ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2006 том 6 № 3 (21)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 3 (21) 2006

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 6, № 3 (21), 2006

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 5 — 13*

К 60-летию НАН РК

УДК 51

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В КАЗАХСТАНЕ. III

[*] Айдарханов М.Б., [*] Арсланов М.З., [†] Бижанова Г.И.,
[*] Бияшев Р.Г., [†] Дженалиев М.Т., [‡] Добрица В.П.,
[†] Женсыкбаев А.А., [†] Рахимбердиев М.И.

[†] Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[*] Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[‡] КазНПУ им.Абая МОН РК 050010 Алматы, пр.Достык, 13

Мы продолжаем публикацию обзорных статей о развитии математики и информатики в Казахстане, посвященных 60-летнему юбилею Национальной академии наук Республики Казахстан. Во третьей части представлен обзор по информатике.

6. ИНФОРМАТИКА

Организацией Объединенных Наций XXI век официально объявлен Веком информатизации. Сегодня без надлежащей системы информационного обеспечения не может быть прогресса в любой области экономики, в любой области социальной сферы, в том числе в сфере образования и науки.

Создание национальных информационных ресурсов и информационной инфраструктуры Республики Казахстан с последующей интеграцией в мировое информационное пространство для полноценного его использования в процессах социально-экономического развития республики — одна из важных задач информатики. Фундаментальные и прикладные проблемы в этой области связаны с разработкой новейших информационных технологий, созданием локальных и глобальных информационных систем и сетей. Задачи управления не ограничиваются управлением производственными процессами, а распространяются на управление информатизацией РК и экономическими процессами в стране в целом.

Спектр исследований в области информатики, информатизации и управления в мире необычайно широк. Разработкой проектов создания глобальной информационной инфраструктуры заняты комиссии Европейского сообщества и комиссии, созданные совещаниями глав правительств большой восьмерки. В Республике Казахстан традиционно разрабатывается лишь

Keywords: *Mathematics, Informatics*
2000 Mathematics Subject Classification: 00-02

ограниченный круг проблем в этих областях, определяемый кадровым составом, научными и производственными связями, а также финансовыми возможностями и потребностями страны.

Традиционные мировые лидеры по разработке средств информатизации и создания новых информационных технологий планируют в ближайшее время поднять производительность компьютеров не менее, чем на 3 порядка, создать память, емкость которой будет исчисляться уже терабайтами. В средствах массовой информации уже прошли сообщения о создании российско-белорусской супер-ЭВМ с производительностью 2,5 триллиона операций в секунду и о китайской супер-ЭВМ с производительностью 12,5 триллиона операций в секунду. Системное программное обеспечение обновляется регулярно, разработчики стремятся к созданию максимально дружественного интерфейса между компьютером и пользователем. Ведутся активные исследования по созданию новых скоростных и высоконадежных каналов связи.

Страны ближнего зарубежья разрабатывают концепции единых информационных пространств своих стран и определяют государственную политику их реализации, предусматривая возможность обязательного вхождения в мировое информационное пространство через посредство действующих и перспективных мировых информационных сетей. Продолжается разработка и создание информационно-вычислительных систем и сетей для информационного обслуживания государственных и негосударственных структур, функционирующих на территориях этих стран.

К основным тенденциям развития кибернетики в XXI веке можно отнести биологизацию и гибридизацию. К концу XX века было осознано, что информатизация общества средствами традиционной четкой математики невозможна. Препятствием к этому стали "проклятие большой размерности" и невозможность поставки для традиционных четких математических моделей соответствующих данных. Теоретически это означает, что существуют задачи, точное решение которых невозможно, какими бы средствами вычислительной техники мы ни располагали в обозримом будущем. Среди многих способов обойти эти препятствия наиболее известными являются теория нечетких множеств и искусственные нейронные сети. Эти направления позволили уже к настоящему времени создать системы управления в бытовых электроприборах, эффективные и доступные массовому потребителю. Следует ожидать дальнейшее наступление в прикладном аспекте данных направлений в медицине, в военном деле, транспорте, в сфере государственного управления, т.е. в тех сферах человеческой деятельности, для которых невозможно создать четкие математические модели, подобные моделям Солнечной системы. Следует отметить, что искусственные нейронные сети являются подразделом более широкого направления, называемого биокомпьютингом. Условно это понятие связано с идеей использования при моделировании сложных систем и процессов управления накопленных в природе механизмов эволюции. С этим связано широкое использование так называемых генетических алгоритмов.

Еще одним широко известным направлением теоретической информатики является теория сложности вычислений. Достаточно сказать, что среди семи математических задач, за решение которых дается приз в один миллион долларов США, есть задача о совпадении классов задач, решаемых за полиномиальное время и за недетерминированное полиномиальное время. В этом направлении прогнозируется решение этой задачи к 2015 году, однако проблематика теории сложности вычислений не ограничивается этой задачей.

Можно сказать, что указанные направления взаимно дополняют друг друга. Если одно из них очерчивает границы применимости точных вычислительных алгоритмов для решения разных классов задач, то два других направления для решения задач, для которых в принципе невозможно эффективное точное решение, предлагают подходы, модели и методы, позволяющие решать их практически.

В последние годы, особенно после начала активного функционирования глобальных сетей, почти все страны обратили внимание на необходимость обеспечения безопасности своих информационных ресурсов. Актуальность этой проблемы обусловлена, прежде всего, возросшим влиянием информации на многие стороны общественной жизни. В основе обеспечения информационной безопасности лежат национальные интересы Республики Казахстан. Кроме прямого ущерба от возможных утечек информации, информатизация может превратиться в средство подавления свободы человека, стать источником серьезной угрозы государственной и духовной жизни личности. В этой связи вопрос создания новых информационных технологий, ориентированных на обеспечение информационной безопасности систем различного назначения, становится одной из приоритетных задач. Известно, что в нашей стране доминируют зарубежные аппаратно-программные средства, прозрачные для разработчиков этих средств. Необходимы создание отечественной системы обеспечения информационной безопасности, разработка методов, моделей и алгоритмов защиты информации для различных уровней секретности (конфиденциальности) с последующей их аппаратно-программной реализацией. В программе Президента РК (Казахстан — 2030) также одним из главных приоритетов объявлена безопасность государства, в том числе информационная безопасность.

Информационная безопасность определяется как защищенность информации и поддерживающей инфраструктуры от случайных или преднамеренных воздействий естественного или искусственного характера, чреватых нанесением ущерба владельцам или пользователям информации и поддерживающей инфраструктуры.

США, например, считают информационную безопасность стратегическим направлением политики государства и ежегодно планируют на ее обеспечение средства, соизмеримые с затратами на оборону.

Состояние научно-технического потенциала в плане обеспечения информационной безопасности Республики Казахстан, сложившееся в результате технологического отставания, тревожно. В плане стандартного комплекса основных задач обеспечения информационной безопасности можно констатировать следующее.

1. Разработка государственной политики информационной безопасности.

В Российской Федерации в 2000 году Президентом РФ утверждена Доктрина информационной безопасности РФ, которая достаточно ясно определяет государственную политику в области обеспечения информационной безопасности РФ. В Республике Казахстан создание такой Доктрины еще только предстоит.

2. Разработка государственной программы информационной безопасности и механизмов ее реализации.

В Казахстане нет государственной программы и нет целевых программ для системного обеспечения информационной безопасности. Отдельные работы ведутся в Министерстве индустрии и торговли РК, в отдельных организациях, банках и коммерческих структурах, которые направлены на решение частных задач, не связанных общей идеологией, политикой информационной безопасности государства.

3. Разработка законодательной и нормативной базы информационной безопасности.

Страны, давно вступившие в информационную эру, уже имеют развитую систему защиты и ее законодательно-правовую основу. США имеют более 500 законодательных актов, Россия — более 50, достаточно полно регулирующих отношения в информационной сфере. В Республике Казахстан приняты законы: "О защите государственных секретов", "Об информатизации", "Об электронном документе и электронной цифровой подписи", которых крайне недостаточно и которые не работают из-за отсутствия необходимых подзаконных актов.

В Республике Казахстан практически нет нормативной и методической базы ни по средствам информатизации, ни по средствам защиты информации.

4. Сертификация и государственное лицензирование в области защиты информации.

Отсутствие нормативно-методической базы и государственного запрета на распространение и использование несертифицированной продукции в информационной сфере создали условия для бесконтрольного ввоза и распространения в стране низкокачественных и не всегда безопасных средств информатизации, нелицензионных программных средств и средств защиты. Следует напомнить, что в Советском Союзе существовал запрет применения вычислительной техники импортного производства для обработки закрытой информации, связанной с возможными аппаратными и программными закладками. Отсутствие отечественных средств информатизации, их сертификации, прогресс в микроэлектронике и реализации информационных атак способствуют использованию низкокачественной техники и открывают для противника широкие возможности по созданию каналов утечки информации.

Широкое применение импортных средств защиты информации, прозрачных для их разработчиков и изготовителей, малоэффективны для пользователей.

Большинство стран мира давно проводят сертификацию в информационной сфере технических и программных средств, баз данных, средств защиты. В основе методик проверки — стандарты серии ИСО-9000. Активно ведутся исследования по аттестации систем и сетей в соответствии со стандартом "Общие критерии". Обязательная сертификация служит гарантом безопасности приобретаемых средств информатизации, добровольная — обеспечивает уверенность в функциональной состоятельности средств и в отсутствии незаявленных функций (аппаратных и программных закладок). Сертификация в сфере информатизации необходима в соответствии с законами РК "О сертификации" и "О стандартизации", а также в свете реализации нескольких Программ действия Правительства конца прошлого десятилетия.

5. Координация деятельности.

Развитые страны давно имеют активно функционирующие органы госуправления, осуществляющие полный комплекс мероприятий по защите информации, включая планирование финансовой поддержки, сервисные услуги, аудит и юридическое обслуживание. В России, например, есть Гостехкомиссия при Президенте РФ, специальные структуры ФСБ, МИДа, Минобороны, Минатома, Минсвязи и др. Координацию их деятельности осуществляет Межведомственная комиссия Совета безопасности РФ. В Республике Казахстан на настоящий момент имеется Отдел защиты государственных секретов канцелярии Премьер-Министра, функции и возможности которого далеки от насущных целей.

6. Подготовка кадров.

Профессионально подготовленных кадров для использования их в области обеспечения информационной безопасности в Казахстане практически нет. Необходимо разработать в республике систему подготовки специалистов в области защиты государственных секретов и кадров высшей квалификации. В России, например, аналогичный вопрос рассматривался в 1997 году на заседании Межведомственной комиссии по защите государственной тайны, и было принято соответствующее решение.

Проблемам подъема экономики в государственной политике Республики Казахстан уделяется большое внимание. Эффективность решения этих проблем существенно зависит от создания в республике единого информационного пространства и ее вхождения в мировое информационное сообщество. В Казахстане есть концепция создания такого пространства, есть утвержденная Государственная программа формирования "электронного правительства" в республике на 2005–2007 годы, многие организации республики подключены к Internet и имеют возможность пользоваться информационными ресурсами других государств и различных организаций нашей страны.

В Казахстане продолжаются создание информационно-вычислительных систем и сетей различного назначения (коммерческие, банковские и пр.), разработка прикладного программного обеспечения, создаются современные средства телекоммуникаций. Не остается в стороне фундаментальная и прикладная наука — многочисленные автоматизированные системы успешно работают на предприятиях, в организациях и учреждениях, где компьютеры стали уже настолько привычным инструментом в производстве и управлении, что теперь уже трудно представить работу без них.

Исследования в области информатики и информационных технологий в Казахстане после обретения суверенитета проводились по следующим программам:

1. междисциплинарная программа "Информатика", 1991–1992 г.г.;

2. "Информатика, управление и вычислительная техника", 1993–1996 г.г.;

3. "Теоретические проблемы информатики, управления и создания информационных систем", 1997–1999 г.г.;

4. "Исследовать математические модели, методы и средства информационных технологий построения информационных систем управления", 2000–2002 г.г;

5. "Разработка фундаментальных основ принятия решений, языков спецификаций, биокомпьютерного моделирования, управления сложными объектами для создания безопасных и эффективных информационных систем", 2003–2005 г.г.;

6. "Фундаментальные вопросы физики, математики, механики и информатики", подпрограмма "Разработка и исследование моделей, методов и алгоритмов создания защищенных и интеллектуальных информационных технологий", 2006–2008 г.г.

Головной организацией по названным программам является Институт проблем информатики и управления (ИПИУ) МОН РК, соисполнителями отдельных тем — КазНУ им.аль-Фараби, КазНТУ им.К.А.Сатпаева, КазНПУ им.Абая, Актюбинский гос.университет им.К.Жубанова.

Основными направлениями научной деятельности ИПИУ являются:

— разработка методов, алгоритмов и инструментальных средств защиты информационных ресурсов и средств информатизации, представляющих неотъемлемую часть создания отечественной системы обеспечения информационной безопасности, способствующих определению номенклатуры нормативных документов и установлению требований к защищенности информации;

— использование теоретико-модельных методов при исследовании логических аспектов языков спецификаций и реляционных баз данных;

— исследование математических моделей и методов для задач принятия решений: распознавание, классификация, анализ, обработка и передача данных, комбинаторная оптимизация, развитие теории прямоугольного раскроя;

— развитие интервальных методов теории управления, разработка искусственной иммунной системы для приложений к природно-экономическим процессам;

— разработка моделей, методов и создание информационных систем имитационного моделирования и анализа механизмов открытой, неравновесно развивающейся экономической системы.

Активность исследований логических проблем в информатике обусловлена тем, что лавинообразный рост числа задач, решаемых с помощью компьютерных систем, породил потребность в использовании разнообразных логических исчислений для спецификации (описания) и доказательства с помощью этих логических исчислений правильности решения этих задач. Исследование подобных логических исчислений, используемых для спецификаций информационных систем, проводится на полноту, непротиворечивость и другие свойства, которым должно удовлетворять любое практически используемое исчисление.

Методы распознавания и классификации широко используются во многих областях практической и научно-исследовательской деятельности человека: при обработке экспериментальных данных и решении прикладных задач в слабо формализованных областях естествознания. Согласованная оптимизация — также актуальное направление в общей системе наук о принятии решений, что подтверждается установлением взаимосвязей с такими разделами математической кибернетики как многокритериальная оптимизация, теория бинарных отношений, теория целочисленного программирования. NP-трудные проблемы прямоугольного раскроя до сих пор рассматривались лишь с точки зрения построения эвристических методов исследования. Точные методы были экспоненциальными. Лишь в последнем десятилетии получены первые полиномиальные алгоритмы для частных задач. До сих пор, например, неизвестно существование полиномиального алгоритма для задачи упаковки равных прямоугольников в большой прямоугольник. В этой связи разработка полиномиальных алгоритмов актуальна для комбинаторной оптимизации.

В настоящее время экономическое научное мировоззрение в своем развитии испытывает определенные сложности, связанные с невозможностью учета взаимодействия многочисленных социально-экономических процессов и элементов, с ограниченностью описательной или эмпирической науки, эконометрии и оптимального планирования, которые недостаточно полно учитывают системный, динамичный и нелинейный характер развития экономических процессов. Поэтому актуальным является разработка и исследование моделей и методов анализа динамических свойств рыночных механизмов нелинейных открытых экономических систем.

В современной теории управления общепризнанно, что реальные системы управления функционируют в условиях той или иной степени неопределенности. Вследствие этого проблема робастной устойчивости является одной из наиболее актуальных проблем и представляет большой практический интерес. В настоящее время отсутствуют научные положения по увеличению потенциала устойчивости систем автоматического управления. Вышеуказанное и определяет цель предполагаемых исследований — построение и изучение моделей и методов анализа и синтеза предельно робастных устойчивых систем автоматического управления.

В соответствии с постановлением Правительства Республики Казахстан от 2 апреля 2001г. № 433 была утверждена программа проведения научных исследований и технических разработок в области защиты информации на 2001–2003 годы, администраторами которой в силу специфики задач определены: Министерство энергетики и минеральных ресурсов РК для проведения опытно-конструкторских работ по разработке аппаратных и программных средств защиты информации и Министерство образования и науки РК для создания нормативно-методической базы по защите информации и проведения научно-исследовательских работ в области защиты информации. Головной организацией по разработке нормативно-методической базы был назначен Институт проблем информатики и управления МОН РК. Организациями-соисполнителями стали РГП "Казспецпредприятие" КНБ РК, ЗАО СКТБ "Гранит", ЗАО "ИВТ-Холдинг", КазГУ (компьютерный центр), ЗАО "Системотехника", ЗАО "ИВТ-Астана". В 2003 году Программа была передана в МЭМР, затем по обеим ее частям администратором было определено Министерство индустрии и торговли РК. Из-за существенного недофинансирования она была выполнена не в полном объеме, поэтому предполагается продолжение работы по этой программе.

Многие результаты теоретических исследований, выполненных в Институте проблем информатики и управления, нашли свое практическое применение и вносят существенный вклад в дело формирования и развития национальной информационной инфраструктуры Республики Казахстан и вхождения республики в мировое информационное сообщество. Результаты НИР ИПИУ получили заслуженное признание не только в республике, но и за ее пределами, о чем свидетельствуют публикации за рубежом и выигранные сотрудниками гранты по линии INTAS, МНТЦ, CRDF (Американский фонд гражданских исследований и разработок), INCO-Copernicus "STEPICA", UNESCO.

За последние 15 лет Институтом проблем информатики и управления были внедрены следующие информационные технологии и программные продукты:

— республиканская информационно-вычислительная система "Приватизация" (1993 — 1994 г.г.);

— автоматизированная система обслуживания пациентов для городской больницы "Калкаман" (1995г.);

— проблемно-ориентированная информационно-вычислительная система "ВАК РК" (1999г.);

— программный комплекс по реализации криптографической защиты информации и формированию электронной подписи при тестировании абитуриентов для Национального центра стандартизации образования и тестирования (1999г.);

— система по распознаванию образов и их классификации при обработке результатов космической съемки для уточнения современного русла реки Сыр-Дарья и границ подводных геологических объектов и береговой линии Каспийского моря (1999г.);

— аналитический метод вычисления основных характеристик и параметров качества обслуживания подсети коммутации каналов с обходными направлениями передачи нагрузок, реализованный в одном из фрагментов цифровой сети с интеграцией служб для ЗАО "Центр межбанковских и финансовых телекоммуникаций" (2000г.);

— интеллектуальная система охраны сложных объектов и периметра на базе разработанного формализма искусственных иммунных систем, которая интегрирована в АИУС охраны в РГП "Казахстан темир жолы" и в РГП "Кузет" (2001г.);

— 2 версии программной системы защиты информации в среде INTERNET в ТОО "СП Arna-Sprint Data Communications" (2001г.);

— пакет прикладных программ CAIMM2002, реализованный в среде Visual C++ Version 6.0 and Borland Delphi Version 6.0, используется при моделировании эпизоотических процессов для выполнения проекта по гранту INCO-Copernicus "STEPICA" (2002г.);

— теоретические результаты и практические рекомендации научных исследований в области распознавания образов и классификаций внедрены в производственно-технологический цикл проекта "Корпоративная система Космического экологического мониторинга АО НК "Казмунайгаз" (2006г.).

Информатизация системы образования рассматривается как стратегически важное направление Государственной программы развития системы образования в Республике Казахстан до 2010 года.

В области управления системой образования внедрена первая очередь информационной системы (ИС) МОН РК, охватывающая только организации среднего образования. На уровне высшего образования созданы отдельные локальные системы управления учебным процессом, не имеющие согласованного интерфейса с ИС.

Реальным шагом для вхождения нашей республики в единое образовательное пространство явилась реализация на территории стран Центральной Азии и Закавказья проекта "Виртуальный шелковый путь". В Казахстане при поддержке данного проекта создана научно-образовательная компьютерная сеть "КАЗРЕНА", в рамках которой организациям образования и науки предоставляются услуги наземной спутниковой станции и доступ к Интернету.

В г.Астане на базе НЦГСОТ МОН РК создан Центральный телекоммуникационный узел, к которому подключены узел центрального аппарата МОН РК и узлы департаментов образования областей.

Информатизация образования настоятельно требует создания новых средств обучения. В первую очередь к ним следует отнести электронные издания: электронные учебники, мультимедийные учебники и электронные издания на других носителях (аудио-видео кассеты).

Важнейшим элементом формирования системы открытого образования являются технологии дистанционного обучения. В республике совместно с ИИТО ЮНЕСКО (г.Москва) реализован проект Дистанционного обучения по макрополитике воспитания и обучения детей дошкольного возраста. Трансляция учебной информации осуществляется два часа в день. В республике на базе отдельных вузов разработаны экспериментальные программы дистанционного обучения.

Информатизация образования, основанная на современных информационных и коммуникационных технологиях, приведет к существенной перестройке всей системы образования, появлению новых перспективных направлений развития образования, эффективных средств и технологий обучения, что будет иметь важное значение при решении социальных проблем и развития общества. В ближайшее время планируется открыть при ИПИУ совместно с Институтом программных технологий (ИПТ) Университета ООН (Макао) Научно-учебный Центр (филиал ИПТ) по формальным методам разработки программного обеспечения и нейронным сетям на базе компьютерных классов, оснащенных за счет ЮНЕСКО в 1998–2000 годы и ряда структурных подразделений института.

Предполагается чтение следующих лекционных курсов:

— нейронные Сети и Алгоритмическое Моделирование;

— язык спецификаций RAISE (Rigorous Approach to Industrial Software Engineer-ing — Строгий подход к разработке индустриального программного обеспечения);

— введение в Символическую Логику;

— общая теория языков спецификаций;

— базы данных и системы управления базами данных;

— формальные методы при разработке программного обеспечения, использующего VDM и средства VDM;

— управление проектированием программного обеспечения.

Цель создаваемого Центра заключается в создании кадровой инфраструктуры в области программного обеспечения в регионе Центральной Азии и предпосылок для развития рынка информационных технологий в этом регионе. Предполагается поднятие в регионе Центральной Азии общего уровня разработчиков нестандартного программного обеспечения, базирующегося на формальных методах и нейроинформатике, содействие в разработке информационных технологий и программных продуктов. В условиях постоянно обновляющегося программного обеспечения задачей Центра является преподавание актуальных на данный момент курсов в этой области с привлечением к чтению лекций и проведению выездных школ высококвалифицированных специалистов, в том числе из дальнего зарубежья.

В целях обеспечения доступа ученых к современным вычислительным мощностям в Институте математики ведутся работы по созданию центрального высокопроизводительного компьютера с единым электронным архивом научных разработок и программных средств. Персональные компьютеры в силу специфики своей архитектуры не справляются с растущими объемами расчетно-вычислительных и графических задач. Любое увеличение затрат на наращивание компьютерных мощностей непосредственно на рабочих местах ученых уже не дает адекватного увеличения производительности. Как следствие, обозначается технологический предел решаемых задач. Именно поэтому ведущие мировые исследовательские центры все больше внимания уделяют централизации вычислительных ресурсов, электронных хранилищ данных и средств доступа к ним.

Специалистами института разработана и апробирована методика создания мощных многопроцессорных систем (свыше 100 процессоров), основанных на принципе кластеризации многопотоковых задач и процессов.

Одной из приоритетных задач Государственной программы "Развитие космической деятельности в Республике Казахстан на 2005–2007 годы" является развитие информационных космических технологий на основе спутниковых телекоммуникационных систем. В результате реализации Государственной программы будет создана современная корпоративная информационная инфраструктура, конфиденциальность и целостность которой требуют анализа технологий хранения и каналов передачи данных, используемых в современных информационных космических технологиях, с позиции обеспечения безопасности. В Институте проблем информатики и управления в 2005–2006 годах были проведены научно-исследовательские работы в рамках проекта "Разработка технологических основ создания и применения спутниковых информационно-телекоммуникационных систем и обеспечения их безопасности". Были исследованы и проанализированы технологии хранения и каналы передачи данных, используемые в информационных космических технологиях, что позволило определить основные компоненты инфраструктуры информационных космических технологий, в которых необходимо обеспечить криптографическую защиту информации. Проведен анализ протоколов безопасности и методов криптографической защиты, используемых в информационных космических технологиях. Сформированы требования по спецификации объектов защиты и каналов утечки информации, подлежащих специфической криптографической защите.

Результаты фундаментальных исследований, проводимых в Казахстане, вносят существенный вклад в мировую науку, находят эффективное применение в практических приложениях. Научные результаты исследований получили заслуженное признание не только в республике, но и за рубежом, о чем свидетельствуют публикации в престижных зарубежных и российских журналах таких, как "European Journal of Operational Research", "The Journal of Symbolic Logic", "Pattern Recognition and Image Analysis", "Pattern Recognition Letters", "The Bulletin of Symbolic Logic", "Fuzzy Sets", "Neurocomputing", "Журнал вычислительной математики и математической физики", "Автоматика и телемеханика", "Кибернетика и системный анализ" и др., персональные приглашения на международные конференции и выигранные сотрудниками международные гранты по линии INTAS, UNESCO, МНТЦ, CRDF, INCO-Copernicus "STEPICA".

Мы рассказали об основных научных направлениях информатики, которые развиваются в республике, об основных научных результатах казахстанских ученых в этой области науки.

Поступила в редакцию 12.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 14 – 17*

УДК 004.056.55

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕРАВНОВЕРОЯТНОСТИ ГЕНЕРАТОРА КЛЮЧЕЙ ПРИ ВСКРЫТИИ ШИФРОВ МЕТОДОМ ТОТАЛЬНОГО ОПРОБОВАНИЯ

Абдрахманов А.Е., Байбатчаева Д.А.

ННТЦ Республики Казахстан

В данной статье приводится один из вариантов применения метода тотального опробования к вскрытию шифрсистемы, использующей неравновероятный генератор ключей, и рассматривается его вычислительная сложность. Полученные результаты предлагается учесть в новой редакции Государственного стандарта Республики Казахстан СТ РК 1073-2002 "Средства криптографической защиты информации. Общие технические требования".

Метод тотального опробования (перебора) ключей шифрования является универсальным методом вскрытия несовершенных шифров при наличии пар "открытый — шифрованный текст". Самым существенным ограничением использования данного метода является его экспоненциальная вычислительная сложность, составляющая $O(2^n)$, где n - длина ключа шифрования в битах [1, 2]. Однако в случае неравновероятности генератора ключей предлагается рассмотреть возможность понижения вычислительной сложности этого метода за счет опробования, в первую очередь, наиболее вероятных ключей.

Пусть множество ключей K состоит из всех двоичных последовательностей длины n и генератор ключей вырабатывает такие ключевые двоичные последовательности, что значение каждого бита ключа не зависит от ранее выработанных битов, вероятность принятия битом единичного значения составляет $0,5+d$, вероятность принятия нулевого значения составляет $0,5-d$, где $d \in (-0,5; 0,5)$. Без ограничения общности можно считать, что $d \in [0; 0,5)$, то есть генератор ключей – равновероятный или имеет место преобладание единичных значений.

В указанных условиях для произвольно выбранной пары "открытый – шифрованный текст" вероятность предварительной генерации и соответственно последующего использования ключа $k \in K$ для получения шифрованного текста составляет

$$P(k) = (0,5+d)^{w(k)}(0,5-d)^{n-w(k)}, \tag{1}$$

Keywords: *Key generator, exhaustive search, computational complexity.*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

где $w(k)$ - вес Хэмминга ключа k, то есть количество единиц в двоичной последовательности k.

Для практической оценки влияния параметра d на вероятности ключей рассмотрим максимум отношения вероятности генерации ключа генератором с $d > 0$ к вероятности генерации этого же ключа равновероятным генератором. Очевидно, что в соответствии с формулой (1) при $d > 0$ наиболее вероятным ключом будет являться ключ $k_1 = (11\dots1)$, для которого $P(k_1) = (0,5 + d)^n$. При $d = 0$, то есть в случае равновероятного генератора $\forall k' \in K\ P_0(k') = 1/2^n$. Следовательно, максимум будет достигаться на k_1 и составит

$$P(k_1)/P_0(k_1) = (0,5 + d)^n/0,5^n = (1 + 2d)^n. \tag{2}$$

Для ряда характерных значений n и d величина отношения (2) приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Максимум отношения вероятностей генерации ключа при $d > 0$ и $d = 0$

Откло-нение, d	**Максимум отношения вероятностей генерации ключа для различных n и d, $P(k_1)/P_0(k_1)$**											
	$n =$ **50**	**56**	**64**	**100**	**112**	**128**	**150**	**168**	**192**	**200**	**250**	**256**
0,4000	$5,8 \cdot 10^{12}$	$2,0 \cdot 10^{14}$	$2,2 \cdot 10^{16}$	$3,4 \cdot 10^{25}$	$3,9 \cdot 10^{28}$	$4,7 \cdot 10^{32}$	$2,0 \cdot 10^{38}$	$7,7 \cdot 10^{42}$	$1,0 \cdot 10^{49}$	$1,1 \cdot 10^{51}$	$6,6 \cdot 10^{63}$	$2,2 \cdot 10^{65}$
0,3000	$1,6 \cdot 10^{10}$	$2,7 \cdot 10^{11}$	$1,2 \cdot 10^{13}$	$2,6 \cdot 10^{20}$	$7,3 \cdot 10^{22}$	$1,3 \cdot 10^{26}$	$4,1 \cdot 10^{30}$	$2,0 \cdot 10^{34}$	$1,6 \cdot 10^{39}$	$6,7 \cdot 10^{40}$	$1,1 \cdot 10^{51}$	$1,8 \cdot 10^{52}$
0,2000	$2,0 \cdot 10^{7}$	$1,5 \cdot 10^{8}$	$2,3 \cdot 10^{9}$	$4,1 \cdot 10^{14}$	$2,3 \cdot 10^{16}$	$5,1 \cdot 10^{18}$	$8,3 \cdot 10^{21}$	$3,5 \cdot 10^{24}$	$1,1 \cdot 10^{28}$	$1,7 \cdot 10^{29}$	$3,4 \cdot 10^{36}$	$2,6 \cdot 10^{37}$
0,1000	9100,4	$2,7 \cdot 10^{4}$	$1,2 \cdot 10^{5}$	$8,3 \cdot 10^{7}$	$7,4 \cdot 10^{8}$	$1,4 \cdot 10^{10}$	$7,5 \cdot 10^{11}$	$2,0 \cdot 10^{13}$	$1,6 \cdot 10^{15}$	$6,9 \cdot 10^{15}$	$6,2 \cdot 10^{19}$	$1,9 \cdot 10^{20}$
0,0500	117,39	207,97	445,79	$1,4 \cdot 10^{4}$	$4,3 \cdot 10^{4}$	$2,0 \cdot 10^{5}$	$1,6 \cdot 10^{6}$	$9,0 \cdot 10^{6}$	$8,9 \cdot 10^{7}$	$1,9 \cdot 10^{8}$	$2,2 \cdot 10^{10}$	$3,9 \cdot 10^{10}$
0,0300	18,420	26,129	41,646	339,30	682,74	1734,4	6250,0	$1,8 \cdot 10^{4}$	$7,2 \cdot 10^{4}$	$1,2 \cdot 10^{5}$	$2,1 \cdot 10^{6}$	$3,0 \cdot 10^{6}$
0,0200	7,1067	8,9922	12,306	50,505	80,860	151,45	358,92	727,11	1863,8	2550,7	$1,8 \cdot 10^{4}$	$2,3 \cdot 10^{4}$
0,0100	2,6916	3,0312	3,5515	7,2446	9,1880	12,613	19,500	27,850	44,795	52,485	141,27	159,09
0,0050	1,6446	1,7458	1,8905	2,7048	3,0479	3,5738	4,4484	5,3210	6,7562	7,3160	12,032	12,772
0,0030	1,3486	1,3979	1,4665	1,8189	1,9542	2,1505	2,4530	2,7319	3,1536	3,3082	4,4616	4,6247
0,0020	1,2209	1,2505	1,2911	1,4906	1,5638	1,6669	1,8199	1,9555	2,1522	2,2220	2,7129	2,7786
0,0010	1,1051	1,1184	1,1364	1,2212	1,2508	1,2914	1,3495	1,3989	1,4676	1,4912	1,6479	1,6678
0,0005	1,0512	1,0576	1,0661	1,1051	1,1185	1,1365	1,1617	1,1828	1,2116	1,2213	1,2839	1,2916
0,0003	1,0304	1,0342	1,0391	1,0618	1,0695	1,0798	1,0941	1,1060	1,1221	1,1275	1,1618	1,1660
0,0002	1,0202	1,0226	1,0259	1,0408	1,0458	1,0525	1,0618	1,0695	1,0798	1,0833	1,1051	1,1078
0,0001	1,0100	1,0113	1,0129	1,0202	1,0227	1,0259	1,0305	1,0342	1,0391	1,0408	1,0513	1,0525

Для всех ключей длины $n \in [50, 256]$ при $d \leq 0,001$ значение отношения (2) не превосходит 2, то есть опробование самих вероятных ключей не даст увеличения вероятности успеха такого опробования даже в 2 раза. Следовательно, для существенного (в 2 раза и более) снижения вычислительной сложности методов тотального или частичного опробования ключей за счет опробования, в первую очередь, наиболее вероятных ключей необходимо, чтобы $d > 0,001$.

Рассмотрим, насколько это условие является достаточным.

Пусть ξ - случайная величина, обозначающая количество опробованных ключей до достижения успеха, то есть областью значений ξ будет являться множество $\{1, 2, \dots, 2^n\}$.

В случае равновероятного генератора ключей при любой последовательности опробования ключей, равно как и в случае рассматриваемого неравновероятного генератора при случайной последовательности опробования ключей, вычислительная сложность метода тотального опробования ключей, определяемая как матожидание случайной величины ξ, составит

$$E\xi = \sum_{i=1}^{2^n} i \cdot P(\xi = i) = \sum_{i=1}^{2^n} i \cdot P(k_i) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} i = \frac{1}{2^n} \frac{2^n(2^n + 1)}{2} = 2^{n-1} + 0,5. \tag{3}$$

В случае генератора ключей с $d > 0$ упорядочим опробование ключей в порядке убывания их вероятностей, то есть в порядке убывания количества единичных битов ключей и соответственно возрастания количества нулевых битов:

$w(k_i) = n$: $k_1 = (11\dots1)$;

$w(k_i) = n - 1$: $k_2 = (11\dots10), k_3 = (11\dots101), k_4 = (11\dots1011), \dots, k_{n+1} = (01\dots1)$;

$\dots\ \dots$

$w(k_i) = 0$: $k_{2^n} = (00\dots0)$.

Для такого порядка опробования ключей получаем следующее матожидание случайной величины ξ:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{2^n} i \cdot P(\xi = i) = \sum_{i=1}^{2^n} i(0,5+d)^{w(k_i)}(0,5-d)^{n-w(k_i)}. \tag{4}$$

Группируя слагаемые в формуле (4) по количеству нулевых битов z в ключах и сохраняя общий порядок суммирования по убыванию вероятности ключей, получаем

$$E\xi = \sum_{z=0}^{n} \sum_{i:\, w(k_i)=n-z} i \cdot (0,5+d)^{n-z}(0,5-d)^{z} =$$

$$= \sum_{z=0}^{n} \left((0,5+d)^{n-z}(0,5-d)^{z} \cdot \left(\sum_{i:\, w(k_i)=n-z} i \right) \right). \tag{5}$$

Вычислим значение суммы $S(z) = \sum\limits_{i:\, w(k_i)=n-z} i$ из формулы (5) для различных z, то есть просуммируем индексы ключей для фиксированных значений $w(k_i)$:

$w(k_i) = n\colon S(0) = C_n^0 = 1$;

$w(k_i) = n-1\colon S(1) = (C_n^0+1) + (C_n^0+2) + \ldots. + (C_n^0 + C_n^1) = C_n^0 C_n^1 + C_n^1(C_n^1+1)/2 = n + n(n+1)/2 = n(n+3)/2$;

$w(k_i) = n-2\colon S(2) = (C_n^0 + C_n^1 + 1) + (C_n^0 + C_n^1 + 2) + \ldots + (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) = (C_n^0 + C_n^1)C_n^2 + C_n^2(C_n^2+1)/2 = C_n^2(C_n^0 + C_n^1 + (C_n^2+1)/2)$;

$\ldots$

$w(k_i) = n-z\colon S(z) = (C_n^0 + C_n^1 + : + C_n^z - 1 + 1) + (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{z-1} + 2) + \ldots + (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{z-1} + C_n^z) = (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^z - 1)C_n^z + C_n^z(C_n^z+1)/2 = C_n^z(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^z - 1 + (C_n^z+1)/2)$;

$\ldots$

$w(k_i) = 0\colon S(n) = (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + 1) = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Подставляя вычисленные значения суммы $S(z)$ в формулу (5), получаем

$$E\xi = \sum_{z=0}^{n} \left((0,5+d)^{n-z}(0,5-d)^{z} C_n^z \left(\sum_{j=0}^{z-1} C_n^j + (C_n^z+1)/2 \right) \right). \tag{6}$$

Для ряда характерных значений n и d сложность модифицированного метода тотального опробования ключей, то есть значения матожидания Eξ в логарифмической шкале, вычисленные по формуле (6), приведены в таблице 2.

Таблица 2 - Сложность модифицированного метода тотального опробования ключей

Откло-нение, d	**Сложность метода для различных n и d, $log_2 E\xi$**											
	$n=$ **50**	**56**	**64**	**100**	**112**	**128**	**150**	**168**	**192**	**200**	**250**	**256**
0,4000	30,41	34,40	39,74	63,84	71,90	82,65	97,46	109,58	125,76	131,16	164,91	168,96
0,3000	39,31	44,33	51,03	81,26	91,36	104,84	123,39	138,57	158,83	165,59	207,84	212,91
0,2000	44,34	49,90	57,34	90,86	102,05	116,98	137,53	154,35	176,79	184,27	231,04	236,66
0,1000	47,33	53,20	61,03	96,31	108,08	123,78	145,38	163,06	186,63	194,49	243,64	249,54
0,0500	48,30	54,26	62,19	97,94	109,86	125,76	147,63	165,52	189,39	197,34	247,07	253,04
0,0300	48,61	54,59	62,56	98,43	110,39	126,34	148,27	166,22	190,15	198,13	248,01	253,99
0,0200	48,75	54,74	62,72	98,64	110,61	126,58	148,54	166,51	190,48	198,46	248,39	254,38
0,0100	48,88	54,87	62,86	98,83	110,82	126,80	148,79	166,77	190,76	198,75	248,72	254,72
0,0050	48,94	54,94	62,93	98,92	110,91	126,91	148,90	166,84	190,88	198,88	248,87	254,86
0,0030	48,97	54,96	62,96	98,95	110,95	126,94	148,94	166,94	190,93	198,93	248,92	254,92
0,0020	48,98	54,98	62,97	98,97	110,97	126,96	148,96	166,96	190,95	198,95	248,95	254,95
0,0010	48,99	54,99	62,99	98,98	110,98	126,98	148,98	166,98	190,98	198,98	248,97	254,97
0,0005	48,99	54,99	62,99	98,99	110,99	126,99	148,99	166,99	190,99	198,99	248,99	254,99
0,0003	49,00	55,00	63,00	99,00	110,99	126,99	148,99	166,99	190,99	198,99	248,99	254,99
0,0002	49,00	55,00	63,00	99,00	111,00	127,00	149,00	167,00	191,00	199,00	248,99	254,99
0,0001	49,00	55,00	63,00	99,00	111,00	127,00	149,00	167,00	191,00	199,00	249,00	255,00

Таким образом, из формул (3) и (6) следует, что для всех рассматриваемых длин ключей n вычислительная сложность модифицированного метода тотального опробования ключей существенно (в 2 раза и более) ниже вычислительной сложности классического метода при $d \geq 0,1$; при $d \leq 0,01$ вычислительная сложность этих методов отличается менее, чем на 9-22%; а при $d \leq 0,001$ эти методы по сложности практически не отличаются друг от друга.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что Государственным стандартом Республики Казахстан СТ РК 1073-2002 "Средства криптографической защиты информации. Общие технические требования"[3, 4] на d наложены ограничения, с запасом гарантирующие невозможность эффективного применения рассмотренного модифицированного метода. Так, для 1 уровня безопасности (вычислительная сложность алгоритма вскрытия не менее 2^{48}, длина ключа симметричного алгоритма не менее 56 бит) требуется $d \leq 0,01$, для 2 уровня безопасности (вычислительная сложность $\leq 2^{96}, n \geq 112$) и 3 уровня безопасности (вычислительная сложность $\leq 2^{128}, n \geq 168$) требуется $d \geq 0,001$, для 4 уровня безопасности (вычислительная сложность $\leq 2^{192}, n \geq 256$) требуется $d \leq 0,0001$.

Вместе с тем, небезопасно увеличивать указанные пороги для d до $\approx 0,3$ для достижения модифицированным методом тотального опробования ключей порогов вычислительной сложности алгоритмов вскрытия криптографической защиты, так как возможно использование более эффективных комплексных алгоритмов вскрытия, одновременно эксплуатирующих неравновероятность генератора ключей и специфические слабости криптографических алгоритмов.

В новой редакции стандарта СТ РК 1073-2002, принятие которой ожидается в 2007 году, считаем целесообразным увеличить пороги для d до 0,03, 0,01, 0,003 и 0,001 для 1, 2, 3 и 4 уровней безопасности соответственно.

Цитированная литература

1. **Бабаш А.В., Шанкин Г.П.** Криптография / Под ред. В.П.Шерстюка, Э.А.Применко. М. 2002.

2. **Menezes A.J., van Oorschot P.C., Vanstone S.A.** Handbook of Applied Cryptography. Boca Raton, New York, London, Tokyo, 1997.

3. **Средства криптографической защиты информации. Общие технические требования.** СТ РК 1073-2002. Астана: Госстандарт, 2002.

4. **Абдрахманов А.Е., Байбатчаева Д.А.** Криптографические основания разработки стандарта СТ РК 1073-2002 //Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні. Науково-технічний збірник. Киев, 2004. Вип.9. С.121-125.

Поступила в редакцию 01.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 18 – 27*

УДК 517.937

ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.А. Айсагалиев

Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
г. Алматы ул. Масанчи 39/47, aisagaliev@kazsu.kz.

Предлагается метод решения задачи оптимального быстродействия нелинейных систем с краевыми условиями при наличии фазовых, интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия следующего вида: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1dt = t_1 - t_0 \to \inf \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, u, t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset R^{2n}, \tag{3}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t): \; G(t) = \{x \in R^n |\; \omega(t) \le F(x, t) \le \varphi(t), \;\; t \in I\}, \tag{4}$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(\cdot), x_0, x_1, t_1) \le c_j, \;\; j = \overline{1, m_1}; \;\; g_j(u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = c_j, \;\; j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{5}$$

$$g_j(u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), u(t), x_0, x_1, t)dt, \;\; j = \overline{1, m_2}, \tag{6}$$

Keywords: *time-optimality, optimal control, integral equation, general solution, imbedding principle*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C75

ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) |\ u(t) \in V(t) \subset R^m, \text{ п.в. } t \in I\}. \tag{7}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times k$, вектор функция $f(x,u,t) = (f_1(x,u,t), ..., f_k(x,u,t))$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,u,t) \in R^n \times R^m \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, т.е.

$$|f(x,u,t) - f(y,u,t)| \le l(t)|x-y|, \ \forall\ (x,u,t),(y,u,t) \in R^n \times R^m \times I$$

и условию

$$|f(x,u,t)| \le c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t), \ \forall\,(x,u,t) \in R^n \times R^m \times I,$$

где $l(t) \ge 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_1(t) \ge 0$, $c_1 \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = \text{const} \ge 0$. Функция $f_0(x,u,x_0,x_1, t) = (f_{01}(x,u,x_0,x_1,t), ..., f_{0m_2}(x,u,x_0,x_1,t))$ удовлетворяет условию

$$|f_0(x,u,x_0,x_1,t)| \le c_2(|x| + |u|^2 + |x_0| + |x_1|) + c_3(t), \ \forall\,(x,u,x_0,x_1,t) \in R^n \times$$

$$\times R^m \times R^n \times R^n \times I, \ c_2(t) = \text{const} \ge 0, \ c_3(t) \ge 0, \ c_3(t) \in L_1(I, R^1).$$

Вектор функция $F(x,t) = (F_1(x,t), ..., F_s(x,t))$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,t) \in R^n \times I$ и удовлетворяет условию

$$|F(x,t)| \le c_4|x| + c_5(t), \ \forall\,(x,t) \in R^n \times I, \ c_4(t) = \text{const} \ge 0, \ 0 \le c_5(t) \in L_1(I, R^1),$$

$S = S_0 \times S_1 \subset R^{2n}$, $U \subset L_2(I, R^m)$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества , t_0 – фиксированный момент времени, t_1 — нефиксирован.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения задачи оптимального быстродействия (1) – (7);

Задача 2. Найти оптимальное управление $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in U \times S_0 \times S_1$ и оптимальную траекторию $x_*(t;\, t_0, x_0^*)$, $t \in I$, $x_*(t_1) = x_1^*$, а также момент времени t_1^*.

В статье приведены решения указанных задач. Оптимальное управление линейных систем изложена в [1]. Предлагаемый метод решения задачи оптимального быстродействия основан на общем решении интегрального уравнения из [2]. Основа теории краевых задач оптимального управления приведена в [3].

Принцип погружения. Пусть вектор функция $\eta(t) = (\eta_1(t), ..., \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$, где

$$\eta_j(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_{0j}(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau)d\tau, \ \ j = \overline{1, m_2}.$$

Тогда

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), u(t), x_0, x_1, t), \ t \in I, \ \eta(t_0) = 0, \ \eta(t_1) = \overline{c} \in \Omega,$$

$$\Omega = \{\overline{c} = \overline{c}_1, ..., \overline{c}_{m_2} \in R^{m_2} |\ \overline{c}_j = c_j - d_j, \ d_j \ge 0, \ j = \overline{1, m_1}; \ \overline{c}_j = c_j, \ j = \overline{m_1 + 1, m_2}\}.$$

Теперь задача (1) – (7) запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1dt = t_1 - t_0 \to \inf, \tag{8}$$

при условиях

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(x,u,t) + B_2 f_0(x,u,x_0,x_1,t), \;\; t \in I, \tag{9}$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}, \;\; \xi(t_1) = \xi_1 \in S_1 \times \Omega, \tag{10}$$

$$P_1\xi \in G(t), \;\; u(t) \in U(t), \;\; d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1} \,|\, d \geq 0\}, \tag{11}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}, \;\; \xi_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \xi_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{c} \end{pmatrix}, \;\; P_1 = (I_n, O_{n,m_2}), \;\; x = P_1\xi,$$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \;\; B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,k} \end{pmatrix}, \;\; B_2 = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix},$$

$O_{k,q}$ – прямоугольная матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, I_n, I_{m_2} – единичные матрицы порядков $n \times n$, $m_2 \times m_2$ соответственно.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2 w_2(t), \;\; t \in I, \;\; y(t_0) = \xi_0, \;\; y(t_1) = \xi_1, \tag{12}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^k), \;\; w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{13}$$

где $\xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}$, $\xi_1 \in S_1 \times \Omega$.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{B}(t) = (B_1(t), B_2), \;\; \Phi(t,\tau) = \varkappa(t)\varkappa^{-1}(\tau), \;\; w(t) = (w_1(t), w_2(t)),$$

$$a = \Phi(t_0,t_1)\xi_1 - \xi_0, \;\; T(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\overline{B}(t)\overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt,$$

$$\Lambda_1(t,\xi_0,\xi_1) = \overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a, \;\; N_1(t) = -\overline{B}^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\Lambda_2(t,\xi_0,\xi_1) = \Phi(t,t_0)T(t,t_1)T^{-1}(t_0,t_1)\xi_0 + \Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\xi_1,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t,t_0)T(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), \;\; t \in I,$$

где $\varkappa(t)$, $t \in I$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$.

Теорема 1. *Пусть матрица $T(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w(\cdot) = (w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{k+m_2})$ переводит траекторию системы (12), (13) из начальной точки $\xi_0 \in S_0 \times O_{m_2,1}$ в конечное состояние $\xi_1 \in S_1 \times \Omega$ тогда и только тогда, когда*

$$w_1(t) \in W_1 = \big\{w_1(\cdot) \in L_2(I,R^k)/\, w_1(t) = v_1(t) +$$

$$+ B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a + N_{11}(t)z(t_1,v), \;\; t \in I, \;\; \forall\, v_1(\cdot) \in L_2(I,R^k)\big\}, \tag{14}$$

$$w_2(t) \in W_2 = \{w_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2})/\, w_2(t) = v_2(t) +$$

$$+ B_2^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a + N_{12}(t)z(t_1,v), \;\; t \in I, \;\; \forall\, v_2(\cdot) \in L_2(I,R^{m_2})\}, \tag{15}$$

где $N_1(t) = (N_{11}(t), N_{12}(t))^*$, *функция* $z(t) = z(t, v)$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $t \in I$, *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}). \tag{16}$$

Решение дифференциального уравнения (12), соответствующее управлениям $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, *имеет вид*

$$y(t) = z(t) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, v),\ \ t \in I. \tag{17}$$

Доказательство. Функция $w(t)$, $t \in I$, является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\overline{B}(t)w(t)dt = a.$$

Как следует из результатов работ [1, 2], общее решение данного уравнения определяется соотношениями (14), (15), где $z(t)$, $t \in I$, – решение начальной задачи (16), где $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t \in I$, – произвольные функции. Если $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, то решение дифференциального уравнения (12) имеет вид (17). Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть матрица* $T(t_0, t_1) > 0$. *Тогда краевая задача (9) – (11) равносильна следующей задаче:*

$$w_1(t) = f(P_1y(t), u, t),\ \ w_1(t) \in W_1,\ \ t \in I,$$

$$w_2(t) = f_0(P_1y(t), u, x_0, x_1, t),\ \ w_2(t) \in W_2,\ \ t \in I,$$

$$p(t) = F(P_1y(t), t) \in U_1(t) = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^s) |\, \omega(t) \le p(t) \le \varphi(t),\ t \in I\}, \tag{18}$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2(t)v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k),$$

$$v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}),\ \ (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S,\ \ u(t) \in U(t),\ \ d \in \Gamma,$$

где функция $y(t)$, $t \in I$, *определяется по формуле (17).*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что краевая задача (12), (13) имеет решение тогда и только тогда, когда $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$. В частности, если выполнены соотношения (18), то функция $y(t) \in \xi(t)$, $t \in I$. Отсюда следует, что (18) равносильна краевой задаче (10), (11). Верно обратное утверждение. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_1(u(\cdot), p(\cdot), v(\cdot), x_0, x_1, d) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_1(q(t), t)dt = \int\limits_{t_0}^{t} \{|w_1(t) - f(P_1y(t), u(t), t)|^2 +$$

$$+ |w_2(t) - f_0(P_1y(t), u(t), x_0, x_1, t)|^2 + |p(t) - F(P_1y(t), t)|^2\}dt \to \inf \tag{19}$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in I, \tag{20}$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \tag{21}$$

$$p(t) \in U_1(t),\ u(t) \in U(t),\ (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S,\ d \in \Gamma, \tag{22}$$

где функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$, определяются соотношениями (14), (15), (17) соответственно.

Отметим, что 1. задача оптимального быстродействия (1) – (7) имеет решения тогда и только тогда, когда для некоторого $t_1 > t_0$ имеет решение краевая задача (10), (11); 2. как следует из леммы 1, краевая задача (10), (11) равносильна соотношениям (18); 3. если задача оптимального управления со свободным правым концом траектории (19) – (22) имеет такое решение, для которого $\inf J_1 = J_{1*} = 0$, то выполнены соотношения (18). Значение $J_1 \geq 0$.

Переход от исходной краевой задачи (2) – (7) к задаче оптимального управления (19) – (22) со свободным правым концом траектории назовем принципом погружения.

Существование решения. Рассмотрим решение задачи 1. Введем следующие обозначения:

$$H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times L_2(I, R^k) \times L_2(I, R^{m_2}) \times R^n \times R^n \times R^{m_1},$$

$$L_2^\rho(I, R^k) = \Big\{ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^k) / \, \|v_1\| \leq \rho \Big\},$$

$$L_2^\rho(I, R^{m_2}) = \Big\{ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}) / \, \|v_2\| \leq \rho \Big\},$$

$$\Gamma_\rho = \Big\{ d \in R^{m_1} / \, |d| \leq \rho, \ d \geq 0 \Big\}, \ \ X = U \times U_1 \times L_2^\rho(I, R^k) \times L_2^\rho(I, R^{m_2}) \times S_0 \times S_1 \times \Gamma_\rho$$

$$X \subset H, \ \ \theta(t) = (u(t), p(t), v_1(t), v_2(t), x_0, x_1, d) \in X \subset H,$$

$$q(t) = (z(t), z(t_1), \theta(t)), \ \ X_* = \{\theta_*(\cdot) \in X | \, J_1(\theta_*(\cdot)) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta(\cdot))\},$$

где $\rho > 0$ – достаточно большое число.

Лемма 2. *Пусть матрица $T(t_0, t_1) > 0$ для некоторого $t_1 > t_0$. Для того, чтобы задача оптимального быстродействия (1) – (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\theta_*(\cdot)) = 0$, где $\theta_*(\cdot) = (u_*(\cdot), p_*(\cdot), v_{1*}(\cdot), v_{2*}(\cdot), x_{0*}, x_{1*}, d_*) \in X_*$ – оптимальное управление в задаче (19) – (22).*

Доказательство. Задача (1) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда для некоторого $t_1 > t_0$ краевая задача (9) – (11) имеет решение. Краевая задача (9) – (11) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (18). Для выполнения (18) необходимо и достаточно, чтобы $J(\theta_*) = J_{1*} = 0$. Лемма доказана.

Функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $t \in I$, из (14), (15), (17) могут быть представлены в виде

$$w_1(t) = v_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)e + T_1(t)e - T_{11}(t)d + N_{11}(t)z(t_1, v), \ \ t \in I,$$

$$w_2(t) = v_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)e - T_{31}(t)d + N_{12}(t)z(t_1, v), \ \ t \in I,$$

$$y(t) = z(t, v) + \Pi_1(t)x_0 + \Pi_2(t)x_1 + \Pi_3(t)e - \Pi_4(t)d + N_2(t)z(t_1, v), \ \ t \in I,$$

где $e = (\bar{c}_1, \bar{c}_2)$, $\bar{c}_1 = (c_1, ..., c_{m_1})$, $\bar{c}_2 = (c_{m_1+1}, ..., c_{m_2})$. Пусть функции $\overline{w}_1(t) = w_1(t) - f(P_1 y(t), u(t), t)$, $\overline{w}_2(t) = w_2(t) - f_0(P_1 y(t), u(t), x_0, x_1, t)$, $\overline{w}_3(t) = p(t) - F(P_1 y(t), t)$, $t \in I$.

Частные производные

$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial v_1} = 2\overline{w}_1(t), \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial v_2} = 2\overline{w}_2(t), \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial p} = 2\overline{w}_3(t),$$
$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial u} = -2f_u^*(P_1y,u,t)\overline{w}_1(t) - 2f_{0u}^*(P_1y,u,x_0,x_1,t)\overline{w}_2(t),$$
$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial x_0} = (2D_1^* - 2\Pi_1^*P_1^*f_x^*)\overline{w}_1 + (2D_2^* - 2\Pi_1^*P_1^*f_{0x}^* - 2f_{0x_0}^*)\overline{w}_2 - 2\Pi_1^*P_1^*F_x^*\overline{w}_3,$$
$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial x_1} = (2T_0^* - 2\Pi_2^*P_1^*f_x^*)\overline{w}_1 + (2T_2^* - 2\Pi_2^*P_1^*f_{0x}^* - 2f_{0x_1}^*)\overline{w}_2 - 2\Pi_2^*P_1^*F_x^*\overline{w}_3,$$
$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial z(t_1)} = (2N_{11}^* - 2N_2^*P_1^*f_x^*)\overline{w}_1 + (2N_{12}^* - 2N_2^*P_1^*f_{0x}^*)\overline{w}_2 - 2N_2^*P_1^*F_x^*\overline{w}_3,$$
$$\frac{\partial F_1(q,t)}{\partial z} = -2P_1^*f_x^*\overline{w}_1 - 2P_1^*f_{0x}^*\overline{w}_2 - 2P_1^*F_x^*\overline{w}_3, \quad \frac{\partial F_1(q,t)}{\partial d} = (-2T_{11}^* +$$
$$+2\Pi_4^*P_1^*f_x^*)\overline{w}_1 + (-2T_{31}^* + 2\Pi_4^*P_1^*f_{0x}^*)\overline{w}_2 + 2\Pi_4^*P_1^*F_x^*\overline{w}_3, \quad t \in I.$$

Теорема 2. *Пусть матрица* $T(t_0,t_1) > 0$ *, функция* $F_1(q,t)$ *определена и непрерывна по совокупности переменных* (q,t) *вместе с частными производными по* q *и частные производные* F_{1v_1} *,* F_{1v_2} *,* F_{1p} *,* F_{1u} *,* F_{1x_0} *,* F_{1x_1} *,* F_{1z} *,* $F_{1z(t_1)}$ *удовлетворяют условиям Липшица по переменной* q *.*

Тогда функционал (19) при условиях (20) – (22) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент
$$J_1'(\theta) = (J_{11}'(\theta), J_{12}'(\theta), J_{13}'(\theta), J_{14}'(\theta), J_{15}'(\theta), J_{16}'(\theta), J_{17}'(\theta)) \in H$$
в любой точке $\theta \in X$ *вычисляется по формуле*

$$\begin{gathered} J_{11}'(\theta) = F_{1u} = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial u}, \quad J_{12}'(\theta) = F_{1p} = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial p}, \\ J_{13}'(\theta) = F_{1v_1} - B_1^*(t)\psi = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial v_1} - B_1^*(t)\psi, \\ J_{14}'(\theta) = F_{1v_2} - B_2^*\psi = \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial v_2} - B_2^*\psi, \\ J_{15}'(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial x_0}dt, \quad J_{16}'(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial x_1}dt, \quad J_{17}'(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_1(q(t),t)}{\partial d}dt, \end{gathered} \tag{23}$$

где $z(t)$ *,* $t \in I$ *, – решение дифференциального уравнения (20), функция* $\psi(t)$ *,* $t \in I$ *, – решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = F_{1z}(q(t),t) - A_1^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{1z(t_1)}(q(t),t)dt. \tag{24}$$

Кроме того, градиент $J_1'(\theta)$ *,* $\theta \in X$ *, удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J_1'(\theta_1) - J_1'(\theta_2)\| \leq K\|\theta_1 - \theta_2\| \;\forall\; \theta_1, \theta_2 \in X, \quad K = const > 0. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $\theta(t)$, $\theta(t) + \triangle\theta(t) \in X$, где

$$\triangle\theta(t) = (\triangle u(t), \triangle p(t), \triangle v_1(t), \triangle v_2(t), \triangle x_0, \triangle x_1, \triangle d).$$

Можно показать, что $|\triangle z(t)| \leq c_1||\triangle e||$, $||\triangle q|| \leq c_2||\triangle\theta||$, $\triangle J_1 = J_1(\theta+\triangle\theta) - J_1(\theta) = \langle J_1^{'}(\theta), \triangle\theta\rangle_H + R$, $|R| \leq c_3||\triangle\theta||^2$, $c_1, c_2, c_3 = \text{const} > 0$. Отсюда следует, что градиент $J_1^{'}(\theta)$ определяется по формуле (23).

Так как частные производные функции $F_1(q,t)$ удовлетворяют условиям Липшица, то

$$|J_1^{'}(\theta_1) - J_1^{'}(\theta_2)|^2 \leq c_4|\triangle\psi(t)|^2 + c_5||\triangle\theta||^2, \;\; \theta_1 - \theta_2 = \triangle\theta.$$

Отсюда с учетом того, что $|\triangle\psi(t)| \leq c_6||\triangle\theta||$, $t \in I$, получим оценку (25). Теорема доказана.

Пусть $\theta_0 = (u_0, p_0, v_1^0, v_2^0, x_0^0, x_1^0, d_0) \in X$ – начальная точка. Строим последовательность $\{\theta_n\} = \{u_n, p_n, v_1^n, v_2^n, x_0^n, x_1^n, d_n\} \subset X$ с начальной точкой $\theta_0 \in X$ по правилу:

$$u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J_{11}^{'}(\theta_n)], \;\; p_{n+1} = P_{U_1}[p_n - \alpha_n J_{12}^{'}(\theta_n)],$$

$$v_1^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_1^n - \alpha_n J_{13}^{'}(\theta_n)], \;\; v_2^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_2^n - \alpha_n J_{14}^{'}(\theta_n)],$$

$$x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J_{15}^{'}(\theta_n)], \quad x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J_{16}^{'}(\theta_n)], \tag{26}$$

$$d_{n+1} = P_{\Gamma_\rho}[d_n - \alpha_n J_{17}^{'}(\theta_n)], \;\; n = 0,1,2,...,$$

где $\alpha_n > 0$, $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 2/(K+2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $P_Q[\cdot]$ – проекция точки на множестве Q.

Теорема 3. *Пусть матрица $T(t_0,t_1) > 0$, U, U_1, S_0, S_1 – ограниченные выпуклые замкнутые множества, функция $F_1(q,t)$ непрерывна вместе с частными производными по q, частные производные удовлетворяют условиям Липшица по q. Пусть, кроме того, функция $F_1(q,t)$ выпукла по переменной q и последовательность $\{\theta_n\}$ определяется по формуле (26). Тогда*

1) достигается нижняя грань функционала (19) при условиях (20) – (22), т.е.

$$\inf_{\theta\in X} J_1(\theta) = J_1(\theta_*), \quad \theta_* \in X_*;$$

2) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_1(\theta_*)$;

3) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ слабо сходится к точке $\theta_* \in X_*$;

4) для того, чтобы задача оптимального быстродействия (1) – (7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $t_1 = t_0 + T_k$, значение функционала $J_1(\theta_*) = 0$;

5) справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J_1(\theta_n) - J_1(\theta_*) \leq \frac{m_0}{n}, \;\; m_0 = const > 0, \;\; n = 1,2,\ldots.$$

Доказательство. Множество X – слабо бикомпактно, функционал (19) при условиях (20) – (22) слабо полунепрерывен снизу. Следовательно, на множестве X достигается нижняя грань функционала. Так как $J_1(\theta) \in C^{1,1}(X)$, $||J_1^{'}(\theta_1) - J_1^{'}(\theta_2)|| \leq K||\theta_1 - \theta_2|| \;\; \forall\theta_1, \theta_2 \in X$, то $J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon||\theta_n - \theta_{n+1}||^2$. Следовательно, $||\theta_n - \theta_{n+1}|| \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку функционал выпуклый, то $0 \leq J_1(\theta_n) - J_1(\theta_*) \leq m_1||\theta_n - \theta_{n+1}||$, $m_1 = \text{const} > 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(\theta_n) = J_1(\theta_*)$, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ – минимизирующая. Из слабой бикомпактности множества X следует, что $\theta_n \xrightarrow{\text{сл}} \theta_*$ при $n \to \infty$. Утверждение 4) следует из леммы 2. Из оценок $J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon||\theta_n - \theta_{n+1}||^2$, $J_1(\theta_n) - J_1(\theta_*) \geq m_1||\theta_n - \theta_{n+1}||$ следует утверждение 5). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2, множество* $X_* \neq \emptyset$ *, последовательность* $\{\theta_n\} \subset X$ *определяется по формуле (26). Тогда*

1) значение функционала $J_1(\theta_n)$ *строго убывает при* $n = 0, 1, 2, \dots$ *;*

2) $||\theta_n - \theta_{n+1}|| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *.*

Доказательство. В отличии от теоремы 3, в условии теоремы 4 отсутствует требование на выпуклость функции $F_1(q,t)$ по переменной q. В данном случае верно неравенство: $J_1(\theta_n) - J_1(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon||\theta_n - \theta_{n+1}||$, значение функционала ограничено снизу $(J_1(\theta) \geq 0)$. Отсюда следуют утверждения 1), 2). Теорема доказана.

Построение оптимального решения. Рассмотрим решение задачи 2. Для построения решения задачи оптимального быстродействия (1) – (7) необходимо найти последовательность $\{\theta_n\} \subset X$, которая сильно сходится к точке $\theta_* \in X_*$. Для этого необходимо рассмотреть следующее семейство задач оптимального управления:

$$J_{1i}(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q(t),t)dt + \varepsilon_i \int_{t_0}^{t_1} [|u(t)|^2 + |p(t)|^2 +$$

$$+ |v_1(t)|^2 + |v_2(t)|^2 + |x_0|^2 + |x_1|^2 + |d|^2 + |z(t)|^2 + |z(t_1)|^2]dt \to \inf \quad (27)$$

при условиях (20) – (22), где последовательность $\{\varepsilon_i\} \subset R^1$ обладает свойством $\varepsilon_i > 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2, функция* $F_1(q,t)$ *выпукла по переменной* q *. Тогда*

1) для любого $\varepsilon_i > 0$ *функционала (27) при условиях (20) – (22) является сильно выпуклым;*

2) функционал (27) при условиях (20) – (22) непрерывно дифференцируем в любой точке $\theta \in X$ *, причем*

$$J'_{1i,1}(\theta) = F_{1u} + 2\varepsilon_i u, \;\; J'_{1i,2}(\theta) = F_{1p} + 2\varepsilon_i p, \;\; J'_{1i,3}(\theta) = F_{1v_1} - B_1^*(t)\psi_1(t) + 2\varepsilon_i v_1,$$

[-0.5in]

$$J'_{1i,4}(\theta) = F_{1v_2} - B_2^*(t)\psi_1(t) + 2\varepsilon_i v_2, \;\; J'_{1i,5}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [F_{1x_0} + 2\varepsilon_i x_0]dt, \quad (28)$$

$$J'_{1i,6}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [F_{1x_1} + 2\varepsilon_i x_1]dt, \;\; J'_{1i,7}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [F_{1d} + 2\varepsilon_i d]dt,$$

где функция $\psi_1(t)$ *,* $t \in I$ *, – решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi}_1 = F_{1z} + 2\varepsilon_i z(t) - A_1^*(t)\psi_1, \;\; \psi_1(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} (F_{1z(t_1)} + 2\varepsilon_i z(t_1))dt. \quad (29)$$

3) градиент $J'_{1i}(\theta)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$||J'_{1i}(\theta_1) - J'_{1i}(\theta_2)|| \leq K_i||\theta_1 - \theta_2|| \;\; \forall\, \theta_1,\, \theta_2 \in X, \;\; K_i = const > 0. \quad (30)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. На основе формул (28) – (30) строим следующие последовательности

$$
\begin{aligned}
&u_{n+1}^i = P_U[u_n^i - \alpha_{ni} J'_{1i,1}(\theta_n^i)], \ \ p_{n+1}^i = P_{U_1}[u_n^i - \alpha_{ni} J'_{1i,2}(\theta_n^i)],\\
&v_{1i}^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_{1i}^n - \alpha_{ni} J'_{1i,3}(\theta_n^i)], \ \ v_{2i}^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_{2i}^n - \alpha_{ni} J'_{1i,4}(\theta_n^i)],\\
&x_{0i}^{n+1} = P_{S_0}[x_{0i}^n - \alpha_{ni} J'_{1i,5}(\theta_n^i)], \ \ x_{1i}^{n+1} = P_{S_1}[x_{1i}^n - \alpha_{ni} J'_{1i,6}(\theta_n^i)],\\
&d_i^{n+1} = P_{\Gamma_\rho}[d_i^n - \alpha_{ni} J'_{1i,7}(\theta_n^i)],
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
n = 0,1,2,.., \ 0 \le \varepsilon_0 \le \alpha_{ni} \le \frac{2}{K_i + 2\varepsilon}, \ \varepsilon > 0.
$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательность $\{\theta_n^i\} \subset X$ определяется по формуле (31). Тогда*

1) для любого $\varepsilon_i > 0$ последовательность $\{\theta_n^i\} \subset X$ является минимизирующей:

$$
||\theta_n^i - \theta_{n+1}^i|| \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty;
$$

2) последовательность $\{\theta_n^i\} \subset X$ сходится к единственной точке θ_*^i при $n \to \infty$, где $J_{1i}(\theta_*^i) = \inf_{\theta \in X} J_{1i}(\theta)$, $\theta_*^i \in X_*^i$;

3) справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$
0 \le J_{1i}(\theta_n^i) - J_{1i}(\theta_*^i) \le \frac{c_{0i}}{n}, \ \ ||\theta_n^i - \theta_*^i|| \le \frac{c_{1i}}{n}, \ \ i = 1,2,...,
$$

где $c_{0i} = const > 0$, $c_{1i} = const > 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда последовательность $\{\theta_*^i\} \subset X$, соответствующая $\varepsilon_i > 0$, $i = 1,2,\ldots$, $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$, сходится к элементу $\theta_* \in X_*$, $J_1(\theta_*) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta)$, $\theta_*^i \to \theta_*$ при $i \to \infty$.*

Доказательство аналогичных теорем можно найти в [3].

Сформулируем алгоритм построения оптимального решения задачи (1) – (7).

1. Выберем некоторое значение $t_1 = t_1^0$ так, чтобы матрица $T(t_0, t_1) > 0$.

2. Найдем точку $\theta_* \in X$, $J_1(\theta_*) = \inf_{\theta \in X} J_1(\theta)$. Здесь возможны два случая:

а) $J_1(\theta_*) = J_{1*} > 0$; б) $J_1(\theta_*) = J_{1*} = 0$.

3. Если $J_1(\theta_*) > 0$, то выберем значение $t_1 = 2t_1^0$ и находим точку $\theta_{**} \in X$, соответствующую значению $t_1 = 2t_1^0$. Здесь возможны также два случая: а) $J_1(\theta_{**}) > 0$; б) $J_1(\theta_{**}) = 0$.

4. Если $J_1(\theta_*) = 0$, то выберем значение $t_1 = \dfrac{1}{2} t_1^0$ и находим точку $\theta_{***} \in X$ и значение $J_1(\theta_{***})$. Возможны случаи: а) $J_1(\theta_{***}) > 0$; б) $J_1(\theta_{***}) = 0$.

5. Повторяя данную процедуру, можно найти со сколь угодной точностью значение $t_1 = t_1^*$, где t_1^* – оптимальный момент времени, а также $\theta_* = \theta_*(t_1^*) \in X$. Тогда для задачи (1) – (7) оптимальным управлением являются компоненты вектора $\theta_*(t_1)$, равные $(u_*(t), x_0^*, x_1^*, t_1^*)$, оптимальная траектория $x_*(t) = x_*(t; x_0^*, u_*)$, $t \in I$, $x_*(t_1) = x_1^*$.

В заключении отметим следующее: получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи оптимального быстродействия. Разработан конструктивный метод построения решения задачи оптимального быстродействия на основе предложенного принципа погружения.

Цитированная литература

1. **Айсагалиев С.А.** // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32, № 6. С.1–7.
2. **Айсагалиев С.А.** // Математический журнал. 2006. №4. С. 3 – 10.
3. **Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.** Методы решения краевых задач. Алматы, 2002.

Поступила в редакцию 13.04.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 28 — 32*

УДК 517.95.958

ПРОСТРАНСТВЕННО ДВУМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

А. В. Алексеева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125, alexandra-aleks@mail.ru

Представлен метод нахождения новых пространственно двумерных уравнений А1-А14 по заданным билинейным формам Н1-Н5.

1. Введение. В последнее время вызывают большой интерес исследования многомерных нелинейных эволюционных уравнений. Некоторые (2+1)-мерные аналоги уравнения Кортевега-де Фриза описаны в работах [1–6]. Их называют универсальными, поскольку они описывают многие задачи, возникающие в разных физических ситуациях.

В этой работе представлен метод нахождения новых солитонных уравнений А1-А14, которые являются комплексными пространственно двумерными обобщениями уравнения Кортевега-де Фриза. Доказана связь этих уравнений с пространственно двумерными билинейными формами Н1-Н5, которые представляют собой комплексные пространственно двумерные обобщения билинейной формы Хироты.

2. Метод нахождения новых солитонных уравнений А1-А14 по заданным билинейным формам Н1-Н5. Для вывода воспользуемся следующим свойством. Солитонные уравнения имеют билинейную форму, которая позволяет строить их N-солитонные решения, используя метод Хироты. Рассмотрим билинейную форму вида

$$(D_xD_t + D_x^mD_y^n)(\varphi\circ\varphi) = 0, \tag{1}$$

где $m+n=4, \quad m,n=\overline{0,4}, \quad \varphi=\varphi(x,y,t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция,

$$D_xD_t(\varphi\circ\varphi) = 2(\varphi_{xt}\varphi-\varphi_x\varphi_t),$$

$$D_x^mD_y^n(\varphi\circ\varphi) = (\partial_x-\partial_{x'})^m(\partial_y-\partial_{y'})^n\varphi(x,y,t)\varphi(x',y',t')\mid_{x'=x,y'=y,t'=t}.$$

Форма (1) содержит в себе пять билинейных форм, которые мы назовем *формами*

Н1: $(D_xD_t + D_x^2D_y^2)(\varphi\circ\varphi)=0$ (by $m=n=2$),

Н2: $(D_xD_t + D_x^3D_y)(\varphi\circ\varphi)=0$ (by $m=3, n=1$),

Keywords: *Korteweg-de Vries equation, Hirota bilinear form, soliton*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q51, 35Q53

H3: $(D_xD_t + D_xD_y^3)(\varphi \circ \varphi) = 0$ (by $m = 1, n = 3$),
H4: $(D_xD_t + D_y^4)(\varphi \circ \varphi) = 0$ (by $m = 0, n = 4$),
H5: $(D_xD_t + D_x^4)(\varphi \circ \varphi) = 0$ (by $m = 4, n = 0$).

Теорема 1. *Формы H1-H5 являются комплексными пространственно двумерными обобщениями классической билинейной формы Хироты*

$$(D_xD_t + D_x^4)(\varphi \circ \varphi) = 0, \tag{2}$$

где $f = f(x,t)$ — достаточно гладкая действительная функция.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что существует линейное преобразование

$$x = a_{11}x' + a_{12}y', \quad y = a_{21}x' + a_{22}y', \quad t = t', \tag{3}$$

которое переводит формы H1-H5 в билинейную форму (2). Найдем частные производные функции $\varphi = \varphi(x,y,t)$ и возьмем $\varphi = g(x',t')$, где $g = g(x',t')$ — достаточно гладкая действительная функция. Тогда $g'_y = 0$. Подставим производные в формы H1-H5, получим

$$\frac{a_{22}}{|A|}2(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}) + \frac{a_{22}^2a_{12}^2}{|A|^4}2(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{a_{22}}{|A|}2(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}) - \frac{a_{22}^3a_{12}}{|A|^4}2(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{a_{22}}{|A|}2(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}) - \frac{a_{22}a_{12}^3}{|A|^4}2(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{a_{22}}{|A|}2(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}) + \frac{a_{12}^4}{|A|^4}2(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{a_{22}}{|A|}2(g_{x't'}g - g_{x'}g_{t'}) + \frac{a_{22}^4}{|A|^4}2(g_{x'x'x'x'}g - 4g_{x'x'x'}g_{x'} + 3g_{x'x'}^2) = 0. \tag{8}$$

Сопоставляя уравнения (4) – (8) с билинейной формой (2), имеем $g = f$ и

$$\frac{a_{22}}{|A|} = \frac{a_{22}^2a_{12}^2}{|A|^4} = 1, \quad \frac{a_{22}}{|A|} = -\frac{a_{22}^3a_{12}}{|A|^4} = 1, \quad \frac{a_{22}}{|A|} = -\frac{a_{22}a_{12}^3}{|A|^4} = 1,$$

$$\frac{a_{22}}{|A|} = \frac{a_{12}^4}{|A|^4} = 1, \quad \frac{a_{22}}{|A|} = \frac{a_{22}^4}{|A|^4} = 1,$$

где $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Следовательно, формы H1, H4 совпадают с билинейной формой (3) при условии

$$a_{11} + a_{21} = 1, \quad a_{22} + a_{12} = 0 \qquad \text{или} \qquad a_{11} - a_{21} = 1, \quad a_{22} - a_{12} = 0, \tag{9}$$

формы H2, H3 совпадают с формой (3) при

$$a_{11} + a_{21} = 1, \quad a_{22} + a_{12} = 0, \tag{10}$$

и форма H5 совпадает с (3) при $a_{22} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}-1}$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим нелинейные солитонные уравнения, которые назовем *уравнениями*

A1: $\psi_t + \psi_{xyy} + 2[\psi^2]_y + [UV]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A2: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3[\psi U]_y = 0, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A3: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3[\psi V]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A4: $\psi_t + V_{yyy} + 3[V^2]_y = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A5: $\psi_t + \psi_{xyy} + 2[V^2]_x + [\psi W]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A6: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3[\psi V]_x = 0, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A7: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3[VW]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A8: $\psi_t + W_{xyy} + 3[W^2]_x = 0, \quad W_{xx} = \psi_{yy}, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xx},$
A9: $\psi_t + \psi_{xyy} + Q_{yy} = 0, \quad Q_x = 2U^2 + \psi P, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A10: $\psi_t + \psi_{xxy} + 3F_{yy} = 0, \quad F_x = PU, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A11: $\psi_t + \psi_{yyy} + 3M_{yy} = 0, \quad M_x = \psi U, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A12: $\psi_t + V_{yyy} + 3K_{yy} = 0, \quad K_x = \psi^2, \quad V_x = \psi_y, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy},$
A13: $\psi_t + \psi_{xxx} + 3[U^2]_y = 0, \quad U_y = \psi_x, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{xy},$
A14: $\psi_t + \psi_{xxx} + 3B_{yy} = 0, \quad B_x = P^2, \quad P_{yy} = \psi_{xx}, \quad \psi = 2(ln\,\varphi)_{yy}.$

Здесь $\psi = \psi(x, y, t), \quad \varphi = \varphi(x, y, t)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции, $ln\,\varphi =| \varphi | + i\,arg\,\varphi, \quad -\pi < arg\,\varphi \leq \pi.$

Теорема 2. *Уравнения A1-A14 являются комплексными пространственно двумерными обобщениями уравнения Кортевега-де Фриза*

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x, \quad u = 2(ln\,f)_{xx}, \tag{11}$$

где $f = f(x, t)$ — достаточно гладкая действительная функция.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что существует линейное преобразование (3), которое переводит уравнения A1-A14 в уравнение Кортевега - де Фриза (11). Найдем частные производные функций $\psi = \psi(x, y, t), \quad U = U(x, y, t), \quad V = V(x, y, t), \quad W = W(x, y, t), \quad Q = Q(x, y, t), \quad P = P(x, y, t), \quad F = F(x, y, t), \quad M = M(x, y, t), \quad K = K(x, y, t), \quad B = B(x, y, t)$ и возьмем $\psi = v(x', t'), \quad U = U^*(x', t'), \quad V = V^*(x', t'), \quad W = W^*(x', t'), \quad Q = Q^*(x', t'), \quad P = P^*(x', t'), \quad F = F^*(x', t'), \quad M = M^*(x', t'), \quad K = K^*(x', t'), \quad B = B^*(x', t')$, где $v = v(x', t'), \quad U^* = U^*(x', t'), \quad V^* = V^*(x', t'), \quad W^* = W^*(x', t'), \quad Q^* = Q^*(x', t'), \quad P^* = P^*(x', t'), \quad F^* = F^*(x', t'), \quad M^* = M^*(x', t'), \quad K^* = K^*(x', t'), \quad B^* = B^*(x', t')$ — достаточно гладкие действительные функции. Тогда $v'_y = U^*_{y'} = V^*_{y'} = W^*_{y'} = Q^*_{y'} = P^*_{y'} = F^*_{y'} = M^*_{y'} = K^*_{y'} = B^*_{y'} = 0$. Подставим производные в уравнения A1-A14, получим

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^2 a_{22}}{| A |^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}}{| A |} 6vv_{x'} = 0, \tag{12}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12} a_{22}^2}{| A |^3} v_{x'x'x'} + \frac{a_{22}}{| A |} 6vv_{x'} = 0, \tag{13}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{| A |^3} v_{x'x'x'} + \frac{a_{12}^2}{| A |\, a_{22}} 6vv_{x'} = 0, \tag{14}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^4}{| A |^3\, a_{22}} v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}^3}{| A |\, a_{22}^2} 6vv_{x'} = 0, \tag{15}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^2 a_{22}}{| A |^3} v_{x'x'x'} + \frac{a_{12}^2}{| A |\, a_{22}} 6vv_{x'} = 0, \tag{16}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12} a_{22}^2}{| A |^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}}{| A |} 6vv_{x'} = 0, \tag{17}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}^3}{|\,A\,|\,a_{22}^2} 3vv_{x'} - \frac{a_{12}^3}{a_{22}^3} 3vv_{x'} = 0, \tag{18}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|^3\,a_{22}} v_{x'x'x'} + \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|\,a_{22}^3} 6vv_{x'} = 0, \tag{19}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^2 a_{22}}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} + \frac{a_{22}}{|\,A\,|} 6vv_{x'} = 0, \tag{20}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12} a_{22}^2}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{22}^2}{|\,A\,|\,a_{12}} 6vv_{x'} = 0, \tag{21}$$

$$v_{t'} - \frac{a_{12}^3}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{12}}{|\,A\,|} 6vv_{x'} = 0, \tag{22}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|^3\,a_{22}} v_{x'x'x'} + \frac{a_{12}^2}{|\,A\,|\,a_{22}} 6vv_{x'} = 0, \tag{23}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{22}^3}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} - \frac{a_{22}^2}{|\,A\,|\,a_{12}} 6vv_{x'} = 0, \tag{24}$$

$$v_{t'} + \frac{a_{22}^3}{|\,A\,|^3} v_{x'x'x'} + \frac{a_{22}^3}{|\,A\,|\,a_{12}^2} 6vv_{x'} = 0. \tag{25}$$

Сопоставляя уравнения (12) – (25) с уравнением Кортевега-де Фриза (11), имеем $v = u$ и

$$\frac{a_{12}^2 a_{22}}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{12}}{|\,A\,|} = 1, \quad -\frac{a_{12} a_{22}^2}{|\,A\,|^3} = \frac{a_{22}}{|\,A\,|} = 1 \quad -\frac{a_{12}^3}{|\,A\,|^3} = \frac{a_{12}^2}{|\,A\,|\,a_{22}} = 1,$$

$$\frac{a_{12}^4}{|\,A\,|^3\,a_{22}} = -\frac{a_{12}^3}{|\,A\,|\,a_{22}^2} = 1, \quad \frac{a_{12}^2 a_{22}}{|\,A\,|^3} = \frac{a_{12}^2}{|\,A\,|\,a_{22}} = 1, \quad -\frac{a_{12} a_{22}^2}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{12}}{|\,A\,|} = 1,$$

$$-\frac{a_{12}^3}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{12}^3}{|\,A\,|\,a_{22}^2} = -\frac{a_{12}^3}{a_{22}^3} = 1, \quad \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|^3\,a_{22}} = \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|\,a_{22}^3} = 1, \quad \frac{a_{12}^2 a_{22}}{|\,A\,|^3} = \frac{a_{22}}{|\,A\,|} = 1,$$

$$-\frac{a_{12} a_{22}^2}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{22}^2}{|\,A\,|\,a_{12}} = 1, \quad -\frac{a_{12}^3}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{12}}{|\,A\,|} = 1, \quad \frac{a_{12}^4}{|\,A\,|^3\,a_{22}} = \frac{a_{12}^2}{|\,A\,|\,a_{22}} = 1,$$

$$\frac{a_{22}^3}{|\,A\,|^3} = -\frac{a_{22}^2}{|\,A\,|\,a_{12}} = 1, \quad \frac{a_{22}^3}{|\,A\,|^3} = \frac{a_{22}^3}{|\,A\,|\,a_{12}^2} = 1.$$

Следовательно, уравнения A1-A3, A7, A13 совпадают с уравнением Кортевега-де Фриза (11) при условии (10); уравнения A4-A6, A8-A10, A12, A14 совпадают с уравнением (11) при (9); уравнение A11 совпадает с (11) при $a_{12} = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}-1}$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Уравнения A1-A14 можно представить в виде форм H1-H5; и наоборот, формам H1-H5 соответствуют уравнения A1-A14.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Подставим значения функции ψ в уравнения A1-A14, получим

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{xxyy}\varphi - 2\varphi_{xxy}\varphi_y + \varphi_{xx}\varphi_{yy} - 2\varphi_{xyy}\varphi_x + 2\varphi_{xy}^2)\varphi^{-2} = 0,$$

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\phi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{xxxy}\varphi - 2\varphi_{xxx}\varphi_y - 3\varphi_{xxy}\varphi_x + 3\varphi_{xx}\varphi_{xy})\varphi^{-2} = 0,$$

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{xyyy}\varphi - 2\varphi_{yyy}\varphi_x - 3\varphi_{xyy}\varphi_y + 3\varphi_{yy}\varphi_{xy})\varphi^{-2} = 0,$$

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{yyyy}\varphi - 4\varphi_{yyy}\varphi_y + 3\varphi_{yy}^2)\varphi^{-2} = 0,$$

$$2(\varphi_{xt}\varphi - \varphi_x\varphi_t)\varphi^{-2} + 2(\varphi_{xxxx}\varphi - 4\varphi_{xxx}\varphi_x + 3\varphi_{xx}^2)\varphi^{-2} = 0.$$

Здесь $\varphi = \varphi(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция. Следовательно, уравнения A1, A5, A9 дают форму H1; уравнения A2, A6, A10 — форму H2; уравнеия A3, A7, A11 — форму H3; уравнения A4, A8, A12 — форму H4; а уравнения A13, A14 — форму H5.

Достаточность. Рассмотрим билинейную форму (1). Перепишем уравнение (1) в виде

$$2\partial_x\partial_t(ln\,\varphi) + 2\partial_x^m\partial_y^n(ln\,\varphi) + G = 0, \tag{26}$$

где $G = G(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция. Продифференцируем уравнение (26) $k-1$ раз по переменной x и l раз по переменной y, получим

$$\partial_t[2\partial_x^k\partial_y^l(ln\,\varphi)] + \partial_x^{m-1}\partial_y^n[2\partial_x^k\partial_y^l(ln\,\varphi)] + \partial_x^k\partial_y^l[\partial_x^{-1}G] = 0. \tag{27}$$

Возьмем $\psi = 2\partial_x^k\partial_y^l(ln\,\varphi)$, где $k+l = 2, \quad k, l = \overline{0, 2}, \quad \psi = \psi(x, y, t), \quad \varphi = \varphi(x, y, t)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции. Тогда из (27) имеем

$$\partial_t\psi + \partial_x^{m-1}\partial_y^n\psi + \partial_x^k\partial_y^l\Phi = 0, \tag{28}$$

где $\Phi_x = G, \quad \Phi = \Phi(x, y, t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция. Уравнение (28) содержит в себе уравнения A1-A14. Теорема 3 доказана.

3. Заключение. Мы представили метод нахождения новых пространственно двумерных уравнений A1-A14 по заданным билинейным формам H1-H5. Уравнения A1-A14 являются (2+1)-мерными обощениями уравнения Кортевега-де Фриза. Формы H1-H5 являются (2+1)-мерными обобщениями билинейной формы Хироты.

Цитированная литература

1. **Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.** // ДАН СССР. 1970. Т. 192. С.753 - 756.
2. **Tappert F. and Varma C.M.** // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. C.1108 - 1111.
3. **Narayanamurti V. and Varma C.M.** // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. C.1105 - 1108.
4. **Kako M. and Rowlands G.** // Plasma Physics. 1976. V. 18. C.165 - 170.
5. **Веселов А.П., Новиков С.П.** // ДАН СССР. 1984. V. 279. C.20.
6. **Нижник Л.П.** Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991.

Поступила в редакцию 30.10.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 33 – 35*

УДК 517.956.2

О НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С ПОЛЮСОМ

А.Ж. Досболова, А.Б. Тунгатаров

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
465045 Атырау Студенческий пр., 212 AtyrauUniv@nursat.kz

В настоящей статье построено в явном виде одно многообразие непрерывных решений одного класса обобщенных уравнений Бельтрами с полюсом.

Пусть $G = \{z = re^{i\varphi : 0 \le r < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi}\}$. Рассмотрим в G уравнение

$$\partial_{\bar z} V - \beta(\varphi)\frac{z}{\bar z}\partial_z V + \frac{a(\varphi)}{2\bar z}V + \frac{b(\varphi)}{2\bar z}V = 0, \tag{1}$$

где $\beta(\varphi+2\pi) = \beta(\varphi)$, $a(\varphi+2\pi) = a(\varphi)$, $b(\varphi+2\pi) = b(\varphi)$,$a(\varphi), b(\varphi), \beta(\varphi) \in C[0, 2\pi]$; $|\beta(\varphi)| < 1$.
Уравнение (1) исследовано при $\beta(\varphi) = const$ в [1] и при в $\beta(\varphi) = 0$ – в [2].
Решая уравнение (1) из класса

$$C(\bar G)\bigcap W_p^1(G), \quad 1 < p < 2, \tag{2}$$

методом разделения переменных, получим

$$V(r, \varphi) = cr^\lambda \cdot exp(i\int\limits_0^\varphi \frac{a(\gamma) + \lambda(1 - \beta(\gamma))}{1 + \beta(\gamma)}d\gamma) \cdot P_\lambda(\varphi), \tag{3}$$

где λ, c , c – произвольные действительные числа, $P_\lambda(\varphi)$ – решение из класса $C^1[0, 2\pi]$ уравнения

$$P_\lambda^{'} - A_\lambda(\varphi)\bar{P_\lambda}(\varphi) = 0. \tag{4}$$

Здесь $A_\lambda(\varphi) = \dfrac{ib(\varphi)}{1 + \beta(\varphi)}exp(-2iReB_\lambda(\varphi)), \quad B_\lambda(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \dfrac{a(\gamma) + \lambda(1 - \beta(\gamma))}{1 + \beta(\gamma)}d\gamma).$

Интегрируя уравнение (4) методом, разработанным в [3], имеем

$$P_\lambda(\varphi) = \overline{c_\lambda} \cdot P_{\lambda,1}(\varphi) + c_\lambda \cdot P_{\lambda,2}(\varphi), \tag{5}$$

Keywords: *continuous solution, a pole, generalized equation.*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

где

$$P_{\lambda,1}(\varphi) = \Sigma_{k=1}^{\infty} J_{\lambda,2k-1}(\varphi), \qquad P_{\lambda,2}(\varphi) = 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} J_{\lambda,2k}(\varphi),$$

$$J_{\lambda,1}(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} A_\lambda(\gamma) d\gamma, \quad J_{\lambda,k}(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} A_\lambda(\gamma) \overline{J_{\lambda,k(\gamma)}} d\gamma \quad (k = \overline{2,\infty}),$$

c_λ – произвольное комплексное число.

Функции $P_{\lambda,1}(\varphi)$, $P_{\lambda,2}(\varphi)$ обладают следующими свойствами:

$$|P_{\lambda,1}(\varphi)| \leq sh(|A_\lambda|_0 \cdot \varphi)|P_{\lambda,1}(\varphi)| \leq ch(|A_\lambda|_0 \cdot \varphi), \; |P_{\lambda,1}(\varphi)^2| - |P_{\lambda,1}(\varphi)^2| = 1. \tag{6}$$

Здесь

$$|f|_0 = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f|.$$

Из (3) в силу (5) получим

$$V(r,\varphi) = r^\lambda \cdot exp(iB_\lambda(\varphi)) \cdot (\overline{c_\lambda} \cdot P_{\lambda,1}(\varphi) + c_\lambda \cdot P_{\lambda,2}(\varphi)), \tag{7}$$

где c_λ – произвольное комплексное число.

Из вида (7) следует, что, вообще говоря, $V(r,0) \neq V(r,2\pi)$. Произвольные постоянные λ и $\overline{c_\lambda}$ выбираем так, чтобы имело место равенство $V(r,0) = V(r,2\pi)$. Для этого, подставив (7) в (6), получим

$$\Delta_1(\lambda \cdot \overline{c_\lambda} + \Delta_2(\lambda \cdot c_\lambda) = 0, \tag{8}$$

где

$$\Delta_1(\lambda) = P_{\lambda,1}(2\pi), \quad \Delta_2(\lambda) = P_{\lambda,2}(2\pi) - exp(-iB(2\pi)).$$

Из (8) видно, что это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$|\Delta_1(\lambda)| = |\Delta_1(\lambda)|.$$

Это равенство эквивалентно уравнению

$$ReP_{\lambda,2}(2\pi) \cdot \cos B_\lambda(2\pi) - ImP_{\lambda,1}(2\pi) \cdot \sin B_\lambda(2\pi) = 1. \tag{9}$$

Из (6) следует, что $|P_{\lambda,2}(2\pi)| \geq 1$. Поэтому для каждого целого числа $k \geq 0$ существует решение $\lambda = \lambda_k$ уравнения (9), принадлежащее отрезку $[k, k+1]$. Пусть k – целое число, $k \leq \lambda_k \leq k+1$, и λ_k – решение уравнения (9). Тогда

$$\Delta_1 \lambda_k \overline{c_k} + \Delta_1 \lambda_k c_k = 0$$

имеет ненулевое решение c_k, которое находится по формуле

$$c_k = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если } \Delta_1(\lambda_k) = \Delta_2(\lambda_k) = 0, \\ \overline{\Delta_1(\lambda_k)} \cdot \alpha_k - \overline{\Delta_1(\lambda_k)} \cdot \overline{\alpha_k}, & \text{если } |\Delta_1(\lambda_k)| = |\Delta_2(\lambda_k)| \neq 0, \end{cases}$$

α_k– произвольное комплексное число. Таким образом, функция

$$V(r,\varphi) = r^{\lambda_k} \cdot exp(iB_{\lambda_k}(\varphi))(\overline{c_k} P_{\lambda_k,1}(\varphi) + c_k P_{\lambda_k,2}(\varphi)), \tag{10}$$

где λ_k — решение уравнения (9) из $[k, k+1]$, является решением уравнения (1) из класса (2). Следовательно, нами решена задача.

Задача B. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0,\varphi) = 0 \qquad (n = \overline{0, k-1}),$$

$$|V(r,\varphi)| = O(r^k), \qquad 0 \le r < \infty,$$

где $k \geq 1$ – натуральное число.

Так как уравнение (9) имеет решение λ_k из $[k, k+1]$, то функция, определяемая по формуле (10), будет решением задачи B. Итак, имеет место

Теорема. *Задача B имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формуле (10), где* λ_k *— решение уравнения (9) из* $[k, k+1]$.

Цитированная литература

1. **Тунгатаров А.Б., Кушербаева У.Р.** //Вест. КазНУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. №2. С.4 - 8.

2. **Касымова Д.Е., Тунгатаров А.Б.** //Изв. НАН РК. Сер. физ. - мат. 1996. № 1. С.55 - 59.

3. **Тунгатаров А.Б.** //Доклады АН СССР. 1991. Т.319, №3.

Поступила в редакцию 3.08.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С.36 — 41*

УДК 517.925:62.50

ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ

С.С.Жуматов

Институт Математики МО и Н РК
050010 г.Алматы ул. Пушкина,125 anar@math.kz

Вводится понятие области притяжения программного многообразия относительно некоторой вектор-функции. Определены управления по отклонению от заданной программы, обеспечивающие асимптотическую устойчивость программного многообразия. Найдены области притяжения относительно некоторой вектор-функции.

1. Введение. Постановка задачи. В работе [1] сформулированы задачи синтеза асимптотически устойчивых систем, обладающие заданным качеством и дан общий метод синтеза законов обратной связи в классе достаточных для системы вида

$$\dot{x} = g(x,t) + m(x,t)\xi, \tag{1}$$

где ξ — скаляр, удовлетворяющий условию

$$|\xi| \leq \overline{\xi}, \tag{2}$$

система

$$\dot{x} = g(x,t) \tag{3}$$

обладает свойством устойчивости относительно невозмущенного движения $x = 0$. В [2] эти задачи решались для различных систем автоматического управления. Получены оценки решений и времени переходного процесса автономных и неавтономных систем управления. В [3] решались задачи синтеза систем, обладающих наперед заданными свойствами в виде некоторого программного многообразия. Получены условия быстродействия регулятора, перерегулирования и монотонного затухания переходного процесса в окрестности программного многообразия. В данной работе исследуются задачи синтеза программного многообразия асимптотически устойчивых систем автоматического управления и нахождения области притяжения в окрестности заданного многообразия.

Рассмотрим материальную систему, движение которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \tag{4}$$

Keywords: *domain of attraction, asymptotical stability, control system, program manifold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C15, 34K29

и обладающую $(n-s)$-мерным интегральным многообразием $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, где матрица $B \in R^{n\times r}$, $x \in R^n$ – вектор состояния объекта, $f(t,x) \in R^n$ -вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности, $\omega \in R^S$, $s \le n$, $\xi \in R^r$ – вектор управления по отклонению от заданной программы.

В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (4), имеет место

$$\dot\omega = \frac{\partial\omega}{\partial t} + H\cdot f(t,x) = F(t,x,\omega), \quad H = \frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Здесь F – функция Еругина [4], удовлетворяющая условию $F(t,x,0)\equiv 0$, при $F = F(t,\omega,\xi(\omega,t))$ система называется замкнутой, $\xi = \xi(\omega,t)$ – множество законов обратной связи [1].

Если положим, что $F = -A\omega$, $-A \in R^{s\times s}$ – гурвицева матрица, то, продифференцировав многообразие $\Omega(t)$ по времени t, в силу системы (4) получим

$$\dot\omega = -A\omega - HB\xi. \tag{5}$$

Определение. *Множество, содержащее $\omega = 0$, для которого программное многообразие $\Omega(t)$ сохраняет свойство асимптотической устойчивости относительно вектор-функции ω, называется областью притяжения данного многообразия.*

Задача. Дано множество M законов обратной связи. Требуется определить его подмножество M_1, на котором сохраняется свойство асимптотической устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω.

2. Синтез законов обратной связи основной системы управления. В силу гурвицевости матрицы $-A$ при отсутствии управления ($\xi = 0$) линейная часть системы (5)

$$\dot\omega = -A\omega \tag{6}$$

обладает свойством асимптотической устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega = 0$.

Для системы (5) строим функцию Ляпунова вида

$$V = L(\omega) = \omega^T L\omega > 0, \quad L = L^T > 0, \tag{7}$$

и, дифференцируя ее по времени t вдоль траектории системы (5), получим

$$-\dot V = G(\omega) + 2\omega^T LHB\xi, \tag{8}$$

где

$$G(\omega) = \omega^T G\omega, \quad G = A^T L + LA. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что матрица $-A$ устойчива и $L = L^T > 0$, имеем $G > 0$. Откуда вытекает $G(\omega) > 0$. Формула (8) позволяет указать множество допустимых управлений ξ, гарантирующее устойчивость системы (5). Поэтому, чтобы было $-\dot V > 0$, достаточно положить либо

$$\xi_m = \overline{\xi}_m sign\sigma_m, \quad \sigma = P^T\omega, \quad P = LHB \quad \forall\, m_1^r, \tag{10}$$

если $\sigma = ||\sigma_1,\ldots,\sigma_r||^T$, а

$$||\xi|| \le \overline{\xi},\ (|\xi_m| \le \overline{\xi}_m \ \wedge\ \overline{\xi}_m > 0 \quad \forall\, m_1^r, \tag{11}$$

либо

$$\xi = \varphi(\sigma),\ ||\varphi(\sigma)|| \le \overline{\xi},\ \varphi(0) = 0\ \wedge\ 0 \le \sigma_m\varphi_m(\sigma_m) \le \sigma_m^2 \quad \forall\, m_1^r, \tag{12}$$

либо

$$\xi = \varphi(\sigma, t),\ ||\varphi(\sigma, t)|| \le \overline{\xi},\ \varphi(0, t) = 0\ \wedge\ 0 \le \sigma_m\varphi_m(\sigma_m) \le \sigma_m^2 \quad \forall\ \sigma_m \ne 0\ (m = \overline{1, r}), \tag{13}$$

либо

$$\xi = sat\mu\sigma = ||sat\mu_1\sigma_1, \dots, sat\mu_r\sigma_r||^T,\ \mu_m > 0\ \ (m = \overline{1, r}), \tag{14}$$

$$sat\mu_m\sigma_m = \begin{cases} \overline{\xi}_m \text{ при } \mu_m\sigma_m > \overline{\xi}_m, \\ \mu_m\sigma_m \text{ при } \mu_m|\sigma_m| \le \overline{\xi}_m, \quad (m = \overline{1, r}) \\ -\overline{\xi}_m \text{ при } \mu_m\sigma_m < -\overline{\xi}_m. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть для системы (5) существует функция Ляпунова $V > 0$. Тогда для асимптотической устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω достаточно выбрать управление в виде* $(10) \vee (12) \vee (13) \vee (14)$.

3. Синтез законов обратной связи системы непрямого управления. Предположим, что управление удовлетворяет условиям

$$|\dot{\xi}_m| \le \overline{\xi}_m \quad \forall\ m_1^r. \tag{16}$$

Тогда функцию Ляпунова можно построить следующим образом:

$$V = z^T Lz > 0, \quad z = -A\omega - HB\xi, \tag{17}$$

при этом $L = L^T > 0$ и $A\omega + HB\xi = 0$ только лишь при $\omega = \xi = 0$.

Дифференцируя функцию (17) по времени t, получим

$$-\dot{V} = 2z^T LAz - 2z^T LHB\dot{\xi}. \tag{18}$$

На основании выражения (18) можно установить множество допустимых управлений $\dot{\xi}$, гарантирующее устойчивость системы (5), если положим

$$\sigma = \overline{C}^T z = C^T\omega - R\xi,\ C = -A^T\overline{C},\ R = B^T H^T\overline{C},\ \ \overline{C} = LHB. \tag{19}$$

Тогда выражение (18) преобразуется к виду

$$-\dot{V} = z^T Gz + 2\sigma^T\dot{\xi}, \tag{20}$$

где G определяется формулой (9).

Отсюда для того, чтобы было $-\dot{V} > 0$, достаточно принять за $\dot{\xi}$ любую функцию, обладающую свойством:

либо

$$\dot{\xi}_m = \varphi_m(\sigma_m),\ ||\varphi_m(\sigma_m)|| \le \overline{\xi}_m,\ \varphi(0) = 0\ \wedge\ 0 < \sigma_m\varphi_m(\sigma_m) \le k_m\sigma_m^2\ (m = \overline{1, r}), \tag{21}$$

либо

$$\dot{\xi}_m = \overline{\xi}_m sign\sigma_m,\ (m = \overline{1, r}), \tag{22}$$

либо

$$\dot{\xi}_m = \varphi_m(\sigma_m, t),\ ||\varphi_m(\sigma_m, t)|| \le \overline{\xi}_m,\ \varphi(0, t) = 0\ \wedge\ 0 < \sigma_m\varphi_m(\sigma_m) \le k_m\sigma_m^2 \quad \forall\ \sigma_m \ne 0\ (m = \overline{1, r}), \tag{23}$$

либо

$$\dot{\xi}_m = sat\mu_m\sigma_m\ \mu_m > 0\ (m = \overline{1, r}). \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть для системы (5) существует функция Ляпунова $V > 0$, определяемая формулой (17), и выполняется соотношение (19). Тогда для асимптотической устойчивости программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции ω достаточно выбрать управление в виде* $(21) \vee (22) \vee (23) \vee (24)$.

3. Построение области притяжения программного многообразия основной системы управления. Рассмотрим систему (5) и (10). Пусть $\nu_1 < \ldots < \nu_s$ – собственные числа матрицы L из (7). Тогда

$$\nu_1||\omega||^2 \leq V \leq \nu_s||\omega||^2. \tag{25}$$

Предположим, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ – собственные числа матрицы G (9), тогда из (7) при условии (10)

$$C = LHB \tag{26}$$

имеем

$$\gamma_1||\omega||^2 \leq -\dot{V} \leq \gamma_s||\omega||^2. \tag{27}$$

Сравнивая неравенства (25) и (27), получаем

$$\frac{\gamma_1}{\nu_s}dt \leq -\frac{dv}{V} \leq \frac{\gamma_s}{\nu_1}dt. \tag{28}$$

Интегрируя соотношение (28) от t_0 до t, находим

$$V_0 exp\{-\alpha_1(t-t_0)\} \leq V \leq V_0 exp\{-\alpha_s(t-t_0)\}, \tag{29}$$

где

$$V_0 = \omega^T(t_0)L\omega(t_0),\ \alpha_1 = \gamma_s\nu_1^{-1},\ \alpha_s = \gamma_1\nu_s^{-1}. \tag{30}$$

Неравенства (25) эквивалентны неравенствам

$$\nu_s^{-1}V \leq r^2 \leq \nu_1^{-1}V, \tag{31}$$

следовательно, в силу (29) и (31) имеем

$$\nu_s^{-1}V_0 exp\{-\alpha_1(t-t_0)\} \leq r^2 \leq \nu_1^{-1}V_0 exp\{-\alpha_s(t-t_0)\} \ \ \forall\, t > t_0.$$

При условии

$$\alpha_1 > 0 \ \wedge\ \alpha_s > 0 \tag{32}$$

областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega = 0$ систем уравнений (4) и (14) является все фазовое пространство R_ω. Так как

$$\omega(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \tag{33}$$

при любом значении

$$V_0 = V(\omega_0). \tag{34}$$

Теорема 3. *Пусть система (5) асимптотически устойчива относительно вектор-функции ω, а нелинейная функция удовлетворяет условиям (10). Тогда областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ при выполнении условия (32) будет все фазовое пространство R_ω. Здесь $\alpha_1,\ \alpha_s$ определяются формулой (30).*

4. Построение области притяжения программного многообразия непрямой системы управления. Рассмотрим систему уравнений (5) и (21):

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi,\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma),\ \sigma = C^T\omega - R\xi, \tag{35}$$

где

$$C = -A^T LHB,\ R = B^T H^T LHB > 0, \tag{36}$$

тогда из условий (16) и (19) получим

$$\nu_1 ||z||^2 \leq V \leq \nu_{s+r} ||z||^2 \tag{37}$$

и

$$\gamma_1 ||z||^2 \leq -\dot{V} \leq (\gamma_{s+r} + \lambda_1) ||z||^2, \tag{38}$$

где λ_1 – наименьший корень уравнения

$$det||(LHB)^T KLHB - \lambda E|| = 0. \tag{39}$$

Здесь

$$K = diag||k_1, \ldots, k_s|| > 0. \tag{40}$$

На основании (37) и (38) получим оценки

$$V_0 exp\{-\alpha_1 (t - t_0)\} \leq V \leq V_0 exp\{-\alpha_s (t - t_0)\}, \tag{41}$$

где

$$V_0 = V(z_0) = V(\omega_0, \xi_0) = (A\omega_0 + HB\xi_0)^T L(A\omega_0 + HB\xi_0),\ \alpha_1 = (\gamma_{s+r} + \lambda_1)\nu_1^{-1},\ \alpha_s = \gamma_1 \nu_{s+r}^{-1}. \tag{42}$$

Областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $\omega = \xi = 0$ систем уравнений (35) и (21) является все фазовое пространство R_ω, если выполняются соотношения (32).

Теорема 4. *Пусть система (5) асимптотически устойчива относительно вектор-функции ω, а нелинейная функция удовлетворяет условиям (21). Тогда областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ при выполнении условия (32) будет все фазовое пространство R_ω. Здесь $\alpha_1,\ \alpha_s$ определяются формулой (42).*

Рассмотрим теперь систему уравнений, когда управление является линейной функцией относительно σ :

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \dot{\xi} = \mu\sigma,\ \sigma = p^T \omega - q\xi. \tag{43}$$

Предположим, что для системы (43) построена функция Ляпунова

$$V = y^T L_1 y, \tag{44}$$

где $y = ||\omega, \xi||^T$, которая имеет производную в силу системы (43)

$$-\dot{V} = y^T G_1 y. \tag{45}$$

Здесь

$$G_1 = A_1^T L_1 + L_1 A_1,\ A_1 = \left\| \begin{array}{cc} A & b \\ -\mu p^T & \mu q \end{array} \right\|. \tag{46}$$

Тогда

$$\nu_1 ||y||^2 \leq V \leq \nu_{s+r} ||y||^2,\ \gamma_* ||y||^2 \leq -\dot{V} \leq \gamma^* ||y||^2, \tag{47}$$

где

$$\gamma_* = \sup_m (\overline{\gamma}_m),\ \gamma^* = \inf_m (\overline{\gamma}_m)\ (m = \overline{1, s+r}), \tag{48}$$

$\overline{\gamma}_m$ – собственные числа матрицы G_1 из (46). На основании (47) получим следующие оценки:

$$V_0 exp\{-\alpha_* (t - t_0)\} \leq V \leq V_0 exp\{-\alpha^* (t - t_0)\}, \tag{49}$$

где

$$V_0 = y_0^T L_1 y_0,\ \alpha_* = \gamma^* \nu_1^{-1},\ \alpha^* = \gamma_* \nu_{s+r}^{-1},$$

$$\nu_s^{-1} V_0 exp\{-\alpha_*(t-t_0)\} \le ||y||^2 \le \nu_1^{-1} V_0 exp\{-\alpha^*(t-t_0)\}\ \ \forall\ t > t_0. \tag{50}$$

Областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ относительно вектор-функции $y = 0$ систем уравнений (35) и (21) является все фазовое пространство R_y, если выполняются соотношения

$$\alpha_* > 0\ \wedge\ \alpha^* > 0. \tag{51}$$

.

Теорема 5. *Пусть система (43) асимптотически устойчива относительно вектор-функции y, а управление является линейным относительно σ. Тогда областью притяжения программного многообразия $\Omega(t)$ при выполнении условия (51) будет все фазовое пространство R_y. Здесь $\alpha_*,\ \alpha_*$ определяются формулой (50).*

Цитированная литература

1. **Летов А. М.** Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., 1962

2. **Майгарин Б. Ж.** Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата, 1980

3. **Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.** Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. Алматы, 1999

4. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др.** Построение систем программного движения. М., 1971

Поступила в редакцию 26.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 42 – 47*

УДК 512.554.31

НЕРАСЩЕПЛЯЕМЫЕ РАСШИРЕНИЯ $sl_4(k)$

Ш. Ш. Ибраев

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 sherali@pochta.ru

Описаны группы вторых когомологий неприводимых модулей алгебры Ли $sl_4(k)$ и соответствующей алгебраической группы $SL_4(k)$, где k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 3$. Для $sl_4(k)$ -модулей доказана эквивалентность их обычных вторых и ограниченных вторых групп когомологий.

§1. Введение

1954 году для ограниченных алгебр Ли в категории ограниченных модулей Хохшильд ввел понятия ограниченной когомологии [1]. Она отличается от когомологии Шевалле-Эйленберга, введенного в работе [2]. Связь между ними также была установлена в [1]. Так как все классические модулярные алгебры Ли являются ограниченными алгебрами Ли [3], то мы можем параллельно рассматривать когомологии обоих типов в категории ограниченных модулей классических модулярных алгебр Ли. С другой стороны, операции Фробениуса на простых односвязных алгебраических группах классических алгебр Ли и на рациональных представлениях алгебраических групп определяют связи между ограниченными когомологиями и когомологиями Хохшильда для алгебраических групп [4]. Таким образом, существуют связи между когомологиями трех типов: когомология Картана-Эйленберга (обычная когомология) и ограниченная когомология алгебр Ли, и когомология Хохшильда для алгебраических групп. Подробные изучения связи между ними позволяют получить много полезной информации о структурах этих когомологий. В данной работе на этой основе описываются вторые группы когомологии неприводимых модулей $sl_4(k)$ и группы $SL_4(k)$.

Для классических алгебр Ли ранга 1 и 2 структура вторых групп когомологий неприводимых модулей известна [5], [6].

Keywords: *Lie algebra, Lie algebra cohomology, algebraic group*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

§2. Предварительные факты и формулировка основных результатов

2.1. Обозначения. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, $\mathbf{g} = sl_4(k)$ – специальная линейная алгебра Ли и $G = SL_4(k)$ – специальная линейная группа, рассматриваемая как алгебраическая групповая схема алгебры Ли $\mathbf{g}$. Используем следующие обозначения:

B – подгруппа Бореля группы G, соответствующая отрицательным корням,
U – унипотентный радикал B,
T – максимальный тор в G,
F – отображение Фробениуса на G,
G_1 – ядро отображения Фробениуса для G,
B_1 – ядро отображения Фробениуса для B,
U_1 – ядро отображения Фробениуса для U,
$\mathbf{u}$ – алгебра Ли группы U,
$\mathbf{h}$ – алгебра Ли максимального тора T,
$X(T)$ – группа (аддитивная) характеров T,
$X(T)_+$ – множество доминантных весов,
$X_1(T)$ – множество ограниченных весов,
$R \subset X(T)$ – система корней,
R_+ – множество положительных корней,
R_- – множество отрицательных корней,
Δ – множество простых корней,
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – простые корни (нумерация соответствует таблице Бурбаки),
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – фундаментальные веса,
$\rho = (1/2)\sum_{\alpha \in R_+} = \sum_i \lambda_i$ – полусумма положительных корней,
$(,)$ – скалярное произведение на векторном пространстве $X(T) \otimes_Z R$,
$\langle \lambda, \mu^\vee \rangle = 2\frac{(\lambda,\mu)}{(\mu,\mu)}$, $\lambda, \mu \in X(T)$,
W – группа Вейля системы R,
$s_i \in W$ – отражение, определяемое формулой $s_i(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha_i \rangle \alpha_i$,
$w \cdot \mu = w(\mu + \rho) - \rho$ – точечное действие группы Вейля,
$l(w)$ – длина элемента $w \in W$ относительно отражений s_1, s_2, s_3,
$w_0 \in W$ – элемент максимальной длины.

2.2. Индуцированные модули и модули Вейля для G. Для любого $\lambda \in X(T)$ можно определить одномерный B-модуль k_λ с помощью изоморфизма $T \cong B/U$ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in X(T)_+$. Если $V(\lambda)$ – модуль Вейля над G, то $H^0(\lambda) \cong V(-w_0\lambda)^*$. Следовательно, $H^0(\lambda)$ можно рассматривать как дуальный модуль Вейля со старшим весом $-w_0(\lambda)$. С модулями $H^0(\lambda)$ и $V(\lambda)$ связан неприводимый G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ. С одной стороны он – цоколь G-модуля $H^0(\lambda)$, с другой – фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю ([7], 5.7).

2.3. Модули для $\mathbf{g}$. Пусть A – координатное кольцо групповой схемы G. На A можно ввести структуру k-алгебры Хопфа с помощью копроизведения $\Delta : A \to A \otimes A$, аугментации $\varepsilon : A \to k$ и антипода $S : A \to A$. Дуальное пространство A^* координатного кольца A групповой схемы G имеет структуру k-алгебры по формуле $(f \cdot g)(a) = (f \otimes g)(\Delta(a))$, где $f, g \in A^*$, $a \in A$. Алгебра Ли $\mathbf{g}$ групповой схемы G определяется как p-Ли подалгебра алгебры A^*: $\mathbf{g} = \{f \in A^* : f(ab) = \varepsilon(a)f(b) + \varepsilon(b)f(a);\, a, b \in A\}$.

Если V – рациональный G-модуль с комодульным отображением $t : V \to V \otimes A$, то V – A^*-модуль относительно действия $f \cdot v = (Id \otimes f)(t(v))$, где $v \in V$, $f \in A^*$. Ограничение действия A^* на $\mathbf{g} \subset A^*$ наделяет на V структуру $\mathbf{g}$-модуля. Поэтому $G-$ модули $H^0(\lambda)$, $V(\lambda)$, $L(\lambda)$ могут быть рассмотрены также, как $\mathbf{g}$-модули.

2.4. $H^m(\mathbf{g},V)$ *(когомология Шевалле-Эйленберга).* Пусть V – конечномерный $\mathbf{g}$-модуль, $U(\mathbf{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathbf{g}$. Коцепным комплексом пространств когомологии $\{H^m(\mathbf{g},V)\}_m$ является $\{C^m(\mathbf{g},V),\partial^m\}_{i\geq 0}$, где $C^0(\mathbf{g},V)=V$, $C^m(\mathbf{g},V)=Hom_k(\wedge^m,V)$ при $m>0$; для $\psi\in C^m(\mathbf{g},V)$ и $l_i\in\mathbf{g}$

$$(\partial^m\psi)(l_1\wedge\cdots\wedge l_{m+1})=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i+1}l_i(\psi(l_1\wedge\cdots\wedge\hat{l}_i\wedge\cdots\wedge l_{m+1}))+$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\psi([l_i,l_j]\wedge l_1\wedge\cdots\wedge\hat{l}_i\wedge\cdots\wedge\hat{l}_i\wedge\cdots\wedge l_{m+1})).$$

Тогда

$$H^i(\mathbf{g},V))\overset{def}{=}Ext^i_{U(\mathbf{g})}(k,V).$$

2.5. $H^i_*(\mathbf{g},V)$ *(ограниченная когомология).* Пусть V – ограниченный $\mathbf{g}$-модуль, $U_0(\mathbf{g})$ – ограниченная универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathbf{g}$. Тогда

$$H^i_*(\mathbf{g},V))\overset{def}{=}Ext^i_{U_0(\mathbf{g})}(k,V).$$

2.6. $H^i(G,V)$ *(когомология Хохшильда).* Если V – рациональный G-модуль с комодульным отображением $t:V\to V\otimes A$, то пространства когомологии Хохшильда $\{H^m(G,V)\}_m$ определяются коцепным комплексом $\{C^m(G,V)=V\otimes A^{\otimes m}\}_m$ [8].

2.7. Степени Фробениуса G-модулей. Пусть V – рациональный G-модуль и $t:V\to V\otimes A$ – комодульное отображение. Тогда комодульное отображение

$$V\xrightarrow{t}V\otimes_k A_0\otimes_{F_p}k\overset{Id\otimes f_i\otimes Id}{\longrightarrow}V\otimes_k A_0\otimes_{F_p}k,$$

где $f_i:A_0\to A_0$, $f_i(a)=a^{p^i}$, $a\in A_0$, определяет новое представление $\rho^{p^i}:G\to GL(V)$. Пространство представления ρ^{p^i} обозначается через $V^{(i)}$.

Если $\rho:G\to GL(V)$ – такое представление G, что $KerF^i\subset Ker\,\rho$, то существует единственное представление $\tau:G\to GL(V)$, удовлетворяющее условию $\rho=\tau^{p^i}$. Пространство представления τ обозначается через $V^{(-i)}$.

2.8. Пусть V – ограниченный $\mathbf{g}$-модуль. Гипералгебра $hy(G_1)$ для G_1 изоморфна ограниченной обертывающей алгебре $U_0(\mathbf{g})$ алгебры Ли $\mathbf{g}$ [7]. Поэтому когомология Хохшильда $H^k(G_1,V)$ и ограниченная когомология $H^k_*(\mathbf{g},V)$ эквивалентны.

2.9. Теорема Стейнберга. Каждый неприводимый G-модуль M может быть представлен в виде тензорного произведения $M=M_1\otimes M_1^{(1)}\otimes\cdots\otimes M_m^{(m)}$, где M_i – G-модули, остающиеся неприводимыми относительно дифференциального действия $\mathbf{g}$ (или G_1).

2.10. Формулировка основных результатов. В дальнейшем для веса $a\lambda_1+b\lambda_2+c\lambda_3\in X(T)$ будем использовать сокращенное обозначение (a,b,c).

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{g}$ – классическая алгебра Ли типа A_3 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$, V – неприводимый $\mathbf{g}$– модуль и $L(\lambda)$ – неприводимый $\mathbf{g}$– модуль со старшим весом λ. Тогда $H^2(\mathbf{g},V)=0$ кроме следующих случаев:*

$$H^2(\mathbf{g},L(\lambda))\cong\begin{cases}H^0(\lambda_1)^{(1)},\ \textit{если}\ \lambda=(p-3,0,1),\ (1,p-2,p-3);\\ H^0(\lambda_2)^{(1)},\ \textit{если}\ \lambda=(0,p-3,2),\ (2,p-3,0),\ (p-2,p-2,p-2);\\ H^0(\lambda_3)^{(1)},\ \textit{если}\ \lambda=(1,0,p-3),\ (p-3,p-2,1);\\ H^0(\lambda_1+\lambda_3)^{(1)}\mathbf{g}^{(1)},\ \textit{если}\ \lambda=(p-2,2,p-2);\\ k,\ \textit{если}\ \lambda=(p-4,1,p-2),\ (p-2,1,p-4).\end{cases}$$

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{g}$ *– классическая алгебра Ли типа* A_3 *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$, V *– нетривиальный неприводимый* $\mathbf{g}-$ *модуль и* $L(\lambda)$ *– неприводимый* $\mathbf{g}-$ *модуль со старшим весом* λ. *Тогда* $H^2(\mathbf{g}, L(\lambda)) \cong H^2_*(\mathbf{g}, L(\lambda))$.

Для каждого неотрицательного целого j введем в рассмотрение следующее множество доминантных весов:

$$\Lambda^2_j = \{p^i(p-3,0,p+1),\ p^i(1,p-2,2p-3),\ p^i(0,2p-3,2),\ p^i(2,2p-3,0),$$

$$p^i(p-2,2p-2,p-2),\ p^i(p+1,0,p-3),\ p^i(2p-3,p-2,1),$$

$$p^i(2p-2,2,2p-2),\ p^i(p-4,1,p-2),\ p^i(p-2,1,p-4),\ p^{i+1}(1,0,1)\}.$$

Следствие 2. *Пусть* $G = GL(4,k)$ *– простая односвязная алгебраическая группа алгебры Ли* $sl_4(k)$ *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$ *и* V *– неприводимый* G*-модуль со старшим весом* λ. *Тогда*

$$H^2(G,V) \cong \begin{cases} k, & \textit{если}\ \lambda \in \Lambda^2_j,\ j \geq 0; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

§3. Доказательство основных результатов

3.1. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим длинную точную последовательность $\mathbf{g}$-когомологии, соответствующую короткой точной последовательности $0 \to L(\lambda) \to H^0(\lambda) \to M(\lambda) \to 0$, где $M(\lambda) = H^0(\lambda)/L(\lambda)$:

$$\cdots \stackrel{c_{k-1}}{\to} H^k(\mathbf{g}, L(\lambda)) \stackrel{a_k}{\to} H^k(\mathbf{g}, H^0(\lambda)) \stackrel{b_k}{\to} H^k(\mathbf{g}, M(\lambda)) \stackrel{c_k}{\to} H^{k+1}(\mathbf{g}, L(\lambda)) \stackrel{a_{k+1}}{\to} \cdots.$$

Лемма 1. *Пусть* $p > 3$ *и* $\lambda = p\nu - w \cdot 0 \in X(T)$, *где* $l(w) = 2$. *Тогда*

(a) $H^1(\mathbf{g}, M(\lambda)) = 0$;

(b) $H^2(\mathbf{g}, L(\lambda))^{(-1)}$ *имеет прямую слагаемую, изоморфную* $H^0(\nu)$ *и цоколь* $L(\lambda)$ *содержится в образе канонического отображения* $a_2 : H^2(\mathbf{g}, L(\lambda))^{(-1)} \to H^2(\mathbf{g}, H^0(\lambda))^{(-1)}$.

Доказательство. (a) В группе Вейля W содержится только пять различных элементов, имеющих длину 2. Их точечные действия на нулевой вес дают следующие пять доминантных весов: $(p-3,0,1)$, $(1,0,p-3)$, $(0,p-3,2)$, $(2,p-3,0)$, $(p-2,2,p-2)$.

Если $L(\mu)$ – композиционный фактор $H^0(\lambda)$, то μ сильно связан с λ [9].

Пусть $\mu \in X(T)$ – старший вес композиционного фактора $H^0(\lambda)$. Тогда из определения сильной связанности μ с λ следует, что $\mu \leq \lambda$. Предположим теперь $H^1(\mathbf{g}, L(\mu)) \neq 0$. Тогда $\mu = p\lambda_i - \alpha_i$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$ или $\mu \in \{(2,p-2,p-2), (p-2,p-2,2), (p-3,2,p-3), (p-3,0,p-3)\}$ ([10], 6.10). Очевидно, что при любом $i \in \{1,2,3\}$ $\lambda \leq \mu$. Но это противоречит принципу сильной связанности μ с λ. Далее прямым вычислением можно показать, что каждый вес множества $\{(2,p-2,p-2), (p-2,p-2,2), (p-3,2,p-3), (p-3,0,p-3)\}$ не имеет отношение сильной связанности с каждым из весов множества $\{(p-3,0,1), (1,0,p-3), (0,p-3,2), (2,p-3,0), (p-2,2,p-2)\}$. Следовательно, $H^1(\mathbf{g}, M(\mu)) = 0$.

(b) Первая часть утверждения доказана в работе [11]. Докажем вторую часть утверждения. Для этого рассмотрим ненулевой элемент веса $p\nu$ из $H^2(\mathbf{g}, L(\lambda))$. Его можно представить 2-коциклом $\psi \in Z^2(\mathbf{g}, H^0(\lambda))$ веса $p\nu$. Докажем, что ψ принимает значения из $L(\lambda)$.

ψ любую $\mathbf{g}_\alpha \wedge \mathbf{g}_\beta$ отображает на $p\nu+\alpha+\beta$-весовое подпространство пространства $H^0(\lambda)$. Если это весовое подпространство ненулевое, то $p\nu+\alpha+\beta < p\nu - w\cdot 0$, т.е. $\alpha+\beta < -w\cdot 0$. Таким образом, мы должны доказать, что $\psi(e_\alpha \wedge e_\beta) \in L(\lambda)$ для всех отрицательных корней α, β таких, что $\alpha+\beta < -w\cdot 0$. Это легко доказывается индукцией по $\alpha+\beta$ с использованием условия коцикличности.

Лемма 2. *Пусть* $p>3$ *и* $\lambda = p\lambda_i - \alpha_i \in X_1(T)$. *Тогда* $H^1(\mathbf{g}, M(\lambda)) = 0$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения (a) леммы 1.

Лемма 3. $H^1(\mathbf{g}, M(\lambda)) \neq 0$ *если* $\lambda \in \{(1,p-2,p-3), (p-3,p-2,1), (p-2,p-2,p-2), (p-2,1,p-4), (p-4,1,p-2)\}$.

Доказательство. Согласно принципу связанности и полному списку первых групп когомологий неприводимых модулей ([10], с. 314) $H^1(\mathbf{g}, M(\lambda)) \neq 0$, если $H^0(\lambda)$ имеет композиционные факторы из следующего списка: $L(p-3,0,p-3)$, $L(p-3,2,p-3)$, $L(2,p-2,p-2)$, $L(p-2,1,0)$, $L(p-2,p-2,2)$, $L(0,1,p-2)$, $L(1,p-2,1)$. Из 24 модулей $H^0(\lambda)$ со старшими особыми весами данные композиционные факторы имеют только модули $H^0(\lambda)$ со старшими весами, перечисленные в лемме.

Таким образом, утверждение теоремы 1 следует из лемм 1-3.

3.2. Доказательство следствия 1. Так как все рассматриваемые модули нетривиальны и неприводимы, то когомологии нулевой степени всегда равны нулю. Поэтому достаточно использовать результат теоремы 1 к точной последовательности Хохшильда ([10], с. 144):

$$H^0(\mathbf{g}, V)\otimes \mathbf{g}^* \to H^2(G_1, V) \to H^2(\mathbf{g}, V) \to H^1(\mathbf{g}, V)\otimes \mathbf{g}^*,$$

где V – нетривиальный неприводимый модуль над $\mathbf{g}$ и над G_1.

3.3. Доказательство следствия 2. Следует из следствия 1, теоремы Стейнберга 1.9 и следующего результата работы [4].

Предложение. (a) *Пусть* N – G*-модуль, не содержащий подмодуля, изоморфного присоединенному модулю* $\mathbf{g}$. *Тогда* $H^2(G,N) \cong H^2(G, N^{(m)})$, $m>0$.

(b) *Пусть* $M = M_j^{(j)} \otimes \otimes \cdots \otimes M_m^{(m)}$, $j \geq 0$, *– неприводимый* G*-модуль и* M_j *неизоморфна к* k. *Если* $H^1(G_1, M_j) = 0$ *и* M *неизоморфна к* $\mathbf{g}^{(j)}$, *то*

$$H^2(G,M) \cong Hom_G((M_j^{(1)} \otimes \otimes \cdots \otimes M_m^{(m-j)}))^*, H^2(G_1, M_j)).$$

(c) $H^2(G,\mathbf{g}) = 0$ *и* $H^2(G, \mathbf{g}^{(j)}) = k$ *при* $j>0$.

Цитированная литература

1. **Hochschild G.** // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76. P. 555 – 580.
2. **Chevalley C., Eilenberg S.** // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. P. 85 – 124.
3. **Джекобсон Н.** Алгебры Ли. М.,1964.
4. **Sullivan J. B.** // Amer. J. Math. 1980. V. 102. P. 765 – 780.
5. **Джумадильдаев А. С.** // Мат. сборник. 1982. Т. 119(161), № 9. С. 132 – 149.

6. **Dzhumadil'daev A. S., Ibraev S. S.** // Homology, Homotopy and Applications. 2002. № 4 (2). P. 141 – 163.

7. **Cline E., Parshall B., Scott L.** // J. of Algebra. 1980. V. 63. P. 98 – 123.

8. **Sullivan J. B.** // Amer. J. Math. 1978. V. 100. P. 995 – 1014.

9. **Andersen H. H.** // J. Reine Anew. Math. 1980. V. 315. P. 53-59.

10. **Jantzen J. C.** // Progress in Math. 1991. V. 95. P. 289 – 315.

11. **Ibraev S. S.** // Proc. of Int. Conf. "Humboldt-Colleg II". Almaty, 2004. P. 67 – 70.

Поступила в редакцию 04.02.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 48 – 54*

УДК 517.5

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ЯДЕРНЫМ СПЛАЙНОМ НА ХАОТИЧЕСКОЙ СЕТКЕ

Е. Н. Иванова

КазНУ имени аль-Фараби
050012 г.Алматы ул.Масанчи, 39/47 genremi@yandex.ru

Получена оценка погрешности интерполяции информационно-ядерным сплайном на классе истокообразных функций. Показано, что данная оценка непосредственно связана с условиями гладкости, накладываемыми на ядро, индуцирующие данный класс функций.

1. Постановка задачи. Пусть F_{mp} — класс истокообразных функций

$$F_{mp} = \left\{ f(x): \ f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(f)\varphi_i(x) + \int_{\Omega} f_{\Omega}(u)K(x,u)du \right\},$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}_d$, $a_i(f) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, Ω – измеримое и ограниченное множество из $\mathbb{R}_{d_1}$, $\Phi := \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ – линейно независимая система функций на G, исток $f_{\Omega}(u) \in L_p(\Omega)$, ядро $K(x,u) \in L_q(\Omega)$ при каждом фиксированном $x \in G$ $(1/p + 1/q = 1, \ 1 \le p \le \infty)$.

На классе F_{mp} зададим оператор информации $\mathbb{I}_n\colon F_{mp} \to \mathbb{R}_n$, $\mathbb{I}_n = (I_1, \ldots, I_n)$,

$$I_j(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i(f)I_j(\varphi_i) + \int_{\Omega} f_{\Omega}(u)I_j\left(K(\cdot,u)\right)du, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $I_j(\varphi_i) \in \mathbb{R}$, $I_j\left(K(\cdot,u)\right) \in L_q(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n)$.

Зададим вспомогательный функционал $I\colon F_{mp} \to \mathbb{R}$, действующий аналогично,

$$I(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i(f)I(\varphi_i) + \int_{\Omega} f_{\Omega}(u)I\left(K(\cdot,u)\right)du.$$

Предположим, что

$$\dim span\{v_1, \ldots, v_m\} = r \quad (r \le m \le n),$$

Keywords: *multivariate function, scattered data, spline, interpolation, error estimate.*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A25, 41A05

где $\upsilon_i = (I_1(\varphi_i), I_2(\varphi_i), \ldots, I_n(\varphi_i))$, $i = 1, \ldots, m$. Для определенности считаем линейно независимой систему векторов $\{\upsilon_i\}_{i=1}^r$ и при $r < m$

$$\upsilon_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} \upsilon_j, \quad i = r+1, \ldots, m, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Введем следующие обозначения:

$$K_j(u) := I_j\left(K(\cdot, u)\right) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\|g\|_p := \left(\int_\Omega |g(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} - L_p(\Omega) - \text{норма функции}\, g.$$

Зададим функционал $\mathcal{J}\colon F_{mp} \to \mathbb{R}_+$, который сопоставляет каждой функции $f(x) \in F_{mp}$ $L_p(\Omega)$–норму её истока:

$$\mathcal{J}(f) = \|f_\Omega\|_p.$$

Далее при фиксированном $z \in \mathbb{R}_n$ зададим множество

$$F_{mp}(z) = \left\{ f \in F_{mp} : \ \mathbb{I}_n(f) = z \right\}.$$

В [1] показано, что решением задачи минимизации функционала $\mathcal{J}$ относительно оператора информации $\mathbb{I}_n$

$$\mathcal{J}(f) \rightarrowtail \min, \ f \in F_{mp}(z) \quad (1 < p < \infty)$$

является элемент $s_z(x) \in F_{rp}(z)$ вида

$$s_z(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i(s_z)\varphi_i(x) + \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n} c_j(s_z) K_j(u) \right|^{q-1} sgn \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(s_z) K_j(u) \right) K(x,u) du,$$

удовлетворяющий дополнительным требованиям:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(s_z) I_j(\varphi_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Под информационно-ядерным сплайном для функции $f(x) \in F_{mp}$ относительно оператора информации $\mathbb{I}_n$ будем подразумевать элемент $s_f(x) \in F_{rp}$, удовлетворяющий требованиям

$$\begin{cases} \mathbb{I}_n(s_f) = \mathbb{I}_n(f), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j(s_f) I_j(\varphi_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

В [2] приведены необходимые и достаточные условия для существования $s_f(x)$.

Замечание 1. *При наложенном выше условии на оператор* $\mathbb{I}_n$ *справедливо*

$$s_\varphi(x) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in span \quad \Phi.$$

Целью нашей работы является оценка погрешности интерполяции информационно-ядерными сплайнами.

2. Общая оценка погрешности интерполяции. Для достижения поставленной цели воспользуемся методикой поточечной оценки погрешности интерполяции, которую ряд авторов активно использовали в теории радиально базисных функций.

Сначала опишем суть данного подхода. Первым этапом является представление интерполянта как решения некоторой вариационной задачи. Далее оценивается погрешность интерполяции, учитывая тот факт, что $\mathcal{J}(f - s_f) \leq c\,\mathcal{J}(f)$. Обычно эта погрешность записывается в виде

$$|f(x) - s_f(x)| \leq \mathcal{J}(f)\, P_X(x),$$

где

$$P_X(x) := c \sup_{\substack{f \in \Im \\ \mathcal{J}(f) \neq 0}} \frac{|f(x) - s_f(x)|}{\mathcal{J}(f)} \text{ – норма функционала ошибки.}$$

В свою очередь

$$P_X(x) = \inf_{\alpha \in A} \mathbb{P}_{\mathbb{I}_n}(\alpha; x),$$

где $\mathbb{P}_{\mathbb{I}_n}(\alpha; x)$ – некоторая функция, которая в зависимости от задачи имеет тот или иной вид, A – набор коэффициентов, локально восстанавливающий заданную систему функций. Поскольку поиск $\overline{\alpha} \in A$, $P_X(x) = \mathbb{P}_{\mathbb{I}_n}(\overline{\alpha}; x)$ достаточно сложен, то обычно подходящим образом подбирают $\alpha^* \in A$ и оценивают $P_X(x)$ сверху, то есть $P_X(x) \leq \mathbb{P}_{\mathbb{I}_n}(\alpha^*; x)$. Отметим, что в случае интерполяции радиальными базисными функциями наиболее известными работами по оцениванию $P_X(x)$ являются статьи З.Ву, Р.Шабака [3], и В.Мадича, С.Нельсона [4]. Также представляют большой интерес оценки, полученные Ж.Дюшоном [5], М.Джонсоном [6,7], О.В.Матвеевым [8], М.Пауэллом [9], Ф.Нарковичем и др. [10].

Итак приступим к реализации указанного подхода.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha \in A$, *где*

$$A := \left\{ \alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i(\varphi_j) = I(\varphi_j),\ j = 1, \ldots, r \right\}.$$

Тогда для погрешности интерполяции функции $f(x)$ *посредством* $s_f(x)$ *справедлива оценка*

$$|I(f) - I(s_f)| \leq \mathcal{J}(f)\, \mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha),$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha) := c(p) \left(\int_\Omega \left| I(K(\cdot, u)) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i(u) \right|^q du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. В силу требования, наложенного на $\mathbb{I}_n$, множество A не является пустым. Пусть

$$L := I - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i.$$

Справедливо включение: $span\ \Phi \subset \ker L$, где $\ker L := \{ f \in F_{mp} :\ L(f) = 0 \}$.

Учитывая вышесказанное и то, что $I_j(f) = I_j(s_f),\ j = 1, \ldots, n,$ получим

$$I(f - s_f) = L(f - s_f) = \left(I - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i\right)\left(\sum_{k=1}^{m} a_k(f)\varphi_k + \int_{\Omega} f_{\Omega}(u)K(\cdot, u)du -\right.$$

$$\left.- \sum_{k=1}^{r} a_k(s)\varphi_k - \int_{\Omega} s_{\Omega}(u)K(\cdot, u)du\right) = \left(I - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i\right)\left(\int_{\Omega} (f_{\Omega}(u) - s_{\Omega}(u)) \times\right.$$

$$\left.\times\ K(\cdot, u)du\right) = \int_{\Omega} (f_{\Omega}(u) - s_{\Omega}(u))\left(I(K(\cdot, u)) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i(u)\right) du.$$

В силу неравенства Гёльдера справедливо

$$\left|\int_{\Omega} (f_{\Omega}(u) - s_{\Omega}(u))\left(I(K(\cdot, u)) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i(u)\right) du\right| \leq$$

$$\leq c(p)\|f_{\Omega}\|_p \left(\int_{\Omega} |L(K(\cdot, u))|^q\, du\right)^{\frac{1}{q}} = \mathcal{J}(f)\mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha),$$

где

$$c(p) := \sup_{\substack{f \in F_{mp} \\ \mathcal{J}(f) \neq 0}} \frac{\mathcal{J}(f - s_f)}{\mathcal{J}(f)} \text{ – некоторое положительное число.}$$

Известно (см.[1]), что $c(p) = 1$ при $p = 2$ и $c(p) \leq 2$ при $p \neq 2$. Окончательно

$$|I(f) - I(s_f)| \leq \mathcal{J}(f)\mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha),$$

где $\mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha) := c(p)\left(\int_{\Omega} |L(K(\cdot, u))|^q\, du\right)^{\frac{1}{q}}$.

По определению норму функционала ошибки $f \to I(f) - I(s_f)$ можно записать следующим образом:

$$I(\mathbb{P}_X) := \sup_{\substack{f \in F_{mp} \\ \mathcal{J}(f) \neq 0}} \frac{|I(f) - I(s_f)|}{\mathcal{J}(f)}.$$

В силу леммы 1 её можно переписать по другому

$$I(\mathbb{P}_X) = \inf_{\alpha \in A} \mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha) = c(p)\ \inf_{\alpha \in A}\left(\int_{\Omega}\left|I(K(\cdot, u)) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i(u)\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Это справедливо в силу того, что левая часть неравенства в указанной лемме не зависит от α.
Следствие 1. *В условиях леммы 1 справедлива оценка*

$$|I(f) - I(s_f)| \leq \mathcal{J}(f)I(\mathbb{P}_X).$$

3. Частный случай оценки погрешности интерполяции.

Положим следующее:

Φ — алгебраическая система, линейной оболочкой которой является множество d-мерных полиномов степени, не более k на G, то есть $span\, \Phi = \Pi_k := span\{x^{\gamma},\ |\gamma|_1 \leq k\}$, γ – мультииндекс, $|\gamma|_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_d$;

$I = \delta_x$, то есть $I(f) = f(x)$, где $x \in G$;

$\mathbb{I}_n = (\delta_{x_i} :\ x_i \in G,\ i = 1, \ldots, n)$ – лагранжевый оператор, то есть

$$\mathbb{I}_n(f) = \{f(x_i) :\ x_i \in G,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $X = \{x_i\}_{i=1}^n -$ множество узлов интерполяции.

Далее в работе оценивается величина $\mathbb{P}_X$. Для этого мы будем искать $\alpha^* \in A$ с достаточно хорошими свойствами (локальность носителя, ограниченность), которые облегчают вычисление $\mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}$. При этом по определению $\mathbb{P}_X \le \mathbb{P}_{I,\mathbb{I}_n}(\alpha^*)$. В частности, нас будут интересовать наборы коэффициентов α, называемые допустимыми.

Определение 1. *Вектор-функцию $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ назовем допустимой для системы Φ на G, если она удовлетворяет условиям:*

(i) $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\varphi(x_i) = \varphi(x)\, \forall \varphi \in span \quad \Phi, \quad x \in G$
(свойство восстановления системы Φ);

(ii) $\exists\, c_1 > 0$ такое, что $\alpha_j(x) = 0$, если $|x - x_j| > c_1 h$ $(j = 1, ..., n)$, $x \in G$, где $h := \sup\limits_{\overline{x} \in G} \min\limits_{x_j \in X} |\overline{x} - x_j|$
(то есть при фиксированном $x \in G$ в наборе $\alpha(x)$ отличны от нуля только коэффициенты, соответствующие узлам интерполяции, лежащим в $V_{c_1 h}(x)$);

(iii) $\exists\, c_2 > 0$ такое, что $\sum_{i=1}^n |\alpha_i(x)| < c_2, \quad x \in G.$

Помимо требования, наложенного на оператор $\mathbb{I}_n$ в начале статьи, будем предполагать, что $\mathbb{I}_n$ обеспечивает существование допустимой вектор-функции для системы Φ на G.

Далее нам понадобятся формула Тейлора и лемма 2, взятая из статьи Д.Юна [11].

Формула Тейлора. *Если функция $g(x)$ определена и имеет в $V(t)$ (окрестность точки t) непрерывную производную $D^\beta g$, $|\beta|_1 \le k$, а $D^\beta g$ кусочно непрерывна в $V(t)$ при $|\beta|_1 = k+1$, то для $x \in V(t)$ справедлива формула*

$$g(x) = g(t) + \sum_{0<|\beta|_1 \le k} \frac{D^\beta g(t)}{\beta!}(x-t)^\beta + (\mathcal{R}_k g)(x;t),$$

где $(\mathcal{R}_k g)(x;t) = \sum_{|\beta|_1 = k+1} \frac{(x-t)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (k+1)(1-\theta)^k D^\beta g(t + \theta(x-t))d\theta$ – остаточный член в интегральной форме; β – мультииндекс, $|\beta|_1 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_d$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_+$, $\beta! := \beta_1! \cdots \beta_d!$, $x, t \in \mathbb{R}_d$, $(x-t)^\beta = (x^1 - t^1)^{\beta_1} \cdots (x^d - t^d)^{\beta_d}$.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ допустимая вектор-функция для системы Φ на G. Для того, чтобы равенство $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)p(x_i) = p(x)$ было справедливо $\forall p \in \Pi_k$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)(x - x_i)^l = \delta_{l,0}$, $|l|_1 \le k$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, где*

$$\delta_{l,0} = \begin{cases} 1, \text{ если } |l|_1 = 0, \\ 0, \text{ если } |l|_1 \ne 0. \end{cases}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\alpha(x) = \{\alpha_i(x),\ i = 1, \dots, n\}$ – допустимая вектор-функция для системы Φ на G . Если на ядро $K(x,u)$, порождающее класс истокообразных функций F_{mp}, наложены условия:*

(i) $K(\cdot, u)$ имеет в $V_{c_1 h}(x)$ непрерывную производную $D^\gamma K(\cdot, u)$ при $|\gamma|_1 \le k$, и кусочно непрерывную $D^\gamma K(\cdot, u)$ при $|\gamma|_1 = k+1$,

(ii) $D^\gamma K(x, \cdot) \in L_q(\Omega)$, при $|\gamma|_1 = k+1$,

то для погрешности интерполяции справедлива оценка

$$|f(x) - s_f(x)| \le c\, \mathcal{J}(f)\, h^{k+1}, \text{ где } \quad c \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Согласно следствию 1 $|f(x) - s_f(x)| \le \mathcal{J}(f)\mathbb{P}_X(x)$, и нам достаточно каким-нибудь подходящим образом оценить сверху величину $\mathbb{P}_X(x)$. В качестве набора α возьмем $\alpha(x) = \{\alpha_i(x),\ i = 1, \ldots, n\}$ – допустимую вектор-функцию для Π_k на G, с которой непосредственным образом связаны положительные числа c_1, c_2, взятые из определения 1. Тогда оценка для $\mathbb{P}_X(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbb{P}_X(x) \le c(p) \left(\int_\Omega \left| K(x,u) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) K(x_i,u) \right|^q du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $1 \in \Pi_k$, то $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1$. Учитывая это и используя разложение ядра $K(x_i,u)$ в $V(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме при фиксированном u, получим

$$\begin{aligned}
\Big| K(x,u) &- \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) K(x_i,u) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \big(K(x,u) - K(x_i,u) \big) \Big| = \\
&= \Big| \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \cdot \Big(K(x,u) - K(x,u) - \sum_{0<|\gamma|_1 \le k} \frac{D^\gamma K(x,u)}{\gamma!} (x_i - x)^\gamma - \\
&- \sum_{|\gamma|_1 = k+1} \frac{(x_i - x)^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (k+1)(1-\theta)^k D^\gamma K(x + \theta(x_i - x), u) d\theta \Big) \Big| \le \\
&\le \left| \sum_{0<|\gamma|_1 \le k} \frac{D^\gamma K(x,u)}{\gamma!} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)(x_i - x)^\gamma \right| + \\
&+ \left| \sum_{|\gamma|_1 = k+1} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{(x_i - x)^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (k+1)(1-\theta)^k D^\gamma K(x + \theta(x_i - x), u) d\theta \right|.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое предыдущей суммы равно нулю в силу того, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)(x_i - x)^\gamma = 0$, $0 < |\gamma|_1 \le k$ (согласно лемме 2).

Следовательно,

$$\mathbb{P}_X(x) \le c(p) \left\| \sum_{|\gamma|_1 = k+1} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{(x_i - x)^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (k+1)(1-\theta)^k D^\gamma K(x + \theta(x_i - x), \cdot) d\theta \right\|_q.$$

Далее, учитывая тот факт, что $\alpha_i(x) = 0$, если $|x - x_i| > c_1 h$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^n |\alpha_i(x)| \le c_2$

(в силу определения допустимой вектор-функции), получим

$$\mathbb{P}_X(x) \le c(p)\, c_1^{k+1}\, c_2\, h^{k+1} \max_{x_i \in X} \left\| \int_0^1 (1-\theta)^k \sum_{|\gamma|_1 = k+1} \frac{(k+1)}{\gamma!} \left| D^\gamma K(x + \theta(x_i - x), \cdot) \right| \, d\theta \right\|_q.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, можно записать следующее

$$\mathbb{P}_X(x) \le c(p)\, c_1^{k+1}\, c_2\, h^{k+1} \max_{x_i \in X} \int_0^1 (1-\theta)^k \sum_{|\gamma|_1 = k+1} \frac{(k+1)}{\gamma!} \left\| D^\gamma K(x + \theta(x_i - x), \cdot) \right\|_q \, d\theta.$$

Обозначая через $\|K(x+\theta(x_i-x),\cdot)\|_{k+1,q} := \sum\limits_{|\gamma|_1=k+1} \dfrac{(k+1)}{\gamma!}\,\|D^\gamma K(x+\theta(x_i-x),\cdot)\|_q$, перепишем предыдущее неравенство в виде

$$\mathbb{P}_X(x) \le c(p)\, c_1^{k+1}\, c_2\, h^{k+1} \max_{x_i\in X} \int_0^1 (1-\theta)^k\, \|K(x+\theta(x_i-x),\cdot)\|_{k+1,q}\, d\theta = \mathcal{C}(x)\, h^{k+1},$$

где $\mathcal{C}(x) = c(p)\, c_1^{k+1}\, c_2 \max\limits_{x_i\in X} \int_0^1 (1-\theta)^k\, \|K(x+\theta(x_i-x),\cdot)\|_{k+1,q}\, d\theta.$

То есть

$$|f(x)-s_f(x)| \le \mathcal{C}(x)\, \mathcal{J}(f)\, h^{k+1}.$$

В силу условий, наложенных на ядро $K(x,u)$, функция $\mathcal{C}(x)$ является ограниченной на G, то есть $\max\limits_{x\in G}\mathcal{C}(x) \le c$.

Следовательно,

$$|f(x)-s_f(x)| \le c\, \mathcal{J}(f)\, h^{k+1}.$$

Цитированная литература

1. **Женсыкбаев А.А.** // Математические заметки. 1995.Т.58, вып.4. С.512-524.
2. **Zhensykbaev A.A.** // East J.on Approx. 2004. V.10, №.1-2, P.57-65.
3. **Wu Z., Schaback R.** // IMA J.Numer.Anal. 1993. V.13. P.13-27.
4. **Madych W.R., Nelson S.A.** // J.Approx.Theory. 1992. V.70. P.94-114.
5. **Duchon J.** // Constructive theory of functions of several variables,Oberwolfach -1976,- Berlin-Heidelbers: Springer-Verlag. 1977. P.85-100.
6. **Johnson M.J.** // Constr.Approx. 1998. V.14, P.429-438.
7. **Johnson M.J.** // Numerische Mathematik, 2000. V.84, №3, P.451-474.
8. **Матвеев О.В.** // Математические заметки. 1997. Т.62, вып.3, С.404-417.
9. **Powell M.J.D.** // Numerische Mathematik. 1994. V.68, P.107-128.
10. **Narcowich F.,Ward J., Wendland H.** // Constr.Approx. 2003. V.19, P.541-564.
11. **Yoon J.** // Constr.Approx. 2001. V.17, P.227-247.

Поступила в редакцию 20.10.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 55 –65*

УДК 517.929.7

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Н. Б. Искакова

Институт Математики МОН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Рассматривается периодическая краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В терминах исходных данных установлены достаточные условия существования изолированного решения исследуемой задачи и предложен алгоритм его нахождения.

На $[-\tau, T]$ рассматривается периодическая краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t-\tau), x(t)\big), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$x(z) = diag[x(0)] \cdot \varphi(z), \quad z \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3}$$

где $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, заданная на начальном множестве $[-\tau, 0]$ такая, что $\varphi_i(0) = 1, \quad i = \overline{1,n}$, функция $f : [0,T]\times \ \times R^{2n} \to R^n$ непрерывна.

Под решением краевой задачи (1)-(3) понимается непрерывная на $[-\tau, T]$, непрерывно дифференцируемая на $[-\tau, 0)\bigcup(0,T]$ функция $x^*(t)$, удовлетворяющая на $[0,T]$ системе нелинейных дифференциальных уравнений (1), на $[-\tau, 0]$ - условию (2) и краевому условию (3).

Краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом различными методами исследованы многими авторами [1–3]. При $\tau = 0$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1) – (3) методом параметризации получены в линейном случае в работе [4], а в нелинейном — в [5]. Результаты работы [4] на класс линейных

Keywords: *nonlinear system of differential equations with delay argument, periodical boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K10, 34K13

дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом обобщаются автором в [6]. Целью данной работы является распространение результатов работы [5] на класс нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Возьмем шаг $h = \frac{\tau}{l}$, $l \in \mathbb{N}$ и произведем разбиение отрезка $[-\tau, 0) \bigcup [0, T) = \bigcup\limits_{s=l}^{1} [-t_s, -t_{s-1}) \cup \bigcup\limits_{r=1}^{lN} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = 0, -t_s = -sh$, $s = \overline{1,l}$, $t_r = rh$, $r = \overline{1,lN}$. Через $\varphi_s(t)$, $s = \overline{1,l}$, и $x_r(t)$, $r = \overline{1,lN}$, обозначим сужения функций $\varphi(t)$, $x(t)$ соответственно: $\varphi_s(t) = \varphi(t)$, $t \in [-t_{l-(s-1)}, -t_{l-s})$, $s = \overline{1,l}$, $x_r(t) = x(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,lN}$. Введем параметры $\lambda_r = x(t_{r-1})$ и функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,lN}$. Произведя замену $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,lN}$, получим краевую задачу с параметром, эквивалентную задаче (1) – (3):

$$\frac{du_r}{dt} = f\big(t,\ diag[\varphi_r(t-\tau)] \cdot \lambda_1,\ \lambda_r + u_r(t)\big), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,l}, \tag{4}$$

$$\frac{du_r}{dt} = f\big(t,\ \lambda_{r-l} + u_{r-l}(t-\tau),\ \lambda_r + u_r(t)\big), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{l+1, lN}, \tag{5}$$

$$u_r\big(t_{r-1}\big) = 0, \quad r = \overline{1,lN}, \tag{6}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{lN} + \lim_{t \to T-0} u_{lN}(t), \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, lN-1}. \tag{8}$$

Начальные условия (6) позволяют при фиксированных значениях параметра λ_r, $r = \overline{1,lN}$, определить неизвестную функцию $u_r(t)$, $r = \overline{1,lN}$, из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода: функции $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,l}$, при фиксированном λ_r определим из уравнения

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f\big(s,\, \Phi_r(s-\tau)\lambda_1,\, \lambda_r + u_r(s)\big) ds, \tag{9}$$

где $\Phi_r(t-\tau) = diag[\varphi_r(t-\tau)]$; функции $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{l+1, lN}$ определим из уравнения

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f\big(s,\, \lambda_{r-l} + u_{r-l}(s-\tau),\, \lambda_r + u_r(s)\big) ds, \tag{10}$$

где параметры λ_r, λ_{r-l} фиксированы, функции $u_r(t-\tau)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,l}$, удовлетворяют уравнению (9), а функция $u_{r-l}(t-\tau)$, $r = \overline{l+1, lN}$, удовлетворяет уравнению

$$u_{r-l}(t) = \int\limits_{t_{r-l-1}}^{t} f\big(s,\, \lambda_{r-2l} + u_{r-2l}(s-\tau),\, \lambda_{r-l} + u_{r-l}(s)\big) ds,\ t \in [t_{r-l-1}, t_{r-l}).$$

Подставляя в (10) вместо $u_{r-l}(t-\tau)$ соответствующие им выражения, получим следующее уравнение для нахождения функции $u_{pl+j}(t)$, $p = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1,l}$,

$$u_{pl+j}(t) = \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} f\Big\{s,\ \lambda_{(p-1)l+j} + \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{s} f\Big[s_1 - \tau,\ \lambda_{(p-2)l+j} + \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{s_1} f\Big(s_2 - 2\tau,\, \lambda_{(p-3)l+j} + \ldots +$$

$$+\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{s_{p-2}} f\big(s_{p-1}-(p-1)\tau,\, \Phi(s_{p-1}-p\tau)\lambda_1,\, \lambda_j+u_j(s_{p-1}-(p-1)\tau)\big)ds_{p-1},\ldots$$

$$\ldots,\lambda_{(p-2)l+j}+u_{(p-2)l+j}(s_2-2\tau)\Big)ds_2,\, \lambda_{(p-1)l+j}+u_{(p-1)l+j}(s_1-\tau)\Big]ds_1,\lambda_{pl+j}+u_{pl+j}(s)\Big\}ds,\ s_0=s.$$

Определим $\lim\limits_{t\to t_r-0} u_r(t),\ r=\overline{1,lN}$. Подставив найденные пределы в условия (7), (8), получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_r,\, r=\overline{1,lN}$,

$$\begin{cases} \lambda_1-\Big(\lambda_{lN}+\int\limits_{t_{lN-1}}^{T} f\Big\{s,\, \lambda_{(N-2)l+l}+\int\limits_{t_{lN-1}}^{s} f\Big[s_1-\tau,\lambda_{(N-3)l+l}+\ldots+ \\ +\int\limits_{t_{lN-1}}^{s_{N-2}} f\big(s_{N-1}-(N-1)\tau,\Phi(s_{N-1}-N\tau)\lambda_1,\lambda_l+u_l(s_{N-1}-(N-1)\tau)\big)ds_{N-1},\ldots \\ \ldots,\lambda_{(N-2)l+l}+u_{(N-2)l+l}(s_1-\tau)\Big]ds_1,\lambda_{(N-1)l+l}+u_{(N-1)l+l}(s)\Big\}ds\Big)=0, \\ \lambda_j+\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} f(s,\Phi_j(s-\tau)\lambda_1,\lambda_j+u_j(s))ds-\lambda_{j+1}=0, j=\overline{1,l}, \\ \lambda_{pl+j}+\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t_{pl+j}} f\Big\{s,\, \lambda_{(p-1)l+j}+\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{s} f\Big[s_1-\tau,\, \lambda_{(p-2)l+j}+\ldots+ \\ +\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{s_{p-2}} f\big(s_{p-1}-(p-1)\tau,\, \Phi(s_{p-1}-p\tau)\lambda_1,\lambda_j+u_j(s_{p-1}-(p-1)\tau)\big)ds_{p-1},\ldots \\ \ldots,\lambda_{(p-1)l+j}+u_{(p-1)l+j}(s_1-\tau)\Big]ds_1,\, \lambda_{pl+j}+u_{pl+j}(s)\Big\}ds-\lambda_{pl+j+1}=0, \end{cases}$$

где $p=\overline{1,N-2},\ j=\overline{1,l},\ p=N-1,\ j=\overline{1,l-1},$ которую запишем в виде

$$Q_{1,l}\,(\lambda,\,u)=0,\ \lambda\in R^{nlN}. \tag{12}$$

Через $\widetilde{C}\big([t_{r-1},t_r),\,R^n\big)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $[t_{r-1},t_r)$ функций $u_r:[t_{r-1},t_r)\to R^n$. Выберем вектор $\lambda^{(0)}=\big(\lambda_1^{(0)},\,\lambda_2^{(0)},\ldots,\,\lambda_{lN}^{(0)}\big)'\in R^{nlN}$ и предположим, что задача Коши (4), (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)},\, r=\overline{1,l},$ имеет решение $u_r^{(0)}(t)\in\widetilde{C}\big([t_{r-1},t_r),\,R^n\big)$, задача Коши (5), (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)},\,\lambda_{r-l}=\lambda_{r-l}^{(0)},\ u_{r-l}(t-\tau)=u_{r-l}^{(0)}(t-\tau)$ имеет решением функцию $u_r^{(0)}(t)\in\widetilde{C}\big([t_{r-1},t_r),\,R^n\big),\, r=\overline{l+1,lN}$. Множество таких $\lambda^{(0)}$ обозначим $G_0(f,\tau,l)$, а соответствующую им систему решений задач Коши - через $u^{(0)}[t]=\big(u_1^{(0)}(t),\ldots,u_{lN}^{(0)}(t)\big)'$. Возьмем $\lambda^{(0)}\in G_0(f,\tau,l)$, ему соответствующую $u^{(0)}[t]$, непрерывные на $[t_{r-1},t_r)$ функции $R_r(t)\geq 0,\, r= \ =\overline{1,lN}$, число $\rho>0$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)},\rho)=\Big\{\big(\lambda_1,\,\lambda_2,\ldots,\,\lambda_{lN}\big)'\in R^{nlN}:\|\lambda_r-\lambda_r^{(0)}\|<\rho,\, r=\overline{1,lN}\Big\},$$

$$\overline{S}(u^{(0)}[t],R[t]\rho)=\Big\{\big(u_1(t),\,u_2(t),\ldots,\,u_{lN}(t)\big)',\,u_r(t)\in\widetilde{C}\big([t_{r-1},t_r),\,R^n\big):\|u_r(t)-u_r^{(0)}(t)\|\leq$$
$$\leq R_r(t)\rho,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,lN}\Big\},$$

$$G_1(R[t],\,\rho)=\Big\{(t,y,x):\,t\in[0,T],\,\|y-\Phi_j(t-\tau)\lambda_1^{(0)}\|\le R_j(t)\rho,\,t\in[t_{j-1},t_j),\,j=\overline{1,l},$$
$$\|y-\lambda_{r-l}^{(0)}-u_{r-l}^{(0)}(t-\tau)\|\le(R_{r-l}(t)+1)\rho,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{l+1,lN},$$
$$\|x-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\|\le(R_r(t)+1)\rho,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,lN}\Big\}.$$

За $U_0(f,\,L_1(t),\,L_2(t),\,\tau,\,l)$ обозначим совокупность $(\lambda^{(0)},\,u^{(0)}[t],\,R[t],\,\rho)$ таких, что функция $f(t,y,x)$ в $G_1(R[t],\,\rho)$ имеет равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,y,x)$, $f'_y(t,y,x)$ и выполняются неравенства

$$\|f'_x(t,y,x)\|\le L_1(t),\,\|f'_y(t,y,x)\|\le L_2(t),\,L_i(t)\in C([0,T],\,R^1),\,i=1,2,$$
$$e^{\int\limits_{t_{j-1}}^{t}L_1(s)ds}-1+\sup_{t\in[t_{j-1},t_j)}\|\Phi_j(t-\tau)\|\cdot\int\limits_{t_{j-1}}^{t}L_2(s)ds\cdot e^{\int\limits_{t_{j-1}}^{t}L_1(s)ds}\le$$
$$\le R_j(t),\ \ t\in[t_{j-1},t_j),\ \ j=\overline{1,l},$$

$$e^{\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t}L_1(s)ds}-1+(1+\Upsilon_p)\cdot\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t}L_2(s)ds\cdot e^{\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t}L_1(s)ds}\le R_{pl+j}(t),\ \ t\in[t_{pl+j-1},t_{pl+j}),$$

$p=\overline{1,N-1}$, $j=\overline{1,l}$, где $\Upsilon_p=e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}-1+(1+\Upsilon_{p-1})\cdot\dfrac{\widehat{L}_2\tau}{l}\cdot e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}$, $p=\overline{2,N-1}$, $\Upsilon_1=e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}-1+\widetilde{\varphi}\cdot\dfrac{\widehat{L}_2\tau}{l}\cdot e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}$, $\widetilde{\varphi}=\max\limits_{j=\overline{1,l}}\sup\limits_{t\in[-t_{l-(j-1)},-t_{l-j})}\|\Phi_j(t-\tau)\|$, $\widehat{L}_s=\max\limits_{r=\overline{1,lN}}\max\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|L_s(t)\|$, $s=1,2.$

Предполагая существование $\lambda^{(0)}\in G_0(f,\tau,l)$, за начальное приближение задачи (4) – (8) возьмем систему пар $(\lambda_r^{(0)},u_r^{(0)}(t))$, $r=1,2,...,lN$, и последующие приближения найдем по следующему алгоритму

Шаг 1. a) Параметр $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},...,\lambda_{lN}^{(1)})'$ определяем из уравнения (12) при $u=u^{(0)}$;
b) на отрезке $[t_{r-1},t_r)$, $r=1,2,...,l$, решая задачу Коши (4), (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t)$;
подставляя вместо λ_r, λ_{r-l}, $u_{r-l}(t-\tau)$ соответственно $\lambda_r^{(1)}$, $\lambda_{r-l}^{(1)}$, $u_{r-l}^{(1)}(t-\tau)$ и решая задачу Коши (5), (6) на отрезках $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{l+1,lN}$, находим остальные $u_r^{(1)}(t)$.

Шаг 2. a) Параметр $\lambda^{(2)}=(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},...,\lambda_{lN}^{(2)})'$ определяем из уравнения (12) при $u=u^{(1)}$;
b) на отрезке $[t_{r-1},t_r)$, $r=1,2,...,l$, решая задачу Коши (4), (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, находим $u_r^{(2)}(t)$;
подставляя вместо λ_r, λ_{r-l}, $u_{r-l}(t-\tau)$ соответственно $\lambda_r^{(2)}$, $\lambda_{r-l}^{(2)}$, $u_{r-l}^{(2)}(t-\tau)$ и решая на отрезках $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{l+1,lN}$, задачу Коши (5), (6), находим $u_r^{(2)}(t)$.

Продолжая процесс, на k-м шаге получим систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,lN}$. По $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,lN}$, составим пару $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, где $\lambda^{(k)}=(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},...,\lambda_{lN}^{(k)})'$, $u^{(k)}[t]=$ $=\big(u_1^{(k)}(t),\,u_2^{(k)}(t),\ldots,\,u_{lN}^{(k)}(t)\big)'$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, существования изолированного решения краевой задачи с параметром (4) – (8) устанавливает

Теорема 1. *Пусть существуют* $(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t],R[t],\rho)\in U_0(f,L_1(t),L_2(t),\tau,l)$, *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{1,\tau}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ *обратима для любых* $(\lambda,u)\in S(\lambda^{(0)},\rho)\times\overline{S}(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$, *и выполнены следующие неравенства:*

1) $\left\| \left[\dfrac{\partial Q_{1,l}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_1(l)$; 2) $q_1(l) = \gamma_1(l) \max \Big\{ \max\limits_{j=\overline{1,l}} \sup\limits_{t \in [t_{j-1}, t_j)} \|\Phi_j(t-\tau)\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} L_1(s)ds \cdot \Upsilon_1,$

$\max\limits_{p=\overline{1,N-1},\, j=\overline{1,l}} \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t_{pl+j}} L_1(s)ds \cdot \sum\limits_{i=0}^{p-1} \dfrac{1}{i!} \Big(\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t_{pl+j}} L_2(s)ds \Big)^i \cdot \Upsilon_{p+1} \Big\} < 1,$

3) $\dfrac{1}{1-q_1(l)} \cdot \gamma_1(l) \|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho.$

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *содержится в* $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$, *сходится к* $(\lambda^*, u^*[t])$ *- решению задачи (4) – (8) в* $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *и справедливы оценки*

а) $\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\| \leq \dfrac{[q_1(l)]^k}{1-q_1(l)} \cdot \gamma_1(l) \cdot \|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$

б) $\|u_r^*(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq R_r(t)\|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, lN}$.

Причем любое решение задачи (4)-(8) в $S(\lambda^{(0)}, \rho) \times \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *изолировано.*

Доказательство. Возьмем $\lambda^{(0)} = \big(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{lN}^{(0)}\big)' \in G_0(f, \tau, l)$, ему соответствующую $u^{(0)}[t] = \big(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_{lN}^{(0)}(t)\big)'$. В силу неравенства 3) существует число $\varepsilon_0 > 0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_0 \gamma_1(l) < 1$, $[\gamma_1(l)/(1-\varepsilon_0\gamma_1(l))] \cdot \|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho$. Матрица Якоби $\partial Q_{1,l}(\lambda, u)/\partial\lambda$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}, \rho)$ и для $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_0 \in (0, \rho/2]$ такое, что $\|\partial Q_{1,l}(\lambda, u^{(0)})/\partial\lambda - \partial Q_{1,l}(\widetilde{\lambda}, u^{(0)})/\partial\lambda\| < \varepsilon_0$, если λ, $\widetilde{\lambda} \in S(\lambda^{(0)}, \rho)$, $\|\lambda - \widetilde{\lambda}\| < \delta_0$. Возьмем число $\alpha \geq \alpha_0 = \max\{1, \gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|/\delta_0\}$ и построим итерационный процесс:

$$\lambda^{(1,0)} = \lambda^{(0)}, \quad \lambda^{(1,m+1)} = \lambda^{(1,m)} - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial Q_{1,l}(\lambda^{(1,m)}, u^{(0)})}{\partial \lambda} \right]^{-1} Q_{1,l}(\lambda^{(1,m)}, u^{(0)}), \quad m = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

В силу условий теоремы оператор $Q_{1,l}(\lambda, u^{(0)})$ в $S(\lambda^{(0)}, \rho)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы из [7]. Поэтому итерационный процесс сходится к $\lambda^{(1)} \in S(\lambda^{(0)}, \rho)$ - изолированному решению уравнения $Q_{1,l}(\lambda, u^{(0)}) = 0$ и

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho. \tag{14}$$

Для решения задачи Коши (4),(6) на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,l}$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ используем метод последовательных приближений:

$$u_r^{(1,0)}(t) = u_r^{(0)}(t),$$

$$u_r^{(1,m+1)}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(s, \Phi(s-\tau)\lambda_1^{(1)}, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1,m)}(s))ds, \; t \in [t_{r-1}, t_r), \; m = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

При предположениях теоремы справедливы оценки

$$\|u_r^{(1,1)}(t) - u_r^{(1,0)}(t)\| \leq \Big(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds + \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r))} \|\Phi_r(t-\tau)\| \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds \Big) \cdot \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|. \tag{16}$$

Определив $u_r^{(1,2)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = 1, 2, ..., l$, по формуле (15), получим оценку

$$\|u_r^{(1,2)}(t) - u_r^{(1,1)}(t)\| \leq \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)\|u_r^{(1,1)}(s) - u_r^{(1,0)}(s)\|ds.$$

Подставив вместо $\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|$ правую часть (16), получим

$$\|u_r^{(1,2)}(t)-u_r^{(1,1)}(t)\|\leq$$

$$\leq\left[\frac{1}{2!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^2+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r))}\|\Phi_r(t-\tau)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_2(s)ds\cdot\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|,$$

$$\|u_r^{(1,2)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|\leq\left[\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds+\frac{1}{2!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^2+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\Phi_r(t-\tau)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_2(s)ds\left(1+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (17)$$

Продолжая процесс, на m-ом шаге при $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,l}$, установим неравенства

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,m-1)}(t)\|\leq\left[\frac{1}{m!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^m+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\Phi_r(t-\tau)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_2(s)ds\cdot\frac{1}{(m-1)!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^{m-1}\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|, \qquad (18)$$

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\|\leq\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^i+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\Phi_r(t-\tau)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_2(s)ds\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(i-1)!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds\right)^{i-1}\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (18')$$

Из (18) следует равномерная на $[t_{r-1},t_r)$, $r=1,2,...,l$, сходимость последовательности $u_r^{(1,m)}(t)$ к $u_r^{(1)}(t)$ и, переходя в $(18')$ к пределу при $m\to\infty$, получим оценку

$$\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|\leq$$

$$\leq\left(e^{\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds}-1+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\Phi_r(t-\tau)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_2(s)ds\cdot e^{\int\limits_{t_{r-1}}^{t}L_1(s)ds}\right)\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|, \qquad (19)$$

$$\max_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|u_r^{(1)}(t)-u_r^{(0)}(t)\|\leq\left(e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}-1+\widetilde{\varphi}\cdot\frac{\widehat{L}_2\tau}{l}\cdot e^{\frac{\widehat{L}_1\tau}{l}}\right)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|=\Upsilon_1\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (19')$$

Решение задачи Коши (5), (6) на $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, $r=\overline{l+1,2l}$, найдем методом последовательных приближений:

$$u_r^{(1,0)}(t)=u_r^{(0)}(t),$$

$$u_r^{(1,m+1)}(t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f(s,\lambda_{r-l}^{(1)}+u_{r-l}^{(1)}(s-\tau),\ \lambda_r^{(1)}+u_r^{(1,m)}(s))ds,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ m=0,1,2,\ldots, \qquad (20)$$

для которых справедливы следующие оценки:

$$\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\| \le$$

$$\le \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\| + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\ \|\lambda_{r-l}^{(1)}-\lambda_{r-l}^{(0)}\| + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)\|u_{r-l}^{(1)}(s-\tau)-u_{r-l}^{(0)}(s-\tau)\|ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\ \|\lambda_r^{(1)}-\lambda_r^{(0)}\| + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\ \|\lambda_{r-l}^{(1)}-\lambda_{r-l}^{(0)}\| + \max_{t\in[t_{r-l-1},t_{r-l})}\|u_{r-l}^{(1)}(t)-u_{r-l}^{(0)}(t)\|\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds.$$

В последнее неравенство вместо $\max\limits_{t\in[t_{r-l-1},t_{r-l})}\|u_{r-l}^{(1)}(t)-u_{r-l}^{(0)}(t)\|$, $r=\overline{l+1,\,2l}$, подставив правую часть $(19')$, получим

$$\|u_r^{(1,1)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\| \le \left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds + (1+\Upsilon_1)\cdot\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\right)\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (21)$$

Определим $u_r^{(1,2)}(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=l+1,l+2,...,2l$, по формуле (20) и установим для него оценки

$$\|u_r^{(1,2)}(t)-u_r^{(1,1)}(t)\| \le \left(\frac{1}{2!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^2 + (1+\Upsilon_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)\right)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|,$$

$$\|u_r^{(1,2)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\| \le$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^i + (1+\Upsilon_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{i!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^i\right]\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (22)$$

Продолжая процесс, на m-ом шаге при $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{l+1,2l}$, установим неравенства

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,m-1)}(t)\| \le \left[\frac{1}{m!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^m +\right.$$

$$\left.+(1+\Upsilon_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\cdot\frac{1}{(m-1)!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^{m-1}\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|, \qquad (23)$$

$$\|u_r^{(1,m)}(t)-u_r^{(1,0)}(t)\| \le \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^i +\right.$$

$$\left.+(1+\Upsilon_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(i-1)!}\left(\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds\right)^{i-1}\right]\cdot\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (23')$$

Из (23) следует равномерная на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = l+1, l+2, ..., 2l$, сходимость последовательности $u_r^{(1,m)}(t)$ к $u_r^{(1)}(t)$. Переходя в $(23')$ к пределу при $m \to \infty$, получим оценку

$$\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq \left(e^{\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds} - 1 + (1+\Upsilon_1) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_2(s)ds \cdot e^{\int\limits_{t_{r-1}}^{t} L_1(s)ds} \right) \cdot \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \quad (24)$$

$$\max_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq \Upsilon_2 \cdot \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \; r = \overline{l+1,\, 2l}. \quad (24')$$

Аналогично получаем оценки для решения задачи Коши на интервале $[t_{pl+j-1}, t_{pl+j})$, где $p = \overline{3, N-1}$, $j = \overline{1,l}$, при $\lambda_{pl+j} = \lambda_{pl+j}^{(1)}$, используя метод последовательных приближений:

$$u_{pl+j}^{(1,0)}(t) = u_{pl+j}^{(0)}(t), \;\; u_{pl+j}^{(1,m+1)}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(s, \lambda_{(p-1)l+j}^{(1)} + u_{(p-1)l+j}^{(1)}(s-\tau),\, \lambda_{pl+j}^{(1)} + u_{pl+j}^{(1,m)}(s))ds,$$

$$t \in [t_{pl+j-1}, t_{pl+j}),\; m = 1, 2, ...,$$

которые на m-ом шаге имеют вид

$$\|u_{pl+j}^{(1,m)}(t) - u_{pl+j}^{(1,m-1)}(t)\| \leq \left(\frac{1}{m!} \left(\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds \right)^m + \right.$$

$$\left. +(1+\Upsilon_p) \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_2(s)ds \frac{1}{(m-1)!} \left(\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds \right)^{m-1} \right) \cdot \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \quad (25)$$

$$\|u_{pl+j}^{(1,m)}(t) - u_{pl+j}^{(1,0)}(t)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} \left(\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds \right)^i + \right.$$

$$\left. +(1+\Upsilon_p) \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_2(s)ds \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(i-1)!} \left(\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds \right)^{i-1} \right) \cdot \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|. \quad (25')$$

Из (25) следует равномерная сходимость последовательности $u_{pl+j}^{(1,m)}(t)$ к $u_{pl+j}^{(1)}(t)$. В силу неравенств $(16), (17), (18'), (25')$ видно, что система функций $u^{(1,m)}[t] \in \overline{S}(u^{(0)}[t],\, R[t]\rho)$ при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

Переходя в $(25')$ к пределу при $m \to \infty$, получим оценку

$$\|u_{pl+j}^{(1)}(t) - u_{pl+j}^{(0)}(t)\| \leq \left(e^{\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds} - 1 + (1+\Upsilon_p) \int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_2(s)ds \; e^{\int\limits_{t_{pl+j-1}}^{t} L_1(s)ds} \right) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|, \quad (26)$$

$$\max_{p=\overline{3,N-1},j=\overline{1,l}} \|u_{pl+j}^{(1)}(t) - u_{pl+j}^{(0)}(t)\| \leq \Upsilon_{p+1} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|. \quad (26')$$

В силу неравенств (19), (24), (26) система решений задач Коши $u^{(1)}[t] \in \overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$.

Из структуры оператора $Q_{1,l}(\lambda,u^{(0)})$, равенства $Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(0)})=0$ следует, что

$$\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(1)})\|=\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(1)})-Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(0)})\|\le$$

$$\le\gamma_1(l)\max\Bigg\{\max_{k=\overline{1,N-1},j=\overline{1,l}}\int\limits_{t_{kl+j-1}}^{t_{kl+j}}L_1(s)ds\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\Bigg(\int\limits_{t_{kl+j-1}}^{t_{kl+j}}L_2(s)ds\Bigg)^i,\ \max_{j=\overline{1,l}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\Phi_j(t-\tau)\|\times$$

$$\times\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}L_1(s)ds\Bigg\}\cdot\max_{k=\overline{0,N-1},j=\overline{1,l}}\max_{t\in[t_{kl+j-1},t_{kl+j})}\|u^{(1)}_{kl+j}(t)-u^{(0)}_{kl+j}(t)\|,$$

то есть

$$\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(1)})\|\le q_1(l)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|.\tag{27}$$

Возьмем $\rho_1=\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(1)})\|$ и покажем, что $S(\lambda^{(1)},\rho_1+\widetilde{\varepsilon})\subset S(\lambda^{(0)},\rho)$. Действительно, если $\|\lambda-\lambda^{(1)}\|<\rho_1+\widetilde{\varepsilon}$, то, учитывая неравенства 2), 3) теоремы и (14), (27), имеем

$$\|\lambda-\lambda^{(0)}\|\le\|\lambda-\lambda^{(1)}\|+\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|<\frac{\gamma_1(l)}{1-q_1(l)}\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)},u^{(0)})\|+\widetilde{\varepsilon}<\rho.$$

Из условий теоремы следует, что оператор $Q_{1,l}(\lambda,u^{(1)})$ в $S(\lambda^{(1)},\rho_1+\widetilde{\varepsilon})$ удовлетворяет всем условиям теоремы из [7]. Поэтому итерационный процесс

$$\lambda^{(2,0)}=\lambda^{(1)},\ \lambda^{(2,m+1)}=\lambda^{(2,m)}-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial Q_{1,l}(\lambda^{(2,m)},u^{(1)})}{\partial\lambda}\right]^{-1}Q_{1,l}(\lambda^{(2,m)},u^{(1)}),\ m=0,1,\ldots,$$

сходится к $\lambda^{(2)}\in S(\lambda^{(1)},\rho_1+\widetilde{\varepsilon})$ — изолированному решению уравнения $Q_{1,l}(\lambda,u^{(1)})=0$ и $\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\|\le\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(1)},u^{(1)})\|$. Из неравенств (14), (27) вытекает неравенство

$$\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\|\le q_1(l)\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|,\tag{28}$$

отсюда, из (14), в силу условий 2), 3) теоремы, следует, что $\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(0)}\|<\rho$.

На втором шаге предложенного алгоритма методом последовательных приближений находим функции $u^{(2)}_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,\ lN}$. При условиях теоремы получаем оценки, аналогичные (16) – (26′). Оценивая разность $\|u^{(2)}_r(t)-u^{(0)}_r(t)\|$ с помощью неравенства Гронуолла - Беллмана, получим $\|u^{(2)}_r(t)-u^{(0)}_r(t)\|\le R_r(t)\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(0)}\|$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,lN}$. Откуда вытекает, что система функций $u^{(2)}[t]\in\overline{S}(u^{(0)}[t],R[t]\rho)$.

Продолжая процесс, на k-ом шаге найдем $\lambda^{(k)}$, $u^{(k)}[t]$, для которых установим неравенства

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\|\le q_1(l)\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|,\tag{29}$$

$$\|u^{(k)}_r(t)-u^{(k-1)}_r(t)\|\le R_r(t)\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|,t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,lN},\tag{30}$$

$$\|u^{(k)}_r(t)-u^{(0)}_r(t)\|\le R_r(t)\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(0)}\|,\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,lN}.\tag{31}$$

Так как

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\|\le q_1(l)\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|\le[q_1(l)]^2\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\|\le\ldots\le[q_1(l)]^k\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|,$$

$$\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(0)}\|\le\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|+\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\|+\ldots+\|\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}\|+\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|\le$$

$$\leq \big([q_1(l)]^{k-1} + [q_1(l)]^{k-2} + \ldots + q_1(l) + 1\big)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \frac{1}{1-q_1(l)}\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho. \quad (33)$$

Из неравенств 2), (29) – (31) следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho)\times$ $\times\overline{S}(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$, $k = 1, 2, \ldots,$ и сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$ — решению задачи с параметром (4) – (8). В неравенствах

$$\|\lambda^{(k+\widehat{p})} - \lambda^{(k)}\| \leq \|\lambda^{(k+\widehat{p})} - \lambda^{(k+\widehat{p}-1)}\| + \ldots + \|\lambda^{(k+2)} - \lambda^{(k+1)}\| + \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \leq$$

$$\leq [q_1(l)]^k\big([q_1(l)]^{\widehat{p}-1} + \ldots + q_1(l) + 1\big)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| < \frac{1}{1-q_1(l)}[q_1(l)]^k\gamma_1(l)\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|,$$

$$\|u_r^{(k+\widehat{p})}(t) - u_r^{(k)}(t)\| \leq R_r(t)\|\lambda^{(k+\widehat{p})} - \lambda^{(k)}\|, \ t \in [t_{r-1}, t_r), \ r = \overline{1, lN},$$

переходя к пределу при $\widehat{p} \to \infty$, получим оценки а), б).

Покажем изолированность решения $(\lambda^*, u^*[t])$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon\gamma_1(l) < 1, \ q_1(l) < 1 - \varepsilon\gamma_1(l). \quad (33)$$

Из структуры матрицы Якоби вытекает ее равномерная непрерывность в $S(\lambda^*, \rho) \times S(u^*[t],$ $R[t]\rho)$. Поэтому существует число $\delta > 0$ такое, что $\left\|\dfrac{\partial Q_{1,l}(\lambda, u)}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial Q_{1,l}(\lambda^*, u^*)}{\partial\lambda}\right\| < \varepsilon$ для всех $(\lambda, u) \in \ \in S(\lambda^*, \delta) \times \overline{S}(u^*[t], R[t]\delta)$. Заметим, что если $(\lambda^*, u^*[t])$ является решением задачи (4)-(8), то $Q_{1,l}(\lambda^*, u^*) = 0$.

Пусть $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ — другое решение задачи (4)–(8), тогда $Q_{1,l}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}) = 0$ и выполняются

$$\lambda^* = \lambda^* - \left[\frac{\partial Q_{1,l}(\lambda^*, u^*)}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_{1,l}(\lambda^*, u^*), \quad \widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda} - \left[\frac{\partial Q_{1,l}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u})}{\partial\lambda}\right]^{-1} Q_{1,l}(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}).$$

Найдем разность $\lambda^* - \widetilde{\lambda}$, используя формулу конечных приращений Лагранжа. Оценивая $\|\lambda^* -$ $-\widetilde{\lambda}\|$, получим справедливость неравенства $\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\| \leq \dfrac{q_1(l)}{1-\varepsilon\gamma_1(l)}\|\lambda^* - \widetilde{\lambda}\|$. Тогда в силу неравенств (33) имеют место равенства $\lambda^* = \widetilde{\lambda}$, $u_r^*(t) = \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, lN}$. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ определим равенствами $x^{(k)}(t) = \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, lN}$, $x^{(k)}(T) = \lambda_{lN}^{(k)} + \lim\limits_{t\to T-0} u_{lN}^{(k)}(t)$. Через $S(x^{(0)}(t), (R[t] + 1)\rho)$ обозначим множество кусочно-непрерывных функций $x : [0, T] \to R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$\|x(t) - x^{(0)}(t)\| < [R_r(t) + 1]\rho, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \ r = \overline{1, lN}.$$

Так как задачи (1) – (3) и (4) – (8) эквивалентны, то из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций* $(x^{(k)}(t))$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *содержится в* $S(x^{(0)}(t), (R[t] + 1)\rho)$ *и сходится к* $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t),$ $[R(t) + 1]\rho)$ *— решению задачи (1) – (3) и справедливо неравенство*

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\| \leq \frac{[q_1(l)]^k}{1-q_1(l)} \cdot \gamma_1(l)[R_r(t) + 1]\|Q_{1,l}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|, \, t \in [t_{r-1}, t_r), \, r = \overline{1, lN}.$$

Причем любое решение задачи (1)–(3) в $S(x^{(0)}(t), (R[t] + 1)\rho)$ *изолировано.*

Цитированная литература

1. **Самойленко А. М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

2. **Теняев В.В.** Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: Автореф. дис... канд.физ.-мат.наук. Рязань, 2002. 16с.

3. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально - дифференциальных уравнений. М., 1991.

4. **Джумабаев Д. С.** //Ж.вычисл.матем. и матем.физ. 1990. Т.29, № 1. С.50-66.

5. **Джумабаев Д. С.** //Матем.журнал. 2001. Т.1, № 1. С.30-44.

6. **Искакова Н.Б.** //Вестник КазНУ. Серия мат., мех., информатика. 2005. № 2(45). С. 35-47.

7. **Джумабаев Д. С.** // Тезисы докл.межд.конф., посв. 100-лет. С.М.Никольского, Москва, 2005. С. 97.

Поступила в редакцию 01.03.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 66 – 71*

УДК 519.624

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Б. Б.Минглибаева

Институт Математики МОиН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Рассмотрена сингулярная краевая задача с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с предельно постоянными коэффициентами и правой частью. Установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости, построена аппроксимирующая двухточечная краевая задача.

Рассмотрим краевую задачу с параметром для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q_1(t)\frac{dz}{dt} + q_2(t)z + q_3(t)\mu + f(t), \quad t \in R, \quad \mu \in R, \tag{1}$$

$$\alpha_1\mu + \alpha_2 \lim_{t\to-\infty} z(t) + \alpha_3 \lim_{t\to\infty} z(t) = d, \quad d \in R, \tag{2}$$

$$z(t) \in \widetilde{C}^1(R, R), \tag{3}$$

где функции $q_i(t)(i = \overline{1,3})$, $f(t)$ непрерывны, ограничены и предельно постоянны на R, т.е. $q_i(t) \to q_i^{\mp}$, $f(t) \to f_{\mp}$ при $t \to \infty$, $q_2(t) \geq \gamma > 0$, $t \in R$, $\widetilde{C}^1(R, R)$ – пространство функций $z : R \to R$ с непрерывной и ограниченной на R производной.

Задача заключается в определении пары $(\mu^*, z^*(t))$, где функция $z^*(t)$ при $\mu = \mu^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и условиям (2), (3).

Пусть $\alpha_q = \alpha_1 - \alpha_2\dfrac{q_3^-}{q_2^-} - \alpha_3\dfrac{q_3^+}{q_2^+}$.

Теорема 1 *Задача (1) – (3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда число* α_q *отлично от нуля.*

Keywords: *singular two-point boundary-value problem with parameter, ordinary differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B08

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1) – (3) однозначно разрешима. Предположим, что число $\alpha_q = 0$ и рассмотрим задачу при $f(t) \equiv 0,\ d = 0$.

Как показано в [1, 2], для любого $\tilde{\mu} \in R$ существует единственное ограниченное решение $\tilde{z}(t)$ системы

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q_1(t)\frac{dz}{dt} + q_2(t)z + q_3(t)\tilde{\mu}, \quad t \in R, \tag{4}$$

и функция $\tilde{z}(t)$ предельно постоянна:

$$\lim_{t\to\mp\infty} \tilde{z}(t) = -\frac{q_3^{\mp}}{q_2^{\mp}}\tilde{\mu}.$$

Тогда функция $\tilde{z}(t)$ удовлетворяет краевому условию (2) при любом $\tilde{\mu} \in R$ и пара $(\tilde{\mu}, \tilde{z}(t))$ является решением задачи (1) – (3) при $f(t) \equiv 0$, $d = 0$. Это противоречит однозначной разрешимости (1) – (3). Поэтому $\alpha_q \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\alpha_q \neq 0$. При наших предположениях согласно утверждениям [1,2] для любого $\mu^* \in R$ система (1) имеет единственное ограниченное на R решение $z^*(t)$ и для него справедливы предельные соотношения

$$\lim_{t\to\mp\infty} z^*(t) = -\frac{1}{q_2^{\mp}}(q_3^{\mp}\mu^* + f_{\mp}). \tag{5}$$

Подставив правую часть (5) в условие (2), получим

$$\mu^* = \Big(d + \frac{\alpha_2}{q_2^-}f_- + \frac{\alpha_3}{q_2^+}f_+\Big)/\alpha_q.$$

Пара $(\mu^*, z^*(t))$ является решением задачи (1) – (3).

Докажем единственность этого решения. Предположим обратное и пусть $(\tilde{\mu}, \tilde{z}(t))$ – ещё одно решение задачи (1) – (3). Тогда пара $(\triangle\mu, \triangle z(t))$, где $\triangle\mu = \mu^* - \tilde{\mu},\ \triangle z(t) = z^*(t) - \tilde{z}(t)$, будет решением задачи (1) – (3), когда $f(t) \equiv 0$, $d = 0$, и аналогично (5) функция $\triangle z(t)$ имеет предельные значения при $t \to \mp\infty$:

$$\lim_{t\to\mp\infty} \triangle z(t) = -\frac{q_3^{\mp}}{q_2^{\mp}}\triangle\mu.$$

Подставляя их в краевое условие (2), имеем $\alpha_q\triangle\mu = 0$. Такое равенство возможно только при $\triangle\mu = 0$, т.е. $\tilde{\mu} = \mu^*$. Тогда в силу единственности ограниченного на R решения (1) при фиксированных значениях параметра получим $z^*(t) = \tilde{z}(t)$ для всех $t \in R$. Теорема доказана.

Пусть $\alpha_q \neq 0$.

Рассмотрим **задачу аппроксимации А:** для заданного $\varepsilon > 0$ требуется определить число $T > 0$, коэффициенты граничных условий α_{ij}, $\beta_{ij}(i, j = 1, 2)$, правые части d_1, d_2 такие, что решение $z_T(t)$ задачи

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q_1(t)\frac{dz}{dt} + q_2(t)z + q_3(t)\mu^* + f(t), \quad t \in (-T, T), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}z(-T) + \alpha_{12}z(T) + \beta_{11}\dot{z}(-T) + \beta_{12}\dot{z}(T) = d_1, \\ &\alpha_{21}z(-T) + \alpha_{22}z(T) + \beta_{21}\dot{z}(-T) + \beta_{22}\dot{z}(T) = d_2 \end{aligned} \tag{7}$$

удовлетворяло бы соотношению

$$\max\{\max_{t\in[-T,T]} ||z_T(t) - z^*(t)||, \max_{t\in[-T,T]} ||\dot{z}_T(t) - \dot{z}^*(t)||\} < \varepsilon.$$

Обозначим функции

$$\theta_i(T)=\max(\sup_{t\in(-\infty,T]}|q_i(t)-q_i^-|,\sup_{t\in[T,+\infty)}|q_i(t)-q_i^+|),\qquad i=\overline{1,3},$$

$$\theta_4(T)=\max(\sup_{t\in(-\infty,T]}|f(t)-f_-|,\sup_{t\in[T,+\infty)}|f(t)-f_+|).$$

Из условий задачи следует

$$\lim_{T\to\infty}\theta_i(T)=0,\qquad i=\overline{1,4}.$$

Далее с помощью замены из [1] $z=x_1+x_2,\ \dot z=\omega(x_1-x_2)$, где

$$\omega=\max\{1,\sup_t|q_1(t)|+\sup_t|q_2(t)|\},$$

перейдём к эквивалентной задаче

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)\mu^*+F(t),\qquad t\in R, \tag{8}$$

$$x(t)\in\widetilde C(R,R^2), \tag{9}$$

где

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))',\qquad A(t)=(a_{ij}(t)),\qquad i,j=1,2,$$

$$a_{11}(t)=\frac12\Big(\omega+q_1(t)+\frac{q_2(t)}{\omega}\Big),\qquad a_{12}(t)=-\frac12\Big(\omega+q_1(t)-\frac{q_2(t)}{\omega}\Big),$$

$$a_{21}(t)=\frac12\Big(\omega-q_1(t)-\frac{q_2(t)}{\omega}\Big),\qquad a_{22}(t)=-\frac12\Big(\omega-q_1(t)+\frac{q_2(t)}{\omega}\Big),$$

$$B(t)=\Big(\frac{q_3(t)}{2\omega},-\frac{q_3(t)}{2\omega}\Big)',\qquad F(t)=\Big(\frac{f(t)}{2\omega},-\frac{f(t)}{2\omega}\Big)',$$

$\widetilde C(R,R^2)$ – пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $x:R\to R^2$ с нормой $||x||_1=\sup_{t\in R}||x(t)||$, $||x(t)||=\max_{i=1,2}|x(t)|$.

В силу наших предположений матрицы $A(t),B(t)$, вектор-функция $F(t)$ непрерывны и ограничены на R.

В матрице $A(t)$ имеет место диагональное преобладание по строкам с функцией $\theta(t)=q_2(t)/\omega\ge\tilde\gamma/\omega>0$, задача (8),(9) имеет единственное решение $x^*(t)$ и справедлива оценка [1]

$$||x^*||_1\le\frac12\sup_{t\in R}\Big\|\frac{B(t)\mu^*+F(t)}{q_2(t)}\Big\|,$$

задача (6),(7) имеет единственное решение $z^*(t)$ и

$$||z^*||_1=\sup_t|z(t)|\le\Big\|\frac{q_3(t)\mu^*+f(t)}{q_2(t)}\Big\|_1.$$

Тогда задача (8), (9) корректно разрешима с константой $K=\dfrac{1}{2\tilde\gamma}$, (6), (7) — с $\tilde K=\dfrac{1}{\tilde\gamma}$.

Задача А эквивалентна **задаче** A_1 : для $\varepsilon>0$ требуется определить число $T>0$, вещественные (2×2)-матрицы D_1,D_2, вектор $d_0\in R^2$, при которых решение $x_T(t)$ двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)\mu^*+F(t),\qquad t\in(-T,T), \tag{10}$$

$$D_1x(-T) + D_2x(T) = d_0 \tag{11}$$

удовлетворяет неравенству

$$\max_{t\in[-T,T]} ||x_T(t) - x^*(t)|| < \varepsilon.$$

При наших условиях матрицы $A(t), B(t)$, вектор-функция $F(t)$ предельно постоянны на R :

$$\lim_{t\to\mp\infty} A(t) = A_\mp, \quad \lim_{t\to\mp\infty} B(t) = B_\mp, \quad \lim_{t\to\mp\infty} F(t) = F_\mp,$$

$$A_\mp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega + q_1^\mp + \dfrac{q_2^\mp}{\omega} & -\omega - q_1^\mp + \dfrac{q_2^\mp}{\omega} \\ \omega - q_1^\mp - \dfrac{q_2^\mp}{\omega} & -\omega + q_1^\mp - \dfrac{q_2^\mp}{\omega} \end{pmatrix},$$

$$B_\mp = \Big(\frac{q_3^\mp}{2\omega}, -\frac{q_3^\mp}{2\omega}\Big)', \qquad F_\mp = \Big(\frac{f_\mp}{2\omega}, -\frac{f_\mp}{2\omega}\Big)'.$$

Собственные значения предельных матриц $A_\mp$ отличны от нуля:

$$\lambda_{1,2}^\mp = (q_1^\mp \mp \sqrt{(q_1^\mp)^2 + 4q_2^\mp})/2.$$

Функции
$\delta_1(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T)} ||A(t) - A_-||, \sup\limits_{t\in(T,+\infty)} ||A(t) - A_+||)$,
$\delta_2(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T)} ||B(t) - B_-||, \sup\limits_{t\in(T,+\infty)} ||B(t) - B_+||)$,
$\delta_3(T) = \max(\sup\limits_{t\in(-\infty,-T)} ||F(t) - F_-||, \sup\limits_{t\in(T,+\infty)} ||F(t) - F_+||)$
удовлетворяют условию $\delta_i(T) \to 0$ при $T \to \infty (i = \overline{1,3})$.

Существуют вещественные неособые (2×2)-матрицы

$$S_\mp = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\omega + q_2^\mp/\omega + \sqrt{(q_1^\mp)^2 + 4q_2^\mp}}{\omega - q_1^\mp - q_2^\mp/\omega} \\ 1 & -\dfrac{\omega + q_2^\mp/\omega - \sqrt{(q_1^\mp)^2 + 4q_2^\mp}}{\omega - q_1^\mp - q_2^\mp/\omega} \end{pmatrix},$$

приводящие предельные матрицы $A_\mp$ к обобщённо-жордановой форме

$$\widetilde{A}_\mp = S_\mp A_\mp S_\mp^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^\mp & 0 \\ 0 & \lambda_2^\mp \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_1^\mp - \sqrt{(q_1^\mp)^2 + 4q_2^\mp} & 0 \\ 0 & q_1^\mp + \sqrt{(q_1^\mp)^2 + 4q_2^\mp} \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы показали, что задача (8),(9) корректно разрешима с константой $K = \dfrac{1}{2\tilde{\gamma}}$ и выполняются все условия теоремы 7 из [1].

Тогда существует число T_0, определяемое из неравенства

$$\delta_1(T_0) < 2\tilde{\gamma},$$

такое, что для любого $T > T_0$ краевая задача (10),(11), где

$$D_1 = P_1S_-A_-,\ D_2 = P_2S_+A_+,\ d_0 = -P_1S_-(B_-\mu^* + F_-) - P_2S_+(B_+\mu^* + F_+),$$

имеет единственное решение $x_T(t)$ и справедлива оценка

$$\max_{t\in[-T,T]} ||x_T(t) - x^*(t)|| \le$$

$$\le \frac{1}{2\tilde\gamma - \delta_1(T)}\Big(\frac{1}{2\tilde\gamma}||B(t)\mu^* + F(t)||_1\delta_1(T) + ||\mu^*||\delta_2(T) + \delta_3(T)\Big).$$

Матрицы D_1, D_2, вектор d_0 имеют вид

$$D_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_1^- - \sqrt{(q_1^-)^2 + 4q_2^-} & \frac{(q_1^-)^2+4q_2^- -\omega q_1^- - q_1^-q_2^-/\omega - \sqrt{(q_1^-)^2+4q_2^-}(-\omega+q_1^- - q_2^-/\omega)}{\omega - q_1^- - q_2^-/\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_1^+ + \sqrt{(q_1^+)^2 + 4q_2^+} & \frac{(q_1^+)^2+4q_2^+ -\omega q_1^+ - q_1^+q_2^+/\omega + \sqrt{(q_1^+)^2+4q_2^+}(-\omega+q_1^+ - q_2^+/\omega)}{\omega - q_1^+ - q_2^+/\omega} \end{pmatrix},$$

$$d_0 = -\frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix} (q_3^-\mu^* + f_-)\dfrac{2\omega - q_1^- + \sqrt{(q_1^-)^2 + 4q_2^-}}{\omega - q_1^- - q_2^-/\omega} \\ (q_3^+\mu^* + f_+)\dfrac{2\omega - q_1^+ - \sqrt{(q_1^+)^2 + 4q_2^+}}{\omega - q_1^+ - q_2^+/\omega} \end{pmatrix}.$$

Учитывая эквивалентность задач A и A_1, выбирая T_0 из условия

$$\theta_1(T_0) + \frac{1}{\omega}\theta_2(T_0) < 2\tilde\gamma,$$

получаем, что для любого $T \ge T_0$ краевая задача (6),(7) с коэффициентами

$$\alpha_{11} = \frac{-q_1^-q_2^- + 2\omega q_2^- + q_2^-\sqrt{(q_1^-)^2 + 4q_2^-}}{2(\omega^2 - \omega q_1^- - q_2^-)}, \qquad \alpha_{12} = 0,$$

$$\alpha_{12} = 0, \qquad \alpha_{22} = \frac{-q_1^+q_2^+ + 2\omega q_2^+ - q_2^+\sqrt{(q_1^+)^2 + 4q_2^+}}{2(\omega^2 - \omega q_1^+ - q_2^+)},$$

$$\beta_{11} = \frac{q_1^-\omega - (q_1^-)^2 - 2q_2^- - (\omega - q_1^-)\sqrt{(q_1^-)^2 + 4q_2^-}}{2(\omega^2 - q_1^-\omega - q_2^-)}, \qquad \beta_{12} = 0,$$

$$\beta_{21} = 0, \qquad \beta_{22} = \frac{q_1^+\omega - (q_1^+)^2 - 2q_2^+ + (\omega - q_1^+)\sqrt{(q_1^+)^2 + 4q_2^+}}{2(\omega^2 - q_1^+\omega - q_2^+)},$$

правыми частями

$$d_1 = -\frac{2\omega - q_1^- + \sqrt{(q_1^-)^2 + 4q_2^-}}{2(\omega^2 - q_1^-\omega - q_2^-)}(q_3^-\mu^* + f_-),$$

$$d_2 = -\frac{2\omega - q_1^+ - \sqrt{(q_1^+)^2 + 4q_2^+}}{2(\omega^2 - q_1^+\omega - q_2^+)}(q_3^+\mu^* + f_+)$$

имеет единственное решение $z_T(t)$, для которого выполняется оценка

$$\max(\max_{t\in[-T,T]}||z_T(t)-z^*(t)||,\max_{t\in[-T,T]}||\dot{z}_T(t)-\dot{z}^*(t)||)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2[2\omega\tilde{\gamma}-\omega\theta_1(T)-\theta_2(T)]}\times$$

$$\times\Big[\frac{||q_3(t)\mu^*+f(t)||_1}{2\tilde{\gamma}}\Big(\theta_1(T)+\frac{\theta_2(T)}{\omega}\Big)+||\mu^*||\theta_3(T)+\theta_4(T)\Big].$$

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1990. №3. С.388–404.
2. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1990. №11. С.1646–1660.

Поступила в редакцию 01.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 72 — 79*

УДК 519:3.62-50

ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ РАЗНОТЕМПОВОЙ СИСТЕМОЙ

Т.П.Самохвалова

Институт автоматики НАН Кыргызской Республики
720071 г.Бишкек пр.Чуй, 265 samtp@mail.ru

Дано доказательство сходимости по критерию качества при стремлении к нулю малого параметра для частного случая линейной разнотемповой системы с распределенными параметрами. Алгоритм упрощенного управления построен по редуцированной системе.

1. Введение. Во многих случаях решение задачи оптимального управления непосредственно многомерной разнотемповой системой является трудоемким, требует больших затрат машинного времени, алгоритм управления сложен для его реализации. Существуют способы упрощения решения, в частности, использование алгоритма управления так называемой редуцированной системы, получаемой из исходной при равенстве нулю малого параметра $\mu = 0$. Возникает вопрос о сходимости такого приближенного решения к точному при $\mu \to 0$. В данной работе рассматривается сходимость по критерию качества при $\mu \to 0$.

Для обоснования применимости упрощенного алгоритма управления в исходной полной линейной системе с распределенными параметрами (СРП) используем метод доказательства, разработанный в [1, 2]. В работе [2] обоснована применимость конечноразностной аппроксимации при $n \to \infty$ для системы с сосредоточенными параметрами (ССП). Этот метод доказательства при соответствующей модификации можно использовать и в других задачах:

— в методе прямых для некоторых СРП при $n \to \infty$;

— в методе регуляризации А.Н.Тихонова для некоторых СРП при $\alpha \to 0$;

— в методе регулярных возмущений для одной СРП [3] при стремлении к нулю коэффициента диффузии $D_u \to 0$;

— в методе сингулярных возмущений для некоторых ССП при $\mu \to 0$ [4].

2. Постановка задачи. Сформулируем задачу синтеза оптимального управления для полной линейной разнотемповой системы с распределенными параметрами, описываемой двумя уравнениями в частных производных:

Keywords: *different speed distributed parameter system, synthesis, optimal control*
2000 Mathematics Subject Classification: 35l20

$$\frac{\partial u_\mu(t,x)}{\partial t} = a_2 u_\mu(t,x) + a_4 y_\mu(t,x) + f_1(t,x),$$

$$\mu\frac{\partial y_\mu(t,x)}{\partial t} = b_2 y_\mu(t,x) + b_4 u_\mu(t,x) + q_2(x)p(t) + f_2(t,x)$$

с начальными условиями

$$u_\mu(0,x) = u_0(x), \;\; y_\mu(0,x) = y_0(x).$$

Минимизируемый критерий качества содержит только функцию $u_\mu(t,x)$ и имеет вид

$$J_\mu = \gamma_1 \int_0^T \int_0^1 [u_\mu(t,x) - g(t,x)]^2 dxdt + \gamma_2 \int_0^1 [u_\mu(T,x) - \psi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t)dt.$$

Критерий J_μ характеризует отклонение состояния $u_\mu(t,x)$ от заданных функций на всем интервале $[0,T]$ и в конечный момент времени T, а также норму управления $p(t)$. Здесь $\psi(x) = g(T,x)$.

Задача 1. Найти синтезирующее управление

$$p^0_\mu(t) \equiv p^0_\mu(t, u_\mu(t,x), y_\mu(t,x)),$$

которое вместе с решением разнотемповой системы доставляет наименьшее возможное значение критерию качества J_μ.

Для получения редуцированной системы полагаем, что параметр $\mu = 0$:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a_2 u(t,x) + a_4 y(t,x) + f_1(t,x),$$

$$0 = b_2 y(t,x) + b_4 u(t,x) + q_2(x)p(t) + f_2(t,x).$$

Критерий качества редуцированной системы запишем в виде

$$J = \gamma_1 \int_0^T \int_0^1 [u(t,x) - g(t,x)]^2 dxdt + \gamma_2 \int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t)dt.$$

Задача 2. Найти синтезирующее управление $p^0(t) \equiv p^0(t, u(t,x))$, которое вместе с решением $u(t,x)$ редуцированной системы доставляет наименьшее возможное значение критерию качества J.

3. Обоснование сходимости. Для обоснования сходимости по критерию качества при $\mu \to 0$ основным является доказательство сходимости решений по какой-либо норме при фиксированном управлении $p(t)$. Доказательство дадим для программного управления $p(t)$ в уравнении объекта. Обозначим $Q = \{[0,T] \times [0,1]\}$, $C^1(Q)$ — множество функций $U(t,x) = (u(t,x),\, y(t,x))$, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в классическом смысле с метрикой

$$\rho(U_1,U_2) = \max_{t,x} |u_1 - u_2| + \max_{t,x} |y_1 - y_2|, (t,x) \in Q.$$

Запишем две системы, соответствующие некоторым малым параметрам μ_1, μ_2. Первая система:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_2 u_1 + a_4 y_1 + f_1,$$

$$\mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} = b_2 y_1 + b_4 u_1 + q_2 p + f_2.$$

Вторая система:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 u_2 + a_4 y_2 + f_1,$$

$$\mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} = b_2 y_2 + b_4 u_2 + q_2 p + f_2.$$

Докажем, что последовательность

$$\triangle_n = (u_n - u_{n+1}, y_n - y_{n+1}) = (\triangle_{1n}, \triangle_{2n})$$

является фундаментальной. Возьмем последовательность вещественных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Можем записать

$$\mu_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - \mu_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} = b_2(y_1 - y_2) + b_4(u_1 - u_2).$$

Обозначим $\mu_1 = \frac{1}{n}$, $\mu_2 = \frac{1}{n+k}$, где k — некоторое натуральное число, тогда

$$\frac{1}{n}\frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{1}{n+k}\frac{\partial y_2}{\partial t} = \frac{(n+k)y_1' - ny_2'}{n(n+k)} =$$

$$= \frac{ny_1' - ny_2'}{n(n+k)} + \frac{k}{n(n+k)} y_1' = \mu_2 \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial t} + k\mu_1\mu_2 y_1',$$

$$\mu_2 \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial t} = b_2(y_1 - y_2) + b_4(u_1 - u_2) - k\mu_2(b_2 y_1 + b_4 y_1 + q_2 p + f_2).$$

Отсюда при $\mu \to 0$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \triangle_n$ является решением редуцированной линейной однородной системы вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \lim_{n\to\infty} \triangle_{1n} = a_2 \lim_{n\to\infty} \triangle_{1n} + a_4 \lim_{n\to\infty} \triangle_{2n},$$

$$0 = b_2 \lim_{n\to\infty} \triangle_{1n} + b_4 \lim_{n\to\infty} \triangle_{2n}$$

с нулевыми начальными условиями.

Отсюда следует, что решение этой системы нулевое: $\lim\limits_{n\to\infty} \triangle_n = (0,0)$, последовательность $\{\triangle_n\}$ является сходящейся к нулю последовательностью. Тогда последовательность $U_n = (u_n, y_n)$ является фундаментальной, поэтому в силу полноты $C^1(Q)$ она имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} U_n(t,x) = U_0(t,x) \in C^1(Q).$$

Остается показать, что функция $U_0(t,x)$ является решением редуцированной системы. По построению $U_n(t,x)$ имеем, что $U_n(t,x)$ является решением системы

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a_2 u_n + a_4 y_n + f_1,$$

$$\mu_n\frac{\partial y_n}{\partial t} = b_2 y_n + b_4 u_n + q_2(x)p(t) + f_2.$$

Переходя к пределу в этих тождествах, получаем, что $U_0(t,x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} = a_2 u_0(t,x) + a_4 y_0(t,x) + f_1,$$

$$0 = b_2 y_0(t,x) + b_4 u_0(t,x) + q_2(x)p(t) + f_2$$

с условиями

$$u_0(0,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(0,x) = \varphi_1(x),$$

$$y_0(0,x) = \lim_{n\to\infty} y_n(0,x) = \varphi_2(x).$$

Можем записать

$$|u_\mu(p) - u(p)| \le \varepsilon_\mu,\ \ \lim_{\mu\to 0}\varepsilon_\mu = 0 \tag{1}$$

при произвольно фиксированном $p(t)\in P$.

Используя неравенство (1), докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $p(t)$ — произвольно фиксированное управление из множества P допустимых. Для критериев качества полной линейной разнотемповой и соответствующей редуцированной систем выполняется неравенство*

$$|J_\mu[u_\mu(p(t))] - J[u(p(t))]| \le C\varepsilon_\mu,\ \ C = const > 0, \tag{2}$$

при произвольно фиксированном $p(t)\in P$.

Действительно, имеем

$$|J_\mu - J| = |\gamma_1\int_0^T\int_0^1 [u_\mu(t,x) - g(t,x)]^2 dxdt + \gamma_2\int_0^1 [u_\mu(T,x) - \psi(x)]^2 dx +$$

$$+\gamma_1\int_0^T\int_0^1 [u(t,x) - g(t,x)]^2 dxdt + \gamma_2\int_0^1 [u(T,x) - \psi(x)]^2 dx|, p(t)\in P.$$

Используя далее ограниченность $u_\mu(t,x)$, $u(t,x)$ в ограниченной области Q, можем записать

$$|J_\mu - J| \le \gamma_1\{\max_Q |u_\mu(t,x) + u(t,x)| + 2\max_Q |g(t,x)|\}\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^1 |u_\mu(t,x) - u(t,x)|dxdt + \gamma_2\{\max_{x\in[0,1]} |u_\mu(T,x) + u(T,x)| + 2\max_{x\in[0,1]}|\psi(x)|\}\times$$

$$\times\int_0^1 |u_\mu(T,x) - u(T,x)|dx \le C_1\varepsilon_\mu + C_2\varepsilon_\mu = C\varepsilon_\mu,$$

где

$$C = C_1 + C_2, C_1 = \gamma_1 TR\{\max_Q |u_\mu(t,x) + u(t,x)| + 2\max_Q |g(t,x)|\},$$

$$C_2 = \gamma_2 T\{\max_{x\in[0,1]} |u_\mu(T,x) + u(T,x)| + 2\max_{x\in[0,1]} |\psi(x)|\},$$

R — длина отрезка изменения переменной " x. " Здесь $R = 1$.

Обозначим $U_\mu(p(t))$, $U(p(t))$ — решения полной и редуцированной систем, соответствующие фиксированному управлению $p(t)$. Применим прием доказательства, использованный в [3, 4]. Будем полагать редуцированную систему исходной, а полную разнотемповую систему — аппроксимирующей. Обозначим

$$J^0 = \inf_{p\in P} J[U(t,x), p(t)] = J[u(p^0(t)), p^0(t)],$$

$$J^0_\mu = \inf_{p_\mu\in P} J_\mu[U_\mu(t,x), p_\mu(t)] = J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t)), p^0_\mu(t)].$$

В отличие от [2] в данной работе не вводится промежуточное множество P_μ. Докажем сначала, что

$$\lim_{\mu\to 0} J^0_\mu = J^0. \tag{3}$$

Действительно, учитывая определение J^0 и неравенство (2), имеем

$$J_\mu[u_\mu(p^0_\mu)] - J[u(p^0)] \ge J_\mu[u_\mu(p^0_\mu)] - J[u(p^0_\mu)] \ge -C\varepsilon_\mu.$$

С другой стороны, учитывая определение J^0_μ, можем записать

$$J_\mu[u_\mu(p^0_\mu)] - J[u(p^0)] \le J_\mu[u_\mu(p^0)] - J[u(p^0)] \le C\varepsilon_\mu.$$

Следовательно, предельный переход (3) доказан с оценкой

$$|J^0_\mu - J^0| \le C\varepsilon_\mu. \tag{4}$$

Теорема. *Последовательность оптимальных управлений $\{p^0_\mu(t)\}$ полной линейной разнотемповой системы является минимизирующей для функционала J редуцированной системы:*

$$\lim_{\mu\to 0} J[u(p^0_\mu(t))] = J[u(p^0(t))] = J^0. \tag{5}$$

Доказательство. В силу неравенств (2) и (4) можем записать

$$|J[u(p^0_\mu(t))] - J^0| = |J[u(p^0_\mu(t))] - J[u(p^0(t))]| \le |J[u(p^0_\mu(t))] - J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t))]| +$$

$$+|J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t)) - J[u(p^0(t))]| \le C\varepsilon_\mu + C\varepsilon_\mu = 2C\varepsilon_\mu.$$

Таким образом, равенство (5) выполняется.

Следствие 1. *На оптимальном управлении $p^0(t)$ редуцированной задачи критерии качества J_μ, J полной и редуцированной систем удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{\mu\to 0} J_\mu[u_\mu(p^0(t))] = J^0.$$

Доказательство следует из неравенства (2) при $p(t) = p^0(t)$. При этом справедлива оценка

$$|J_\mu[u_\mu(p^0(t))] - J[u(p^0(t))]| \leq C\varepsilon_\mu.$$

Следствие 2. *Для критерия качества* J_μ *в полной линейной задаче оптимального управления имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to 0} |J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t))] - J_\mu[u_\mu(p^0(t))]| = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая (2) – (5), можем записать

$$|J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t))] - J_\mu[u_\mu(p^0(t))]| \leq |J_\mu[u_\mu(p^0_\mu(t))] - J[u(p^0(t))]| +$$
$$+ |J[u(p^0(t))] - J_\mu[u_\mu(p^0(t))]| \leq C\varepsilon_\mu + C\varepsilon_\mu = 2C\varepsilon_\mu. \tag{7}$$

Из (7) при $\mu \to 0$ получаем равенство (6).

Отметим, что в постоянную C входят размеры области Q. Итак, из соотношений (6) – (7) следует, что алгоритм оптимального управления редуцированной системы можно применять для приближенного управления полной линейной разнотемповой системой. Погрешность по критерию качества оценивается неравенством (7).

Аналогичную теорему о сходимости можно доказать для других задач оптимального управления разнотемповыми СРП, например, для задачи с управлением $p(t)$ по границе управляемого объекта.

4. Редуцированная система. Для задач синтеза оптимального управления с критериями вида J известна методика построения алгоритмов управлений $p(t), p(t,x)$ в уравнении и $p(t)$ – по границе объекта в классе обобщенных функций [5, с.279]. При этом вспомогательные системы уравнений в частных производных типа Риккати содержат функции трех переменных $K(t,x,s)$ и дельта-функции Дирака. В работе [6] показано, что для управлений $p(t,x)$ в уравнении и $p(t)$ по границе объекта с критериями вида J существуют другие алгоритмы синтеза оптимального управления, с более простыми системами в частных производных типа Риккати. Пусть редуцированная система с управлением $p(t)$ по границе имеет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a_2 u(t,x) + f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x), \alpha_1\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} + \alpha_2 u(t,0) = \alpha_3 u_1(t),$$

$$\alpha_4\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} + \alpha_5 u(t,1) = \alpha_6 p(t) + \alpha_8 u_2(t). \tag{8}$$

В (8) постоянные a, a_2, α_i, $i = 1, ..., 8$, заданы, функции $f(t,x)$, $u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – известные и такие, что существует единственное обобщенное решение $u(t,x) \in W_2^{1,1}(Q)$. По методике [5, с.320] для критерия J получаем функциональное уравнение Беллмана:

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t} = \gamma_1\int_0^1 [u(t,x) - g(t,x)]^2 dx + \frac{a\alpha_8}{\alpha_4}u_2(t)v(t,1) - \frac{a\alpha_5}{\alpha_4}u(t,1)v(t,1) +$$
$$+\frac{a\alpha_2}{\alpha_1}u(t,0)v(t,0) - \frac{a\alpha_3}{\alpha_1}u_1(t)v(t,0) - au(t,1)\frac{\partial v(t,1)}{\partial x} + au(t,0)\frac{\partial v(t,0)}{\partial x} +$$

$$+a\int_0^1 u(t,x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}dx+\int_0^1 f(t,x)v(t,x)dx+$$
$$+a_2\int_0^1 u(t,x)v(t,x)dx-\frac{a^2\alpha_6^2}{4\alpha_4^2\beta}v^2(t,1) \tag{9}$$

с условием

$$S(T,u)=\gamma_2\int_0^1[u(T,x)-\psi(x)]^2dx,$$

где $v(t,x)$ — производная Фреше функционала $S(t,u)$. Решение уравнения (9) в [6] предлагается искать в виде формы

$$S(t,u(t,x))=\int_0^1 k(t,x)u^2(t,x)dx+\int_0^1\varphi(t,x)u(t,x)dx+\eta(t), \tag{10}$$

тогда оптимальное синтезирующее управление определяется по формуле

$$p^0(t,u)=-\frac{a\alpha_6}{2\alpha_4\beta}\{2k(t,1)u(t,1)+\varphi(t,1)\}. \tag{11}$$

Для случаев, когда измерение состояния объекта в его внутренних точках затруднено или невозможно, предлагается минимизировать критерий качества, содержащий отклонение состояния объекта от заданной величины только по границе [7]:

$$J_1=\xi_1\int_0^T[u(t,1)-g(t)]^2dt+\xi_2[u(T,1)-\psi(1)]^2+\beta\int_0^T p^2(t)dt. \tag{12}$$

Для (12) в уравнениях (8), (9) равны нулю постоянные $a_2=0$, $\alpha_2=0$. Решение соответствующего (9) уравнения Беллмана можно искать в виде следующих форм: 1) в виде формы [5] с функцией $K(t,x,s)$; 2) в виде формы (10) [6] с функцией $k(t,x)$; 3) в виде формы с функцией $k_1(t)$ [7]:

$$S(t,u)=k_1(t)u^2(t,1)+\varphi_1(t)u(t,1)+\eta(t). \tag{13}$$

Для задачи (8), (12) с формой (13) алгоритм синтеза оптимального управления имеет вид

$$p^0(t,u)=-\frac{a\alpha_6}{2\alpha_4\beta}\{2k_1(t)u(t,1)+\varphi_1(t)\} \tag{14}$$

с вспомогательной системой в обыкновенных производных типа Риккати.

5. Заключение. Приведены и обоснованы два способа построения упрощенного алгоритма синтезирующего управления для линейной разнотемповой СРП. Первый — алгоритм приближенного управления строится по редуцированной системе. Второй — для алгоритма оптимального управления редуцированной системы предложены более простые формы решения функционального уравнения Беллмана.

Цитированная литература

1. **Абдикеримов Т.А.**//Автоматика и телемеханика. 1965. №2. С.216–222.

2. **Будак Б.М., Беркович Е.М., Соловьева Е.Н.** // Вестник МГУ. 1968. №2. С.41–55.

3. **Кузнецов В.А., Степанова Л.А., Самохвалова Т.П.** // Материалы Междунар. конфер. "Проблемы и перспективы интеграции образования". Том 2. Бишкек, 1998. С.67–68.

4. **Шаршеналиев Ж.Ш., Мезенина А.В., Тентимишева А.А.** // Известия НАН КР. 1999. № 1. С.17–22.

5. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М., 1978.

6. **Самохвалова Т.П.** // Проблемы автоматики и процессов управления. Бишкек, 1995. С.112–121.

7. **Самохвалова Т.П.** // Проблемы автоматики и управления. Бишкек, 2004. С.52–62.

Поступила в редакцию 28.09.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С.80—87*

УДК 621.371.167; 621.372.81

ДИФРАКЦИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН НА ОТРЕЗКЕ ЦИЛИНДРА

С. С. Саутбеков

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, ИМ НАН РК
Астана sautbek@mail.ru

Рассмотрена дифракция несимметричной волны на отрезке круглого цилиндра, соосно расположенного внутри бесконечного волновода. Краевая задача сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно Фурье-компоненты плотности поверхностного тока. Точное решение системы строится по методу Винера-Хопфа-Фока в классе аналитических функций и определяется в виде суммы по парциальным волнам.

Известно, что краевые задачи на тонких конечных структурах могут быть решены строго методом Винера-Хопфа-Фока (ВХФ). Он также именуется методом факторизации. Методу факторизации или ВХФ посвящены множество работ, например, Нобла Б., Вайнштейна Л.А. и Миттра Р., Ли С. [1 – 3], а также [4, 5]. Следует отметить, что классический метод задачи Римана и метод ВХФ являются родственными [4]. Однако попытка распространить метод ВХФ за рамки полубесконечных структур влечет за собой существенные математические трудности [1 – 3]. Дополнительные сложности возникают, когда рассматривается дифракция несимметричных волн. Поэтому, чтобы решить основную задачу, сначала рассмотрим ключевую задачу о дифракции несимметричной волны на конце полубесконечного круглого волновода.

1.Дифракция на конце круглого полубесконечного волновода.

Несимметричные электрические и магнитные волны ($m = 1, 2, 3, \ldots$) отличаются от симметричных волн ($m = 0$) тем, что дифракционное поле несимметричных волн характеризуется двумя скалярными функциями, которые соответственно являются продольной составляющей электрического и магнитного векторов Герца [2, 5] при разделении переменных на угловые и радиальные части:

$$\Pi_z^e = \sin(m\varphi + \varphi_0)\Pi(r, z), \quad \Pi_z^m = \cos(m\varphi + \varphi_0)\tilde{\Pi}(r, z).$$

Keywords: *nonsymmetric wave, system of singular integral equations, analytical function, Wiener-Hopf-Fock's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 78A45

Наличие двух функций Герца усложняет нахождение решения краевой задачи методом ВХФ. Однако точное решение задачи может быть получено путем некоторого обобщения соответствующей осесимметричной задачи.

С помощью функции Π и $\tilde{\Pi}$ [2] из системы уравнений Максвелла электромагнитные поля выражаются следующим образом:

$$E_r = \sin(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\Pi - i\frac{mk}{r}W\tilde{\Pi}\right),$$

$$E_\varphi = \cos(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial z}\Pi - ikW\frac{\partial}{\partial r}\tilde{\Pi}\right),$$

$$E_z = \sin(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Pi,$$

$$H_r = \cos(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\tilde{\Pi} - i\frac{mk}{r}W^{-1}\Pi\right),$$

$$H_\varphi = -\sin(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\Pi} - ikW^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\Pi\right),$$

$$H_z = \cos(m\varphi + \varphi_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{\Pi}, \quad W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Здесь во всех формулах подразумевается множитель $\exp(-i\omega t)$, который показывает зависимость полей от времени по гармоническому закону, постоянный угол φ_0 определяется поляризацией волны, набегающей на конец круглого волновода.

Отметим, электромагнитные поля так называемых E_{mn} - волн (несимметричные электрические волны) определяются из вышеприведенных формул через электрическую функцию Герца Π, а электромагнитные поля волн H_{mn} (несимметричные магнитные волны) – из магнитной функции Герца $\tilde{\Pi}$. Здесь индекс n показывает номер пространственной гармоники для заданного значения m, т. е. первый из них определяет угловую, второй – радиальную зависимость. При этом несимметричные волны E_{m1}, $E_{m2}, \ldots$ и H_{m1}, $H_{m2}, \ldots$ для данного значения m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) нужно рассматривать совместно, так как при отражении от конца волновода они трансформируются друг в друга.

1.1 Постановка ключевой задачи.

Пусть на конец полубесконечной трубы с бесконечно тонкой стенкой радиуса a_1, помещенной соосно внутри основного волновода радиуса a, набегают справа две несимметричные волны: одна электрическая с амплитудой A и волновым числом $-h$ и другая – магнитная с амплитудой B и волновым числом $\tilde{h}$ (рис. 1.).

При этом решение задачи должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$E_z = E_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad -\infty < z < \infty; \quad r = a_1,\ z > 0, \tag{1}$$

$$J_\varphi = H_z(a_1 - 0, \varphi, z) - H_z(a_1 + 0, \varphi, z) = 0 \quad \text{при} \quad z < 0, \tag{2}$$

$$J_z = H_\varphi(a_1 + 0, \varphi, z) - H_\varphi(a_1 - 0, \varphi, z) = 0 \quad \text{при} \quad z < 0, \tag{3}$$

где J_φ, J_z – угловая и продольная составляющие поверхностной плотности тока. Причем электрическая и магнитная функции Герца Π и $\tilde{\Pi}$ должны быть решениями уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\Pi\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Pi + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\Pi = 0. \tag{4}$$

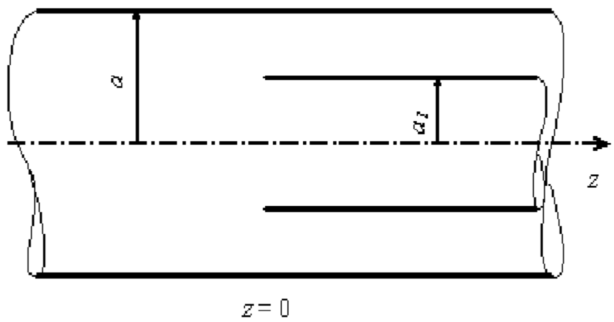

Рис. 1: Полубесконечный волновод

1.2. Решение задачи методом Винера-Хопфа-Фока.

Функции Герца согласно уравнению (4) ищем в виде [4, 5]:

$$\Pi = -i\frac{\pi a_1}{2k}W\int\limits_C \exp(iwz)\mathcal{L}(r,w)\mathcal{F}(w)dw,$$

$$\tilde{\Pi} = \frac{\pi a_1}{2}\int\limits_C \exp(iwz)L(r,w)\frac{F(w)}{v}dw,$$

где $v=\sqrt{k^2-w^2}$,

$$\mathcal{L}(r,w) = J_m(va)^{-1}\left\{\begin{array}{l} J_m(vr)(a_1,a),\ r\le a_1 \\ J_m(va_1)(r,a),\ r\ge a_1 \end{array}\right. ,$$

$$L(r,w) = J'_m(va)^{-1}\left\{\begin{array}{l} J_m(vr)(a'_1,a'),\ r\le a_1 \\ J'_m(va_1)(r,a'),\ r\ge a_1 \end{array}\right. ,$$

$$(r,a) = J_m(vr)N_m(va) - J_m(va)N_m(vr),$$
$$(r,a') = J_m(vr)N'_m(va) - J'_m(va)N_m(vr),$$
$$(r',a') = J'_m(vr)N'_m(va) - J'_m(va)N'_m(vr),$$

$J_m(x)$ – функция Бесселя $m-$ го порядка, $N_m(x)$ – функция Неймана $m-$ го порядка, штрих у функций Бесселя означает производную, C – контур интегрирования в плоскости комплексной переменной w, проходящий в основном по вещественной оси и огибающий узкой петлей точки h и $\tilde{h}$ снизу, F и $\mathcal{F}$ – искомые функции. Очевидно, что h и $\tilde{h}$ находятся в нижней полуплоскости (НП) комплексной переменной w.

Тогда уравнение (1) для E_φ при $z\ge 0$ примет вид

$$E_\varphi(a_1,\varphi,z) = \frac{\pi a_1 k}{2i}W\cos(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)\left(i\frac{mw}{k^2a_1}\mathcal{L}\mathcal{F}(w)+LF(w)\right)dw = 0,$$

где введены обозначения: $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}(a_1,w)$, $L\equiv L(a'_1,w)$.

Аналогично записывается второе условие в (1) при $z>0$:

$$E_z(a_1,\varphi,z) = \frac{\pi a_1}{2ik}W\sin(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)v^2\mathcal{L}\mathcal{F}(w)dw = 0.$$

Таким образом, граничные условия в (1) эквивалентны следующим интегральным уравнениям:

$$\int\limits_C \exp(iwz)\left(i\frac{mw}{k^2a_1}\mathcal{L}\mathcal{F}(w)+LF(w)\right)dw=0 \quad \text{при } z\geq 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_C \exp(iwz)v^2\mathcal{L}\mathcal{F}(w)dw=0 \quad \text{при } z>0. \tag{6}$$

С помощью интегрального представления продольной составляющей магнитного поля и значения вронскиана [4]

$$H_z(r,\varphi,z)=\frac{\pi a_1}{2}\cos(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)vL(r,w)F(w)dw, \quad (a_1,a_1')=-\frac{2}{\pi v a_1},$$

получим азимутальную составляющую поверхностной плотности тока при $r=a_1$:

$$J_\varphi=\cos(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)F(w)dw. \tag{7}$$

Записав также азимутальную составляющую магнитного поля

$$H_\varphi(r,\varphi,z)=\frac{\pi a_1}{2i}\sin(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)\left(\frac{mw}{vr}L(r,w)F(w)+iv\mathcal{L}(r',w)\mathcal{F}(w)\right)dw,$$

аналогично из (3) получим

$$J_z=\sin(m\varphi+\varphi_0)\int\limits_C \exp(iwz)\left(\mathcal{F}(w)+i\frac{mw}{a_1v^2}F(w)\right)dw. \tag{8}$$

Из условия отсутствия токов на продолжении полубесконечного волновода в (2) и (3) и выражений (7) и (8) легко получить следующие интегральные уравнения:

$$\int\limits_C \exp(iwz)F(w)dw=0 \quad \text{при } z<0, \tag{9}$$

$$\int\limits_C \exp(iwz)\left(\mathcal{F}(w)+i\frac{mw}{a_1v^2}F(w)\right)dw=0 \quad \text{при } z\leq 0. \tag{10}$$

Для определенности считаем во всех рассуждениях $\mathrm{Im}\quad k>0$, к пределу $\mathrm{Im}\quad k=0$ переходим только в окончательных формулах.

Итак, краевая задача сведена к решению системы функциональных уравнений (5), (6), (9), (10). Следует отметить, что для однозначности решения системы полученных интегральных уравнений необходимо потребовать также выполнение условия на ребре (условие Мейкснера) [3], которое задает характер поведения полей вблизи острого края.

Искомые функции F и $\mathcal{F}$ удовлетворяют системе функциональных уравнений, если выполняются следующие требования [2].

1. Подынтегральная функция $F(w)$ в (9) аналитична в нижней полуплоскости (НП) (при $\mathrm{Im}w<0$) всюду, за исключением точки $w=-\tilde{h}$, где она имеет простой полюс с вычетом B , $F(w)$ равномерно стремится к нулю как $w^{-1/2}$ при $|w|\to\infty$.

2. Подынтегральная функция в (10) аналитична в НП, т. е. функция $\mathcal{F}(w)$ аналитична в НП всюду, за исключением точек $w=-k$ и $w=-h$, где вычет в последней равен A, $\mathcal{F}(w)$ равномерно стремится к нулю как $w^{-3/2}$ при $|w|\to\infty$.

3. Подынтегральная функция $v^2\mathcal{L}\mathcal{F}(w)$ в (6) аналитична в верхней полуплоскости (ВП) ($\mathrm{Im}\quad w>0$) и ведет себя как $w^{-1/2}$ при $|w|\to\infty$.

4. Подынтегральная функция в (5) аналитична в ВП, функции $w\mathcal{L}\mathcal{F}(w)$ и $LF(w)$ аналитичны в ВП всюду, за исключением точки $w=k$, где они ведут себя как $w^{-3/2}$ при $|w|\to\infty$.

Отметим, асимптотики функции $\mathcal{F}(w)$ и $F(w)$ обеспечивают выполнение условия на ребре (Мейкснера). Решение системы функциональных уравнений, удовлетворяющее вышеприведенным требованиям, строится по методу Винера-Хопфа-Фока следующим образом:

$$\mathcal{F}(w)=\frac{1}{(k-w)\mathcal{L}_-}\left(\frac{E_1}{w+h}+\frac{E_2}{w+k}\right), \tag{11}$$

$$F(w)=\frac{1}{L_-}\left(\frac{M_1}{w+\tilde{h}}+\frac{M_2}{k-w}\right), \tag{12}$$

где E_1, E_2, M_1, M_2 – постоянные, $\mathcal{L}_-$, L_- – факторизованные функции, аналитичные в нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}\quad w<0$).

Для факторизованных функций справедливы следующие соотношения [1–4]:

$$L(a_1,w)=L(a_1,w)_-\cdot L(a_1,w)_+,\qquad L(a_1,w)_+=L(a_1,-w)_-.$$

Интеграл по узкой петле контура C вокруг полюса $w=-\tilde{h}$ в (7) соответствует набегающей волне тока магнитного типа, откуда получим связь постоянной M_1 с амплитудой B:

$$M_1=\frac{B}{2\pi i}L(a_1,\tilde{h})_+. \tag{13}$$

С помощью вычета в точке $w=-h$ из уравнения (8) аналогично определим константу

$$E_1=\frac{A}{2\pi i}(k+h)\mathcal{L}(a_1,h)_+. \tag{14}$$

Замыкая контур интегрирования C в ВП и компенсируя единственный простой полюс подынтегральной функции в точке $w=k$, сведем интегральное уравнение (5) к алгебраическому

$$\Delta\left(\frac{2k}{k+h}E_1+E_2\right)+kM_2=0, \tag{15}$$

где

$$\Delta=\frac{im}{2ka_1}\frac{\mathcal{L}_+(a_1,k)}{L_+(a_1,k)}.$$

Аналогично, замыкая контур интегрирования в НП, из уравнения (10) имеем

$$k\Delta\left(\frac{2k}{\tilde{h}-k}M_1+M_2\right)-E_2=0. \tag{16}$$

Решив систему из двух алгебраических уравнений (15) и (16), определим постоянные

$$E_2=-\frac{2k\Delta}{1+\Delta^2}\left(\frac{k}{k-\tilde{h}}M_1+\frac{\Delta}{k+h}E_1\right), \tag{17}$$

$$M_2=-\frac{2\Delta}{1+\Delta^2}\left(\frac{1}{k+h}E_1-\frac{k\Delta}{k-\tilde{h}}M_1\right). \tag{18}$$

Формулы (11) – (14), (17) и (18) дают искомое решение системы функциональных уравнений и тем самым, решение поставленной электродинамической задачи.

2. Дифракция несимметричной волны на отрезке цилиндра.

2.1. Постановка задачи.

Пусть на конец отрезка трубы с бесконечно тонкой стенкой радиуса a_1, помещенного соосно внутри основного волновода радиуса a, также как в предыдущей задаче, набегают справа две несимметричные волны: одна электрическая с амплитудой A и волновым числом $-\ h$ и другая – магнитная с амплитудой B и волновым числом $\tilde{h}$ (рис.2.).

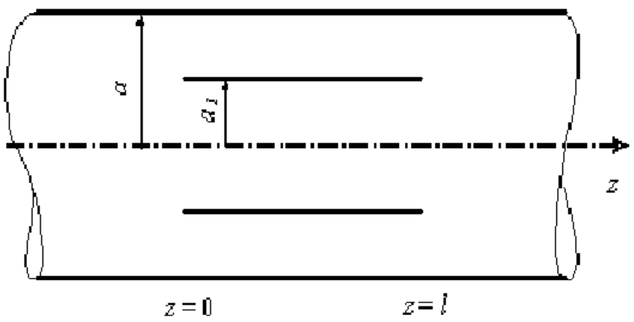

Рис. 2: Отрезок цилиндра

Краевая задача, аналогично задаче о дифракции на полубесконечном волноводе, сводится к системе следующих функциональных интегральных уравнений:

$$\int\limits_C \exp(iwz)\left(i\frac{mw}{k^2a_1}\mathcal{L}\mathcal{F}(w)+LF(w)\right)dw=0 \quad \text{при } 0\le z\le l, \tag{19}$$

$$\int\limits_C \exp(iwz)v^2\mathcal{L}\mathcal{F}(w)dw=0 \quad \text{при } \ 0\le z\le l, \tag{20}$$

$$\int\limits_C \exp(iwz)F(w)dw=0 \quad \text{при } z<0, z>l, \tag{21}$$

$$\int\limits_C \exp(iwz)\left(\mathcal{F}(w)+i\frac{mw}{a_1v^2}F(w)\right)dw=0 \quad \text{при } z\le 0,\ z\ge l. \tag{22}$$

2.2. Решение краевой задачи.

Решение системы строим по методу Финера-Хопфа-Фока с помощью аналитических источников, расположенных на концах отрезка, которые поглощают все падающие волны и переизлучают их в виде собственных пространственных гармоник вперед и обратно:

$$\mathcal{F}(w)=\frac{1}{(k-w)\mathcal{L}_-}\left(C_1^+(w)+\frac{C_1}{w+k}\right)+\frac{\exp(-iwl)}{(k+w)\mathcal{L}_+}\left(C_2^-(w)+\frac{C_2}{w-k}+\frac{D_2}{w+h}\right), \tag{23}$$

$$F(w)=\frac{1}{L_-}\left(\frac{B_1}{w+k}+\frac{A_1}{w-k}+E_1^+(w)\right)+\frac{\exp(-iwl)}{L_+}\left(\frac{B_2}{w+k}+\frac{A_2}{w-k}+E_2^-(w)+\frac{F_2}{w+\tilde{h}}\right), \tag{24}$$

где C_1, C_2, D_2, A_1, A_2, B_1, B_2, F_2 – постоянные, $C_1^+(w)$, $E_1^+(w)$ – аналитические функции в верхней полуплоскости, $C_2^-(w)$, $E_2^-(w)$ – аналитические функции в нижней полуплоскости.

Искомые функции в (23) и (24) представим в виде

$$C_1^+(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^1}{w+w_n},\qquad E_1^+(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n^1}{w+\tilde{w}_n},$$

$$C_2^-(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{w-w_n},\qquad E_2^-(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n^2}{w-\tilde{w}_n},$$

где w_n – нули функции $\mathcal{L}_-$, $\tilde{w}_n$ – нули функции L_- ($n=1, 2, \dots$).

Отметим, что уравнение (20) удовлетворяется автоматически, так как при замыкании контура интегрирования C полуокружностью бесконечного радиуса в ВП или НП согласно лемме Жордана подынтегральная функция внутри нее оказывается аналитической.

Поскольку интеграл по петле контура C в $E_z(r,\varphi,z)$ соответствует полю падающей волны, вычислив вычет в точке $w=-h$, определим постоянную

$$D_2=A\frac{k}{\pi^2 a_1}\frac{\mathcal{L}_-(a_1,h)}{(k+h)}\exp(-ihl)\frac{J_m(va)}{(a_1,a)}\bigg|_{\,v=\sqrt{k^2-h^2}}.$$

Аналогично получим постоянную для продольной составляющей падающей магнитной волны:

$$F_2=-i\frac{B}{\pi^2 a_1}L_-(a_1,\tilde{h})\exp(-i\tilde{h}l)\frac{J_m'(va)}{(a_1',a')}\bigg|_{\,v=\sqrt{k^2-\tilde{h}^2}}.$$

Чтобы удовлетворить уравнению (21), необходимо скомпенсировать все полюса внутри контура интегрирования: в НП при $z<0$ или в ВП при $z>l$. Компенсация простых полюсов, за исключением $w=\pm k$, осуществляется с помощью функций $E_1^+(w)$ и $E_2^-(w)$:

$$E_1^+(w)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(i\tilde{w}_n l)}{(w+\tilde{w}_n)}\frac{L_+(a_1,\tilde{w}_n)}{L_-^*(a_1,\tilde{w}_n)}\left(-\frac{A_2}{k+\tilde{w}_n}+\frac{B_2}{k-\tilde{w}_n}+E_2^-(-\tilde{w}_n)+\frac{F_2}{\tilde{h}-\tilde{w}_n}\right), \tag{25}$$

$$E_2^-(w)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(i\tilde{w}_n l)}{(w-\tilde{w}_n)}\frac{L_+(a_1,\tilde{w}_n)}{L_-^*(a_1,\tilde{w}_n)}\left(\frac{A_1}{\tilde{w}_n-k}+\frac{B_1}{\tilde{w}_n+k}+E_1^+(\tilde{w}_n)\right), \tag{26}$$

где $L_-^*(a_1,\tilde{w}_n)=\lim\limits_{w\to\tilde{w}_n}(w-\tilde{w}_n)^{-1}L_-(a_1,w)$.

Компенсируя полюс плоской волны в точке $w=-k$ в уравнении (21) при $z<0$ в НП, затем в точке $w=k$ в ВП, имеем

$$B_1=-B_2\frac{L_+(a_1,k)}{L_-(a_1,k)}\exp(ikl),\quad A_2=-A_1\frac{L_+(a_1,k)}{L_-(a_1,k)}\exp(ikl).$$

Погасив поля плоских волн на продолжении отрезка (компенсируя полюса $w=\pm k$ соответственно в ВП и НП) из уравнения (22) получим

$$\frac{C_1}{2k\mathcal{L}_+(a_1,k)}+\frac{1}{\mathcal{L}_-(a_1,k)}\left(C_2^-(-k)-\frac{C_2}{2k}+\frac{D_2}{h-k}\right)\exp(ikl)=$$

$$=\frac{im}{2a_1}\left[\frac{1}{L_+(a_1,k)}\left(E_1^+(-k)-\frac{A_1}{2k}\right)+\frac{1}{L_-(a_1,k)}\left(E_2^-(-k)-\frac{A_2}{2k}+\frac{F_2}{\tilde{h}-k}\right)\exp(ikl)\right], \tag{27}$$

$$\frac{1}{\mathcal{L}_-(a_1,k)}\left(\frac{C_1}{2k}+C_1^+(k)\right)+\frac{C_2}{2k\mathcal{L}_+(a_1,k)}\exp(-ikl)=$$
$$=\frac{im}{2a_1}\left[\frac{1}{L_-(a_1,k)}\left(E_1^+(k)+\frac{B_1}{2k}\right)+\frac{1}{L_+(a_1,k)}\left(E_2^-(k)+\frac{B_2}{2k}+\frac{F_2}{\tilde{h}+k}\right)\exp(-ikl)\right]. \qquad (28)$$

Также из соотношения (1) имеем

$$\left(\frac{im}{a_1k}\frac{L_-(a_1,k)}{2k}C_2+L_-(a_1,k)A_2\right)\exp(-ikl)+L_+(a_1,k)A_1=\frac{im}{a_1k}\mathcal{L}_+(a_1,k)\left(\frac{C_1}{2k}+C_1^+(k)\right), \qquad (29)$$

$$\frac{im}{a_1k}\left[\mathcal{L}_-(a_1,k)\frac{C_1}{2k}+L_+(a_1,k)\left(\frac{C_2}{2k}-C_2^-(-k)+\frac{D_2}{k-h}\right)\exp(ikl)\right]=$$
$$=L_-(a_1,k)B_1+L_+(a_1,k)B_2\exp(ikl). \qquad (30)$$

Учитывая уравнение (21) и компенсируя полюса пространственных гармоник соответственно в НП и ВП, получим систему функциональных уравнений

$$C_1^+(w)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(iw_nl)}{(w+w_n)}\frac{\mathcal{L}_+(a_1,w_n)}{\mathcal{L}_-^*(a_1,w_n)}\frac{(k+w_n)}{(k-w_n)}\left(C_2^-(-w_n)-\frac{C_2}{k+w_n}+\frac{D_2}{h-w_n}\right), \qquad (31)$$

$$C_2^-(w)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(iw_nl)}{(w-w_n)}\frac{\mathcal{L}_+(a_1,w_n)}{\mathcal{L}_-^*(a_1,w_n)}\frac{(k+w_n)}{(k-w_n)}\left(C_1^+(w_n)+\frac{C_1}{k+w_n}\right), \qquad (32)$$

где
$$\mathcal{L}_-^*(a_1,w_n)=\lim_{w\to w_n}(w-w_n)^{-1}\mathcal{L}_-(a_1,w).$$

Таким образом, краевая задача сведена к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Поскольку конечные выражения имеют экспоненциальную сходимость, при расчете полей достаточно учесть все действительные значения продольных волновых чисел и ограничиться их несколькими мнимыми значениями.

Цитированная литература

1. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения уравнений в частных производных. М., 1962.

2. **Вайнштейн Л. А.** Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.

3. **Миттра Р., Ли С.** Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.

4. **Уразаков Э. И.** Волновые электромагнитные процессы в направляющих системах. Алма-Ата, 1981.

5. **Саутбеков С.С.** Метод краевых источников в теории дифракции электромагнитных волн. Алматы, 2001.

Поступила в редакцию 12.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 88 – 94*

УДК 517.518

О НЕРАВЕНСТВАХ БЕРНШТЕЙНА, ДЖЕКСОНА-НИКОЛЬСКОГО С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ

Сихов М.Б.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050010 Алматы Масанчи 39/47 e-mail: mirbulats@mail.ru

Получены точные по порядку неравенства Бернштейна, Джексона-Никольского для тригонометрических полиномов со спектром, порожденных поверхностями уровня функций $\Lambda(t)$ при некоторых ограничениях на функцию $\Lambda(t)$. Эти множества являются обобщением гиперболических крестов на случай произвольного $\Lambda(t)$.

Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$ – s-мерный куб, $L^p(\pi_s)$ $(1 \le p < \infty)$ – множество всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s)$ таких, что

$$\left\|f\right\|_p = (2\pi)^{-s} \left(\int\limits_{\pi_s} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$
$$L_0^p(\pi_s) = \left\{ f \in L^p(\pi_s) : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0 \quad (j = 1, ..., s\ ) \right\}.$$

Для подмножества B евклидова пространства R^s через B_0 и B_+ обозначим множества, состоящие из всех элементов $x = (x_1, ..., x_s) \in B$, каждая компонента которых неотрицательна и положительна соответственно. Через Z^s, как обычно, обозначим целочисленную решетку R^s. Для $n \in Z_+^s$ положим $\left\|n\right\|_1 = n_1 + \ldots + n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1}, \ldots, 2^{-n_s})$.

Определим следующие множества $(N > 0)$:

$$\Gamma(\Lambda, N) = \left\{m \in Z_0^s : \Lambda(2^{-m}) \ge \tfrac{1}{N}\right\},\ \Gamma^{\perp}(\Lambda, N) = Z_0^s \setminus \Gamma(\Lambda, N)\ ,$$
$$\rho(n) = \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s :\ [2^{n_j - 1}] \le |m_j| < 2^{n_j}\} \quad (n \in Z_0^s),$$
$$Q(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \rho(n),$$
$$T(G) = \left\{ t(x) : t(x) = \sum_{n \in G} c_n\ e^{\ i\ (n,x)} \right\},$$

Keywords: *Bernshtein's and Jackson-Nikol'skii's inequalities, function spectrum, level surface*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

где $[a]$ – целая часть числа a, G – конечное множество точек Z^s.

В нашей работе спектр G будет задан посредством непрерывной на $[0,1]^s$ функции $\Lambda(t) = \Lambda(t_1, ..., t_s)$, неубывающей по каждой переменной при любых фиксированных остальных и такой, что $\Lambda(t) > 0$ и $\Lambda(t) = 0$, смотря по тому, $\prod\limits_{j=1}^{s} t_j > 0$ или $\prod\limits_{j=1}^{s} t_j = 0$.

Нам также потребуются некоторые ограничения на мажорантные функции $\Lambda(t)$ (заметим,что разные типы таких ограничений представлены в [1]).

По С.Н. Бернштейну (см., напр., [2], с.493) функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей (почти убывающей) на (a, b), где $0 \le a < b \le \infty$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\varphi(t_1) \le C\varphi(t_2)$ $(\varphi(t_1) \ge C\varphi(t_2))$ для всех $a < t_1 < t_2 < b$.

Функция одного переменного $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S^α) или (S_α) на (a, b) при $\alpha > 0$, если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает (почти убывает) на (a, b).

Будем говорить, что $\Lambda(t) = \Lambda(t_1, ..., t_s)$ удовлетворяет условию $(S^{\boldsymbol{\alpha}})$ или $(S_{\boldsymbol{\alpha}})$ на $(a, b)^s$ при $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$, если при каждом $j = 1, ..., s$ функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет условию (S^{α_j}) или (S_{α_j}) на (a, b) по переменной t_j при фиксированных остальных.

Пусть на Z^s определены функции или, что то же самое, последовательности: действительнозначная $D(n)$ и $\alpha(n) = (\alpha_1(n), ..., \alpha_s(n))$ со значениями из R^s. В случае, когда $\alpha(n) \equiv \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in R^s$, вся последовательность $\{\alpha(n)\}_{n\in Z^s}$ обозначается через $\boldsymbol{\alpha}$.

Для $e \subset \{1, 2, ..., s\}$ введем определение частной производной функции f по переменным $x_j, j \in e$. Именно, если $f \in L(\pi_s)$ и

$$\sigma(f; x) \equiv \sum_{n\in Z^s} \hat{f}(n)e^{i(n,x)}$$

– её ряд Фурье-Лебега, а ряд

$$\sum_{n(l)\in Z^s} D(n(l)) \prod_{j=1}^{d} e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_{j_m}(k(e))} \cdot \widehat{f}(n(l))e^{i(n(l),x)}(n(e) =$$
$$= (0, ..., 0, n_{j_1}, 0, ..., 0, n_{j_d}, 0, ..., 0),\ n_{j_m} \neq 0, j_m \in e)$$

является рядом Фурье-Лебега некоторой функции, то эту функцию назовём $(D(e), \alpha(e))$ — производной функции f и обозначим через $f^{(D(e))}(x, \alpha(e))$.

Ясно, что при $e = \{1, 2, ..., s\}$ определение $(D(e), \alpha(e))$-производной функции f совпадает с определением (D, α)-производной функции f (более подробно об этом см.[3]).

В данной работе исследуются возможности тригонометрических полиномов из $T(Q(\Lambda, N))$ по отношению к двум группам вопросов. Первая касается неравенства Бернштейна (нормы полинома и его $(D(e), \alpha(e))$ — производной измеряются в метрике пространства L^p, $1 < p < \infty$). Вторая группа вопросов связана с неравенствами Джексона-Никольского (связывающими нормы полинома в различных метриках) (см., напр., [3–6]).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и для функций* $D(n) \neq 0$, $\alpha(n)$ *существует число* $C > 0$ *такое, что для всех* $k(e) \in \rho(n(e)), n(e) \in Z_0^s$

$$\left|\frac{D(k(e))}{D(2^{n(e)})}\right| \le C,$$

$$\frac{1}{|D(2^{n(e)})|} \sum_{k\in\rho(n)} \left|\Delta_{j_1}...\Delta_{j_d} D(k(e))e^{i(\frac{\pi\alpha(k(e))}{2},1)}\right| \le C, \tag{1}$$

тогда имеет место неравенство

$$\sup_{t\in T(Q(\Lambda,N))}\frac{\left\|t^{(D(e))}(x,\alpha(e))\right\|_p}{\|t(x)\|_p}\ll\sup_{n(e)\in\Gamma(\Lambda,N)}\left|D(2^{n(e)})\right|. \tag{2}$$

При $e=\{1,2,...,s\}$ эта теорема была доказана нами в [7]. Для произвольных $e\in\{1,2,...,s\}$ теорема доказывается аналогично.

Здесь и в дальнейшем при положительных A и B запись $B\ll A$ будет означать $B\le C(\alpha,\beta,...)\cdot A$, где $C(\alpha,\beta,...)$ некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, а запись $A\asymp B$ означает $A\ll B\ll A$. Вообще говоря, всюду ниже параметры $\alpha,\beta,...$ однозначно определяются по смыслу утверждений, поэтому, в целях сокращения записей, их указывать не будем.

Теорема 2. *Пусть даны числа* $1<p<\infty$, $0<\tau_{j_1}=\cdots=\tau_{j_\nu}<\tau_{j_{\nu+1}}\le\cdots\le\tau_{j_d}$, $0<\beta_{j_1}=\cdots=\beta_{j_t}<\beta_{j_{t+1}}\le\cdots\le\beta_{j_d}$ $(1\le\nu\le t\le d)$ *такие, что* $\beta_{j_m}\tau_{j_1}\le\beta_{j_1}\tau_{j_m}$ $(m=t+1,...,d)$. *И пусть при каждом* $j_m\in e=(j_1,j_2,...,j_d)$ *функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\tau_{j_m}})$ *на* $(0,1]$ *по* j_m*-й переменной, а функция* $D(n)\ne0$ $(n\in Z^s)$ *– условию* $(S_{\beta_{j_m}})$ *на* Z_+ *по* j_m*-й переменной. Если функции* $D(n)$, $\alpha(n)$ *удовлетворяют условиям* (1), *то имеет место неравенство*

$$\sup_{t\in T(Q(\Lambda,N))}\frac{\left\|t^{(D(e))}(x,\alpha(e))\right\|_p}{\|t(x)\|_p}\ll N^{\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала, пользуясь условиями $(S^{\tau_{j_m}})$ для функции $\Lambda(t)$ и $(S_{\beta_{j_m}})$ для функции $|D(t)|$ по переменной t_{j_m}, получим

$$\Lambda(2^{-n(e)})=\frac{\Lambda(2^{-n(e)})}{\prod\limits_{j=1}^{d}2^{-n_{j_m}\tau_{j_m}}}\prod_{j=1}^{d}2^{-n_{j_m}\tau_{j_m}}\ll\Lambda(1)\prod_{j=1}^{d}2^{-n_{j_m}\tau_{j_m}},$$

$$\left|D(2^{n(e)})\right|=\frac{\left|D(2^{n(e)})\right|}{\prod\limits_{j=1}^{d}2^{n_{j_m}\beta_{j_m}}}\prod_{j=1}^{d}2^{n_{j_m}\beta_{j_m}}\ll|D(1)|\prod_{j=1}^{d}2^{n_{j_m}\beta_{j_m}}.$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{j=1}^{d}n_{j_m}\beta_{j_m}=\beta_{j_1}\left(n_{j_1}+n_{j_2}+\cdots+n_{j_t}+\frac{\beta_{j_{t+1}}}{\beta_{j_1}}n_{j_{t+1}}+\cdots+\frac{\beta_{j_d}}{\beta_{j_1}}n_{j_d}\right)\le$$
$$\le\beta_{j_1}\left(n_{j_1}+n_{j_2}+\cdots+n_{j_\nu}+\frac{\tau_{j_\nu}}{\tau_{j_1}}n_{j_t}+\frac{\tau_{j_{\nu+1}}}{\tau_{j_1}}n_{j_{\nu+1}}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_{j_{t+1}}}{\tau_{j_1}}n_{j_{t+1}}+\cdots+\frac{\tau_{j_d}}{\tau_{j_1}}n_{j_d}\right)\le\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}\sum_{j=1}^{d}n_{j_m}\tau_{j_m},$$

следует, что

$$\left|D(2^{n(e)})\right|\ll2^{\sum\limits_{j=1}^{d}n_{j_m}\beta_{j_m}}\ll2^{\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}\sum\limits_{j=1}^{d}n_{j_m}\tau_{j_m}}\ll\left(\Lambda(2^{-n(e)})\right)^{-\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}.$$

Подставляя эту оценку в (2), придем к искомой оценке

$$\left\|t^{(D(e))}(x,\alpha(e))\right\|_p\ll\sup_{n(e)\in\Gamma(\Lambda,N)}\left(\Lambda(2^{-n(e)})\right)^{-\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}.\|t(x)\|_p\ll$$
$$\ll N^{\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}\|t(x)\|_p.$$

Тем самым неравенство (3) доказано.

Теперь рассмотрим вопрос о точности неравенства Бернштейна.

В дальнейшем при

$$D(n(e)) = \prod_{j\in e} |n|_j^{\beta_j} \ (r \geq 0),\ n \in Z^s,$$

$\alpha(n(e)) = (\alpha_1(n(e)), ..., \alpha_s(n(e)))$, где $\alpha_j(n(e)) = \alpha_j signn_j$, если $j \in e,\ n \in Z^s$ и $\alpha_j(n(e)) = 0$, если $j \in e$, положим $f^{((D(e))}(x, \alpha(e)) \equiv f^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))$ и $(D(e), \alpha(e))$- производную функции f обозначим через $(\beta(e), \alpha(e))$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть даны числа* $1 < p < \infty,\ \alpha \in R^s,\quad 0 < \tau_{j_1} = \cdots = \tau_{j_\nu} < \tau_{j_{\nu+1}} \leq \cdots \leq \tau_{j_d},\quad 0 < \beta_{j_1} = \cdots = \beta_{j_t} < \beta_{j_{t+1}} \leq \cdots \leq \beta_{j_d}\quad (1 \leq \nu \leq t \leq d)$ *такие, что* $\beta_{j_m}\tau_{j_1} \leq \beta_{j_1}\tau_{j_m}\quad (m = t+1, ..., d)$. *И пусть при каждом* $j_m \in e = (j_1, j_2, ..., j_d)$ *функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\tau_{j_m}})$ *по* j_m*-й переменной. И пусть* $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_{j_1}^{\tau_{j_1}}$ *невозрастает на* $(0, 1]$ *при фиксированных* $(t_1, ..., t_{j_1-1}, t_{j_1+1}, ..., t_s)$ *и* $\Lambda(2^{-1}) = 1$. *Тогда*

$$\sup_{t\in T(Q(\Lambda,N))} \frac{\left\|t^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))\right\|_p}{\|t(x)\|_p} \asymp N^{\frac{\beta_{j_1}}{\tau_{j_1}}}. \tag{4}$$

Оценка сверху в (4) сразу следует из оценки (3).

Докажем оценку снизу. Не ограничивая общности, можем считать $e = \{1, 2, ..., m\}\quad (m = 1, 2, ..., s)$.

Пусть $t_n(x_1)$ тригонометрический полином одной переменной порядка не выше n, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\left\|t_n^{(\beta_1)}(x_1, \alpha_1)\right\|_p}{\|t_n(x_1)\|_p} \geq n^{\beta_1}. \tag{5}$$

Существование такого полинома следует из точности неравенства Бернштейна в одномерном случае (см., напр., [6]).

Пусть дано число N и пусть $2^{(l-\tau_1)} \leq N < 2^{(l+1-\tau_1)}$ для некоторого l.

Положим $t(x) = t(x_1, ..., x_s) = t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1) \prod\limits_{j=2}^{s} e^{ix_j}$.

Тогда с учетом (5) получим

$$\begin{aligned}
\left\|t^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))\right\|_{L^p(\pi_s)} &= \left(\prod_{j=2}^{s} \int_{\pi_1} \left|e^{i\alpha_j \frac{\pi}{2}} e^{ix_j}\right|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}} \times \\
\times \left(\prod_{j=m+1}^{s} \int_{\pi_1} \left|\tfrac{\pi}{2} e^{ix_j}\right|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}} & \left(\int_{\pi_1} \left|t^{(\beta_1)}_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1, \alpha_1)\right|^p dx_1\right)^{\frac{1}{p}} \\
\gg 2^{\frac{\beta_1}{\tau_1} l} \left\|t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1)\right\|_{L^p(\pi_1)} &\gg 2^{\frac{\beta_1}{\tau_1} l} \left\|t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1) \prod_{j=2}^{s} e^{ix_j}\right\|_{L^p(\pi_s)}
\end{aligned}$$

$$= 2^{\frac{\beta_1}{\tau_1}} \|t(x)\|_{L^p(\pi_s)}. \tag{6}$$

Далее, учитывая, что $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_1^{\tau_1}$ невозрастает на $(0, 1]$, для каждого $m_1 = 1, 2, ...$ имеем

$$\frac{\Lambda(2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]}, 2^{-1}, ..., 2^{-1})}{2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]\tau_1}} \geq 2^{\tau_1}\Lambda(2^{-1}) = 2^{\tau_1}.$$

Поэтому, если $m_1 \le l$, то

$$\frac{1}{N} \le 2^{-(l-\tau_1)} \le 2^{-\left(\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]-1\right)\tau_1} \le \Lambda(2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]}, 2^{-1}, ..., 2^{-1}),$$

т.е. $(\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right], 1, ..., 1) \in \Gamma(\Lambda, N)$ при $m_1 \le l$.

Тем самым

$$t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1) \prod_{j=2}^{s} e^{ix_j} \in Q(\Lambda, N).$$

Следовательно, из (6) следует, что

$$\sup_{T \in T(Q(\Lambda,N))} \frac{\left\|T^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))\right\|_p}{\|T(x)\|_p} \ge \frac{\left\|t^{(\beta(e))}(x, \alpha(e))\right\|_p}{\|t(x)\|_p} \gg 2^{\frac{\beta_1}{\tau_1}l} \gg N^{\frac{\beta_1}{\tau_1}}.$$

Получена оценка снизу, тем самым теорема доказана полностью.

Замечание 1. *Соотношения* (2) *и* (3) *(в частности,* (4)*) в многомерном случае устанавливают связь в одной и той же метрике* $L^p(\pi_s)$ *между геометрией спектра и способом дифференцирования полинома, определяемых* $\tau, \Lambda(t), N$ *и* $\beta, D(n), \alpha(n)$ *соответственно.*

При конкретном выборе $(1 < p < \infty)$

$$\Lambda_1(t) = \prod_{j=1}^{s} t_j^{\gamma_j} \quad (1 = \gamma_1 \le ... \le \gamma_s), \quad t \in [0,1]^s \ , \tag{7}$$

$$D(n) = \prod_{j=1}^{s} |n|_j^{r\gamma_j} \ (r \ge 0), \alpha_j(n) = \alpha_j signn_j \ , \ n \in Z^s,$$

в случае, когда $r\boldsymbol{\gamma} = r(\gamma_1, ..., \gamma_s)$ есть целочисленный вектор, неравенство (4) сводится к результатам Б.С. Митягина [8], а при произвольном $r\boldsymbol{\gamma}$ – к результатам Н.С. Никольской [9].

Неравенство (4) для (r, α) производных полиномов со спектром, определяемым функцией (7), установлено В.Н. Темляковым ([6], с.23).

Неравенство Джексона-Никольского для полиномов со спектром из произвольного конечного множества $G \subset Z^s$ изучались многими авторами (см., напр., [10–13]).

В частности, нами была доказана следующая (см.[7] и [14] (там было приведено сравнение нашей оценки с ранее известными оценками)).

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau_1 \le \dots \le \tau_s$ *и функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ *на* $(0,1]^s$ *при* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_s)$*. Тогда*

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda,N))} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \ll N^{\frac{1}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим вопрос о точности оценки (8). Справедлива

Теорема 5. *Пусть даны числа* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le \dots \le \tau_s$*. Пусть функция* $\Lambda(t)$ *удовлетворяет условию* $(S^{\boldsymbol{\tau}})$ *на* $(0,1]^s$ *при* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_s)$, $\Lambda(1) = 1$ *и* $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_1^{\tau_1}$ *невозрастает на* $(0,1]$ *при фиксированных* $(t_2, ..., t_s)$*. Тогда*

$$\sup_{t \in T(Q_0(\Lambda,N))} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \asymp N^{\frac{1}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{9}$$

Оценка сверху в (9) сразу следует из теоремы 4.

Докажем оценку снизу.

Пусть $t_n(x_1)$ – тригонометрический полином одной переменной порядка не выше n, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\|t_n(x_1)\|_q}{\|t_n(x_1)\|_p} \geq n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{10}$$

Существование такого полинома следует из точности неравенства Джексона-Никольского в одномерном случае (см.,напр., [5, с.133]).

Пусть дано число N и пусть $2^l \leq N < 2^{(l+1)}$ для некоторого l.

Положим

$$t(x) = t(x_1, ..., x_s) = t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1).$$

Тогда с учетом (10) получим

$$\|t(x)\|_{L^q(\pi_s)} = \left(\prod_{j=2}^{s} \int_{\pi_1} 1 dx_j\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\pi_1} \left|t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1)\right|^q dx_1\right)^{\frac{1}{q}} \gg$$
$$\gg 2^{\frac{l}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\|t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1)\right\|_{L^p(\pi_1)} \gg$$
$$\gg 2^{\frac{l}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\|t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1)\right\|_{L^p(\pi_s)} = 2^{\frac{l}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|t(x)\|_{L^p(\pi_s)}. \tag{11}$$

Далее, учитывая, что $\Lambda(t_1, ..., t_s)/t_1^{\tau_1}$ невозрастает на $(0, 1]$, для каждого $m_1 = 1, 2, ...$ имеем

$$\frac{\Lambda(2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]}, 1, ..., 1)}{2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]\tau_1}} \geq \Lambda(1) = 1.$$

Поэтому, если $m_1 \leq l$, то

$$\frac{1}{N} \leq 2^{-l} \leq 2^{-\left(\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]\right)\tau_1} \leq \Lambda(2^{-\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right]}, 1, ..., 1),$$

т.е. $(\left[\frac{m_1}{\tau_1}\right], 0, ..., 0) \in \Gamma_0(\Lambda, N)$ при $m_1 \leq l$.

Тем самым

$$t_{2^{\left[\frac{l}{\tau_1}\right]}}(x_1) \in Q_0(\Lambda, N). \tag{12}$$

Следовательно, из (11) и (12) следует, что

$$\sup_{T \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|T\|_q}{\|T\|_p} \geq \frac{\|t(x)\|_q}{\|t(x)\|_p} \gg 2^{\frac{l}{\tau_1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \gg N^{\frac{1}{\tau_1}\left(\frac{l}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Получена оценка снизу, тем самым, теорема доказана полностью.

Замечание 2. *Для функции* $\Lambda_1(t)$, *определенной как в* (7), *из соотношения* (9) *нетрудно получить соотношение*

$$\tau(T(Q(\Lambda_1, 2^m))) \asymp 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \quad (m = 1, 2, ...).$$

Это соотношение ранее было получено В.Н.Темляковым [6, с.23].

Замечание 3. Множество функций, удовлетворяющих условиям теоремы 5, достаточно широко. В частности, функции вида

$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = t_1^{\tau_1} \cdot \Lambda_1(t_2, t_3, ..., t_s)$$

принадлежат этому множеству, если $\Lambda_1(t_2, t_3, ..., t_s)$ удовлетворяют условию $(S^{(\tau_2,...,\tau_s)})$ на $(0, 1]^{s-1}$ при $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \cdots \leq \tau_s$.

Например, в качестве $\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s)$ можно взять функцию

$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = t_1^{\tau_1} \cdot \frac{{t_2}^{\tau_2}}{\left(log\frac{1}{t_2}\right)^{b_2}} \cdot ... \cdot \frac{{t_s}^{\tau_s}}{\left(log\frac{1}{t_s}\right)^{b_s}} \quad 0 < t_j < 1 \; j = 1, ..., s,$$
$$\Lambda(t_1, t_2, ..., t_s) = 0, \quad \prod_{j=1}^{s} t_j = 0$$

при $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \cdots \leq \tau_s$ и $b_j \geq 0$ $(j = 2, ..., s)$.

Цитированная литература

1. **Ульянов П.Л.** // Вестник МГУ. Серия математика, механика. 1995. № 1. С.37–52.
2. **Бари Н.К. Стечкин С.Б.** // Труды ММО. 1956. № 5. С.483–522.
3. **Никольский С.М.** // Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. С.244–278.
4. **Jackson D.** // Bull.Amer.Math.Soc. 1933. V.39. P.889–906.
5. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
6. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С.3–112.
7. **Сихов М.Б.** // Известия высших учебных заведений. Серия математика. 2002. № 8 (483). С.57–64.
8. **Митягин Б.С.** // Матем. сборник. 1962. Т. 58(100), № 3. С.397–414.
9. **Никольская Н.С.** // Сиб. матем.журнал. 1974. Т. 15, № 2. С.395–412.
10. **Белинский Э.С.** // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 1. С.12–18.
11. **Nessel R.J., Wilmes G.** // J. Austral. Math. Soc. Ser.A. 1978. V.25. P.7–18.
12. **Родин В.А.** // Исследования по теории функций многих переменных. Ярославль, 1990. С.128–133.
13. **Смаилов Е.С.** // Сиб. матем. журнал. 1998. Т. 39, № 5. С.1157–1163.
14. **Сихов М.Б.** // Вестник КазНУ им.аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2002. № 2(30). С.9–17.

Поступила в редакцию 23.06.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 95 — 101*

УДК 517.946

СИСТЕМЫ ГОРНА С ИРРЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

М.Ж. Талипова, Ж.Н. Тасмамбетов

Актюбинский государственнvй университет им. К.Жубанова
030000 г.Актобе ул. бр. Жубановых, 263 tasmam@rambler.ru, talip1977@rambler.ru

Методом Фробениуса - Латышевой изучены различные системы Горна с иррегулярными особенностями. С помощью понятия ранга и антиранга построены возможные нормально-регулярные и нормальные решения.

1.Введение. Я.Горн установил, что гипергеометрические функции двух переменных определяются двойными рядами

$$F(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot x^m\cdot y^n,$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{m,n}}=\frac{P(m,n)}{R(m,n)},\quad \frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}}=\frac{Q(m,n)}{S(m,n)},$$

где P,Q,R и S – многочлены от m и n, имеющие соответственно степени p,p',q,q'.

При этом предполагают, что

1. степени P и Q не превышают соответственно степеней R и S;
2. R и S не обращаются в нуль для любых целых положительных значений m и n;
3. выполняются условия совместности

$$\frac{P(m,n+1)\cdot Q(m,n)}{R(m,n+1)\cdot S(m,n)}=\frac{P(m,n)\cdot Q(m+1,n)}{R(m,n)\cdot S(m+1,n)}.$$

Наибольшее из четырех чисел p,p',q,q' называют порядком гипергеометрического ряда. Горн исследовал, в частности, гипергеометрические ряды второго порядка. Всего существуют 34 существенно различных сходящихся ряда второго порядка.

Keywords: *rank, antirank, normal solution, nonhomogeneous second order partial differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20, 35A25, 35C05

Если $p = p' = q = q' = 2$, то такие ряды называются полными. Существуют 14 полных рядов. Оставшиеся 20 рядов из списка Горна, для которых выполняются условия $p \leq p' = 2$, $q \leq q' = 2$, причем p и q не могут одновременно равняться двум, называются вырожденными. Они являются предельными формами полных рядов. Каждый из гипергеометрических рядов двух переменных из списка Горна удовлетворяет некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Целью данной работы является изучение отличительных свойств таких систем с регулярными и иррегулярными особенностями с помощью ранга $p = 1 + k$ (k – подранг) и антиранга $m = -1 - \chi$ (χ – антиподранг) [1].

Отметим, что большие успехи в изучении теории гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующей теории для рядов от двух переменных. Аппель определил в 1880 г. четыре ряда $F_1 - F_4$, каждый из которых аналогичен ряду Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ и является полным. К полным относятся также ряды G_i $(i = 1, 2, 3)$ и H_j $(j = \overline{1, 7})$. Все системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, связанные с 14-ю полными рядами, имеют ранг $p \leq 0$ и антиранг $m \leq 0$. Значит, особенности $(0, 0)$ и (∞,∞) являются регулярными и все полные ряды – сходящиеся [2].

2. Системы с регулярными особенностями. Пример системы с регулярной особенностью:

$$\begin{aligned} &x^2 \cdot p^{(0)} \cdot Z_{xx} + x \cdot y \cdot p^{(1)} \cdot Z_{xy} + x \cdot p^{(2)} \cdot Z_x + y \cdot p^{(3)} \cdot Z_y + p^{(4)} \cdot Z = 0, \\ &y^2 \cdot g^{(0)} \cdot Z_{yy} + x \cdot y \cdot g^{(1)} \cdot Z_{xy} + x \cdot g^{(2)} \cdot Z_x + y \cdot g^{(3)} \cdot Z_y + g^{(4)} \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$p^{(i)} = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x, \quad g^{(i)} = b_{00}^{(i)} + b_{01}^{(i)} \cdot y \quad (i = \overline{0, 4}) \tag{2}$$

($a_{00}^{(i)}, a_{10}^{(i)}, b_{00}^{(i)}$ и $b_{01}^{(i)}$– некоторые постоянные).

В изучении систем с регулярной особенностью (1) и (2) классическая теорема Коши-Ковалевской, гарантирующая существование аналитических решений, неприменима. Поэтому построим решения с помощью метода Фробениуса-Латышевой.

Отличительной особенностью системы (1) – (2) является то, что все 34 системы Горна (за исключением некоторых) являются частными случаями этой системы. В данной работе мы покажем применение метода Фробениуса-Латышевой к двум конкретным системам: системе (F_2) с регулярной особенностью и (H_3) – с иррегулярной особенностью. Они находят большое применение в приложениях.

Особые кривые системы (1) – (2) определяются с помощью простого признака, установленного в [3]. По значениям коэффициентов легко определить их регулярность и иррегулярность:

а) при $a_{00}^{(0)} \neq 0, b_{00}^{(0)} \neq 0$ особенность $(0, 0)$ – регулярная, а при $a_{00}^{(0)} \equiv 0, b_{00}^{(0)} \equiv 0$ – иррегулярная;

б) при $a_{10}^{(0)} \neq 0, b_{01}^{(0)} \neq 0$ особенность (∞, ∞) – регулярная, а при $a_{10}^{(0)} \equiv 0, b_{01}^{(0)} \equiv 0$ – иррегулярная.

Следующая общая теорема позволяет установить существование четырех регулярных решений вблизи особенности $(0, 0)$ в виде обобщенных степенных рядов двух переменных по возрастающим степеням независимых переменных x и y

$$Z_j = x^{\rho_j} \cdot y^{\sigma_j} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{j} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \left(C_{00}^{j} \neq 0\right) \left(j = \overline{1, 4}\right), \tag{3}$$

где $\rho_j, \sigma_j, C_{\mu,\nu}^{j}$ – некоторые постоянные, которые следует определить [4].

Теорема 1. *Пусть для системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) – (2) с регулярными особенностями $(x = 0, y = 0)$ выполнены следующие условия:*

1. коэффициенты представлены сходящимися степенными рядами двух переменных

$$p^{(i)}(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a^{(i)}_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},\quad q^{(i)}(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}b^{(i)}_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},\ (i=1,2,3,4) \tag{4}$$

$(p^{(0)}=1$ *и* $g^{(0)}=1)$*;*

2. системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$

$$\begin{aligned} f^{(1)}_{00}(\rho,\sigma)&\equiv\rho(\rho-1)+a^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma+a^{(2)}_{00}\cdot\rho+a^{(3)}_{00}\cdot\sigma+a^{(4)}_{00}=0,\\ f^{(2)}_{00}(\rho,\sigma)&\equiv\sigma(\sigma-1)+b^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma+b^{(2)}_{00}\cdot\rho+b^{(3)}_{00}\cdot\sigma+b^{(4)}_{00}=0\end{aligned} \tag{5}$$

имеют простые пары корней (ρ_j,σ_j) $\left(j=\overline{1,4}\right)$, *не отличающиеся на целые числа.*

Тогда существует одна и только одна система, которая состоит из четырех аналитических функций $Z_j(x,y)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$, *регулярных и тождественно удовлетворяющих системе (1) – (2) с коэффициентами (4).*

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. Сначала следует построить решения вида (3), а затем доказать сходимость этих рядов.

3. Система Аппеля (F_2)**.** В качестве примера рассмотрим систему Аппеля (F_2):

$$\begin{aligned} &x(1-x)\cdot Z_{xx}-xy\cdot Z_{xy}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\cdot Z_x-\beta\cdot y\cdot Z_y-\alpha\cdot\beta\cdot Z=0,\\ &y(1-y)\cdot Z_{yy}-xy\cdot Z_{xy}+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]\cdot Z_y-\beta'\cdot x\cdot Z_y-\alpha\cdot\beta'\cdot Z=0\end{aligned} \tag{6}$$

с решениями вида

$$\begin{aligned} &Z_1=F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\cdot(\beta)_m\cdot(\beta')_n}{(\gamma)_m\cdot(\gamma')_n\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n,\\ &Z_2=x^{1-\gamma}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta+1-\gamma)_m\cdot(\beta')_n\cdot(\alpha+1-\gamma)_{m+n}}{(2-\gamma)_m\cdot(\gamma')_n\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n,\\ &Z_3=y^{1-\gamma'}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m\cdot(\beta'+1-\gamma')_n\cdot(\alpha+1-\gamma')_{m+n}}{(\gamma)_m\cdot(2-\gamma')_n\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n,\\ &Z_4=x^{1-\gamma}\cdot y^{1-\gamma'}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta+1-\gamma)_m\cdot(\beta'+1-\gamma')_n\cdot(\alpha+2-\gamma-\gamma')_{m+n}}{(2-\gamma)_m\cdot(2-\gamma')_n\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n.\end{aligned} \tag{7}$$

Приведем некоторые отличительные свойства системы (6)

1. Система имеет четыре линейно-независимых решения, поскольку выполняется условие интегрируемости

$$1-\frac{xy}{x(1-x)}\cdot\frac{xy}{y(1-y)}\neq 0.$$

2. Она имеет конечные особенности $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и особенно на бесконечности $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(1,\infty)$, $(\infty,1)$, (∞,∞), и вблизи каждой пары особенностей должны существовать по четыре линейно-независимых решения.

3. Уравнение систем (1) – (2) и (6) показывает, что все коэффициенты при старших производных Z_{xx} и Z_{yy} отличны от нуля, т.е. $a^{(i)}_{00}\neq 0$, $b^{(i)}_{00}\neq 0$, $a^{(i)}_{10}\neq 0$, $b^{(i)}_{01}\neq 0$, поэтому все особенности – регулярные.

Имеет место утверждение.

Теорема 2. *Система (1) – (2) имеет регулярные решения в виде рядов (3), сходящихся вблизи особенности* $(x=0,y=0)$ *в том и только в том случае, когда антиранг системы равен нулю:* $m=-\chi-1\leq 0$.

Следствие 1. *Для того, чтобы система (1) – (2) имела четыре регулярных решения вблизи особенности* $(x = 0, y = 0)$*, необходимо и достаточно, чтобы антиподранг* $\chi \geq -1$.

Это утверждение, как и в обыкновенном случае [5], является обобщением условий Фукса регулярности решений изучаемой системы.

4. Подранг, составленный по наибольшим степеням коэффициентов (6):

$$k_1 \leq -1 \quad (\text{по} \quad x), \qquad k_2 \leq -1 \quad (\text{по} \quad y), \quad p = 1 + k \leq 0.$$

Поэтому решение в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по убывающим степеням

$$Z = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \left(A_{0,0} \neq 0\right), \tag{8}$$

где $\rho, \sigma, A_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ — некоторые постоянные, является также сходящимся.

5. Методом Горна [2] можно доказать, что область сходимости ряда F_2 — треугольник.

6. Ряд F_2 имеет еще одно замечательное свойство.

Теорема 3. *Все гипергеометрические ряды второго порядка от двух переменных, за возможным исключением* F_4, H_1, H_5 *и* H_1 *(вырожденные), могут быть выражены через* F_2 *или его частные и предельные формы.*

Однако до сих пор неизвестно, являются ли при произвольных значениях параметра ряды F_4, H_1 и H_5 независимыми от F_2 и, следовательно, от других рядов из списка Горна.

4. Вырожденная функция Горна $H_3(\alpha, \beta, \beta'; x, y)$. Системы, которым удовлетворяют вырожденные ряды, относятся к классу, где ранг $p > 0$, антиранг $m \leq 0$. Для таких систем справедлива

Теорема 4. *Система, для которой* $p > 0, m \leq 0$, *имеет решение вида*

$$Z = \exp Q\left(x, y\right) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \left(B_{0,0} \neq 0\right), \tag{9}$$

$$Q\left(x, y\right) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^{k+1} + ... + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{0,1} \cdot y + \alpha_{1,0} \cdot x,$$

где ρ, σ, $B_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *— неизвестные постоянные;* $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \ \alpha_{1,1}, \ldots, \ \alpha_{0,k+1}, \alpha_{k+1,0}$ *— неопределенные параметры, и причем ряд в правой части (9) сходится вблизи особенности* $(0, 0)$.

Вырожденные гипергеометрические ряды были изучены Гумбертом, Я.Горном, М.Б. Капилевичем и др. М.Б. Капилевич конфлюэнтные гипергеометрические функции Горна рассматривал в связи с приложениями в математической физике. Из них мы остановимся на вырожденном гипергеометрическом ряде H_3 [6]. Он показал, что в теории обобщенного волнового уравнения

$$Q\left[u, a, c\right] = u_{00} - u_{\sigma\sigma} - \frac{a}{\sigma} \cdot u_{\sigma} + c^2 \cdot u = 0$$

важную роль играет введенный Горном вырожденный гипергеометрический ряд

$$H_3\left(\alpha, \beta, \delta; x, y\right) = 1 + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n} \cdot (\beta)_n}{(\delta)_n \cdot m! \cdot n!} \cdot x^m \cdot y^n, |x| \leq 1,$$

являющийся решением системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} & x\,(1-x)\cdot Z_{xx}+x\cdot y\cdot Z_{xy}+\left[\delta-(\alpha+\beta+1)\,x\right]\cdot Z_x-\beta\cdot y\cdot Z_y-\alpha\cdot\beta\cdot Z=0, \\ & y\cdot Z_{yy}-x\cdot Z_{xy}+(1-\alpha+y)\cdot Z_y+Z=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Выделим некоторые свойства этой системы.

1. Уравнение с (1) – (2) показывает, что в первом уравнении коэффициенты $a_{00}^{(0)}\neq 0$ и $a_{10}^{(0)}\neq 0$, поэтому все особенности $x=0$, $x=1$ и $x=\infty$ – регулярные. Во втором уравнении $b_{00}^{(0)}\neq 0$, а $b_{01}^{(0)}\equiv 0$, поэтому особенность $y=0$ – регулярная, а $y=\infty$ – иррегулярная.

2. Во втором уравнении подранг $k=0$ и ранг $p=k+1=1$, поэтому к (10) применим преобразование

$$Z=\exp\left(\alpha_{10}\cdot x+\alpha_{01}\cdot y\right)\cdot U \tag{11}$$

и получим вспомогательную систему в виде

$$\begin{aligned} & (1-x)\cdot U_{xx}+xy\cdot U_{xy}+\{x(1-x)\cdot 2\alpha_{10}+xy\cdot\alpha_{01}+[\delta-(\alpha+\beta+1)x]\}\cdot U_x+ \\ & +[\alpha_{10}\cdot xy+\beta\cdot y]\cdot U_y+\left\{x(1-x)\cdot\alpha_{10}^2+\alpha_{10}\cdot\alpha_{01}\cdot xy+\alpha_{10}\cdot[\delta-(\alpha+\right. \\ & \left.+\beta+1)x]+\alpha_{01}\cdot\beta\cdot y-\alpha\beta\right\}\cdot U=0, \\ & y\cdot U_{yy}+x\cdot U_{xy}-x\cdot\alpha_{01}\cdot U_x+[2\alpha_{01}\cdot y-\alpha_{10}\cdot x+(1-\alpha+y)]\cdot U_y+ \\ & +\left\{y\cdot\alpha_{01}^2-x\cdot\alpha_{10}\cdot\alpha_{01}+\alpha_{01}\cdot(1-\alpha+y)+1\right\}\cdot U=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных x и y при неизвестной $U(x,y)$, определим значения неизвестных коэффициентов многочлена $Q(x,y)=\alpha_{10}\cdot x+\alpha_{01}\cdot y$

при x^2 $\quad\alpha_{10}^2=0,\quad \alpha_{10}=0;$

при xy $\quad\alpha_{10}\cdot\alpha_{01}=0,\quad \alpha_{10}=0,\quad \alpha_{01}=0;$

при x $\quad\alpha_{10}^2-\alpha_{10}\cdot(\alpha+\beta+1)=0,\quad \alpha_{10}^{(1)}=0,\quad \alpha_{10}\cdot\alpha_{01}=0,\quad \alpha_{10}^{(2)}=\alpha+\beta+1;$

при y $\quad\alpha_{01}\cdot\beta=0,\quad \alpha_{01}=0,\quad \alpha_{01}^2+\alpha_{01}=0,\quad \alpha_{01}=0;\alpha_{01}=-1.$

Составляя из них пары $\left(\alpha_{10}^{(j)},\alpha_{01}^{(j)}\right)$ $(j=1,2)$, определяем четыре многочлена $Q\,(x,y)$. Из них рассмотрим только один случай.

I. При $\left(\alpha_{10}^{(1)}=0,\alpha_{01}^{(1)}=0\right)$ многочлен $Q(x,y)\equiv 0$ и получаем исходную систему (10), которая имеет регулярные решения вблизи особенности $(0,0)$:

$$\begin{aligned} & Z_1=H_3\,(\alpha,\beta,\delta;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\cdot(\beta)_m}{(\delta)_m\cdot m!\cdot n!}\cdot x^m\cdot y^n,\quad |x|<1, \\ & Z_2=y^{1-\delta}\cdot H_3\,(\alpha-\delta+1,\ \beta-\delta+1,2-\delta;x,y)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Удается найти только два линейно-независимых решения, выражающиеся через вырожденные гипергеометрические функции Горна H_3. М.Б. Капилевич также отмечает, что из (13) следует

$$H_3\,(\alpha,\beta,\delta;x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}\cdot\frac{y^n}{n!}\cdot F\,(\alpha-n,\beta,\delta;x),\quad |x|<1, \tag{14}$$

$$H_3\,(\alpha,\beta,\delta;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m\cdot(\beta)_m}{(\delta)_m}\cdot x^m\cdot\overline{J}_{-\alpha-m}\,(2\cdot\sqrt{y}), \tag{15}$$

где $\overline{J}_\nu\left(2\cdot\sqrt{Z}\right)=\Gamma\,(\nu+1)\cdot Z^{-\frac{\nu}{2}}\cdot J_\nu\left(2\cdot\sqrt{Z}\right)=F_1(\nu+1;-Z)$ — функция Бесселя-Клиффорда.

Найдем решение вблизи особенности (∞, ∞) в виде

$$Z_3 = x^{-\beta} \cdot y^{-1} \cdot \left\{ 1 + \frac{\beta \cdot (\beta + 1 - \delta)}{1!(\beta - \alpha)} \cdot x + \frac{(\alpha - \beta + 1)}{1!} \cdot y - \beta \cdot (\beta + 1 - \delta) \cdot xy + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta \cdot (\beta + 1) \cdot (\beta + 1 - \delta) \cdot (\beta + 2 - \delta)}{2!\,(\beta - \alpha) \cdot (\beta + 1 - \alpha)} \cdot x^2 + (\beta - 1 - \alpha) \cdot (\beta - 2 - \alpha) \cdot y^2 + ... \right\}.$$

Далее отдельно рассматриваются три случая.

II. Пара $\left(\alpha_{10}^{(1)} = 0, \alpha_{01}^{(2)} = -1\right)$ определяет многочлен $Q\,(x, y) = -y$.

III. Пара $\left(\alpha_{10}^{(2)} = \alpha + \beta + 1, \alpha_{01}^{(1)} = 0\right)$ определяет многочлен $Q\,(x, y) = (\alpha + \beta + 1)\, x$.

IV. Последняя пара $\left(\alpha_{10}^{(2)} = \alpha + \beta + 1, \alpha_{01}^{(2)} = -1\right)$ определяет многочлен $Q(x, y) = \alpha + \beta + 1)x - y$ и каждая пара определяет соответствующую вспомогательную систему, имеющую по четыре линейно-независимых решения. Подставляя их в (11), получаем возможность определить до 16-и нормально-регулярных решений. Однако для их построения требуются дополнительные исследования и редко удается построить все 16 решений.

5. Неоднородная система Горна (Ψ_2). Рассмотрим неоднородную систему Горна (Ψ_2):

$$\begin{aligned} &x \cdot Z_{xx} + (\gamma - x) \cdot Z_x - y \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = p\,(x, y)\,, \\ &y \cdot Z_{yy} - x \cdot Z_x + (\gamma' - y) \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = q\,(x, y)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где правые части $p\,(x, y)$ и $q\,(x, y)$ – аналитические функции или многочлены двух переменных [7].

Определим нормально-регулярные решения системы (16) в виде (9). Методом вариации произвольных постоянных можно доказать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Если известно какое-нибудь частное решение $\overline{Z}(x, y)$ системы (16), а $Z_0(x, y)$ – общее решение соответствующей однородной системы*

$$\begin{aligned} &x \cdot Z_{xx} + (\gamma - x) \cdot Z_x - y \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = 0, \\ &y \cdot Z_{yy} - x \cdot Z_x + (\gamma' - y) \cdot Z_y - \alpha \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

то их сумма будет

$$Z(x, y) = Z_0(x, y) + \overline{Z}(x, y) = C_1 \cdot Z_1 + C_2 \cdot Z_2 + C_3 \cdot Z_3 + C_4 \cdot Z_4 + \overline{Z}(x, y) \tag{18}$$

общим решением неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (16).

В работах В. Вильчинского, П. Аппеля приведены условия совместности систем вида (16) и (17). Будем считать, что они совместны. Тогда однородная система (17) допускает до четырех линейно-независимых частных решений. Однородная система (17) имеет регулярную особенность $(0, 0)$ и иррегулярную особенность (∞, ∞).

Согласно методу Фробениуса-Латышевой система (17) имеет нормально–регулярное решение, которое определяется с помощью преобразования

$$Z(x, y) = exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot U(x, y), \tag{19}$$

где α и β – неизвестные постоянные, которые следует определить, а $U(x, y)$– обобщенный степенной ряд двух переменных.

Функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$, находящиеся в правой части неоднородной системы (16), будут представлены в виде обобщенных степенных или нормально-регулярных рядов двух переменных.

Цитированная литература

1. **Тасмамбетов Ж.Н.** // Труды Межд. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". Алматы, 2002. С.86–90.

2. **Бейтмен Г. и Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. I. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М. 1965.

3. **Тасмамбетов Ж.Н.** Об определении регулярных особенностей одной системы в частных производных. // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1988. №3. С.50–53.

4. **Тасмамбетов Ж.Н.** Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса. (Препр. АН УССР. Ин-т математики: 91.29). Киев, 1999. 44с.

5. **Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С.** Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев, 1974.

6. **Капилевич М.Б.** // Дифференциальные уравнения. 1966. Т.II, №9. С. 1239–1254.

7. **Тасмамбетов Ж.Н., Талипова М.Ж.** // Тезисы докладов Межд. матем. конф. "Еругинские чтения — X"Могилев, 2005. С.180.

Поступила в редакцию 10.10.2005 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 102 – 108*

УДК 517.925.5:519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

М. И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 marat207@math.kz

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, которые зависят лишь от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в работе [3]. В работах [4 – 6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \\ \dot{y} = g(x,y,z,t), \\ \dot{z} = h(x,y,z,t) + D(x,y,z,t)u + \sigma(x,y,z,t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить управление u и коэффициент диффузии σ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \begin{cases} \lambda_1(x,t) = 0, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \lambda_1 \in C^{33}_{xt},\ \lambda_2 \in C^{222}_{xyt}. \tag{2}$$

Иначе говоря, по заданным исходным данным $f, g, h, D, \lambda_1, \lambda_2$ определим множество управлений $\{u\}$ и множество матриц диффузий $\{\sigma\}$ так, чтобы множество (2) было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^p$, $z \in R^l$, $u \in R^r$, $\xi \in R^k$; $\lambda_1 \in R^{m_1}$, $\lambda_2 \in R^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$, $\{\xi_1(t,\omega), \ldots, \xi_k(t,\omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [7], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Keywords: *inverse problem, stochastic differential equation, integral manifold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Предполагается, что вектор-функции $f(x,y,t)$, $g(x,y,z,t)$, $h(x,y,z,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x,y,z в области

$$U_H(\Lambda)=\bigl\{q=(x^T,y^T,z^T)^T:\ \rho\bigl(q,\Lambda(t)\bigr)<H,\quad H>0\bigr\}. \tag{3}$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T,y(t)^T,z(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T,y(t_0)^T,z(t_0)^T)^T=(x_0^T,y_0^T,z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [7].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений $\sigma\equiv 0$ достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+D(x,\dot{x},t)u+\sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t):\lambda(x,\dot{x},t)=0,\ \lambda\in R^m$, — в работе [6].

Предположим дополнительно, что $f\in C^{222}_{xyt},\ g\in C^{1121}_{xyzt}$.

Для решения поставленной задачи используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1 [3, с.12–13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv=g,\ H=(h_{\mu k}),\ v=(v_k),\ g=(g_\mu),\ \mu=\overline{1,m};\ k=\overline{1,n},\ m\le n, \tag{4}$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v=sv^\tau+v^\nu, \tag{5}$$

здесь s – произвольная скалярная величина,

$$v^\tau=[HC]=[h_1\dots h_m c_{m+1}\dots c_{n-1}]=\begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n\\ h_{11} & \dots & h_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ h_{m1} & \dots & h_{mn}\\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n}\end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu=(h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho=(c_{\rho k})$, $\rho=\overline{m+1,n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n, $v^\tau=(v^\tau_k)$, где

$$v^\tau_k=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn}\\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n}\end{vmatrix},\ v^\nu=H^+g,$$

$H^+=H^T(HH^T)^{-1}$, H^T *– матрица, транспонированная к H.*

Составим уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned}\dddot{\lambda}_1 &= \dot{\lambda}_{1x}\dot{f}+\lambda_{1x}\bigl[f^Tf_{xx}f+2f_{xt}f+f_x\dot{f}+f_{tt}+f_y\dot{g}+g^Tf_{yy}g+f^Tf_{yx}g+2f_{yt}g\bigr]+\\ &\quad+2f^T\lambda_{1xx}\dot{f}+f^T\dot{\lambda}_{1xx}f+2\lambda_{1xt}\dot{f}+2\dot{\lambda}_{1xt}f+\dot{\lambda}_{1tt},\\ \ddot{\lambda}_2 &= \lambda_{2x}\dot{f}+f^T\lambda_{2xx}f+2\lambda_{2xt}f+g^T\lambda_{2xt}f+\lambda_{2tt}+\lambda_{2y}\dot{g}+f^T\lambda_{2yx}g+g^T\lambda_{2yy}g+2\lambda_{2yt}g,\end{aligned}$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y g + f_t$, $\dot{g} = g_x f + g_y g + g_z(h + Du + \sigma\dot{\xi}) + \frac{1}{2}\left[g_{zz} : \sigma\sigma^T\right] + g_t$,
$\dot{\lambda}_{1x} = \lambda_{1x} f + \lambda_{1xt}$, $\dot{\lambda}_{1xt} = \lambda_{1xxt} f + \lambda_{1xtt}$, $\dot{\lambda}_{1tt} = \lambda_{1xtt} f + \lambda_{1ttt}$, $\dot{\lambda}_{1xx} = \lambda_{1xxx} f + \dot{\lambda}_{1xxt}$.

Обозначим

$$G_1 = \dot{\lambda}_{1x}\dot{f} + \lambda_{1x}\big[f^T f_{xx} f + 2f_{xt} f + f_x\dot{f} + f_{tt} + f_y(g_x f + g_y g + g_z h + \frac{1}{2}\left[g_{zz} : \sigma\sigma^T\right] + g_t) +$$
$$+ g^T f_{yy} g + f^T f_{yx} g + 2f_{yt} g\big] + 2f^T\lambda_{1xx}\dot{f} + f^T\dot{\lambda}_{1xx} f + 2\lambda_{1xt}\dot{f} + 2\dot{\lambda}_{1xt} f + \dot{\lambda}_{1tt},$$
$$G_2 = \lambda_{2x}\dot{f} + f^T\lambda_{2xx} f + 2\lambda_{2xt} f + g^T\lambda_{2xt} f + \lambda_{2tt} + \lambda_{2y}(g_x f + g_y g + g_z h + \frac{1}{2}\left[g_{zz} : \sigma\sigma^T\right] + g_t) +$$
$$+ f^T\lambda_{2yx} g + g^T\lambda_{2yy} g + 2\lambda_{2yt} g,$$

где под $\left[g_{zz} : V\right]$, $V = \sigma\sigma^T$, следуя [7], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $g_\mu(x, y, z, t)$ вектора $g(x, y, z, t)$ по компонентам z на матрицу V

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} : V = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} V\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2 z_m}{\partial z^2} D\big) \end{bmatrix},$$

и перепишем (4) и (5) в виде

$$\begin{cases} \dddot{\lambda}_1 = G_1 + \lambda_{1x} f_y g_z(Du + \sigma\dot{\xi}), \\ \ddot{\lambda}_2 = G_2 + \lambda_{2y} g_z(Du + \sigma\dot{\xi}). \end{cases} \tag{6}$$

Введем произвольные функции Еругина [1]: соответственно m_1- и m_2- мерные вектор-функции A_1, A_2 и соответственно $(m_1 \times k)-$ и $(m_2 \times k)-$ матрицы B_1, B_2, обладающие свойством $A_1(0, 0, 0, x, y, z, t) \equiv 0, A_2(0, 0, x, y, z, t) \equiv 0$, $B_1(0, 0, 0, x, y, z, t) \equiv 0, B_2(0, 0, x, y, z, t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\begin{cases} \dddot{\lambda}_1 = A_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, \ddot{\lambda}_1, x, y, z, t) + B_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, \ddot{\lambda}_1, x, y, z, t)\dot{\xi}, \\ \ddot{\lambda}_2 = A_2(\lambda_2, \dot{\lambda}_2, x, y, z, t) + B_2(\lambda_2, \dot{\lambda}_2, x, y, z, t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{7}$$

На основе уравнений (6) и (7) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \lambda_{1x} f_y g_z D\widetilde{u} = A_1 - G_1, \\ \lambda_{2y} g_z D\widetilde{\widetilde{u}} = A_2 - G_2, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1x} f_y g_z\widetilde{\sigma} = B_1, \\ \lambda_{2y} g_z\widetilde{\widetilde{\sigma}} = B_2, \end{cases} \tag{9}$$

из которых нужно определить управляющие параметры $\{\widetilde{u}\}, \{\widetilde{\widetilde{u}}\}$ и коэффициенты диффузии $\{\widetilde{\sigma}\}, \{\widetilde{\widetilde{\sigma}}\}$.

Обозначим $H_1 = \lambda_{1x} f_y g_z D$, $H_2 = \lambda_{2y} g_z D$ и, используя метод квазиобращения, из соотношений (8) по формуле (5) леммы 1 определим множества управлений $\{\widetilde{u}\}, \{\widetilde{\widetilde{u}}\}$ в виде

$$\begin{cases} \widetilde{u} = s_1[H_1 C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1), \\ \widetilde{\widetilde{u}} = s_2[H_2 C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2) \end{cases} \tag{10}$$

и аналогично из соотношений (9) по лемме 1 определим коэффициенты диффузии $\{\widetilde{\sigma}\}, \{\widetilde{\widetilde{\sigma}}\}$ в виде

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma} = s_3[H_3C_1] + (H_3)^+B_1, \\ \widetilde{\widetilde{\sigma}} = s_4[H_4C_4] + (H_4)^+B_2, \end{cases} \tag{11}$$

где матрицы $H_1, H_2,\ H_3, H_4,$ следуя лемме 1, являются соответственно матрицами размерностей $(m_1 \times r), (m_2 \times r),\ (m_1 \times l), m_2 \times l),$ а матрицы $C_1, C_2,\ C_3, C_4$ имеют соответственно вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{m_1+1,1} & \cdots & c_{m_1+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r-1,1} & \cdots & c_{r-1,r} \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} c_{m_2+1,1} & \cdots & c_{m_2+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r-1,1} & \cdots & c_{r-1,r} \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} c_{m_1+1,1} & \cdots & c_{m_1+1,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l-1,1} & \cdots & c_{l-1,l} \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} c_{m_2+1,1} & \cdots & c_{m_2+1,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{l-1,1} & \cdots & c_{l-1,l} \end{pmatrix}.$$

Искомое множество управлений получается из

$$\{u\} = \{\widetilde{u}\} \bigcap \{\widetilde{\widetilde{u}}\}, \tag{12}$$

а искомый коэффициент диффузии получается из

$$\{\sigma\} = \{\widetilde{\sigma}\} \bigcap \{\widetilde{\widetilde{\sigma}}\}. \tag{13}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2), необходимо и достаточно, чтобы множество управлений $\{u\}$ имело вид (12), а множество матриц диффузий – вид (13), где $\{\widetilde{u}\}, \{\widetilde{\widetilde{u}}\}$ определяются по формуле (10), а коэффициенты диффузии $\{\widetilde{\sigma}\}, \{\widetilde{\widetilde{\sigma}}\}$ – по формуле (11).*

Замечание 1.1. Рассмотрим задачу управления системой (1) в скалярном случае. В этом случае поставленная задача решается методом Еругина без необходимости применения метода квазиобращения.

Действительно, пусть задана система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = g(x, y, z, t), \\ \dot{z} = h(x, y, z, t) + d(x, y, z, t)u + \beta(x, y, z, t)\dot{\eta}, \end{cases} \tag{14}$$

в которой определим управление u и коэффициент диффузии β по заданному интегральному многообразию

$$\Gamma(t) : \begin{cases} \gamma_1(x, t) = 0, & \gamma_1 \in R^1, \\ \gamma_2(x, y, t) = 0, & \gamma_2 \in R^1, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \gamma_1 \in C^{33}_{xt},\ \gamma_2 \in C^{222}_{xyt}, \tag{15}$$

здесь $x \in R^1,\ y \in R^1,\ z \in R^1,\ u \in R^1;$ а η – скалярный винеровский процесс.

Уравнения возмущенного движения относительно $\gamma_1(x, t)$ и $\gamma_2(x, y, t)$ в результате двух- и трехкратного стохастического дифференцирования примут вид

$$\dddot{\gamma}_1 = \Bigg[\left(\frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^3}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^2\partial t}\right)f + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x\partial t^2} + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^2\partial t}f\Bigg]f +$$
$$+\left(\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\partial t}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\Bigg[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}g + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\right)f +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}g + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\right)g + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{\partial g}{\partial y}g + \right. \tag{16}$$
$$\left.+\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}(h + bu + \beta\dot{\eta}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}f + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Bigg] + \left(\frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t\partial x^2}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^2\partial x}\right)f +$$
$$+\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^2\partial x}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^3},$$

$$\ddot{\gamma}_2 = \left(\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial y}g + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial t}\right)f + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y\partial x}f + \right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2}g + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y\partial t}\right)g + \frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{\partial g}{\partial y}g + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}(h + bu + \beta\dot{\eta}) + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) + \tag{17}$$
$$+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t\partial x}f + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}.$$

Обозначим

$$g_1 = \Bigg[\left(\frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^3}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^2\partial t}\right)f + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x\partial t^2} + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial x^2\partial t}f\Bigg]f +$$
$$+\left(\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\partial t}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\Bigg[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}g + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\right)f +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}g + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}\right)g + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{\partial g}{\partial y}g + \right.$$
$$\left.+\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}h + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}f + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Bigg] + \left(\frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t\partial x^2}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^2\partial x}\right)f +$$
$$+\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^2\partial x}f + \frac{\partial^3\gamma_1}{\partial t^3},$$

$$g_2 = \left(\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial y}g + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial t}\right)f + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial y}g + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y\partial x}f + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2}g + \right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y\partial t}\right)g + \frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}f + \frac{\partial g}{\partial y}g + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}h + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t\partial x}f + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}$$

и перепишем (16) и (17) в виде

$$\begin{cases} \dddot{\gamma}_1 = g_1 + \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}(bu + \beta\dot{\eta}), \\ \ddot{\gamma}_2 = g_2 + \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}(bu + \beta\dot{\eta}). \end{cases} \tag{18}$$

Введем произвольные скалярные функции Еругина a_1, a_2 и b_1, b_2, обладающие свойством $a_1(0,0,0,x,y,z,t) \equiv a_2(0,0,x,y,z,t) \equiv b_1(0,0,0,x,y,z,t) \equiv b_2(0,0,x,y,z,t) \equiv 0$, такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} \dddot{\gamma}_1 = a_1(\gamma_1, \dot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_1, x, y, z, t) + b_1(\gamma_1, \dot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_1, x, y, z, t)\dot{\eta}, \\ \ddot{\gamma}_2 = a_2(\gamma_2, \dot{\gamma}_2, x, y, z, t) + b_2(\gamma_2, \dot{\gamma}_2, x, y, z, t)\dot{\eta}. \end{cases} \tag{19}$$

На основе уравнений (18) и (19) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} g_1 + \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}(bu_1 + b_1\dot{\eta}) = a_1 + \beta_1\dot{\eta}, \\ g_2 + \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}(bu_2 + \beta_1\dot{\eta}) = a_2 + b_2\dot{\eta}. \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим через $h_1 = \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}$, $h_2 = \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}$ и из соотношений (20) определим как управления u_1, u_2 в виде

$$u_1 = (a_1 - g_1)(h_1 b)^{-1}, \tag{21}$$

$$u_2 = (a_2 - g_1)(h_2 b)^{-1}, \tag{22}$$

так и коэффициенты диффузии β_1, β_2 соответственно в виде

$$\beta_1 = b_1 h_1^{-1}, \tag{23}$$

$$\beta_2 = b_2 h_2^{-1}. \tag{24}$$

Тогда искомое управление, обеспечивающее интегральность множеств $\gamma_1(x,t) = 0$ и $\gamma_2(x,y,t) = 0$ с учетом (21) и (22) запишется следующим образом:

$$u = u_1 \bigcap u_2, \tag{25}$$

а искомый коэффициент диффузии, учитывая (23) и (24), примет вид

$$\beta = \beta_1 \bigcap \beta_2. \tag{26}$$

Следовательно, справедливо

Следствие 1.1. *Для того, чтобы система скалярных уравнений (14) имела заданное интегральное многообразие (15), необходимо и достаточно, чтобы множество управлений* $\{u\}$ *имело вид (25), а множество матриц диффузий* $\{\beta\}$ *– вид (26), где управления* u_1, u_2 *имеют соответственно вид (21), (22), а коэффициенты диффузии* β_1, β_2 *– соответственно вид (23), (24).*

Таким образом, методом квазиобращения приведено решение одного из вариантов задачи восстановления дифференциальной системы по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито. Построено множество управляющих параметров, обеспечивающее существование заданного интегрального многообразия. Полученные результаты распространяют на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито известное в классе обыкновенных дифференциальных уравнений утверждение, доказанное в работе [3].

Цитированная литература

1. **Еругин Н.П.** //ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659–670.
2. **Галиуллин А.С**. Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.
3. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.
4. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М., 1999. №1. С.48–51.
5. **Тлеубергенов М. И.** //Доклады МН-АН РК. 1999. №1. С.53–60.
6. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, №5. С.714–716.
7. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила в редакцию 18.07.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 3 (21) . С. 109—113*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору, директору Института прикладной математики МОН РК Смаилову Есмуханбету Сайдахметовичу.

Смаилов Е.С. родился 18 октября 1946г. в ауле Би Боранбай Тарбагатайского района Восточно-Казахстанской области (это бывшее село Кызылкесик Аксуатского района Семипалатинской области). В 1963 г. поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова. В декабре 1971 года окончил аспирантуру Института математики и механики АН КазССР. С 9 января 1972 года по 19 марта 2004г. работал в Карагандинском государственном университете. В 1973 году защитил кандидатскую диссертацию на тему: "Теоремы вложения для функциональных пространств с ортогональным базисом и их приложения" под руководством профессора К.Ж.Наурызбаева. С 1976г. — доцент. В марте 1993г. вновь организованный ВАК Республики Казахстан своим первым решением присвоил Е.С.Смаилову звание профессора. В октябре 1997г. им защищена докторская диссертация на тему: "Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы" в специализированном совете Д 53.04.01 Института теоретической и прикладной математики Министерства науки РК.

Научно-педагогическая, организаторская деятельность Е.С.Смаилова тесно связана с Карагандинским государственным университетом, где он работает со дня его основания. Свою деятельность в Карагандинском государственном университете он начал старшим преподавателем кафедры математического анализа. Заведовал кафедрой математического анализа КарГУ с декабря 1979г. по февраль 2002г. С сентября 1983г. по сентябрь 1987г. работал также деканом математического факультета. С февраля 2002 года — профессор кафедры математического анализа. С 19 марта 2004 года стал директором Института прикладной математики МОН РК по конкурсу, объявленному МОН РК.

Е.С.Смаилов является одним из ведущих специалистов республики в области теории функций и функционального анализа. Он оказал большое влияние на формирование математического факультета КарГУ и внес большой вклад в развитие математической науки в Центральном

Казахстане. На сегодняшний день на математическом факультете усилиями Е.С.Смаилова создана активно действующая математическая школа по теории функций, известная за пределами Республики Казахстан. Все это дало возможность в сентябре 2000 года открыть в Карагандинском государственном университете специализированный диссертационный совет К 14.50.03 по специальности "Математический анализ" по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Диссертационный совет успешно функционировал до 10 января 2005 года. Профессор Е.С.Смаилов с первых дней был председателем данного диссертационного совета.

Профессор Е.С.Смаилов является одним из крупных организаторов науки Республики Казахстан. Он был одним из активных организаторов VII республиканской межвузовской научной конференции по математике и механике (Караганда, 1981 г.). По его инициативе и под его руководством трижды проведены республиканские научные конференции "Теория приближения и вложения функциональных пространств" (1991, 1994, 1998 годы, Караганда); Всесоюзное совещание по использованию ЭВМ при изучении математики в вузах (Караганда, сентябрь 1991г.); межвузовская научно-методическая конференция "Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики", посвященная 60-летию профессора К.Ж.Наурызбаева (Алматы, декабрь 1994г.) и международная научно-практическая конференция по теории функций, функциональному анализу и их приложениям, посвященная 80-летию чл.-корр.АН Каз ССР, д.ф.-м.н., профессора Тулеубая Идрисовича Аманова (г. Семипалатинск, 1–4 июля 2003г.).

Начиная с 1980г. по 2000г. был ответственным редактором серии научных сборников "Современные вопросы теории функций и функционального анализа", выпускаемых КарГУ по тематическому плану Министерства образования Республики Казахстан.

Его организационно-педагогическая деятельность сочетается с активной научной работой. Научные интересы профессора Е.С.Смаилова разнообразны. Продолжая исследования в традиционных для казахстанских математиков направлениях: теория вложения, теория приближения, он ведет исследования по теории интерполяции функциональных пространств и линейных операторов; теории рядов Фурье по общим ортогональным системам; теории мультипликаторов Фурье; разностным теоремам вложения, являющимся новыми научными направлениями в Казахстане. Им построены функциональные пространства с ортогональным базисом типа пространств О.В.Бесова, исследованы их интерполяционные свойства, создана полная теория вложения для них. С их помощью обоснована разрешимость вариационным методом краевой задачи Дирихле для некоторых гипоэллиптических уравнений; в терминах этих классов даны описания классов мультипликаторов ортогональных рядов Фурье по общим мультипликативным системам; определены зависимость дифференциальных и интегральных свойств функций от порядка роста нормы производных, приближающих агрегатов и от скорости убывания модулей гладкости положительного порядка; установлены двусторонние оценки нормы разностных операторов вложения, аппроксимативных чисел разностных операторов и спектра некоторых классов матриц, соответствующих разностным схемам в терминах весов разностного пространства Соболева; получены необходимые и достаточные условия вложения классов функций с заданным порядком убывания наилучших приближений и модуля гладкости в пространствах Лоренца, Марцинкевича; установлены ограниченности операторов свертки, сопряжения и множителей Марцинкевича в периодическом пространстве Лизоркина; определены влияние образующей последовательностей систем Прайса и обобщенных систем Хаара на условия сходимости рядов, составленных из коэффициентов Фурье функций, на содержание теорем типа Пэли; получены оптимальные интерполяционные теоремы для билинейных и полилинейных операторов, что позволило доказать точные теоремы вложения в классы множителей Фурье; определено влияние геометрии спектра полиномов по тригонометрическим системам в неравенствах разных метрик С.М.Никольского. Эти результаты дают возможность рассматривать с общей точки зрения классические неравенства разных метрик С.М.Никольского и неравенства

Родина, Белинского, Несселя; также получены неравенства разных метрик С.М.Никольского для целых функций экспоненциального типа, для линейных агрегатов по элементам системы Прайса в пространствах Лоренца по его сильным и слабым параметрам.

Его научные результаты по приведенным выше направлениям опубликованы в 94 научных статьях в математических журналах России и Казахстана и в 2 учебных пособиях, одной монографии.

Научно-исследовательские работы профессора Е.С.Смаилова и его учеников всегда финансировались научным фондом фундаментальных исследований.

За плодотворную работу по подготовке научно-педагогических кадров профессор Смаилов Е.С. награжден грамотами ЦК ЛКСМ Казахстана (дважды), значком ГК НО СССР "За отличные успехи в работе", нагрудным знаком МОН РК "За заслуги в развитие науки Казахстана"; нагрудным значком Карагандинского государственного университета "Заслуженный работник Карагандинского государственного университета"; Кокшетауский гос. университет им. Ш.Уалиханова решением ученого совета присвоил звание "Почетный профессор"; Американский биографический институт в 1999 году его объявил "Человеком года" и включил его биографию в "Биографическую энциклопедию профессиональных лидеров тысячелетия".

Им подготовлены два доктора и 8 кандидатов физико-математических наук.

Есмуханбет Сайдахметович находится в расцвете творческих сил для активной плодотворной научной и научно-педагогической и организационной деятельности на благо общества, развития науки и образования Казахстана.

Бокаев Н.А., Нурсултанов Е.Д.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Е.С.СМАИЛОВА

1. К первой краевой задаче для одного уравнения с гипоэллиптическим оператором// *Известия АН КазССР . Серия физ.-мат.*, 1972, №3. С.55–59.

2. Необходимое и достаточное условия разрешимости задачи Дирихле для одного гипоэллиптического уравнения // *Некоторые вопросы математики и механики*, Алма-Ата, 1973, вып.3.

3. Условия классической разрешимости задачи Дирихле для одного уравнения с гипоэллиптическим оператором // *Математика и физические исследования*, Караганда, 1974, вып.1. С.100–108.

4. Теоремы вложения разных метрик для функциональных пространств с ортогональным базисом Хаара // *Математика и физические исследования*, Караганда, 1975, вып.2. С.17–21.

5. Теоремы вложения для классов. Критерий сходимости ортогональных рядов // *Теоремы вложения и их приложения. Труды Всесоюзного симпозиума по теории вложения*, Алма-Ата, 1976.

6. Весовой аналог одной теоремы вложения Ульянова // *Математические исследования*, Караганда, 1977, вып.3 (соавтор Каримов С.К.).

7. Интегральные и дифференциальные свойства функции с преобразованного рядом Фурье // *Труды Советско-Чехословацкого совещания по применению методов теории функции и функционального анализа к задачам мат.*, 1979, С.65–69 (соавтор Каримов С.К.).

8. Предельная теорема вложения для весового аналога класса Бесова // *Труды Советско-Чехословацкого совещания по применению методов теории функции и функционального анализа к задачам мат.* 1979 (соавтор Каримов С.К.).

9. О прямых и обратных теоремах приближения в L_p// *Современные вопросы теории функции и функционального анализа*, Караганда, 1980 (соавтор Есмаганбетов М.Г.).

10. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложение // *ДАН СССР*, 1983, т.270, №1, С.52–55.

11. Теоремы вложения в пространствах Лоренца и их приложение // *Труды II всесоюзной школы по теории и функции и теории приложения*, Саратов, 1986. С.66–70 (соавтор Акишев Г.А .).

12. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом // *Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Труды семинара Соболева*, Новосибирск, 1984, №2. С.122–143.

13. Теоремы вложения в пространстве Лоренца и их приложение // *Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.*, 1984, №1, С.66–70 (соавтор Акишев Г.А.).

14. О дифференциальных свойствах функции в $L_{p,q}$// *Современные вопросы теории функций и функ. анализа*, Караганда, 1988, С.86–100 (соавторы Есмаганбетов М.Г., Шаяхметова Б.К.).

15. О некоторых достаточных условиях вложения в пространство Лоренца // *Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.*, 1989, №5. С. 50–55 (соавтор, Тазабеков С.).

16. Пространство Структурные и конструктивные свойства функций // *Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.*, 1987, №5, С.74–77 (соавторы, Есмаганбетов М.Г., Шаяхметова Б.К.).

17. Линейные операторы в пространствах Лоренца $L_{p,q}$// Научный сборник *Современные вопросы теории функций и функционального анализа*, КарГУ, 1992. С.101–106 (соавтор Тлеуханова Н.Т.).

18. Теорема Харди-Литлвуда в пространстве П.И. Лизоркина // Научный сборник *Современные вопросы теории функций и функционального анализа*, КарГУ, 1992. С.3–9 (соавтор, Абдрашева Г.).

19. Об интегрируемости с весом суммы рядов с монотонными коэффициентами // Научный сборник *Современные вопросы теории функций и функ. анализа*, КарГУ, 1992. С.107–112 (соавтор Тургумбаев М.Ж.).

20. Теоремы о сопряжении и множителях Марцинкевича в периодическом пространстве Лизоркина // *Известия НАН РК. Серия физ.-мат.*, 1993. С.3–9 (соавтор Абдрашева Г.К.).

21. О структурных свойствах функции из пространств П.И. Лизоркина // *Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. Материалы межвузовской научно-методической конференции, посвященной 60-летию профессора К.Ж.Наурызбаева. Часть 1*, Алматы, 1994. С.65–71.

22. Об ограниченности многомерного преобразования в пространствах Бесова // *Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. Материалы межвузовской научно-методической конференции, посвященной 60-летию профессора К.Ж, Наурызбаева. Часть 1*, Алматы, 1994. С.71–77 (соавтор Тлеуханова Н.Т.).

23. О некотором расширении университетского курса функционального анализа // *Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. Материалы межвузовской научно-методической конференции, посвященной 60-летию профессора К.Ж, Наурызбаева. Часть 1*, Алматы, 1994. С.162–166 (соавтор Нурсултанов Е.Д.).

24. Мультипликаторы в пространствах со степенным весом // *"Теория приближения и вложения функциональных пространств"*, Караганда, 1994. С.161–166.

25. Прямые и обратные теоремы приближения в пространстве Лизоркина // *"Теория приближения и вложения функциональных пространств"*, Караганда, 1994. С.166–172.

26. Об оптимизации классических неравенств // *"Теория приближения и вложения функциональных пространств"*, Караганда, 1994. С.172–178 (соавторы Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т.).

27. Наилучшее приближение функции из пространства Лоренца и коэффициенты Фурье // *"Теория приближения и вложения функциональных пространств"*, Караганда, 1994. С.178–181.

28. Оценки коэффициентов Фурье по общим ортонормальным системам // *Материалы международной конференции "Функциональные пространства. Теория приближения, нелинейный анализ," посвященной 90-летию академика С.М.Никольского*, Москва, 1995. С.254–256.

29. Общие пространства типа пространств О.В.Бесова и их интерполяционные свойства // *Вестник КарГУ*, 1996, №1. С.45–53.

30. Об условиях вложения в пространства в терминах средних рядов Фурье-Прайса // *Вестник РУДН. Сер. матем.*, 1996, т.60, №4. С.98–106.

31. О коэффициентах кратных рядов Фурье по периодическим мультипликативным системам Прайса // *Математические заметки*, 1996, т.60, №4. С.620–623.

32. О зависимости неравенства разных метрик от геометрии спектра полинома // *Современные вопросы теории функции и функционального анализа*, Караганда, 1996. С.93–106.

33. Интерполяция билинейных отображений // *Вестник РУДН. Сер. мат.*, 1996, №3, вып.2. С.107–115 (соавторы Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т.).

34. Об абсолютной сходимости кратных рядов составленных из коэффициентов Фурье-Прайса // *Известия АН РК. Сер. физ.-мат.*, 1997, №3, С.66–78.

35. О влиянии геометрических свойств спектра полинома на неравенства разных метрик С.М. Никольского // *Сибирский матем. журнал*, 1989, т.39, №5, С.1157–1163.

36. Применение разностных теорем вложения в гармоническом анализе // *Материалы Республиканской научной конференции по теории приближения и вложения функциональных пространств, посвященная памяти чл.-корр. АН КазССР д.ф.-м.н., проф. Т.И.Аманова. Часть 1*, Караганда, 1998. С.91–115.

37. Теоремы вложения для пространств Соболева числовых последовательностей // *Труды по анализу и геометрии*, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2000. С.553–570.

38. Embedding theorems for sobolev spaces of numerical seguences// *Sibirian Advances in Matematics*, 2002, v.12. P.92–109.

39. Теоремы типа Пэли для кратных рядов Фурье по обобщенным системам типа Хаара // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2001, т.7, вып.2. С.533–563.

40. Теоремы вложения для пространств О.В. Бесова с мультипликативным базисом Прайса // *Материалы международной научно-практической конференции. "Теория функции, функциональный анализ и их приложения", посвященный 80-летию чл. корр. АН КазССР, д.ф.-м.н. профессора Т.И. Аманова*, Семипалатинск, 2003. С.43-46 (соавтор Сулейменова З.Р.).

41. Теоремы вложения для пространств О.В. Бесова с мультипликативным базисом Прайса // *Труды МИ им.В.А.Стеклова РАН*, Москва, Наука, 2003, т.243. С.313–319.

42. Об эквивалентных нормах пространства Бесова по мультипликативным базисам // *Вестник КарГУ им.Е.А.Букетова*, 2003, №3, С.43–46 (соавтор Сулейменова З.Р).

43. Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье-Прайса в пространствах Лоренца // *Математический журнал*, 2004, т.4, №2(12). С.104–109 (соавтор Бимендина А.У.).

44. Об эквивалентных нормировках пространства Бесова по обобщенным системам Хаара // *Вестник КарГУ им.Е.А.Букетова*, 2004, №3. С.4–9 (соавтор, Саурбаева Ж.С.).

45. Теорема Харди-Литлвуда для рядов Фурье-Прайса с квазимонотонными коэффициентами в пространстве Лоренца // *Вестник КарГУ им.Е.А.Букетова*, 2005, №2(38). С.3–9 (соавтор Бимендина А.У.).

46. Кратные ортогональные ряды и мультипликаторы Фурье (монография). Караганды, АРКО, 2006. 132с.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 004.056.55 2000 MSC: 42A16

A b d r a k h m a n o v A . E . , B a i b a t c h a e v a D . A . **On the matter of using key generator non-equiprobability for breaking cyphers by exhaustive search** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.14–17.

This paper describes a variant of implementing exhaustive search method for breaking cyphersystems using biased key generator, and considers its computational complexity. It is suggested that the results should be taken into account in new edition of the State Standard of the Republic of Kazakhstan ST RK 1073-2002 "Cryptographic equipment. General requirements".
References — 4.

УДК: 004.056.55 2000 MSC: 42A16

Ә б д р а х м а н о в А . Е . , Б а й б а т ш а е в а Д . А . **Шифрді тоталды пайдаланып көру әдісімен бұзып ашқанда кілт генераторы ықтималдығының тең еместігін қолдану туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.14–17.

Осы мақалада ықтималдығы тең емес генератордың көмегімен алынған кілттерді тоталды пайдаланып көру әдісінің модификациясы сипатталады және оның есептеу қиыншылықтары қарастырылады. Алынған нәтижелерге ҚР СТ 1073-2002 "Ақпаратты криптографиялық қорғау құралдары. Жалпы техникалық талаптар"
Әдебиеттер тізімі — 4.

УДК: 517.937 2000 MSC: 37C75

A i s a g a l i e v S . A . **Time-optimality of non-linear systems** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.17–27.

Method for solving time-optimal control problem for non-linear systems with boundary conditions, phase and integral restrictions and restrictions on control values is offered.
References — 3.

УДК: 517.937 2000 MSC: 37C75

А й с а ғ а л и е в С . Ә . **Сызықты емес жүйелердің тиімді тез әрекет есебі** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.17–27.

Мақалада шекаралық шарттары бар сызықты емес жүйелердің фазалық, интегралдық жә не жүйенің ресурстарының шектелгендігін ескеретін шектеулер қойылған кездегі тез әрекет есебін шешу әдісі ұсынылады.
Библ. — 3.

УДК: 517.95.958 2000 MSC: 35Q51, 35Q53

A l e x e y e v a A . V . **Space two-dimensional generalizations of Korteweg-de Vries equation** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.28–32.

Technique of deduction of new space two-dimensional soliton equations A1-A14 by the given bilinear forms H1-H5 is proposed.

References — 6.

УДК: 519.95.958 2000 MSC: 35Q51, 35Q53

А л е к с е е в а А . В . **Кортевег-де Фриз екі өлшемді кеңістік теңдеулері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.28–32

H1-H5 бейсызықтық формасымен берілген A1-A14 екі өлшемдері солитонды кеңістік теңдеулерін алудың жаңа әдістері ұсынылған.

Библ. — 6.

УДК: 517.956.2 2000 MSC: 42A16

D o s b o l o v a A . Z t . , T u n g a t a r o v A . B . **On continuous solutions of one class of Bei'trami's equations with a pole.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.33–35.

In this paper on manifold of one class of Bei'trami's equations with a pole is constructed in explicit form.

References — 3.

УДК: 517.956.2 2000 MSC: 42A16

Д о с б о л о в а А . Ж . , Т ү н ғ а т а р о в Ә . Б . **Полюсті жалпыланған Бельтрами теңдеулерінің бір класының үздіксіз шешімдері туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.33–35.

Полюсті жалпыланған Бельтрами теңдеулерінің бір класының бір көпбейнесі айқын турде тұрғызылды.

Библ. — 3.

УДК: 517.925:50 2000 MSC: 34K20,34K29, 93C15

Z u m a t o v S . S . **Domain of attraction in the neighborhood of program manifold.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.36–41.

Notion of domain of attraction of program manifold with respect to some vector-function is introduced. The controls on deflection from given program manifold, securing asymptotical stable program manifold are determined. The domain of attraction with respect to some vector-function is found.

References — 4.

УДК: 517.925:50 2000 MSC: 34K20,34K29, 93C15

Ж ұ м а т о в С . С . **Көпбейне маңындағы тартылу облысы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.36–41.

Белгілі бір вектор-функция бойынша бағдарламалық көпбейненің тартылу облысының түсінігі енгізілді. Асимптотикалық орнықтылықты қамтамасыз ететін берілген бағдарламалық көпбейнеден ауытқуды басқарулар анықталды. Белгілі бір вектор-функция бойынша тартылу облысы табылды.

Библ. — 4.

УДК: 512.554.31 2000 MSC: 34B40

I b r a e v S h . S h . **Nonsplit extensions of** $sl_4(k)$ // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.42–47.

Second cohomology groups of Lie algebra $sl_4(k)$ and algebraic group $SL_4(k)$ with irreducible coefficients are described. The equivalency of the ordinary and restricted second cohomology groups of Lie algebra $sl_4(k)$ with nontrivial irreducible modules is proved.
References — 11.

УДК: 512.554.31 2000 MSC: 34B40

Ы б ы р а е в Ш . Ш . $sl_4(k)$**-тiң жiктелмейтiн кеңеюлерi** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.42–47.

Жұмыста сипаттамасы $p > 3$ k алгебралық тұйық өрiсi үстiндегi $sl_4(k)$ Ли алгебрасы мен $SL_4(k)$ алгебралық группасының коэффициенттерi келтiрiлмейтiн модульдердегi екiншi когомология группалары есептелдi. $sl_4(k)$ алгебрасының коэффициенттерi тривиал емес келтiрiлмейтiн модулдердегi әдеттегi және шектелген екiншi когомология группаларының эквиваленттi екенi дәлелдендi.
Библ. — 11.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A25, 41A05

I v a n o v a E . N . **Error estimate of information-kernel spline interpolation on scattered data** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.48–54.

Error estimate of information-kernel spline interpolation in sourcewise function class is obtained. The error estimate depends on smoothness conditions imposed on kernel generating appropriated class of smoothness functions.
References — 11.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A25, 41A05

И в а н о в а Е . Н . **Былыққан торда ақпаратты-ядролық сплайн-интерполяциясының қателiгiнiң бағасы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.48–54.

Кейбiр функциялар жиынында ақпаратты-өзектi сплайн-интерполяциясының қателiгiнiң бағасы алынған. Осы баға берiлген функциялар жиынын тудыратын ядросына қойылған тегiстiк шарттарымен тiкелей байланысқаны көрсетiлген.
Библ. — 11.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

I s k a k o v a N . D . **On solvability of periodical boundary value problem for non-linear system of differential equations with delay argument.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.55–65.

Periodical boundary value problem for non-linear system of differential equations with delay argument is considered. Sufficient conditions of existence of isolate solution of problem are established in the terms of initial data and algorithm of its finding is offered.
References — 7.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

Ы с қ а қ о в а Н. Б. **Кешігулі аргументті бейсызық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодтық шеттік есептің шешілімдігі туралы.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.55–65.

Кешігулі аргументті бейсызық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жалқы шешімі болуының жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалды және оны табудың алгоритмі ұсынылды.
Библ. —7.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

M i n g l i b a e v a B. B. **Approximation of singular boundary value problemwith parameter for one second order ordinary differential equation.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.66–71.

A singular boundary-value problem with parameter for second order ordinary differential equation with utmost constant coefficient matrixes and right part is considered. Necessary and sufficient conditions of unique solvability is established, approximating two point boundary value problem is constructed.
References — 2.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B08

М и н г л и б а е в а Б. Б. **Белгілі бір екінші ретті жай дифференциалдық теңдеу үшін сингуляр қос нүктелі параметрлі шеттік есептің аппроксимациясы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.66–71.

Коэффициенттері мен оң жағы шексіздікте тұрақты болатын екінші ретті жай дифференциалдық теңдеу үшін сингуляр қос нүктелі параметрлі шеттік есеп қарастырылды. Бірмәнді шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды, қос нүктелі жуықтаушы шеттік есеп құрылды.
Библ. —2.

УДК: 519:3.62-50 2000 MSC: 35L20

S a m o k h v a l o v a T. P. **Proof of convergence of approximate algorithm of different speed system control** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.72–79.

Proof of convergence on quality criterion of algorithm of one particular linear different speed distributed parameter system is given. Algorithm of approximate control synthesis is constructed by reduced system in two steps.
References — 7.

УДК: 519:3.62-50 2000 MSC: 35L20

С а м о х в а л о в а Т. П. **Әртурлі қарқынды жуйені баеқару жуықтау алгоритімінің жинақтылығының негізделуі** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.72–79.

Үлестірілген параметрлері бар сызықтық әртурлі қарқынды жүйенің дербес жағдайы ұшін кіші параметр нөлге үмтылғандағы сапа нысаны бойынша жинақтылығы дәлелденді. Редуцияланған жүйе бойынша ықшамадалған басқару алгоритмі түрғызылды.
Библ. — 7.

УДК: 621.371.167; 621.372.81 2000 MSC: 78A45

S a u t b e k o v S . S . **Diffraction of Nonsymmetric Waves on Segment of Cylinder.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.80–87.

Diffraction of nonsymmetric wave on segment of round cylinder, which is coaxially located inside of infinite wave guide is considered. Boundary value problem is reduced to solving a system of singular integral equations relative to the Fourier's component of surface density of current. Exact solution of the system is constructed as a sum of partial waves by Wiener-Hopf-Fock's method in class of analytical functions.

References — 5.

УДК: 621.371.167; 621.372.81 2000 MSC: 78A45

С а у ы т б е к о в С . С . **Бейсимметриялық толқынның цилиндр кесiндiсiндегi дифракциясы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.80–87.

Өстерi бiрдей шексiз толқын өткiзгiш iшiндегi бейсимметриялық толқынның дөңгелек цилиндр кесiндiсiнде болатын дифракциясы қарастырылған. Шеттiк есеп тоқтың беттiк тығыздығының фурье-компонентасына қатысты сингуляр интеграл теңдеулер жүйесiн шешуiне алып келтiрiледi. Жүйенiң дәл шешiмi Винер-Хопф-Фок әдiсi бойынша аналитикалық функциялар класында тұ

Библ. — 5.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

S i k h o v M . B . **Bernshtein's and Jackson-Nikol'skii's inequalities with given majorant.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.88–94.

Exact in order Bernshtein's and Jackson-Nikol'skii's inequalities for trigonometrical polynomials with a spectrum of functions $\Lambda(t)$ generated by level surfaces under some restrictions on $\Lambda(t)$ are obtained.

References — 14.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

С и х о в М . Б . **Берiлген мажорантты Бернштейн, Джексон-Никольский теңсiздiктерi туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.88–94.

$\Lambda(t)$ функциясына белгiлi бiр шектеулер болғанда $\Lambda(t)$ функциясының деңгейiнiң беттерiнен туындалған спектрлi тригонометриялық көпмүшелерi үшiн ретi бойынша тура Бернштейн, Джексон-Никольский теңсiздiктерi туралы алынды.

Библ. —14.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

T a l i p o v a M . Z h . , T a s m a m b e t o v Z h . N . **Gorn systems with irregular sinqularities.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.95–101.

A few Gorn's systems with irregular singularities are studied by Frobenius-Latysheva method. On an idea of rank and antirank normally regular and normal solutions are constructed.

References — 7.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Т а л и п о в а М . Ж . , Т а с м а м б е т о в Ж . Н . **Горнның иррегуляр ерекшелікті жүйелері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.95–101.

Фробениус-Латышева әдісімен иррегуляр ерекшелікті Горнның нақты жүйелері қарастырылған. Ранг және антиранг көмегімен мүмкін болатын қалыпты-регуляр және қалыпты шешімдер тұрғызылған.

Библ. — 7.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

T l e u b e r g e n o v M . I . **On stochastic inverse control problem.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. No 3 (21). P.102–108.

Reconstruction problem in a class of stochastic differential Into's equations by given properties of motion, which are depending on part of variables, is considered. Control set ensured necessary and sufficient conditions of existence of given integral manifold, is defined.

References — 7.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Т і л е у б е р г е н о в М . Ы . **Кері стохастикалық басқару есебі туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 3 (21). Б.102–108.

Берілген қасиеттері бойынша айнымалы болігіне тәуелді Ито типтес екінші ретті стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бул есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін басқару жиыны анықталады.

Библ. — 7.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 3 (21) 2006

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(3272)-91-20-03, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 25.12.2006г.
Тираж 300 экз. Объем 121 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru