{\rho}(I, R^m) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^m)/$$

$$\|v\| \leq \rho\},\ W(t_0, t_1) > 0,$$

где $\rho_0 > 0$, $\rho > 0$ *- достаточно большие числа.*

Тогда

1) функционал $I(\theta)$, $\theta \in X_1 = L_2^{\rho}(I, R^m) \times U \times S_0 \times S_1 \times D_{\rho_0} \times W$ *является выпуклым;*

2) функционал $I(\theta)$, $\theta \in X_1$ *достигает нижней грани на множестве* $X_1 \subset X \subset H$, $I(\theta_*) = I_* = \inf_{\theta \in X_1} I(\theta)$, $\theta_* \in X_* \subset X_1$*;*

3) для существования программного управления необходимо и достаточно, чтобы $I(\theta) = 0$, $\theta_* \in X_*$.

Доказательство. Как следует из условия теоремы, X_1 – ограниченное выпуклое замкнутое множество в H. Так как функция $F_0(q,t) \geq 0$ является квадратичной формой относительно q, то она представима в виде $F_0(q,t) = q^* Q(t) q + 2q^* a(t) + b(t)$, $t \in I$, где $Q(t) = Q^*(t) \geq 0$, $t \in I$. Тогда $\frac{\partial^2 F_0(q,t)}{\partial q^2} = 2Q(t) \geq 0$, $t \in I$. Следовательно, $F_0(q,t)$ является выпуклой функцией относительно переменной q, $z(t, \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2) = \alpha z(t, v_1) + (1-\alpha) z(t, v_2)$, $t \in I$. Так как $F_0(\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2, t) \leq \alpha F_0(q_1, t) + (1-\alpha) F_0(q_2, t)$, $t \in I$, $\forall q_1, q_2$, $\forall \alpha$, $\alpha \in [0,1]$, то

$$I(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\alpha q_1(t) + (1-\alpha) q_2(t), t) dt \leq \alpha \int_{t_0}^{t_1} F_0(q_1(t), t) dt +$$

$$+ (1-\alpha) \int_{t_0}^{t_1} F_0(q_2(t), t) dt = \alpha I(\theta_1) + (1-\alpha) I(\theta_2),\ \forall \theta_1, \theta_2 \in X_1,\ \forall \alpha,\ \alpha \in [0,1].$$

Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение теоремы следует из слабой полунепрерывности снизу функционала $I(\theta)$ на слабо бикомпактном множестве X_1 в рефлексивном пространстве H.

Необходимость третьего утверждения теоремы непосредственно следует из теоремы 3 и $U \bigcap \Lambda \neq \Phi$ ($\Phi = \emptyset$), а достаточность – из условия $I(\theta_*) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Програмное управление

Как следует из теоремы 4, программное управление может быть найдено из условия $I(\theta_*) = 0$, $\theta_* \in X_* \subset X_1 \subset X \subset H$. Если $I(\theta_*) = 0$, то искомое программное управление имеет вид

$$u_*(t) = v_*(t) + T_{11}(t)x_{o*} + T_{21}(t)x_{1*} - \Sigma_1(t)d_* + \mu_4(t) + \\ + N_1(t)z(t_1, v_*) \in U(t), \ t \in I, \qquad (32)$$

а функция $x_*(t)$ определяется по формуле

$$x_*(t) = P[z(t, v_*) + E_{11}(t)x_{0*} + E_{21}(t)x_{1*} - F_1(t)d_* + \mu_5(t) + \\ + N_2(t)z(t_1, v_*)] \in G(t), \ t \in I, \qquad (33)$$

где $\theta_*(t) = (v_*(t), u_*(t), x_{0*}, x_{1*}, d_*, w_*(t)) \in X_*$

Теорема 5. *Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда функционал (23) при условиях (24)–(26) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$I'(\theta) = (I'_v(\theta), I'_u(\theta), I'_{x_0}(\theta), I'_{x_1}(\theta), I'_d(\theta), I'_w(\theta)) \in H$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} I'_v(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial v} - B_1^*(t)\psi(t), & I'_u(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial u}, \\ I'_{x_0}(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial x_0}, & I'_{x_1}(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial x_1}, \\ I'_d(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial d}, & I'_w(\theta) &= \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial w}, \end{aligned} \qquad (34)$$

где $z(t, v)$ – решение дифференциального уравнения (24), а функция $\psi(t)$, $t \in I$, – решение сопряжённой системы

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial z} - A_1^*(t)\psi(t), \ \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial z(t_1)} dt. \qquad (35)$$

Кроме того, градиент $I'(\theta) \in H$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|I'(\theta_1) - I'(\theta_2)\| \leq l\|\theta_1 - \theta_2\|, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in X. \qquad (36)$$

Доказательство. Пусть $\theta(t) = (v(t), u(t), x_0, x_1, d, w(t)) \in X$, $\theta + \Delta\theta = (v(t) + h(t), u(t) + \Delta u(t), x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, d + \Delta d, w(t) + \Delta w(t)) \in X$. Тогда приращение функционала определяется по формуле

$$\Delta I = I(\theta + \Delta\theta) - I(\theta) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [F_0(q(t) + \Delta q(t), t) - F_0(q(t), t)]dt,$$

где $q(t) + \Delta q(t) = (\theta(t) + \Delta\theta(t), z(t_1, v) + \Delta z(t_1, v), z(t, v) + \Delta z(t, v))$,

$$|\Delta z(t)| \le \int\limits_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)B_1(\tau)\||h(\tau)|d\tau \le C_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} |h(t)|dt \le C_2\|h\|_{L_2},\ t \in I,$$

$C_1 = \sup \|\Phi(t,\tau)B_1(\tau)\|$, $t_0 \le t, \tau \le t_1$, $C_2 = C_1\sqrt{t_1 - t_0}$.

Так как $F_0(q, t)$ имеет непрерывные производные по q и производные удовлетворяют условию Липшица, то

$$\begin{gathered} \Delta I = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{h^*(t)[F_{0v}(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t)]+ \\ +\Delta u^*(t)F_{0u}(q(t), t) + \Delta x_0^* F_{0x_0}(q(t), t)+ \\ \Delta x_1^* F_{0x_1}(q(t), t) + \Delta d^* F_{0d}(q(t), t) + \Delta w^* F_{0w}(q(t), t) + \sum_{i=1}^{8} R_i, \end{gathered} \tag{37}$$

где $|R| = |\sum_{i=1}^{8} R_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \le C_3\|\Delta\theta\|^2$. Тогда из (37) следует, что градиент $I'(\theta)$ определяется по формуле (34), где $\psi(t)$, $t \in I$ - решение уравнения (35).

Пусть $\theta_1 = \theta + \Delta\theta$, $\theta_2 = \theta$. Тогда из (34) следует

$$I'(\theta_1) - I'(\theta_2) = \big(F_{0v}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{0v}(q(t), t) - B_1^*(t)\Delta\psi(t),$$

$$F_{0u}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{0u}(q(t), t), \int\limits_{t_0}^{t_1} [F_{0x_0}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{0x_0}(q(t), t)]dt,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [F_{0x_1}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{0x_1}(q(t), t)]dt, \int\limits_{t_0}^{t_1} [F_{0d}(q(t) + \Delta q(t), t) - F_{0d}(q(t), t)]dt,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [F_{0w}(q(t)+\Delta q(t),t) - F_{0w}(q(t),t)]dt\big)$$

и

$$|I'(\theta_1) - I'(\theta_2)| \le C_4|\Delta q(t)| + C_5|\Delta\psi(t)| + C_6\|\Delta q\|,$$

$$\|I'(\theta_1) - I'(\theta_2)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} |I'(\theta_1) - I'(\theta_2)|^2 dt \le C_7\|\Delta q\|^2 + C_8 \int\limits_{t_0}^{t_1} |\Delta\psi(t)|^2 dt, \tag{38}$$

где

$$|\Delta q(t)| \le |h(t)| + |\Delta u(t)| + |\Delta x_0| + |\Delta x_1| + |\Delta d| + |\Delta w(t)| + |\Delta z(t_1)| + |\Delta z(t)|,$$

$$\|\Delta q\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\Delta q(t)|^2 dt \le C(\|h\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\Delta x_0\|^2 + \|\Delta x_1\|^2 + \|\Delta d\|^2 + \|\Delta w\|^2).$$

Так как

$$\Delta\dot{\psi}(t) = F_{0z}(q(t)+\Delta q(t),t) - F_{0z}(q(t),t) - A_1^*(t)\Delta\psi(t),\ t \in I,$$

$$\Delta\psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} [F_{0z(t_1)}(q(t)+\Delta q(t),t) - F_{0z(t_1)}(q(t),t)]dt,$$

то, применяя лемму Гронуолла, получим

$$|\Delta\psi(t)| \le C_9\|\Delta q\|,\ t \in I. \tag{39}$$

Из оценок (38),(39) имеем $\|I'(\theta_1) - I'(\theta_2)\| \le l_3\|\theta_1 - \theta_2\|, \forall\theta_1,\theta_2 \in X$. Теорема доказана. □

Для решения оптимизационной задачи (30), (31) строим последовательности $\{\theta_n\} \subset X_1 \subset X$ по алгоритму:

$$\begin{array}{ll} v_{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_n - \alpha_n I'_v(\theta_n)], & u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n I'_u(\theta_n)], \\ x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n I'_{x_0}(\theta_n)], & x_{1n+1} = P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n I'_{x_1}(\theta_n)], \\ d_{n+1} = P_{D_{\rho_0}}[d_n - \alpha_n I'_d(\theta_n)], & w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n I'_w(\theta_n)]. \end{array} \tag{40}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,\ 0 < \epsilon_0 \le \alpha_n \le \frac{2}{l + 2\epsilon_1},\ \epsilon_1 > 0$$

где $l = const > 0$ – постоянная Липшица из (36).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4, последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ определяется соотношениями из (40). Тогда*
1) последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ является минимизирующей, $\lim_{n\to\infty} I(\theta_n) = I_* = \inf_{\theta\in X_1} I(\theta)$;
2) последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ слабо сходится к множеству $X_* \subset X_1$, где $v_n \xrightarrow{сл} v_*$, $u_n \xrightarrow{сл} u_*$, $x_{0n} \xrightarrow{сл} x_{0*}$, $x_{1n} \xrightarrow{сл} x_{1*}$, $d_n \xrightarrow{сл} d_*$, $w_n \xrightarrow{сл} w_*$ при $n \to \infty$, $\theta_* = (v_*, u_*, x_{0*}, x_{1*}, d_*, w_*) \in X_* = \{\theta_* \in X_1/\ I(\theta_*) = I_* = \inf_{\theta\in X_1} I(\theta)\}$;
3) справедлива следующая оценка скорости сходимости: $I(\theta_n) - I_* \le c_0/n$, $c_0 = const > 0$, $n = 1, 2, \dots$;
4) функция $u_*(t) \in U$ есть искомое программное управление тогда и только тогда, когда $I(\theta_*) = 0$, где $u_*(t)$, $t \in I$, – слабо предельная точка последовательности $\{u_n\} \subset U$.

Доказательство. Из (40) с учётом свойства проекции точки на множество получим

$$< \theta_{n+1} - \theta_n + \alpha_n I'(\theta_n), \theta - \theta_{n+1} >_H \ \ge 0,\ \forall\theta,\ \theta \in X_1. \tag{41}$$

Отсюда, в частности, когда $\theta = \theta_n \in X_1$, имеем

$$< I'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} >_H \ge \frac{1}{\alpha_n}\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2. \tag{42}$$

Так как функционал $I(\theta)$ принадлежит классу $C^{1,1}(X_1)$, то справедливо неравенство

$$I(\theta_1) - I(\theta_2) \ge < I'(\theta_1), \theta_1 - \theta_2 > -\frac{l}{2}\|\theta_1 - \theta_2\|,\ \forall\theta_1, \theta_2 \in X_1.$$

Отсюда при $\theta_1 = \theta_n$, $\theta_2 = \theta_{n+1}$ имеем

$$I(\theta_n) - I(\theta_{n+1}) \ge < I'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} > -\frac{l}{2}\|\theta_n - \theta_{n+1}\|,\ \forall\theta_n, \theta_{n+1} \in X_1. \tag{43}$$

Из (43) с учётом (42) получим

$$I(\theta_n) - I(\theta_{n+1}) \geq (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{l}{2})\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \geq \epsilon_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \qquad (44)$$

где $1/\alpha_n - l/2 \geq \epsilon_1$. Из (44) следует, что числовая последовательность $\{I(\theta_n)\}$ строго убывает. Так как значение функционала $I(\theta)$ ограничено снизу, то числовая последовательность $\{I(\theta_n)\}$ сходится. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}[I(\theta_n) - I(\theta_{n+1})] = 0$. Тогда $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ является минимизирующей. Поскольку функционал $I(\theta) \in C^{1,1}(X_1)$ является выпуклым, то необходимо и достаточно выполняется неравенство

$$I(\theta_2) - I(\theta_1) \leq < I'(\theta_2), \theta_2 - \theta_1 >, \ \forall \theta_1, \theta_2 \in X_1.$$

Из данного неравенства при $\theta_2 = \theta_n$, $\theta_1 = \theta_* \in X_* \subset X_1$, $X_* \neq \Phi$, $\theta_n \in X_1$ имеем

$$I(\theta_n) - I(\theta_*) \leq < I'(\theta_n), \theta_n - \theta_* > = < I'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} > - < I'(\theta_n), \theta_* - \theta_{n_1} > .$$

Из (41) при $\theta = \theta_*$ получим

$$< I'(\theta_n), \theta_* - \theta_{n+1} > \geq \frac{1}{\alpha_n} < \theta_n - \theta_{n+1}, \theta_* - \theta_{n+1} > .$$

Тогда

$$I(\theta_n) - I(\theta_*) \leq < I'(\theta_n) - \frac{1}{\alpha_n}(\theta_* - \theta_{n+1}), \theta_n - \theta_{n+1} > \leq l_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\| \qquad (45)$$

где $l_1 = const > 0$. Так как $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то из (45) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I(\theta_n) = I(\theta_*) = I_* = \inf_{\theta \in X_1} I(\theta)$. Это означает, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ является минимизирующей.

Покажем, что последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ слабо сходится к точке $\theta_* \in X$. В самом деле, множество X_1 слабо бикомпактно, $\{\theta_n\} \subset X_1$. Следовательно, последовательность $\{\theta_n\} \subset X_1$ имеет хотя бы одну подпоследовательность $\{\theta_{k_m}\} \subset X_1$ такую, что $\theta_{k_m} \to \theta_*$ при $m \to \infty$, причём

$\theta_* \in X_1$. Так как $\{I(\theta_n)\}$ сходится к $I(\theta_*)$, то $\{I(\theta_{k_m})\}$ также сходится к $I(\theta_*)$. Поскольку функционал слабо полунепрерывен снизу на X_1, то

$$I(\theta_*) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} I(\theta_{k_m}) \leq \lim_{m\to\infty} I(\theta_{k_m}) = I(\theta_*),\ \theta_{k_m} \xrightarrow{\text{сл}} \theta_* \text{ при } m \to \infty.$$

Отсюда имеем $\underline{\lim}_{m\to\infty} I(\theta_{k_m}) = I(\theta_*) = \inf_{\theta\in X_1} I(\theta)$. Итак, в слабо предельной точке θ_* последовательности $\{\theta_n\} \subset X_1$ достигается нижняя грань функционала $I(\theta)$ на множестве X_1.

Из неравенств (44), (45) следует

$$a_n = I(\theta_n) - (\theta_*) \leq l_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|,\ a_n - a_{n+1} \geq \epsilon_1\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Таким образом, числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$a_n > 0,\ a_n - a_{n+1} \geq Aa_n^2,\ n = 1, 2, \ldots,\ A = \frac{\epsilon_1}{l_1^2}. \tag{46}$$

Для числовой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей неравенству (46), верна оценка

$$a_n < \frac{1}{A_n},\ n = 1, 2, \ldots,\ I(\theta_n) - I(\theta_*) \leq \frac{c_0}{n},\ c_0 = \frac{l_1^2}{\epsilon_1}.$$

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 4. Искомое программное управление определяется по формуле (32), траектория системы (1) при условиях (2)–(6) определяется по формуле (33). Теорема доказана. $\square$

Позиционное управление

По программному управлению (32) можно найти позиционное управление $u_*(x_*, t)$, $t \in I$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теорем 5,6, и пусть, кроме того,*
1) $x_{1*} = R_1 x_{0*}$, $d_* = R_2 x_{0*}$, $v_*(t) = H(t)x_{0*}$, *где* $R_1, R_2, H(t)$ *– матрицы порядков* $n \times n$, $m_1 \times n$, $m \times n$ *соответственно;*
2) $I(\theta_*) = 0$*;*
3) матрица $\Sigma(t) = P[\Phi(t, t_0)\Gamma(t) + E_{11}(t) + E_{21}(t)R_1 - F_1(t)R_2 + N_2(t)\Phi(t_0, t_1)\Gamma(t_1)]$ *порядка* $n \times n$ *неособая, где*

$$\Gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B_1(\tau)H(\tau)d\tau,\ t \in I.$$

Тогда позиционное управление имеет вид

$$u_*(x_*, t) = K(t)x_*(t) + \mu_6(t),$$

где

$$K(t) = [H(t) + T_{11}(t) + T_{21}(t)R_1 - \Sigma_1(t)R_2 + N_1(t)\Phi(t_0, t_1)\Gamma(t_1)]\Sigma^{-1}(t)$$

$$\mu_6 = \mu_4 - K(t)P\mu_5(t),\ t \in I.$$

Доказательство. Управление $u_*(t)$, $t \in I$, из (32) представим в виде суммы $u_*(t) = \overline{u}_*(t) + \mu_4(t)$, где $\overline{u}_* = v_*(t) + T_{11}x_{0*} + T_{21}(t)x_{1*} - \Sigma_1(t)d_* + N_1(t)z(t_1, v_*)$, $t \in I$. Аналогично, функцию $x_*(t)$, $t \in I$, из (33) представим в виде $x_*(t) = \overline{x}_*(t) + P\mu_5(t)$, где $\overline{x}_*(t) = P[z(t, v_*) + E_{11}(t)x_{0*} + E_{21}(t)x_{1*} - F_1(t)d_* + N_2(t)z(t_1, v_*)]$, $t \in I$. При выполнении условий теоремы функции $\overline{u}_*(t)$, $\overline{x}_*(t)$, $t \in I$, примут вид:

$$\overline{u}_*(t) = [H(t) + T_{11}(t) + T_{21}(t)R_1 - \Sigma_1(t)R_2 + N_1(t)\Phi(t_0, t_1)\Gamma(t_1)]x_{0*},\ t \in I,$$

$$\overline{x}_*(t) = \{P[\Phi(t, t_0)\Gamma(t) + E_{11}(t) + E_{21}(t)R_1 - F_1(t)R_2 + N_2(t)\Phi(t_0, t_1)\Gamma(t_1)]\}x_{0*}$$
$$= \Sigma(t)x_{0*},\ t \in I.$$

Так как $x_{0*} = \Sigma^{-1}(t)\overline{x}_*(t)$, то $\overline{u}_*(t) = K(t)\overline{x}_* = K(t)[x_*(t) - P\mu_5(t)] = K(t)x_*(t) - K(t)P\mu_5(t)$. Тогда $u_*(t) = K(t)x_*(t) - K(t)P\mu_5(t) + \mu_4(t) = K(t)x_*(t) + \mu_6(t)$, $t \in I$. Теорема доказана. □

Оптимальное быстродействие. Пример

Пусть $t_{1*} > t_0$ – наименьшее значение t_1, для которого $I(\theta_*) = 0$ при $t_1 = t_{1*}$. Необходимо найти $u_*(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$, $x_*(t) = x_*(t, u_*)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$, такое, что

1) $u_*(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$; 2) $x_{0*} \in S_0$, $x_{1*} \in S_1$; 3) $x_*(t) \in G(t)$, $t \in [t_0, t_{1*}]$; 4) $g_j(x_*, u_*) \le c_j$, $j = \overline{1, m_1}$; $g_j(x_*, u_*) = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Для решения задачи оптимального быстродействия необходимо решить задачи управляемости для значений $t_{11}, t_{12}, \ldots$, где $t_1 > t_{11} > t_{12} > \ldots$.

Пусть решена задача управляемости для заданного значения $t_1 > t_0$. Выберем $t_{11} = t_1/2$. По изложенному алгоритму находим $u_*(t)$, $x_*(t)$, $t \in [t_0, t_{11}]$. Если для данной пары значение $I(\theta_*) = 0$, то выберем значение $t_{12} = t_1/4$ и т.д. В случае, если для заданной пары $I(\theta_*) > 0$, то выберем $t_{12} = 3t_1/4$ и т.д. По данной схеме через конечное число шагов получим приближённое решение задачи оптимального быстродействия заданной точности.

Пример. Минимизировать функционал

$$I(u,t_1) = \int_0^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 \to \inf \tag{47}$$

при условиях

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ t \in I = [0, t_1], \tag{48}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \ x_2(0) = x_{20}, \ x_1(t_1) = x_{11}, \ x_2(t_1) = x_{21}, \tag{49}$$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1) / \ -1 \le u(t) \le +1 \text{ п.в.}, \, t \in I\}. \tag{50}$$

Для данного примера имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Программное управление. Рассмотрим задачу управляемости для управления (48) с краевыми условиями (49) при $u(\cdot) \in L_2(I, R_1)$. Поскольку

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{\theta}(t), \ \overline{\theta}^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)},$$

то

$$W(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt = \begin{pmatrix} t_1^3/3 & -t_1^2/2 \\ t_1^2/2 & t_1 \end{pmatrix}, \ t_1 > 0,$$

$$W(0,t) = \begin{pmatrix} t^3/3 & -t^2/2 \\ -t^2/2 & t \end{pmatrix}, \ W(t,t_1) = \begin{pmatrix} (t_1^3 - t^3)/3 & (-t_1^2 + t^2)/2 \\ (-t_1^2 + t^2)/2 & t_1 - t \end{pmatrix},$$

$$W^{-1}(0,t_1) = \begin{pmatrix} 12/t_1^3 & 6/t_1^2 \\ 6/t_1^2 & 4/t_1 \end{pmatrix},$$

$$T_1(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0,t_1) = \left(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}, \ \frac{6t}{t_1^2} - \frac{4}{t_1} \right),$$

$$T_2(t) = B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = \left(-\frac{12t}{t_1^3} + \frac{6}{t_1^2}, \ \frac{6t}{t_1^2} - \frac{2}{t_1} \right),$$

$$N_1(t) = -B^* e^{-A^* t} W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = \left(\frac{12t}{t_1^3} - \frac{6}{t_1^2}, \ -\frac{6t}{t_1^2} + \frac{2}{t_1} \right),$$

Как следует из теоремы 3, управление определяется по формуле

$$u(t) \in \Lambda = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^1) / \ u(t) = v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v) =$$

$$v(t) + \left(\frac{12t - 6t_1}{t_1^2} \right) x_{10} + \left(\frac{6t - 4t_1}{t_1^2} \right) x_{20} + \left(\frac{-12t + 6t_1}{t_1^3} \right) x_{11} + \left(\frac{6t - 2t_1}{t_1^2} \right) x_{21} +$$

$$\left(\frac{12t - 6t_1}{t_1^3} \right) z_1(t_1, v) + \left(\frac{-6t + 2t_1}{t_1^2} \right) z_2(t_1, v). \ \forall v, \ v(\cdot) \in L_2(I, R^1)\}.$$

Так как

$$E_1(t) = e^{At} W(t, t_1) W^{-1}(0, t_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{t_1^3 + 2t^3 - 3t^2 t_1}{t_1^3} & \dfrac{t^3 + t t_1^2 - 2t^2 t_1}{t_1^2} \\ \dfrac{6t^2 - 6t t_1}{t_1^3} & \dfrac{t_1^2 + 3t^2 - 4t t_1}{t_1^2} \end{pmatrix},$$

$$E_2(t) = e^{At} W(0, t) W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2t^3 + 3t_1 t^2}{t_1^3} & \dfrac{t^3 - t_1 t^2}{t_1^2} \\ \dfrac{-6t^2 + 6t t_1}{t_1^3} & \dfrac{3t^2 - 2t t_1}{t_1^2} \end{pmatrix},$$

$$N_2(t) = -e^{At} W(0, t) W^{-1}(0, t_1) e^{-At_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2t^3 - 3t_1 t^2}{t_1^3} & \dfrac{-t^3 + t_1 t^2}{t_1^2} \\ \dfrac{6t^2 - 6t t_1}{t_1^3} & \dfrac{-3t^2 + 2t t_1}{t_1^2} \end{pmatrix},$$

то

$$x_1(t) = z_1(t, v) + (\frac{t_1^3 + 2t^3 - 3t^2 t_1}{t_1^3}) x_{10} + (\frac{t^3 + t t_1^2 - 2t^2 t_1}{t_1^2}) x_{20} +$$

$$+ (\frac{-2t^3 + 3t_1 t^2}{t_1^3}) x_{11} + (\frac{t^3 - t_1 t^2}{t_1^2}) x_{21} +$$

$$+ (\frac{2t^3 - 3t^2 t_1}{t_1^3}) z_1(t_1, v) + (\frac{-t^3 + t_1 t^2}{t_1^2}) z_2(t_1, v),$$

$$x_2(t) = z_2(t) + (\frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3})x_{10} + (\frac{t_1^2 + 3t^2 - 4tt_1}{t_1^2})x_{20} + (\frac{-6t^2 + 6tt_1}{t_1^3})x_{11} +$$

$$(\frac{3t^2 - 2tt_1}{t_1^2})x_{21} + (\frac{6t^2 - 6tt_1}{t_1^3})z_1(t_1, v) + (\frac{-3t^2 + 2tt_1}{t_1^2})z_2(t_1, v),\ t \in I.$$

где $\dot z_1 = z_2$, $\dot z_2 = v$, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 0$, $v\cdot \in L_2(I, R^1)$, $t \in I = [0, t_1]$.

Для определения программного управления для (48)–(50) необходимо найти управления из пересечения множеств $\Lambda \bigcap U$. Оптимизационная задача (23)–(26) при фиксированном $x_0 \in R^2$, $x_1 \in R^2$ и отсутствии фазовых и интегральных ограничений запишется в виде

$$I(v, u) = \int_0^{t_1} |v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v) - u(t)|^2 dt \to \inf \quad (51)$$

при условиях

$$\dot z_1 = z_2,\ \dot z_2 = v,\ z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 0,\ v\cdot \in L_2(I, R^1),\ u(t) \in U, \quad (52)$$

$$F_0(q(t), t) = |v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v) - u(t)|^2,$$

где $q(t) = (v(t), u(t),\ z(t_1, v))$. Как следует из теоремы 5, $I'(v, u) = (I'_v(v, u), I'_u(v, u))$, где

$$I'_v(v, u) = \frac{\partial F_0}{\partial v} - B^*\psi(t) = 2[v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v) - u(t)] - \psi_2(t),$$

$$I'_u(v, u) = \frac{\partial F_0}{\partial u} = -2[v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v)].$$

Поскольку $\partial F_0/\partial z = 0$, то $\dot\psi_1 = 0$, $\dot\psi_2 = -\psi_1$, $\psi(t_1) = -\int_0^{t_1} \frac{\partial F_0}{\partial z(t_1)} dt =$
$-\int_0^{t_1} 2N_1^*(t)[v(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v) - u(t)]dt.$

Минимизирующие последовательности $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ примут вид

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n I'_v(v_n, u_n),\ u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n I'_u(v_n, u_n)],\ n = 0, 1, 2, \dots . \quad (53)$$

Решение задачи оптимального быстродействия при $x_{10} = 1$, $x_{20} = x_{11} = x_{21} = 0$.

А. Выберем значение $t_1 = 8$. Решаем оптимизационную задачу (51), (52) путём построения минимизирующей последовательности (53). Находим

$$u_*(t) = v_*(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \le t < \frac{17}{8}; \\ +1, & \text{если } \frac{17}{8} \le t < \frac{49}{8}; \\ -1, & \text{если } \frac{49}{8} \le t \le 8. \end{cases}$$

значение $I(v_*, u_*) = 0$.

Б. Выбираем $t_1 = 8/2 = 4$. Для значения $t_1 = 4$ оптимальное решение задачи (51), (52) получим в виде

$$u_{**}(t) = v_{**}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \le t < \frac{5}{4}; \\ +1, & \text{если } \frac{5}{4} \le t < \frac{13}{4}; \\ -1, & \text{если } \frac{13}{4} \le t \le 4, \end{cases}$$

$I(v_{**}, u_{**}) = 0$.

В. Выбираем $t_1 = 4/2 = 2$. Для значения $t_1 = 2$ оптимальное решение задачи (51),(52) примет вид

$$u_{***}(t) = v_{**}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \le t < 1; \\ +1, & \text{если } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Оптимальная траектория для задачи (47)-(50) при $I(v_{***}, u_{***}) = 0$ запишется

$$x_{1*} = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1; \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad x_{2*} = \begin{cases} -t, & 0 \le t < 1; \\ t - 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

Эти результаты совпадают с результатами, полученными с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Заключение

Одной из сложных и нерешенных проблем теории управления является существование решения краевой задачи оптимального управления при наличии фазовых и интегральных ограничений. Для решения проблем существования решения необходимо создание общей теории управляемости динамических систем. Данная работа посвящена решению проблем управляемости сложных динамических систем с краевыми условиями и ограничениями.

Основными результатами, полученными в работе, являются: выделение множества программных и позиционных управлений для процесса, описываемого линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, при отсутствии ограничений на значения управления путём построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода; определение программного и позиционного управления, а также решение задач оптимального быстродействия при наличии ограничений на значения управления и фазовых и интегральных ограничений; сведение исходной краевой задачи с ограничениями к специальной начальной задаче оптимального управления и построения минимизирующих последовательностей путём последовательного сужения области допустимых управлений задачи оптимального быстродействия.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что создана общая теория управляемости и оптимального быстродействия для линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Литература

1 Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. – АН СССР. – 1961. – Т.II. – С. 521-547.

2 Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

3 Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

4 Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

5 Айсагалиев С.А. Краевые задачи оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 1999. – 213 с.

6 Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С. Методы решения краевых задач. – Алматы: Қазақ университеті, 2002. – 348 с.

7 Ананьевский И.М., Анахин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. – 2010. – Т. 434, № 3. –С. 319-323.

8 Семенов Ю.М. О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1263-1277.

9 Емельянов С.В., Крищенко А.П. Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1515-1524.

10 Коровин С.К., Капалин И.В., Фомичев В.В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем //Доклады РАН. – 2011. – Т. 441, № 5. – С. 606-611.

11 Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. –С. 1475-1486.

12 Айсагалиев С.А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. – Т. 5, № 4(18). –С. 17-34.

13 Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2010. – № 1. – С. 30-55.

14 Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирскмй математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 20-37.

15 Айсагалиев С.А. Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. – Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 328 с.

Статья поступила в редакцию 16.04.13

Айсағалиев С.Ә., Севрюгин И.В. ШЕКТЕУЛЕРI БАР ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДIҢ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕСIМЕН СИПАТТАЛАТЫН ҮДЕРIСТIҢ БАСҚАРЫМДЫЛЫҒЫ МЕН ТЕЗ ӘРЕКЕТ ЕТУI

Шекаралық шарттарында фазалық және интегралдық шектеулерi бар сызықты жәй дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерiстер

үшін программалық және синтездеуші басқаруларды құру әдістері ұсынылады. Тиімді тез әрекет ету есебін шешу алгоритмі құрастырылған. Басқарымдылық есебінің шешімінің бар болуы мен әрбір элементі жүйе траекториясын кез келген бастапқы күйден берілген ақырғы күйге көшіретін барлық басқарулар жиынын құру есептері шешілген.

Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V. CONTROLLABILITY AND VELOCITY OF PROCESS, DESCRIBED BY A LINEAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RESTRICTIONS

The methods for constructing of the program and position control of equations described by linear ordinary differential equations with boundary conditions and phase and integral restrictions are offered. There is constructed an algorithm to solve time-optimal control problem. Two problems are solved: existence of a solution of control problem and constructing of the set of all possible controls, each element of which transfers trajectory of the system from any initial state to any final state.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.95

G.I. Bizhanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES of KR
050010, Almaty, Pushkin str. 125, e-mail: galina_math@mail.ru, galya@math.kz

ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE TWO–PHASE SINGULARLY PERTURBED PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATIONS. I

Linearized two-phase free boundary problem for the parabolic equations with two small parameters at the principle terms in the boundary condition is studied. The solution of the problem in the explicit form is constructed. The estimates of the Green functions of the problem are obtained.
Keywords: *parabolic equations, small parameters in the boundary condition, singular perturbation, solution in the explicit form, estimates of the Green functions.*

Let $D_1 := \mathbb{R}^n_- = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < 0\}$, $D_2 := \mathbb{R}^n_+ = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$, $n \geq 2$, $R := \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n = 0\}$, $D_{pT} := D_p \times (0,T)$, $p = 1,2$, $R_T := R \times [0,T]$, $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$ are the small parameters.

Consider the problem with the unknown functions $u_1(x,t)$ and $u_2(x,t)$

$$\partial_t u_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} u_p = 0 \text{ in } D_{pT},\ p = 1,2, \tag{1}$$

$$u_p|_{t=0} = 0 \text{ in } D_p,\ p = 1,2, \tag{2}$$

Keywords: *параболические уравнения, малые параметры в граничном условии, сингулярное возмущение, решение в явном виде, оценки функций Грина*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B25, 35C05

$$\big(u_1 - u_2\big)|_{x_n=0} = 0 \text{ on } R_T, \tag{3}$$

$$\big(\varepsilon\, \partial_t u_1 + \kappa b \nabla^T u_1 - c\nabla^T u_2\big)|_{x_n=0} = \Phi(x', t) \text{ on } R_T, \tag{4}$$

where all coefficients are constant, $b = (b', b_n)$, $b' = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, $c = (c', c_n)$, $c' = (c_1, \ldots, c_{n-1})$, $\nabla^T = \mathrm{colon}(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ — column-vector, $b\, c^T = b_1 c_1 + \ldots + b_n c_n$ - scalar product, $\Delta = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$,

$$b_n > 0,\ c_n > 0,$$

$$a^{(p)}_{i\,j} = a^{(p)}_{j\,i},\ i, j = 1, \ldots, n,\ \sum_{i,j=1}^{n} a^{(p)}_{i\,j}\, \xi_i \xi_j \geq a_0 \xi^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ p = 1, 2. \tag{5}$$

$a_0 = \mathrm{const} > 0$.

(1)–(4) is a linearized model two – phase free boundary problem with two small parameters $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ at the principle terms in the boundary condition (4). Such problem arises in the theory of combustion, phase transition (melting, solidification of substance).

This problem with $\kappa = 1$, $\varepsilon = 1$ was studied in the Hölder space by B.V. Bazaliy [1], E.V. Radkevich [2], G.I. Bizhanova [3, 4], G.I. Bizhanova, V.A.Solonnikov [5]. In [6-8] there were considered the problem (1)–(4) for the heat equations with $\kappa = 1$, $\varepsilon > 0$, the estimates of the solutions with the constants independent on ε were derived in the classical and weighted Hölder spaces.

In the present paper the solution of a problem (1)– (4) is constructed in the explicit form. The estimates of the Green functions are reduced. This permits us to obtain the estimates of the solution of a problem with the constants independent on κ and ε in the classical Hölder spaces, to solve perturbed linear and nonlinear problems, to find the limit of the solution as κ and ε go to zero.

We reduce the problem (1)–(4) to more suitable form. For this we apply the orthogonal, contraction and again orthogonal transformations of the coordinates to this problem, then we obtain the problem in the new coordinates $\{y\}$ with the unknown functions $v_1(y, t), v_2(y, t)$, but for the sake of a convenience we preserve the notation of the original coordinates $\{x\}$. Thus, for the functions $v_1(x, t), v_2(x, t)$ we shall have the problem

$$\partial_t v_1 - a\, \Delta v_1 = 0 \text{ in } D_{1T}, \tag{6}$$

$$\partial_t v_2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j}\, \partial^2_{x_i x_j} v_2 = 0 \text{ in } D_{2T}, \tag{7}$$

$$v_p|_{t=0} = 0 \text{ in } D_p,\ p = 1, 2, \tag{8}$$

$$\big(v_1 - v_2\big)|_{x_n=0} = 0 \text{ on } R_T, \tag{9}$$

$$\big(\varepsilon\, \partial_t v_1 + \kappa d \nabla^T v_1 - h \nabla^T v_2\big)|_{x_n=0} = \varphi(x', t) \text{ on } R_T, \tag{10}$$

where all coefficients are constant, $a > 0,\ d = (d', d_n),\ d' = (d_1, \ldots, d_{n-1}),\ h = (h', h_n),\ h' = (h_1, \ldots, h_{n-1}),$ moreover, after these coordinate transformations the coefficients a_{ij} in the equation (7) satisfy the conditions (5).

Let ν_0 be a unit normal to the plain $R : x_n = 0$ in the problem (1) – (4) directed into D_2, i.e. the unit coordinate axis x_n vector. The scalar products $b\,\nu_0^T = b_n > 0,\ c\,\nu_0^T = c_n > 0$ are not changed after orthogonal coordinate mappings. Contraction mapping is given by a diagonal matrix with the positive terms and it transforms the diagonal matrix to the identity one multiplied by $a > 0$ for to obtain the operator $a\Delta$ in the equation (6). So, we have

$$d_n > 0,\ h_n > 0$$

in the condition (10).

We formulate the main results of the present work.

Theorem 1. *Let* $d_n > 0,\ h_n > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ 0 < \kappa \le \kappa_0$. *Let* $\varphi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_{x'\ \ \ t}(R_T),\ \alpha \in (0, 1)$.

Then the solution of the problem (6)–(10) has the form

$$v_p(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y', \tau) G_p(x' - y', x_n, t - \tau)\, dy', \tag{11}$$

where

$$G_p(x, t) = \int_0^t K_p(x, \sigma, t - \sigma) d\sigma,$$

$$K_1(x, \sigma, t) = \partial_{x_n} g_1(x, \sigma, t), \quad K_2(x, \sigma, t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{x_k} g_2(x, \sigma, t) \tag{12}$$

$$g_1(x, \sigma, t) = -4a \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma_1(x - \eta - \frac{\kappa}{\varepsilon} d\sigma, t - \tau_1)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{\eta_k} \Gamma_2(\eta + \frac{h\sigma}{\varepsilon}, \tau_1)\big|_{\eta_n=0} \, d\eta',$$

$$K_1(x,\sigma,t) = -4a \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n} \Gamma_1(x - \eta - \frac{\kappa}{\varepsilon} d\sigma, t - \tau_1)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{\eta_k} \Gamma_2(\eta + \frac{h\sigma}{\varepsilon}, \tau_1)\big|_{\eta_n=0} \, d\eta'$$

$$\equiv \int_0^t d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{-x_n + \eta_n + \kappa d_n \sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau_1)})^n (t-\tau_1)} e^{-\frac{(x-\eta-\kappa d\,\sigma/\varepsilon)^2}{4a(t-\tau_1)}}$$

$$\times \frac{h_n \sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi\tau_1})^n \tau_1} \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\eta_i + h_i\sigma/\varepsilon)(\eta_j + h_j\sigma/\varepsilon)}{4\tau_1}} \Big|_{\eta_n=0} d\,\eta', \; x_n < 0, \qquad (13)$$

$$g_2(x,\sigma,t) = -4a \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\eta_n} \Gamma_1(\eta - \frac{\kappa}{\varepsilon} d\sigma, \tau_1)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \Gamma_2(x - \eta + \frac{h\sigma}{\varepsilon}, t - \tau_1)\big|_{\eta_n=0} \, d\eta',$$

$$K_2(x,\sigma,t) = -4a \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\eta_n} \Gamma_1(\eta - \frac{\kappa}{\varepsilon} d\sigma, \tau_1)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{x_k} \Gamma_2(x - \eta + \frac{h\sigma}{\varepsilon}, t - \tau_1)\big|_{\eta_n=0} \, d\eta'$$

$$\equiv \int_0^t d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\kappa d_n \sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi\tau_1})^n \tau_1} e^{-\frac{(\eta-\kappa d\sigma/\varepsilon)^2}{4a\tau_1}} \frac{x_n - \eta_n + h_n\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi(t-\tau_1)})^n (t-\tau_1)}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_i - \eta_i + h_i\sigma/\varepsilon)(x_j - \eta_j + h_j\sigma/\varepsilon)}{4(t-\tau_1)}} \Big|_{\eta_n=0} d\,\eta', \; x_n > 0, \qquad (14)$$

$$\Gamma_1(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{a\pi t})^n} e^{-\frac{x^2}{4at}}, \quad \Gamma_2(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} x_i x_j}{4t}}, \qquad (15)$$

$|A_n| > 0$ – *determinant of a matrix* $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, a^{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, *are the elements of the inverse matrix* A_n^{-1}.

Theorem 2. *Let* $d_n > 0,\ h_n > 0,\ \kappa \in [0, \kappa_0],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

The kernels $K_1(x,\sigma,t) = \partial_{x_n} g_1(x,\sigma,t)$, $K_2(x,\sigma,t) = \sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{x_k} g_2(x,\sigma,t)$ *defined by the formulas* (12)–(14) *satisfy the estimate*

$$|\partial_t^k \partial_x^m K_p(x,\sigma,t)| \le C_1 \frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|+1}{2}}}\, e^{-\frac{q_1^2 x^2}{t} - \frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2 t}}, \tag{16}$$

where

$$q_1^2 = \frac{c_0^2 h_n^2}{2(h^2 + \kappa_0^2 d^2 + 2\kappa_0 |d' h'|)}, \quad q_2^2 = \frac{c_0^2 h_n^2}{2}.$$

constant C_1 *does not depend on* ε *and* κ, *constant* c_0^2 *is from the estimates of the fundamental solutions* (15) *of the equations* (6), (7)

$$|\partial_t^k \partial_x^m \Gamma_p(x,t)| \le C_2 \frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\, e^{-c_0^2 \frac{x^2}{t}},\ p = 1, 2,\ c_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{17}$$

Proof of Theorem 1. The solution (11) of the problem (6)–(10) was constructed with the help of Laplace and Fourier integral transforms as in [3] and applying of the property of co - normal derivative. Moreover, in the integrals (13), (14) we made use of the formulas

$$\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{x_k} e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} x_i x_j}{4t}} =$$

$$-\sum_{k=1}^n a_{kn}\frac{1}{4t}\Big(\sum_{j=1}^n a^{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a^{ki} x_i\Big) e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} x_i x_j}{4t}} =$$

$$= -\frac{x_n}{2t} e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} x_i x_j}{4t}},$$

$$\sum_{k=1}^n a_{kn} a^{kj} = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & j \ne n, \end{cases}$$

We show that the functions (11) satisfy the equations (6), (7) respectively and boundary conditions (9), (10).

The function $v_1(x,t)$ satisfies the heat equation (6) due to a fundamental solution $\Gamma_1(x - y' - \eta - \kappa\, d\,\sigma/\varepsilon, t - \tau - \sigma - \tau_1)$ of this equation (here $x - y' =$

$(x_1-y_1,\,\dots,x_{n-1}-y_{n-1},\,x_n))$. We substitute $\Gamma_2(x,t)$ into the equation (7) letting $x\neq 0,\ t\neq 0$, then we shall have

$$\partial_t\Gamma_2(x,t)=\big(-\frac{n}{2t}+\frac{1}{4t^2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}x_ix_j\big)\Gamma_2(x,t),$$

$$\sum_{p,q=1}^{n}a_{p\,q}\,\partial^2_{x_px_q}\Gamma_2(x,t)=-\frac{1}{2t}\sum_{p,q=1}^{n}a_{p\,q}\,\partial_{x_q}\big(\sum_{i=1}^{n}a^{ip}x_i\,\Gamma_2\big)$$

$$=-\frac{1}{2t}\sum_{p,q=1}^{n}a_{p\,q}\,\big(a^{pq}-\frac{1}{2t}\sum_{i,j=1}^{n}a^{i\,p}a^{j\,q}x_ix_j\big)\Gamma_2=\big(-\frac{n}{2t}+\frac{1}{4t^2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}x_ix_j\big)\Gamma_2$$

and

$$\partial_t\Gamma_2-\sum_{p,q=1}^{n}a_{p\,q}\,\partial^2_{x_px_q}\Gamma_2=0,\ x\neq 0,\ t\neq 0,$$

that is $\Gamma_2(x,t)$ is a a fundamental solution of the equation (7) and $v_2(x,t)$ satisfies (7).

An equality (9): $(v_1-v_2)|_{x_n=0}=0$ becomes obvious after the changes of the variables $\eta'=x'-\xi',\ \tau_1=t-\tau_2$ in the kernel K_1 and letting $x_n=0$.

We prove that the functions $v_1,\ v_2$ satisfy a condition (10).

Let $\varphi=1$. We integrate (11) with respect to $y',\ \eta'$ and τ_1 with the help of the formulas

$$\int_0^t\frac{a\,b}{4\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}\tau_1^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{4(t-\tau_1)}-\frac{b^2}{4\tau_1}}d\tau_1=\frac{(a+b)}{2t^{3/2}}e^{-\frac{(a+b)^2}{4t}},\ a>0,\ b>0,$$

$$\int_0^t\frac{a}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{4(t-\tau)}}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\zeta^2}d\zeta:=\mathrm{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}},\ a>0,\qquad(18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\xi_i\xi_j}{4t}}d\xi'=\frac{(2\sqrt{\pi t})^{n-1}}{\sqrt{|A^{-1}_{n-1}|}}e^{-\frac{|A_n^{-1}|}{|A^{-1}_{n-1}|}\frac{\xi_n^2}{4t}},$$

where A^{-1}_{n-1} is a matrix of $(n-1)$–order obtained from a matrix A_n^{-1}, in which the n–th line and n-th row are crossed out, $|A_n^{-1}|=\det\,A_n^{-1}=1/|A_n|$. We point out that $|A_n^{-1}| > 0,\ |A_{n-1}| > 0$ by the condition (5). Thus, we shall have

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \operatorname{erfs}\frac{\frac{-x_n+\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{a}} + \frac{h_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}}{2\sqrt{t-\sigma}}d\sigma,\ x_n < 0,$$

$$v_2(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \operatorname{erfs}\frac{\frac{\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{a}} + \frac{x_n+h_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}}{2\sqrt{t-\sigma}}d\sigma,\ x_n > 0.$$

We represent an expression $\varepsilon\,\partial_t v_1 + \kappa d\nabla^T v_1 - h\nabla^T v_2$ in the form

$$\varepsilon\,\partial_t v_1 + \kappa d\nabla^T v_1 - h\nabla^T v_2 = J_1 + J_2, \tag{19}$$

where

$$J_1 := \big(\varepsilon\,\partial_t + \kappa d\nabla^T + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}h\nabla^T\big)v_1(x,t),$$

$$J_2 := -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}h\nabla^T v_1(x,t) - h\nabla^T v_2.$$

By direct calculations we derive

$$J_1 = \varepsilon\big(\partial_t + \frac{\kappa d_n}{\varepsilon}\partial_{x_n} + h_n\frac{\sqrt{a}}{\varepsilon\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}\partial_{x_n}\big)v_1(x,t)$$

$$= -\int_0^t \frac{d}{d\sigma}\operatorname{erfs}\frac{\frac{-x_n+\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{a}} + \frac{h_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}}{2\sqrt{t-\sigma}}d\sigma = \operatorname{erfs}\frac{-x_n}{2\sqrt{at}}$$

and

$$J_1 \to 1 \text{ as } x_n \to 0, \tag{20}$$

$$J_2 := -h_n\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}\partial_{x_n}v_1(x,t) - h_n\partial_{x_n}v_2$$

$$= -\frac{h_n}{\varepsilon\sqrt{\pi|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}\Big(\int_0^t \exp\frac{-\big(\frac{-x_n+\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{a}} + \frac{h_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}\big)^2}{4(t-\sigma)}\frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}$$

$$-\int_0^t \exp\frac{-\big(\frac{\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{a}}+\frac{x_n+h_n\sigma/\varepsilon}{\sqrt{|A_n||A_{n-1}^{-1}|}}\big)^2}{4(t-\sigma)}\frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}\Big)$$

and

$$J_2\to 0 \text{ as } x_n\to 0 \tag{21}$$

From (19) – (21) we obtain for $\varphi=1$

$$\big(\varepsilon\,\partial_t v_1+\kappa d\nabla^T v_1-h\nabla^T v_2\big)|_{x_n=0}$$

$$\equiv\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\big(\partial_t+\frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1(x'-y',x_n,t-\tau)-\frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2(x'-y',x_n,t-\tau)\Big)dy'$$

$$=(J_1+J_2)|_{x_n=0}=1, \tag{22}$$

that is the condition (10) is satisfied also. Thus, the functions v_1, v_2 defined by a formula (11) are the solutions of the problem (6) – (10) with $\varphi=1$.

Let $\varphi(x',t)$ be the function from the Hölder space $\overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}{}_{t}(R_T)$, $\alpha\in(0,1)$.

We substitute the functions $v_p(x,t)=1/\varepsilon\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y',\tau)G_p(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy'$, $p=1,2$, into the condition (10) and represent the potentials as follows:

$$\varepsilon\,\partial_t v_1+\kappa d\nabla^T v_1-h\nabla^T v_2$$

$$=\varphi(x',t)\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\big(\partial_t+\frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1(\cdot)-\frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2(\cdot)\Big)dy'+J_3, \tag{23}$$

$$J_3=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\varphi(y',\tau)-\varphi(x',t)\big)$$

$$\times\Big(\big(\partial_t+\frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1(\cdot)-\frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2(\cdot)\Big)dy'. \tag{24}$$

Due to (22) we have

$$\varphi(x',t)\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\big(\partial_t+\frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1(\cdot)-\frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2(\cdot)\Big)dy'$$

$$\to\varphi(x',t) \text{ as } x_n\to 0. \tag{25}$$

We shall show that in the formula (23) $J_3\to 0$ as $x_n\to 0$.

Consider the kernel in (24)

$$\big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1 = \int_0^{t-\tau} \big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)K_1(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma)\,d\sigma,$$

where

$$K_1(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma) = -2\int_0^{t-\tau-\sigma_1} d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}}$$
$$\times\frac{-x_n+\kappa d_n\sigma_2/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)})^n(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)}e^{-\frac{(x-y'-\eta'-\kappa d\,\sigma_2/\varepsilon)^2}{4a(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma_3}{\varepsilon},\tau_1)\Big|_{\substack{\eta_n=0,\\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma}} d\,\eta',\ x_n<0. \qquad (26)$$

As it is seen from (26) we can represent the derivatives of K_1 as follows:

$$\big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)K_1 = -\big(\partial_{\sigma_1}+\partial_{\sigma_2}\big)K_1$$

and taking into account the formula

$$\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+h\sigma_3/\varepsilon,\tau_1) = -\frac{h_n\sigma_3/\varepsilon}{2\tau_1}\Gamma_2(\cdot)$$

integrate by parts with respect to σ, then we shall have

$$\big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1 = \int_0^{t-\tau} \big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)K_1(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma)\,d\sigma$$
$$= \int_0^{t-\tau}\partial_{\sigma_3}K_1\,d\sigma = -2\int_0^{t-\tau}d\,\sigma\int_0^{t-\tau-\sigma_1} d\,\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}$$
$$\times\frac{-x_n+\kappa d_n\sigma_2/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)})^n(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)}e^{-\frac{(x-y'-\eta'-\kappa d\,\sigma_2/\varepsilon)^2}{4a(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\partial_{\sigma_3}\Big[\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma_3}{\varepsilon},\tau_1)\,d\,\eta'\Big]\Big|_{\substack{\eta_n=0,\\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma}} d\,\eta'$$
$$= -2\int_0^{t-\tau}d\,\sigma\int_0^{t-\tau-\sigma_1} d\,\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}$$

$$\times \frac{-x_n + \kappa d_n \sigma_2/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)})^n (t-\tau-\sigma_1-\tau_1)} e^{-\frac{(x-y'-\eta'-\kappa d\,\sigma_2/\varepsilon)^2}{4a(t-\tau-\sigma_1-\tau_1)}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \frac{h}{\varepsilon} \nabla_\eta^T \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{\eta_k} \Gamma_2(\eta + \frac{h\sigma_3}{\varepsilon}, \tau_1)\, d\,\eta' \Big|_{\substack{\eta_n=0, \\ \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma}} d\,\eta',$$

here we apply an obvious identity $\partial_{\sigma_3}\Gamma_2(\eta + h\sigma_3/\varepsilon, \tau_1) = h/\varepsilon \nabla_\eta^T \Gamma_2(\cdot)$.

We make change of variables $\xi' = x' - y' - \eta',\ \ \tau_2 = t - \tau - \sigma - \tau_1$ in the integrals with respect to η' and τ_1 and preserve the previous letters η' and τ_1 instead of ξ' and τ_2, then we obtain

$$\big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon} \nabla_x^T\big) G_1 = \int_0^{t-\tau} \big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big) K_1(x-y', \sigma, t-\tau-\sigma)\, d\sigma$$

$$= -2 \int_0^{t-\tau} d\,\sigma \int_0^{t-\tau-\sigma} d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{-x_n + \kappa d_n \sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi\tau_1})^n \tau_1}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\eta'-\kappa d'\,\sigma/\varepsilon)^2 + (-x_n+\kappa d_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a\tau_1}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \frac{h}{\varepsilon} \nabla_\eta^T \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{\eta_k} \Gamma_2(z, t-\tau-\sigma-\tau_1)\Big|_{\eta_n=0} d\eta', \tag{27}$$

where $z_\mu = x_\mu - y_\mu - \eta_\mu + h_\mu\sigma/\varepsilon,\ \mu = 1, \ldots, n-1,\ z_n = -\eta_n + h_n\sigma/\varepsilon$.

Consider the second kernel in (24)

$$\frac{h}{\varepsilon} \nabla_x^T G_2(x-y', t-\tau) = \int_0^{t-\tau} \frac{h}{\varepsilon} \nabla_x^T K_2(x-y', \sigma, t-\tau-\sigma)\, d\sigma,$$

where K_2 is determined by (14). We make use of the formulas

$$\frac{h}{\varepsilon} \nabla_x^T \Gamma_2(x-y'-\eta+h\sigma/\varepsilon, t) = -\frac{h}{\varepsilon} \nabla_\eta^T \Gamma_2(x-y'-\eta+h\sigma/\varepsilon, t),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{x_k} \Gamma_2(x-y'-\eta+h\sigma/\varepsilon, t) = -\sum_{k=1}^{n} a_{kn} \partial_{\eta_k} \Gamma_2(x-y'-\eta+h\sigma/\varepsilon, t),$$

then we derive

$$\frac{h}{\varepsilon} \nabla_x^T G_2(x-y', t-\tau) = \int_0^{t-\tau} \frac{h}{\varepsilon} \nabla_x^T K_2(x-y', \sigma, t-\tau-\sigma)\, d\sigma$$

$$= -2\int_0^{t-\tau} d\,\sigma \int_0^{t-\tau-\sigma} d\,\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\kappa d_n \sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi\tau_1})^n \tau_1}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\eta'-\kappa d\,\sigma/\varepsilon)^2}{4a\tau_1}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\frac{h}{\varepsilon}\nabla_\eta^T \Big[\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(x-y'-\eta+h\sigma/\varepsilon, t-\tau-\sigma-\tau_1)\Big]\Big|_{\eta_n=0} d\eta'. \quad (28)$$

Comparing the kernels (27), (28) in the integral J_3 determined by (24) we can see that

$$\big(\partial_t + \frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T\big)G_1 - \frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2 \to 0 \text{ as } \; x_n \to 0,\; x' \neq y',\; t \neq \tau. \quad (29)$$

Now we should show that each term in an integral J_3 converges uniformly with respect to x, t, then from this and (29) it will be followed that $J_3 \to 0$ as $x_n \to 0$. We estimate J_3.

For the function $\varphi(x', t)$ belonging to $\overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_{x' \quad t}(R_T)$, $\alpha \in (0, 1)$, the following estimates are valid

$$|\varphi(y', \tau) - \varphi(y', t)| \le M_1 (t-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}},\; M_1 = [\varphi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t, R_t}, \tau < t, \quad (30)$$

$$|\varphi(y', t) - \varphi(x', t)| \le M_2 t^{\alpha/2}|x'-y'|,\; M_2 = \sum_{\mu}^{n-1} [\partial_{x_\mu}\varphi]^{(\alpha/2)}_{t, R_t}. \quad (31)$$

Moreover, we shall make use of an estimate

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}}\, e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\sigma)}}\, d\sigma \le C_3 \frac{\varepsilon}{t}, \quad (32)$$

which is obtained after dividing of an integral into two ones on the domains $(0, t/2)$ and $(t/2, t)$. In the first integral we apply the inequalities

$$\frac{1}{(t-\sigma)^{3/2}} \le \frac{2^{3/2}}{t^{3/2}}, \quad e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\sigma)}} \le e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2 t}},\; \sigma \in (0, t/2),$$

and integrate with respect to σ, in the second one we use an estimate

$$e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\sigma)}} \le e^{-\frac{q_2^2 t^2}{4\varepsilon^2(t-\sigma)}},\; \sigma \in (t/2, t)$$

and make a change of variable $\frac{q_2 t}{2\varepsilon\sqrt{t-\sigma}} = \zeta$.

Consider the first term in (24)

$$i_1 = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\varphi(y',\tau) - \varphi(x',t)\big)\partial_t G_1(x-y',t-\tau)dy' =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t-\tau} \big(\varphi(y',\tau) - \varphi(y',t-\sigma)\big)\partial_t K_1(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma)\, d\sigma \quad (33)$$

$$+\int_0^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t-\sigma} \big(\varphi(y',t-\sigma) - \varphi(y',t) + \varphi(y',t) - \varphi(x',t)\big)\partial_\tau K_1(\cdot)d\tau =: i_{11} + i_{12}.$$

We make use of the estimates (16) for the kernel K_j, (30) for φ, $(t-\tau-\sigma)^{\alpha/2} \le (t-\tau)^{\alpha/2}$, integrate with respect to y' and apply (32), then we shall have

$$|i_{11}| \le C_4 M_1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha/2} d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{1}{(t-\tau-\sigma)^{3/2}}\, e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau-\sigma)}}\, d\sigma \le$$

$$\le C_5 M_1 \varepsilon \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}} = C_6 M_1 \varepsilon_0 t^{\alpha/2}. \quad (34)$$

Consider the potential i_{12} determined by (33). We integrate with respect to τ, apply (30), (31) for φ, (16) for K_1, then we obtain

$$|i_{12}| \le C_7(M_1+M_2) \int_0^t d\sigma \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}} + |x'-y'|}{(t-\sigma)^{\frac{n+1}{2}}}\, e^{-\frac{q_1^2(x'-y')^2}{t-\sigma} - \frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\sigma)}}\, dy'.$$

We apply an inequality

$$|\xi|^\alpha e^{-\xi^2} \le C_\alpha e^{-\xi^2/2},\ \alpha \ge 0, \quad (35)$$

and integrate with respect to y', then we derive

$$|i_{12}| \le C_8(M_1+M_2) \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{\frac{1+\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}} + (t-\sigma)^{1/2}}{t-\sigma}\, d\sigma \le$$

$$\le C_9(M_1+M_2)(\varepsilon_0^{\frac{1+\alpha}{2}} t^{\frac{1+\alpha}{4}} + t^{1/2}). \quad (36)$$

Gathering (34), (36) we find the estimate of the potential (33)

$$|i_1| = |i_{11} + i_{12}| \leq C_{10}(M_1 + M_2). \tag{37}$$

Now we estimate the last terms in (24)

$$i_2 := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\varphi(y',\tau) - \varphi(x',t)\big)\big(\frac{\kappa d}{\varepsilon}\nabla_x^T G_1(x-y',t-\tau) - \frac{h}{\varepsilon}\nabla_x^T G_2(\cdot)\big)dy', \tag{38}$$

here $G_j = \int_0^{t-\tau} K_j(\cdot, t-\tau-\sigma)d\sigma$.

To estimate i_2 it is sufficient to consider the potential

$$i_{2j} := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\varphi(y',\tau) - \varphi(y',t) + \varphi(y',t) - \varphi(x',t)\big)\times \tag{39}$$

$$\times \int_0^{t-\tau} \partial_{x_i} K_j(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma)d\sigma,\ j=1,2,\ i=1,\dots,n.$$

As above we make use of the inequalities (30), (31) for φ, (16) for K_j, (35), the following one: $(t-\tau-\sigma)^{1/2} \leq (t-\tau)^{1/2}$, then after integrating with respect to y' we obtain

$$|i_{2j}| \leq C_{11}(M_1+M_2)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t-\tau} \frac{(t-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}} + |x'-y'|}{(t-\tau-\sigma)^{\frac{n+2}{2}}}\times$$

$$\times\, e^{-\frac{q_1^2(x'-y')^2}{t-\tau-\sigma} - \frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau-\sigma)}}\, d\sigma \leq$$

$$\leq C_{12}(M_1+M_2)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ((t-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}} + (t-\tau)^{1/2})d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{1}{(t-\tau-\sigma)^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau-\sigma)}}\, d\sigma,$$

and applying an estimate (32) we shall have

$$|i_{2j}| \leq C_{13}(M_1+M_2)(t^{\frac{1+\alpha}{2}} + t^{1/2}), \quad |i_2| \leq C_{14}(M_1+M_2). \tag{40}$$

For the potential $J_3 = i_1 + i_2$ in (23) determined by the formulas (24), (33), (38) due to the estimates (37), (40) we have proved that every term in (24) converges uniformly with respect to x, t, and thanks to (29)

$$J_3 \to 0 \text{ as } x_n \to 0. \tag{41}$$

Thus, we see that by (25) and (41) an expression (23) goes to $\varphi(x',t)$ as $x_n \to 0$. That is the constructed functions v_1, v_2 satisfy also the condition (10), i.e these functions are the solution of the problem (6)–(10). $\square$

Proof of Theorem 2. We obtain the estimate (16) for the kernels K_j, $j = 1, 2$.

Consider the functions

$$v_j(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(y',\tau)dy' \int_0^{t-\tau} K_j(x-y',\sigma,t-\tau-\sigma)d\sigma, \ j = 1, 2,$$

$$K_1(x,\sigma,t) = \partial_{x_n} g_1(x,\sigma,t), \quad K_2(x,\sigma,t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{x_k} g_2(x,\sigma,t).$$

The functions v_1, v_2 satisfy the equations (6), (7), so we can get rid of the derivative $\partial^2_{x_n} g_p(x,\sigma,t)$ and obtain

$$|\partial_t^k \partial_x^m K_p(x,\sigma,t)| \le C_{14+p}|\partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu} g_p(x,\sigma,t)|, \ p = 1, 2,$$

where $\nu = 0, 1$, and $2k_1 + |s'| + \nu = 2k + |m| + 1$.

We estimate the derivatives

$$I := \partial_t^{k_1}\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu} g_1(x,\sigma,t),$$

for definiteness, here

$$g_1(x,\sigma,t) = -4a \int_0^t d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma_1(x-\eta-\frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma, t-\tau_1)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}} \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\, d\eta',$$

We divide an integral with respect to τ_1 into two ones on the domains $(0,t/2)$ and $(t/2,t)$, in the second integral we make change of the variables $\tau_1 = t-\tau_2$, $\eta' = x'-\xi'$ and preserve the previous notations of τ_1, η' instead of τ_2, ξ' and then differentiate $g_1(x,\sigma,t)$ assuming $k_1 \ge 1$

$$I = -\frac{2a}{\sqrt{|A_n|}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_t^{k_1-1}\Big[\partial_{x'}^{s'}\partial_{x_n}^{\nu}\Gamma_1(x-\eta-\frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma, \frac{t}{2})$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},\frac{t}{2})\big|_{\eta_n=0}\,d\eta' + \partial^{\nu}_{x_n}\Gamma_1(\eta'-\frac{\kappa}{\varepsilon}d'\sigma, x_n-\frac{\kappa}{\varepsilon}d_n\sigma,\frac{t}{2})$$

$$\times\partial^{s'}_{x'}\sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(x'-\eta'+\frac{h'\sigma}{\varepsilon},\eta_n+\frac{h_n\sigma}{\varepsilon},\frac{t}{2})\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'\Big]$$

$$-\frac{4a}{\sqrt{|A_n|}}\int_0^{t/2}d\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big[\partial_t^{k_1}\partial^{s'}_{x'}\partial^{\nu}_{x_n}\Gamma_1(x-\eta-\frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma,t-\tau_1)$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta' + \partial^{\nu}_{x_n}\Gamma_1(\eta'-\frac{\kappa}{\varepsilon}d'\sigma, x_n-\frac{\kappa}{\varepsilon}d_n\sigma,\tau_1)$$

$$\times\partial_t^{k_1}\partial^{s'}_{x'}\sum_{k=1}^{n} a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(x'-\eta'+\frac{h'\sigma}{\varepsilon},-\eta_n+\frac{h_n\sigma}{\varepsilon},t-\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'\Big].$$

If $k_1=0$, we shall have only the second integral with respect to τ_1 and η'.

We point out that for the function $\Gamma_2(x,t)$ defined by (15) we have the same estimate as for $\Gamma_1(x,t)$ – fundamental solution of a heat equation (6), i.e. (17)

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\Gamma_p(x,t)|\le C_2\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\,e^{-c_0^2\frac{x^2}{t}},\ \ p=1,2,\ \ c_0=\mathrm{const}>0.$$

Really, the coefficients a^{ij} of the inverse matrix A^{-1} satisfy the conditions (5) with a constant $a_1>0$ instead of a constant $a_0>0$, so we can evaluate

$$e^{-\frac{\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}x_ix_j}{4t}}\le e^{-a_1\frac{x^2}{4t}}. \tag{42}$$

We differentiate the function Γ_2, apply (42) and an inequality (35), then we obtain an estimate (17) for Γ_2.

Now we take the co - normal derivative of $\Gamma_2(\eta+h\sigma/\varepsilon,\tau_1)$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+h\sigma/\varepsilon,\tau_1)\big|_{\eta_n=0}=-\frac{h_n\sigma/\varepsilon}{2\tau_1}\Gamma_2(\cdot),$$

differentiate Γ_p with respect on t, x', x_n, η, evaluate their derivatives with the help of the estimates (17), then using the table formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{a_1 a_2 \pi \tau_1 (t-\tau_1)}} e^{-\frac{(x_i-\eta_i)^2}{4a_1(t-\tau_1)} - \frac{(\eta_i - z_i)^2}{4a_2\tau_1}} d\eta_i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1(t-\tau_1) + a_2\tau_1}} e^{-\frac{(x_i-z_i)^2}{4(a_1(t-\tau_1)+a_2\tau_1)}}$$

integrate with respect to η'.

In the integral with respect to τ_1 we make use of an inequality $1/(t-\tau_1) \leq 2/t$, $\tau_1 \in (0, t/2)$ and a formula (18), integrate with respect to τ_1, then we obtain

$$|I| \leq C_{17} \frac{1}{t^{\frac{n+2k_1+|s'|+\nu}{2}}} e^{-c_0^2 \frac{(x-l\sigma)^2 + \lambda^2\sigma^2}{t}}, \ l = (\frac{\kappa d' - h'}{\varepsilon}, \frac{\kappa d_n}{\varepsilon}), \ \lambda = \frac{h_n}{\varepsilon}. \quad (43)$$

where C_{17} does not depend on κ, ε.

We estimate an exponent in (43). With the help of the Hölder and Young inequalities we find

$$2\sigma|\sum x_i l_i| \leq \delta x^2 + \frac{l^2\sigma}{\delta}.$$

Letting $\delta = (\lambda^2/2 + l^2)/(\lambda^2 + l^2)$ we shall have

$$e^{-c_0^2 \frac{(x-l\sigma)^2+\lambda^2\sigma^2}{t}} \leq e^{-c_0^2 \frac{\lambda^2 x^2}{2t(\lambda^2+l^2)} - c_0^2 \frac{\lambda^2\sigma^2}{2t}} = e^{-c_0^2 \frac{h_n^2 x^2}{2t(h_n^2 + \kappa^2 d_n^2 + (\kappa d' - h')^2)} - c_0^2 \frac{h_n^2 \sigma^2}{2\varepsilon^2 t}}. \quad (44)$$

We estimate a sum

$$S := h_n^2 + \kappa^2 d_n^2 + (\kappa d' - h')^2 = h'^2 + h_n^2 + \kappa^2 d^2 - 2\kappa d' h'$$

in the denominator of an exponent in (44).

We can see that S is a sum of the squares and contain $h_n^2 > 0$, so $S > 0$ for all $\kappa \in [0, \kappa_0]$ and arbitrary positive κ_0.

If $d'h' = d_1 h_1 + \ldots + d_{n-1}h_{n-1} \leq 0$, then

$$0 < S \leq h'^2 + h_n^2 + \kappa_0^2 d^2 + 2\kappa_0 |d'h'|. \quad (45)$$

If $d'h' > 0$, then

$$0 < S \le h'^2 + h_n^2 + \kappa_0^2 d^2. \tag{46}$$

Thus, applying the inequalities (45), (46) in the exponents (44), (43) we derive the estimates

$$e^{-c_0^2 \frac{(x-l\sigma)^2+\lambda^2\sigma^2}{t}} \le e^{-q_4^2 \frac{x^2}{t} - q_2^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 t}},$$

where

$$q_4^2 = \begin{cases} \frac{c_0^2 h_n^2}{2(h^2+\kappa_0^2 d^2 + 2\kappa_0 |d'h'|)}, & \text{if } d'h' \le 0 \\ \frac{c_0^2 h_n^2}{2(h^2+\kappa_0^2 d^2)}, & \text{if } d'h' > 0 \end{cases},$$

$$q_4^2 \ge q_1^2,$$

$$q_1^2 := \frac{c_0^2 h_n^2}{2(h^2 + \kappa_0^2 d^2 + 2\kappa_0 |d'h'|)}, \qquad q_2^2 = \frac{c_0^2 h_n^2}{2}$$

and

$$|I| := |\partial_t^{k_1} \partial_{x'}^{s'} \partial_{x_n}^{\nu} g_1(x,\sigma,t)| \le C_{17} \frac{1}{t^{\frac{n+2k_1+|s'|+\nu}{2}}} e^{-q_1^2 \frac{x^2}{t} - q_2^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 t}}.$$

Remembering that $|\partial_t^k \partial_x^m K_1(x,\sigma,t)| \le C_{15} |\partial_t^{k_1} \partial_{x'}^{s'} \partial_{x_n}^{\nu} g_1(x,\sigma,t)|$ and $2k_1 + |s'| + \nu = 2k + |m| + 1$, $\nu = 0, 1$, we shall have an estimate

$$|\partial_t^k \partial_x^m K_1(x,\sigma,t)| \le C_{18} \frac{1}{t^{\frac{n+2k+|s|+1}{2}}} e^{-q_1^2 \frac{x^2}{t} - q_2^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 t}}$$

with the constant C_{18} independent on κ, ε, i.e. the estimate (16) for $K_1(x,\sigma,t)$.

In the same manner we obtain an estimate (16) for $K_2(x,\sigma,t)$. □

This work was supported by the grant №0763/GF of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Литература

1 Bazaliy B.V. Stefan problem // Doklady AN USSR. Ser.A. – 1986. – № 11. – P. 3-7.

2 Radkevich E.V. On the solvability of the general nonstationary free boundary problems // Some applications of functional analysis to the problems of mathematical physics. – Novosibirsk, 1986. – P. 85-111.

3 Bizhanova G.I. Solution of the initial - boundary value problem with a time derivative in the conjugate condition for the second order parabolic equations in the weighted Hölder space // Algebra i Analiz. – 1994. – V. 6, № 1. – P. 62-92 (English transl.: St-Petersburg Math.J. – 1995. – V. 6, № 1. – P. 51-75).

4 Bizhanova G.I. Solution of the multidimensional two-phase Stefan and Florin problems for the second order parabolic equations in the bounded domain in the weighted Hölder space // Algebra i Analiz. – 1995. – V. 7, № 2. – P. 46-76 (English transl.: St-Petersburg Math. J. – 1996. – V. 7, № 2. – P. 217-241).

5 Bizhanova G.I.; Solonnikov V.A. On the free boundary problems for the parabolic equations // Algebra i Analiz. – 2000. – V. 12, № 6. – P. 3-45 (English transl.: St-Petersburg Math. J. – 2001. – V. 12, № 6. – P. 949-981).

6 Bizhanova G.I. Uniform estimates of the solution to the linear two – phase Stefan problem with a small parameter // Matem. zhurnal. – Almaty, 2005. –V. 5, № 1. – P. 19-28.

7 Bizhanova G.I. Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boundary, Stefan type problems // Zapiski nauchn. semin. POMI. – 2008. – V. 362. – P. 64-91 (English transl.: Journal of Math. Sciences. – 2009. – V. 159, № 4. – P. 420-435).

8 Bizhanova G.I. On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. I // Matem. zhurnal. – Almaty, 2012. – V. 12, № 1. – P. 24-37.

Received 24.07.13

Бижанова Г.И. ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ЕКІФАЗАЛЫ СИНГУЛЯРЛЫ ҚОБАЛЖЫҒАН ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ БАҒАЛАУЛАРЫ. I

Шекаралық шарттағы бас мүшелерінде екі кіші параметрі бар параболалық теңдеулер үшін еркін шекаралы сызықтандырылған екіфазалы есеп зерттелінеді. Есептің шешімі айқын түрде құрылған. Есептің Грин функциясының бағалаулары орнатылған.

Бижанова Г.И. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. I

Изучается линеаризованная двухфазная задача со свободной границей для параболических уравнений с двумя малыми параметрами при старших членах в граничном условии. Построено решение задачи в явном виде. Установлены оценки функций Грина задачи.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.5, 519.2

Y.V. Voinov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES of KR
050010, Almaty, Pushkin str., 125, e-mail: v.yevgeniy@yahoo.com

APPROXIMATE CONFIDENCE LIMITS FOR A PROPORTION OF THE HYPERGEOMETRIC PROBABILITY DISTRIBUTION: APPLICATIONS IN AUDITS, ACCEPTANCE SAMPLING AND MEDICAL INVESTIGATIONS

Many times auditors review samples of business invoices and estimate the number of error items in case of rare events. Often samples have only zero error items and hence classical methods of estimation are inapplicable. The same situation is often encountered in acceptance sampling and medical investigations. It is known that the hypergeometric probability distribution can be used, but approximate confidence limits for a proportion of this distribution, that can sometimes be better than exact ones, were unknown. Three new methods for constructing those approximate limits are proposed. Applications of them are discussed.
Keywords: *hypergeometric distribution, lower and upper approximate confidence limits, rare events.*

1 Introduction

In audits there can be a situation when there is no occurrence of successes in a randomly selected without replacement sample. In this case the point estimator of the parameter of success will be zero, that is too optimistic, and the construction of confidence intervals is needed [1]. The same situation occurs,

Keywords: *гипергеометрическое распределение, нижние и верхние доверительные приблизительные пределы, редкие случаи*
2010 Mathematics Subject Classification: 62F25, 62P10, 60E99

for example, in clinical investigations [2], and acceptance sampling [3]. Many results for constructing УexactФ and approximate confidence intervals for the binomial probability distributions are known [4-8]. For the hypergeometric probability distribution

$$P(X = x; M) = \frac{\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}},$$

$$\max\{0, n-N+M\} \leq x \leq \min\{M, n\}, \tag{1}$$

only exact confidence intervals are known [9, 10]. For an upper confidence limit *U(x)* for the parameter M W.G. Cohran [10] suggests to find the exact solution of the equation

$$\sum_{j=0}^{x} \frac{\begin{pmatrix} U(x) \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-U(x) \\ n-j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} = \alpha_u. \tag{2}$$

In the case when α_u is chosen in advance, equation (2) requires a nonintegral value of $U(x)$, whereas $U(x)$ should be a whole number. Usually $U(x)$ is chosen to be the smallest integral value of $U(x)$ such that the left-hand side of (2) is less than or equal to α_u. The lower confidence limit $L(x)$ is the largest integral value such that

$$\sum_{j=x}^{n} \frac{\begin{pmatrix} L(x) \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-L(x) \\ n-j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \leq \alpha_L.$$

Both binomial and hypergeometric probability distributions are particular cases of the Pólya distribution. Approximate confidence intervals for the Pólya distribution that can be used to solve above problems have been proposed in [11]. Let a population includes N invoices. Suppose the number of error items in this population is M. For the random sample of n items without replacement, the number of error items x in the sample, given a total number of M error items, in the population follows the hypergeometric probability distribution

(1). If $x = 0$, then the classical estimator $\hat{M}$ of M will be $\hat{M}$=Nx/n=0, that is very optimistic estimator. Because of this in [1] there was suggested the following estimator of M

$$\hat{M} = E(M|x) = \sum_{M=x}^{N} MP(M|x), \tag{3}$$

where $P(M|x) = P(X = x; M)/ \sum_{M=x}^{N} P(X = x; M)$. This point estimator and a confidence interval suggested by [1] are computationally complicated. In section 2 three new ways for approximate confidence intervals construction are given. Section 3 is devoted to computations and comparisons. Applications of those confidence limits for a simulated example of [1] and for examples of [12] are discussed in Section (4). Section 5 contains concluding remarks and recommendations.

2 Approximate confidence limits

Methods for constructing approximate confidence intervals for the parameter of success of the two-parameter Pólya probability distribution were proposed in [11], where probability is given by the formula

$$P(X = x; p; \lambda) = \binom{n}{x} \frac{p^{[x;\lambda]}(1-p)^{[n-x;\lambda]}}{1^{[n;\lambda]}};\ x = 0, 1, ..., n;\ p \in P \subset (0, 1), \tag{4}$$

where λ is supposed to be known real parameter such that $p + \lambda(n-1) > 0$; $1 - p + \lambda(n-1) > 0$, and $a^{[r;\lambda]}$ is the generalized power of a defined by $a^{[r;\lambda]} = \prod_{h=0}^{r-1}(a + \lambda h)$, $a^{[0;\lambda]} = 1$. If $p = M/N,\ 0 \le M \le N,\ \lambda = -1/N,\ n$ and N being positive integers, $N > n$ and M is non-negative integer such that $0 \le M \le N$, the distribution (4) reduces to the hypergeometric distribution (1). Using results of [11] consider three variants for approximate confidence limits for a number of wrong invoices M of the distribution (1). Let

$$L_{11}(X) = \left(\frac{t + 0.5Au_\epsilon^2 - \sqrt{(t + 0.5Au_\epsilon^2)^2 - t^2}}{1 + Au_\epsilon^2}\right) N, \tag{5}$$

$$U_{11}(X) = \left[\min\left(1;\ \frac{t + 0.5Au_\epsilon^2 + \sqrt{(t + 0.5Au_\epsilon^2)^2 - t^2}}{1 + Au_\epsilon^2}\right)\right] N, \tag{6}$$

where $t = X/n$, $A = (N-n)/(n(N-1))$, $u_\epsilon = 1.645$ for 90% confidence interval. Then, due to the first method, we obtain the approximate lower bound

$$L_1(X) = \begin{cases} 0, & \text{if } L_{11}(x) = 0 \\ [L_{11}(x)], & \text{otherwise} \end{cases}$$

and the upper bound $U_1(X) = [U_{11}(x)] + 1$, where $[x]$ is the greatest integer part of x. According to the second method

$$L_{21}(X) = \left[\max\left(0;\ \sin^2\left(\arcsin\sqrt{t} - \frac{u_\epsilon}{2}\sqrt{A}\right)\right)\right] N, \tag{7}$$

$$U_{21}(X) = \left[\min\left(1;\ \sin^2\left(\arcsin\sqrt{t} + \frac{u_\epsilon}{2}\sqrt{A}\right)\right)\right] N. \tag{8}$$

Then we have the lower bound

$$L_2(X) = \begin{cases} 0, & \text{if } [L_{21}(x)] = 0 \\ [L_{21}(x)], & \text{otherwise} \end{cases}$$

and the upper bound $U_2(X) = [U_{21}(x)] + 1$. Due to the third method

$$L_{31}(X) = \left[\max\left(0, \frac{X}{n} - u_\epsilon\sqrt{\frac{X(n-X)(1-n/N)}{n^2(n-1)} + \sqrt{\Psi(X)}}\right)\right] N, \tag{9}$$

$$U_{31}(X) = \left[\min\left(1, \frac{X}{n} + u_\epsilon\sqrt{\frac{X(n-X)(1-n/N)}{n^2(n-1)} + \sqrt{\Psi(X)}}\right)\right] N, \tag{10}$$

where

$$\Psi(X) = \frac{(n-1)(1-n/N)^2}{16n^3(n-1.5)} \text{ if } X = 0, 1 \text{ or } X = n-1, n,$$

and

$$\Psi(X) = \left(\frac{X(n-X)(1-n/N)}{n^2(n-1)}\right)^2 - \eta,$$

where

$$\eta = A^2\left(\frac{X(X-1)(n-X)(n-X-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{X(n-X)}{n(n-1)}\right)$$

if $2 \leq X \leq n-2$. Then we shall have the lower bound

$$L_3(X) = \begin{cases} 0, \text{ if } [L_{31}(x)] = 0 \\ [L_{31}(x)], \text{ otherwise} \end{cases}$$

and the upper bound $U_3(X) = [U_{31}(x)] + 1$.

3 Computations and comparisons

Consider numerical examples for the two-sided confidence probability 1-$\alpha = 0.9$. To produce the calculations we used Microsoft VBA codes. Cov 1,2,3 denote coverage probabilities for the proposed three methods.

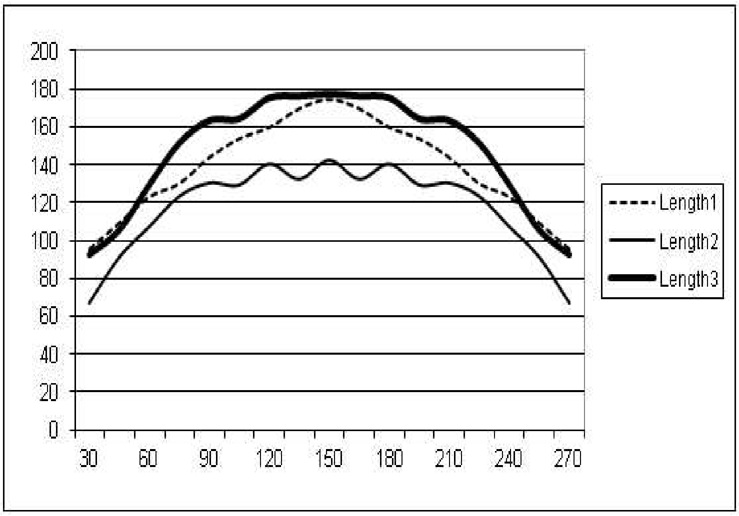

Figure 1 – Lengths of the two-sided confidence intervals for $n = 10$, N=300 as functions of M

To sum up, from the above figures we see that method 2 gives the shortest confidence intervals and lengths of intervals for methods 1 and 3 are approximately the same, when $N = 300$ or 1,000. Coverage probability for intervals constructed by method 2 is very close to the desired confidence of $1-\alpha = 0.9$ for $N = 300$ or 1,000 while the coverage probability of method 3 is a bit worst and the coverage probability of method 1 is the worst one among all methods.

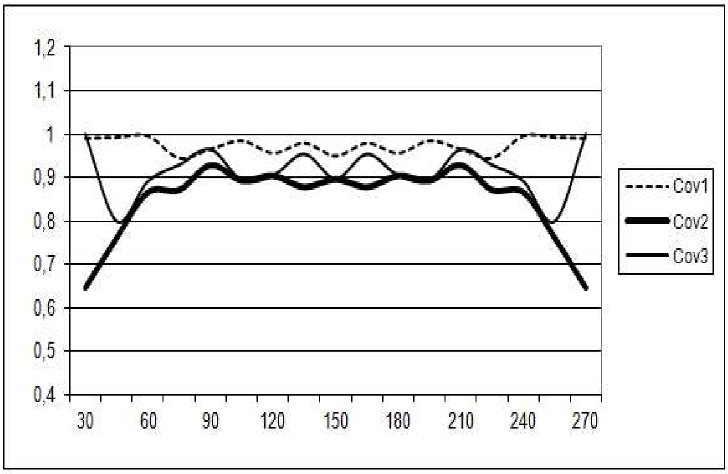

Figure 2 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals for $n = 10$, N=300 as functions of M

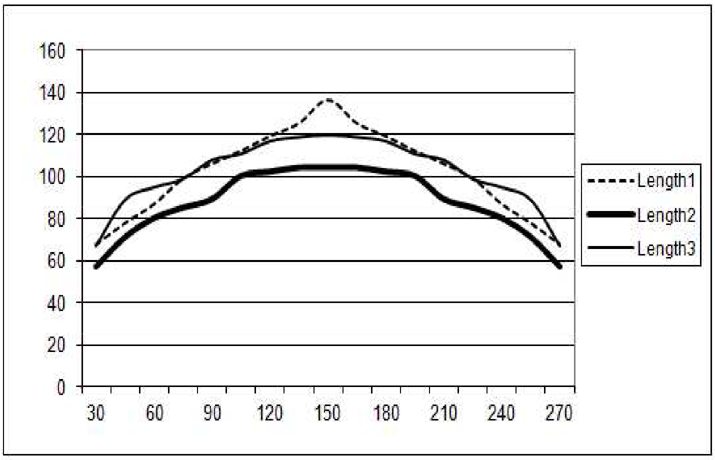

Figure 3 – Lengths of the two-sided confidence intervals for $n = 20$, N=300 as functions of M

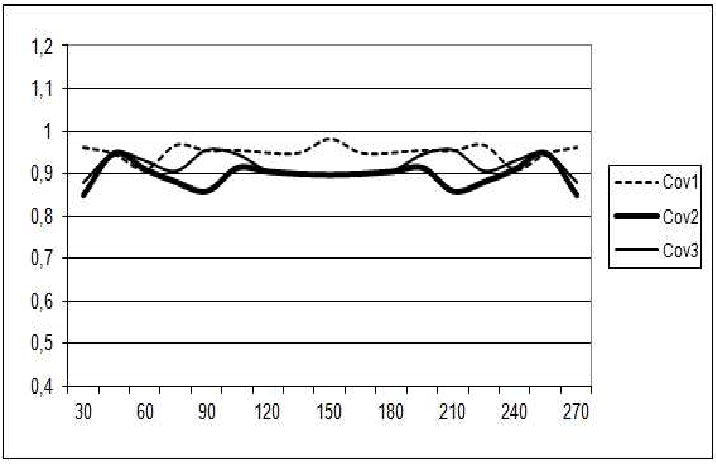

Figure 4 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals for $n = 20$, N=300 as functions of M

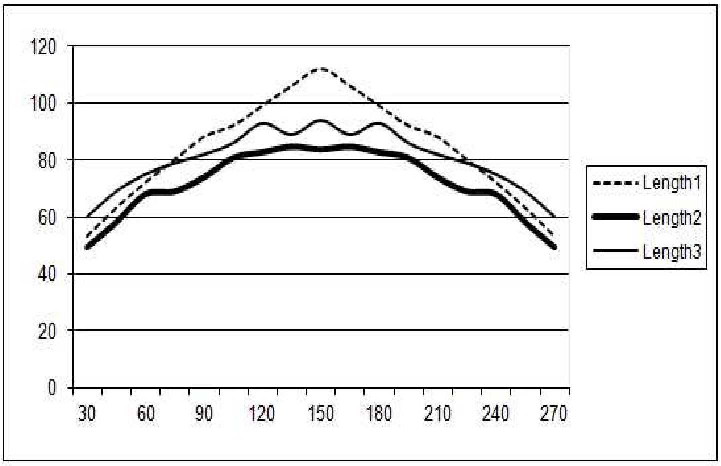

Figure 5 – Lengths of the two-sided confidence intervals for $n = 30$, N=300 as functions of M

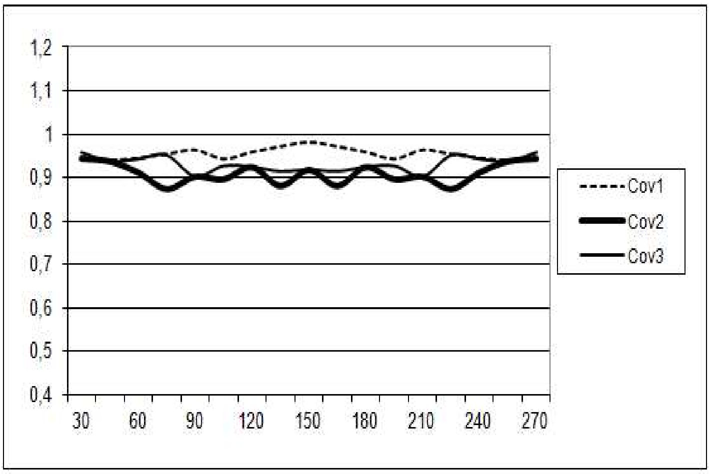

Figure 6 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals for $n = 30$, N=300 as functions of M

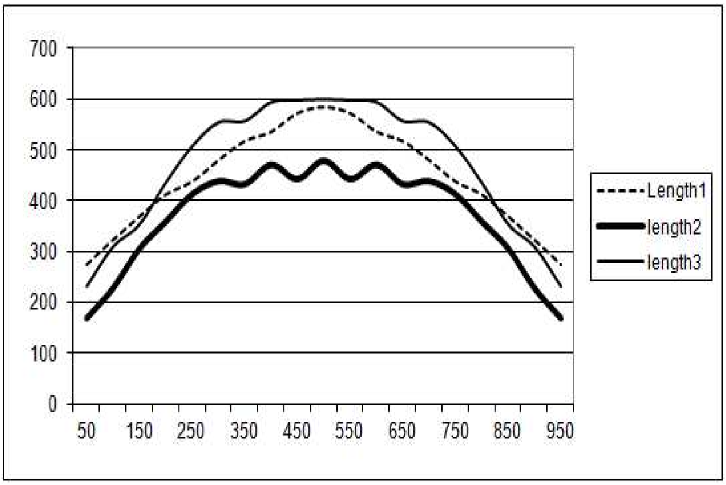

Figure 7 – Lengths of the two-sided confidence intervals for $n = 10$, N=1,000 as functions of M

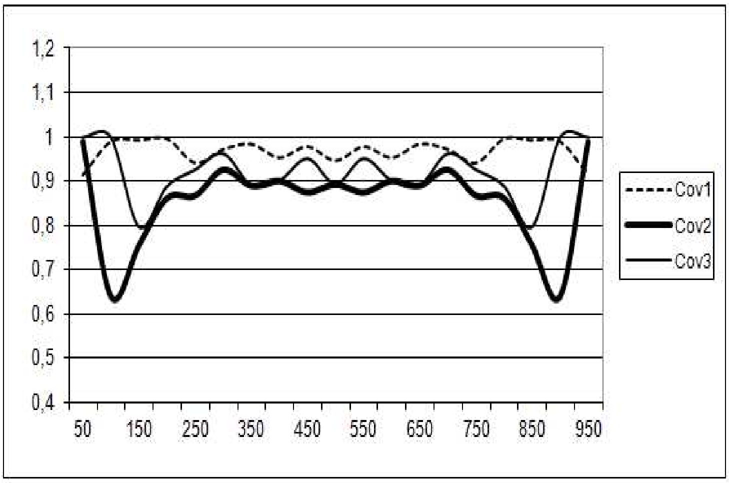

Figure 8 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals
for $n = 10$, N=1,000 as functions of M

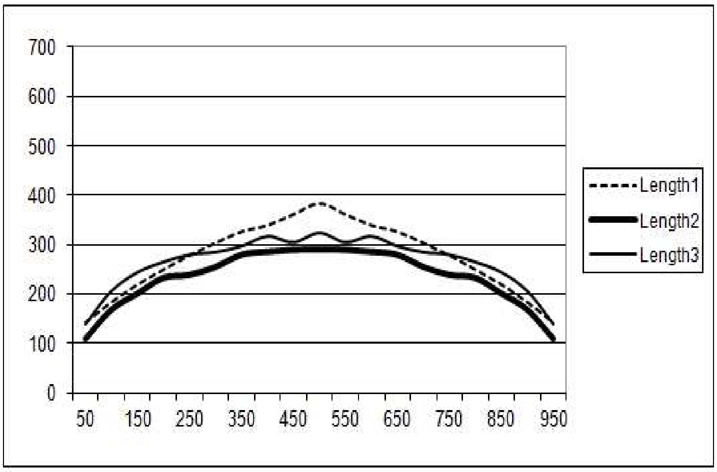

Figure 9 – Lengths of the two-sided confidence intervals
for $n = 30$, $N = 1,000$ as functions of M

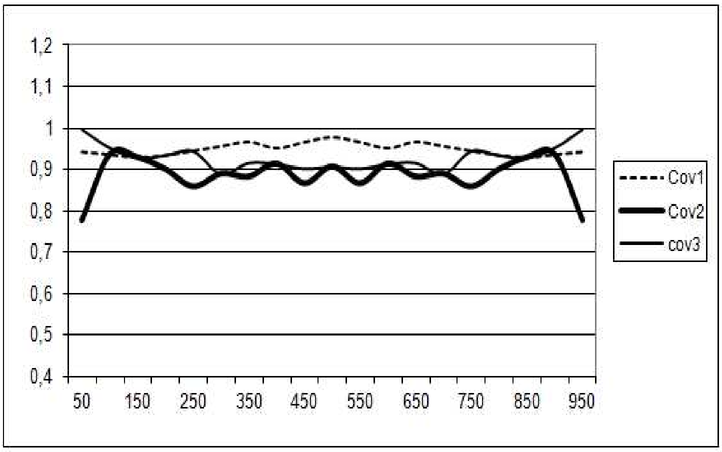

Figure 10 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals for $n = 30$, $N = 1,000$ as functions of M

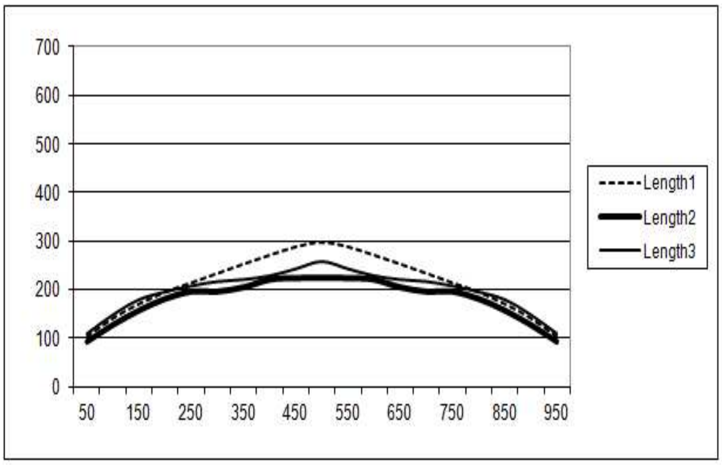

Figure 11 – Lengths of the two-sided confidence intervals for $n = 50$, N=1,000 as functions of M

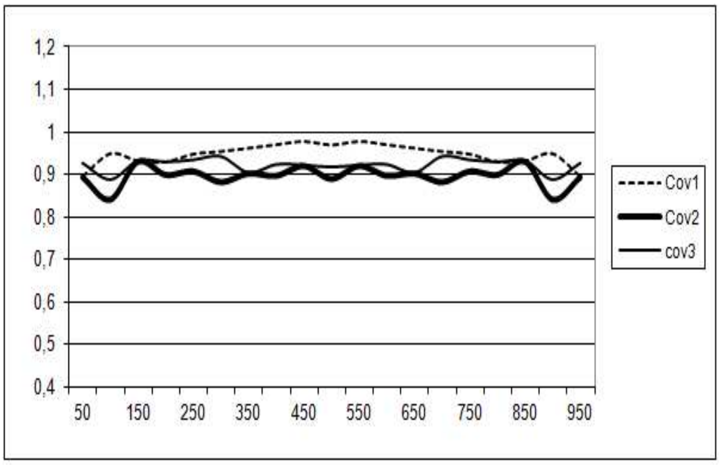

Figure 12 – Coverage probabilities for the two-sided confidence intervals for $n = 50$, N=1,000 as functions of M

4 Applications of approximate confidence limits

Consider an application of the above confidence limits for the simulated results of [1], Table 2. 2,000 samples of size $n = 30$ with $M = 15$ were simulated in [1]. Consider the length and coverage probabilities of 90% confidence bounds that can be obtained using formulas (5)–(10) for $n = 30$, M=15 (see Fig.13, 14).

From the above figures one can see that the length of the interval obtained by third method is the shortest one and at the same time the coverage probability of that interval is close enough to 0.9. It is worth to note here that the second method works only for $0 < t < 1$. A comparison of the results obtained by three methods of construction of confidence intervals with the results obtained by [1] for the point estimator $E(M|x)$ (see formula (3) and Table 1 obtained from Table 2 of [1]) is shown below.

For the data of this table we constructed confidence limits and calculated middle points of confidence intervals in accordance with formulas (5)–(10) (see Fig.15). From Figure 15 one can see that middle points of confidence intervals defined by formulas (5)–(10) fairly well coincide with the point estimates of [1].

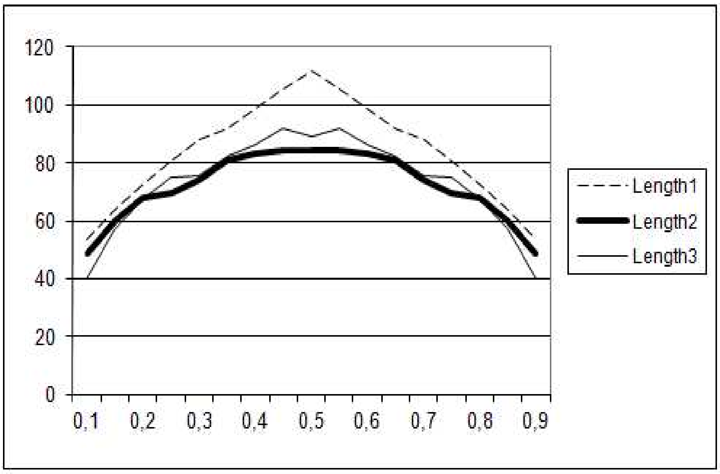

Figure 13 – Expected lengths of approximate confidence intervals for method 1 (Length 1), method 2 (Length 2), and method 3 (Length 3) as the function of the unknown probability p

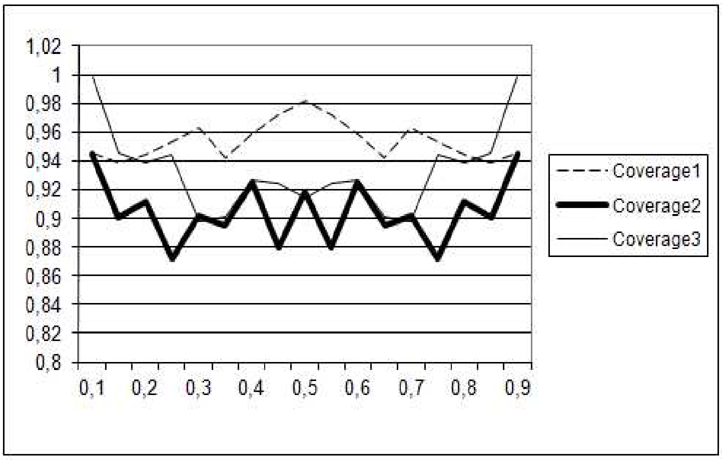

Figure 14 – Expected coverage probability of approximate confidence intervals for method 1 (Coverage 1), method 2 (Coverage 2), and method 3 (Coverage 3) as a function of the unknown probability p

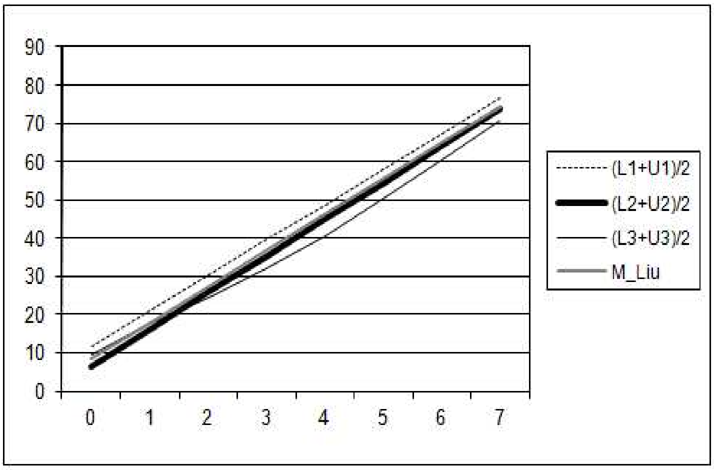

Figure 15 – The comparison of the middle points of confidence intervals calculated by formulas (5)–(10) with the point estimates $E(M|x)$ of Liu et al (2001), Table 1.

Table 1 – Distribution of simulated 2,000 random samples of size $n = 30$, if $M = 15$

x	**t**	**# of samples**	$\hat{M} = E(M\|x)$
0	0	386	8.44
1	0.333	689	17.86
2	0.066	562	27.31
3	0.1	251	36.75
4	0.133	96	46.19
5	0.166	12	55.63
6	0.2	3	65.06
7	0.233	1	74.50

Table 2 – Confidence intervals for parameter M if $N = 10, n = 4$, and $\alpha = 0.10$. By **K** and **C** we mean Konijn's and Cochran's methods (for details see [12]). **T**'s classical method means confidence intervals obtained by inversion of the Student's t test

	K or T Method		**C Method**		**Method 1**		**Method 2**		**Method 3**	
x	$LT(x)$	$UT(x)$	$LC(x)$	$UC(x)$	L_1	U_1	L_2	U_2	L_3	U_3
0	0	4	0	5	0	4	1	2	0	3
1	1	6	0	7	0	7	0	6	0	8
2	2	8	1	9	1	9	1	9	0	11
3	4	9	3	10	2	11	4	10	2	11
4	6	10	5	10	3	11	8	9	7	11

Compare the results of [12] for exact confidence intervals of parameter M, if $N = 10, n = 4$, and $\alpha = 0.10$ with those obtained by the formulas (5)–(10) (see Table 2).

From this table one sees that, for example, if $x = 0$ the third method gives two times shorter confidence interval than the exact one. This fact is in full accordance with the well-known result for the binomial probability distribution [4] and shows that approximate interval can be better in the sense of the length than the "exact" one.

5 Conclusions and recommendations

The number of wrong invoices in a large population in the case of zero events using sample can not be properly estimated using classical methods. In [1] it is suggested using the hypergeometric probability distribution and conditional probability to estimate the number of wrong invoices. This method is applicable but it is not computationally simple. In this paper simpler methods of constructing approximate confidence intervals for the number of wrong invoices have been suggested. From Figures 1-14 it follows that the most appropriate method for constructing confidence limits is method 3 that can give confidence intervals shorter than the intervals obtained by exact methods. Proposed confidence intervals can be successfully used also in acceptance sampling and clinical investigations. An interesting interpretation of confidence intervals if $x = 0$ has been given in [2], there has been explained that the upper limit can be represented as the sample proportion from a number of "successes" in a future experiment of the same sample size. We recommend the using of the third method for constructing approximate confidence intervals proposed in this paper in case of rare events, for example, in audits, acceptance sampling, and clinical investigations.

Acknowledgement

The author is grateful to N. Pya for given an access to the book of W.G. Cochran and many useful comments.

References

1 Liu Y., Batcher M., Rotz W. Application of the hypergeometric distribution in a special case of rare events // Proceedings of the Annual Meeting of the American Statistical Association. – 2001. – P. 1-7.

2 Louis, T.A. Confidence Intervals for a Binomial Parameter after Observing no Successes // The American Statistician. – 1981. – V. 35. – P. 154.

3 Schiling E.G., Neubauer D.V. Acceptance Sampling in Quality Control. – Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. – 683 p.

4 Agresti A., Coull B. Approximate is better than "exact"for interval estimation of binomial proportions // The American Statistician. – 1998. V. 52. – P. 119-126.

5 Brown L.D., Cai T.T., Das Gupta A. Interval estimation for a binomial proportion. With comments and a rejoinder by the authors // Statist. Sci. – 2001. V. 16. – P. 101-133.

6 Brown L.D. Cai T.T., Das Gupta A. Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions // Ann. Statist. – 2002. – V. 30. P. 160-201.

7 Brown L.D., Cai T.T., Das Gupta A. Interval estimation for a binomial proportion. With comments and a rejoinder by the authors // Statistica Sinica. – 2003. V. 13. – P. 19-49.

8 Cai T.T. One sided confidence intervals in discrete distributions // J. Statist. Plann. Inference. – 2005. V. 131. – P. 63-88.

9 Konijn H.S. Statistical Theory of Sample Survey Design and Analysis. – New York: Elseiver/North Holland, 1973. – 444 p.

10 Cochran W.G. Sampling Techniques, (3rd ed.). – New York: John Wiley, 1977. – 428 p.

11 Lumelskii, Voinov Ya., Voinov V., Nikulin E. Approximate confidence limits for a proportion of the Pólya distribution // Commun. Statist-Theory and Methods. – 2011. – V. 40. – P. 1601-1619.

12 Buonaccorsi J.P. A note on confidence intervals for proportions in finite populations // The American Statistician. – 1987. – V. 41. P. 215-218.

Received 06.06.12

Войнов Е.В. ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҮЛЕСТІРУІНІҢ ПРОПОРЦИЯСЫ ҮШІН АҚИҚАТТЫҚТЫҢ ЖУЫҚ ШАМАДАҒЫ ШЕКАРАЛАРЫ: ТЕКСЕРУЛЕР, ІШІНАРА БАҚЫЛАУЛАР МЕН МЕДИЦИНАЛЫҚ ЗЕРТТЕУЛЕРДЕГІ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Аудиторлар сан рет іскерлік есеп-шоттардың үлгілерін қарайды және сирек жағдайлар жағдайында қате тармақтар санын бағалайды. Көбінесе, үлгілердің тек қана нөлдік қате тармақтары болады және сонын салдары ретінде бағалаудың классикалық әдістері жарамайды. Дәл осындай жағдай ішінара бақылау мен медициналық зерттеулерде жиі кездеседі. Ықтималдықтың гипергеометриялық үлестірілуін пайдалануға болатындығы белгілі, алайда осы үлестірілудегі пропорция үшін, ақиқаттылықтың дәл шекарадан жақсырақ болатын, жуық шамадағы шекаралары белгісіз болды. Осы жуық шамадағы шекараларды құруға арналған үш жаңа әдіс ұсынылды. Олардың қолданыстары талқыланған.

Войнов Е.В. ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДОСТОВЕРНОСТИ ДЛЯ ПРОПОРЦИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ: ПРИМЕНЕНИЯ В РЕВИЗИЯХ, ВЫБОРОЧНОМ КОНТРОЛЕ И МЕДИЦИНСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Много раз аудиторы рассматривают образцы деловых счетов и оценивают число ошибочных пунктов в случае редких случаев. Часто у образцов есть только нулевые ошибочные пункты, и, следовательно, классические методы оценки неподходящие. С той же самой ситуацией часто сталкиваются в выборочном контроле и медицинских исследованиях. Известно, что гипергеометрическое распределение вероятности может использоваться, но приблизительные пределы достоверности для пропорции из этого распределения, которое может иногда быть лучше, чем точные, были неизвестны. Предложены три новых метода для того, чтобы построить те приблизительные пределы. Применения их обсуждены.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.95

Ж. К. Джобулаева

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина 125, e-mail: zhanat-78@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучается задача с двумя малыми параметрами в условиях сопряжения. Такая задача возникает при линеаризации нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе для системы параболических уравнений. Доказаны существование и единственность решения в пространстве Гельдера, установлена его коэрцитивная оценка.
Ключевые слова: *параболические уравнения, малые параметры в граничных условиях, существование, единственность, коэрицитивные оценки решения, пространство Гельдера.*

В настоящей работе рассматривается краевая задача с двумя малыми параметрами $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ в граничных условиях для системы параболических уравнений. Эта задача является линеаризованной задачей нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, которая описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристаллизацию) вещества, содержащего примесь. В работе мы найдем равномерные по κ, ε оценки решения. Это позволяет доказать разрешимость нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, получить решения задач при $\kappa \to 0$, $\varepsilon > 0$; $\kappa > 0$, $\varepsilon \to 0$ и $\kappa \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Keywords: *parabolic equations, small parameters in the boundary conditions, existence, uniqueness, coercive estimates of the solution, Hölder space*
2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35

Классическая разрешимость задачи со свободной границей при $\varkappa = 1$, $\varepsilon = 1$ была исследована А.Г.Петровой [1] в одномерном случае и Г.И.Бижановой, Ж.Ф.Родригесом [2] — в многомерном случае.

Многомерные нелинейные задачи типа Стефана с малым параметром при скорости продвижения свободной границы изучены J.F. Rodrigues, V.A. Solonnikov, F. Yi [3], Г.И.Бижановой [4].

В настоящей работе доказано существование и единственность решения, установлена коэрцитивная оценка решения с константой, не зависящей от малых параметров, в пространствах Гельдера.

Пусть $\Omega_1 = (0,\ \rho_0)$, $\Omega_2 = (\rho_0,\ b)$, $0 < \rho_0 < b$, $b > 0$, $\Omega_{jT} = \Omega_j \times (0,\ T)$, $j = 1, 2$, $\sigma_T = (0,\ T)$, $\chi(\lambda)$ — гладкая срезающая функция, равная единице при $|\lambda| \le \delta_0$ и нулю при $|\lambda| \ge 2\delta_0$ и имеющая оценку $|d^m\chi/dx^m| \le C_m\delta_0^{-m}$, $\delta_0 = const > 0$.

Требуется найти функции $v_j(x,t)$, $z_j(x,t)$, $j = 1, 2$, и $\psi(t)$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$L_j(x,t,\partial_t,\partial_x)(v_j,\psi) := \partial_t v_j - a_j(x,t)\partial_x^2 v_j - b_j(x,t)\partial_x v_j - d_j(x,t)v_j$$

$$-\beta_j(x,t)\chi(x-\rho_0)D_t\psi = f_j(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_{jT},\ j = 1,2, \tag{1}$$

$$L_{j+2}(x,t,\partial_t,\partial_x)(z_j,\psi) := \partial_t z_j - a_{j+2}(x,t)\partial_x^2 z_j - b_{j+2}(x,t)\partial_x z_j - d_{j+2}(x,t)z_j$$

$$-\beta_{j+2}(x,t)\chi(x-\rho_0)D_t\psi = g_j(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_{jT},\ j = 1,2, \tag{2}$$

начальным условиям

$$\psi\big|_{t=0} = 0,\ v_j\big|_{t=0} = 0,\ z_j\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j,\ j = 1,2, \tag{3}$$

граничным условиям

$$v_1\big|_{x=0} = p_1(t),\ v_2\big|_{x=b} = p_2(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{4}$$

$$z_1\big|_{x=0} = q_1(t),\ z_2\big|_{x=b} = q_2(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{5}$$

и условиям сопряжения на границе $x = \rho_0$

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=\rho_0} = \eta_0(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{6}$$

$$(z_j - \gamma_j(t)v_j)\big|_{x=\rho_0} = \eta_j(t),\ j = 1,2, \quad t \in \sigma_T, \tag{7}$$

$$(\lambda_1(t)\partial_x v_1 - \lambda_2(t)\partial_x v_2)\big|_{x=\rho_0} + \kappa D_t\psi = \varphi_1(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{8}$$

$$(k_1(t)\partial_x z_1 - k_2(t)\partial_x z_2)\big|_{x=\rho_0} - \varepsilon D_t\psi = \varphi_2(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{9}$$

где $a_j(x,t) \geq d_0 = const > 0,\ a_{j+2}(x,t) \geq d_0 = const > 0$ в $\overline{\Omega}_{jT},\ j = 1,2,\ \lambda_j(t) \geq d_1 = const > 0,\ \ k_j(t) \geq d_1,\ j = 1,2,\ \kappa > 0, \varepsilon > 0$ малые параметры, $\partial_t = \partial/\partial_t,\ \partial_x = \partial/\partial_x,\ D_t = d/dt.$

Через $C_1, C_2, ...$ будем обозначать положительные константы.

Заметим, что $\chi(x-\rho_0) = 0$ при $|x-\rho_0| \geq 2\delta_0$ в уравнениях (1), (2). Задача (1) – (9) является линеаризованной задачей нелинейной задачи с двумя малыми параметрами в условиях на свободной границе, которая описывает процесс фазовых переходов (плавление, кристаллизацию) вещества, содержащего примесь. Здесь $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ — температура жидкой и твердой фаз, $z_1(x,t)$ и $z_2(x,t)$ — концентрация примеси в жидкой и твердой фазах соответственно, $\psi(t)$ — функция, описывающая свободную границу, которая разделяет эти фазы.

Эта задача будет изучена в пространствах Гельдера. Через $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(\overline{\Omega}_{jT}),\ \ \alpha \in (0,1)$ обозначим пространство функций $v(x,t)$ с нормой

$$|v|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{jT}} := |v|_{\Omega_{jT}} + |\partial_x v|_{\Omega_{jT}} + |\partial_x^2 v|_{\Omega_{jT}} + |\partial_t v|_{\Omega_{jT}} + [\partial_x^2 v]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{jT}}$$

$$+[\partial_x^2 v]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{jT}} + [\partial_x v]^{(1+\alpha)/2}_{t,\Omega_{jT}} + [\partial_t v]^{(\alpha)}_{x,\Omega_{jT}} + [\partial_t v]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_{jT}},\ j = 1,2,$$

$\widehat{C}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ есть пространство функций ψ таких, что $(\kappa+\varepsilon)D_t\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, а норма определяется формулой

$$|\psi|_{\widehat{C}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)} := |\psi|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |(\kappa+\varepsilon)D_t\psi|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T},$$

здесь $|v|_{\Omega_{jT}} = \max\limits_{(x,t)\in\Omega_{jT}} |v(x,t)|,$

$$[v]^{(\beta)}_{x,\Omega_{jT}} = \max_{(x,t),(z,t)\in\Omega_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(z,t)|}{|x-z|^\beta},$$

$$[v]^{(\beta)}_{t,\Omega_{jT}} = \max_{(x,t),(x,t_1)\in\Omega_{jT}} \frac{|v(x,t)-v(x,t_1)|}{|t-t_1|^\beta},\ \beta \in (0,1).$$

Через $\overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{jT})$, $\overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, $\overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, $\alpha \in (0,1)$, будем обозначать пространства функций $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{jT})$ и $\psi \in C^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, $(\kappa+\varepsilon)D_t\psi \in C^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$, удовлетворяющие условиям $\partial_t^k v\big|_{t=0} = 0$ и $D_t^k\psi(t)\big|_{t=0} = 0,\ k = 0,1.$

Определим банаховы пространства функций. Пусть

$$B(\Omega_T) := \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{1T}) \times \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{2T}) \times \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{1T})$$

$\times \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\quad\ t}(\overline{\Omega}_{2T}) \times \widehat{\overset{\circ}{C}}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ есть пространство вектор – функций $w = (v_1, v_2, z_1, z_2, \psi)$ с нормой

$$\|w\|_{B(\Omega_T)} = \sum_{j=1}^{2}\big(|v_j|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{jT}} + |z_j|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{jT}}\big) + |\psi|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |(\kappa+\varepsilon)D_t\psi|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_T}, \tag{10}$$

$$H(\Omega_T) := \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{1T}) \times \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{2T}) \times \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{1T}) \times \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{2T})$$

$$\times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$$

$\times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T)$ — пространство вектор – функций $h = (f_1, f_2, g_1, g_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi_1, \varphi_2)$ с нормой

$$\|h\|_{H(\Omega_T)} = \sum_{j=1}^{2}\big(|f_j|^{(\alpha)}_{\Omega_{jT}} + |g_j|^{(\alpha)}_{\Omega_{jT}} + |p_j|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |q_j|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\big)$$

$$+ \sum_{k=0}^{2}|\eta_k|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + \sum_{j=1}^{2}|\varphi_j|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_T}. \tag{11}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

a) $a_j(x,t),\ a_{j+2}(x,t),\ b_j(x,t),\ b_{j+2}(x,t),\ d_j(x,t),\ d_{j+2}(x,t),\ \beta_j(x,t),$ $\beta_{j+2}(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_{jT}),\ \gamma_j(t) \in C^{1+\alpha/2}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ \lambda_j(t),\ k_j(t) \in C^{(1+\alpha)/2}_{t}(\overline{\sigma}_T),\ j = 1,2,\ \alpha \in (0,1);$

b) $\big(\beta_{j+2}(x,t) - \gamma_j(t)\beta_j(x,t)\big)\big|_{x=\rho_0} \geq d_2 = const > 0,\ j = 1,2,\ t \in \overline{\sigma}_T,$

$\big(\beta_{5-j}(x,t) - \gamma_{3-j}(t)\beta_j(x,t)\big)\big|_{x=\rho_0} \geq d_3 = const > 0,\ j = 1,2,\ t \in \overline{\sigma}_T.$

Теорема 1. *Пусть* $0 < \kappa \le \kappa_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *и выполнены условия a), b).*

Для любых функций $f_j(x,t)$, $g_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(\overline{\Omega}_{jT})$, $p_j(t)$, $q_j(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $\eta_k(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $k = 0,1,2$, $\varphi_j(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{(1+\alpha)/2}(\overline{\sigma}_T)$, $j = 1,2$, $\alpha \in (0,1)$, *задача (1) – (9) имеет единственное решение* $v_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{jT_0})$, $z_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_{jT_0})$, $\psi(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_{T_0})$, $(\kappa + \varepsilon)D_t\psi \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{(1+\alpha)/2}(\overline{\sigma}_{T_0})$, *и для него справедлива оценка*

$$
\|w\|_{B(\Omega_{T_0})} \equiv \sum_{j=1}^{2}\Big(|v_j|_{\Omega_{jT_0}}^{(2+\alpha)} + |z_j|_{\Omega_{jT_0}}^{(2+\alpha)}\Big) + |\psi|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha/2)} + |(\kappa+\varepsilon)D_t\psi|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha)/2}
$$

$$
\le C_1\bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(|f_j|_{\Omega_{jT_0}}^{(\alpha)} + |g_j|_{\Omega_{jT_0}}^{(\alpha)} + |p_j|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha/2)} + |q_j|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha/2)}\Big)
$$

$$
+ \sum_{k=0}^{2}|\eta_k|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha/2)} + \sum_{j=1}^{2}|\varphi_j|_{\sigma_{T_0}}^{(1+\alpha)/2}\bigg),\ j = 1,2,
$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* ε.

Доказательство. Докажем существование решения задачи при помощи построения регуляризатора [5].

Покроем область Ω интервалами $K_\delta^{(i)} = (\xi_i-\delta, \xi_i+\delta)$, $K_{2\delta}^{(i)} = (\xi_i-2\delta,\ \xi_i+2\delta)$, $0 < \delta < \delta_0$, с общим центром ξ_i. Пусть $\zeta_i(x)$, $\mu_i(x)$ гладкие срезающие функции, подчиненные покрытию области Ω такие, что $\zeta_i(x) = 1$, если $|x - \xi_i| \le \delta$ и $\zeta_i(x) = 0$, если $|x - \xi_i| \ge 2\delta$, и обладающие свойствами

$$
\sum_i \zeta_i(x)\mu_i(x) = 1 \quad \text{и} \quad |D^m\zeta_i|,\ |D^m\mu_i| \le C_{m,i}\delta^{-m}.
$$

Пусть при $i \in \mathcal{N}_1$ интервалы $K_\delta^{(i)}$ содержат точку ρ_0, при $i \in \mathcal{N}_2$ и $i \in \mathcal{N}_3$ интервалы $K_\delta^{(i)}$ примыкают к границе области $x = 0$ и $x = b$ соответственно, при $i \in \mathcal{N}_4$ интервалы $K_\delta^{(i)}$ целиком содержатся в $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Заметим, что в уравнениях (1), (2) $0 \le \chi(x-\rho_0) \le 1$ при $i \in \mathcal{N}_1$ и $\chi(x-\rho_0) = 0$ при $i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$, $\delta_0 \le \delta$.

Определим регуляризатор $\Re$ формулой

$$\Re h = \{\Re_1 h,\ \Re_2 h,\ \Re_3 h,\ \Re_4 h,\ \Re_5 h\} = \Big\{ \sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) v_{1,i}(x,t),\ \sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) v_{2,i}(x,t),$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) z_{1,i}(x,t),\ \sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) z_{2,i}(x,t),\ \sum_{i\in\mathcal{N}_1} \mu_i(x)\psi_i(t) \Big\}, \tag{12}$$

где $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3 \cup \mathcal{N}_4$, функции $v_{j,i}(x,t),\ z_{j,i}(x,t),\ j=1,2,\ \psi_i(t)$ удовлетворяют нулевым начальным данным и определяются как решения модельной задачи сопряжения при $i\in\mathcal{N}_1$, первой краевой задачи при $i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3$ и задачи Коши при $i\in\mathcal{N}_4$.

1. Пусть $i \in \mathcal{N}_1$. Произведем преобразование координат $x = Y_i^{-1}(y)\ :\ x = y+\rho_0$. Это преобразование переводит области $x<\rho_0$ и $x>\rho_0$ в $D_1^{(i)} = \{\ y \mid y<0\}$ и $D_2^{(i)} = \{\ y \mid y>0\}$ соответственно. Положим $\zeta_i(x) f_j(x,t),\ \zeta_i(x) g_j(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)} = f_{j,i}(y,t),\ g_{j,i}(y,t);\ \zeta_i(x)\eta_k(t), \zeta_i(x)\varphi_j(t)\big|_{x=\rho_0} = \eta_{k,i}(t), \varphi_{j,i}(t),\ k=0,1,2,\ j=1,2$, и продолжим функции $f_{j,i},\ g_{j,i}$ нулем в $D_j^{(i)}$.

Определим функции $\widetilde{v}_{j,i}(y,t),\ \widetilde{z}_{j,i}(y,t),\ j=1,2,\ \psi_i(t)$ как решение следующей задачи сопряжения в $D_{jT}^{(i)},\ j=1,2$:

$$\partial_t \widetilde{v}_{j,i} - a_j(\rho_0,0)\partial_y^2 \widetilde{v}_{j,i} - \beta_j(\rho_0,0) D_t\psi_i = f_{j,i}(y,t), \tag{13}$$

$$\partial_t \widetilde{z}_{j,i} - a_{j+2}(\rho_0,0)\partial_y^2 \widetilde{z}_{j,i} - \beta_{j+2}(\rho_0,0) D_t\psi_i = g_{j,i}(y,t), \tag{14}$$

$$\widetilde{v}_{1,i} - \widetilde{v}_{2,i} = \eta_{0,i}(t),\quad t\in(0,T), \tag{15}$$

$$(\widetilde{z}_{j,i} - \gamma_j(0)\widetilde{v}_{j,i})|_{y=0} = \eta_{j,i}(t),\ j=1,2,\quad t\in(0,T), \tag{16}$$

$$(\lambda_1(0)\partial_y\widetilde{v}_{1,i} - \lambda_2(0)\partial_y\widetilde{v}_{2,i})|_{y=0} + \kappa D_t\psi_i = \varphi_{1,i}(t),\quad t\in(0,T), \tag{17}$$

$$(k_1(0)\partial_y\widetilde{z}_{1,i} - k_2(0)\partial_y\widetilde{z}_{2,i})\big|_{y=0} - \varepsilon D_t\psi_i = \varphi_{2,i}(t),\quad t\in(0,T). \tag{18}$$

В работе [6] доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть* $0<\kappa\le\kappa_0,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ *и выполняются условия*

$$\beta_{j+2}(\rho_0,0) - \gamma_j(0)\beta_j(\rho_0,0) > 0,$$

$$\beta_{5-j}(\rho_0,0)-\gamma_{3-j}(0)\beta_j(\rho_0,0)>0,\ j=1,2.$$

Для любых функций $f_{j,i}(y,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(\overline{D}_{jT}^{(i)})$, $g_{j,i}(y,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{\alpha,\ \alpha/2}(\overline{D}_{jT}^{(i)})$, $\eta_{k,i}(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $k=0,1,2$, $\varphi_{j,i}(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{(1+\alpha)/2}(\overline{\sigma}_T)$, $j=1,2$, *задача (13) – (18) имеет единственное решение* $\widetilde{v}_{j,i}(y,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT}^{(i)})$, $\widetilde{z}_{j,i}(y,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT}^{(i)})$, $\psi_i(t) \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $(\kappa+\varepsilon)D_t\psi_i \in \overset{\circ}{C}{}_{t}^{(1+\alpha)/2}(\overline{\sigma}_T)$, *и для него справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}(|\widetilde{v}_{j,i}|_{D_{jT}^{(i)}}^{(2+\alpha)}+|\widetilde{z}_{j,i}|_{D_{jT}^{(i)}}^{(2+\alpha)})+|\psi_i|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}+|(\kappa+\varepsilon)D_t\psi_i|_{\sigma_T}^{(1+\alpha)/2}\leq$$

$$\leq C_2\left(\sum_{j=1}^{2}\left(|f_{j,i}|_{D_{jT}^{(i)}}^{(\alpha)}+|g_{j,i}|_{D_{jT}^{(i)}}^{(\alpha)}\right)+\sum_{k=0}^{2}|\eta_{k,i}|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}+\sum_{j=1}^{2}|\varphi_{j,i}|_{\sigma_T}^{(1+\alpha)/2}\right),\quad (19)$$

где постоянная C_2 *не зависит от* κ *и* ε.

Все условия Теоремы 2 выполняются для задачи (13) — (18) в силу условий Теоремы 1, поэтому применим Теорему 2 к задаче (13) — (18), и мы получим, что функции $\widetilde{v}_{j,i}(y,t)$, $\widetilde{z}_{j,i}(y,t), j=1,2$, $\psi_i(t)$ определены и удовлетворяют оценке (19) при $i\in\mathcal{N}_1$.

2. Пусть $i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3$. Произведем преобразование координат $x=Y_i^{-1}(y)$: $x=y$ при $i\in\mathcal{N}_2$ и $x=b-y$, $i\in\mathcal{N}_3$, при этом область $x<b$ перейдет в $D_2^{(i)}:=\{y:y>0\}$. Функции $\widetilde{v}_{j,i}(y,t)$, $\widetilde{z}_{j,i}(y,t)$, определим как решения первой краевой задачи

$$\begin{aligned}&\partial_t\widetilde{v}_{j,i}-a_j(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{v}_{j,i}=f_{j,i}(y,t)\quad \text{в}\quad D_{2T}^{(i)},\\ &\widetilde{v}_{j,i}\big|_{t=0}=0,\quad \widetilde{v}_{j,i}\big|_{y=0}=p_{j,i}(t),\ t\in(0,T),\ j=1,2,\end{aligned}\qquad (20)$$

$$\begin{aligned}&\partial_t\widetilde{z}_{j,i}-a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{z}_{j,i}=g_{j,i}(y,t)\quad \text{в}\quad D_{2T}^{(i)},\\ &\widetilde{z}_{j,i}\big|_{t=0}=0,\quad \widetilde{z}_{j,i}\big|_{y=0}=q_{j,i}(t),\ t\in(0,T),\ j=1,2,\end{aligned}\qquad (21)$$

где $f_{j,i}(y,t)$, $g_{j,i}(y,t)=\zeta_i(x)f_j(x,t)$, $\zeta_i(x)g_j(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$ продолжены нулем в D_2, $p_{j,i}(t)$, $q_{j,i}(t)=\zeta_i(x)p_j(t)$, $\zeta_i(x)q_j(t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y),\ y=0}$.

3. Пусть $i \in \mathcal{N}_4$. Функции $v_{j,i}(x,t),\ z_{j,i}(x,t),\ j=1,2$, являются решением задачи Коши. Здесь возможны 2 случая, когда $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} \neq \emptyset,\ k \in \mathcal{N}_1$ и $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} = \emptyset$. В первом случае в правой части уравнения будет содержаться функция ψ_k

$$\partial_t v_{j,i} - a_j(\xi_i,0)\partial_x^2 v_{j,i} = \zeta_i(x) f_j(x,t) + \beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)D_t\psi_k \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1,$$

$$v_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j=1,2, \tag{22}$$

$$\partial_t z_{j,i} - a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_x^2 z_{j,i} = \zeta_i(x) g_j(x,t) + \beta_{j+2}(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)D_t\psi_k \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1,$$

$$z_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j=1,2, \tag{23}$$

во втором случае $\chi = 0$, и мы получим задачи Коши вида

$$\partial_t v_{j,i} - a_j(\xi_i,0)\partial_x^2 v_{j,i} = \zeta_i(x) f_j(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1, \quad v_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j=1,2, \tag{24}$$

$$\partial_t z_{j,i} - a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_x^2 z_{j,i} = \zeta_i(x) g_j(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1, \quad z_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j=1,2, \tag{25}$$

где функции $\zeta_j f_j,\ \zeta_j g_j$ продолжены нулем в $\mathbb{R}^1$.

Определим функцию $\psi_k,\ k \in \mathcal{N}_1$, в задачах (22), (23). Отнесем к множеству $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{N}_1$ индексы $j \in \mathcal{N}_4$ тех шаров $K_{2\delta}^{(j)}$ для которых $K_{2\delta}^{(k)} \cap K_{2\delta}^{(j)} \neq \emptyset$. В силу конечности покрывающих интервалов множество $\mathcal{N}_0$ содержит конечное число индексов. Положим

$$\psi_k(t) = \frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}_0(k)} \psi_j(t)\zeta_j(\xi_j)}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}_0(k)} \zeta_j(\xi_j)},$$

где $\psi_j(t),\ j \in \mathcal{N}_0(k) \subset \mathcal{N}_1$, найдены как решение задачи сопряжения (13) – (18).

Задачи (20) – (25) однозначно разрешимы [5], их решения подчиняются оценкам

$$|\widetilde{v}_{j,i}|_{D_{2T}^{(i)}}^{(2+\alpha)} \leq C_3\left(|f_{j,i}|_{D_{2T}^{(i)}}^{(\alpha)} + |p_{j,i}|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}\right), \quad i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3, \tag{26}$$

$$|\widetilde{z}_{j,i}|_{D_{2T}^{(i)}}^{(2+\alpha)} \leq C_4\left(|g_{j,i}|_{D_{2T}^{(i)}}^{(\alpha)} + |q_{j,i}|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}\right), \quad i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3, \tag{27}$$

при $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} \neq \emptyset,\ k \in \mathcal{N}_1,\ i \in \mathcal{N}_4$,

$$|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} \leq C_5\biggl(|\zeta_i(x) f_j|^{(\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} + |D_t\psi_k|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\biggr), \tag{28}$$

$$|z_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} \leq C_6\biggl(|\zeta_i(x) g_j|^{(\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} + |D_t\psi_k|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}\biggr), \tag{29}$$

здесь мы используем также оценку (19) для $D_t\psi_k$, в $C^{\ \alpha/2}_{t}(\overline{\Omega}_T)$, и при $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} = \emptyset,\ k \in \mathcal{N}_1,\ i \in \mathcal{N}_4$,

$$|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} \leq C_7 |\zeta_i(x) f_j|^{(\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}}, \tag{30}$$

$$|z_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}} \leq C_8 |\zeta_i(x) g_j|^{(\alpha)}_{D^{(i)}_{2T}}, \tag{31}$$

$j = 1, 2$.

Таким образом, мы определили функции $v_{j,i}(x,t) = \widetilde{v}_{j,i}(y,t)\big|_{y=Y_i(x)},\ z_{j,i}(x,t) = \widetilde{z}_{j,i}(y,t)\big|_{y=Y_i(x)},\ i \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3,\ \psi_i(t),\ i \in \mathcal{N}_1$ и $v_{j,i}(x,t),\ z_{j,i}(x,t),\ i \in \mathcal{N}_4$, и тем самым построили регуляризатор (12). $\square$

Мы вводим норму [5]

$$\{w\}_{B(\Omega_T)} = \sum_{k=1}^{4} \sup_{i \in \mathcal{N}_k} \|\omega_i\|_{B(K^{(i)}_{2\delta T})} \quad \{h\}_{H(\Omega_T)} = \sum_{k=1}^{4} \sup_{i \in \mathcal{N}_k} \|h_i\|_{H(K^{(i)}_{2\delta T})} \tag{32}$$

где нормы $\|w\|_{B(\Omega_T)},\ \|h\|_{H(\Omega_T)}$ определяются формулами (10), (11). Отметим, что нормы (32) эквивалентны нормам $\|w\|_{B(\Omega_T)},\ \|h\|_{B(\Omega_T)}$ соответственно [5].

Лемма 1. *Оператор $\Re : H(\Omega_T) \to B(\Omega_T)$ является ограниченным:*

$$\{\Re h\}_{B(\Omega_T)} \leq C_9 \{h\}_{H(\Omega_T)}.$$

Обратимся к задаче (1) – (9), которую мы запишем в операторной форме $Aw = h$, где оператор A определяется выражениями в левых частях уравнений (1), (2) и условий (4) – (9). Очевидно $A : B(\Omega_T) \to H(\Omega_T)$.

Лемма 2. *При любом $h \in H(\Omega_T)$ справедливо равенство*

$$A\Re h = h + Ph,$$

где $Ph = \{P_1h, P_2h, P_3h, P_4h, 0, 0, 0, 0, 0, P_5h, P_6h, P_7h, P_8h\}$ *— ограниченный оператор в пространстве* $H(\Omega_T)$; P_jh, $P_{j+2}h$, $P_{4+j}h$, $j = 1, 2$, P_7h, P_8h *определяются формулами (33) - (37)*

Доказательство. Подставим функции $\Re_j h = \sum\limits_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) v_{j,i}(x,t)$, $\Re_{j+2}h = \sum\limits_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) z_{j,i}(x,t)$, $j = 1, 2$, и $\Re_5 h = \sum\limits_{i\in\mathcal{N}_1} \mu_i(x)\psi_i(t)$, определяемые формулами (12), в левые части уравнений (1), (2) и условий (4) – (9)

$$L_j(\partial_t, \partial_x, x, t)(\Re_j h, \Re_5 h) \equiv$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x) Y_i^{(-1)}(x) \left(\partial_t \widetilde{v}_{j,i}(y,t) - a_j(\xi_i, 0)\partial_y^2 \widetilde{v}_{j,i}(y,t)\right)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}_1} \mu_i(x)\beta_j(\rho_0, 0) D_t\psi_i + P_jh = f_j(x,t) + P_jh,$$

$$L_{j+2}(\partial_t, \partial_x, x, t)(\Re_{j+2}h, \Re_5 h) = g_j(x,t) + P_{j+2}h,$$

где

$$P_jh = -\sum_{i\in\mathcal{N}} \Bigg[b_j(x,t)\left(\partial_x\mu_i(x) v_{j,i}(x,t) + \mu_i(x)\partial_x v_{j,i}(x,t)\right)$$

$$+d_j(x,t)\mu_i(x)v_{j,i}(x,t)\Bigg] - a_j(x,t)\sum_{i\in\mathcal{N}}\left(\partial_x^2\mu_i(x)v_{j,i}(x,t) + 2\partial_x\mu_i(x)\partial_x v_{j,i}(x,t)\right)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}} \mu_i(x)[a_j(x,t) - a_j(\xi_i, 0)]\partial_x^2 v_{j,i}(x,t)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}_1} \mu_i(x)[\beta_j(x,t)\chi(x-\rho_0) - \beta_j(\rho_0,0)\chi(\rho_0-\rho_0)]D_t\psi_i, \ j = 1, 2, \tag{33}$$

$$P_{j+2}h = -\sum_{i\in\mathcal{N}} \Bigg[b_{j+2}(x,t)\left(\partial_x\mu_i(x) z_{j,i}(x,t) + \mu_i(x)\partial_x z_{j,i}(x,t)\right)$$

$$+d_{j+2}(x,t)\mu_i(x)z_{j,i}(x,t)\Big]-a_{j+2}(x,t)\sum_{i\in\mathcal{N}}\Big(\partial_x^2\mu_i(x)z_{j,i}(x,t)+2\partial_x\mu_i(x)\partial_x z_{j,i}(x,t)\Big)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}}\mu_i(x)[a_{j+2}(x,t)-a_{j+2}(\xi_i,0)]\partial_x^2 z_{j,i}(x,t)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)[\beta_{j+2}(x,t)\chi(x-\rho_0)-\beta_{j+2}(\rho_0,0)\chi(\rho_0-\rho_0)]D_t\psi_i,\ j=1,2. \quad (34)$$

Далее, подставим регуляризатор $\Re_j h,\ \Re_{j+2}h,\ j=1,2$, в условие (7). Учитывая, что функции $v_{j,i}(x,t),\ z_{j,i}(x,t),\ j=1,2$, являются решением задачи сопряжения (13) – (18), находим

$$\big(\Re_{j+2}h-\gamma_j(t)\Re_j h\big)\big|_{x=\rho_0}=\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)\big(z_{j,i}(x,t)-\gamma_j(t)v_{j,i}(x,t)\big)\big|_{x=\rho_0}$$

$$=\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)Y_i^{-1}(x)\big(\widetilde{z}_{j,i}(y,t)-\gamma_j(0)\widetilde{v}_{j,i}(y,t)\big)+P_{j+4}h$$

$$=\eta_j(t)+P_{j+4}h,\ j=1,2,$$

$$P_{j+4}h=-\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)[\gamma_j(t)-\gamma_j(0)]v_{j,i}(x,t)\big|_{x=\rho_0},\ j=1,2. \quad (35)$$

Подставим теперь регуляризатор $\Re_j h,\ \Re_{j+2}h,\ j=1,2$, и $\Re_5 h$ в условия (8), (9) и аналогично предыдущему получим

$$\Big(\lambda_1(t)\partial_x\Re_1 h-\lambda_2(t)\partial_x\Re_2 h\Big)\Big|_{x=\rho_0}+\kappa D_t\psi$$

$$=\Big(\lambda_1(t)\partial_x\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)v_{1,i}(x,t)-\lambda_2(t)\partial_x\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)v_{2,i}(x,t)+\kappa\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)D_t\psi_i\Big)\Big|_{x=\rho_0}$$

$$=\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(\rho_0)\zeta_i(\rho_0)\varphi_1(t)+P_7h=\varphi_1(t)+P_7h,$$

$$P_7h=\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\Big(\lambda_1(t)\partial_x\mu_i(x)v_{1,i}(x,t)-\lambda_2(t)\partial_x\mu_i(x)v_{2,i}(x,t)\Big)\Big|_{x=\rho_0}$$

$$+\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\big(\mu_i(x)[\lambda_1(t)-\lambda_1(0)]\partial_x v_1(x,t)$$

$$-\mu_i(x)[\lambda_2(t)-\lambda_2(0)]\partial_x v_2(x,t)\Big)\Big|_{x=\rho_0}, \tag{36}$$

$$\Big(k_1(t)\partial_x\Re_3 h - k_2(t)\partial_x\Re_4 h\Big)\Big|_{x=\rho_0} - \varepsilon\Re_5 h$$

$$= \Big(k_1(t)\partial_x\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)z_{1,i}(x,t) - k_2(t)\partial_x\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)z_{2,i}(x,t) - \varepsilon\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)D_t\psi_i\Big)\Big|_{x=\rho_0}$$

$$= \sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(\rho_0)\zeta_i(\rho_0)\varphi_2(t) + P_8 h = \varphi_2(t) + P_8 h,$$

$$P_8 h = \sum_{i\in\mathcal{N}_1}\Big(k_1(t)\partial_x\mu_i(x)z_{1,i}(x,t) - k_2(t)\partial_x\mu_i(x)z_{2,i}(x,t)\Big)\Big|_{x=\rho_0}$$

$$+\Big(\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)[k_1(t)-k_1(0)]\partial_x z_{1,i}(x,t)$$

$$-\sum_{i\in\mathcal{N}_1}\mu_i(x)[k_2(t)-k_2(0)]\partial_x z_{2,i}(x,t)\Big)\Big|_{x=\rho_0}. \tag{37}$$

Подставим регуляризатор $\Re_1 h$, $\Re_3 h$ в граничные условия задачи и учитывая, что функции $\widetilde{v}_{j,i}(y,t)$, $\widetilde{z}_{j,i}(y,t)$, $j=1,2$, являются решением первой краевой задачи (20), (21) соответственно, получаем

$$\Re_j h\big|_{x=0} = \sum_{i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3}\mu_i(x)v_{j,i}(x,t)\big|_{x=0} = \sum_{i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3}\mu_i(x)Y_i^{(-1)}(x)\widetilde{v}_{j,i}(y,t)\big|_{y=0}$$

$$= \sum_{i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3}\mu_i(x)\zeta_i(x)p_j(t) = p_j(t),\ j=1,2,$$

и аналогично

$$\Re_{j+2}h\big|_{x=0} = \sum_{i\in\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3}\mu_i(x)z_{j,i}(x,t)\big|_{x=0} = q_j(t),\ j=1,2.$$

□

Лемма 3. *В условиях теоремы 1 для $t\le t_1$ справедлива оценка*

$$\{Ph\}_{H(\Omega_t)} \le q\{h\}_{H(\Omega_t)}, \tag{38}$$

где $q\in(0,1)$.

Доказательство. Согласно определению нормы (32) имеем

$$\{Ph\}_{H(K_{2\delta t}^{(i)})} = \sum_{k=1}^{4} \sup_{i\in\mathcal{N}_k} \left(\sum_{j=1}^{4} |P_j h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^{2} |P_{j+4} h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha/2)} \right.$$

$$\left. + |P_7 h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha)/2} + |P_8 h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha)/2} \right).$$

При оценке нормы $\{Ph\}_{H(\Omega_t)}$ используем неравенства

$$|a_j(x,t) - a_j(\xi_i, 0)| \le C_{10}(\delta^\alpha + t^{\alpha/2}),\ j = 1,2,$$

$$|\beta_j(x,t)\chi(x-\rho_0) - \beta_j(\xi_i,t)\chi(\xi_i-\rho_0)| \le C_{11}\Big(\delta^\alpha + t^{\alpha/2} + \delta/\delta_0\Big),\ j = 1,2,$$

$$|\gamma_j(t) - \gamma_j(0)| \le C_{12} t^{\alpha/2},\ j = 1,2,\ \delta > 0.$$

Непосредственно оценивая нормы функций $P_j h,\ P_{j+2}h,\ P_{j+4}h,\ j = 1,2,\ P_7 h,\ P_8 h$, определяемых формулами (33) – (37), получим

$$|P_j h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(\alpha)} + |P_{j+2} h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(\alpha)} \le C_{13}\bigg[\Big(t^{(1+\alpha)/2} + t^{1+\alpha/2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^{1+\alpha}}\Big)$$

$$+ \frac{t^{1+\alpha/2}}{\delta^2}\Big(1 + \frac{1}{\delta^\alpha}\Big) + \Big(t^{1/2} + t\Big)\Big(1 + \frac{1}{\delta}\Big) + \frac{t}{\delta^\alpha}$$

$$+ \Big(\delta^\alpha + t^{\alpha/2}\Big)\Big(1 + t^{\alpha/2} + \frac{t^{\alpha/2}}{\delta^\alpha}\Big) + t^{\alpha/2}\bigg]\Big(|v_{j,i}|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |z_{j,i}|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(2+\alpha)}\Big) \tag{39}$$

$$+ C_{14}\bigg[\Big(\delta^\alpha + t^{\alpha/2} + \delta/\delta_0\Big) + t^{\alpha/2}\bigg(\frac{1}{\delta^\alpha}\Big(t^{\alpha/2} + \delta/\delta_0\Big) + 1 + \frac{\delta^{1-\alpha}}{\delta_0}\bigg)\bigg]|\psi_i|_{\sigma_T}^{(1+\alpha)/2},$$

$$|P_{j+4} h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha/2)} \le C_{15} t\Big(1 + t^{\alpha/2} + t^{1+\alpha/2}\Big)|v_{j,i}|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(2+\alpha)},\ j = 1,2, \tag{40}$$

$$|P_7 h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha)/2} + |P_8 h|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(1+\alpha)/2}$$

$$\le C_{16}\Big(1 + t^{(1+\alpha)/2}\Big)\Big(\frac{t^{1/2}}{\delta} + t^{(1+\alpha)/2}\Big)\sum_{j=1}^{2}\big(|v_{j,i}|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(2+\alpha)} + |z_{j,i}|_{K_{2\delta t}^{(i)}}^{(2+\alpha)}\big). \tag{41}$$

Применяя к функциям $v_{j,i},\ z_{j,i},\ j=1,2,\ \psi_i$ в (39) - (41) оценки (19), (26) - (31), будем иметь

$$\{Ph\}_{H(\Omega_t)} \le k(t,\delta,\delta_0)\{h\}_{H(\Omega_t)},$$

где $k = C_{17}\Bigg[\Big(t^{(1+\alpha)/2}+t^{1+\alpha/2}\Big)\Big(1+\frac{1}{\delta^\alpha}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}\Big)+\frac{t^{1+\alpha/2}}{\delta^2}\Big(1+\frac{1}{\delta^\alpha}\Big)$
$+\Big(t^{1/2}+t\Big)\Big(1+\frac{1}{\delta}\Big)+\frac{t}{\delta^\alpha}+\Big(\delta^\alpha+t^{\alpha/2}\Big)\Big(1+t^{\alpha/2}+\frac{t^{\alpha/2}}{\delta^\alpha}\Big)+t^{\alpha/2}$
$+t\Big(1+t^{\alpha/2}+t^{1+\alpha/2}\Big)+\Big(1+t^{(1+\alpha)/2}\Big)\Big(\frac{t^{1/2}}{\delta}+t^{(1+\alpha)/2}\Big)\Bigg]$
$+C_{18}\Bigg[\Big(\delta^\alpha+t^{\alpha/2}+\delta/\delta_0\Big)+t^{\alpha/2}\Big(\frac{1}{\delta^\alpha}\Big(t^{\alpha/2}+\delta/\delta_0\Big)+1+\frac{\delta^{1-\alpha}}{\delta_0}\Big)\Bigg].$

Возьмем $\delta_0=\delta^{1/2}$, подберем $\delta\le\delta^*$, затем $t\le t_1$ такими малыми, чтобы выполнялось неравенство $k(t,\delta,\delta_0)\le q,\ q\in(0,1)$, тогда при $t\le t_1$ получим $\{Ph\}_{H(\Omega_{T_0})}\le q\{h\}_{H(\Omega_{T_0})},\ 0<q<1.$ □

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 для $t\le t_1$ существует ограниченный правый обратный оператор $A_r^{-1}=\Re(I+P)^{-1}: H(\Omega_t)\to B(\Omega_t)$, где I — единичный оператор, и задача (13) - (18) имеет решение $w(x,t)\in B(\Omega_{t_1})$.*

Доказательство. Мы имеем задачу $Aw=h$. Подставив $\Re h$ вместо w, получим $A\Re h=h+Ph$. Обозначим $h+Ph=h_1$, где $h_1\in H(\Omega_{t_1})$. Согласно оценке (38) это уравнение имеет единственное решение $h\in H(\Omega_{t_1})$, которое подчиняется оценке $\{h\}_{H(\Omega_{t_1})}\le\frac{1}{1-\delta_2}\{h_1\}_{H(\Omega_{t_1})}$ для любого вектора $h_1\in H(\Omega_{t_1})$.

Но тогда существует ограниченный обратный оператор $(I+P)^{-1}$ в пространстве $H(\Omega_{t_1})$. Подставив $h=(I+P)^{-1}h_1$ в уравнение $A\Re h=h_1$, мы получим тождество $A\Re(I+P)^{-1}h_1=h_1$ для любого $h_1\in H(\Omega_{t_1})$ или $A\Re(I+P)^{-1}=I$.

Отсюда следует, что оператор A имеет правый обратный ограниченный оператор $A_r^{-1}=\Re(I+P)^{-1}$, и задача $Aw=h$ имеет решение $\omega=(v_1,v_2,z_1,z_2,\psi)\in B(\Omega_{t_1})$ для каждого вектора $h\in H(\Omega_{t_1})$. □

Получим оценку решения задачи (1) – (9) методом Шаудера.

Лемма 5. *В условиях теоремы 1 для $t\le t_0$ решение задачи подчиняется оценке*

$$\|w\|_{B(\Omega_{t_0})}\le C_{19}\|h\|_{H(\Omega_{t_0})}. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть

$$v_{j,i}(x,t)=\mu_i(x)v_j(x,t),\ z_{j,i}(x,t)=\mu_i(x)z_j(x,t),\ j=1,2,\ \psi_i(t)=\mu_i(x)\psi(t),$$

функции $v_{j,i},\ z_{j,i}$ определены в $K_{2\delta}^{(i)}\times(0,t_1),\ i\in\mathcal{N}$, продолжим их нулем $D_{jT}^{(i)}$.

В зависимости от расположения интервала $K_{2\delta}$ в Ω для функций $v_{j,i}(x,t),\ z_{j,i}(x,t),\ j=1,2,\ \psi_i(t)$ из задачи (1) – (9) можно получить модельную задачу сопряжения, первую краевую задачу и задачу Коши.

Умножим параболические уравнения (1), (2) и условия задачи (6) – (9) на срезающую функцию $\mu_i(x)$.

Пусть $i\in\mathcal{N}_1$. Произведем преобразования координат $x=Y_i^{-1}(y)$: $x=y+\rho_0$, и для функций $\widetilde{v}_{j,i}(y,t)=v_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)},\ \widetilde{z}_{j,i}(y,t)=z_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)},\ j=1,2,\ \psi_i(t)$ получим задачу сопряжения с нулевыми начальными данными

$$\begin{gathered}
\partial_t\widetilde{v}_{j,i}-a_j(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{v}_{j,i}-\beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)D_t\psi_i\\
=f_{j,i}(y,t)+Y_i^{-1}(y)F_{j,i}(x,t)\quad\text{в}\quad D_{jT}^{(i)},\ j=1,2,\\
\partial_t\widetilde{z}_{j,i}-a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{z}_{j,i}-\beta_{j+2}(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)D_t\psi_i\\
=g_{j,i}(y,t)+Y_i^{-1}(y)F_{j+2,i}(x,t)\quad\text{в}\quad D_{jT}^{(i)},\ j=1,2,\\
\left(\widetilde{z}_{j,i}-\gamma_j(0)\widetilde{v}_{j,i}\right)\big|_{y=0}=\eta_{j,i}(t)+Y_i^{-1}(y)H_{j,i}(x,t)\big|_{y=0},\quad j=1,2,\\
(\lambda_1(0)\partial_y\widetilde{v}_{1,i}-\lambda_2(0)\partial_y\widetilde{v}_{2,i})|_{y=0}+\kappa D_t\psi_i\\
=\varphi_{1,i}(t)+Y_i^{-1}(y)H_{3,i}(x,t)\big|_{y=0},\\
(k_1(0)\partial_y\widetilde{z}_{1,i}-k_2(0)\partial_y\widetilde{z}_{2,i})|_{y=0}+\varepsilon D_t\psi_i\\
=\varphi_{2,i}(t)+Y_i^{-1}(y)H_{4,i}(x,t)\big|_{y=0},
\end{gathered}\tag{43}$$

где функции $f_{j,i}(y,t)=f_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)},\ g_{j,i}(y,t)=g_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$ продолжены нулем в $D_{jT}^{(i)},\ \varphi_{j,i}(t)=\zeta_i(x)\varphi_j(t)\big|_{x=\rho_0},\ j=1,2,$

$$F_{j,i}(x,t)=[a_j(x,t)-a_j(\xi_i,0)]\mu_i(x)\partial_x^2v_j(x,t)+[\beta_j(x,t)\chi(x-\rho_0)$$

$$-\beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)]D_t\psi_i+a_j(x,t)\Big(2\partial_x v_j(x,t)\partial_x\mu_i(x)+v_j(x,t)\partial_x^2\mu_i(x)\Big)$$

$$+b_j(x,t)\Big(\mu_i(x)\partial_x v_j(x,t)+v_j(x,t)\partial_x\mu_i(x)\Big)+d_j(x,t)v_{j,i}(x,t),\ j=1,2,$$

$$F_{j+2,i}(x,t)=[a_{j+2}(x,t)-a_{j+2}(\xi_i,0)]\mu_i(x)\partial_x^2 z_j(x,t)+[\beta_{j+2}(x,t)\chi(x-\rho_0)$$

$$-\beta_{j+2}(\xi_i,0)\chi(\xi_i-\rho_0)]D_t\psi_i+a_{j+2}(x,t)\partial_x\mu_i(x)\Big(2\partial_x z_j(x,t)+z_j(x,t)\partial_x\mu_i(x)\Big)$$

$$+b_{j+2}(x,t)\Big(\mu_i(x)\partial_x z_j(x,t)+z_j(x,t)\partial_x\mu_i(x)\Big)+d_{j+2}(x,t)z_{j,i}(x,t),\quad j=1,2,$$

$$H_{j,i}(x,t)=[\gamma_j(t)-\gamma_j(0)]v_{j,i}(x,t),\quad j=1,2,$$

$$H_{3,i}(x,t)=-\Big([\lambda_1(t)v_1(x,t)-\lambda_2(t)v_2(x,t)]\partial_x\mu_i(x)+[\lambda_1(t)-\lambda_1(0)]\partial_x v_{1,i}(x,t)$$

$$-[\lambda_2(t)-\lambda_2(0)]\partial_x v_{2,i}(x,t)\Big),$$

$$H_{4,i}(x,t)=-\Big([k_1(t)z_1(x,t)-k_2(t)z_2(x,t)]\partial_x\mu_i(x)+[k_1(t)-k_1(0)]\partial_x z_{1,i}(x,t)$$

$$+[k_2(t)-k_2(0)]\partial_x z_{2,i}(x,t)\Big).$$

(43) – задача сопряжения, которая согласно Теореме 2 однозначно разрешима и для ее решения справедлива оценка (19). Следовательно, решение задачи (43) подчиняется неравенству

$$\sum_{j=1}^{2}\Big(|\widetilde{v}_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}+|\widetilde{z}_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\Big)+|\psi_i|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}+|(\kappa+\varepsilon)D_t\psi_i|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_T}$$

$$\le C_{20}\sum_{j=1}^{2}\Big(|f_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}+|g_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}+|Y_i^{-1}(y)F_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}+|Y_i^{-1}(y)F_{j+2,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\quad(44)$$

$$+|Y_i^{-1}(y)H_{j,i}|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T}+|Y_i^{-1}(y)H_{j+2,i}|^{(1+\alpha)/2}_{\sigma_T}\Big).$$

Пусть интервал $K_{2\delta}^{(i)}$ примыкает к границам $x = 0$ и $x = b$ при $i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$. Произведем преобразование координат $x = Y_i^{-1}(y) : x = y$ при $i \in \mathcal{N}_2$ и $x = b - y$, $i \in \mathcal{N}_3$. Тогда для функций $\widetilde{v}_{j,i}(y,t) = v_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$, $\widetilde{z}_{j,i}(y,t) = z_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$, $j = 1,2$, получим первые краевые задачи

$$\partial_t\widetilde{v}_{j,i} - a_j(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{v}_{j,i} = f_{j,i}(y,t) + Y_i^{-1}(y)\zeta_i(x)F_{j+4,i}(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T}^{(i)}, \tag{45}$$

$$\partial_t\widetilde{z}_{j,i} - a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_y^2\widetilde{z}_{j,i} = g_{j,i}(y,t) + Y_i^{-1}(y)\zeta_i(x)F_{j+6,i}(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T}^{(i)}, \tag{46}$$

$$\widetilde{v}_{j,i}(y,t)\big|_{t=0} = 0,\ \widetilde{v}_{j,i}(y,t)\big|_{y=0} = p_j(t),\ j = 1,2, \tag{47}$$

$$\widetilde{z}_{j,i}(y,t)\big|_{t=0} = 0,\ \widetilde{z}_{j,i}(y,t)\big|_{y=0} = q_j(t),\ j = 1,2, \tag{48}$$

где функции $f_{j,i}(y,t) = f_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$, $g_{j,i}(y,t) = g_{j,i}(x,t)\big|_{x=Y_i^{-1}(y)}$, $j = 1,2$, продолжение нулем в $D_{2T}^{(i)}$,

$$F_{j+4,i}(x,t) = a_j(x,t)[2\partial_x v_j(x,t) + v_j(x,t)\partial_x\mu_i]\partial_x\mu_i + b_j(x,t)[\mu_i\partial_x v_j(x,t)$$

$$+v_j(x,t)\partial_x\mu_i] + d_j(x,t)v_{j,i}(x,t) + [a_j(x,t) - a_j(\xi_i,0)]\mu_i\partial_x^2 v_j(x,t)\ j = 1,2.$$

$F_{j+6,i}(x,t)$, $j = 1,2$, определяется так же, как функции $F_{j+4,i}$.

Если интервал $K_{\delta}^{(i)}$ целиком содержится в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, т.е. $i \in \mathcal{N}_4$, то для функций $v_{j,i}(x,t)$, $z_{j,i}(x,t) = Y_i^{-1}(y)v_{j,i}(x,t)$, $Y_i^{-1}(y)z_{j,i}(x,t)$, $j = 1,2$, получим задачи Коши: при $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} \neq \emptyset$, $k \in \mathcal{N}_1$

$$\begin{aligned}\partial_t v_{j,i} - a_j(\xi_i,0)\partial_x^2 v_{j,i} = \zeta_i(x)f_j(x,t) + \beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i - \rho_0)D_t\psi_k \\ +F_{j+8,i}(x,t),\ j = 1,2, \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1,\ v_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j = 1,2,\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\partial_t z_{j,i} - a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_x^2 z_{j,i} = \zeta_i(x)g_j(x,t) + \beta_{j+2}(\xi_i,0)\chi(\xi_i - \rho_0)D_t\psi_k \\ +F_{j+10,i}(x,t),\ j = 1,2, \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1,\ z_{j,i}\big|_{t=0} = 0,\ j = 1,2,\end{aligned} \tag{50}$$

и при $K_{2\delta}^{(i)} \cap K_{2\delta}^{(k)} = \emptyset$

$$\partial_t v_{j,i}(x,t) - a_j(\xi_i,0)\partial_x^2 v_{j,i}(x,t) = \zeta_i(x)f_j(x,t) + F_{j+12,i}(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1, \tag{51}$$

$$v_{j,i}(x,t)\big|_{t=0} = 0,\ j = 1,2, \tag{52}$$

$$\partial_t z_{j,i}(x,t) - a_{j+2}(\xi_i,0)\partial_x^2 z_{j,i}(x,t) = \zeta_i(x) g_j(x,t) + F_{j+14,i}(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^1, \tag{53}$$

$$z_{j,i}(x,t)\big|_{t=0} = 0, \;\; j = 1,2, \tag{54}$$

где

$$F_{j+8,i}(x,t) = a_j(x,t)[2\partial_x v_j(x,t) + v_j(x,t)\partial_x \mu_i]\partial_x \mu_i + b_j(x,t)[\mu_i \partial_x v_j(x,t)$$

$$+ v_j(x,t)\partial_x \mu_i] + d_j(x,t) v_{j,i}(x,t) + [a_j(x,t) - a_j(\xi_i,0)]\partial_x^2 v_{j,i}(x,t) +$$

$$+ [\beta_j(x,t)\chi(x-\rho_0) - \beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i - \rho_0)]\mu_i(x) D_t \psi_k(t), \;\; j = 1,2, \tag{55}$$

$$F_{j+12,i}(x,t) = a_j(x,t)[2\partial_x v_j(x,t) + v_j(x,t)\partial_x \mu_i]\partial_x \mu_i + b_j(x,t)[\mu_i \partial_x v_j(x,t)$$

$$+ v_j(x,t)\partial_x \mu_i] + d_j(x,t) v_{j,i}(x,t) + [a_j(x,t) - a_j(\xi_i,0)]\partial_x^2 v_{j,i}(x,t), \;\; j = 1,2, \tag{56}$$

$F_{j+10,i}(x,t),\ F_{j+14,i}(x,t),\ j = 1,2$, определяется, как (55), (56).

На основании работы [5] первые краевые задачи (45) – (48) и задачи Коши (49) – (54) однозначно разрешимы. Для их решений справедливы оценки

$$|\widetilde{v}_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{21}\left(|f_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |Y_i^{-1}(y) F_{j+4,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right), \;\; j = 1,2, \;\; i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$$

$$|\widetilde{z}_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{22}\left(|g_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |Y_i^{-1}(y) F_{j+6,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right), \;\; j = 1,2, \;\; i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3,$$

при $K^{(i)}_{2\delta} \cap K^{(k)}_{2\delta} \neq \emptyset, \;\; k \in \mathcal{N}_1, \;\; i \in \mathcal{N}_4$,

$$|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{23}\left(|f_j|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |\beta_j(\xi_i,0)\chi(\xi_i - \rho_0) D_t \psi_k|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |F_{j+8,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right),$$

$$|z_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{24}\left(|g_j|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |\beta_{j+2}(\xi_i,0)\chi(\xi_i - \rho_0) D_t \psi_k|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |F_{j+10,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right),$$

при $K^{(i)}_{2\delta} \cap K^{(k)}_{2\delta} = \emptyset, \;\; k \in \mathcal{N}_1, \;\; i \in \mathcal{N}_4$,

$$|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{25}\left(|f_j|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |F_{j+12,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right),$$

$$|z_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{26}\left(|g_j|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} + |F_{j+14,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}\right).$$

Рассмотрим задачу сопряжения (43) ($i \in \mathcal{N}_1$), оценим нормы функций $F_{j,i}, F_{j+2,i}, H_{j,i}, H_{3,i}, H_{4,i}$ так же, как при доказательстве леммы 3. Тогда мы получим

$$|F_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{27}\Big[t^{\alpha/2}+t^{1/2}+\Big(1+t^{\alpha/2}+\frac{t^{\alpha/2}}{\delta^\alpha}\Big)\Big(\delta^\alpha+t^{\alpha/2}+\frac{t}{\delta^2}+\frac{t^{1/2}}{\delta}+\frac{t}{\delta}\Big)$$

$$+t^{(1+\alpha)/2}\Big(1+\frac{1}{\delta^\alpha}\Big)\Big]|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta t}}+\Big[\Big(1+t^{\alpha/2}\Big)\Big(t+\delta^\alpha+t^{\alpha/2}+\delta/\delta_0\Big)+t^{\alpha/2}\Big][D_t\psi_i]^{(\alpha/2)}_{\sigma_T},$$

$$|H_{j,i}|^{(\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{28}t\Big(1+t^{\alpha/2}+t^{1+\alpha/2}\Big)|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}},\ j=1,2,$$

$$|H_{3,i}|^{(1+\alpha)/2}_{K^{(i)}_{2\delta T}} \le C_{29}\Big(1+t^{(1+\alpha)/2}\Big)\Big(\frac{t^{1/2}}{\delta}+t^{(1+\alpha)/2}\Big)\sum_{j=1}^{2}|v_{j,i}|^{(2+\alpha)}_{K^{(i)}_{2\delta T}}.$$

Аналогично оцениваются нормы $F_{j+2,i}(x,t),\ j=1,2,\ H_{4,i}(x,t)$.

Подставим полученные оценки этих функций в неравенство (44), подберем δ_0, δ и $t \le t_2$ такими малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$\|w_{i,j}\|_{B_{K^{(i)}_{2\delta t}}} \le C_{30}\|h\|_{H_{K^{(i)}_{2\delta t}}}+q\|w_{i,j}\|_{B_{K^{(i)}_{2\delta t}}},\ q\in(0,1),$$

отсюда получим

$$\|w_{i,j}\|_{B_{K^{(i)}_{2\delta t}}} \le \frac{C_{31}}{1-q}\|h\|_{H_{K^{(i)}_{2\delta t}}},\ i\in\mathcal{N}_1. \tag{57}$$

Точно такие же оценки, как (57), найдем для функций $w_{i,j}$ при $i \in \mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3\cup\mathcal{N}_4$ для $t \le t_3$, на оснований которых будем иметь

$$\sum_{k=1}^{4}\sup_{i\in\mathcal{N}_k}\|w_i\|_{B(K^{(i)}_{2\delta t})} \le C_{32}\sum_{k=1}^{4}\sup_{i\in\mathcal{N}_k}\|h_i\|_{H(K^{(i)}_{2\delta t})},\ t\le t_0=\min(t_1,t_2,t_3), \tag{58}$$

где $w_i=\mu_i w, h_i=\mu_i h$.

Учитывая, что в интервале $K^{(i)}_\delta$ срезающая функция $\mu_i(x)$ равна 1, получим $\mu_i(x)w \equiv \{\mu_i v_1, \mu_i v_2, \mu_i z_1, \mu_i z_2, \mu_i\psi\} = w \equiv \{v_1, v_2, z_1, z_2, \psi\}$ при $x \in K^{(i)}_\delta$. Тогда из оценки (58) будет следовать неравенство

$$\sum_{k=1}^{4}\sup_{i\in\mathcal{N}_k}\|w_i\|_{B(K^{(i)}_{\delta t})} \le C_{32}\sum_{k=1}^{4}\sup_{i\in\mathcal{N}_k}\|h_i\|_{H(K^{(i)}_{2\delta t})} \le C_{33}\sum_{k=1}^{4}\sup_{i\in\mathcal{N}_k}\|h\|_{H(K^{(i)}_{2\delta t})},$$

и в силу определения норм (32)

$$\{w\}_{B(\Omega_t)} \leq C_{34}\{h\}_{H(\Omega_t)},\ t \leq t_0. \tag{59}$$

Отсюда на основании эквивалентности норм в (59) нормам $\|w\|_{B(\Omega_t)}$, $\|h\|_{H(\Omega_t)}$, получим оценку (42). $\square$

Доказательство теоремы 1. Мы доказали существование решения задачи (1) – (9) в лемме 4, а его оценку — в лемме 5 для $t \leq t_0$.

Из оценки (59) в силу линейности задачи (1) – (9) следует единственность ее решения для $t \leq t_0$. Продолжая решение задачи по t как в [5], получим теорему 1 для $T > 0$. $\square$

Работа выполнена при поддержке гранта 0736/ГФ Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1 Петрова А.Г. Локальная разрешимость термодиффузионной задачи Стефана // Динамика сплошной среды. – 1982. – Вып. 58. – С. 156-163.

2 Bizhanova G.I. and Rodrigues J.F. Classical solutions to parabolic systems with free boundary of Stefan type // Differential Equations. – 2005. – Vol. 10, № 12. P. 1345-1388.

3 Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi F. On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems // Math. Ann. – 1999. – Vol. 315. P. 61-95.

4 Bizhanova G.I. On the Stefan problem with a small parameter // Banach center publications. – 2008. – Vol. 81. – P. 43-63.

5 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

6 Джобулаева Ж.К. Модельная задача со свободной границей с двумя малыми параметрами для системы параболических уравнений // Математический журнал. – 2009. – Т. 9, № 3(33). – С. 34-44.

Статья поступила в редакцию 22.06.12

Джобулаева Ж.К. ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРДА ЕКІ КІШІ ПАРАМЕТРІ БАР ШЕТТІК ЕСЕП

Түйіндес шарттарда екі кіші параметрі бар есеп зерттелінеді. Мұндай есеп параболалық теңдеулер жүйесі үшін еркін шекаралы шарттарында екі кіші параметрі бар сызықтық емес есеп сызықтандырылғанда пайда болады. Гельдер кеңістігінде есептің шешімінің бар және жалғыз болуы дәлелденді, оның коэрцитивтік бағалауы құрылды.

Dzhobulayeva Zh.K. BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH TWO SMALL PARAMETERS IN THE BOUNDARY CONDITIONS FOR THE SYSTEM OF THE PARABOLIC EQUATIONS

The problem with two small parameters in the conjunction conditions is studied. This problem arises in the linearization of the nonlinear problem with two small parameters in the conditions on the free boundary for the system of the parabolic equations. There are proved the existence and uniqueness of the solution in the Holder space, the coercive estimate of it is derived.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.984

Б.Е. Кангужин, Д.Б. Нурахметов

КазНУ им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: kanbalta@mail.ru

ПЕРВЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОКОЛОТОМ ОТРЕЗКЕ

Найдены формулы первого регуляризованного следа (типа абстрактной формулы Гельфанда-Левитана) для оператора двукратного дифференцирования на проколотом отрезке. Доказательство основного результата проводится методом контурного интегрирования с учетом поправок аналитической теории возмущений. Обобщаются некоторые известные формулы следов.
Ключевые слова: *дифференциальный оператор, первый регуляризованный след, собственное значение, характеристическая функция.*

В этой работе исследуем первый регуляризованный след оператора L, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv -y''(x), \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ \frac{\pi}{2} < x < \pi, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \int_0^{\pi/2} \left(-y''(x)\right)\overline{\sigma(x)}dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-y''(x)\right)\overline{\sigma(x)}dx, \tag{3}$$

Keywords: *differential operator, first regularized trace, eigenvalue, characteristic function*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05; 34B24; 34L10

$$y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+\alpha y\left(\frac{\pi}{2}-0\right), \tag{4}$$

$$y(\pi)=0, \tag{5}$$

где $\sigma(\cdot)\in L_2[0,\pi]$. Заметим, что при $\alpha\neq 4/\pi$ оператор L является ограниченно обратимым [1, 2].

В случае, когда $\sigma(\cdot)\equiv 0,\ \alpha=-1$, оператор L эквивалентен оператору Штурма-Лиувилля, порожденному дифференциальным выражением

$$-y''(x)+\delta(x-\frac{\pi}{2})y(x),\ \ 0<x<\pi, \tag{6}$$

с краевыми условиями Дирихле (2), (5) [3].

В работе [4] показано, что первый регуляризованный след задачи (2), (5), (6):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-\frac{1}{\pi}+(-1)^n\frac{1}{\pi}\right)$$

сходится, а его сумма равна $-1/8$. Практическое приложение таких видов операторов можно найти в работе [5].

В случае гладкого потенциала $q(\cdot)\in C^1[0,\ \pi]$ для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле хорошо известна классическая формула первого регуляризованного следа (см. [6-9]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)dx-\frac{q(0)-q(\pi)}{4}.$$

Эта формула следа сохраняется для произвольного потенциала $q(\cdot)\in L_2$, для которого ряд Фурье в точках 0 и π сходится к значениям функции [10].

В случае $q(\cdot)\in L_1$ первый регуляризованный след вычислен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим [11]. Они показали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2+b_{2n}\right)=0,$$

причем ряд сходится для произвольной функции $q(\cdot)\in L_1$. Здесь $b_k=1/\pi\int_0^{\pi}\cos kx du(x)$, а $u(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на $[0,\pi]$, непрерывная в концах этого отрезка. В случае $q(\cdot) = u'(\cdot)$ (равенство в смысле распределений) для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле в работе [12] доказана формула следа

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k - k^2 + b_{2k}\right) = -\frac{1}{8} \sum h_j^2,$$

где h_j — скачки функции $u'(\cdot)$.

В этой работе для наглядности результата предположим, что

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi/2; \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем под первым регуляризованным следом изучаемого оператора L будем понимать предел частичных сумм при $n \to \infty$

$$\sum_{\lambda_k \in int\,\gamma_n} \lambda_k - \sum_{(2k+1) \in int\,\gamma_n} \left((2k+1)^2 + \frac{4(2-\alpha\pi)}{\pi^2} \right), \tag{8}$$

если существует некоторая неограниченно расширяющаяся последовательность контуров γ_n. Обозначим через γ_n окружность в комплексной плоскости радиуса $n + 1/2$.

Теорема 1. *Пусть L – оператор двукратного дифференцирования, соответствующий задаче (1)–(5), и граничная функция $\sigma(\cdot)$ представима в виде формулы (7). Тогда существует предел частичных сумм (8) при $n \to \infty$, а его сумма равна $-\frac{1}{2}\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)^2$.*

Для доказательства теоремы необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Характеристическая функция задачи (1)–(5) определяется формулой*

$$D(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}} tg \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\Delta(\lambda)\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(t)}dt \right\} +$$

$$+ \frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{\lambda}{2\Delta(\lambda)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\sqrt{\lambda}(t - \frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt + \right.$$

$$+\frac{\lambda(\sqrt{\lambda}ctg\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha)}{2\Delta(\lambda)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt, \qquad (9)$$

где $\Delta(\lambda)=1-\lambda\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt.$

Доказательство леммы 1. На $0<x<\pi/2$ решение примет вид $y(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$. Из условия (3) имеем

$$y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}+c,$$

где $c=\int_0^{\pi}\left(-y''(x)\right)\overline{\sigma(x)}dx$. Из условия (4) получим

$$y'(\frac{\pi}{2}+0)=\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Таким образом, в интервале $\pi/2<x<\pi$

$$y(x)=\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}+c\right)\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})+\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Определим константу c:

$$c=\int_0^{\pi}\left(-y''(x)\right)\overline{\sigma(x)}dx=\lambda\int_0^{\pi}y(x)\overline{\sigma(x)}dx=\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx+$$

$$+\lambda\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}+c\right)\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx.\right.$$

Отсюда получим

$$c=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(x)}dx\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\Delta(\lambda)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx.$$

Тогда

$$y(x)=\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})+\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}+$$

$$+\frac{\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\Delta(\lambda)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2}).$$

Из условия (5) имеем

$$y(\pi)=2\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda}+$$

$$+\frac{\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)}{\Delta(\lambda)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt.$$

Из последнего соотношения непосредственно следует формула (9). Лемма 1 доказана. □

Так как граничная функция $\sigma(\cdot)$ определена в виде (7), то $\Delta(\lambda)=1-\lambda\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(t-\pi/2)\overline{\sigma(t)}dt=\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}$ является характеристической функцией следующей задачи:

$$-y''(x)=\lambda y(x),\ \frac{\pi}{2}<x<\pi,$$

$$y(\pi)=0,$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Собственные значения этой задачи имеют вид $\lambda_k = (2k+1)^2, k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$

Учитывая соотношения (7), преобразуем формулу (9). Для этой цели вычислим следующие интегралы:

$$\lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{d^2}{dt^2}\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\right)(\pi - t)dt =$$

$$= \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})(\pi-t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}. \qquad (10)$$

$$\lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\right)(\pi - t)dt =$$

$$= -\,(\pi - t)\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}. \qquad (11)$$

С учетом формул (10), (11) соотношение (9) запишем в следующем виде:

$$D(\sqrt{\lambda}) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} - \alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda} + \frac{\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\Delta(\lambda)}\cdot\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\left(\cos^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)}{\Delta(\lambda)}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Заметим, что $\Delta(\lambda) = \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}$. Преобразуем последнее выражение

$$D(\sqrt{\lambda}) = \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2}\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Таким образом, имеем

$$D(\sqrt{\lambda}) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{\pi} - \alpha\right)\frac{tg\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Обозначив $\sqrt{\lambda} = z$, получим

$$D(z) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{z\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{\pi} - \alpha\right)\frac{tg\frac{z\pi}{2}}{z}\right). \tag{12}$$

Заметим, что $D(z)$ является четной функцией, функция $(2/\pi - \alpha)\, tg\frac{z\pi}{2}/z$ ограничена на γ_n некоторой константой, не зависящей от n, а функция $\ln\left(1 + \left(\frac{2}{\pi} - \alpha\right)\frac{tg\frac{z\pi}{2}}{z}\right)$ голоморфна на γ_n при больших n.

Лемма 2. *При $n \to \infty$ справедливы следующие интегральные исчисления:*

$$-\frac{2\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} tg\frac{\pi z}{2}dz = \frac{8(2-\alpha\pi)}{\pi^2}\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n} 1;$$

$$\frac{\frac{(2-\alpha\pi)^2}{\pi^2}}{2\pi i}\oint_{\gamma_n}\frac{tg^2\frac{\pi z}{2}}{z}dz = -\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)^2.$$

Доказательство леммы 2. Учитывая, что первый интеграл в точках $z_k = 2k+1$ имеет простые полюса, вычислим его.

$$-\frac{2\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} tg\frac{\pi z}{2}dz =$$

$$= 2\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)\lim_{z_k\to(2k+1)}\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n}\frac{4}{\pi} = \frac{8(2-\alpha\pi)}{\pi^2}\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n} 1.$$

Вычислим второй интеграл. Действительно, при $n \to \infty$

$$\frac{\frac{(2-\alpha\pi)^2}{\pi^2}}{2\pi i}\oint_{\gamma_n}\frac{tg^2\frac{\pi z}{2}}{z}dz =$$

$$= \frac{(2-\alpha\pi)^2}{\pi^2}\lim_{z_k\to(2k+1)}\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{d}{dz}\left((z-(2k+1))^2\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2}}{z\frac{\pi^2}{4}\cos^2\pi k}\right) =$$

$$= 4\frac{(2-\alpha\pi)^2}{\pi^4}\lim_{z_k\to(2k+1)}\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2}}{z}\right) =$$

$$= -8\frac{(2-\alpha\pi)^2}{\pi^4} \lim_{z_k \to (2k+1)} \sum_{(2k+1)\in int\gamma_n} \frac{1}{z^2} = -\left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)^2,$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Лемма 2 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы применим теорему Коши о вычетах к соотношению (12), тогда

$$2\sum_{\lambda_k \in int\,\gamma_n} \lambda_k = 2\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n} (2k+1)^2 + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} z^2 d\ln\left(1+\left(\frac{2}{\pi}-\alpha\right)\frac{tg\frac{z\pi}{2}}{z}\right) =$$

$$= 2\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n} (2k+1)^2 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} 2z\left[\left(\frac{2}{\pi}-\alpha\right)\frac{tg\frac{z\pi}{2}}{z} - \left(\frac{2}{\pi}-\alpha\right)^2\frac{tg^2\frac{z\pi}{2}}{2z^2}\right]dz + o(1) \quad (13)$$

Из леммы 2 следует, что

$$2\sum_{\lambda_k \in int\,\gamma_n} \lambda_k = 2\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n} (2k+1)^2 + \frac{8(2-\alpha\pi)}{\pi^2}\sum_{(2k+1)\in int\,\gamma_n} 1 - \left(\frac{2-\alpha\pi}{\pi}\right)^2 + o(1). \quad (14)$$

Из соотношений (13), (14) следует утверждение теоремы. □

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, грант 0732/ГФ, 2012г.-2014г.

Литература

1 Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 6. – С. 1307-1311.

2 Kanguzhin B.E. and Nurakhmetov D.B. Boundary Value Problems for 2-nd Order Non-homogeneous Differential Equations with Variable Coefficients // Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition). – 2011. Vol. 28 (Sum.121), № 1. – P. 47-56.

3 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 897-912.

4 Савчук А.М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ – потенциалом // УМН. – Т. 55, № 6(336). – С.155-156.

5 Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvabel models in quantum mechanics. – New Yourk: Springer, 1988 (Second edition: AMS, 2005).

6 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88, № 4. – С. 593-596.

7 Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 2. – С. 259-262.

8 Дикий Л.А. Об одной формуле Гельфанда-Левитана // УМН. – 1953. – Т. 8, № 2. – С. 119-123.

9 Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля // УМН. – 1964. – Т. 19, № 1. – С. 161-165.

10 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. – 331 с.

11 Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала // Докл. РАН. – 1999. – Т. 365, № 3. – С. 295-297.

12 Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69, № 3. – С. 427-442.

Статья поступила в редакцию 28.03.13

Кангужин Б.Е., Нұрахметов Д.Б. ОЙЫЛҒАН КЕСІНДІДЕГІ ЕКІ ЕСЕЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЫНЫҢ БІРІНШІ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛАНҒАН ІЗІ

Ойылған кесіндіде екі еселі дифференциалдау операторының бірінші регуляризацияланған ізі (Гельфан-Левитан абстрактлі формуласы типтес) табылды. Негізгі нәтижені дәлелдеу ауытқулардын аналитикалық теориясының түзетулерін ескерумен контурлық интегралдау әдісі арқылы жүргізілді. Кейбір белгілі іздер формуласы жалпыланды.

Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B. THE FIRST REGULARIZED TRACE FOR THE TWO-FOLD DIFFERENTIATION OPERATOR IN A PUNCTURED SEGMENT

There are found the formulas of the first regularized trace (of the type of abstract Gel′fand-Levitan formula) of the two-fold differentiation operator in a punctured segment. Proof of the main result is given by the method of contour integration with corrections of the analytic perturbation theory. Some well-known trace formulas are generalized.

УДК 517.956.226

М.Б. Муратбеков, Г.К. Рахимова, А.Б. Шыракбаев

Таразкий государственный педагогический институт
080000, Тараз, ул. Толе би, 62, e-mail: abaishirak@mail.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ И АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

В этой статье исследованы существование, гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса вырождающихся нагруженных уравнений неклассического типа.
Ключевые слова: *неклассическое уравнение, нелинейное уравнение, краевая задача, поперечники.*

1 Введение. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Обзор литературы, посвященной уравнениям неклассического типа, можно найти в [1-5]. В этих работах исследованы разрешимость и гладкость решений краевых задач для линейных уравнений неклассического типа без вырождения.

Свойства полупериодической задачи Дирихле для вырождающихся уравнений изучены в работах [6-8].

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе рассматривается вырождающееся линейное уравнение неклассического типа. Результаты

Keywords: *non-classical equations, nonlinear equations, boundary value problem, widths.*
2010 Mathematics Subject Classification: 35G25

этого раздела для настоящей работы являются предварительными, а центральное место занимают результаты второго и третьего разделов.

Во втором разделе исследуются вопросы о существовании и гладкости решений полупериодической задачи Дирихле для одного класса вырождающихся нелинейных уравнений неклассического типа. В третьем разделе изучаются оценки поперечников по Колмогорову множеств, связанных с решениями вышеуказанной задачи.

Отметим, что оценки поперечников по Колмогорову множеств, связанных с решениями, могут быть использованы для определения скорости сходимости приближенных решений рассматриваемой задачи к точному. Тем самым, оценивая поперечники множеств, связанных с областью определения того или иного дифференциального оператора, мы не только получаем тонкие характеристики обратного к нему оператора, но и ближе соприкасаемся с вопросами приложений.

Рассмотрим задачу

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} u(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} u(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} + \lambda u = f \in L_2(\Omega), \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\mid_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\mid_{x=2\pi}, \quad i = 0,1,2,...,2s, \quad s \geq m, \qquad (1.2)$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \qquad (1.3)$$

где $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 1\}, \lambda \geq 0$, и коэффициенты уравнения (1.1) подчиним следующим ограничениям:

$i_0)$ $R_k(y,z),\ k = 0,1,2,...,s,\ (R_k(0,z) = 0,\ z \in \mathbb{C},\ \mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $k = 1,2,...,s),$ $B_k(y,z),\ k = 0,1,2,...,m,\ (B_k(0,z) = 0,\ z \in \mathbb{C},\ k = 1,2,...,m)$ кусочно-непрерывные и ограниченные функции по обоим аргументам и $R_0(y,z) \geq \delta_0,$ $B_0(y,z) \geq \delta > 0;$

$i_{00})$ $R_k(y,z) > 0$ $(k = 1,2,...,s)$ при $y \neq 0, z \in \mathbb{C}$ и при каждом $z \in \mathbb{C}$ не убывают на отрезке $[0,1], B_k(y,z) > 0$ $(k = 1,2,...,m)$ при $y \neq 0, z \in \mathbb{C}$ и при каждом $z \in \mathbb{C}$ не убывают на отрезке [0,1];

i_{000}) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{R_k(2y,z)}{R_k(y,z)}<\infty$ при всех $z\in\mathbb{C}$ $(k=1,2,...,s)$,
$\lim\limits_{y\to 0}\frac{B_k(2y,z)}{B_k(y,z)}<\infty$ при всех $z\in\mathbb{C}$ $(k=1,2,...,m)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $i_0)-i_{000})$. Тогда при $\lambda\geq 0$ существует решение задачи (1.1)–(1.3) и для него справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)}+\|u(x,y)\|_{1,2}\leq c\|f\|_2,$$

где c>0 – постоянное число, не зависящее от $u(x,y)$.

Замечание 1. *Из условий $i_0)-i_{00})$ видно, что коэффициенты уравнения (1.1) вырождаются только при $y=0$. Следовательно, отсюда и из общей теории вырождающихся уравнений следует, что вырождение коэффициентов уравнения (1.1) не влияет на граничные условия.*

Здесь $C([0,1],\, L_2(0,2\pi))$ – пространство, полученное пополнением множества непрерывных функций на промежутке $[0,1]$ со значениями в $L_2(0,2\pi)$ относительно нормы

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)}=\sup_{y\in[0,1]}\left(\int_0^{2\pi}|u(x,y)|^2dx\right)^{1/2},$$

$\|\cdot\|_{1,2}$ – норма в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_2$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

Через L обозначим оператор, соответствующий задаче (1.1)–(1.3). Из теоремы 1 следует, что множество $M=\{u\in D(L):\|Lu\|_2+\|u\|_2\leq T\}$ компактно в $L_2(\Omega)$. Как известно, поперечники по Колмогорову компактного множества M, тем более, когда оно содержит решения уравнения $Lu=f$, характеризуют скорость сходимости приближенных решений.

По определению k-поперечником по Колмогорову множества M в пространстве $L_2(\Omega)$ называется величина

$$d_k=\inf_{\{y_k\}}\sup_{u\in M}\inf_{\vartheta\in y_k}\|u-\vartheta\|_2,$$

где $\{y_k\}$ – множество всех подпространств $L_2(\Omega)$, размерности которых не превосходят k.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для поперечников $d_k(M)$ по Колмогорову множества M справедливы оценки*

$$c\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}} \leq d_k \leq c\frac{1}{k^{1/2}}, \;\; k = 1, 2, ...,$$

где $c > 0$ не зависит от k.

2 О свойствах решений полупериодической задачи Дирихле для вырождающегося линейного уравнения неклассического типа

Рассмотрим задачу

$$Lu + \lambda u \equiv$$

$$\equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} + \lambda u = f \in L_2(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\mid_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\mid_{x=2\pi}, \;\; i = 0, 1, 2, ..., 2s, \;\; s \geq m, \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \tag{2.3}$$

где $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi, \;\; 0 < y < 1\}$.

Определение 1. *Функция $u \in L_2(\Omega)$ называется сильным решением задачи (2.1)–(2.3), если существует последовательность $\{u_n\} \subset C^{\infty}_{0,\pi}(\overline{\Omega})$ такая, что*

$$\|u_n - u\|_2 \to 0, \;\; \|(L + \lambda E)u_n - f\|_2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $C^{\infty}_{0,\pi}(\overline{\Omega})$ – множество бесконечно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.3).

В дальнейшем считаем, что $R_k(y)$ $(k = 0, 1, ..., s)$, $B_k(y)$ $(k = 0, 1, ..., m)$ – функции, непрерывные на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющие условиям

i) $R_k(y), k = 0, 1, 2, ..., s,$ $(R_k(0) = 0,\; k = 1, 2, ..., s)$, $B_k(y),\; k = 0, 1, 2, ..., m,$ $(B_k(0) = 0,\; k = 1, 2, ..., m)$ кусочно-непрерывные и ограниченные функции и $R_0(y) \geq \delta_0,\;\; B_0(y) \geq \delta > 0$;

ii) $R_k(y) > 0\,(k = 1, 2, ..., s)$ при $y \neq 0$ и не убывают на отрезке $[0, 1]$, $B_k(y) > 0$ $(k = 1, 2, ..., m)$ при $y \neq 0$ и не убывают на отрезке [0,1];

iii) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{R_k(2y)}{R_k(y)} < \infty$ $(k = 1, ..., s)$, $\lim\limits_{y\to 0} \frac{B_k(2y)}{B_k(y)} < \infty$ $(k = 1, ..., m)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия i)–ii). Тогда при $\lambda \geq 0$ для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует в $L_2(\Omega)$ единственное сильное решение задачи (2.1)–(2.3) и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{C([0,1],L_2)} + \|u\|_{1,2} \leq c\|f\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от $u(x, y)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия i)–iii). Тогда для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи (2.1)–(2.3) $u \in L_2(\Omega)$ и для него справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{s} \left\| R_k(y) \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \right\|_2^2 + \sum_{k=0}^{m} \left\| B_k(y) \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq c\|f\|_2, \quad (A)$$

где $c > 0$ – не зависящая от $u(x, y)$ постоянная.

Для доказательства теорем 3,4 сначала докажем нижеследующие леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия i)–ii). Тогда для всех $u \in D(L)$ справедлива оценка*

$$\|u\|_2 \leq c\|Lu\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число, не зависящее от $u(x, y)$.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим квадратичную форму $< Lu, u >$ для $u \in C^{\infty}_{0,\pi}(\overline{\Omega})$.

В силу (2.2) и (2.3)

$$< Lu, u >= \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dxdy$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k R_k(y) \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} u dxdy + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=0}^{m} B_k(y) \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|^2 dxdy. \quad (2.4)$$

В силу условия (2.2) второе слагаемое в (2.4) равно нулю. В этом можно убедиться путем интегрирования по частям. Используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Коши с "ε", из равенства (2.4) получим

$$c(\varepsilon,\delta)\|Lu\|_2^2 \geq \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2. \tag{2.5}$$

Отсюда вытекает $\|u\|_2^2 \leq c\|Lu\|_2^2$, где $c = c(\varepsilon,\delta)$.

В силу непрерывности нормы последняя оценка справедлива для всех $u \in D(L)$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия i)–ii). Тогда для всех функций $u \in D(L)$ справедлива оценка*

$$\|u\|_{1,2} \leq c\|Lu\|_2,$$

где c>0 – постоянное число.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим скалярное произведение $< Lu, u_x >$ для $u \in C^\infty_{0,\pi}(\overline{\Omega})$. Учитывая, что $u_{yy}u_x = (u_y u_x)_y - u_y u_{xy}$, имеем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u_x dxdy = 0. \tag{2.6}$$

Далее, интегрируя по частям, нетрудно получить, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{s} (-1)^k R_k(y) \frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = \int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{s} R_k(y) \left|\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right|^2 dxdy.$$

Отсюда согласно условиям i)–ii) имеем

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{s} R_k(y) \left|\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right|^2 dxdy \geq \delta_0 \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdy. \tag{2.7}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{m} (-1)^k B_k(y) \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, учитывая (2.6)–(2.8), получим

$$|< Lu, u_x >| \geq \delta_0 \|u_x\|_2^2.$$

Отсюда следует

$$\|Lu\|_2^2 \geq c\|u_x\|_2^2, \tag{2.9}$$

где $c = c(\varepsilon, \delta_0)$.

Объединяя неравенства (2.5) и (2.9), будем иметь

$$\|u\|_{1,2} \leq c\|Lu\|_2,$$

где $c = c(\delta_0, \delta, \varepsilon)$. Лемма 2 доказана. □

Рассмотрим оператор, определенный равенством

$$l_n u = -u'' + \left(i \sum_{k=0}^{s} n^{2k+1} R_k(y) + \sum_{k=0}^{m} n^{2k} B_k(y) \right) u$$

на множестве $C_0^\infty[0,1]$, где $C_0^\infty[0,1]$ – множество функций сколь угодно раз дифференцируемых и удовлетворяющих условию $u(0) = u(1) = 0$.

Нетрудно проверить, что данный оператор при выполнении условии i) допускает замыкание. Замыкание также обозначим через l_n.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия i)–ii). Тогда*

а) для всех функций $u(y)$ из $D(l_n)$ справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{1,2} \leq c\|l_n u\|_2, \tag{2.10}$$

$$\|u\|_{C(0,1)} \leq c\|l_n u\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянные числа;

б) оператор l_n непрерывно обратим в $L_2(0,1)$.

Лемма 3 доказывается точно так же, как леммы 1.2 и 1.3 работы [9].

Доказательство теорем 3, 4. Повторяя все выкладки и рассуждения, которые использованы при доказательстве теоремы 1 работы [9], получаем доказательство теоремы 3.

Согласно условиям теоремы 4 выполняются все условия теоремы 1 работ [7, 8], следовательно, справедлива оценка (A). Теорема 4 доказана. □

3 О существовании и свойствах решений нелинейной задачи

Прежде, чем доказать теорему 1, приведем несколько вспомогательных предложений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_\vartheta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} \vartheta(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} \vartheta(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = f \in L_2(\Omega). \tag{3.1}$$

Лемма 4. *Пусть $\vartheta \in C([0,1], L_2(0,2\pi))$ и выполнены условия $i_0) - i_{00})$. Тогда для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (3.1), (1.2), (1.3) и для него справедлива оценка*

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2(0,2\pi))} + \|u(x,y)\|_{1,2,\Omega} \le c\|f\|_2, \tag{3.2}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $u(x,y)$ и $\vartheta(x,y)$.

Доказательство леммы 4. Положим $\tilde{R}_k(y) = R_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} \vartheta(x,y)dx\right)$ $(k = 0,1,2,...,s)$, $\tilde{B}_k(y) = B_k\left(y, \int\limits_0^{2\pi} \vartheta(x,y)dx\right)$ $(k = 0,1,2,...,m)$. Тогда задача (3.1), (1.2), (1.3) сводится к задаче (2.1)–(2.3), где функции $R_k(y), B_k(y)$ заменены соответственно на $\tilde{R}_k(y), \tilde{B}_k(y)$. При этом согласно условиям $i_0) - i_{00}$ для $\tilde{R}_k(y), \tilde{B}_k(y)$ выполняются все условия теоремы 3, отсюда вытекает утверждение доказываемой леммы 4. □

Таким образом, задача (3.1), (1.2), (1.3) имеет единственное решение $u = L_\vartheta^{-1} f$, удовлетворяющее оценке (3.2). Очевидно, если $\vartheta \in C([0,1], L_2(0,2\pi))$, то $u = L_\vartheta^{-1} f \in C([0,1], L_2(0,2\pi))$. Более того, поскольку $u = L_\vartheta^{-1} f$, то для произвольной функции $\vartheta \in C([0,1], L_2(0,2\pi))$ имеем

$L_\vartheta^{-1}f \in D(L)$. Поэтому существование решения задачи (1.1)–(1.3) эквивалентно существованию неподвижной точки оператора L_ϑ^{-1} в пространстве $C([0,1],L_2)$ т.е. существование функции $u \in C([0,1],L_2(0,2\pi))$ такой, что $u = L_u^{-1}f$. При этом $u \in D(L)$, поскольку $L_u^{-1}f \in D(L)$.

Следовательно, задача (1.1)–(1.3) имеет решение, если оператор L_ϑ^{-1} имеет неподвижную точку. С этой целью применяем известный принцип Шаудера.

Пусть $\bar{S} = \{\vartheta \in C([0,1],L_2(0,2\pi)) : \|\vartheta\|_{C([0,1],L_2)} \leq A\}$ – шар в пространстве $C([0,1],L_2)$, где A – произвольное положительное число.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{00})$. Тогда оператор L_ϑ^{-1} отображает множество $\bar{S}$ в себя.*

Доказательство леммы следует из леммы 4, если в качестве A взять число $c\|f\|_2$ из оценки (3.2).

Пусть $K = \{u \in C([0,1],L_2(0,2\pi)) : u = L_\vartheta^{-1}f, \vartheta \in \bar{S}\}$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{00})$. Тогда для любой функции $u(x,y) \in K$ справедливо неравенство*

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)} + \|u(x,y)\|_{1,2} \leq c\|f\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

Доказательство леммы 6 следует из леммы 4.

Лемма 7. *Множество K компактно в пространстве $C([0,1],L_2(0,2\pi))$.*

Лемма 8. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{00}$. Тогда оператор L_ϑ^{-1} непрерывен.*

Эти леммы доказываются точно так же, как леммы 2.2 и 2.3 работы [9].

Доказательство теоремы 1. Согласно леммам 5-8 оператор L_ϑ^{-1} вполне непрерывен и переводит шар $\bar{S}$ в себя. Тогда по принципу Шаудера оператор L_ϑ^{-1} имеет неподвижную точку $u(x,y)$ в шаре $\bar{S}$. Это означает, что задача (1.1)–(1.3) для любой правой части $f(x) \in L_2(\Omega)$ имеет решение $u(x,y) \in \bar{S}$, причем верна оценка

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)} + \|u(x,y)\|_{1,2} \leq c\|f\|_2.$$

Теорема 1 доказана. □

4 Оценки поперечников $d_k(M)$ по Колмогорову множества $M = \{u \in D(L) : \|Lu\|_2 + \|u\|_2 \leq T\}$

Для доказательства теоремы 2 нам необходимы некоторые леммы и оценки.

Введем множества

$$\tilde{M}_c = \{u \in L_2(\Omega) : \|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq c\},$$

$$\dot{M}_{c^{-1}} = \{u \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^{2s+1} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right\|_2^2 + \sum_{k=1}^{2s+1} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq c^{-1}\}.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{000})$. Тогда для некоторой постоянной $c > 1$, справедливы включения $\dot{M}_{c^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_c$, где $c > 0$ – постоянное число.*

Лемма 10. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{000})$. Тогда справедливы оценки*

$$c^{-1}\dot{d}_k \leq d_k(M) \leq c\tilde{d}_k, \ \ k = 1, 2, ...,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

Определим функцию $N(\lambda) = \sum\limits_{d_k > \lambda} 1$, равную количеству поперечников $d_k(M)$, больших $\lambda > 0$.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия $i_0) - i_{000})$. Тогда справедлива оценка*

$$\dot{N}(c\lambda) \leq N(\lambda) \leq \tilde{N}(c^{-1}\lambda),$$

где $\tilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{d}_k > \lambda} 1$, $\dot{N}(\lambda) = \sum\limits_{\dot{d}_k > \lambda} 1$.

Эти леммы доказываются точно так же, как леммы 4 и 5 работы [10].

Доказательство теоремы 2. Известно [11], что для функций $\tilde{N}(\lambda), \dot{N}(\lambda)$ справедливы оценки:

$$c^{-1}\lambda^{-2} \le \tilde{N}(\lambda) \le c\lambda^{-2}, \tag{4.1}$$

$$c^{-1}\lambda^{\frac{-2}{2s+1}} \le \dot{N}(\lambda) \le c\lambda^{\frac{-2}{2s+1}}. \tag{4.2}$$

Пусть $\lambda = \tilde{d}_k$, тогда $\tilde{N}(\tilde{d}_k) = k$. Поэтому из (4.1) и (4.2), соответственно, вытекают неравенства

$$c^{-1}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \le \tilde{d}_k \le c\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$c^{-1}\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}} \le \dot{d}_k \le c\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}}.$$

Отсюда с учетом оценок, полученных в лемме 10, получаем доказательство теоремы 2. □

Выводы

Работа посвящена исследованию вопросов о существовании, гладкости и аппроксимативных свойствах решений полупериодической задачи Дирихле для одного класса нелинейных вырождающихся уравнений неклассического типа. Выполненные исследования позволяют сформулировать следующие основные результаты:

- найдены достаточные условия существования и гладкости решений полупериодической задачи Дирихле для одного класса нелинейных вырождающихся уравнений неклассического типа;

- получены двусторонние оценки поперечников по Колмогорову множеств, связанных с решениями вышеуказанной задачи.

Литература

1 Дубинский Ю.А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Математический сборник. – 1973. – Т. 90(132), № 1. – С. 1-22.

2 Дубинский Ю.А. Об одной абстрактной теореме и ее приложениях к краевым задачам для некласических уравнений // Математический сборник. – 1969. – Т. 79(121), № 1. – С. 91-117.

3 Романко В.К. Разрешимость граничных задач для дифференциально- операторных уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 6. – С. 1081-1092.

4 Юрчук Н.И. О граничных задачах для уравнений содержащих в главной части операторы вида $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}} + A$// Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 759-762.

5 Пятков С.П. О корректных краевых задачах для уравнений составного типа и их обобщений: автореф. ... к.ф.-м.н.: диссер. – Новосибирск, 1982.

6 Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 546-547.

7 Кальменов Т.Ш.,Отелбаев М. О гладкости решения для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 1244-1255.

8 Муратбеков М.Б. Коэрцитивные оценки для одного дифференциального оператора высокого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 893-901.

9 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Об аппроксимативных свойствах решения нелинейного уравнения смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика (МГУ). – 2006. – Т. 12, № 5. – С. 95-107.

10 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М.Оценки спектра одного класса операторов смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 135-137.

11 Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИАН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 265-305.

Статья поступила в редакцию 05.06.13

Мұратбеков М.Б., Рахимова Г.К., Шырақбаев А.Б. КЛАССИКАЛЫҚ ЕМЕС ТҮРДЕГІ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС НҰҚСАНДЫ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМІНІҢ БАР БОЛУЫ ЖӘНЕ АППРОКСИМАТИВТІ ҚАСИЕТТЕРІ ТУРАЛЫ

Бұл мақалада классикалық емес түрдегі нұқсанды жүктелген теңдеулердің бір класы үшін шешімнің бар болуы, тегістігі және аппроксимативті қасиеттері зерттелген.

Muratbekov M.B., Rahymova G.K., Shyrakbaev A.B. ON THE EXISTENCE AND APPROXIMATION PROPERTIES OF A SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR NONLINEAR DEGENERATE EQUATIONS OF NON-CLASSICAL TYPE

In this paper there is investigated the existence, smoothness and approximation properties of a solutions of a class of degenerate loaded equations of non-classical type.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2013. Том 13. № 2 (48).*

УДК 517.51

Д.К. Чигамбаева

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева
010008, Астана, ул. Мирзояна, 2, e-mail: d.darbaeva@yandex.kz

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

В данной работе вводится новый класс пространств типа Морри $M^{\alpha}_{p,q}$, охватывающий классические пространства Морри, изучаются их свойства. Доказывается интерполяционная теорема типа Марцинкевича.
Ключевые слова: *пространства Морри, обобщенные пространства типа Морри, вещественный метод интерполяции, интерполяционные теоремы.*

1 Введение

Пусть $0 \le \lambda \le n/p$ и $0 < p < \infty$. Говорят, что функция f принадлежит пространству M_p^{λ}, если $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, и конечна следующая норма

$$||f||_{M_p^{\lambda}} \equiv ||f||_{M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty,$$

здесь $B_r(x)$ – шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda = n/p$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{n/p}(\mathbb{R}^n) =$

Keywords: *Morrey spaces, generalized Morrey-type spaces, real interpolation method, interpolation theorems*

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 46B70

$L_\infty(\mathbb{R}^n)$, а если $\lambda < 0$ или $\lambda > n/p$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ – множество всех эквивалентных нулю функций на $\mathbb{R}^n$ (см. [1]).

Данная работа посвящена изучению интерполяционных свойств пространств Морри и их обобщений. Некоторые результаты для классических пространств Морри были получены G. Stampacchia, A. Campanato и J. Peetre [2-4]. В частности, в работе [4] было показано вложение интерполяционной пары классических пространств Морри для случая $q = \infty$

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \subset M_p^\lambda \,,$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_1$. Однако O. Blasco, A. Ruiz и R. Vega [5, 6] установили, что это включение строгое, т.е.

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \neq M_p^\lambda \,.$$

В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению общих пространств типа Морри и их интерполяционных свойств. Так, описание интерполяционных свойств локальных пространств типа Морри $LM_{p,q}^\lambda$ было получено Е.Д. Нурсултановым и В.И. Буренковым. В работе [7] была доказана замкнутость шкалы пространств $LM_{p,q}^\lambda$ относительно вещественного метода при фиксированном параметре p, а именно,

$$(LM_{p,q_0}^{\lambda_0}, LM_{p,q_1}^{\lambda_1})_{\theta,q} = LM_{p,q}^\lambda \,,$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_1$. В дальнейшем в работе [8] было установлено, что результат интерполяции пары общих локальных пространств типа Морри $LM_{p,q}^\lambda(G,\mu)$ над заданным пространством с мерой также описывается пространством из этой шкалы, т.е.

$$(LM_{p,q_0}^{\lambda_0}(G,\mu), LM_{p,q_1}^{\lambda_1}(G,\mu))_{\theta,q} = LM_{p,q}^\lambda(G,\mu) \,,$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0+\theta\lambda_1$.

Однако результат интерполяции для классических пространств Морри выводит из этой шкалы, в связи с этим возникает вопрос об интерполяции пространств M_p^λ. Следует отметить, что многие вопросы для определенного класса функциональных пространств не находят своего решения в терминах этого класса. С этой целью было введено некоторое обобщение пространств Морри $M_{p,q}^\alpha$, свойства которого мы изложим в пункте 2.

Данные пространства обладают интерполяционным свойством. Ответом послужил доказанный в некотором смысле аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича для введенных пространств, в частности, для классических пространств Морри в пункте 3.

2 Пространства $M^{\alpha}_{p,q}$ и их свойства

Пусть $0 < p < \infty,\ 0 < q \le \infty,\ 0 \le \alpha \le n/p$. Определим обобщенные пространства типа Морри $M^{\alpha}_{p,q}$ как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма при $q < \infty$:

$$||f||_{M^{\alpha}_{p,q}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \qquad (1)$$

и при $q = \infty$ норма

$$||f||_{M^{\alpha}_{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что введенные таким образом пространства являются обобщением классических пространств Морри при $q = \infty$, т.е. $M^{\alpha}_{p,\infty} = M^{\lambda}_p$. Отметим некоторые свойства введенных пространств с нормой (1).

Лемма 1. *(i) Если* $1 \le p_0 < p_1 < \infty$, *то* $M^{\alpha_1}_{p_1,q} \hookrightarrow M^{\alpha_0}_{p_0,q}$, *где* $\alpha_0 = \alpha_1 - \frac{n(p_0-p_1)}{p_0p_1}$.
(ii) Если $0 < q_0 < q_1 \le \infty$, *то* $M^{\alpha}_{p,q_0} \hookrightarrow M^{\alpha}_{p,q_1}$.
(iii) Пусть $p, p_0, p_1 \in [1,\infty),\ q, q_0, q_1 \in [1,\infty],\ 1/p = 1/p_0 + 1/p_1$, $1/q = 1/q_0 + 1/q_1,\ \alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, *то* $fg \in M^{\alpha}_{p,q}$ *и, кроме того,*

$$||fg||_{M^{\alpha}_{p,q}} \le ||f||_{M^{\alpha_0}_{p_0,q_0}} ||g||_{M^{\alpha_1}_{p_1,q_1}}$$

для всех функций $f \in M^{\alpha_0}_{p_0,q_0}$ *и* $g \in M^{\alpha_1}_{p_1,q_1}$.

Доказательство. (i). Пусть $f \in M^{\alpha_1}_{p_1,q}$. Применяя неравенство Гёльдера и принимая во внимание, что $|B_t(x)| \sim t^n$, получим

$$||f||_{M^{\alpha_0}_{p_0,q}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_0}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} |B_t(x)|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

$$\cong \left(\int_0^\infty \left(t^{-(\alpha_0 - \frac{n(p_1-p_0)}{p_0 p_1})} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = ||f||_{M^{\alpha_1}_{p_1,q}},$$

что означает вложение $M^{\alpha_1}_{p_1,q} \hookrightarrow M^{\alpha_0}_{p_0,q}$.

(ii). Сначала пусть $q_1 = \infty$ и $f \in M^\alpha_{p,q_0}$. Докажем, что $M^\alpha_{p,q_0} \hookrightarrow M^\alpha_{p,\infty}$.

$$||f||_{M^\alpha_{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))}$$

$$= (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \tau^{-\alpha q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q_0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что $B_t(x) \subset B_\tau(x)$, если $t \leq \tau$, тогда

$$||f||_{M^\alpha_{p,\infty}} \leq (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \left(\tau^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_\tau(x))} \right)^{q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q_0} =$$

$$= (\alpha q_0)^{1/q_0} ||f||_{M^\alpha_{p,q_0}}. \tag{2}$$

Если $q_1 < \infty$, то достаточно воспользоваться интерполяционным неравенством

$$||f||_{M^\alpha_{p,q_1}} \leq (||f||_{M^\alpha_{p,\infty}})^{1-\frac{q_0}{q_1}} (||f||_{M^\alpha_{p,q_0}})^{\frac{q_0}{q_1}}$$

и неравенством (2). Таким образом, $M^\alpha_{p,q_0} \hookrightarrow M^\alpha_{p,q_1}$.

(iii). Для доказательства достаточно дважды воспользоваться обобщенным неравенством Гёльдера. Лемма доказана. □

3 Интерполяционная теорема типа Марцинкевича для пространств $M^\alpha_{p,q}$

Для доказательства интерполяционной теоремы нам понадобится также локальный вариант введенных пространств, который рассматривался в [9] и определялся для любого $x \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$||f||_{LM^{\alpha}_{p,q,x}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha} ||f||_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

если $0 < q < \infty$ и с обычной модификацией при $q = \infty$.

Основным результатом данной работы является аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича для пространств $M^{\alpha}_{p,q}$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < n/p,\ 0 < \beta_0 < \beta_1 < n/q,\ 0 < p, q < \infty$ *и пусть* T *– линейный оператор. Если для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$||Tf||_{LM^{\alpha_i}_{p,\infty,x}} \leq M_i ||f||_{LM^{\beta_i}_{q,1,x}}, \quad i = 0, 1, \tag{3}$$

тогда

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}},$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1,\ \beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1,\ 0 < \tau \leq \infty,\ 0 < \theta < 1,$ *и* c *зависит только от параметров* $p,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \theta$.

Доказательство. Пусть $f \in M^{\beta}_{q,\tau}$, положим $\gamma = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\beta_0 - \beta_1} > 0$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $c > 0$ определим функции

$$f_0(y) = \begin{cases} f(y), & y \in B_t(x),\ |B_t(x)| = ct^{\gamma}, \\ 0, & y \notin B_t(x),\ |B_t(x)| = ct^{\gamma} \end{cases}$$

и

$$f_1(y) = f(y) - f_0(y).$$

Тогда $f(y) = f_0(y) + f_1(y)$, и мы имеем

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} = \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Tf\|_{L_p(B_t(x))} \right)^{\tau} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau}$$

$$= \left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{B_t(x)} |T(f_0 + f_1)(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\tau} \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau}.$$

В силу линейности оператора T, применяя неравенство Минковского, получим

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \le \Bigg(\int_0^{\infty} \Big(t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} 2^{(1/p-1)_+} (t^{\alpha_0} t^{-\alpha_0} \|Tf_0\|_{L_p(B_t(x))} +$$

$$+ t^{\alpha_1} t^{-\alpha_1} \|Tf_1\|_{L_p(B_t(x))}) \Big)^{\tau} \frac{dt}{t} \Bigg)^{1/\tau}$$

$$\le 2^{(1/p-1)_+} \Bigg(\int\limits_0^{\infty} \Big(t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(t^{\alpha_0} ||T(f_0)||_{LM^{\alpha_0}_{p,\infty,x}} + t^{\alpha_1} ||T(f_1)||_{LM^{\alpha_1}_{p,\infty,x}} \big) \Big)^{\tau} \frac{dt}{t} \Bigg)^{1/\tau},$$

где $a_+ := \max\{a, 0\}$. Согласно условию (3) имеем

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \le 2^{(1/p-1)_+} \Bigg(\int_0^{\infty} \Big(t^{-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(t^{\alpha_0} M_0 ||f_0||_{LM^{\beta_0}_{q,1,x}} +$$

$$+ t^{\alpha_1} M_1 ||f_1||_{LM^{\beta_1}_{q,1,x}} \big) \Big)^{\tau} \frac{dt}{t} \Bigg)^{1/\tau}. \tag{4}$$

Сначала оценим норму

$$||f_0||_{LM^{\beta_0}_{q,1,x}} = \int\limits_0^{ct^{\gamma}} s^{-\beta_0} \|f_0\|_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s} + \int\limits_{ct^{\gamma}}^{\infty} s^{-\beta_0} \|f_0\|_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s}.$$

Заметим, что $f_0(y) = f(y)$, если $s < ct^{\gamma}$ и $y \in B_t(x)$, в противном случае $f_0(y) = 0$, следовательно,

$$||f_0||_{LM^{\beta_0}_{q,1,x}} \equiv J_1(s) + \|f\|_{L_q(B_t(x))} \int\limits_{ct^{\gamma}}^{\infty} s^{-\beta_0} \frac{ds}{s},$$

где $J_1(s) = \int\limits_0^{ct^{\gamma}} s^{-\beta_0} ||f||_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s}$.

Так как $B_t(x) \subset B_s(x)$, если $t \le s$, то мы получим

$$\|f\|_{L_q(B_t(x))} \int\limits_{ct^\gamma}^{\infty} s^{-\beta_0} \frac{ds}{s} = \|f\|_{L_q(B_t(x))} \frac{1}{\beta_0} c^{-\beta_0} t^{-\beta_0\gamma} =$$

$$= \|f\|_{L_q(B_t(x))} \frac{\beta_1}{\beta_0} c^{-\beta_0+\beta_1} t^{-\beta_0\gamma+\beta_1\gamma} \left(\int\limits_{ct^\gamma}^{\infty} s^{-\beta_1} \frac{ds}{s} \right)$$

$$\le c_1 t^{\gamma(\beta_1-\beta_0)} \left(\int\limits_{ct^\gamma}^{\infty} s^{-\beta_1} \|f\|_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s} \right) \equiv c_1 t^{\gamma(\beta_1-\beta_0)} J_2(s),$$

где $J_2(s) = \int\limits_{ct^\gamma}^{\infty} s^{-\beta_1} ||f||_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s}$ и $c_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0} c^{(\beta_1-\beta_0)}$. Поэтому

$$||f_0||_{LM^{\beta_0}_{q,1,x}} \le J_1(s) + c_1 t^{\frac{\gamma(\beta_1-\beta_0)}{p}} J_2(s). \tag{5}$$

Далее, оценим $||f_1||_{LM^{\beta_1}_{q,1,x}}$, заметив, что $f_1(y) = f(y) - f_0(y)$,

$$||f_1||_{LM^{\beta_1}_{q,1,x}} = \int\limits_0^{ct^\gamma} s^{-\beta_1} \|f_1\|_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s} + \int\limits_{ct^\gamma}^{\infty} s^{-\beta_1} \|f_1\|_{L_q(B_s(x))} \frac{ds}{s} = J_2(s). \tag{6}$$

Применяя оценки (5), (6) в (4), будем иметь

$$||Tf||_{M^\alpha_{p,\tau}} \le 2^{(1/p-1)_+} \left(\int\limits_0^\infty \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(t^{-\alpha+\alpha_0} M_0 (J_1(s) + c_1 t^{\gamma(\beta_1-\beta_0)} J_2(s)) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + t^{-\alpha+\alpha_1} M_1 J_2(s) \right) \right)^\tau \frac{dt}{t} \right)^{1/\tau}.$$

Так как $-\alpha + \alpha_0 = -(1-\theta)\alpha_0 - \theta\alpha_1 + \alpha_0 = \theta(\alpha_0 - \alpha_1)$ и $-\alpha + \alpha_1 = -(1-\theta)(\alpha_0 - \alpha_1)$, то

$$||Tf||_{M^\alpha_{p,\tau}} \le 2^{(1/p-1)_+} \left(\int\limits_0^\infty \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(t^{\theta(\alpha_0-\alpha_1)} M_0 (J_1(s) + c_1 t^{\gamma(\beta_1-\beta_0)} J_2(s)) + \right.\right.\right.$$

$$+t^{-(1-\theta)(\alpha_0-\alpha_1)}M_1J_2(s))\Big)^{\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau}.$$

Делая замену переменной $ct^{\gamma}=y$ и учитывая, что $\gamma=\frac{\alpha_0-\alpha_1}{\beta_0-\beta 1}>0$, получим

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}}\le 2^{(1/p-1)_+}\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\Bigg(M_0c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)}y^{\theta(\beta_0-\beta_1)}\int\limits_0^{y}s^{-\beta_0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_s(x))}\frac{ds}{s}$$

$$+c_1M_0c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}y^{-(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}\int\limits_y^{\infty}s^{-\beta_1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_s(x))}\frac{ds}{s}$$

$$+M_1c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}y^{-(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}\int\limits_y^{\infty}s^{-\beta_1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_s(x))}\frac{ds}{s}\Bigg)^{\tau}\frac{dy}{y}\Bigg)^{1/\tau}.$$

Далее, произведем замену переменной $s=ty$ во внутреннем интеграле, тогда

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}}\le$$

$$\le 2^{(1/p-1)_+}\Bigg(\int\limits_0^{\infty}\Bigg(M_0c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)}\int\limits_0^{1}t^{-\beta_0}y^{\theta(\beta_0-\beta_1)-\beta_0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_{ty}(x))}\frac{dt}{t}$$

$$+c_1M_0c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}\int\limits_1^{\infty}t^{-\beta_1}y^{-(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)-\beta_1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_{ty}(x))}\frac{dt}{t}$$

$$+M_1c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}y^{-(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}$$

$$\times\int\limits_1^{\infty}t^{-\beta_1}y^{-(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)-\beta_1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}||f||_{L_q(B_{ty}(x))}\frac{dt}{t}\Bigg)^{\tau}\frac{dy}{y}\Bigg)^{1/\tau}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского при $0<\tau\le\infty$ и учитывая, что $\theta(\beta_0-\beta_1)-\beta_0=-\beta,\ \ -(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)-\beta_1=-\beta$, будем иметь

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \leq$$

$$\leq 2^{(1/p-1)_+} M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} \int\limits_0^1 t^{-\beta_0} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(y^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_{ty}(x))} \right)^{\tau} \frac{dy}{y} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+2^{(1/p-1)_+} c_1 M_0 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)} \int\limits_1^{\infty} t^{-\beta_1} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(y^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_{ty}(x))} \right)^{\tau} \frac{dy}{y} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+2^{(1/p-1)_+} M_1 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)} \int\limits_1^{\infty} t^{-\beta_1} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(y^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_{ty}(x))} \right)^{\tau} \frac{dy}{y} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}.$$

Произведя снова замену переменной $ty = s$, получим

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \leq 2^{(1/p-1)}$$

$$+M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{-\theta(\beta_1-\beta_0)}} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(s^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_s(x))} \right)^{\tau} \frac{ds}{s} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+2^{(1/p-1)_+} c_1 M_0 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}$$

$$\times \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^{(1-\theta)(\beta_1-\beta_0)}} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(s^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_s(x))} \right)^{\tau} \frac{ds}{s} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}$$

$$+2^{(1/p-1)_+} M_1 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)} \times$$

$$\times \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^{(1-\theta)(\beta_1-\beta_0)}} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(s^{-\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||f||_{L_q(B_s(x))} \right)^{\tau} \frac{ds}{s} \right)^{1/\tau} \frac{dt}{t}.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \leq 2^{(1/p-1)_+} \Bigg(M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} ||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}} + \frac{\beta_1}{\beta_0} M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} ||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}} +$$

$$+M_1 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}} \leq$$

$$\leq c_2 \left(M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} + M_1 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}\right) ||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}},$$

где $c_2 = 2^{(1/p-1)_+}(1+\beta_1/\beta_0)$.

Рассмотрим функцию $\varphi(c) = M_0 c^{-\theta(\beta_0-\beta_1)} + M_1 c^{(1-\theta)(\beta_0-\beta_1)}$. Положим $c = \left(\frac{M_0\theta}{M_1(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{\beta_0-\beta_1}}$, тогда

$$\varphi = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \left(\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\theta} + \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1-\theta}\right) = c_3 M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

где $c_3 = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\theta} + \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{1-\theta}$. Таким образом,

$$||Tf||_{M^{\alpha}_{p,\tau}} \leq c_4 M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{M^{\beta}_{q,\tau}},$$

где c_4 зависит только от параметров p, β_0, β_1, θ. Теорема доказана полностью. □

Работа выполнена при частичной поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН Республики Казахстан, гранты 1834/ГФ МОН РК и 0744/ГФ МОН РК.

Литература

1 Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – V. 43. – P. 126-166.

2 Stampacchia G. $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-spaces and interpolation // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – V. 17. – P. 293-306.

3 Campanato A., Murthy M.K.V. Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1965. – V. 19. – P. 87-100.

4 Peetre J. On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces // J. Func. Anal. – 1969. – V. 4. – P. 71-87.

5 Ruiz A., Vega L. Corrigenda to "Unique continuation for Schrödinger operators" and a remark on interpolation on Morrey spaces // Publ. Mat., Barc. – 1995. – V. 39. – P. 405-411.

6 Blasco O., Ruiz A., Vega L. Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1999. – V. 28, № 1. – P. 31-40.

7 Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д. Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 46-56.

8 Burenkov V.I., Darbayeva D.K., Nursultanov E.D. Description of interpolation spaces for general local Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 4, № 1. – C. 46-53.

9 Буренков В.И., Гулиев В.С., Гулиев Г.В. Необходимые и достаточные условия ограниченности дробного максимального оператора в локальных пространствах типа Морри // Докл. РАН. Математика. – 2006. – Т. 409, вып. 4. – С. 443-447.

Статья поступила в редакцию 22.05.13

Чигамбаева Д.К. МОРРИ ТЕКТЕС ЖАЛПЫЛАНҒАН КЕҢІСТІКТЕР ҮШІН МАРЦИНКЕВИЧ ТИПТІ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ТЕОРЕМА

Бұл жұмыста классикалық Морри кеңістіктерін қамтитын Морри тектес кеңістіктердің $M^{\alpha}_{p,q}$ жаңа класы енгізіліп, олардың интерполяциялық қасиеттері қарастырылған. Марцинкевич типті интерполяциялық теорема дәлелденеді.

Chigambayeva D.K. MARCINKIEWICZ-TYPE INTERPOLATION THEOREM FOR GENERALIZED MORREY-TYPE SPACES

In this paper we introduce a new class of Morrey-type spaces $M^{\alpha}_{p,q}$ including the classical Morrey spaces and study their properties. Marcinkiewicz type interpolation theorem is proved.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

МУСАХАН МУРАТБЕКОВ
(к 60-летию со дня рождения)

В августе этого года исполнилось 60 лет замечательному казахстанскому математику, профессору Мусахану Байпакбаевичу Муратбекову.

Мусахан Муратбеков родился 25 августа 1953 года на станции Еспе Шуского района Жамбылской области. В 1971 году окончил с серебряной медалью среднюю школу № 308 города Шу и поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова (ныне КазНУ им. аль-Фараби).

После успешного завершения учебы в университете в 1976 году он был направлен по распределению на работу в Жезказганский педагогический институт. В этом институте он проработал до 1985 года, пройдя путь от рядового преподавателя до заведующего кафедрой математического анализа (1982 - 1985 гг.).

В 1979 году М. Муратбеков поступил в очную аспирантуру Института математики и механики академии наук КазССР. В 1982 году досрочно закончил аспирантуру с успешной защитой кандидатской диссертации на тему "О гладкости решений вырождающихся эллиптических и одномерных нелинейных уравнений Шредингера". Научным руководителем по диссертации был профессор Мухтарбай Отелбаев – ныне академик НАН РК.

В 1994 году на специализированном Совете Института математики АН РК Мусахан Муратбеков успешно защитил докторскую диссертацию "Теоремы разделимости и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов с нерегулярными коэффициентами". Научным руководителем по диссертации был член-корреспондент АН КазССР, профессор Тынысбек Кальменов – ныне академик НАН РК.

С 1985 года Мусахан Байпакбаевич работает в городе Тараз: в 1985-1996 годы заведующим кафедрой "Алгебра и геометрия" Жамбылского педагогического института, в 1996-2004 годы заведовал кафедрой "Теоретическая математика" Таразского государственного университета им. М.Х. Дулати.

В 2004-2005 годах Мусахан Байпакбаевич успешно работал заместителем директора Института математики при Евразийском национальном университете им. Л.Н. Гумилева в городе Астана, но, не выдержав климата, вернулся в родной Тараз.

С 2005 по 2010 годы профессор М. Муратбеков заведовал кафедрой "Математика и математическое моделирование" Таразского института Международного казахско-турецкого университета им. А. Яссави.

С 2010 года по настоящее время Мусахан Байпакбаевич работает заведующим кафедрой "Математика и методика преподавания математики" Таразского государственного педагогического института.

Профессор М.Б. Муратбеков внес заметный вклад в организацию и развитие науки и образования в Казахстане. В 2005-2007 годы он являлся членом экспертной комиссии по специальностям математика и информатика при Комитете контроля и аттестации МОН РК. С 2008 по 2010 годы – член специализированного докторского Совета при Евразийском национальном университете им. Л.Н. Гумилева.

Профессор М.Б. Муратбеков опубликовал более 140 оригинальных научных работ, из которых 20 работ переведены за рубежом на английский язык. В том числе 16 работ оубликованы в высокорейтинговых журналах с импакт-фактором ISI (The Thomson Reuters Impact Factor). Им также выпущены 3 научные монографии и 4 научно-методических пособия для аспирантов, магистрантов, молодых ученых и студентов старших курсов.

Профессор М.Б. Муратбеков в 2009 и 2013 годы по приглашению профессора H. Beger (Германия) прочитал цикл лекций по проблемам спектральной теории дифференциальных операторов смешанного типа в Freie Universitat Berlin.

Кратко остановимся на основных научных результатах профессора

М.Б. Муратбекова.

I. Спектральная теория дифференциальных операторов гиперболического и смешанного типов

В 1953 году советский математик А.М. Молчанов установил критерий дискретности спектра дифференциального оператора Штурма–Лиувилля в бесконечной области. Примерно с этого времени начался период исследований спектральных свойств дифференциальных операторов эллиптического типа в неограниченных областях. В настоящее время в этом направлении получены разные обобщения теоремы А.М.Молчанова в исследованиях многих ученых (Бирман М.Ш., 1961 г., Павлов Б.С., 1973 г., Мазья В.Г., 1973 г., Отелбаев М., 1973 г., и др.).

Однако многие годы аналогичные проблемы не исследовались для дифференциальных операторов гиперболического и смешанного типов. Впервые в конце 1980-х – начале 1990-х годов профессор М.Б. Муратбеков получил пионерские результаты в этом направлении. Он доказал теорему, в которой установлены необходимые и достаточные условия дискретности спектра дифференциальных операторов гиперболического и смешанного типов в бесконечной области.

С помощью этой методики ему удалось впервые решить следующие проблемы:

✓ найти асимптотики решений дифференциальных уравнений смешанного и гиперболического типов с сингулярными коэффициентами;

✓ установить принадлежность резольвенты дифференциальных операторов гиперболического и смешанного типов классу σ_p;

✓ доказать полноту системы корневых векторов вышеуказанных дифференциальных операторов.

II. Теория разделимости гиперболических и нелинейных дифференциальных операторов

Понятие "разделимость" было введено в 1970 году в совместных исследованиях известных английских ученых Эверитта и Гирца при доказательстве гладкости решений уравнения Штурма–Лиувилля. В семидесятые годы прошлого столетия молодой тогда Мухтарбай Отелбаев начал исследовать разделимость дифференциальных операторов эллиптического типа. Продолжая исследования своего учителя, профессор М.Б. Муратбеков одним из первых предложил новый метод исследования разделимости гиперболических и нелинейных дифференциальных операторов. Им существенно развит метод М. Отелбаева, позволяющий изучать разделимость более общих, многомерных операторов и операторов переменного типа, а также гладкость решения нелинейных уравнений. В этом направлении профессором М.Б. Муратбековым получены пионерские, глубокие фундаментальные результаты.

III. Аппроксимативные свойства нелинейных дифференциальных операторов

В теории линейных операторов для резольвент линейных и самосопряженных дифференциальных операторов имеют место следующие замечательные свойства:

а) n-ое собственное число указывает n-ое приближение резольвенты конечномерными операторами;

б) при $n \to \infty$ собственные числа резольвенты λ_n стремятся к 0;

в) с помощью этих собственных чисел можно построить n-мерный приближающий оператор.

В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли для нелинейных дифференциальных операторов найти числовую последовательность, обладающую вышеперечисленными свойствами? Ответ на этот вопрос профессором М.Б. Муратбековым дан в статье, опубликованной в 1991 году в журнале "Дифференциальные уравнения".

IV. Исследования в других областях

Профессор М. Б. Муратбеков проводит исследования и по другим направлениям. Следующие темы дают неполную их характеристику.

I. Свойства вырождающихся дифференциальных операторов эллиптического типа: разделимость в весовых пространствах; двухсторонние оценки собственных чисел для операторов с различными коэффициентами.

II. Установлены спектральные свойства линейных неклассических дифференциальных операторов; найдены аппроксимативные (числовые) свойства решений нелинейных неклассических дифференциальных уравнений.

Заканчивая обзор научного творчества М.Б. Муратбекова, в качестве его характерных черт можно выделить разносторонность его математических интересов, фундаментальность знаний, высокую работоспособность, научную продуктивность. Мусахан Байпакбаевич ведет большую работу по подготовке высококвалифицированных научно-педагогических кадров. Им подготовлены 18 кандидатов наук и один PhD доктор.

Сегодня с уверенностью можно утверждать, что в г. Таразе сложилась научная математическая школа профессора М.Б. Муратбекова. В городе в течение более 27 лет работает межвузовский городской математический семинар под его научным руководством. На семинаре наравне с учеными ведущих научных центров республики - городов Алматы, Астана, Шымкент, Актюбе и т.д. выступали и выступают с докладами представители научных школ Германии, России, Узбекистана, Беларуссии, Киргизии.

Мусахан Байпакбаевич является обладателем государственного гранта "Лучший преподаватель Вуза" (2007), награжден значками "Отличник просвещения РК" (2002) и "За заслуги в развитии науки Республики Казахстан" (2003). Он – лауреат в номинациях "Отличный педагог" акима города Тараз и "Наука" акима Жамбылской области (2012-2013).

В настоящее время профессор М. Б. Муратбеков является одним из тех ведущих ученых – математиков Казахстана, который, действительно, имеет свое научное направление исследований современных проблем математики и вносит достойный вклад в развитие казахстанской математической науки. Мусахан Байпакбаевич находится в расцвете творческих сил, ведет активную научную и научно-организационную деятельность на благо развития науки и математического образования Республики Казахстан.

Мы поздравляем замечательного математика — профессора Мусахана Байпакбаевича Муратбекова с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, долгих лет плодотворной творческой деятельности, счастья, больших успехов.

Редакционная коллегия "Математического журнала"

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".
2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми ад-

ресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 13, №2 (48), 2013

Подписано в печать 04.11.2013 г.
Тираж 300 экз. Объем 128 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: http://www.math.kz