ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2005 том 5 № 3 (17)

Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 5 № 3 (17) 2005

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 5, № 3 (17), 2005

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 5 – 10*

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Г.А.Абдикаликова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34

Изучается линейная краевая задача для систем уравнений гиперболического типа. Методом параметризации получены коэффициентные достаточные условия существования, единственности решения рассматриваемой задачи и предложен алгоритм нахождения решения.

Различные краевые задачи для системы уравнений гиперболического типа изучены многими авторами. Отметим лишь работы [1], [2]. В работе [3] методом параметризации исследованы вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В [4], [5] методом введения функциональных параметров, являющимся модификацией метода параметризации, установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальных краевых задач для системы гиперболических уравнений второго порядка. На основе этого метода в [6] исследована корректная разрешимость семейства двухточечных краевых задач, в [7] установлены достаточные условия корректной разрешимости задачи нахождения ограниченного на полосе решения системы линейных гиперболических уравнений.

Рассмотрим на $\bar{\Omega}=\Big\{\Big(x,t\Big): t\le x\le t+\omega, 0\le t\le T\Big\}$, $T>0$, $\quad \omega>0$, краевую задачу

$$D\Big[\frac{\partial}{\partial x}u\Big]=A\Big(x,t\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+P\Big(x,t\Big)u+f\Big(x,t\Big),\qquad u\in R^n, \tag{1}$$

$$B\Big(y\Big)\frac{\partial u}{\partial x}\Big(y,0\Big)+C\Big(y\Big)\frac{\partial u}{\partial x}\Big(y+T,T\Big)=d\Big(y\Big),\qquad y\in\Big[0,\omega\Big], \tag{2}$$

$$u\Big(t,t\Big)=\Psi\Big(t\Big),\qquad t\in\Big[0,T\Big]\quad, \tag{3}$$

где $D=\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}$; $\quad A(x,t)$, $P(x,t)$ – $(n\times n)$ - матрицы, $f\Big(x,t\Big)$ – n- вектор-функция непрерывны по x и t на $\bar{\Omega}$; $B(y)$, $C(y)$ – $(n\times n)-$матрицы, $n-$вектор-функция $d(y)$ непрерывны на $[0,\omega]$;

Keywords: *differential equation, non-local boundary value problem, parametrization's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

функция $\Psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $\|u\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\| =$
$= \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Обозначим через $C(\bar{\Omega}, R^n)$ пространство непрерывных по x и t функций $u : \bar{\Omega} \to R^n$ с нормой $\|u\|_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(x,t)\|$.

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, тогда задача (1)—(3) имеет вид

$$Dv = A(x,t)v + P(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

$$B(y)v(y,0) + C(y)v(y+T,T) = d(y), \qquad y \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t) = \Psi(t) + \int\limits_{t}^{x} v(\eta,t)d\eta, \qquad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Если непрерывная функция $u(x,t)$ является известной, то решая двухточечную краевую задачу (4)—(5), находим $v(x,t)$. Если функция $v(x,t)$ известна, то из (6) определим функцию $u(x,t)$. Если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)—(3), то пара $(v(x,t),\, u(x,t))$ будет решением (4)—(6), где $v(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, и, наоборот, если $(v(x,t),\, u(x,t))$ — решение задачи (4)—(6), то функция $u(x,t)$ является решением исходной задачи (1)—(3).

Используя метод характеристик, с помощью замены $\tau = t, \xi = x - t$ относительно функций $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ получим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений на $\overline{H} = \Big\{(\xi,\tau) : 0 \leq$ $\leq \xi \leq \omega,\, 0 \leq \tau \leq T\Big\}$, $T > 0$, $\omega > 0$,

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \tau} = \widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v} + \widetilde{P}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau) + \widetilde{f}(\xi,\tau), \qquad \tau \in [0,T], \tag{7}$$

с граничным условием

$$B(\xi)\widetilde{v}(\xi,0) + C(\xi)\widetilde{v}(\xi,T) = d(\xi), \qquad \xi \in [0,\omega], \tag{8}$$

где функция $\widetilde{u}(\xi,\tau)$ связана с $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ функциональным соотношением

$$\widetilde{u}(\xi,\tau) = \Psi(\tau) + \int\limits_{\tau}^{\xi+\tau} \widetilde{v}(\varsigma,\tau)d\varsigma, \qquad \tau \in [0,T]. \tag{9}$$

Здесь $\widetilde{v}(\xi,\tau) = v(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{A}(\xi,\tau) = A(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{P}(\xi,\tau) = P(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{f}(\xi,\tau) = f(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{u}(\xi,\tau) = u(\xi+\tau,\tau)$.

В силу замены $\tau = t$, $\xi = x - t$ по функции $\widetilde{u}(\xi,\tau)$ определяем функцию $u(x,t)$. Для этого выражаем переменные x и t через переменные ξ и $\tau : x = x(\xi,\, \tau)$. Обозначим $u(x(\xi,\, \tau),t) = \widetilde{u}(\xi,\, \tau)$. Тогда $\widetilde{u}(\xi(x,t),\tau) = u(x,t)$.

Непрерывно дифференцируемая на $\bar{H}$ пара функций $(\tilde{v}(\xi,\tau),\tilde{u}(\xi,\tau))$ называется решением задачи (7)—(9) в широком смысле, если функция $\tilde{v}(\xi,\tau)$ на $\bar{H}$ непрерывно дифференцируема по переменной τ и удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений (7) с граничным условием (8), где функция $\tilde{u}(\xi,\tau)$ связана с функцией $\tilde{v}(\xi,\tau)$ функциональным соотношением (9). Пару непрерывно дифференцируемых на $\bar{\Omega}$ функций $(v(x,t),u(x,t))$, полученную с помощью замены $t = \tau$, $x = \xi + \tau$ из функции $(\tilde{v}(\xi,\tau),\tilde{u}(\xi,\tau))$ будем называть решением в широком смысле задачи (4)—(6). Непрерывно дифференцируемая на $\bar{\Omega}$ функция

$u(x,t) = \tilde{u}\left(\xi(x,t),\tau\right)$ называется решением задачи (1)—(3) в широком смысле, если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и выполнены граничные условия (2)—(3).

При известной функции $\widetilde{u}(\xi,\tau)$, решая двухточечную краевую задачу (7)—(8), определим функцию $\widetilde{v}(\xi,\tau)$. Из (9) по известной функции $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ находим функцию $\widetilde{u}(\xi,\tau)$. Если $(v(x,t), u(x,t))$ — решение задачи (4)—(6), где $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$, то с учетом замены $\xi = x - t$, $\tau = t$ пара $(\widetilde{v}(\xi,\tau),\ \widetilde{u}(\xi,\tau))$ будет решением задачи (7)—(9). И, наоборот, если $(\widetilde{v}(\xi,\tau),\ \widetilde{u}(\xi,\tau))$ является решением задачи (7)—(9), то, учитывая замены $x = \xi + \tau$, $t = \tau$, пара $(v(x,t),\ u(x,t))$ будет решением задачи (4)—(6).

Следуя работам [3] — [7] для нахождения решения задачи (7)—(9) строим алгоритм.

Шаг 0. Взяв в (7) $\widetilde{u}(\xi,\tau) = \Psi(\tau)$, решая двухточечную краевую задачу (7)—(8), определим начальное приближение $\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Из (9) при $\widetilde{v}(\xi,\tau) = \widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$ находим $\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$.

Шаг 1. Возьмем в правой части (7) $\widetilde{u}(\xi,\tau) = \widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$. Решая краевую задачу (7)—(8), определим приближение $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Найденное $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$ подставив в (9), находим $\widetilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$. И т.д.

Таким образом, продолжая этот процесс, на k-м шаге находим $\Big(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\Big)$.

Для нахождения решения двухточечной краевой задачи на каждом шаге алгоритма применяем метод параметризации [3].

Отметим, что одним из основных условий однозначной разрешимости семейства двухточечных краевых задач является обратимость матрицы $Q_\nu(\xi,h)$, $\nu = 1,2,...,h > 0$,

$$Q_\nu(\xi,h) = \begin{bmatrix} hB(\xi) & 0 & 0 & ... & 0 & hC(\xi)[I + D_{\nu,N}(\xi,h)] \\ I + D_{\nu,1}(\xi,h) & -I & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu,2}(\xi,h) & -I & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & I + D_{\nu,N-1}(\xi,h) & -I \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(\xi,h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \widetilde{A}(\xi,\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \widetilde{A}(\xi,\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} \widetilde{A}(\xi,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \quad ... \quad +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \widetilde{A}(\xi,\tau_1) ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} \widetilde{A}(\xi,\tau_\nu)d\tau_\nu ... d\tau_1.$$

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$ и ν, $\nu = 1,2,...$, $\Big(nN \times nN\Big)$ — матрица $Q_\nu(\xi,h)$ обратима при всех $\xi \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства:*

а) $\left\| \Big[Q_\nu(\xi,h)\Big]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(h)$;

б) $q_\nu(\xi,h) = \gamma_\nu(h) \max\Big\{1, h\Big\|C(\xi)\Big\|\Big\} \Big[e^{\alpha(\xi)h} - 1 - \alpha(\xi)h - \ldots - \dfrac{\Big(\alpha(\xi)h\Big)^\nu}{\nu!}\Big] \le \sigma < 1,$

где $\alpha(\xi) = \max\limits_{\tau\in[0,T]} \Big\|\widetilde{A}(\xi,\tau)\Big\|$, $\quad \sigma = const.$

Тогда последовательные приближения $\Big(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\Big)$ равномерно сходятся к $\Big(\widetilde{v}^{*}(\xi,\tau), \widetilde{u}^{*}(\xi,\tau)\Big)$ — единственному решению задачи (7)—(9).

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 [3, с.54] и теоремы 1 [4, с.22]. По указанному алгоритму ищем решение задачи (7)—(9).

Приняв в (7) $\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$, из (7)—(8) находим нулевое приближение $\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Из соотношения (9) определим функцию $\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$. Функцию $\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$, $k=1,2,\dots$, находим из задачи

$$\frac{\partial\widetilde{v}^{(k)}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}^{(k)}+\widetilde{P}(\xi,\tau)\widetilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)+\widetilde{f}(\xi,\tau),\quad \xi\in[0,\omega],\quad \tau\in[(r-1)h,rh), \tag{10}$$

$$B(\xi)\widetilde{v}^{(k)}(\xi,0)+C(\xi)\widetilde{v}^{(k)}(\xi,T)=d(\xi),\qquad \xi\in[0,\omega]. \tag{11}$$

Тогда функция $\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)$, $k=1,2,\dots$, определяется из функционального соотношения

$$\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int\limits_{\tau}^{\xi+\tau}\widetilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau)d\varsigma,\qquad (\xi,\tau)\in\overline{H}. \tag{12}$$

Линейная краевая задача для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+F(\xi,\tau),\qquad \tau\in[0,T], \tag{13}$$

с условием (8) имеет единственное решение $\widetilde{v}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ и справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{v}(\xi,\tau)\right\|\le M_\nu(\xi,h)\max\Big(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\|F(\xi,\tau)\|\Big), \tag{14}$$

где

$$M_\nu(\xi,h)=\Big\{\gamma_\nu(h)\Big[e^{\alpha(\xi)h}-1\Big]\max\Big\{1+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\Big\}+e^{\alpha(\xi)h}\Big\}\cdot h\times$$

$$\times\Big[\gamma_\nu(h)\cdot e^{\alpha(\xi)h}\cdot\frac{1}{1-q_\nu(\xi,h)}\cdot\max(1,h)\|C(\xi)\|\frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}+1\Big]+$$

$$+\gamma_\nu(h)\max\Big\{1+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\Big\}\cdot h.$$

На основе работы [6] дадим определение корректной разрешимости задачи (13), (8).

Определение 1. *Задача (13), (8) называется корректно разрешимой, если для любых $F(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ и $d(\xi)\in C([0,\omega],R^n)$ она имеет единственное решение $\widetilde{v}(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ и имеет место следующая оценка*

$$\max_{\tau\in[0,T]}\|\widetilde{v}(\xi,\tau)\|\le K(\xi)\max\Big(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\|F(\xi,\tau)\|\Big), \tag{15}$$

где $K(\xi)-$ непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $F(\xi,\tau)$ и $d(\xi)$. Из (15) вытекает, что при выполнении условий теоремы 1 задача (13), (8) корректно разрешима с функцией $K(\xi)=M_\nu(\xi,h)$.

В оценке (15) возьмем максимум по ξ, тогда получим константу корректной разрешимости K, которая определяется по исходным данным задачи (13), (8) и не зависит от $F(\xi,\tau),d(\xi)$, и справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\|\widetilde{v}(\xi,\tau)\|\le K\max\Big(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\|F(\xi,\tau)\|\Big), \tag{16}$$

где $K = \gamma_\nu(h) \max \Big(1 + h \|C(\xi)\| e^{\alpha(\xi) h}, e^{\alpha(\xi) h} \Big) \cdot h$.

Учитывая (16), имеем

$$\max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)\| \le K \max \Big(\|d(\xi)\|, p \max_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(\tau)\| + \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{f}(\xi,\tau)\| \Big), \tag{17}$$

$$\max_{\tau\in[0,T]} \Big\| \frac{\partial \widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)}{\partial\tau} \Big\| \le aK \max \Big(\|d(\xi)\|, p \max_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(\tau)\| + \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{f}(\xi,\tau)\| \Big) +$$

$$+ p \max_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(\tau)\| + \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{f}(\xi,\tau)\|, \tag{18}$$

где K не зависит от $d(\xi), \widetilde{f}(\xi,\tau), \Psi(\tau)$; $a = \max\limits_{\xi\in[0,\omega]} \alpha(\xi)$, $\max\limits_{(\xi,\tau)\in\bar{H}} \Big\| \widetilde{P}(\xi,\tau) \Big\| = p$.

Используя (16)—(18), оценим

$$\max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau) - \widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\| \le Kp \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau) - \widetilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\|,$$

$$\max_{\tau\in[0,T]} \Big\| \frac{\partial \widetilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau)}{\partial\tau} - \frac{\partial \widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)}{\partial\tau} \Big\| \le (aK+1)p \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau) - \widetilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\|,$$

$$\max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau) - \widetilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\| \le \int\limits_{\tau}^{\xi+\tau} \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau) - \widetilde{v}^{(k-1)}(\varsigma,\tau)\| d\varsigma. \tag{19}$$

Тогда

$$\max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau) - \widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\| \le Kp \int\limits_{\tau}^{\xi+\tau} \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau) - \widetilde{v}^{(k-1)}(\varsigma,\tau)\| d\varsigma. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует равномерная на $\overline{H}$ сходимость последовательностей $\Big\{ \widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau) \Big\}$, $\Big\{ \widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau) \Big\}$ при $k \to \infty$. Эти последовательности сходятся к предельным функциям $\widetilde{v}^*(\xi,\tau)$ и $\widetilde{u}^*(\xi,\tau)$, которые являются решением задачи (7)—(9). Воспользовавшись оценками (16), (17) и (20), имеем

$$\max \Big(\max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{v}^*(\xi,\tau)\|, \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{u}^*(\xi,\tau)\| \Big) \le$$

$$\le K^* \max \Big(\|d(\xi)\|, \max_{\tau\in[0,T]} \|\widetilde{f}(\xi,\tau)\|, \max_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(\tau)\| \Big), \tag{21}$$

где K^* не зависит от $d(\xi), \widetilde{f}(\xi,\tau), \Psi(\tau)$.

В оценке (21) возьмем максимум по ξ, тогда имеем

$$\max \Big(\|\widetilde{v}^*\|_1, \|\widetilde{u}^*\|_1 \Big) \le K^* \max \Big(\|d(\xi)\|, \|\widetilde{f}\|_1, \max_{\tau\in[0,T]} \|\Psi(\tau)\| \Big).$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)—(3) имеет единственное решение* $u^*(x,t)$.

Из теоремы 1 вытекает, что задача (7)—(9) однозначно разрешима. Так как задача (7)—(9) эквивалентна задаче (4)—(6), а задача (4)—(6) эквивалентна задаче (1)—(3), то получим, что задача (1)—(3) имеет единственное решение $u^*(x,t)$.

Если построенное решение в широком смысле непрерывно дифференцируемо по x и t, то функция $u(x,t)$, обладающая непрерывными частными производными $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ с условиями (2)—(3), является и классическим решением задачи (1)—(3).

Цитированная литература

1. **Джураев Т.Д., Абдиназаров С.** // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С.1305–1309.

2. **Маловичко В.А.** // Математическая физика и нелинейная механика. 1991. № 15. С.63–66.

3. **Джумабаев Д.С.** // Ж. вычисл.матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С.50–66.

4. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** // Известия МОН,НАН РК Сер.физ.-матем. 2002. №3. С.20–26.

5. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** // Доклады РАН. 2003. Т. 391. №3. С.295–297.

6. **Асанова А.Т.** // Математический журнал. Алматы. 2002. Т.2. № 2. С.25–31.

7. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** // Ж. вычисл.матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 8. С.1183–1200.

Поступила в редакцию 20.06.2004 г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 11 – 18*

УДК 517.9

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ 2D-3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА. II

У.У.Абылкаиров

КазНУ им. аль-Фараби
050012 г. Алматы, ул. Масанчи, 39/47 UAbylkair@kazsu.kz

Получены теоремы существования и единственности сильных решений двух задач протекания для 2D-3D системы Навье-Стокса с нестандартными граничными условиями.

В настоящей работе рассматривается две задачи протекания для полной системы Навье-Стокса. Получены необходимые априорные оценки для решений обеих искомых задач. На основании результатов работы [1] и полученных ниже априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности сильных решений задач протекании для системы Навье-Стокса.

1. Задача протекания для 2D-3D системы Навье-Стокса.

1.1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3,$ — область и её граница Γ, связные компоненты Γ^0, Γ^1 удовлетворяют условию (i) из п.1.2 (см. [1]).

Будем рассматривать ниже начально-краевую задачу, называемую нами **задачей протекания 1:**

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} + grad\, p = \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\vec{v}(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times (0,T), \tag{3}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{4}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{5}$$

описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω. Здесь $\vec{v}$, p — скорость, давление жидкости соответственно; $\nu = const > 0$ — коэффициент кинематической вязкости; $\vec{f}$ — объемная плотность внешних сил; $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$ — заданные функции. Ниже будем ссылаться на задачу (1)—(5) для

Keywords: *non-standard boundary condition, flow problem, Navier-Stokes system*
2000 Mathematics Subject Classification: 35D05, 35Q30

заданных $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$ как на **задачу 1**. Наряду с **задачей 1** будем рассматривать другую **задачу 2**, заключающуюся в нахождении решения уравнения Навье-Стокса в форме Громэки-Лэмба

$$\partial_t \vec{v} + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v} + \operatorname{grad} (p + |\vec{v}|^2 /2) = \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \tag{6}$$

в которой вместо условия (5) на $\Sigma^{1,T}$ выполняется следующее соотношение:

$$h :\equiv p + |\vec{v}|^2/2 = \varphi(t) + const; \int\limits_{\Omega} h\, dx = 0 \text{ на } \Sigma^{1,T}. \tag{7}$$

Определение сильного решения задач 1, 2. *Двойку* $(\vec{v}(x,t), p(x,t))$, *удовлетворяющую условиям:*

(i) $\vec{v} \in L^2(0, T; V^2(\Omega))$, $\partial_t \vec{v} \in L^2(Q)$, $\nabla p \in L^2(Q)$,

(ii) $\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x)$,

(iii) $\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} + grad\, p = \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}$, $div\, \vec{v} = 0$ *почти всюду в* Q,

(iv) $\nabla p \in L^2(0, T; G(\Omega))$ *в* ***задаче 1***,

(v) $\nabla h \in L^2(0, T; G(\Omega))$ *в* ***задаче 2***,

называем решением ***задач 1, 2***, *где* $V^2(\Omega) \equiv V^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$.

1.2. Вспомогательные результаты. Прежде чем приступить к выводу априорных оценок, приведем некоторые неравенства вложения для функций из пространства $W^{2,1}(\Omega)$.

Лемма 1.1 [2]. *Пусть* $\Omega \subset R^d$ *– область с кусочно-гладкой границей* Γ. *Тогда для произвольной функции* $\vec{v}(x) \in W^{2,1}(\Omega)$ *имеем*

$$\|\vec{v}(x)\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} \leq C(q,n) \|\vec{v}\|^{n/q}_{W^{2,1}(\Omega)} \|\vec{v}\|^{1-n/q}_{L^2(\Omega)}, \tag{8}$$

если $q \geq n$ *при* $n > 2$ *и* $q > 2$ *при* $n = 2$;

если $\vec{v} = 0$, $x \in \Gamma^0 \subset \Gamma = \partial\Omega$, $\mathrm{mes}\Gamma^0 > 0$, *то*

$$\|\vec{v}(x)\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} \leq C(q,n) \|\vec{v}_x\|^{n/q}_{L^2(\Omega)} \|\vec{v}\|^{1-n/q}_{L^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Далее в предположениях $\vec{u} = 0$, $x \in \Gamma^0 \subset \Gamma = \partial\Omega$, $\mathrm{mes}\,\Gamma^0 > 0$ справедливо соотношение

$$\|\vec{v}\|_{q,\Omega} \leq C(q,n) \|\vec{v}_x\|_{2,\Omega}, \tag{10}$$

где $q \leq 2n/n-2$ при $n > 2$ и $q < \infty$ при $n = 2$.

Априорные оценки задачи 1. Относительно решения **задачи 1** докажем такое утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть* $\vec{f} \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$, *тогда для гладкого решения* ***задачи 1*** *справедлива оценка*

$$\|\partial_t \vec{v}\|_{2,Q} + \max_{0\leq t\leq T} \|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \leq C_1 \tag{11}$$

$a)$ *при* $n = 2$ *и если выполнено*

$$\left(\nu - \sqrt{2}\,(\|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|_{2,1,Q})\right) \geq \rho_1 > 0, \tag{12}$$

$b)$ *при* $n = 3$ *и если выполнено*

$$\rho_2 \equiv 1 - \frac{CT}{\nu} \left(\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q}\right)^2 > 0. \tag{13}$$

Доказательство. Случай $n = 2$. Из (1) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} (\vec{v},\nabla)\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx + \nu\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} = (\vec{f},\vec{v})_{2,\Omega}. \tag{14}$$

В силу (9) имеем, что

$$\Big|((\vec{v},\nabla)\vec{v},\vec{v})_{2,\Omega}\Big| \le \|\vec{v}\|^2_{4,\Omega}\cdot\|\nabla\,\vec{v}\|_{2,\Omega} \le \sqrt{2}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}.$$

Следовательно, из (14) выводится следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \Big(\nu - \sqrt{2}\,\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\Big)_{2,\Omega}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \Big\|\vec{f}\Big\|_{2,\Omega}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\,. \tag{15}$$

Так как функция $\varphi(t) = (\,\nu - \sqrt{2}\,\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)})$ непрерывна при $t \ge 0$ и положительна в точке $t = 0$, то может быть одно из двух: или она положительна для всех $t \in [0,\,T]$, или существует такое $t_1 \le T$, что при $t_1 < T$ она положительна, а при $t = t_1$ обращается в нуль. Покажем, что второй случай невозможен.

Действительно, предположим, что существует момент времени $t = t_1$ такой, что $\varphi(t_1) = 0$. Тогда, опуская неотрицательное слагаемое в (15), интегрированием по t от 0 до $\tau \in [0,\,t_1]$ найдем, что

$$\|\vec{v}(\tau)\|_{\,V^0(\Omega)} \le \Big\|\vec{f}\Big\|_{2,\,1,\,Q} + \|\vec{v}_0\|_{\,V^0(\Omega)} = C_1 \tag{16}$$

выполняется равномерно по $\tau \in [0,\,t_1]$. Откуда с учетом (12) следует, что

$$\varphi(t_1) \ge \rho_1 > 0.$$

Получили противоречие.

Таким образом, соотношение (16) выполнено при всех $\tau \in [0,\,T]$ и $\varphi(\tau) \ge \rho_1 > 0$ на $[0,\,T]$.

Интегрируя (15) по $t \in [0,\,T]$ и используя (16), получим полезную оценку

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))} \le \frac{1}{\rho_1}\left[\Big\|\vec{f}\Big\|_{2,\,1,\,Q}\left(\Big\|\vec{f}\Big\|_{2,\,1,\,Q} + \|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}\,\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}\right]. \tag{17}$$

Для доказательства существования решения искомой задачи нам необходимы сильные оценки для $\vec{v}$. Для этого умножим уравнение импульса (1) (см. [1]) на $\partial_t\vec{v}$ в $L^2(\Omega)$, получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le \Big\|\vec{f}\Big\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\|\vec{v}_t\|_{2,\,\Omega}.$$

При оценке последнего слагаемого воспользуемся мультипликативными неравенствами (8), (9) и оценкой (13) из п. 1.5. (см. [1]) стационарной задачи, которую с учетом определенного там же оператора Δ_1 запишем в таком виде:

$$\|\vec{v}\|_{W^{2,\,2}(\Omega)} \le C_\Omega\,\|\Delta_1\,\vec{v}\|_{\,V^0(\Omega)}. \tag{18}$$

Тогда последний член без сомножителя $\|\vec{v}_t\|_{2,\,\Omega}$ имеет следующий вид:

$$\|\vec{v}\,\|_{4,\,\Omega}\|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega} \le C\,\|\vec{v}\|^{\,1/2}_{\,V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\,\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}.$$

С помощью этого соотношения и неравенства Коши получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le \Big\|\vec{f}\Big\|^2_{2,\,\Omega} + C^2\,\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\|\Delta_1\,\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}. \tag{19}$$

Далее после умножения уравнения (1) из [1] на $\Delta_1 \vec{v}$ выводим

$$\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega} + \|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\cdot\|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega} \le$$

$$\le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega} + \|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + C\,\|\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}.$$

Следовательно, отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le 2\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega} + 2\|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + C^2\|\vec{v}\,\|_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{20}$$

Из соотношения (19), учитывая (16) и (20), заключаем, что

$$\nu\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le C_1\,\|\vec{v}\|^4_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}. \tag{21}$$

Соотношение (21) приведем к следующему эквивалентному виду:

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\frac{C_1}{\nu}\int_0^t\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}d\tau\right)\cdot\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}\cdot\exp\left(-\frac{C_1}{\nu}\int_0^t\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}d\tau\right) \le \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}.$$

Затем, интегрируя по времени от 0 до t, $t\in[0,\,T]$, и учитывая оценки (16), (17), получим

$$\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \exp C_2\cdot\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}, \tag{22}$$

где $C_2 = C_1/\nu$.

Далее из (20) и (21) выводятся следующие априорные оценки:

$$\|\vec{v}_t\|^2_{L^2(0,\,T;\,V^0(\Omega))} \le 2[\nu\,\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,Q} + C_3], \tag{23}$$

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,\,T;W^{2,\,2}(\Omega))} \le C^2_\Omega\,\|\Delta_1\vec{v}\|^2_{2\,\Omega} \le C^2_\Omega[2\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,Q} + C_4]. \tag{24}$$

Из оценок (22) и (24) вытекает справедливость первой части леммы.

Для доказательства (11) для случая b) уравнение (1) умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ на $\Delta_1\vec{v}$. Имеем

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\Delta_1\,\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \le \|(\vec{v},\,\nabla)\vec{v}\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\Delta_1\,\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\Delta_1\,\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\,.$$

Далее с помощью неравенства Коши получим

$$\nu\,\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\Delta_1\,\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \le 2\left(\|(\vec{v},\,\nabla)\vec{v}\|^2_{2,\,\Omega} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}\right).$$

При оценке нелинейного члена в правой части воспользуемся следующими неравенствами:

$$\|(\vec{v},\,\nabla)\vec{v}\,\|_{2,\,\Omega} \le \|\vec{v}\|_{6,\,\Omega}\cdot\|\nabla\vec{v}\|_{3,\,\Omega} \le C_{11}(3)\,\|\vec{v}\|^{3/2}_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\,\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}\ \text{ при }\quad n=3,$$

$$\|(\vec{v},\,\nabla)\vec{v}\,\|_{2,\,\Omega} \le \|\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\cdot\|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega} \le C_{11}(2)\,\|\vec{v}\|^{3/2}_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\,\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}\ \text{ при }\quad n=2.$$

Следовательно, из предыдущего соотношения вытекает, что

$$\nu \frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta_1 \vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \le \frac{C_{11}}{2}\|\vec{v}\|^6_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega}. \tag{25}$$

При интегрировании (25) по $t \in [0, T]$ опустим знакоопределенный член в левой части, найдем

$$\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{C_{11}}{2\nu}\int_0^t \|\vec{v}(\tau)\|^6_{V^1(\Omega)} d\tau + \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega}. \tag{26}$$

Обозначим через $y(t) \equiv \int\limits_0^t \|\vec{v}(\tau)\|^6_{V^1(\Omega)} d\tau$, тогда (26) принимает вид

$$\frac{dy}{dt}(\tau) \le (C_1 + C_2\, y(\tau))^3,$$

где $C_2 = \dfrac{C_{11}}{2\nu}$, $C_1 = \dfrac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}$.
Тогда из последнего дифференциального неравенства получим

$$y(t) \le \frac{C_1}{C_2}\Big[\left(1 - 2\,C_1^2\, C_2\, t\right)^{-1/2} - 1\Big],$$

откуда с учетом основного предположения (13) имеем

$$1 - 2\,C_1^2\, C_2\, t \ge 1 - \frac{C_{11}}{\nu}\, T\, \left(\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}\right)^2 = \rho_2,$$

если $t \in [0,\, T]$. Следовательно, из (26) находим

$$\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le C_1 \cdot \rho_2^{-1/2}. \tag{27}$$

Используя оценку для стационарной задачи (13) (см. [1]) при интегрировании соотношении (25) от 0 до T, мы получим следующую оценку:

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le C^2_\Omega\left(\left\|\vec{f}\right\|^2_{L^2(Q)} + C_{11}\cdot(C_1\,\rho_2^{-1/2})^3\, T + \nu\,\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}\right) \le C_5. \tag{28}$$

Для получения оценки на $\vec{v}_t$ делаем те же последовательности действий, как при выводе для случая a), следовательно, получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega} + C^2_{11}\,\|\vec{v}\|^3_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}. \tag{29}$$

Откуда легко получить требуемую оценку

$$\|\vec{v}_t\|^2_{L^2(Q)} \le C_6. \tag{30}$$

Тем самым, оценки (27), (28), (30) составляют вторую часть, т.е. случай b) леммы 1.2. Лемма доказана.

Решения **задачи протекания 2** обладают следующими свойствами.

Лемма 1.3. *Пусть $\vec{f}(x,t) \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$. Тогда для гладкого решения* ***задачи протекания 2*** *имеет место априорная оценка (11) в следующих случаях: (i) при $n = 2$ –*

безусловно; (ii) при $n = 3$, если выполнено (13); (iii) при $n = 3$, если выполняется следующее условие малости данных задачи:

$$\rho_3 \equiv 1 - 2\,C(\Omega)\cdot\,\delta\left[\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}\right]^{1/2} > 0, \tag{31}$$

где $C(\Omega)$ – постоянная из соотношения (18), δ – константа неравенства вложения $W^{2,\,2}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ при $n = 3$.

Доказательство. Вывод оценок решения **задачи 2** аналогичен выводам оценок леммы 1.2. (см. [1]), поэтому ограничимся лишь кратким изложением схемы рассуждений.

Используя форму Громэки-Лэмба, перепишем (1) в эквивалентном виде

$$\vec{v}_t + \vec{v}\times \operatorname{rot}\vec{v} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) = \nu\,\Delta\,\vec{v} + \vec{f}\;\text{ в }\quad Q. \tag{32}$$

После умножения уравнения (32) скалярно на вектор $\vec{v}$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \nu\,\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}.$$

Откуда теми же рассуждениями получим (16) и (17).

Доказательство случаев (i)-(ii) аналогично доказательству леммы 1.2. с той лишь разницей, что вместо уравнения (1) участвует уравнение (32).

Для доказательства случая (iii) уравнение импульса (32) умножим скалярно на $\Delta_1\,\vec{v}$ в $L^2(\Omega)$. Оценим отдельно нелинейный член следующим образом:

$$|(\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v},\,\Delta_1\vec{v})| \le \max_{\Omega}|\vec{v}|\cdot\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le C_7\,\|\Delta_1\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\,, \tag{33}$$

где $C_7 = C_\Omega\,\cdot\delta$.

Таким образом, используя (33), получим

$$\nu\,\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \Big(1 - 2\,C_7\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\Big)\;\|\Delta_1\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}. \tag{34}$$

С подобными рассуждениями, как при получении оценок леммы 1.2., установим из (34) оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2(0,\,T;\,W^{2,\,2}(\Omega))} \le C_8.$$

После этого из равенства, подобного (29), следует оценка

$$\|\vec{v}_t\|_{2,\,Q} \le C_9.$$

Таким образом, лемма 1.3 доказана.

1.3. Теоремы существования. Перейдем теперь к доказательству разрешимости **задач протекания 1,2**. Для этого будем использовать **метод Фаэдо-Галеркина.**

В качестве базиса в гильбертовом пространстве $V^2(\Omega) \equiv W^{2,2}(\Omega)\cap V^1(\Omega)$ возьмем собственные функции оператора Δ_1 с **нестандартными граничными условиями**, которые, как это установлено в ([1], см. лемму 1.5), образуют ортонормированную систему в $V^0(\Omega)$ и являются ортогональными в пространстве $V^1(\Omega)$.

Рассмотрим систему **галеркинских приближений** для 2D-3D системы Навье-Стокса (1). Пусть $\{\vec{w}_j(x),\ j = 1, 2, ...\}$ – полная, линейно независимая система в $V^0(\Omega)$, **галеркинское приближение** для $\vec{v}(x,t)$ построим в следующем виде:

$$\vec{v}_N = \vec{v}_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_{jN}(t)\vec{w}_j(x), \tag{35}$$

где $c_{jN}(t),\ j=1,2,...,N,\ t\in[0,T]$, – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из **галеркинских приближений** для (1):

$$\frac{d}{d\,t}\,c_{kN}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_{iN}\,c_{jN}\,a_{i\,j\,k}+c_{kN}\,\nu\,a_k=f_k(t),\ \ k=1,2,...,N, \tag{36}$$

$a_{i\,j\,k}=(\,(\vec{w}_i,\nabla)\,\vec{w}_j,\,\vec{w}_k)$ в **задаче 1**, $a_{ijk}=(\,\vec{w}_i\times\operatorname{rot}\vec{w}_j,\,\vec{w}_k)$ в **задаче 2**;
$f_k=\left(\vec{f},\,\vec{w}_j\right)$; $a_k=-\lambda_k$, λ_k – собственное число оператора Δ_1, соответствующее собственной функции $\vec{w}_k$. Начальные значения $c_{kN}(0)$ определяются из разложения вектор-функций $\vec{v}_0(x)$ в ряд Фурье:

$$c_{kN}(0)=(\vec{v}_0,\,\vec{w}_k)\,,\ k=1,2,...,N. \tag{37}$$

Сформулируем основные утверждения, справедливость которых установим далее с помощью **метода Фаэдо-Галеркина.**

Теорема 1.1. *Пусть* $\vec{f}(x,t)\in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x)\in V^1(\Omega)$ *и выполнено* (12) *или* (13). *Тогда* ***задача протекания 1*** *имеет единственное решение*

$$\vec{v}(x,t)\in L^2(0,\,T;\,V^2(\Omega))\cap W^{1,\,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega)),\ \nabla p\in L^2(0,\,T;G(\Omega)).$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\vec{f}(x,t)\in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x)\in V^1(\Omega)$. *Тогда в случае* $n=2$, *т.е. в плоско-паралельном движении жидкости,* ***задача протекания 2*** *имеет единственное решение*

$$\vec{v}(x,t)\in L^2(0,\,T;\,V^2(\Omega))\cap W^{1,\,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega)),\ \nabla p\in L^2(Q). \tag{38}$$

В случае $n=3$ **задача 2** однозначно разрешима в классе функций (38) “в малом”, т.е. при наличии одного из условий (13), либо (31).

Прежде всего отметим, что **единственность решений задач 1, 2** в функциональном классе $\vec{v}(x,t)\in L^2(0,\,T;\,W^{2,\,2}(\Omega))\cap W^{1,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega))$ доказывается на основе соотношения, получающегося домножением уравнения для разности $\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{u}$ двух возможных решений на $\vec{u}$ и интегрированием по области Q.

Доказательство существования решения проведем для одного конкретного случая, поскольку для других все рассуждения почти не меняются. Пусть, например, в теореме 1.1 имеет место соотношение (12).

Поскольку все члены в системе (36) зависят от неизвестных c_{iN} гладким образом, то для разрешимости задачи (36), (37) на всем интервале $[0,T]$ достаточно убедиться в априорной ограниченности c_{iN} , $i=1,2,...,N$.

Для этого умножим уравнение для c_{kN} в системе (36) на c_{kN} и просуммируем по k от 1 до N. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}_N\|^2_{V^0(\Omega)}+\nu\,\|\vec{v}_N\|^2_{V^1(\Omega)}+\int\limits_{\Omega}(\,(\vec{v}_N,\,\nabla)\,\vec{v}_N,\,\vec{v}_N)\,dx=\left(\vec{f},\,\vec{v}_N\right)_{2,\,\Omega}. \tag{39}$$

Так как для $\vec{v}_N(0)$ и $\vec{f}$ имеет место неравенство (12), поскольку $\|\vec{v}_N(0)\|_{V^0(\Omega)}\le\|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)}$, то, действуя также как в лемме 1.2, получим оценки (16), (17):

$$\begin{gathered}\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}_N\|_{V^0(\Omega)}=\max_{0\le t\le T}\left[\sum_{i=1}^{N}(c_{iN})^2\right]^{1/2}\le C_{10}\,,\ N=1,2,...,\\ \|\vec{v}_N\|_{L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))}\le C_{11}\,,\ N=1,2,...\end{gathered} \tag{40}$$

Установим, что для приближений $\vec{v}_N$ имеет место оценка (11), равномерная по N. После умножения уравнения для c_{kN} на $\dfrac{dc_{kN}}{dt}$и на $\lambda_k \cdot c_{kN}$, суммируя полученные выражения по k от 1 до N, для $\vec{v}_N$ будем иметь соотношения (19), (20), из которых точно так же, как в лемме 1.2, вытекает оценка

$$\|\partial_t \vec{v}_N\|_{L^2(\Omega)} + \max_{0\le t\le T} \|\vec{v}_N\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}_N\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le C_{12}\,, \tag{41}$$

равномерная по $N = 1, 2, ...$

Из априорных оценок (40), (41) следует, что из последовательности галеркинских приближений $\{\vec{v}_N\}$ можно выделить последовательность, которую ради удобства обозначим попрежнему через $\{\vec{v}_N\}$, такую, что

$$\begin{gathered} \vec{v}_N \to \vec{v} \quad * -\text{слабо в} \quad L^\infty(0, T; V^1(\Omega)), \\ \vec{v}_N \to \vec{v} \quad \text{слабо в} \quad W^{1,2}(0, T; V^0(\Omega)), \\ \vec{v}_N \to \vec{v} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; V^1(\Omega)) \end{gathered} \tag{42}$$

при $N \to \infty$.

Пусть $\vec{\varphi}\,(x,t) \in L^2(0, T; V^1(\Omega))$. Рассмотрим функцию $\vec{\varphi}_S(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{S} (\vec{\varphi}, \vec{w}_i)\, \vec{w}_i = \sum\limits_{i=1}^{S} \alpha_i \vec{w}_i$. Умножим каждое из равенств (36) на соответствующее α_k, считая $N > S$ и $\alpha_j = 0,\ j > S$, результаты сложим по всем k от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. В результате получим

$$(\partial_t \vec{v}_N + (\vec{v}_N, \nabla)\, \vec{v}_N\,, \vec{\varphi}_S) + \nu\, (\vec{v}_N\,, \vec{\varphi}_S)_{L^2(0,T;V^1(\Omega))} = \left(\vec{f}, \vec{\varphi}_S\right)_{2,\,\Omega}. \tag{43}$$

Из соотношений (42) и оценки (41) вытекает, что равенство (43) справедливо для функции $\vec{v}$ и произвольной $\varphi \in L^2(0, T; V^1(\Omega))$.

После применения формулы Гаусса-Остроградского во втором члене равенства (43), будем иметь тождество

$$\left(\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla)\, \vec{v} - \nu\, \Delta \vec{v} - \vec{f}, \vec{\varphi}\right) = 0$$

для любой $\vec{\varphi} \in L^2(0, T; V^1(\Omega))$, а следовательно, и для всех $\varphi \in L^2(0, T; V^0(\Omega))$. Откуда ввиду разложения $L^2(Q) = L^2(0, T; V^0(\Omega)) \oplus L^2(0, T; G(\Omega))$ найдется единственный элемент $\nabla p \in L^2(0, T; G(\Omega))$ такой, что

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla)\, \vec{v} - \nu\, \Delta \vec{v} - \vec{f} = -\nabla p \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Замечание 1.1. *Если область* Ω *такова, что оценка* (18) *не верна, то на основе неравенств* (40) *можно доказать существование слабого решения* **задачи 2** *в классе функций, имеющих конечную энергетическую норму*

$$\|\vec{v}\|_Q \equiv \sup_{0\le t\le T} \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\, \vec{v}\|_{L^2(Q)}\,.$$

Причем в плоском случае $n = 2$ *это решение единственно.*

Замечание 1.2. *Условие* (13) *в теоремах* 1.1, 1.2 *означает, что либо малы* $\left\|\vec{f}\right\|_{L^2(Q)}$ *и* $\|\vec{v}_0\|_{V^1(\Omega)}$, *либо мал интервал существования решения.*

Цитированная литература

1.**Абылкаиров У.У.** //Математический журнал. 2005. Т. 5, № 2 (16). С.5—11.

2. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

Поступила в редакцию 8.07.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 19 – 24*

УДК 004.3

СИНТЕЗ АДАПТИВНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Баймухамедов М.Ф.

Костанайский ГУ им. А.Байтурсынова
458000 г. Костанай ул. Тарана, 118

Рассмотрены принципы проектирования адаптивных автоматизированных систем управления сложными объектами, предложена аналитическая модель объекта управления в матричной форме, приведены алгоритмы проектирования адаптивной автоматизированной обучающей системы.

Классическая схема автоматизированной системы управления (АСУ) включает управляемый объект и управляющую систему, находящиеся в некоторой окружающей среде и взаимодействующие друг с другом за счет управляющих и обратных связей. Учащийся вуза может рассматриваться как управляемый объект, на который преподавателями в течение длительного времени систематически оказываются определенные целенаправленные управляющие воздействия. С формальной точки зрения это означает, что человек как объект управления представляет собой сложную, многопараметрическую, слабодетерминированную систему.

Построение аналитической модели сложного объекта управления (СОУ) затруднено из-за отсутствия или недостатка априорной информации об объекте управления, а также из-за ограниченности и сложности используемого математического аппарата. В связи с этим предлагается путь решения данной проблемы, состоящий в поэтапном решении следующих задач.

1. Отказавшись от попыток построения конкретной содержательной аналитической модели СОУ, разработать абстрактную модель более общего класса (например, матричную информационную).

2. Обучить абстрактную информационную модель путем учета информации о реальном поведении СОУ, поступающей в процессе экспериментальной эксплуатации АСУ; на этом этапе адаптируется и конкретизируется абстрактная модель СОУ, т.е. в ней все более точно отражаются взаимосвязи между входными параметрами и состояниями СОУ.

3. На основе конкретной содержательной информационной модели разработать алгоритмы решения следующих задач АСУ:

— расчет влияния факторов на переход СОУ в различные возможные состояния (обучение, адаптация);

Keywords: *adaptive system, control object, learning system*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

— прогнозирование поведения СОУ при конкретном управляющем воздействии и выработка многофакторного управляющего воздействия (основная задача АСУ);

— выявление факторов, вносящих основной вклад в детерминацию состояния СОУ; контролируемое удаление второстепенных факторов с низкой дифференцирующей способностью, т.е. снижение размерности модели при заданных ограничениях;

— сравнение влияния факторов, сравнение состояний СОУ.

1.Построение модели СОУ.

Модель СОУ должна обеспечивать отражение взаимосвязей между входными и выходными параметрами СОУ и окружающей среды (факторами), с одной стороны, и будущими состояниями СОУ — с другой. Предлагается представить информационную модель СОУ адаптивной АСУ в форме двумерной матрицы, столбцы которой соответствуют возможным будущим конечным состояниям СОУ (в том числе, целевым), а строки — входным параметрам, т.е. факторам.

Для начала работы по конкретизации модели СОУ разрабатывают описательные и классификационные шкалы, необходимые для формализованного описания предметной области. Описательные шкалы описывают признаки прошлых и актуальных состояний среды и объекта управления, а классификационные — все возможные, в том числе целевые, будущие состояния СОУ. Информация о состоянии среды и объекта управления, а также вариантах управляющих воздействий преобразовывается к формальному виду с использованием описательных шкал. Кроме того, экспертами с использованием классификационных шкал устанавливается, к каким результатам на практике приводят те или иные управляющие воздействия на объект управления, находящийся в определенном актуальном состоянии и в данной окружающей среде. В результате получается так называемая "обучающая выборка".

На основе обучающей выборки, содержащей информацию о том, какие факторы действовали, когда СОУ переходил в те или иные состояния, методом прямого счета формируется матрица абсолютных частот, имеющая следующий вид (табл.1).

Таблица 1

Матрица абсолютных частот

Факторы	Состояние СОУ			Сумма
	...	j	...	
...				
i		N_i^j		N_i
...				
Сумма		N^j		N

здесь N_I^J- количество переходов СОУ в j-е состояние при действующем i-ом факторе по данным обучающей выборки.

Матричная информационная модель СОУ адаптивной АСУ может быть представлена в виде матрицы, где элементами матрицы являются частные критерии I_I^J, отражающие влияние i фактора на перевод СОУ в j-е состояние (см. табл.2).

Выражение для расчета количества информации в i-м факторе о переходе СОУ в j-е состояние имеет вид:

$$I_i^j = K * \log_2 \ ((N_i^j N)/(N_i N^j)), \tag{1}$$

где $K * \log_2 \ (W)/Log_2(N)$ — нормировочный коэффициент, определяемый количеством возможных состояний СОУ — W, а также суммарным количеством зарегистрированных случаев действия различных факторов — N.

Таким образом, в соответствии с выражением (1) непосредственно на основе матрицы абсолютных частот (таблица 1) рассчитывается матрица информативностей факторов (таблица 2).

Таблица 2

Матричная информационная модель СОУ адаптивной АСУ

Факторы	Состояния СОУ			Дифференцирующая мощность фактора
		J		
...				
I		$\left\|I_i^j\right\|$		σ_i
...				
Детерминированность состояния СОУ		σ^j		σ

2. Прогнозирование поведения объекта управления при конкретном управляющем воздействии и выработка многофакторного управляющего воздействия.

Предложенная модель позволяет прогнозировать поведение СОУ при воздействии на него целой системы факторов:

$$I^j = f(\overset{\mu}{I_i^j}). \tag{2}$$

Скалярная функция I^j векторного аргумента называется интегральным критерием. Основная проблема состоит в выборе такого аналитического вида интегрального критерия, который обеспечил бы эффективное решение задачи АСУ.

В многокритериальной постановке задача прогнозирования состояния СОУ при оказании на него заданного многофакторного управляющего воздействия I^j сводится к максимизации интегрального критерия:

$$j^* = \arg\max_{j\in J}((\overset{\mu}{I_i^j}, \overset{\mu}{L_i})), \tag{3}$$

где

$\overset{\mu}{I} = \{I_I^j\}$ — профиль $j-$ го состояния СОУ;

$\overset{\mu}{L_i} = \{L_1\}$ — профиль текущего состояния СОУ (массив-локатор), т.е.

$$L_1 = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

т.е. к выбору такого состояния СОУ, для которого интегральный критерий максимален.

Задача принятия решения о выборе наиболее эффективного управляющего воздействия является обратной задачей по отношению к задаче максимизации интегрального критерия, т.е. вместо того, чтобы по набору факторов прогнозировать состояние СОУ, необходимо, наоборот, по заданному (целевому) состоянию СОУ определить такой набор факторов, который с наибольшей эффективностью перевел бы объект управления в это состояние.

Если задано некоторое определенное целевое состояние, то выбор управляющих воздействий для фактического применения производится из списка, в котором все возможные управляющие воздействия расположены в порядке убывания их влияния на перевод СОУ в данное целевое состояние. Такой список называется информационным портретом состояния СОУ.

Управляющие воздействия могут быть объединены в группы, внутри каждой из которых они альтернативны (несовместны), а между группами — нет (совместны). В этом случае внутри каждой группы выбирают одно из доступных управляющих воздействий с максимальным влиянием. В качестве интегрального критерия принята следующая зависимость:

$$I^j = \frac{1}{\sigma_j^2 \sigma_i^2 A} \sum_{i=1}^{A} \left(I_i^j - \overset{\rho}{I^j} \right) \left(L_i - \overset{\rho}{L} \right), \tag{4}$$

где

$\overset{\rho}{I^j} = \frac{1}{A} \sum\limits_{i=1}^{A} I_i^j$ — средняя информативность по профилю класса,

$\overset{\rho}{L} = \frac{1}{A} \sum\limits_{i=1}^{A} I_i$ — среднее по профилю распознаваемого объекта,

$\sigma_j^2 = \frac{1}{A-1} \sum\limits_{i=1}^{A} \left(I_i^j - \overset{\rho}{I^j} \right)^2$ — среднеквадратичное отклонение информативностей профиля класса,

$\sigma_j^2 = \frac{1}{A-1} \sum\limits_{i=1}^{A} \left(I_i - \overset{\rho}{I} \right)^2$ — среднеквадратичное отклонение по профилю распознаваемого объекта.

Результат прогнозирования поведения СОУ, описанного данной системой факторов, представляет собой список состояний, в котором они расположены в порядке убывания суммарного количества информации о переходе СОУ в каждое из них.

3. Особенности адаптивной обучающей системы (АОС).

Под адаптивной обучающей системой будем понимать автоматизированную обучающую систему, адаптированную к индивидуальным характеристикам обучаемого и предмету обучения [1].

Все знания, сохраняемые в АОС, условно разобьем на две группы: знания о предметной области и управляющие воздействия, определяющие последовательность предъявления фрагментов учебной информации.

Знания о предметной области наиболее просто укладываются в семантическую сеть, где каждый узел — это фрагмент предметной области, обладающий полнотой и относительной независимостью от других фрагментов. Дуги, связывающие узлы в сети, определяют зависимость между двумя узлами. В качестве веса дуги введем понятие значимости предшествующего узла для успешного изучения материала последующего узла.

Очевидно, что в общем случае все узлы такой сети не находятся в линейном порядке. Для успешного изучения материала необходимо изучить все фрагменты предметной области, т.е. пройти через все узлы. Причем в каждый момент времени изучается ровно один фрагмент. Для этого последовательность узлов в сети необходимо преобразовать в линейный порядок так, чтобы отношения между отдельными узлами в сети не были нарушены. Для этого следует воспользоваться механизмом топологической сортировки, определенным на частично упорядоченном множестве [2].

Управляющие воздействия должны учитывать состояние обучаемого для того, чтобы достигнуть максимальной степени усвоения учебного материала при использовании АОС.

Таким образом, на первый план выходят проблемы выбора существенных характеристик обучаемого и их однозначного определения в ходе работы АОС.

Все характеристики обучаемого условно разделим на две категории: психологические факторы и учебные факторы.

К психологическим факторам, влияющим на обучение, отнесем следующие [3]:

— основные свойства внимания, тип нервной системы;

— типы темперамента (сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик);

— особенности памяти, мышления;

— уровень интеллектуальных способностей;

— характер и степень мотивации к изучаемому предмету.

Особенности структуры индивидуального знания в конкретной предметной области соответствуют общему уровню познавательного развития обучающегося и его индивидуальным психологическим характеристикам, которые практически никогда не бывают одинаковыми у различных обучающихся.

Такие факторы следует отнести к постоянным факторам, воздействующим на обучаемого. Они не меняются в течение работы с АОС. Определение этих характеристик следует провести до начала процесса обучения и сохранять для каждого обучаемого с целью повторного использования. Данные характеристики определяются с помощью психологических тестов.

К учебным факторам будем относить сведения о степени усвоения отдельных фрагментов информации. Данные факторы не являются постоянными, изменяются в процессе работы с АОС. Для выявления данных характеристик необходимо спроектировать систему диагностики знаний, и проводить такую диагностику после изучения каждого фрагмента предметной области.

4. Алгоритм проектирования АОС.

Сформулируем общий подход к проектированию АОС на основе изложенных выше принципов по созданию адаптивных АСУ сложными объектами.

1. Разработать семантическую модель предметной области:

— установить фрагменты предметной области;

— установить отношения зависимостей между ними;

— определить степень значимости каждого исходящего узла для каждого узла в отношениях.

2. Преобразовать семантическую модель в линейный список изучаемых фрагментов, установив тем самым порядок их изучения в АОС.

3. Разработать определительные шкалы для факторов, характеризующих обучаемого как сложный объект управления.

3.1. Шкалы для определения психологических характеристик действуют на протяжении работы всей АОС.

К примеру, шкала "тип темперамента" имеет четыре значения: сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик. Шкала "тип восприятия" имеет три значения: визуалист, аудиолист, кинестетик.

3.2. Шкалы для определения факторов предыстории действуют в рамках изучения одного конкретного узла предметной области. В них отображается информация о степени овладения обучаемым материалом тех узлов, которые находятся в отношении с текущим узлом и являются по отношению к нему определяющими. Каждая шкала определяет ровно один ведущий узел. Значения такой шкалы могут быть следующими: "неудовлетворительно", "удовлетворительно", "хорошо", "отлично".

3.3. Шкалы учебной информации. Значения этих шкал — альтернативные варианты представления информации по текущему фрагменту.

4. Построить обучающие выборки.

4.1. Для каждого узла строится своя обучающая выборка, где в качестве факторов берутся значения всех трех типов шкал (3.1—3.3), а в качестве состояний берется классификационная шкала, определяющая уровень усвоения текущего узла (от "неудовлетворительно" до "отлично").

4.2. Отдельно строится обучающая выборка, охватывающая весь процесс изучения заданной предметной области. В качестве определительных шкал выступают шкалы типа 3.2, разработанные для всех узлов предметной области. Особенностью данной обучающей выборки является то, что некоторое состояние обученности в одном случае является состоянием, т.е. результатом некоторого воздействия на обучаемого системой, а в другом случае – фактором, влияющим на следующее состояние обучаемого. Очевидно, что каждое текущее состояние – это некоторый итог обучения по всем предыдущим узлам. Таким образом, целевое состояние – это достижение последнего узла в линейной последовательности узлов предметной области. И цель АОС – достижение максимального уровня обученности в этом узле.

5. На основе обучающей выборки согласно формуле (1) строится матричная информационная модель (таблица 2). На основе обучающих выборок (4.1) аналогично строятся матричные информационные модели для каждого узла. Выделение моделей по отдельным узлам позволяет значительно сократить размер основной матричной модели управления обучением по всей предметной области.

Основная матричная модель в результате будет построена таким образом, что обеспечит последовательный переход от начального к конечному узлам. А при выборе каждого узла частная модель этого узла позволит выбрать альтернативное представление информации таким образом, чтобы получить максимальный результат.

6. Процесс управления сведется к тому, что выбрав очередной узел, АОС будет выбирать согласно формуле (4) такие представления изучаемого узла из всех имеющихся, которые приведут к максимальной степени обученности для каждого узла.

7. Каждый сеанс обучения пополняет обучающие выборки. После накопления большого количества наблюдений возможно повторение шага 5, где модели перестраиваются. Тем самым достигается адаптация самой модели.

8. Измененные на основе экспериментальных данных модели подвергаются анализу. Из модели могут быть исключены некоторые факторы, которые не влияют на процесс выбора альтернативных решений.

Цитированная литература

1. **Баймухамедов М.Ф.** Интеллектуализация компьютерных технологий обучения. Алматы, 1993.

2. **Вирт Н.** Алгоритмы + структуры данных = программы- М., 1994.

3. **Кречетников К.Г.** //Материалы сетевой конф. “Информатизационные технологии в науке и образовании.” - 2002.

Поступила в редакцию 2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 25 – 34*

УДК 519.624

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. А.Бакирова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Методом параметризации исследуется двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений. Установлены коэффициентные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=0}^{m} K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{m-1} < \theta_m = T, \qquad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \qquad \|x\| = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|, \qquad (2)$$

где $(n\times n)$–матрицы $A(t)$, $K_i(t)$ и n–вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B, $C-$ $(n\times n)$–матрицы. Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения встречаются в различных задачах приложения [1]. Такие уравнения также возникают при аппроксимации интегро-дифференциального уравнения. Целью работы является нахождение необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1), (2) в терминах исходных данных: $A(t)$, $K_i(t)$, B, C, T. Для этой цели к задаче (1), (2) применяется метод параметризации [2].

Пусть $h_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $j = \overline{1,m}$. Возьмем число $l \in \mathbb{N}$ и по нему произведем разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{ml} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_{ml} = \theta_m = T$, $t_{il} = \theta_i$, $i = \overline{0,m}$, $\frac{h_1}{l} = t_s - t_{s-1}$, $s = \overline{1,l}$, $\frac{h_2}{l} = t_s - t_{s-1}$, $s = \overline{l+1,2l}$, ..., $\frac{h_m}{l} = t_s - t_{s-1}$, $s = \overline{(m-1)l+1,ml}$. Через $x_r(t)$ обозначим сужение

Keywords: *loaded ordinary differential equation, two-point boundary-value problem, unique solvability, parametrization method*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1}, t_r)$. При этом задача (1), (2) сведется к многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{i=0}^{m-1} K_i(t)x_{il+1}(\theta_i) + K_m(t)\lim_{t\to T-0} x_{ml}(t) + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, ml}, \quad (3)$$

$$Bx_1(0) + C\lim_{t\to T-0} x_{ml}(t) = d, \quad (4)$$

$$\lim_{t\to t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \qquad s = \overline{1, ml-1}. \quad (5)$$

Здесь (5) — условия сшивания решения во внутренних точках разбиения. Если $x(t)$ — решение задачи (1), (2), то система его сужений $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{ml}(t))'$ является решением задачи (3)—(5). И наоборот, если система вектор-функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), ..., \widetilde{x}_{ml}(t))'$– решение задачи (3)—(5), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, ml}$, $\widetilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \widetilde{x}_{ml}(t)$, будет решением исходной задачи. Введем обозначения $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ и на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, ml}$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (3)—(5) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + \sum_{i=0}^{m-1} K_i(t)\lambda_{il+1} + K_m(t)\lambda_{ml} + K_m(t)\lim_{t\to T-0} u_{ml}(t) + f(t), \quad (6)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, ml},$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{ml} + C\lim_{t\to T-0} u_{ml}(t) = d, \quad (7)$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, ml-1}. \quad (8)$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{ml})' \in R^{nml}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{ml}(t))'$,– решение задачи (6)—(8), то система функций $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), ..., \lambda_{ml} + u_{ml}(t))'$ будет решением задачи (3)—(5). И наоборот, если $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), ..., \widetilde{x}_{ml}(t))$– решение (3)—(5), то пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{x}_1(0), \widetilde{x}_2(t_1), ..., \widetilde{x}_{ml}(t_{ml-1}))'$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{x}_1(t) - \widetilde{x}_1(0), \widetilde{x}_2(t) - \widetilde{x}_2(t_1), ..., \widetilde{x}_{ml}(t) - \widetilde{x}_{ml}(t_{ml-1}))'$, будет решением задачи (6)—(8). Появление начального условия $u_r(t_{r-1}) = 0$, $r = \overline{1, ml}$, позволяет при фиксированных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{ml})'$ определить функции $u_r(t)$ из интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau)\lambda_{il+1}d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} K_m(\tau)\lambda_{ml}d\tau +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} K_m(\tau)\lim_{t\to T-0} u_{ml}(t)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, ml}. \quad (9)$$

В уравнении (9) при $r = ml$ вместо $u_{ml}(\tau)$ подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν раз, затем переходя к пределу при $t \to T - 0$, имеем

$$\lim_{t\to T-0} u_{ml}(t) = \int_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)... \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_{ml}(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1 + \Big[\int_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)d\tau_1 + ... + \int_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)...$$

$$\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1\Big]\lambda_{ml} + \Big[\int\limits_{t_{ml-1}}^{T} \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1\Big]\times$$

$$\times\lambda_{il+1} + \Big[\int\limits_{t_{ml-1}}^{T} K_m(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1\Big]\lambda_{ml} +$$

$$+ \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} f(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1 +$$

$$+\Big[\int\limits_{t_{ml-1}}^{T} K_m(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1\Big] \lim_{t\to T-0} u_{ml}(t).$$

Предполагая обратимость матрицы

$$P_\nu(l) = I - \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} K_m(\tau_1)d\tau_1 - \ldots - \int\limits_{t_{ml-1}}^{T} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1,$$

здесь $I-$ единичная матрица размерности $(n\times n)$, получим представление предельного значения функции $u_{ml}(t)$ в следующем виде
$\lim\limits_{t\to T-0} u_{ml}(t) =$

$$= [P_\nu(l)]^{-1}\Big[G_{\nu ml}(u_{ml},T) + D_{\nu ml}(T)\lambda_{ml} + \sum_{i=0}^{m-1} H^i_{\nu ml}(T)\lambda_{il+1} + H^m_{\nu ml}(T)\lambda_{ml} + F_{\nu ml}(T)\Big]. \quad (10)$$

Введем обозначения

$$D_{\nu r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1,$$

$$H^i_{\nu r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} K_i(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_i(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad i = \overline{0,m},$$

$$F_{\nu r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1,ml}.$$

Снова в уравнении (9) вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν раз, с учетом (10) получим представление функции $u_r(t)$ вида:

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + \sum_{i=0}^{m-1} H^i_{\nu r}(t)\lambda_{il+1} + H^m_{\nu r}(t)\lambda_{ml} + F_{\nu r}(t) + G_{\nu r}(u,t) + H^m_{\nu r}(t)\times$$

$$\times[P_\nu(l)]^{-1}\Big[G_{\nu ml}(u_{ml},T)+D_{\nu ml}(T)\lambda_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{\nu ml}(T)\lambda_{il+1}+H^m_{\nu ml}(T)\lambda_{ml}+F_{\nu ml}(T)\Big]. \qquad (11)$$

Переходя в правой части (11) к пределу при $t\to t_r-0$, подставив соответствующие значения в условия (7),(8) и умножив (7) на $\frac{h_m}{l}$, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{ml})'$:

$$\frac{h_m}{l}B\lambda_1+\frac{h_m}{l}C\Big[I+D_{\nu ml}(T)+H^m_{\nu ml}(T)+H^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}D_{\nu ml}(T)+H^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}H_{\nu ml}(T)\Big]\times$$

$$\times\lambda_{ml}+\frac{h_m}{l}C\Big[I+H^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}\Big]\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{\nu ml}(T)\lambda_{il+1}=\frac{h_m}{l}\Big[d-CF_{\nu ml}(T)-$$

$$-CH^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}F_{\nu ml}(T)-CG_{\nu ml}(u_{ml},T)-CH^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}G_{\nu ml}(u_{ml},T)\Big], \qquad (12)$$

$$\Big[I+D_{\nu s}(t_s)\Big]\lambda_s+\Big[H^m_{\nu s}(t_s)+H^m_{\nu s}(t_s)[P_\nu(l)]^{-1}D_{\nu ml}(T)+H^m_{\nu s}(t_s)[P_\nu(l)]^{-1}H^m_{\nu ml}(T)\Big]\lambda_{ml}+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\Big[H_{\nu s}(t_s)+H^m_{\nu s}(t_s)[P_\nu(l)]^{-1}H^i_{\nu ml}(T)\Big]\lambda_{il+1}-\lambda_{s+1}=-F_{\nu s}(t_s)-H^m_{\nu s}(t_s)\times$$

$$\times[P_\nu(l)]^{-1}F_{\nu ml}(T)-G_{\nu s}(u_s,t_s)-H^m_{\nu s}(t_s)[P_\nu(l)]^{-1}G_{\nu ml}(u_{ml},T), \quad s=\overline{1,ml-1}. \qquad (13)$$

Обозначив матрицу левой части систем уравнений (12), (13) через $Q_\nu(l)$, запишем ее в виде

$$Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)-G_\nu(u,l), \quad \lambda\in R^{nml}, \qquad (14)$$

где $$F_\nu(l)=\Big(-\frac{h_m}{l}d+\frac{h_m}{l}CF_{\nu ml}(T)+\frac{h_m}{l}CH^m_{\nu ml}[P_\nu(l)]^{-1}F_{\nu ml}(T),F_{\nu 1}(t_1)+H^m_{\nu 1}(t_1)\times$$

$$\times[P_\nu(l)]^{-1}F_{\nu ml}(T),...,F_{\nu ml-1}(t_{ml-1})+H^m_{\nu ml-1}(t_{ml-1})[P_\nu(l)]^{-1}F_{\nu ml}(T)\Big)',$$

$$G_\nu(u,l)=\Big(\frac{h_m}{l}CG_{\nu ml}(u_{ml},T)+\frac{h_m}{l}CH^m_{\nu ml}(T)[P_\nu(l)]^{-1}G_{\nu ml}(u_{ml},T),G_{\nu 1}(u_1,t_1)+H^m_{\nu 1}(t_1)\times$$

$$\times[P_\nu(l)]^{-1}G_{\nu ml}(u_{ml},T),...,G_{\nu ml-1}(u_{ml-1},t_{ml-1})+H^m_{\nu ml-1}(t_{ml-1})[P_\nu(l)]^{-1}G_{\nu ml}(u_{ml},T)\Big)'.$$

Итак, для нахождения неизвестных пар $(\lambda,u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (9), (14). Пара $(\lambda,u[t])$ — решение задачи (6)—(8), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $\quad k=0,1,2,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму.

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранном ν матрица $Q_\nu(l)$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...,\lambda_{ml}^{(0)})'\in R^{nml}$ определим из уравнения $Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)}\in R^{nml}$ и решая задачи Коши (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[t_{r-1},t_r)$, находим $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,ml}$.

1-шаг. а) Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$ в правую часть (14), из уравнения $Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)-$ $-G_\nu(u^{(0)},l)$ определим $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},...,\lambda_{ml}^{(1)})'\in R^{nml}$.

б) На отрезках $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,ml}$, решая задачи Коши (6) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$. И т.д. Продолжая процесс, на **k−ом шаге** получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,ml}$, $k=0,1,2,...$

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$; через α, β обозначим числа, ограничивающие сверху нормы матриц $A(t)$, $K_i(t)$ на $[0,T]$. Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, существование и единственность решения задачи (1), (2), а также его оценку устанавливает

Теорема 1. *Пусть при некоторых $l\in\mathbb{N}$ и $\nu\in\mathbb{N}$ матрицы $P_\nu(l):R^n\to R^n$, $Q_\nu(l):R^{nml}\to R^{nml}$ обратимы и выполняются неравенства:*

$$а)\quad \mu_\nu(T)=\|[P_\nu(l)]^{-1}\|e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^\nu\frac{1}{\nu!}\beta<1,\qquad б)\quad \|[Q_\nu(l)]^{-1}\|\le\gamma_\nu(l),$$

$$в)\quad q_\nu(l)=\gamma_\nu(l)\max\left(1,\frac{h_m}{l}\|C\|\right)\left(1+\beta\frac{\overline{h}}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha\overline{h}}{l})^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\right)\times$$

$$\times\left\{e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}-\sum_{j=0}^{\nu}(\frac{\alpha\overline{h}}{l})^j\frac{1}{j!}+(m+1)\beta\frac{\overline{h}}{l}\left(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}-\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha\overline{h}}{l})^j\frac{1}{j!}\right)+\beta\frac{\overline{h}}{l}\left(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}-\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha\overline{h}}{l})^j\frac{1}{j!}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\left(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\right)\right\}<1,$$

где $\overline{h}=\max\limits_{j=\overline{1,m}}h_j,\quad \sigma(T)=\sum\limits_{j=1}^{\nu}(\frac{\alpha h_m}{l})^j\frac{1}{j!}+(m+1)\beta\frac{h_m}{l}\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha h_m}{l})^j\frac{1}{j!}.$

Тогда двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_1\le M_\nu(l)\max(\|f\|_1,\|d\|),\tag{15}$$

где
$$M_\nu(l)=\left\{\gamma_\nu(l)\left[e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}-1+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}\beta\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\left(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\right)\right]\max\left[1+\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}+\|C\|\beta\frac{h_m}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\times\right.$$

$$\times\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l},\max_{i=\overline{1,ml-1}}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_i}{l}\right)^j\frac{1}{j!}+\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_i}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha h_m}{l})^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}\right)\right]+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\beta}{1-\mu_\nu(T)}[e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}]\right\}\times$$

$$\times\frac{\overline{h}}{l}\left\{\gamma_\nu(l)\left[e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}\beta\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\left(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\right)\right]\max(1,\frac{h_m}{l}\|C\|)\frac{1}{1-q_\nu(l)}\left(1+\frac{\overline{h}}{l}\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\right)\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\right)^\nu\frac{1}{\nu!}+1\right\}+\gamma_\nu(l)\max\left\{1+\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}+\|C\|\beta\frac{h_m}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l},\max_{i=\overline{1,ml-1}}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_i}{l}\right)^j\frac{1}{j!}+\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_i}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}\right)\right\}\frac{\overline{h}}{l}.$$

Доказательство. При предположениях теоремы из нулевого шага алгоритма определим и оценим $\lambda^{(0)}$:

$$||\lambda^{(0)}|| = \max_{r=\overline{1,ml}} \|\lambda_r^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(l)\|F_\nu(l)\| \leq \gamma_\nu(l)\frac{\overline{h}}{l}\times$$

$$\times\max\biggl\{1+\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_m}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}+\|C\|\beta\frac{h_m}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_m}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_m}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l},$$

$$\max_{i=\overline{1,ml-1}}\biggl[\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_i}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}+\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_i}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\biggl(\frac{\alpha h_m}{l}\biggr)^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}\biggr]\biggr\}\max(\|f\|_1,\|d\|). \quad (16)$$

Используя неравенство Гронуолла -Беллмана, получим

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \leq [e^{\alpha(t-t_{r-1})}-1+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})(m+1)\beta]\|\lambda^{(0)}\|+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})\beta\times$$

$$\times\|\lim_{t\to T-0}u_{ml}^{(0)}(t)\|+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t)\|, \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,ml},$$

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \leq \biggl[e^{\alpha(t-t_{r-1})}-1+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})(m+1)\beta+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})\times$$

$$\times\frac{\beta}{1-\mu_\nu(T)}\bigl(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+e^{\alpha h_m}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\bigr)\biggr]\|\lambda^{(0)}\|+$$

$$+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})\biggl[\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t)\|+\frac{\beta}{1-\mu_\nu(T)}\biggl(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\sup_{t\in[t_{ml-1},t_{ml})}\|f(t)\|+$$

$$+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha h_m}{l})^j\frac{1}{j!}\frac{h_m}{l}\sup_{t\in[t_{ml-1},t_{ml})}\|f(t)\|\biggr)\biggr], \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,ml}. \quad (17)$$

По первому шагу алгоритма определим $\lambda^{(1)}$ и оценим норму разности $\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}$:

$$\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(l)\|G_\nu(u^{(0)},l)\| \leq \gamma_\nu(l)\times$$

$$\times\max(1,\frac{h_m}{l}\|C\|)\biggl[1+\frac{\overline{h}}{l}\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha\overline{h}}{l})^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\biggr]\biggl(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\biggr)^\nu\frac{1}{\nu!}\|u^{(0)}\|_2, \quad (18)$$

где $\|u^{(0)}\|_2=\max_r\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|u_r^{(0)}(t)\|, \quad r=\overline{1,ml}.$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность системы пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,ml}$, $k=1,2,...$ Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, оцениваем разность решений задач Коши через разность параметров:

$$\Bigl\|u_r^{(k)}(t)-u_r^{(k-1)}(t)\Bigr\| \leq \biggl\{e^{\alpha(t-t_{r-1})}-1+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})(m+1)\beta+e^{\alpha(t-t_{r-1})}(t-t_{r-1})\beta\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\times$$

$$\times\biggl[e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\biggr]\biggr\}\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\|. \quad (19)$$

Из уравнения (14) оценим разность параметров $\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}$:

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\| \leq \gamma_\nu(l)\|G_\nu(u^{(k)},l)-G_\nu(u^{(k-1)},l)\| \leq \gamma_\nu(l)\max\biggl(1,\frac{h_m}{l}\|C\|\biggr)\times$$

$$\times\Big(1+\beta\frac{\overline{h}}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l]^{-1}\|\Big)\max_{r=\overline{1,ml}}\Big\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\alpha...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\alpha\|u_r^{(k)}(\tau_\nu)-u_r^{(k-1)}(\tau_{\nu-1})\|d\tau_\nu...d\tau_1\Big\}.$$

Вместо $\Big\|u_r^{(k)}(\tau_\nu)-u_r^{(k-1)}(\tau_{\nu-1})\Big\|$ подставляя правую часть неравенства (19) и вычисляя повторные интегралы, получим

$$\|\lambda^{(k+1)}-\lambda^{(k)}\|\le q_\nu(l)\big\|\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\big\|,\quad k=1,2,... \tag{20}$$

Так как $q_\nu(l)<1$, то из неравенств (20),(19) следует сходимость последовательности $\lambda_r^{(k)}$ к λ_r^* и равномерная на $[t_{r-1},t_r)$ сходимость функции $u_r^{(k)}(t)$ к $u_r^*(t)$, $r=\overline{1,ml}$, при $k\to\infty$, а также справедливость оценок:

$$\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\|\le\gamma_\nu(l)\frac{[q_\nu(l)]^k}{1-q_\nu(l)}\max\big(1,\frac{h_m}{l}\|C\|\big)\Big(1+\frac{\overline{h}}{l}\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\Big)\Big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\Big)^\nu\frac{1}{\nu!}\|u^{(0)}\|_2,$$

$$\|u_r^*(t)-u_r^{(k)}(t)\|\le\Big\{e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}-1+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}}\frac{\overline{h}}{l}\beta\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\times$$

$$\times\Big[e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-1+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta+e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\sigma(T)\Big]\Big\}\|\lambda^*-\lambda^{(k)}\|.$$

Используя эти неравенства при $k=0$ и учитывая установленные оценки (16), (17) и равенства $x^*(t)=\lambda_r^*+u_r^*(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,ml}$, $x^*(T)=\lambda_{ml}^*+\lim\limits_{t\to T-0}u_{ml}^*(t)$, получим (15). Единственность решения задачи (1), (2) доказывается методом от противного. Теорема 1 доказана.

Чтобы доказать необходимость условий теоремы 1 для однозначной разрешимости задачи (1), (2), воспользуемся следующим утверждением, устанавливающим взаимосвязь между значениями точного решения задачи (1), (2) в точках разбиения и решением уравнения, составленного по данным задачи (1), (2).

Лемма 1. *Если матрица $P_*(l)=\lim\limits_{\nu\to\infty}P_\nu(l)$ обратима и функция $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_{ml}^*)$ с компонентами $\lambda_r^*=x^*(t_{r-1})$, $r=\overline{1,ml}$, удовлетворяет уравнению*

$$\widetilde{H}^{-1}Q_*(l)\lambda^*=-F_*(f,d,l), \tag{21}$$

где $\widetilde{H}=\frac{1}{l}diag\Big(h_mI,\underbrace{h_1I,...,h_1I}_{l},\underbrace{h_2I,...,h_2I}_{l},...,\underbrace{h_{m-1}I,\ldots,h_{m-1}I}_{l},\underbrace{h_mI,\ldots,h_mI}_{l-1}\Big),$

$$Q_*(l)=\lim_{\nu\to\infty}Q_\nu(l),\qquad F_*(f,d,l)=\widetilde{H}^{-1}\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(l).$$

И наоборот, если матрица $P_*(l)$ обратима и вектор $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_{ml})$ удовлетворяет уравнению (21), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,ml}$, $\widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_{ml}+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{u}_{ml}(t)$, где $\widetilde{u}_r(t)$ – решение задачи Коши (6) при $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r$, будет решением задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2). Тогда в силу эквивалентности задач (1), (2) и (6)—(8) пара $(\lambda^*,u^*[t])$, где $\lambda^*=(x^*(0),x^*(t_1),...,x^*(t_{ml-1}))$, $u^*[t]=(x^*(t)-x^*(0),x^*(t)-$

$-x^*(t_1),\ldots,x^*(t)-x^*(t_{ml-1})),$ – решение задачи с параметрами (6)—(8). По предположению матрица $P_*(l)$ обратима и $\|[P_*(l)]^{-1}\|\le p_*$. Взяв $\nu_1\in\mathbb{N}$, удовлетворяющим неравенству

$$p_*\|P_*(l)-P_\nu(l)\|\le p_*\beta\frac{h_m}{l}\left(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-\sum_{j=0}^{\nu-1}\Big(\frac{\alpha h_m}{l}\Big)^j\frac{1}{j!}\right)<\frac{1}{2},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [3, с.142] получим обратимость матрицы $P_\nu(l)$ и $\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\le 2p_*$ для всех $\nu\ge\nu_1$. Тогда для $\nu\ge\nu_1$ имеют место равенства

$$u_r^*(t)=D_{\nu r}(t)\lambda_r^*+\sum_{i=0}^{m-1}H_{\nu r}^i(t)\lambda_{il+1}^*+H_{\nu r}^m(t)\lambda_{ml}^*+F_{\nu r}(t)+G_{\nu r}(u^*,t)+H_{\nu r}^m(t)\times$$

$$\times[P_\nu(l)]^{-1}\left[G_{\nu ml}(u^*,T)+D_{\nu ml}(T)\lambda_{ml}^*+\sum_{i=0}^{m-1}H_{\nu ml}^i(T)\lambda_{il+1}^*+H_{\nu ml}^m(T)\lambda_{ml}^*+F_{\nu ml}(T)\right],\qquad(22)$$

$$Q_\nu(l)\lambda^*=-F_\nu(l)-G_\nu(u^*,l).\qquad(23)$$

Так как последовательность функциональных матриц $D_{\nu r}(t)$, $H_{\nu r}(t)$ и вектор-функции $F_{\nu r}(t)$ равномерно сходятся на $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,ml}$, к $D_{*r}(t)$, $H_{*r}(t)$, $F_{*r}(t)$ соответственно при $\nu\to\infty$ и $G_{\nu r}(u^*,t)$ в силу оценки

$$\|G_{\nu r}(u^*,t)\|\le\max\Big(1,\frac{h_m}{l}\|C\|\Big)\left(1+\frac{\overline{h}}{l}\beta\sum_{j=0}^{\nu-1}\Big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\Big)^j\frac{1}{j!}\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\right)\left(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\right)^\nu\frac{1}{\nu!}\|u^{(0)}\|_2$$

на $[t_{r-1},t_r)$ равномерно стремится к нулю, то переходя к пределу при $\nu\to\infty$ в (22),(23) и умножая обе части (23) на $\widetilde{H}^{-1}$, получим

$$u_r^*(t)=D_{*r}(t)\lambda_r^*+\sum_{i=0}^{m-1}H_{*r}^i(t)\lambda_{il+1}^*+H_{*r}^m(t)\lambda_{ml}^*+F_{*r}(t)+H_{*r}^m(t)\times$$

$$\times[P_*(l)]^{-1}\left[D_{*ml}(T)\lambda_{ml}^*+\sum_{i=0}^{m-1}H_{*ml}^i(T)\lambda_{il+1}^*+H_{*ml}^m(T)\lambda_{ml}^*+F_{*ml}(T)\right],\qquad(24)$$

$$\widetilde{H}^{-1}Q_*(l)\lambda^*=-F_*(f,d,l),\qquad(25)$$

т.е. $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{ml}^*)$ удовлетворяет уравнению (21).
Теперь пусть $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_{ml})\in R^{nml}$ – решение системы уравнений (21), т.е.

$$B\widetilde{\lambda}_1+C\left[I+D_{*ml}(T)+H_{*ml}^m(T)+H_{*ml}^m(T)[P_*(l)]^{-1}(D_{*ml}(T)+H_{*ml}^m(T))\right]\widetilde{\lambda}_{ml}+$$

$$+C\left[I+H_{*ml}^m(T)[P_*(l)]^{-1}\right]\sum_{i=0}^{m-1}H_{*ml}^i(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}=d-CF_{*ml}(T)\left[I+H_{*ml}^m(T)[P_*(l)]^{-1}\right],\qquad(26)$$

$$\frac{1}{t_s-t_{s-1}}[I+D_{*s}(t_s)]\widetilde{\lambda}_s+\frac{1}{t_s-t_{s-1}}\sum_{i=0}^{m-1}H_{*s}^i(t_s)\widetilde{\lambda}_{il+1}+\frac{1}{t_s-t_{s-1}}H_{*s}^m(t_s)\widetilde{\lambda}_{ml}+$$

$$+\frac{1}{t_s-t_{s-1}}H_{*s}^m(t_s)[P_*(l)]^{-1}\left[D_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H_{*ml}^i(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H_{*ml}^m(T)\widetilde{\lambda}_{ml}\right]-$$

$$-\frac{1}{t_s-t_{s-1}}\widetilde{\lambda}_{s+1}=-\frac{1}{t_s-t_{s-1}}F_{*s}(t_s)-\frac{1}{t_s-t_{s-1}}H^m_{*s}(t_s)[P_*(l)]^{-1}F_{*ml}(T),\quad s=\overline{1,ml-1}. \quad (27)$$

Так как $\widetilde{u}_r(t)$ — решение задачи Коши (6) при $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,ml}$, и согласно (24) представимо в виде

$$\widetilde{u}_r(t)=D_{*r}(t)\widetilde{\lambda}_r+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*r}(t)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*r}(t)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*r}(t)+H^m_{*r}(t)[P_*(l)]^{-1}\times$$
$$\times\Big[D_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*ml}(T)\Big], \quad (28)$$

то достаточно доказать выполнение условий (7), (8). Умножив (27) на t_s-t_{s-1}, $s=\overline{1,ml-1}$, перепишем (26), (27) в следующем виде:

$$B\widetilde{\lambda}_1+C\widetilde{\lambda}_{ml}+C\Big[D_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*ml}(T)+$$
$$+H^m_{*ml}(T)[P_*(l)]^{-1}\Big(D_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*ml}(T)\Big)\Big]=d,$$

$$\widetilde{\lambda}_s+\Big[D_{*s}(t_s)\widetilde{\lambda}_s+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*s}(t_s)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*s}(t_s)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*s}(t_s)+H^m_{*s}(t_s)[P_*(l)]^{-1}\times$$
$$\times\Big(D_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+\sum_{i=0}^{m-1}H^i_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{il+1}+H^m_{*ml}(T)\widetilde{\lambda}_{ml}+F_{*ml}(T)\Big)\Big]=\widetilde{\lambda}_{s+1},\quad s=\overline{1,ml-1}.$$

Отсюда в силу равенства (28) выражения, стоящие в квадратных скобках, равны $\lim\limits_{t\to t_r-0}\widetilde{u}_r(t)$, $r=\overline{1,ml}$. Поэтому пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}_r[t])$ удовлетворяет условиям (7), (8). Лемма доказана.

Теорема 2. *Если матрица $P_*(l)$ обратима, то краевая задача (1),(2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $l\in\mathbb{N}$ существует $\nu\in\mathbb{N}$, при котором матрицы $P_\nu(l)$, $Q_\nu(l)$ обратимы и выполняются неравенства а), б), в) теоремы 1.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть $\|[P_*(l)]^{-1}\|\le p_*$. Выбрав ν_1, удовлетворяющим неравенствам

$$p_*\|P_*(l)-P_\nu(l)\|\le p_*\frac{h_m}{l}\beta\Big(e^{\frac{\alpha h_m}{l}}-\sum_{j=0}^{\nu-1}(\frac{\alpha h_m}{l})^j\frac{1}{j!}\Big)<\frac{1}{2},$$

$$\mu_\nu(T)=2p_*e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\Big(\frac{\alpha h_m}{l}\Big)^\nu\frac{1}{\nu!}\beta<1,$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы $P_\nu(l)$ и справедливость неравенств $\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\le 2p_*$, $\mu_\nu(T)<1$ для всех $\nu\ge\nu_1$. Таким образом, неравенство а) теоремы 1 выполняется при всех $\nu\ge\nu_1$. Рассмотрим матрицу $Q_*(l)$ и докажем ее обратимость. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q_*(l)\lambda=0$ имеет только нулевое решение. Допустим противное и предположим, что найдется ненулевой вектор $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,...,\widetilde{\lambda}_{ml})'\in R^{nml}$ и $Q_*(l)\widetilde{\lambda}=0$. Тогда согласно лемме 1 система пар $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{u}[t]$ – система решений задач Коши (6) на $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,ml}$, является ненулевым решением однородной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных

уравнений с параметрами (6)—(8) и в силу эквивалентности задач (1), (2) и (6)—(8) однородная краевая задача (1), (2) имеет ненулевое решение. Отсюда, учитывая, что задача (1), (2) при $f(t) = 0$, $d = 0$ имеет также тривиальное решение, придем к противоречию с однозначной разрешимостью задачи (1), (2). Поэтому $Q_*(l)$ обратима и $\|[Q_*(l)]^{-1}\| \le \gamma_*(l)$. Возьмем $\nu \ge \nu_1$ и оценим разность
$\|Q_*(l) - Q_\nu(l)\| \le$

$$\le \max\big(1, \frac{h_m}{l}\|C\|\big)\Bigg\{e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!} + (m+1)\beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg) + \|[P_*(l)]^{-1}\|\beta\frac{\overline{h}}{l}\times$$

$$\times\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - 1\bigg) + \beta\frac{\overline{h}}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\|[P_*(l)]^{-1}\|\beta\frac{\overline{h}}{l}\times$$

$$\times\|[P_\nu(l)]^{-1}\|\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg) + \beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\|[P_*(l)]^{-1}\|(m+1)\beta\frac{\overline{h}}{l}e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} +$$

$$+\beta\frac{\overline{h}}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\|[P_*(l)]^{-1}\|\beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\|[P_\nu(l)]^{-1}\|(m+1)\beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\Bigg\}.$$

Так как правая часть неравенства при $\nu \to \infty$ стремится к нулю, то найдется $\nu_2 \ge \nu_1$, при котором

$$\gamma_*(l)\|Q_*(l) - Q_\nu(l)\| < \frac{1}{2} \qquad \forall \nu \ge \nu_2.$$

Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов матрица $Q_\nu(l)$ обратима и $\|[Q_\nu(l)]^{-1}\| \le 2\gamma_*(l)$ при $\nu \ge \nu_2$. Учитывая, что

$$q_\nu(l) \le 2\gamma_*(l)\max\bigg(1, \frac{h_m}{l}\|C\|\bigg)\bigg(1 + 2p_*\beta\frac{\overline{h}}{l}\sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\times$$

$$\times\bigg\{e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!} + (m+1)\beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg) + \beta\frac{\overline{h}}{l}\bigg(e^{\frac{\alpha\overline{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\big(\frac{\alpha\overline{h}}{l}\big)^j\frac{1}{j!}\bigg)\times$$

$$\times\frac{1}{1-\mu_\nu(T)}\bigg(e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}(m+1)\beta + 2p_*e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\beta\sigma(T)\bigg)\bigg\},$$

и выражения, стоящие в фигурных скобках стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, найдем $\nu_3 \ge \nu_2$, удовлетворяющим неравенству $q_{\nu_3}(l) < 1$. Итак, для любого $l \in \mathbb{N}$ при выборе $\nu = \nu_3$ выполняются все условия теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) при $K_0(t) \equiv 0$, $K_m(t) \equiv 0$ получены в [4].

Цитированная литература

1. **Абдуллаев В. М., Айда-Заде К. Р.** // Ж. вычисл. матем. и матем.физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1585 – 1595.

2. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

3. **Треногин В. В.** // Функциональный анализ. М., 1980.

4. **Бакирова Э. А.** //Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. 2005. № 1. С. 95 – 102.

Поступила в редакцию 5.05.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 35 – 39*

УДК 519.62

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГАМОГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЬЮТОНОВОЙ ЗАДАЧИ ДЕВЯТИ ТЕЛ

Ихсанов Е.В.

Атырауский государственный университет им. Х.Досмухамедова
465045 Атырау, Студенческий пр., 212 AtyrauUniv@nursat.kz

Доказывается теорема о достаточном условии существования гамографического решения ньютоновой задачи девяти тел, изображаемого в виде двух вращающихся квадратов с одинаковой угловой скоростью.

Основной задачей аналитической динамики в представлении А. Пуанкаре является отыскание всех стационарных решений заданной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с аналитическим, периодическим по лагранжевым координатам гамильтонианом. Применительно к дифференциальным уравнениям общей ньютоновой задачи многих тел первый прорыв был реализован О.Дзиобеком [1], А.Винтнером [2], Б. Эльмабсутом и Д.Банком для евклидовых пространств [3]. Для пространств Нехвилла с "регуляризованным временем"Е.А. Гребениковым был найден новый класс ограниченных и неограниченных гомографических решений [4]. Эти стационарные решения обладают полной динамической и геометрической симметрией в соответствующих пространствах. Д. Банк и Б. Эльмабсут также показали [3], что в евклидовом пространстве существуют точные решения дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы многих тел "с неполной симметрией", когда взаимно притягивающиеся между собой тела образуют не один правильный многоугольник (как в случае полной симметрии), а несколько таких правильных многоугольников с однозначной взаимной ориентацией каждого из них относительно других. Этот результат Д. Банка и Б. Эльмабсута не исчерпывает все множество стационарных решений общей ньютоновой задачи многих тел и можно допустить, что будут найдены и другие стационарные решения. Вместе с тем, стационарные решения Банка-Эльмабсута можно использовать как генератор нового класса задач космической динамики – ограниченных задач с неполной симметрией.

В работе приводится отыскание достаточного условия существования гамографического решения ограниченной задачи девяти тел. Для этого сначала приведем формулировку теоремы Банка-Эльмабсута в удобной для нас форме.

Теорема 1 [3]. *Пусть имеется* $N+1 = pn+1$ *взаимно притягивающихся между собой тел* $P_0, P_1, \ldots, P_N$ *с массами* $M_0, M_1, \ldots, M_N$. *Пусть кроме того, тела* $P_1, P_2, \ldots, P_N$ *образуют*

Keywords: *gamographic solution, many-body problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

p правильных концентрических n-угольников с общим центром P_0, в вершинах каждого из которых массы равны между собой $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = m_1, M_{n+1} = M_{n+2} = \ldots = M_{2n} = = m_2, \ldots, M_{N-n+1} = M_{N-n+2} = \ldots = M_N = m_p$, и каждый многоугольник ориентирован относительно двух соседних на угол $\frac{\pi}{n}$ и вращается вокруг центра P_0 с угловой скоростью

$$\omega_l^2 = \frac{M_0}{|q_{l,k}^3|} + \frac{1}{q_{l,k}} \left\{ \sum_{\substack{1 \le r \le p \\ r \ne l}} m_r \sum_{j=1}^{n} \frac{q_{l,k} - q_{r,j}}{|q_{l,k} - q_{r,j}|^3} + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}} \frac{q_{l,k} - q_{l,j}}{|q_{l,k} - q_{l,j}|^3} \right\}, \tag{1}$$

где $q_{l,k} = (x_{l,k}, y_{l,k})$ – координаты тела $P_k(k = 1, 2, \ldots, n)$, находящегося в каждой вершине l - го многоугольника,

$$|q_{l,k} - q_{r,j}|^3 = \left[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Если для заданных координат $q_{l,k}$ существуют такие наборы значений параметров $m_1, m_2, \ldots, m_p$, чтобы имели место равенства

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_p^2 = \omega^2 \tag{2}$$

тогда плоская ньютонова проблема $(N+1)$-тел имеет точное гамографическое решение, описываемое геометрически p правильными n-угольниками, вращающимися с угловой скоростью ω вокруг тела P_0.

Замечание 1. *Последнее предложение из формулировки теоремы Банка-Эльбамсута может быть заменено следующей фразой: если для заданных значений параметров $m_1, m_2, \ldots, m_p$ существуют такие наборы координат $(x_{l,k}, y_{l,k})$, чтобы имели место равенства (2), тогда плоская ньютонова проблема $(N+1)$-го тел имеет точное гамографическое решение, описываемое геометрически p правильными n-угольниками, вращающимися с угловой скоростью ω вокруг тела P_0.*

Займемся выводом основных соотношений между параметрами модели. Для динамической модели кольцеобразной плоской ньютоновой проблемы 9-ти тел число квадратов p равно 2, а параметр n очевидно равен 4 $(n = 2, n = 4)$, поэтому сначала необходимо написать в явной форме максимум 16 соотношений вида (1), чтобы далее можно было вывести соотношения между динамическими и геометрическими параметрами, удовлетворяющие равенства (2). Гамографическое решение задачи 9-ти тел в виде двух концентрических квадратов изображено во вращающейся системе координат P_0xy (рис. 1) с удобным линейным масштабом $P_0P_1 = 1$:

Условия существования таких точных гамографических решений в задаче 9-ти тел в общей форме записываются с помощью следующих равенств:

$$\omega_l^2 x_{l,k} = \frac{M_0 x_{l,k}}{(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{1 \le r \le 2, r \ne l} m_r \sum_{j=1}^{4} \frac{x_{l,k} - x_{r,j}}{[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2]^{\frac{3}{2}}} +$$
$$+ m_l \sum_{j=1, j \ne k}^{4} \frac{x_{l,k} - x_{l,j}}{[(x_{l,k} - x_{l,j})^2 + (y_{l,k} - y_{l,j})^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{3}$$

$$\omega_l^2 y_{l,k} = \frac{M_0 y_{l,k}}{(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{1 \le r \le 2, r \ne l} m_r \sum_{j=1}^{4} \frac{y_{l,k} - y_{r,j}}{[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2]^{\frac{3}{2}}} +$$
$$+ m_l \sum_{j=1, j \ne k}^{4} \frac{y_{l,k} - y_{l,j}}{[(x_{l,k} - x_{l,j})^2 + (y_{l,k} - y_{l,j})^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Рис. 1:

Такая "покоординатная" форма записи теоремы Банка-Эльмабсута указывает на то, что угловая скорость ω_l вращения l -го многоугольника не зависит от индекса вершины с номером k, поэтому проверка условий (2) теоремы сводится к получению зависимостей между динамическими параметрами – массами $m_1, m_2, \ldots, m_p$ и геометрическими параметрами – радиусами окружностей, в которые вписаны правильные n- угольники. Координаты большего квадрата $P_1P_2P_3P_4$, изображенного на рис.1, очевидно, даются таблицей:

$$P_1 : x_{11} = 1; y_{11} = 0; \quad P_2 : x_{12} = 0; y_{11} = 1;$$

$$P_3 : x_{13} = -1; y_{13} = 0; \quad P_4 : x_{14} = 0; y_{14} = -1.$$

Если обозначить расстояние P_0P_5 через $(1-\alpha)$ $(0 \leq \alpha \leq 1$ – разность между радиусами описанных окружностей вокруг квадратов), то координаты вершин меньшего квадрата $P_5P_6P_7P_8$ выражаются формулами:

$$P_5: \ x_{21} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \ y_{21} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \quad P_6: \ x_{22} = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \ y_{22} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2};$$

$$P_7 : x_{23} = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \ y_{23} = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \quad P_8: \ x_{24} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \ y_{22} = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2};$$

Тогда таблица всех взаимных расстояний между девятью телами имеет вид:

$$P_0P_1 = P_0P_2 = P_0P_3 = P_0P_4 = 1;$$

$$P_0P_5 = P_0P_6 = P_0P_7 = P_0P_8 = 1 - \alpha;$$

$$P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1 = \sqrt{2};$$
$$P_5P_6 = P_6P_7 = P_7P_8 = P_8P_5 = (1-\alpha)\sqrt{2};$$
$$P_1P_3 = P_2P_4 = 2; \quad P_5P_7 = P_6P_8 = 2(1-\alpha);$$
$$P_1P_5 = P_1P_8 = P_2P_5 = P_2P_6 = P_3P_6 = P_3P_7 = P_4P_7 = P_4P_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}-\alpha(2-\sqrt{2})+\alpha^2};$$
$$P_1P_6 = P_1P_7 = P_2P_7 = P_2P_8 = P_3P_5 = P_3P_8 = P_4P_6 = P_4P_5 = \sqrt{2+\sqrt{2}-\alpha(2+\sqrt{2})+\alpha^2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (3) и (4) для $l = 1$ и $k = 1, 2, 3, 4,$, получаем для ω_l формально шестнадцать аналитических выражений, из которых действительно различными являются два таких выражения. Например, можно по формулам (3) и (4) вычислить ω_1^2 и ω_2^2 для $l = 1$ и $l = 2$ и в результате этого получим

$$\omega_1^2 = M_0 + \frac{m_1(4+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + m_2\left[\frac{2-(1-\alpha)\sqrt{2}}{[2-\sqrt{2}-\alpha(2-\sqrt{2})+\alpha^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2+(1-\alpha)\sqrt{2}}{[2+\sqrt{2}-\alpha(2-\sqrt{2})+\alpha^2]^{\frac{3}{2}}}\right], \quad (5)$$

$$\omega_2^2 = \frac{M_0}{(1-\alpha)^3} + \frac{m_1\sqrt{2}}{1-\alpha}\left\{\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}-1}{[2-\sqrt{2}-\alpha(2-\sqrt{2})+\alpha^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}+1}{[2+\sqrt{2}-\alpha(2-\sqrt{2})+\alpha^2]^{\frac{3}{2}}}\right\} +$$
$$+ \frac{m_2(4+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}(1-\alpha)^3}. \quad (6)$$

Аналитические выражения (5) и (6) различны. Они совпадают только в случае равенства масс $m_1 = m_2$ и $\alpha = 0$. При таких условиях кольцеобразная динамическая модель задачи 9-ти тел переходит в динамическую модель, рассмотренную в [4], а именно, имеем в этом случае равномерное вращение правильного восьмиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ вокруг центра P_0 с угловой скоростью

$$\omega^2 = M_0 + m\frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Если рассматривать случай $m_1 \neq m_2$ и $\alpha \neq 0$, тогда для существования в задаче 9-ти тел гамографического решения, изображенного двумя квадратами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью вокруг центра P_0, необходимо, чтобы

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2. \quad (8)$$

Условие (8) выражает зависимость между массами m_1, m_2, M_0 и расстоянием α, при которых существует необходимое для дальнейшего исследования гамографическое решение плоской ньютоновой проблемы 9-ти тел с неполной симметрией. Равенство (8) может быть написано в явном виде:

$$m_2 = m_1\varphi_1(\alpha) + M_0\varphi_0(\alpha). \quad (9)$$

Вывод из выполненных выше преобразований можно представить в виде теоремы.

Теорема 2. *Достаточным условием существования гамографического решения ньютоновой задачи 9-ти тел, изображаемого в виде двух вращающихся с одинаковой угловой скоростью квадратов, является выполнение равенства (8), где ω_1, ω_2 выражаются формулами (5), (6).*

Цитированная литература

1. **Dziobek O.** Lie Matematischen Theorien der Planeten. Bewegung, 1888.

2. **Уитнер** А. Аналитические основы небесной механики. М. 1967.

3. **Bank D., Elmabsout B.** //Paris, Acad.Scie lib/ 2001. P.243-248

4. **Гребенников Е.А.** // Матем.модел.-1998.-Т.10.-№ 8.- С. 74 - 80.

5. **Гребенников Е.А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М.** Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М. 2002.

Поступила в редакцию 6.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 40 – 43*

УДК 517.925

АППРОКСИМАЦИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е.В.Кокотова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
030000 г.Актобе ул. братьев Жубановых, 263 zhubanov@mail.ru

Исследуется задача нахождения ограниченного решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченной матрицей. Построены регулярные двухточечные краевые задачи, аппроксимирующие исходную задачу. Установлена взаимосвязь между корректными разрешимостями исходной и аппроксимирующей задачами. Получена оценка аппроксимации.

На $(0,T)$ рассматривается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad x \in R^n, \qquad \|x\| = \max_i |x_i|, \tag{1}$$

где $A(t), f(t)$ непрерывны на $(0,T)$, $\|A(t)\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}(t)| = \alpha(t)$, $\alpha(t)$ – непрерывная на $(0,T)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{t\to 0+0} \alpha(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to T-0} \alpha(t) = \infty, \qquad \int\limits_0^{T/2} \alpha(t)dt = \infty, \qquad \int\limits_{T/2}^{T} \alpha(t)dt = \infty.$$

Через $\widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T),R^n)$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных с весом $1/\alpha(t)$ на $(0,T)$ функций $f:(0,T)\to R^n$ с нормой $\|f\|_\alpha = \sup\limits_{t\in(0,T)} \|f(t)/\alpha(t)\|$.

Ограниченное на $(0,T)$ решение уравнения (1), когда $f(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}((0,T),R^n)$, назовем решением задачи 1_α.

В статье [2] по выбранному $\theta > 0$ произведено разбиение $(0,T) = \bigcup\limits_{r=-\infty}^{\infty} [t_{r-1}, t_r)$, где точки t_r, $r \in Z$, выбраны из соотношений: $t_0 = T/2$, $\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \alpha(t)dt = \theta$. Получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи 1_α в терминах двусторонне-бесконечной блочно-ленточной матрицы $Q_{\nu,\overline{h}(\theta)}$. В настоящей статье исследуется

Keywords: *linear system of ordinary differential equations, bounded solution, unbounded coefficient*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

Задача 2_α. По заданному $\varepsilon > 0$ требуется определить числа $T_1 \in (0, T/2)$, $T_2 \in (T/2, T)$, вещественные $(n \times n)-$матрицы B, C, $n-$вектор d, при которых x_{T_1,T_2}, решение двухточечной краевой задачи
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (T_1, T_2), \qquad x \in R^n, \tag{2}$$
$$Bx(T_1) + Cx(T_2) = d, \tag{3}$$
удовлетворяет неравенству $\max\limits_{t \in [T_1,T_2]} \|x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$, где $x^*(t)$ – решение задачи 1_α.

Задачу 2_α будем рассматривать при выполнении следующих предположений.

Предположение 1. Пусть $\lim\limits_{t \to 0+0} \dfrac{A(t)}{\alpha(t)} = A_0$, $\lim\limits_{t \to T-0} \dfrac{A(t)}{\alpha(t)} = A_T$ и собственные значения ξ_i^0, ξ_i^T, $i = \overline{1, n}$, матриц A_0, A_T такие, что $Re\xi_i^0 \neq 0$, $Re\xi_i^T \neq 0$.

Предположение 2. Справедливы соотношения $\lim\limits_{t \to 0+0} \dfrac{f(t)}{\alpha(t)} = f_0$, $\lim\limits_{t \to T-0} \dfrac{f(t)}{\alpha(t)} = f_T$.

При сделанных предположениях функции
$$\delta_1(T_1, T_2) = \max\left(\sup_{t \in (0,T_1]} \|A(t)/\alpha(t) - A_0\|, \sup_{t \in [T_2,T)} \|A(t)/\alpha(t) - A_T\|\right),$$
$$\delta_2(T_1, T_2) = \max\left(\sup_{t \in (0,T_1]} \|f(t)/\alpha(t) - f_0\|, \sup_{t \in [T_2,T)} \|f(t)/\alpha(t) - f_T\|\right)$$
удовлетворяют условию $\delta_k(T_1, T_2) \to 0$ при $T_1 \to 0 + 0$, $T_2 \to T - 0$, $k = 1, 2$.

Через S_0, S_T обозначим вещественные неособые $(n \times n)-$матрицы, приводящие соответственно A_0, A_T к обобщенно-жордановой форме $\widetilde{A}_0 = S_0 A_0 S_0^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{matrix} \right\|$, $\widetilde{A}_T = S_T A_T S_T^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_{11}^T & 0 \\ 0 & A_{22}^T \end{matrix} \right\|$, где A_{11}^0 и A_{22}^0 состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матрицы A_0 с отрицательными и положительными действительными частями, число которых обозначим соответственно n_1^0 и n_2^0, A_{11}^T и A_{22}^T состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих n_1^T собственным значениям матрицы A_T с отрицательными действительными частями и n_2^T собственным значениям матрицы A_T с положительными действительными частями.

Пусть $P_1 = \left\| \begin{matrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$, $P_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{matrix} \right\|$, где I_{n_r}, $r = 1, 2$, – единичные n_r-матрицы.

Теорема 1. *В предположении 1 задача 1_α корректно разрешима тогда и только тогда, когда а) $n_1^0 = n_1^T = n_1$; $n_2^0 = n_2^T = n_2$; б) существуют $T_1^0 \in (0, T/2)$, $T_2^0 \in (T/2, T)$ такие, что для любых $T_1 \in (0, T_1^0)$, $T_2 \in (T_2^0, T)$ двухточечная краевая задача (2), (3), где $B = -P_1 S_0$, $C = P_2 S_T$, корректно разрешима с независящей от T_1, T_2 константой K_1.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 3 из [2] матрица $Q_{1,\bar{h}(\theta)}$ обратима $\forall \theta \in (0, \theta_0]$ и $\|[Q_{1,\bar{h}(\theta)}]^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \gamma/\theta$, где γ – константа, независящая от θ, m_n, $L(m_n)$ – пространства, введенные в [3]. В матрице $Q_{1,\bar{h}(\theta)}$ заменим $A(t)$ на $\alpha(t)A_0$ – в блочных строках с номерами $r = -N_1, -N_1 - 1, \ldots$ и на $\alpha(t)A_T$ в блочных строках с номерами $r = N_2, N_2 + 1, \ldots$ ($t_{-N_1} = T_1, t_{N_2} = T_2$). Полученную матрицу обозначим Q_{θ,T_1,T_2}. Выбирая $T_1^0 \in (0, T/2)$, $T_2^0 \in (T/2, T)$, удовлетворяющими условию $\gamma\delta_1(T_1^0, T_2^0 - h_{N_2}(\theta)) \leq 1/2$, по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим, что матрица $Q_{\theta,T_1,T_2} : m_n \to m_n$ для всех $T_1 \in (0, T_1^0)$, $T_2 \in (T_2^2, T)$ обратима и справедлива оценка
$$\|Q_{\theta,T_1,T_2}\|_{L(m_n)} \leq \frac{\gamma_{T_1,T_2}}{1 - \gamma\delta_1(T_1, T_2 - h_{N_2}(\theta))} \cdot \frac{1}{\theta} \leq \frac{2\gamma}{\theta},$$

где $\gamma_{T_1,T_2} \to \gamma$ при $T_1 \to 0+0$, $T_2 \to T-0$.

Пусть D – двусторонне-бесконечная блочно-диагональная матрица, $D = diag(d_{rr})$, где $d_{rr} = S_0$ при $r = 0,-1,-2,\dots$ и $d_{rr} = S_T$ при $r = 1,2,\dots,$ и $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2} = DQ_{\theta,T_1,T_2}D^{-1}$. Осуществляя перестановку в матрице $\widetilde{Q}_{\theta,T_1,T_2}$, получим матрицу M_{θ,T_1,T_2} :

$$M_{\theta,T_1,T_2} = \left\| \begin{array}{ccccc} M_{11}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22}(\theta) & M_{23}(\theta) & 0 & 0 \\ M_{31}(\theta) & 0 & M_{33}(\theta) & 0 & M_{35}(\theta) \\ 0 & 0 & M_{43}(\theta) & M_{44}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55}(\theta) \end{array} \right\|.$$

Матрица $M_{33}(\theta)$ имеет размеры $[(N_1+N_2-1)n + n_1^0 + n_2^T] \times (N_1+N_2)n$:

$$M_{33}(\theta) = \left\| \begin{array}{ccccccc} -P_1^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ I+\widetilde{A}_{-N_1+1}(\theta) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I+\widetilde{A}_{N_2-1}(\theta) & -I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I+\widetilde{A}_T(\theta) \end{array} \right\|,$$

в блочной строке, соответствующей номеру $p=0$, вместо матрицы $-I$ стоит матрица $-S_0S_T^{-1}$,

$$\widetilde{A}_p(\theta) = \begin{cases} S_0 \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(t)dtS_0^{-1}, & p = -N_1+1, -N_1+2, \dots, -1, 0, \\ S_T \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(t)dtS_T^{-1}, & p = 1,2,\dots,N_2-1; \end{cases}$$

$P_1^0 = (I_{n_1^0}, 0)$ – матрица размера $n_1^0 \times n$, $P_2^T = (0, I_{n_2}^T)$ – матрица размера $n_2^T \times n$.

Аналогично доказательству теоремы 5 из [1] показывается, что матрица $M_{33}(\theta)$ обратима и $\|[M_{33}(\theta)]^{-1}\| \le \widetilde{\gamma}/\theta$ с независящей от θ константой $\widetilde{\gamma}$. Отсюда следует выполнение условия а) теоремы и ограниченная обратимость матрицы $N_{33}(\theta)$, полученной перестановкой в матрице $M_{33}(\theta)$:

$$N_{33}(\theta) = \left\| \begin{array}{ccccccc} -P_1^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_2^T(I+\widetilde{A}_T\theta) \\ I+\widetilde{A}_{-N_1+1}\theta & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I+\widetilde{A}_{N_2-1}\theta & -I \end{array} \right\|.$$

Применяя теорему 1 из [3] и теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов, можно показать, что выполняется условие (б) теоремы.

Достаточность. Обозначим через $\widetilde{Q}_1(\theta)$ матрицу $N_{33}(\theta)$ с первой блочной строкой, умноженной на $\theta > 0$. Из теоремы 4 [3] следует, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\overline{\theta}(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\theta \in (0, \overline{\theta}(\varepsilon)]$ матрица $\widetilde{Q}_1(\theta)$ обратима и $\|[\widetilde{Q}_1(\theta)]^{-1}\| \le (1+\varepsilon)K_1\zeta_1\zeta_2/\theta = (1+\varepsilon)\widetilde{K}_1/\theta$.

Тогда $M_{33}(\theta)$ также ограниченно обратима. Учитывая структуру матрицы M_{θ,T_1,T_2} и ограниченную обратимость матриц $M_{kk}(\theta)$, $k = 1,2,4,5$, получим, что матрица M_{θ,T_1,T_2} ограниченно обратима. Далее, рассуждая по схеме доказательства теоремы 5 из [1], установим, что $\|Q_{1,\theta}^{-1}\|_{L(m_n)} \le \gamma_1/\theta$, где γ_1 – константа, независящая от T_1, T_2. Тогда по теореме 3 из [2] при $\nu = 1$ задача 1_α корректно разрешима. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются предположения 1 и 2 и задача 1_α корректно разрешима с константой K. Тогда для любых $T_1 \in (0, T_1^0)$, $T_2 \in (T_2^0, T)$, где $T_1^0 \in (0, T/2)$, $T_2^0 \in (T/2, T)$ – числа, определяемые неравенством $K\delta_1(T_1^0, T_2^0) < 1$, двухточечная краевая задача*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in (T_1, T_2), \tag{4}$$

$$P_1 S_0 A_0 x(T_1) + P_2 S_T A_T x(T_2) = -P_1 S_0 f_0 - P_2 S_T f_T \tag{5}$$

имеет единственное решение x_{T_1,T_2} и справедлива оценка

$$\max_{t\in[T_1,T_2]} ||x_{T_1,T_2}(t) - x^*(t)|| \leq \frac{K}{1 - K\delta_1(T_1, T_2)}(K||f||_\alpha \delta_1(T_1, T_2) + \delta_2(T_1, T_2)), \tag{6}$$

где $x^*(t)$ – решение задачи 1_α.

Доказательство. Выберем $\theta > 0$ и применим к задаче 1_α метод параметризации. Тогда согласно теореме 3 из [2] $\forall \varepsilon > 0$ существует $\overline{\theta} = \overline{\theta}(\varepsilon)$ такое, что для всех $\theta \in (0, \overline{\theta}(\varepsilon)]$ матрица $Q_{1,\overline{h}(\theta)}$ обратима и $\|Q^{-1}_{1,\overline{h}(\theta)}\| \leq (1+\varepsilon)K/\theta$.

Пусть $(\lambda^*, u^*(t)) \in m_n \times m_n(\overline{h}(\theta))$ — решение краевой задачи с параметром (4)—(6) из [2]. Тогда справедливо соотношение

$$[I + \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(t)dt]\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^* = -\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} f(t)dt - \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(t)u_r^*(t)dt, \qquad r \in Z, \tag{7}$$

где $\| \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(t)u_r^*(t)dt\| \leq \theta^2[(1+\varepsilon)Ke^{\overline{\theta}} + 1]e^{\overline{\theta}}\|f\|_\alpha = \theta^2 c.$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малых $\theta > 0$ последним членом в (7) можно пренебречь. В системе (7) заменим $A(t)$ — $\alpha(t)A_0$, $f(t)$ на $\alpha(t)f_0$ при $r = -N_1, N_1 - 1, \ldots$ и, соответственно, на $\alpha(t)A_T$, $\alpha(t)f_T$ при $r = N_2, N_2 + 1, \ldots$

Выбирая $\varepsilon > 0$ удовлетворяющим неравенству $(1+\varepsilon)K\delta_1(T_1^0, T_2^0) < 1$, и, рассуждая по схеме доказательства теоремы 7 из [1], получим, что

$$\max_{t\in[T_1,T_2]} \|x_{T_1,T_2} - x^*(t)\| \leq \frac{(1+\varepsilon)K}{1-(1+\varepsilon)K\delta_1(T_1,T_2)}[K\|f\|_\alpha\delta_1(T_1,T_2) + \delta_2(T_1,T_2) + c\theta] + (c+c_1)\theta, \tag{8}$$

где c, c_1 — константы, независящие от θ. Переходя в (8) к пределу при $\theta \to 0$, получаем (6). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д.С.** // Ж.вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т.29, №3. С.383—404.
2. **Кокотова Е.В.** //Матем. журнал. 2005. Т.5, №1(15). С.67—74.
3. **Кокотова Е.В.** // Матем. журнал. 2004. Т.4, №3(13). С.49—57.

Поступила в редакцию 03.10.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 44 – 52*

УДК 517.938

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВА ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

И. Р. Капшаев

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, kopshaev@ok.kz

Исследуется семейство морфизмов векторного слоения, определяемое системами дифференциальных уравнений, эквивалентных линейным дифференциальным уравнениям. Доказывается, что указанное семейство морфизмов векторного слоения не является насыщенным.

1. Приведем сначала используемые здесь понятия и факты, из статей В. М. Миллионщикова [1]—[3].

Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со слоем R^n и базой B (B — полное метрическое пространство). На (E, p, B) фиксируется некоторая риманова метрика (см. [4], стр. 58—59).

Рассматривается гомоморфизм группы Z (группы R) в группу изоморфизмов векторного расслоения (E, p, B). Напомним, что это означает следующее: при всяком $t \in Z$ ($t \in R$) даны X^t-гомеоморфизм E на E и χ^t-гомеоморфизм B на B такие, что $pX^t = \chi^t p$; при всяком $b \in B$ сужение $X^t[b]$ отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$; при всяких $t, s \in Z$ (соответственно R) имеют место равенства $X^{t+s} = X^t \cdot X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \cdot \chi^s$.

Образ точки t при этом гомоморфизме будем обозначается через (X^t, χ^t), вместо X^1 пишем X, вместо χ^1 - χ.

Предполагается, что существует функция $a(\cdot) : B \to R^+$, удовлетворяющая равенству $a(\chi^t b) = a(b)$ для всякого $b \in B$ и всякого $t \in Z$ (соответственно $t \in R$) и такая, что при всяком $t \in N$ (соответственно $t \in R^+$) имеет место неравенство

$$\max(\|X^t[b]\|, \|X^{-t}[b]\|) \le e^{t \cdot a(b)} \tag{1}$$

(норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B)).

Считается, что при всяком $m \in N$

$$(X(m), \chi(m)) \overset{\text{def}}{=} (X^m, \chi^m).$$

Keywords: *the sated families of the morphisms*
2000 Mathematics Subject Classification:

Полученное таким образом семейство морфизмов (X^m, χ^m) $m \in N$ векторного расслоения (E, p, B) удовлетворяет следующему условию: существует функция $a(\cdot) : B \to R^+$ такая, что для всяких $b \in B$, $m \in N$ имеет место неравенство

$$\max(\|X(m,b)\|, \| [X(m,b)]^{-1} \|) \leq e^{m \cdot a(b)}, \tag{2}$$

где через $X(m,b)$ обозначено сужение отображения $X(m)$ на слой $p^{-1}(b)$; таким образом, если $X(m) = X^m$, то $X(m,b) = X^m[b]$. Более того, так определенное семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$ удовлетворяет условиям а) - в):

а) (X, χ) - изоморфизм векторного расслоения (E, p, B);

б) при всяком $m \in N$ имеют место равенства

$$X(m) = X^m, \ \chi(m) = \chi^m;$$

в) существует функция $a(\cdot) : B \to R^+$ такая, что $a(\chi^m b) = a(b)$ для всяких $b \in B$, $m \in Z$, и такая, что при всяком $b \in B$ имеет место неравенство

$$\max(\|X[b]\|, \| [X[b]]^{-1} \|) \leq e^{a(b)}. \tag{3}$$

Проверка всех этих утверждений тривиальна.

Напомним определение насыщенного семейства морфизмов, данное в [2, с.452]:

Определение. *Семейство морфизмов* $(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to (E, p, B)$ $(m \in N)$, *удовлетворяющее условиям а) - в), называется насыщенным, если для всякой точки* $b \in B$ *такой, что* $\chi^m b \neq b$ *при всяком* $m \neq 0$, *для всякого* $\varepsilon > 0$, *для всякого базиса* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *векторного пространства* $p^{-1}(b)$ *и всяких окрестностей* $U(\xi_i)$ *точек* ξ_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ *(в пространстве* E*) найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всякого* $\bar{t} \in N$ *и всяких невырожденных линейных операторов*

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b) \to p^{-1}(\chi^m b)$$

$(m \in \{1, \ldots, \bar{t}\})$, *удовлетворяющих при всяком* $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ *неравенству*

$$\|Y_m (X[\chi^{m-1} b])^{-1} - E\| + \|X[\chi^{m-1} b] Y_m^{-1} - E\| < \delta \tag{4}$$

найдется точка $b' \in B$ *такая, что*

$$d_B(b', b) < \varepsilon, \tag{5}$$

и для всякого $m \in \{0, \ldots, \bar{t}\}$ *найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств)*

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b),$$

причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1} \xi_i \in U(\xi_i)$ *при всяком* $i \in \{1, \ldots, n\}$;

ii) при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1} b') & \xrightarrow{X[\chi^{m-1} b']} & p^{-1}(\chi^m b') \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{m-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_m} \\ p^{-1}(\chi^{m-1} b) & \xrightarrow{Y_m} & p^{-1}(\chi^m b) \end{array} \tag{6}$$

коммутативна.

2. Рассмотрим семейство морфизмов, построенное в § 3 [5].

Пусть множество всех линейных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t) \cdot x,\ x \in R^n, \tag{7}$$

таких, что $A(\cdot) : R \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ — непрерывное отображение, для которого $\sup\limits_{t \in R} \|A(t)\| < +\infty$, наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния по формуле

$$d(A_1, A_2) = \sup \|A_1(t) - A_2(t)\|.$$

(здесь точка $\dot{x} = A_i(t) \cdot x$ пространства обозначена через A_i). Полученное метрическое пространство M_n — полное.

Считается, что

$$B \overset{\mathrm{def}}{=} M_n,\ E \overset{\mathrm{def}}{=} B \times R^n,\ p \overset{\mathrm{def}}{=} pr_1, \tag{8}$$

где pr_1 — проекция произведения $B \times R^n$ на первый сомножитель.

Таким образом задано тривиальное векторное расслоение (E, p, B). Пусть для всякого $t \in R$

$$X^t(A, x) = (\chi(t)A, \mathfrak{X}(t, 0, A)x), \tag{9}$$

$$\chi^t A(\cdot) = A(t + (\cdot)), \tag{10}$$

где $A \in B$, $x \in R^n$, $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ - оператор Коши системы $\dot{x} = A(t) \cdot x$.

При всяком $t \in R$ имеют место формулы:

$$X^t \cdot X^{-t} = X^0 = 1_E,\ X^{-t} \cdot X^t = X^0 = 1_E,$$

$$\chi^t \cdot \chi^{-t} = \chi^0 = 1_B,\ \chi^{-t} \cdot \chi^t = \chi^0 = 1_B,$$

т.е. (X^{-t}, χ^{-t})-морфизм векторного расслоения (E, p, B), обратный (X^t, χ^t), следовательно, (X^t, χ^t)-изоморфизм векторного расслоения (E, p, B).

Таким образом построен гомоморфизм группы R в группу изоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), образом точки $t \in R$ при этом гомоморфизме является (X^t, χ^t).

Функция $a(\cdot) : B \to R^+$ определяется формулой

$$a(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{t \in R} \|A(t)\|.$$

Имеем

$$a(\chi^t A) = a(A) = \sup_{t \in R} \|A(t)\|.$$

Справедливость при всяких $b \in B$, $t \in R^+$ неравенства (1) вытекает из формулы (9) в силу известного неравенства

$$\|\mathfrak{X}(t, 0, A)\| \leq e^{|\int_0^t \|A(s) ds\||} \leq e^{|t \cdot a(A)|},$$

которому удовлетворяет оператор Коши системы $\dot{x} = A(t) \cdot x$ при всяких $A \in B$, $t \in R$.

Положив

$$(X(m), \chi(m)) \overset{\mathrm{def}}{=} (X^m, \chi^m)$$

получаем семейство морфизмов

$$(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to (E, p, B),$$

$(m \in N)$, удовлетворяющее условиям а) — в).

В статье [3] доказывается, что семейство морфизмов (8) является насыщенным.

Наша цель — исследовать это свойство для семейства морфизмов, определяемых подмножествами систем, эквивалентных линейным дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = a(t) \cdot y, \ y \in R, \tag{11}$$

где $a(\cdot) : R \to R$ — непрерывное отображение для которого $\sup\limits_{t \in R} |a(t)| < \infty$.

Уравнение (11) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \ x \in R^2, \ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Будем также рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{y} = [a(t) + b_\varepsilon(t)] \cdot y, \ y \in R, \tag{13}$$

где $b_\varepsilon(\cdot) : R \to R$ — непрерывное отображение для которого $\sup\limits_{t \in R} |b_\varepsilon(t)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Уравнению (13) эквивалентна система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = [A(t) + B_\varepsilon(t)] \cdot x, \ x \in R^2, \tag{14}$$

где матрица $B_\varepsilon(t)$ имеет представление и оценку

$$B_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_\varepsilon(t) & 0 \end{pmatrix}, \ \sup_{t \in R} \|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon. \tag{15}$$

Лемма 1. . *Пусть дано дифференциальное уравнение (11) и пусть $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ — оператор Коши эквивалентной системы (12). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ всегда найдутся невырожденные линейные операторы $W_m : R^2 \to R^2$ ($m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$) удовлетворяющие при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ неравенству*

$$\|W_m[\mathfrak{X}(m, m-1, A)]^{-1} - E\| + \|\mathfrak{X}(m, m-1, A)W_m^{-1} - E\| < \delta \tag{16}$$

для которых не существует непрерывного отображения

$$A_\varepsilon(\cdot) : [0, \bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^2, R^2)$$

удовлетворяющего условиям:

1) $\sup\limits_{t \in [0, \bar{t}]} \|A_\varepsilon(t) - A(t)\| < \varepsilon$;

2) $\mathfrak{X}(m, m-1, A_\varepsilon) = W_m$ *при всяком* $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$,

где $\mathfrak{X}(m, m-1, A_\varepsilon)$ — *оператор Коши системы (14) эквивалентной уравнению (13).*

Доказательство .. Предположим обратное. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ и всяких невырожденных линейных операторов $W_m : R^2 \to R^2$ ($m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$), удовлетворяющих неравенству (16) найдется непрерывное отображение $A_\varepsilon(\cdot)$: $[0, \bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^2, R^2)$ удовлетворяющее условиям 1), 2).

Пусть $\mathfrak{X}(t, s, A_\varepsilon)$ — оператор Коши системы (14). Тогда для $\forall t, s \in R$ справедливо равенство:

$$\dot{\mathfrak{X}}(t, s, A_\varepsilon) = A_\varepsilon(t) \cdot \mathfrak{X}(t, s, A_\varepsilon) = [A(t) + B_\varepsilon(t)] \cdot \mathfrak{X}(t, s, A_\varepsilon).$$

Умножая последнее равенство справа на $\mathfrak{X}^{-1}(t, s, A_\varepsilon)$ получим соотношение

$$B_\varepsilon(t) = \dot{\mathfrak{X}}(t, s, A_\varepsilon) \cdot \mathfrak{X}^{-1}(t, s, A_\varepsilon) - A(t), \tag{17}$$

справедливое для $\forall t, s \in R$.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} = \frac{2t^2 - 1}{(1+t^2)^2} \cdot y. \tag{18}$$

Уравнению (18) эквивалентна система

$$\dot{x} = A(t) \cdot x,\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2t^2-1}{(1+t^2)^2} & 0 \end{pmatrix},\ x \in R^2. \tag{19}$$

Оператор Коши системы (19) имеет вид:

$$\mathfrak{X}(t,s,A) = \frac{1}{3\sqrt{(1+t^2)(1+s^2)}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{f_1(t,s)}{1+s^2} & -3s - s^3 + 3t + t^3 \\ \frac{f_2(t,s)}{(1+t^2)(1+s^2)} & \frac{3+3ts+ts^3+3t^2+2t^4}{1+t^2} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$f_1(t,s) = 3 + 3s^2 + 2s^4 + 3ts + t^3 s,$$

$$f_2(t,s) = -3t - 3ts^2 - 2ts^4 + 3s + 3st^2 + 2st^4.$$

Положим при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ $(\bar{t} \in N)$

$$W_m = \mathfrak{X}(m, m-1, A) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_m}{3\sqrt{(1+m^2)^3(1+(m-1)^2)}} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $r_m > 0$ — некоторые действительные числа зависящие от δ и m.

Имеем

$$W_m \cdot [\mathfrak{X}(m,m-1,A)]^{-1} = \frac{r_m}{g_1(m,m-1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f_2(m,m-1) & f_1(m,m-1) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\mathfrak{X}(m,m-1,A) \cdot W_m^{-1} = \frac{r_m}{g_2(m,m-1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_2(m,m-1) & f_1(m,m-1) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где

$$g_1(t,s) = 9 \cdot (1+t^2)^3 \cdot (1+s^2)^2,$$

$$g_2(t,s) = (1+t^2) \cdot (g_3(t,s) + f_1(t,s) \cdot r),$$

$$g_3(t,s) = 9(1 + 2t^2 + t^4 + 4s^2t^2 + 2s^2t^4 + 2s^4t^2 + s^4t^4 + s^2 + s^4).$$

Теперь, если выбрать r_m удовлетворяющими неравенству

$$r_m < \frac{\delta}{2\max\{|f_2(m,m-1)|, |f_1(m,m-1)|\}} \times$$

$$\times \max\{g_1(m,m-1),\ (1+m^2) \cdot (g_3(m,m-1) + |f_1(m,m-1)| \cdot r_m)\},$$

то получим, что операторы W_m при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ удовлетворяют неравенству (16).

Тогда в силу предположения, для всяких $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$

$$\mathfrak{X}(m, m-1, A_\varepsilon) = W_m$$

и в силу равенств (17), (21) и (20) имеем

$$B_\varepsilon(m) = \dot{W}_m \cdot W_m^{-1} - A(m) =$$

$$= \frac{r_m}{g_2(m,m-1)} \cdot \begin{pmatrix} f_2(m,m-1) & -f_1(m,m-1)\cdot(1+m^2) \\ \frac{3f_2(m,m-1)\cdot m}{1+m^2} & 3f_1(m,m-1)\cdot m \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Однако, в силу уравнения (13), матрица $B_\varepsilon(t)$ должна иметь представление (15), которому правая часть (24) не удовлетворяет. Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим семейство морфизмов $\mathfrak{G}$

$$(X(m), \chi(m)) : \quad (E, p, B) \to (E, p, B), \tag{25}$$

$(m \in N)$, векторного расслоения (E, p, B), причем

$$B = M_2, \quad E = B \times R^2, \quad p = pr_1, \tag{26}$$

$$X^t(A, x) = (\chi^t A, \mathfrak{X}(t, 0, A)\cdot x), \tag{27}$$

$$\chi^t A(\cdot) = A(t + (\cdot)), \tag{28}$$

где $A \in B$, $x \in R^2$, $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ — оператор Коши системы (12), эквивалентной уравнению (11).

Нетрудно убедиться, что семейство морфизмов (25), (27), (28) удовлетворяет условиям а) — в).

Л е м м а 2. . *Семейство морфизмов $\mathfrak{G}$ векторного расслоения (26) не является насыщенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .. Предположим обратное, т.е. что семейство морфизмов (25), (27), (28) векторного расслоения (26) является насыщенным.

Тогда в силу определения, для всякой точки $b \in B$ такой, что $\chi^m b \neq b$ при всяком $m \neq 0$, для всякого $\overline{\varepsilon} > 0$ для всякого базиса $\{\xi_1, \xi_2\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i $(i = \overline{1,2})$(в пространстве E) найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $\overline{t} \in N$ и всяких невырожденных линейных операторов $Y_m : \ p^{-1}(\chi^{m-1}b) \to p^{-1}(\chi^m b)$ $(m \in \{1, \ldots, \overline{t}\})$, удовлетворяющих при всяком $m \in \{1, \ldots, \overline{t}\}$ неравенству (4) найдется точка $b' \in B$ такая, что $d_B(b, b') < \overline{\varepsilon}$ и для всякого $m \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : \ p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b)$, причем выполнены условия i) — ii).

Положим $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$ и подберем $\delta > 0$ и $\overline{t}$ такими, чтобы выполнялось условие леммы 1. Зафиксируем в пространстве B какую-нибудь точку $b = A$, а затем выберем в пространстве $p^{-1}(b)$ произвольный базис $\{\xi_1, \xi_2\}$.

Рассмотрим отображение $Y_m : \ p^{-1}(\chi^{m-1}b) \to p^{-1}(\chi^m b)$ вида

$$Y_m(A, \xi) = (\chi^m A, \, W_m \, \xi), \tag{29}$$

где $A \in B$, $\xi \in R^2$, $W_m = W(m, m-1)$ $(m \in \{1, \ldots, \overline{t}\})$ — любой невырожденный оператор из условия леммы 1.

Нетрудно убедиться, что в таком случае оператор Y_m удовлетворяет неравенству (4).

Тогда в силу предположения, найдется точка $b' \in B$ такая, что $d_B(b, b') < \overline{\varepsilon}$ и для всякого $m \in \{0, \ldots, \overline{t}\}$ найдется изоморфизм слоев $\psi_m : \ p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b)$, причем выполнены требования i) — ii).

Пусть $b' = A_\varepsilon$, где $A_\varepsilon = A_\varepsilon(t)$ — оператор из условия леммы 1.

Так как $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$, то условие $d_B(b, b') < \overline{\varepsilon}$ выполнено.

Требование ii) предполагает коммутативность диаграммы (6), откуда, учитывая (27), (29), получим:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}b') & \xrightarrow{X[\chi^{m-1}b']} & p^{-1}(\chi^m b') \\ \Big\downarrow {\scriptstyle p_{2,\chi^{m-1}b'}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle p_{2,\chi^m b'}} \\ R^2 & \xrightarrow{\mathfrak{X}(m,m-1,A_\varepsilon)} & R^2 \end{array} \tag{30}$$

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}b) & \xrightarrow{Y_m} & p^{-1}(\chi^m b) \\ \Big\downarrow p_{2,\chi^{m-1}b} & & \Big\downarrow p_{2,\chi^m b} \\ R^2 & \xrightarrow{W_m} & R^2 \end{array} \tag{31}$$

где $p_{2,\bar{b}}$ — сужение на слой $p^{-1}(\bar{b})$ отображения pr_2 (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель).

Из коммутативности диаграмм (6), (30), (31) следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R^2 & \xrightarrow{\mathfrak{X}(m,m-1,A_\varepsilon)} & R^2 \\ {\scriptstyle p_{2,\chi^{m-1}b}\cdot\psi_{m-1}\cdot(p_{2,\chi^{m-1}b'})^{-1}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle p_{2,\chi^m b}\cdot\psi_m\cdot(p_{2,\chi^m b'})^{-1}} \\ R^2 & \xrightarrow{W_m} & R^2 \end{array} \tag{32}$$

Откуда следует утверждение: для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ всегда найдутся невырожденные линейные операторы $W_m :\ R^2 \to R^2$ ($m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$) удовлетворяющие при всяком $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$ неравенству (16) для которых существует непрерывное отображение $A_\varepsilon(\cdot) :\ [0, \bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^2, R^2)$ удовлетворяющее условиям 1) — 2). Так как полученное утверждение противоречит условию леммы 1, то лемма доказана.

3. Рассмотрим, теперь, линейные дифференциальные уравнения, вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \tag{33}$$

где $\sup\limits_t |a_i(t)| < \infty$, $(i = \overline{1,n})$ и эквивалентные им системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x \in R^n. \tag{34}$$

На множестве систем (34) введем метрику. Полученное метрическое пространство обозначим через M_n.

Семейство морфизмов

$$(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to (E, p, B),$$

$(m \in N)$, векторного расслоения (E, p, B), где

$$B = M_n, \quad E = B \times R^n, \quad p = pr_1, \tag{35}$$

$$X^t(A, x) = (\chi^t A, \mathfrak{X}(t, 0, A) \cdot x),$$

$$\chi^t A(\cdot) = A(t + (\cdot)),$$

обозначим через $\mathfrak{S}$ (здесь $A \in B$, $x \in R^n$, $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ - оператор Коши системы (34), эквивалентной уравнению (33)).

Т е о р е м а 1. *. Пусть дано дифференциальное уравнение (33) и пусть $\mathfrak{X}(\Theta, \tau, A)$ — оператор Коши эквивалентной системы (34). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $\bar{t} \in N$ всегда найдутся невырожденные линейные операторы $W_m : R^n \to R^n$ ($m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$) удовлетворяющие при всяком $m \in \{1, \dots, \bar{t}\}$ неравенству (16) для которых не существует непрерывного отображения*

$$A_\varepsilon(\cdot) : [0, \bar{t}] \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$$

удовлетворяющего условиям:

I) $\sup\limits_{t\in[0,\bar{t}]} \|A_\varepsilon(t) - A(t)\| < \varepsilon$*;*

II) $\mathfrak{X}(m, m-1, A_\varepsilon) = W_m$ *при всяком* $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$*,*

где $\mathfrak{X}(m, m-1, A_\varepsilon)$ *— оператор Коши системы (34) эквивалентной уравнению (33).*

Доказательство .. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = a(t)y^{(n-2)}, \quad y \in R. \tag{36}$$

Система, эквивалентная (36), имеет вид:

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x \in R^n,$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что имеет место утверждение обратное утверждению теоремы. Это означает, что при всех $\bar{t} \in N$ для всяких линейных операторов W_m, удовлетворяющих при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ неравенству (16), всегда существует матрица $B_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t) - A(t)$ имеющая представление

$$B_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_\varepsilon(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \sup_t |b_\varepsilon(t)| < \varepsilon,$$

такая, что выполнены условия I), II).

С другой стороны, если в уравнении (36) произвести замену $y^{(n-2)} = z$, то получим уже рассмотренное в п.2 уравнение второго порядка

$$\ddot{z} = a(t) \cdot z, \quad z \in R^2.$$

Для этого уравнения, согласно лемме 1, при всех $\bar{t} \in N$ всегда можно подобрать линейные операторы W_m, удовлетворяющие при всяком $m \in \{1, \ldots, \bar{t}\}$ неравенству (16), для которых не существует матрица $B_\varepsilon(t)$, имеющая представление (15), такая, что выполнены условия 1), 2). Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Семейство морфизмов* $\mathfrak{S}$ *векторного расслоения (35) не является насыщенным.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 2 и основывается на справедливости теоремы 1.

Заключение. Семейства морфизмов определяемые системами дифференциальных уравнений, эквивалентных линейным дифференциальным уравнениям n-го порядка, не являются насыщенными.

Цитированная литература

1. **Миллионщиков В. М.** // Дифференциальные уравнения. 1980. Т 16. № 8. С. 1408 – 1416.

2. **Миллионщиков В. М.** // Дифференциальные уравнения. 1981. Т 17. № 3. С. 431 – 468.
3. **Миллионщиков В. М.** // Дифференциальные уравнения. 1981. Т 17. № 8. С. 1394 – 1410.
4. **Хьюзмоллер Д.** Расслоенные пространства. М. 1970. 442 с.
5. **Рахимбердиев М. И.** // Математические заметки. 1982. Т 31. № 6. С. 925 – 931.

Поступила в редакцию 13.05.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 53 – 60*

УДК 517.946

ОЦЕНКИ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ СМЕШАННОГО ТИПА

М.Б. Муратбеков, М.М. Муратбеков

Таразский государственный педагогический институт,
484041 Тараз, проспект Жамбыла, 16 mmuratbekov@hotbox.ru
Казахский национальный университет им.аль-Фараби
480012 Алматы, ул. Масанчи, 39/47 mmuratbekov@kazsu.kz

В работе исследуется полупериодическая задача Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа. При некоторых условиях на коэффициенты получены следующие результаты: гладкость решений, двусторонние оценки сингулярных и собственных чисел.

Известно, что спектральная теория дифференциальных операторов гиперболического и смешанного типов до сих пор исследована слабо по сравнению со спектральными вопросами эллиптических операторов. Систематическое изучение спектральных вопросов для операторов смешанного типа начато с работ Т.Ш. Кальменова [1], Е.И. Моисеева [2—3], С.М. Пономарева [4]. Весьма исчерпывающая библиография содержится в монографии Е.И. Моисеева [5].

Рассмотрим оператор смешанного типа

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u, \tag{1}$$

первоначально определенный на $C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$-множестве, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $u(-\pi, y) = u(\pi, y)$, $u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y)$ и финитных по переменной y, где $k(y)$ — кусочно-непрерывная функция на отрезке [-1,1], $yk(y) >0$ при $y \neq 0$, $k(0)=0$ и

$$\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, -1 < y < 1\},$$

Отметим, что оператор L допускает замыкание, и его также обозначим через L.

Разрешимость полупериодической задачи Дирихле для уравнения $Lu = f$, где Lu определён равенством (1), была рассмотрена в работе [6].

Приведём ряд необходимых обозначений и определений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Keywords: *estimates of spectrum, mixed type operator, semi-periodical Dirichlet problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35P15

Пусть функция $u(x,y) \in L_2(\Omega)$. Тогда справедливо следующее разложение:

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(y) e^{inx},$$

где $\{e^{inx}\}$ — полная система в $L_2(-\pi,\, \pi)$, $u_n(y)$ — коэффициенты Фурье. Здесь равенство понимается в метрике $L_2(\Omega)$.

Определение. *Дробной производной $D_x^\alpha u$ по x порядка $\alpha \geqslant 0$ от функции $u(x,y)$ назовём выражение* [7]

$$D_x^\alpha u = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha u_n(y) e^{inx} + e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}-1} \sum_{n=-\infty}^{-1} |n|^\alpha u_n(y) e^{inx}.$$

Здесь равенство понимается в метрике $L_2(\Omega)$.

Пусть A — вполне непрерывный оператор. Тогда собственные числа $(A^*A)^{1/2}$ называются s-числами оператора A (собственными числами по Шмидту) [8].

Ненулевые s-числа будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности, так что

$$s_k(A) = \lambda_k((A^*A)^{1/2}), \quad k = 1, 2, \,...$$

Пусть A — некоторый линейный оператор в гильбертовом пространстве H, тогда через $\sigma(A)$ будем обозначать спектр оператора A.

Пусть M — центрально-симметрическое подмножество H, т.е. M=–M.

Величина

$$d_k = \inf_{\{G_k\}} \sup_{u \in M} \inf \|u - v\|, \;\; k = 0,\; 1,\; 2,\; ...$$

называется k-поперечником по Колмогорову множества M, где G_k — подпространство размерности k([9]).

Поперечники обладают следующими свойствами:

1) $d_0 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots;$

2) $d_k(\tilde{M}) \leqslant d_k(M)$, $\tilde{M} \subset M$, k=1,2,3,…;

3) $d_k(nM) = nd_k(M)$, $n > 0$, $nM = \{x\prime = nx,\, x \in M\}$.

Известно [8], что если A – какой-либо вполне непрерывный оператор, то $s_k(A)$ (k =1,2,…) совпадают с k–поперечником по Колмогорову множества M=AS, на которое оператор A отображает единичный шар S=$\{x \in H$: $\|x\| \leqslant 1\}$.

Формулировка основных результатов.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

i) $|a(y)| \geqslant \delta_0 > 0$, $c(y) \geqslant \delta > 0$ — *непрерывные функции на отрезке* [-1,1].

Тогда

а) оператор $(L + \lambda E)$ при λ >0 непрерывно обратим;

б) операторы $r(y)D_x(L+\lambda E)^{-1}, r(y)D_y(L+\lambda E)^{-1}$ ограничены в $L_2(\Omega)$, где $r(y)$ — непрерывная функция на отрезке [-1,1]. Здесь $D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}$;

в) оператор $r(y)D_x^\alpha(L + \lambda E)^{-1}$ — вполне непрерывен, если $0 \leqslant \alpha < 1$.

.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для собственных чисел по Шмидту справедлива оценка*

$$\frac{1}{k}c^{-1} \leqslant s_k \leqslant c\frac{1}{k^{1/2}}, \qquad k = 1, 2, ...,$$

где c >0 не зависит от k.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено условие i). Тогда*
а) спектр $\sigma(L^{-1})$ — дискретное множество;
б) для любого $\lambda \in \sigma(L^{-1})$, отличного от нуля справедлива оценка

$$|\lambda_k| \leqslant c\frac{1}{k^{1/2}}, \quad k = 1, 2, ...,$$

где $c>0$ не зависит от k.

Напомним [8], что через σ_p обозначают множество всех вполне непрерывных операторов таких, что

$$\|A\|^p_{\sigma_p} = \sum_{k=1}^{\infty} s^p_k(A) < \infty,$$

где $s_k(A)$ — собственные числа по Шмидту вполне непрерывного оператора А.

В следующей теореме приведено утверждение о принадлежности резольвенты оператора (1) классу σ_p.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнено условие i). Тогда резольвента оператора L принадлежит классу σ_p, если $p>2$.*

Отметим, что результаты данной работы частично анонсировались в [13—14].

Для доказательства теорем 1—4 нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений и оценок.

Вспомогательные леммы и неравенства.

Л е м м а 1. *Пусть выполнено условие i). Тогда оператор $(L + \lambda E)$ при $\lambda \geqslant 0$ непрерывно обратим и для него справедливо равенство*

$$(L + \lambda E)^{-1} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (l_n + \lambda E)^{-1} f_n e^{inx} \tag{2}$$

в смысле $L_2(\Omega)$, где $(l_n + \lambda E)^{-1}$ — обратный оператор к замкнутому оператору $(l_n + \lambda E)$ первоначально, определяемому на $C_0^\infty(-1, 1)$ равенством

$$(l_n + \lambda E)u = -u''(y) + (n^2 k()y) + ina(y) + c(y) + \lambda)u(y). \tag{3}$$

Доказательство этой леммы можно найти в работе [6].

Л е м м а 2. *Пусть оператор $(l_n+\lambda E)$ определен равенством (3) на множестве $C_0^\infty(-1, 1)$ $(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$ и пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка*

$$\left\|(l_n + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \leqslant \frac{c}{\lambda^{1/2}},$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Для любого $u(y) \in C_0^\infty(-1, 1)$имеем

$$\langle(l_n + \lambda E)u, u\rangle = \int_{-1}^{1} \Big[|u|^2 + (n^2 k(y) + ina(y) + c(y) + \lambda)|u|^2\Big] dy. \tag{4}$$

Отсюда с учетом условия i) находим

$$|\langle(l_n+\lambda E)u,u\rangle| \geqslant \left|\int\limits_{-1}^{1} ina(y)|u|^2dy\right| \geqslant |n|\delta_0\|u\|^2.$$

Теперь, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$\|(l_n+\lambda E)u\|_2 \geqslant |n|\delta_0\|u\|_2, \quad n=\pm1,\pm2,\, ... \tag{5}$$

Из (4) и неравенства Коши с ε =1 вытекает, что

$$\frac{1}{2}\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \geqslant \int\limits_{-1}^{1}\left[\left|u'\right|^2+(c(y)+\lambda)|u|^2\right]dy - \int\limits_{-1}^{1} n^2|k(y)||u|^2dy.$$

Пользуясь условием i) и тем, что λ >0, получаем

$$\frac{1}{2}\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left[\left|u'\right|^2+(c(y)+\lambda)|u|^2\right]dy - \int\limits_{-1}^{1} n^2|k(y)||u|^2dy \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6), окончательно имеем

$$c^2\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \geqslant \lambda\|u\|_2^2, n=0,\pm1,\pm2,\, ...$$

Здесь учитывалось, что при n= 0 имеем оператор Штурма-Лиувилля и для него справедлива последняя оценка. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \leqslant \frac{1}{|n|\cdot\delta_0}, n=\pm1,\pm2,... \tag{7}$$

Доказательство леммы 3 следует из неравенства (5).

Л е м м а 4. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедлива оценка*

$$\left\|\frac{d}{dy}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \leqslant c, \quad n=\pm1,\pm2,\, ...$$

где $c>0$ — постоянное число.

Доказательство. Благодаря условию i) и неравенствам (5) и (6) получаем, что для любого $u\in D(l_n)$

$$c\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \geqslant \left\|u'\right\|_2^2+\|u\|_2^2,$$

где $c>0$ не зависит от u и n.

Отсюда

$$\left\|\frac{d}{dy}((l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} = \sup_{f\in\alpha_2(-1,1)}\frac{\left\|\frac{d}{dy}((l_n+\lambda E)^{-1}f\right\|_2}{\|f\|_2} =$$

$$= \sup_{u\in D(l_n+\lambda E)}\frac{\|u'\|_2}{\|(l_n+\lambda E)u\|_2} \leqslant c<\infty.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству основных теорем.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство пункта а) теоремы 1 сразу вытекает из леммы 1.

Докажем пункт б) теоремы 1. В силу пункта а) и леммы 3 имеем

$$\left\|r(y)D_x(L+\lambda E)^{-1}\tilde{f}_k\right\|_2^2=\left\|r(y)\sum_{n=-k}^{k}in(l_n+\lambda E)^{-1}f_ne^{inx}\right\|_2^2=$$

$$=\sum_{n=-k}^{k}\left\|r(y)in(l_n+\lambda E)^{-1}f_ne^{inx}\right\|_2^2\leqslant\max_{y\in[-1,1]}|r(y)|\sum_{n=-k}^{k}n^2\left\|(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\times$$
$$\times\|f_n\|_2^2\leqslant c_0\sup_{\{n\}}|n|^2\left\|(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\sum_{n=-k}^{k}\|f_n\|_2^2\leqslant\tfrac{c_0}{\delta_0^2}\left\|\tilde{f}_k\right\|_2^2,$$

$$\tilde{f}_k(x,y)=\sum_{n=-k}^{k}f_n\cdot e^{inx},\quad ||\tilde{f}_k-f||_2\to0\ \text{ при } k\to\infty.$$

Отсюда, переходя к пределу, имеем

$$\left\|r(y)D_x(L+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\leqslant\frac{c_0}{\delta_0}<\infty.$$

Далее вычислим норму

$$\left\|r(y)D_y(L+\lambda E)^{-1}\tilde{f}_k\right\|_2^2=\sum_{n=-k}^{k}\left\|r(y)\tfrac{d}{dy}(l_n+\lambda E)^{-1}f_n(y)\right\|_2^2\leqslant$$
$$\leqslant\max_{y\in[-1,1]}|r(y)|\sum_{n=-k}^{k}\left\|\tfrac{d}{dy}(l_n+\lambda E)^{-1}f_n\right\|_2^2\leqslant c_0\sum_{n=-k}^{k}\left\|\tfrac{d}{dy}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}^2\cdot\|f_n\|_2^2.$$

Отсюда в силу леммы 4, переходя к пределу, получаем, что

$$\left\|r(y)D_y(L+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\leqslant c<\infty.$$

Пункт б) теоремы 1 доказан.

Пользуясь представлением оператора и определением дробной производной, получаем, что

$$r(y)D_x^{\alpha}(L+\lambda E)^{-1}\tilde{f}_k=r(y)e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\sum_{n=0}^{k}n^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}f_n(y)e^{inx}+$$
$$+r(y)^{\frac{-i\pi\alpha}{2}}\sum_{n=-k}^{1}|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}f_n(y)e^{inx}.$$

Из леммы 1 следует, что $(l_n+\lambda E)$ имеет непрерывный обратный оператор $(l_n+\lambda E)^{-1}$, а из леммы 4 ясно, что область значений оператора $(l_n+\lambda E)^{-1}$принадлежит $W_2^1(-1,1)$ для любого n. Тогда из известных теорем соболевского пространства ([10]) следует, что оператор $r(y)(l_n+\lambda E)^{-1}$ вполне непрерывен для каждого n и при этом справедливо неравенство

$$\left\|r(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}f\right\|_{2\to2}\leqslant\frac{|n|^{\alpha}}{|n|\cdot\delta_0},\quad 0\leqslant\alpha<1,\quad n=\pm1,\pm2,\ldots\qquad(8)$$

Последнее неравенство следует из леммы 3.

Так как для каждого n оператор $r(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}$вполне непрерывен из L_2в L_2, то из известных теорем для вполне непрерывных операторов ([11]) следует, что оператор $r(y)D_x^{\alpha}(L+ +\lambda E)^{-1}$ вполне непрерывен, если

$$\mu=\lim_{|n|\to\infty}\mu=\lim_{|n|\to\infty}\left\|r(y)|n|^{\alpha}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2}=0$$

Из (8) видно, что $\mu{\to}0$ при $n\to\infty$. Вполне непрерывность оператора $r(y)D_x^{\alpha}(L+ +\lambda E)^{-1}$ доказана. Теорема 1 доказана полностью.

Для дальнейшего изложения нам необходимы некоторые важные оценки и включения.

Введем следующие множества:

$$\begin{aligned}
&M=\Big\{u\in L_2(\Omega):\|Lu\|_2^2+\|u\|_2^2\leqslant 1\Big\},\\
&\tilde{M}_c=\Big\{u\in L_2(\Omega):\|u_x\|_2^2+\|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2\leqslant c\Big\},\\
&\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}}=\Big\{u\in L_2(\Omega):\|u_{xx}\|_2^2+\|u_{yy}\|_2^2+\|u_x\|_2^2+\|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2\leqslant c^{-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Л е м м а 5. *Пусть выполнено условие* i). *Тогда справедливы следующие включения:*

$$\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}}\subseteq M\subseteq\tilde{M}_c,$$

где $c>0$ *— постоянная, не зависящая от* $u(x,y)$.

Доказательство. Пусть $u(x,y)\in\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\|Lu\|_2^2+\|u\|_2^2=\|-k(y)u_{xx}-u_{yy}+a(y)u_x+c(y)u\|_2^2+\|u\|_2^2\leqslant\\
&\leqslant\|-k(y)u_{xx}\|_2^2+\|u_{yy}\|_2^2+\|a(y)u_x\|_2^2+\|c(y)u\|_2^2+\|u\|_2^2\leqslant\\
&\leqslant c(\|u_{xx}\|_2^2+\|u_{yy}\|_2^2+\|u_x\|_2^2+\|u\|_2^2)\leqslant c(\|u_{xx}\|_2^2+\|u_{yy}\|_2^2+\|u_x\|_2^2+\\
&+\|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2)\leqslant c\cdot c^{-1}\leqslant 1,
\end{aligned}$$

где

$$c=\max_{y\in[-1,1]}\{|k(y)|,|a(y)|,|c(y)|\}$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\tilde{M}}_{c^{-1}}\subseteq M.$$

Пусть теперь $u\in M$. Тогда в силу пункта б) теоремы 1 имеем

$$\|u_x\|_2^2+\|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2)\leqslant c(\|Lu\|_2^2+\|u\|_2^2)\leqslant c$$

т.е.

$$M\subseteq\tilde{M}_c.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 6. *Пусть выполнено условие* i). *Тогда справедлива оценка*

$$c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k\leqslant s_{k+1}\leqslant c\tilde{d}_k,\qquad k=1,2,...,$$

где $c>0$ *— некоторая постоянная,* s_{k+1} *— сингулярные числа оператора* L^{-1}; $\tilde{d}_k,\tilde{\tilde{d}}_k$ *— поперечники соответствующих множеств* $\tilde{M}$, $\tilde{\tilde{M}}$.

Доказательство. Из леммы 5 и свойств поперечников следует, что

$$c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k \leqslant d_k \leqslant c\tilde{d}_k.$$

Отсюда, учитывая равенство $s_{k+1} = d_k$ ([8-9]), получаем доказательство леммы 6.

Введём следующую функцию $N(\lambda) = \sum\limits_{d_k>\lambda} 1$ – количество d_k, больших $\lambda > 0$.

Л е м м а 7. *Пусть выполнено условие леммы 5. Тогда справедлива оценка*

$$\tilde{\tilde{N}}(c\lambda) \leqslant N(\lambda) \leqslant \tilde{N}(c^{-1}\lambda), \tag{9}$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{s_{k+1}>\lambda} 1$, $\tilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{d}_k>\lambda} 1$, $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{\tilde{d}}_k>\lambda} 1.$

Доказательство. Пользуясь леммой 6, находим

$$N(\lambda) = \sum_{s_{k+1}>\lambda} 1 \leqslant \sum_{c\tilde{d}_k>\lambda} 1 = \sum_{\tilde{d}_k>c^{-1}\lambda} 1 = \tilde{N}(c^{-1}\lambda).$$

Аналогично

$$\tilde{\tilde{N}}(c\lambda) = \sum_{\tilde{\tilde{d}}_k>c\lambda} 1 = \sum_{c^{-1}\tilde{\tilde{d}}_k>\lambda} 1 \leqslant \sum_{s_{k+1}>\lambda} 1 = N(\lambda).$$

Откуда мы окончательно приходим к неравенству (9). Лемма доказана.

Перейдём теперь к доказательству теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2.

Для функций $\tilde{N}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{d}_k>\lambda} 1$, $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum\limits_{\tilde{\tilde{d}}_k>\lambda} 1$ справедливы оценки (доказательство оценок можно найти в работе [9]):

$$c^{-1}\lambda^{-2} \leqslant \tilde{N}(\lambda) \leqslant c\lambda^{-2}, \tag{10}$$

$$c^{-1}\lambda^{-1} \leqslant \tilde{\tilde{N}}(\lambda) \leqslant c\lambda^{-1}, \tag{11}$$

где c не зависит от λ >0.

Пусть $\lambda = \tilde{d}_k$, тогда $\tilde{N}(\tilde{d}_k) = k$ и из (10) следует, что

$$c^{-1}d_k^{-2} \leqslant k \leqslant cd_k^{-2}.$$

Отсюда

$$c^{-1}\frac{1}{k^{1/2}} \leqslant \tilde{d}_k \leqslant c\frac{1}{k^{1/2}}.$$

Точно так же имеем

$$c^{-1}\frac{1}{k} \leqslant \tilde{\tilde{d}}_k \leqslant c\frac{1}{k}.$$

Теперь, пользуясь леммой 6, получаем, что

$$c^{-1}\frac{1}{k} \leqslant s_k \leqslant c\frac{1}{k^{1/2}}, \quad k = 1, 2, ... \tag{12}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

Для вполне непрерывных операторов справедливо неравенство Вейля [8]:

$$\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{k} s_j(A), \quad k = 1,\ 2,\ ..., \tag{13}$$

где A — вполне непрерывный оператор, $\lambda_j(A)$ — собственные числа, пронумерованные в порядке невозрастания абсолютных величин, $s_j(A)$ — сингулярные числа, расположенные в невозрастающем порядке.

Из (12) и (13) имеем при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$|\lambda_k|^k \leqslant \prod_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \prod_{j=1}^{k} s_j \leqslant c^k (k!)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далее, используя неравенство $e^k k! > k^k \quad (k = 1, 2, ...)$, находим

$$|\lambda_k|^k \leqslant c^k (k!)^{-\frac{1}{2}} \leqslant c^k e^{\frac{k}{2}} k^{-\frac{k}{2}}.$$

Отсюда окончательно имеем

$$|\lambda_k| \leqslant c k^{-\frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, ...$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Доказательство утверждения теоремы 4 непосредственно вытекает из теорем 1—2.

Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** //Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, № 8. С.1418—1425.

2. **Моисеев Е.И.** //ДАН СССР. 1978. Т.242. С.48—51.

3. **Моисеев Е.И.** Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа. Автореферат док. дисс. Москва, МГУ, 1980.

4. **Пономарев С.М.** //ДАН СССР. 1977.

5. **Моисеев Е.И.** Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М. 1988.

6. **Кальменов Т.Ш.** //Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 3. С.546—547.

7. **Муратбеков М.Б.** //Дифференциальные уравнения, 1981. Т.17, № 5. С.893—901.

8. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. 1965.

9. **Исмагилов Р.С.** // Функц. анализ. 1968. 2:2, С.32—39.

10. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. 1988.

11. **Ахиезер Н.И., Глазман И.П.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. 1966.

12. **Бирман М.Ш., Соломяк М.З.** //Сб. трудов “Десятая математическая школа”. Киев, 1974.

13. **Муратбеков М.М.** // Труды Международной конференции “Современные проблемы механики”. Алматы, 2001. С.210—211.

14. **Муратбеков М.М.** // Тезисы Международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Алматы, 2001. С.47—48.

Поступила в редакцию 22.06.2004 г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 61 – 67*

УДК 517.956.3

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Н. Оспанов

Институт Математики МОН РК
050010 г. Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Получены достаточные условия существования единственного ограниченного на всей оси решения семейства систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами и правой частью и установлена его оценка. Результаты использованы для нахождения условий существования и единственности ограниченного на полосе решения систем гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами и правой частью.

На $R = (-\infty; \infty)$ рассматривается семейство систем дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x,t)V + F(x,t), \quad V \in R^n, \quad x \in [0,\omega]. \tag{1}$$

Через $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство ограниченных функций $V : \overline{\Omega} \to R^n$, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0,\omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0,\omega]$ с нормой

$$\|V\|_* = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|V(x,t)\|, \quad \|V(x,t)\| = \max_{i=1,\dots,n} |V_i(x,t)|, \quad \overline{\Omega} = [0;\omega] \times (-\infty;\infty).$$

Предполагается, что элементы $(n \times n)$-матрицы $A(x,t)$ и n-вектор-функция $F(x,t)$ непрерывны и, вообще говоря, неограничены в $\overline{\Omega}$. Исследуется решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$V(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n). \tag{2}$$

Функция $V^*(x,t)$ из $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая на $\overline{\Omega}$ непрерывную производную по t, называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$.

Задача (1), (2) при фиксированном $\overline{x} \in [0,\omega]$ является задачей нахождения ограниченного на всей оси решения, которая исследована различными методами, обзор и библиографию по

Keywords: *bounded solution, family of systems of ordinary differential equations, unbounded coefficient, system of hyperbolic equations*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70

ним можно найти в [1—4]. В настоящей работе задача (1), (2) исследуется при выполнении следующих предположений:

i) в матрице $A(x,t)$ имеет место диагональное преобладание по строкам с непрерывной функцией $\theta(x,t)$, т.е.

$$|a_{ii}(x,t)| \geq \sum_{i\neq j} |a_{ij}(x,t)| + \theta(x,t), \quad \text{где} \quad \theta(x,t) \geq \alpha > 0, \ i = \overline{1,n}, \quad \alpha - const;$$

ii) для любых $(x,t) \in \overline{\Omega}$ имеет место неравенство $\quad \dfrac{\theta(x,t)}{|a_{ii}(x,t)|} \geq \eta > 0; \quad \eta - const;$

iii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|x - \overline{x}| < \delta, \quad x, \overline{x} \in [0,\omega]$, следует неравенство

$$\left|\frac{\theta(x,t) - \theta(\overline{x},t)}{\theta(x,t)}\right| < \varepsilon \qquad \text{для всех } t \in R.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: a)элементы матрицы $A(x,t)$ удовлетворяют предположениям i), ii),iii); b) столбцы матрицы $\dfrac{A(x,t)}{\theta(x,t)}$ и вектор-функция $\dfrac{F(x,t)}{\theta(x,t)}$ принадлежат пространству $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$.*

Тогда задача (1),(2) имеет единственное решение $V^*(x,t)$ и для него справедлива оценка

$$\|V^*(x,\cdot)\|_1 = \sup_{t\in R} \|V^*(x,t)\| \leq \left\|\frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\right\|_1, \quad x \in [0,\omega]. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in [0,\omega]$ – любая фиксированная точка. Из непрерывности элементов матрицы $A(\overline{x},t)$ по переменной t следует ее ограниченность на любом компакте $[-T,T]$. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{dV_T}{dt} = A(\overline{x},t)V_T + F(\overline{x},t), \quad t \in (-T,T),$$

$$V_T(-T) = V_T(T).$$

В работе [4] эта задача исследована методом параметризации и установлено существование единственного решения $V_T^*(\overline{x},t)$, а также справедливость оценки

$$\max_{t\in[-T;T]} \|V_T^*(\bar{x},t)\| \leq \max_{t\in[-T;T]} \left\|\frac{F(\bar{x},t)}{\theta(\bar{x},t)}\right\|. \tag{4}$$

Так как семейство функций $V_T^*(\overline{x},t)$ относительно T ограничено, то из него стандартным диагональным методом можно выделить подпоследовательность $V_{T'}^*(\overline{x},t)$, сходящуюся к ограниченному на R решению $V^*(\overline{x},t)$ уравнения (1) при всех $t \in R$, т. е.

$$\lim_{T'\to\infty} V_{T'}^*(\overline{x},t) = V^*(\overline{x},t), \quad t \in R.$$

Оценка (4) справедлива при любом $T > 0$. Поэтому, подставляя вместо T T' и переходя в (4) к пределу при $T' \to \infty$, получим

$$\sup_{t\in R} \|V^*(\overline{x},t)\| \leq \sup_{t\in R} \left\|\frac{F(\overline{x},t)}{\theta(\overline{x},t)}\right\|. \tag{5}$$

Неравенство (5) справедливо для любого $\overline{x} \in [0, \omega]$ и из него следует оценка (3). Теперь покажем, что $V^*(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. Пусть $x_1 \in [0,\omega]$, $x_2 \in [0,\omega]$, а $V(x_1,t)$ и $V(x_2,t)$ — соответствующие им решения задачи (1), (2). Тогда

$$\frac{dV(x_1,t)}{dt} = A(x_1,t)V(x_1,t) + F(x_1,t), \tag{6a}$$

$$\frac{dV(x_2,t)}{dt} = A(x_2,t)V(x_2,t) + F(x_2,t), \tag{6б}$$

и полагая $\Delta V(x_1,x_2,t) = V(x_1,t) - V(x_2,t)$, $\quad \Delta A(x_1,x_2,t) = A(x_1,t) - A(x_2,t)$, имеем

$$\frac{d\Delta V(x_1,x_2,t)}{dt} = A(x_1,t)\Delta V(x_1,x_2,t) + \widetilde{F}(\Delta A(x_1,x_2,t), V(x_2,t), \Delta F(x_1,x_2,t)), \tag{7}$$

где $\widetilde{F}(\Delta A(x_1,x_2,t), V(x_2,t), \Delta F(x_1,x_2,t)) = \Delta F(x_1,x_2,t) - \Delta A(x_1,x_2,t)V(x_2,t)$.
В матрице $A(x_1,t)$ имеет место диагональное преобладание по строкам с непрерывной функцией $\theta(x_1,t)$. Так как

$$\left\| \frac{\widetilde{F}(\Delta A(x_1,x_2,t), V(x_2,t), \Delta F(x_1,x_2,t))}{\theta(x_1,t)} \right\| = \left\| \frac{\Delta F(x_1,x_2,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{\Delta A(x_1,x_2,t)}{\theta(x_1,t)} V(x_2,t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{F(x_1,t) - F(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{A(x_1,t) - A(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} V(x_2,t) \right\| \le \left\| \frac{F(x_1,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{F(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \cdot \frac{\theta(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\frac{A(x_1,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{A(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \cdot \frac{\theta(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} \right) V(x_2,t) \right\| \le \left\| \frac{F(x_1,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{F(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{F(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \cdot \frac{\theta(x_1,t) - \theta(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} \right\| + \left\| \frac{A(x_1,t)}{\theta(x_1,t)} - \frac{A(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \right\| \cdot \|V(x_2,t)\| +$$

$$+ \left\| \frac{A(x_2,t)}{\theta(x_2,t)} \cdot \frac{\theta(x_1,t) - \theta(x_2,t)}{\theta(x_1,t)} \right\| \cdot \|V(x_2,t)\|,$$

то из предположения теоремы и ограниченности на $\overline{\Omega}$ функции $V(x,t)$ следует что вектор-функция
$\dfrac{\widetilde{F}(\Delta A(x_1,x_2,t), V(x_2,t), \Delta F(x_1,x_2,t))}{\theta(x_1,t)}$ непрерывна и ограничена на R для любых $x_1, x_2 \in [0,\omega]$.
Тогда согласно теореме 4 из [4] справедлива оценка

$$\|\Delta V(x_1,x_2,\cdot)\|_1 \le \left\| \frac{F(x_1,\cdot)}{\theta(x_1,\cdot)} - \frac{F(x_2,\cdot)}{\theta(x_2,\cdot)} \right\|_1 + \left\| \frac{F(x_2,\cdot)}{\theta(x_2,\cdot)} \cdot \frac{\theta(x_1,\cdot) - \theta(x_2,\cdot)}{\theta(x_1,\cdot)} \right\|_1 +$$

$$+ \left\| \frac{A(x_1,\cdot)}{\theta(x_1,\cdot)} - \frac{A(x_2,\cdot)}{\theta(x_2,\cdot)} \right\|_1 \cdot \|V(x_2,\cdot)\|_1 + \left\| \frac{A(x_2,\cdot)}{\theta(x_2,\cdot)} \cdot \frac{\theta(x_1,\cdot) - \theta(x_2,\cdot)}{\theta(x_1,\cdot)} \right\|_1 \cdot \|V(x_2,\cdot)\|_1 .$$

Отсюда вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $||\Delta V(x_1,x_2,t)|| < \varepsilon$, как только $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [0,\omega]$ для любого $t \in R$, т.е. $V^*(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$.

Докажем единственность решения задачи (1),(2). Пусть $\widetilde{V}(x,t)$ также является решением задачи(1),(2). Тогда разность $\Delta\overline{V}(x,t) = V^*(x,t) - \widetilde{V}(x,t)$ является решением однородного уравнения, соответствующего (1), и вектор-функции $\Delta\overline{V_i}(x,t)$ $(i = \overline{1,n})$ удовлетворяют скалярным уравнениям, причем для любого $\overline{x} \in [0,\omega]$

$$\frac{d\Delta\overline{V_i}}{dt} = a_{ii}(\overline{x},t)\Delta\overline{V_i} + \sum_{i \ne j} a_{ij}(\overline{x},t)\Delta\overline{V_j}, \qquad \overline{x} \in [0,\omega]. \tag{8}$$

Если $|a(\overline{x},t)| \geq \gamma > 0$ — непрерывная на R функция, то скалярное уравнение $\dot{z} = a(\overline{x},t)z$ имеет только нулевое ограниченное на R решение. Действительно, если $\dot{z} = a(\overline{x},t)z(\overline{x},t)$ и $z(\overline{x},t_0) \neq 0$, то из представления решения $z(\overline{x},t) = \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} a(\overline{x},\tau)d\tau\right] z(\overline{x},t_0)$ следует, что $z \to \infty$ при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$. Поэтому $\triangle\overline{V_i}(x,t)$ является единственным ограниченным на R решением уравнения (8) и для него справедлива оценка

$$\sup_{t\in R}|\triangle\overline{V_i}(\overline{x},t)| \leq \sup_{t\in R}\sum_{i\neq j}\frac{|a_{ij}(\overline{x},t)|}{|a_{ii}(\overline{x},t)|}\sup_{t\in R}|\triangle\overline{V_j}(\overline{x},t)|.$$

Отсюда в силу предположений относительно матрицы $A(x,t)$ имеем

$$\sup_{t\in R}\left|\triangle\overline{V_i}(\overline{x},t)\right| \leq \sup_{t\in R}\left|1-\frac{\theta_i(\overline{x},t)}{a_{ii}(\overline{x},t)}\right|\sup_{t\in R}\left|\triangle\overline{V_i}(\overline{x},t)\right| \leq (1-\eta)|\sup_{t\in R}|\triangle\overline{V_i}(\overline{x},t)|,\ i=\overline{1,n}, \tag{9}$$

которое показывает, что $\triangle V(\overline{x},t) = 0$. Неравенство (9) справедливо для любого $\overline{x} \in [0,\omega]$ и поэтому $\Delta V(x,t) = 0$ или $V^*(x,t) = \widetilde{V}(x,t)$ при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$.

Теорема 1 доказана.

С помощью доказанной теоремы исследуем задачу нахождения решения системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x} = A(x,t)\frac{\partial U}{\partial x} + C(x,t)U + F(x,t), \qquad U \in R^n, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{10}$$

удовлетворяющего условиям

$$U(0,t) = \psi(t), \quad \frac{\partial U}{\partial x} \in C_*(\bar{\Omega}, R^n). \tag{11}$$

Здесь столбцы $(n\times n)$ – матриц $A(x,t), C(x,t)$ и n-вектор-функция $F(x,t)$ непрерывны и, вообще говоря, неограничены в $\bar{\Omega}$, а $\psi(t)$– непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная на R вместе со своей производной $\dot{\psi}^t$. Кроме того, относительно матрицы $A(x,t)$ предполагаются выполненными условия i) – iii).

Задача нахождения решения, удовлетворяющего условиям (11), для более общей системы гиперболических уравнений с ограниченными коэффициентами и правой частью рассмотрена в [6].

Непрерывная функция $U : \bar{\Omega} \to R^n$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t\partial x}$, называется классическим решением задачи (10), (11), если она удовлетворяет системе (10) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и дополнительным условиям (11).

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и столбцы матрицы* $\dfrac{C(x,t)}{\theta(x,t)}$ *принадлежат пространству* $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$.

Тогда задача (10), (11) имеет единственное классическое решение $V(x,t)$ *и справедливы следующие оценки:*

$$||U(x,\cdot)||_1 \leq \|K(x,\cdot)\|_1\|\psi(\cdot)\|_1 + \int\limits_0^x \Big|\Big|\frac{F(\xi,\cdot)}{\theta(\xi,\cdot)}\Big|\Big|_1 ||K(\xi,\cdot)||_1 d\xi, \tag{12}$$

$$\Big|\Big|\frac{\partial U(\xi,\cdot)}{\partial x}\Big|\Big|_1 \leq \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 \cdot ||K(x,\cdot)||_1 \cdot ||\psi(\cdot)||_1 +$$

$$+\Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1\cdot\int\limits_0^x\Big|\Big|\frac{F(\xi,\cdot)}{\theta(\xi,\cdot)}\Big|\Big|_1\cdot||K(\xi,\cdot)||_1d\xi+\Big|\Big|\frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1, \tag{13}$$

где $||K(x,\cdot)||_1=\exp\int\limits_0^x\Big|\Big|\dfrac{C(\xi,\cdot)}{\theta(\xi,\cdot)}\Big|\Big|_1d\xi,\qquad ||\psi(\cdot)||_1=\sup\limits_{t\in R}||\psi(t)||.$

Доказательство. Введем неизвестную функцию $V(x,t)=\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}$ и задачу (10), (11) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=A(x,t)V+C(x,t)U(x,t)+F(x,t),\qquad V(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n), \tag{14}$$

$$U(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x V(\xi,t)d\xi. \tag{15}$$

В задаче (14),(15) условие $U(0,t)=\psi(t)$ учтено в соотношении (15). Пару непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\{V(x,t),U(x,t)\}$ назовем решением задачи (14),(15), если функция $V(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n)$ имеет непрерывную на $\overline{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству систем дифференциальных уравнении (14), где функция $U(x,t)$ связана с $V(x,t)$ функциональным соотношением (15).

Решение задачи (14),(15)-пару $\{V(x,t),U(x,t)\}$ найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $U(x,t)$ возьмем $\psi(t)$, а $V^{(0)}(x,t)$ найдем, как решение задачи

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial t}=A(x,t)V^{(0)}+C(x,t)\psi(t)+F(x,t),\qquad (x,t)\in\overline{\Omega},\qquad V^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n). \tag{16}$$

По теореме 1 существует единственное решение задачи (16) – функция $V^{(0)}(x,t)$ и справедлива оценка

$$||V^{(0)}(x,\cdot)||_1\le\Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1||\psi(\cdot)||_1+\Big|\Big|\frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1. \tag{17}$$

Функцию $U^{(0)}(x,t)$ найдем из соотношения $U^{(0)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x V^{(0)}(\xi,t)d\xi$ и для него имеем

$$||U^{(0)}(x,\cdot)||_1\le||\psi(\cdot)||_1+\int\limits_0^x\Big\{\Big|\Big|\frac{C(\xi,\cdot)}{\theta(\xi,\cdot)}\Big|\Big|_1||\psi(\cdot)||_1+\Big|\Big|\frac{F(\xi,\cdot)}{\theta(\xi,\cdot)}\Big|\Big|_1\Big\}d\xi. \tag{18}$$

Так как $U^{(0)}(\overline{x},t)-U^{(0)}(\widehat{x},t)=\int\limits_{\overline{x}}^{\widehat{x}}V^{(0)}(\xi,t)d\xi$ для любых $\overline{x},\widehat{x}\in[0,\omega]$ и $V(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n)$, то функция $V^{(0)}(x,t)$ принадлежит пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$.

Предполагая, что известны $U^{(k-1)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n)$, функцию $V^{(k)}(x,t)$ найдем, как решение задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t}=A(x,t)V+C(x,t)U^{(k-1)}(x,t)+F(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega},\quad V(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n). \tag{19}$$

Вновь к задаче (19) применяя теорему 1, найдем $V^{(k)}(x,t)$, и следующие приближения по $U(x,t)$ определяем из соотношений:

$$U^{(k)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x V^{(k)}(\xi,t)d\xi,\qquad k=1,2,... \tag{20}$$

и по вышеизложенной схеме устанавливаем, что каждая из функций $V^{(k)}(x,t)$, $U^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,...$, будет принадлежать пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$.
Составим разности $\Delta V^{(k)}(x,t)=V^{(k)}(x,t)-V^{(k-1)}(x,t)$, $\Delta U^{(k)}(x,t)=U^{(k)}(x,t)-U^{(k-1)}(x,t)$, $k=1,2,...$, и для них с помощью (17)-(18) установим оценки

$$||\Delta V^{(k)}(x,\cdot)||_1 \le \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 ||\Delta U^{(k-1)}(x,\cdot)||_1, \qquad k=1,2,..., \tag{21}$$

$$||\Delta U^{(k)}(x,\cdot)||_1 \le \int\limits_0^x ||\Delta V^{(k)}(\xi,\cdot)||_1 d\xi, \qquad k=1,2,..., \tag{22}$$

откуда следуют основные неравенства

$$||\Delta V^{(k)}(x,\cdot)||_1 \le \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 \int\limits_0^x ||\Delta V^{(k-1)}(\xi,\cdot)||_1 d\xi, \qquad k=1,2,..., \tag{23}$$

$$||\Delta U^{(k)}(x,\cdot)||_1 \le \int\limits_0^x \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 ||\Delta U^{(k-1)}(\xi,\cdot)||_1 d\xi, \qquad k=1,2,... \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует сходимость в норме пространства $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ последовательностей $V^{(k)}(x,t)$, $U^{(k)}(x,t)(k=1,2...)$ при $k\to\infty$. При этом предельные функции $V^{(*)}(x,t)$, $U^{(*)}(x,t)$ принадлежат пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ и пара функций $\{V^{(*)}(x,t),U^{(*)}(x,t)\}$ является решением задачи (14), (15).

Покажем единственность решения задачи (10), (11). Пусть система функций $\{\widetilde{V}(x,t)$, $\widetilde{U}(x,t)\}$ – другое решение рассматриваемой задачи. Тогда их разность $\{\Delta V(x,t)=V^{(*)}(x,t)-\widetilde{V}(x,t), \Delta U(x,t)=U^{(*)}(x,t)-\widetilde{U}(x,t)\}$ будет решением однородной задачи (14),(15), где $F(x,t)=0$, $\psi(t)=0$, т.е.

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial t}=A(x,t)\Delta V + C(x,t)\Delta U(x,t), \qquad \Delta V\in C_*(\overline{\Omega},R^n), \tag{25}$$

$$\Delta U(x,t)=\int\limits_0^x \Delta V(\xi,t)d\xi. \tag{26}$$

Так как $\dfrac{C(x,t)}{\theta(x,t)}\in C_*(\overline{\Omega},R^n), \Delta U(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n)$, то согласно теореме 1 из (25) следует неравенство

$$||\Delta V(x,\cdot)||_1 \le \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 ||\Delta U(x,\cdot)||_1. \tag{27}$$

Учитывая (26), аналогично (21),(22) установим оценку

$$||\Delta U(x,\cdot)||_1 \le \int\limits_0^x ||\Delta V(\xi,\cdot)||_1 d\xi \qquad (28),$$

и, подставив (28) в (27), получаем

$$||\Delta V(x,\cdot)||_1 \le \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 \int\limits_0^x ||\Delta V(\xi,\cdot)||_1 d\xi,$$

откуда $\Delta V(x,t)=0$.

Из (28), (27) имеем неравенство

$$||\Delta U(x,\cdot)||_1 \le \int_0^x \Big|\Big|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big|\Big|_1 ||\Delta U(\xi,\cdot)||_1 d\xi,$$

в силу которого $\Delta U(x,t)=0$ для всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Таким образом, задача (14), (15) имеет единственное решение.

Докажем справедливость оценок (12), (13). Пусть$\{V^*,U^*\}$ – решение задачи (14), (15), т.е.

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = A(x,t)V^*(x,t)+C(x,t)U^*(x,t)+F(x,t), \tag{29}$$

$$U^*(x,t)=\psi(t)+\int_0^x V^*(\xi,t)d\xi. \tag{30}$$

В силу принадлежности вектор-функций $\dfrac{C(x,t)V^*(x,t)}{\theta(x,t)}, \dfrac{F(x,t)}{\theta(x,t)}$ пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ на основе теоремы 1 из (29) имеем

$$\sup_{t\in R}||V^*(x,t)|| \le \sup_{t\in R}\Big|\Big|\frac{C(x,t)}{\theta(x,t)}\Big|\Big|\sup_{t\in R}||U^*(x,t)|| + \sup_{t\in R}\Big|\Big|\frac{F(x,t)}{\theta(x,t)}\Big|\Big|. \tag{31}$$

Ввиду(30),(31) справедлива оценка

$$\sup_{t\in R}||U^*(x,t)|| \le \sup_{t\in R}||\psi(t)|| + \int_0^x \sup_{t\in R}\Big|\Big|\frac{C(\xi,t)}{\theta(\xi,t)}\Big|\Big|\sup_{t\in R}||U^*(\xi,t)||d\xi + \int_0^x \sup_{t\in R}\Big|\Big|\frac{F(\xi,t)}{\theta(\xi,t)}\Big|\Big|d\xi, \tag{32}$$

откуда, используя неравенство Гронуолла-Бельмана, получаем (12).

Из (31) и (32) следует справедливость оценки (13).

Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.

2. **Массера Х., Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1970.

3. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.** // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С.776—787.

4. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С.388—404.

5. **Джумабаев Д. С.** Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для обыкновенных дифференциальных уравнений. Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Киев, 1994. 30с.

6. **Джумабаев Д. С.** // Доклады РАН. 2004. Т. 395, № 2. С.157—159.

Поступила в редакцию 27.07.2005 г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 68 — 74*

УДК 517.955.8

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ДВУХФАЗНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ МАСКЕТА-ВЕРИГИНА

М. А. Сахауева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125

Изучено асимптотическое поведение при больших значениях времени решения одномерной двухфазной вырожденной задачи Маскета-Веригина.

Пусть Ω — некоторая область двумерного пространства переменных (x,t), ограниченная областью D_0 на гиперплоскости $t=0$ и многообразием S в полупространстве $0<t<\infty$.

Предположим, что множество $D_\tau = \Omega \cap \{t = \tau\}$ для любого $\tau > 0$ является непустой ограниченной областью в пространстве переменной x. Пусть D_∞ — ограниченная, односвязная, одномерная область в пространстве переменной x. Обозначим через ∂D_t и ∂D_∞ границы областей D_t и D_∞, соответственно.

Пусть функция $z(x,t)$ определена в $\overline{\Omega}$, функция $z_0(x)$ — в $\overline{D}_\infty$.

Приведем некоторые необходимые определения [1, 2].

Определение 1. *Будем говорить, что $D_t \to D_\infty$ при $t\to\infty$, если*

а) для любого $\varepsilon>0$ существует T_0 такое, что для любых точек $(x_1,t)\in D_t$, $y_2\in D_\infty$ найдутся точки $(x_2,t)\in D_t$, $y_1\in D_\infty$, удовлетворяющие соотношениям $|x_1-y_1|<\varepsilon$, $|x_2-y_2|<\varepsilon$, как только $t\ge T_1$;

б) существует взаимно однозначное соответствие $x\leftrightarrow y$ между точками $y\in\partial D_\infty$ и точками x, для которых $(x,t)\in\partial D_t$ и при $t\to\infty$ $\sup\limits_{y\in\partial D_\infty}|x-y|\to 0$.

Определение 2. *Функция $z(x,t)$ стабилизируется к функции $z_0(y)$ при $x\to y$, $t\to\infty$, где $(x,t)\in\overline{\Omega}$, $y\in\overline{D}_\infty$ ($\lim\limits_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} z(x,t)=z_0(y)$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ и T_0 такие, что $|z(x,t)-z_0(y)|<\varepsilon$, как только $|x-y|<\delta$ и $t\ge T_0$. Если δ и T_0 не зависят от y, то $z(x,t)$ равномерно в $\overline{\Omega}$ стабилизируется к $z_0(y)$ при $x\to y$, $t\to\infty$.*

Keywords: *free boundary problem, parabolic equation, asymptotic behavior of solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A05,35K20

Введем следующие обозначения:

$$\Omega^{(1)} = \{(x,t):\ 0 < x < \alpha(t);\ t > 0\}, \quad \Omega^{(2)} = \{(x,t):\ \alpha(t) < x < b;\ t > 0\};$$
$$D_\tau^{(m)} = \Omega^{(m)} \cap \{t = \tau\},\ \tau > 0,\ m = 1,2;$$
$$D_0^{(1)} = \{x:\ 0 < x < \alpha_0\}, \quad D_0^{(2)} = \{x:\ \alpha_0 < x < b,\ 0 < \alpha_0 = \alpha(0) < b\};$$
$$\partial D_t^{(1)} = \{(x,t):\ x = 0,\ \alpha(t);\ t > 0\}, \quad \partial D_t^{(2)} = \{(x,t):\ x = \alpha(t),\ b;\ t > 0\};$$
$$L_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - a_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_m \text{ — параболический оператор}, \quad m = 1,2,$$

где $a_m,\ c_m$ — положительные постоянные.

Постановка задачи. Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\alpha(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$L_m u_m = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^{(m)},\ m = 1,2, \tag{1}$$
$$u_m\big|_{t=0} = u_{0m}(x),\ x \in \overline{D}_0^{(m)},\ m = 1,2, \tag{2}$$
$$\alpha(0) = \alpha_0, \tag{3}$$
$$u_1\big|_{x=0} = p_1(t), \quad u_2\big|_{x=b} = p_2(t),\ t > 0, \tag{4}$$
$$u_1\big|_{x=\alpha(t)} = u_2\big|_{x=\alpha(t)}, \quad t > 0, \tag{5}$$
$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

где λ_1, λ_2 — положительные постоянные.

Задача (1)—(6) является вырожденной задачей Маскета-Веригина. Вопросы существования и единственности решения данной задачи в весовом пространстве Гельдера изучены в [3]. В классической задаче Маскета-Веригина [4, 5] вместо условия (6) рассматривается условие

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\varkappa \frac{d\alpha}{dt},$$

где $\varkappa = const > 0$, при $\varkappa = 0$ будем иметь вырожденную задачу Маскета-Веригина (1)—(6), которая была поставлена Г.И.Бижановой.

Задача Маскета-Веригина описывает движение жидкости в пористой среде. Она возникает, например, в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес [6], когда в породы основания и береговых примыканий плотин нагнетаются цементные, глинистые, силикатные и другие растворы, заполняющие поры и трещины пород и придающие им водонепроницаемость; при нагнетании жидкости в пористую среду при внеконтурном заводнении нефтяных месторождений при вторичной добыче нефти.

В задаче (1)—(6) функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — давления нагнетаемой и вытесняемой жидкостей соответственно, движущихся в пористой среде без смешивания, $x = \alpha(t)$ — линия их раздела (свободная граница).

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1)—(6) при больших значениях времени.

Будем предполагать, что существует единственное решение задачи при $t > 0$ и заданные функции таковы, что $\alpha(t)$ является монотонной функцией, причем

$$0 < \beta < b, \quad \text{где} \quad \beta = \lim_{t \to \infty} \alpha(t). \tag{7}$$

Обозначим $D_\infty^{(1)} = \{x:\ 0 < x < \beta\}$, $D_\infty^{(2)} = \{x:\ \beta < x < b\}$, $\partial D_\infty^{(1)} = \{x:\ x = 0,\ \beta\}$, $\partial D_\infty^{(2)} = \{x:\ x = \beta,\ b\}$.

Стремление $D_t^{(m)}$ к $D_\infty^{(m)}$ при $t \to \infty$ $(m = 1, 2)$ будем понимать в смысле определения 1. Под сходимостью функций u_1, u_2 при $t \to \infty$ будем понимать их равномерную стабилизацию в смысле определения 2.

Замечание 1. *При выполнении условия (7) будет следовать, что* $D_t^{(m)} \to D_\infty^{(m)}$ *при* $t \to \infty$ $(m = 1, 2)$ *в смысле определения 1.*

Асимптотическое поведение решения задачи (1)—(6) будем изучать, пользуясь методами работ [1, 7].

Приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть функция*

$$z(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega^{(1)}) \cap C_{x,t}^{1,0}(\overline{D_t}^{(1)} \times t > 0) \cap C(\overline{\Omega}^{(1)}) \tag{8}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$L_1 z > 0, \quad (x,t) \in \Omega^{(1)},$$

$$z\big|_{t=0} > 0,\ x \in \overline{D}_0^{(1)}, \quad z\big|_{x=0} > 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} < 0, \quad t > 0.$$

Тогда $z(x,t) > 0$ *для любого* $(x,t) \in \{(x,t):\ x \in \overline{D}_t^{(1)},\ t \geq 0\}$.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть условие $z(x,t) > 0$ нарушается в точке $t = t_0$, $x \in \overline{D}_{t_0}^{(1)}$, причем в силу начального условия будем иметь $t_0 > 0$. Покажем, что в граничных точках области $D_{t_0}^{(1)}$: $x = 0$, $x = \alpha(t_0)$ $z(x,t_0) \neq 0$. В самом деле, из граничных условий следует, что $z(0,t_0) > 0$. Покажем, что и $z(\alpha(t_0),t_0) > 0$. Предположим противное: пусть $z(x,t_0) = 0$ при $x = \alpha(t_0)$. Тогда из граничного условия $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} < 0$ вытекает, что при $t = t_0$ в окрестности точки $x = \alpha(t_0)$ $z(x,t_0) < 0$. Отсюда и из непрерывности $z(x,t)$, в свою очередь, следует, что $z(x,t) < 0$ в окрестности $t = t_0$ при $t < t_0$, а это невозможно, так как при $t < t_0$ $z(x,t_0) > 0$. Таким образом, $z(x,t_0) = 0$ во внутренней точке области $D_{t_0}^{(1)} \equiv (0, \alpha(t_0))$. Положим для определенности, что $z(x,t_0) = 0$ в точке $x_0 \in D_{t_0}^{(1)}$. Учитывая, что $z(x,t_0) > 0$ при $x \in [0, x_0)$ и $(x_0, b]$, а также, что $z(x_0,t_0) = 0$, заключаем, что $z(x_0,t_0) = \min\limits_{x \in \overline{D}_{t_0}^{(1)}} z(x,t_0)$, причем необходимым условием минимума будут соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,t_0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,t_0) \geq 0.$$

Из последнего неравенства и из условия $\dfrac{\partial z}{\partial t} > a_1 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - c_1 z$ получим

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x_0,t_0) > 0. \tag{9}$$

С другой стороны, так как $z(x,t) > 0$ при $t \in [0, t_0)$, а при $t = t_0$ $z(x,t)$ достигает минимума, то $\dfrac{\partial z}{\partial t}(x_0,t_0) \leq 0$, что противоречит неравенству (9). Значит, наше предположение неверно, следовательно, внутри области $\{(x,t):\ x \in D_t^{(1)},\ t > 0\}$ функция $z(x,t)$ положительна.

Л е м м а 2. *Пусть функция $z(x,t)$ из (8) удовлетворяет условиям*

$$L_1 z = 0, \quad (x,t) \in \Omega^{(1)},$$

$$z\Big|_{t=0} = \chi_0(x),\ x \in \overline{D}_0^{(1)}, \quad z\Big|_{x=0} = \chi_1(t), \quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = \chi_2(t), \quad t > 0,$$

где $\chi_0(x)$ — непрерывная в $\overline{D}_0^{(1)}$ функция, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ — непрерывно-дифференцируемые при $t \geq 0$ функции; $\lim\limits_{t\to\infty} \chi_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \chi_2(t) = 0$, $D_t^{(1)} \to D_\infty^{(1)}$ при $t \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} z(x,t) = 0$ равномерно в $\overline{\Omega}^{(1)}$, где $y \in D_\infty^{(1)}$.

Доказательство. Введем функцию

$$\varphi(x) = e^{\frac{2b^2}{\sqrt{a_1}}} - e^{\frac{x}{\sqrt{a_1}}},$$

где $(x,t) \in \{(x,t):\ x \in \overline{D}_t^{(1)},\ t \geq 0\}$.

Обозначим $\mu_1 = \inf\limits_{\substack{x\in\overline{D}_t^{(1)}\\ t\geq 0}} \varphi(x)$, $\mu_2 = \sup\limits_{\substack{x\in\overline{D}_t^{(1)}\\ t\geq 0}} \varphi(x)$ (здесь $\mu_1,\ \mu_2$ будут ограниченными при любом $t \geq 0$ в силу ограниченности $D_t^{(1)}$ при любом $t \geq 0$).

Так как по условию $\lim\limits_{t\to\infty} \chi_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \chi_2(t) = 0$, то

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ T_0 \text{ такое, что } \ \forall t \geq T_0 \quad |\chi_m(t)| < \varepsilon,\ m = 1, 2. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x,t)$,

$$\psi(x,t) = \left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1} e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}}\right]\varphi(x), \tag{11}$$

где $b_1 = 1 + \frac{1}{\mu_0} + a_1$, $A,\ \mu_0$ — положительные постоянные.

Вычислим $L_1\psi = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + c_1\right)\psi$,

$$L_1\psi = \left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1} e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}}\right] L_1\varphi(x) - \frac{A}{\mu_1\mu_2} e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}} \varphi(x).$$

Учитывая, что в силу $c_1 > 0$

$$L_1\varphi = e^{\frac{x}{\sqrt{a_1}}} + c_1\big(e^{\frac{2b}{\sqrt{a_1}}} - e^{\frac{x}{\sqrt{a_1}}}\big) > 1 \text{ в } \Omega^{(1)},$$

а $\varphi(x) \leq \mu_2$, и принимая во внимание, что $b_1 > 1$, будем иметь

$$L_1\psi > \varepsilon, \quad (x,t) \in \Omega^{(1)} \cap \{t > T_0\}.$$

Вычислим граничные значения функции $\psi(x,t)$:

$$\psi\Big|_{x=0} = \left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1} e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}}\right]\left(e^{\frac{2b}{\sqrt{a_1}}} - 1\right) > \varepsilon,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = -\left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1} e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}}\right] \frac{1}{\sqrt{a_1}} e^{\frac{x}{\sqrt{a_1}}} < -\varepsilon.$$

Положим $A = \sup\limits_{x\in\overline{D}^{(1)}_{T_0}} |z(x,T_0)|$, тогда

$$\psi\Big|_{t=T_0} = \left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1}\right]\varphi(x) > \sup_{x\in\overline{D}^{(1)}_{T_0}} |z(x,T_0)|.$$

Соберем полученные неравенства

$$\begin{aligned} &L_1\psi > \varepsilon, \quad (x,t)\in\Omega^{(1)}\cap\{t>T_0\},\\ &\psi\big|_{t=T_0} > \sup_{x\in\overline{D}^{(1)}_{T_0}} |z(x,T_0)|,\\ &\psi\Big|_{x=0} > \varepsilon, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=\alpha(t)} < -\varepsilon,\ t\ge T_0. \end{aligned} \tag{12}$$

С другой стороны, учитывая (10), получим

$$\begin{aligned} &L_1 z = 0, \quad (x,t)\in\Omega^{(1)}\cap\{t>T_0\},\\ &z\big|_{t=T_0} \ge -\sup_{x\in\overline{D}^{(1)}_{T_0}} |z(x,T_0)|,\\ &z\Big|_{x=0} > -\varepsilon, \quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=\alpha(t)} < \varepsilon,\ t\ge T_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогичные соотношения запишем для функции $z_1(x,t) = -z(x,t)$:

$$\begin{aligned} &L_1 z_1 = 0, \quad (x,t)\in\Omega^{(1)}\cap\{t>T_0\},\\ &z_1\big|_{t=T_0} \ge -\sup_{x\in\overline{D}^{(1)}_{T_0}} |z(x,T_0)|,\\ &z_1\Big|_{x=0} > -\varepsilon, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\Big|_{x=\alpha(t)} < \varepsilon,\ t\ge T_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Сопоставляя (12) с (13) и (14), на основании леммы 1 получим $\psi \pm z > 0$ для любого $(x,t)\in \overline{\Omega}^{(1)}\cap\{t\ge T_0\}$. Отсюда

$$z > -\psi, \quad z < \psi, \quad \forall\ (x,t)\in\overline{\Omega}^{(1)}\cap\{t\ge T_0\}.$$

Тогда будем иметь

$$|z(x,t)| < \psi(x,t) \quad \forall\ (x,t)\in\overline{\Omega}^{(1)}\cap\{t\ge T_0\}. \tag{15}$$

Принимая во внимание (11), получим

$$|z(x,t)| < \mu_2\left[b_1\varepsilon + \frac{A}{\mu_1}e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}}\right] \quad \forall\ (x,t)\in\overline{\Omega}^{(1)}\cap\{t\ge T_0\}. \tag{16}$$

Найдем t, при которых $\frac{A}{\mu_1}e^{-\frac{t-T_0}{\mu_2}} \le b_1\varepsilon$. Решая это неравенство относительно t и учитывая ограниченность величины A, будем иметь

$$t \ge T_0 - \mu_2 \ln\frac{\varepsilon\mu_1 b_1}{A}.$$

Отсюда, принимая во внимание (16), получим, что

$$|z(x,t)| < \varepsilon_1 \quad \forall\ (x,t)\in\overline{\Omega}^{(1)}\cap\{t\ge T_1\},$$

где $T_1 = T_0 - \mu_2 \ln \dfrac{\varepsilon\mu_1 b_1}{A}$, $\varepsilon_1 = 2\mu_2 b_1 \varepsilon$, ε — произвольное. Возьмем ε столь малым, чтобы $\dfrac{\varepsilon\mu_1 b_1}{A} < 1$, тогда очевидно,что $T_1 > T_0$.

Таким образом, $\forall\ \varepsilon_1 > 0$ и $\forall\ y \in \overline{D}_\infty^{(1)}$ в силу сходимости $D_t^{(1)}$ к $D_\infty^{(1)}$ найдутся $\delta > 0$ и T_1 такие , что $|z(x,t)| < \varepsilon_1\ \forall\ t \geq T_1$ и $|x - y| < \delta$. А это и означает равномерную стабилизацию функции $z(x,t)$ к нулю при $t \to \infty$.

Замечание 2. *Все леммы остаются справедливыми, когда задача рассматривается в области $\Omega^{(2)}$.*

Докажем теперь теорему о равномерной стабилизации решения задачи (1)—(6).

Теорема 1. *Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \beta$, $0 < \beta < b$, $u_{0m}(x) \in C(\overline{D}_0^{(m)})$, $p_m(t)$ — непрерывные функции при $t \geq 0$; $\lim\limits_{t\to\infty} p_m(t) = p_m$, причем $p_2 > p_1$; величины a_2, c_2 и p_1, p_2 таковы, что выполнено условие*

$$0 < b - \sqrt{\frac{a_2}{c_2}} \ln\left(\frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1}\right) < b. \tag{17}$$

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u_1(x,t) = v_1(y) \quad \textit{равномерно в} \quad \overline{\Omega}^{(1)},$$

$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u_2(x,t) = v_2(y) \quad \textit{равномерно в} \quad \overline{\Omega}^{(2)},$$

где $y \in \overline{D}_\infty^{(m)}$, функции v_m удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d^2 v_m}{dx^2} - \frac{c_m}{a_m} v_m = 0,\ x \in D_\infty^{(m)}, \quad v_1\big|_{x=0} = p_1,\ v_2\big|_{x=b} = p_2,$$

$$v_1\big|_{x=\beta} = v_2\big|_{x=\beta}, \quad \lambda_1 \frac{dv_1}{dx}\bigg|_{x=\beta} = \lambda_2 \frac{dv_2}{dx}\bigg|_{x=\beta} = 0$$

и равны

$$v_1(x) = \frac{p_1}{1 + e^{\sqrt{\frac{c_1}{a_1}}\beta}} \big(e^{\sqrt{\frac{c_1}{a_1}}(\beta - x)} + e^{\sqrt{\frac{c_1}{a_1}}x}\big), \tag{18}$$

$$v_2(x) = \frac{p_2}{1 + e^{2\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(b-\beta)}} \big(e^{\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(\beta - x)} + e^{\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(b - 2\beta + x)}\big), \tag{19}$$

$$\beta = b - \sqrt{\frac{a_2}{c_2}} \ln\left(\frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $w_1(x,t) = u_1(x,t) - v_1(x)$. Она является решением следующей задачи:

$$L_1 w_1 = 0,\ (x,t) \in \Omega^{(1)}, \quad w_1\big|_{t=0} = u_{01}(x) - v_1(x),\ x \in \overline{D}_0^{(1)},$$

$$w_1\big|_{x=0} = p_1(t) - p_1, \quad \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{x=\alpha(t)} = 0.$$

Граничное значение функции $w_1(x,t)$ при $x = 0$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому на основании леммы 2

$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} w_1(x,t) = \lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} [u_1(x,t) - v_1(x)] = 0$$

или $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u_1(x,t) = v_1(y)$ равномерно в $\overline{\Omega}^{(1)}$, где $y \in \overline{D}^{(1)}_\infty$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u_2(x,t) = v_2(y)$ равномерно в $\overline{\Omega}^{(2)}$, где $y \in \overline{D}^{(2)}_\infty$.

Найдем теперь β, для этого подставим функции (18), (19) в условие $v_1\big|_{x=\beta} = v_2\big|_{x=\beta}$. Тогда получим

$$p_1 = p_2 \frac{2e^{\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(b-\beta)}}{1 + e^{\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(b-\beta)}}.$$

Обозначив

$$\Theta = e^{\sqrt{\frac{c_2}{a_2}}(b-\beta)}, \tag{20}$$

из последнего равенства получим следующее квадратное уравнение для нахождения Θ: $\Theta^2 p_1 - 2p_2\Theta + p_1 = 0$, его решения имеют вид

$$\Theta_{1,2} = \frac{p_2}{p_1} \pm \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1}.$$

Рассмотрим их. Так как $p_2 > p_1$, то $0 < \Theta_1 = \dfrac{p_2}{p_1} - \sqrt{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1} < 1$ и величина $\beta = b - \sqrt{\dfrac{a_2}{c_2}} \ln \Theta_1$ будет больше b, что невозможно, так как $0 < \beta < b$. Значит, корень Θ_1 не подходит.

Рассмотрим второй корень $\Theta_2 = \dfrac{p_2}{p_1} + \sqrt{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1} \geq 1$. Подставляя в (20), получим корень $\beta = b - \sqrt{\dfrac{a_2}{c_2}} \ln \left(\dfrac{p_2}{p_1} + \sqrt{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1}\right)$, который в силу условия (17) принадлежит интервалу $(0, b)$.

Цитированная литература

1. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа.М., 1968.
2. **Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.** // Труды Моск. мат. об-ва. 1978. Т. 36. С. 85.
3. **Сахауева М.А.** // Известия МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. №1. С. 66–79.
4. **M.Muskat.** The flow of homogeneous fluids through porous media // Michigan, 1946. (Русский перевод: М., Л., ГНТИ НГТЛ, 1949).
5. **Веригин Н.Н.** // Известия АН СССР. ОТН. 1952. № 5. С.674—687.
6. **Камынин Л.И.** // Журнал выч. математики и мат. физики. 1962. Т. 2, № 5. С.833—858.
7. **Бижанова Г.И.** // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 5. С.12—17.

Поступила в редакцию 1.08.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 75 — 81*

УДК 517.956

ОСОБАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Самбетова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г. Алматы, ул. Масанчи, 39/47 aigera22@mail.ru.

С помощью специальных потенциалов в работе показано существование решения граничной задачи для бипараболического уравнения с переменными коэффициентами.

1. Постановка задачи: требуется найти регулярное решение $u(x,y,t)$ следующего уравнения:

$$Lu := \delta^2 u(x,y,t) = F(x,y,t) \tag{1}$$

в области $D_t = \{(x,y,t) : 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ 0 < t < \infty\}$ с начальными условиями

$$u(x,y,t)|_{t=0} = f_0(x,y), \tag{2}$$

$$\delta u(x,y,t)|_{t=0} = f_1(x,y) \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$u(x,y,t)|_{x=0} = \varphi_0(y,t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}_{|x=0} = \varphi_1(y,t), \tag{5}$$

где $\delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a(x,y,t)\Delta - B(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial t} - a(x,y,t)\Delta - b_1(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x} - b_2(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y} - b(x,y,t)$ – параболический оператор, Δ – оператор Лапласа. Коэффициенты

$$a(x,y,t) \in C^{2,2,1}_{x,y,t}(D_t), \quad b_i(x,y,t) \in C^{1,1,1}_{x,y,t}(D_t), \quad i = 1,2,3, \ \ a(x,y,t) > a_0, \quad a_0 - const.$$

Заданные функции $F(x,y,t) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t}$, $f_i(x,y) \in C^{1,0}_{x,y}$, $\varphi_0(y,t) \in C(R_t)$, $\varphi_1(y,t) \in C(R_t)$ ограничены. Кроме того эти функции удовлетворяют условию согласования

$$f_0(0,y) = \varphi_0(y,0), \quad \frac{\partial}{\partial x} f_0(0,y) = \varphi_0(y,0). \tag{6}$$

Keywords: *boundary value problem, surface potential, value potential, biparabolic equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C75

2. Построение линейно независимых решений для уравнения $Lu = 0$.

Для построения линейно независимых решений G_1, G_2 уравнения $Lu = 0$ будем использовать метод Е.Леви [1], который состоит в том, что решения разыскиваются в виде суммы двух слагаемых: главного члена и некоторого добавочного слагаемого, причем в качестве главных членов выбираются линейно-независимые решения уравнения $\delta_0^2 \equiv (\frac{\partial}{\partial t} - a(\xi,\eta,\tau)\Delta)^2 u$ с "замороженным" коэффициентом в точке (ξ,η,τ): $G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$ и $(t-\tau)G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$, где

$$G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)})^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)}}.$$

Из общей теории следует, что функция $G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) \in C^\infty_{x,y,t}(D_t)$ при $t > \tau$ и справедливы оценки:

1.
$$|D_t^r D_x^s G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)| \le M \frac{e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{1+r+s/2}}, \tag{7}$$

2.
$$|D_t^r D_x^s G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) - D_t^r D_x^s G_0^{(\xi',\eta,\tau_1)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)| \le$$
$$\le M \frac{|\xi-\xi'| + |\eta-\eta'| + |\tau-\tau_1|^{1/2}}{(t-\tau)^{1+r+s/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}. \tag{8}$$

Линейно независимые решения будем искать в виде

$$G_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = (t-\tau)^i G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) + \int\limits_\tau^t d\lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty (t-\lambda)^i G_0^{(\xi_1,\eta_1,\lambda)}(x-\xi_1, y-\eta_1, t-\lambda) \times$$
$$\times \Phi_0(\xi_1,\eta_1,\lambda;\xi,\eta,\tau) d\xi_1 d\eta_1 = G_i^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) + G_{i1}(x,y,t;\xi,\eta,\tau), \quad i = 0,1, \tag{9}$$

где $\Phi_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $i = 1,2,$ – неизвестные функции. Неизвестные функции выбираются так, чтобы $G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ удовлетворяли соответственно уравнениям $\delta u = 0$, $\delta^2 u = 0$. В силу свойств объемного потенциала с ядром $G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$ относительно $\Phi_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ получим следующее интегральное уравнение Вольтера-Фредгольма 2-го рода:

$$\Phi_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = K_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau) + \int\limits_\tau^t d\lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty K_i(x,y,t;\xi_1,\eta_1,\lambda) \times$$
$$\times \Phi_i(\xi_1,\eta_1,\lambda;\xi,\eta,\tau) d\xi_1 d\eta_1, \tag{10}$$

где

$$K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = [a(x,y,t) - a(\xi,\eta,\tau)]\Delta G_i^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) +$$
$$+ B(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau), \tag{11}$$

$$K_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = [a^2(x,y,t) - a^2(\xi,\eta,\tau)]\Delta^2 (t-\tau) G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) -$$
$$-2[a(x,y,t) - a(\xi,\eta,\tau)](\Delta G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) + (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Delta G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi, y-\eta, t-\tau)) -$$

$$-2[B(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi,y-\eta,t-\tau)+(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}B(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi,y-\eta,t-\tau)]+$$

$$+B(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})(t-\tau)G_0^{(\xi,\eta,\tau)}(x-\xi,y-\eta,t-\tau). \tag{12}$$

Нетрудно показать, что ядро $K_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $i=1,2,$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$|K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}\}, \tag{13}$$

$$|K_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}\}. \tag{14}$$

То есть ядро $K_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $i=1,2,$ имеет слабую особенность. Поэтому интегральное уравнение 2-го рода (11) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Причем неизвестные функции $\Phi_i(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $i=1,2,$ удовлетворяют неравенствам

$$|\Phi_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},$$

$$|\Phi_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},$$

$$|\Phi_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)-\Phi_1(x',y',t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{|x-x'|^\beta+|y-y'|^\beta}{(t-\tau)^{2-\gamma/2}}[e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}+e^{-\delta\frac{(x'-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}],$$

$$|\Phi_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau)-\Phi_2(x',y',t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{|x-x'|^\beta+|y-y'|^\beta}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}[e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}+e^{-\delta\frac{(x'-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}],$$

$$0<\beta<\alpha,\quad \gamma=\alpha-\beta.$$

Вторые слагаемые в равенствах (9) и (10) имеют следующие оценки:

$$|G_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},$$

$$|D_x^rD_y^rD_t^sG_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{1/2+r/2+s}}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},\quad 0\le r+2s\le 2,$$

$$|G_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M(t-\tau)^{1/2}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},$$

$$|D_x^rD_y^rD_t^sG_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le M\frac{1}{(t-\tau)^{r/2+s-1/2}}e^{-\delta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}},\quad 0\le r+2s\le 4.$$

3. Объемные бипараболические потенциалы.

При помощи линейно независимых решений $G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ построим следующие объемные потенциалы:

$$V_0(x,y,t)=\int\int_D f_0(\xi,\eta)G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta, \tag{15}$$

$$V_1(x,y,t)=\int\int_D f_1(\xi,\eta)G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta, \tag{16}$$

$$V(x,y,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D\int F(\xi,\eta,\tau)G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta. \qquad (17)$$

Так как главные части $G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ являются фундаментальными решениями уравнения $\delta_0^2 u=0$, то в силу свойств объемных тепловых потенциалов относительно $V_0(x,y,t)$, $V_1(x,y,t)$, $V(x,y,t)$ нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 1. *Если* $f_0(x,y)\in C(D)$ *и ограниченная функция, то при* $t>0$ $V_0(x,y,t)\in \in C^{2,2,1}_{x,y,t}$ *и* $\delta^2 V_0(x,y,t)=0$. *Кроме того,* $\lim\limits_{t\to 0}V_0(x,y,t)=f_0(x,y)$.

Теорема 2. *Если* $f_1(x,y)\in C(D)$ *и ограниченная функция, то при* $t>0$ $V_1(x,y,t)\in \in C^{4,4,2}_{x,y,t}$ *и* $\delta^2 V_1(x,y,t)=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\delta V_1(x,y,t)=f_1(x,y)$.

Теорема 3. *Если* $F(x,y,t)\in C^{\alpha,\alpha,\alpha/2}_{x,y,t}(D)$ *и ограниченная функция, то при* $t>0$ $V(x,y,t)\in C^{4,4,2}_{x,y,t}$, $LV(x,y,t)=F(x,y,t)$.

Замечание 1. *При помощи объемных потенциалов краевую задачу (1)-(5) можно упростить, т.е. свести к однородному уравнению с нулевыми начальными условиями. Поэтому, не уменьшая общности постановки задачи, в дальнейшем будем считать* $F(x,y,t)=0$, $f_i(x,y)=0$, $i=1,2$.

4. Специальные потенциалы и их свойства.

При помощи линейно-независимых решений $G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ и $G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ построим следующие специальные ядра:

$$K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=2a(\xi,\eta,\tau)\frac{\partial^3 G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)}{\partial x^3}+3\frac{\partial G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)}{\partial x},$$

$$K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=2a(\xi,\eta,\tau)\frac{\partial^2 G_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)}{\partial x^2}+G_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau).$$

Функции $K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ можно представить в виде

$$K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=K_{00}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)+K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau),$$

где

$$K_{00}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{(x-\eta)^3}{8a(\xi,\eta,\tau)\pi(t-\tau)^3}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a(t-\tau)}},$$

а функцию $K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ представим в виде

$$K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=K_{10}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)+K_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau),$$

$$K_{10}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{(x-\xi)^2}{4a(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a(t-\tau)^2}}.$$

Подробное исследование показывает, что вторые слагаемые

$$K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau),K_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$$

удовлетворяют следующим оценкам:

$$|K_{i1}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)|\le\frac{1}{(t-\tau)^{1/2-\alpha/2}}e^{-\delta\frac{x^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}, \qquad (18)$$

$$|\frac{\partial}{\partial x}K_{i1}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)| \le \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}}e^{-\delta\frac{x^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}}, \quad i=0,1. \tag{19}$$

Следует отметить, что построенные ядра $K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ также удовлетворяют уравнению $Lu=0$.

При помощи ядер $K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$, $K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$ построим поверхностные потенциалы:

$$W_0(x,y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\eta,\tau)K_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta, \tag{20}$$

$$W_1(x,y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\eta,\tau)K_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta. \tag{21}$$

Относительно потенциалов $W_0(x,y,t)$, $W_1(x,y,t)$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если функция $\sigma_0(y,t)\in C^\alpha(D)$ и ограничена, тогда выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{x\to 0} W_0(x,y,t) = \sigma_0(y,t) + W_0(0,y,t). \tag{22}$$

Доказательство. Запишем потенциал $W_0(x,y,t)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$W_0(x,y,t) = W_{00}(x,y,t) + W_{01}(x,y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\eta,\tau)K_{00}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\eta,\tau)K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta.$$

В [2, 3] приведено доказательство существования предела $\lim\limits_{x\to 0} W_{00}(x,y,t) = \sigma_1(y,t)$. Из оценки (18)—(19) следует, что интеграл $W_{01}(x,y,t)$ имеет слабую особенность, т.е.

$$\lim_{x\to 0} W_{01}(x,y,t) = W_{01}(0,y,t).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функция $\sigma_0(y,t)\in C^\alpha(D)$ и ограничена, тогда выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}W_0(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}W_0(0,y,t). \tag{23}$$

Доказательство. Для этого запишем потенциал $\frac{\partial}{\partial x}W_0(x,y,t)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\frac{\partial}{\partial x}W_0(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}W_{00}(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x}W_{01}(x,y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial x}K_{00}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial x}K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta.$$

Доказательство существования предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}W_{00}(x,y,t)=0$ приведено в [2, 3]. Из оценки (18)—(19) следует, что интеграл $\frac{\partial}{\partial x}W_{01}(x,y,t)$ имеет слабую особенность, так что справедливо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}W_{01}(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}W_{01}(0,y,t).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если функция* $\sigma_1(y,t)\in C(D_t)$ *и ограничена, то выполняются соотношения*

$$\lim_{x\to 0}W_1(x,y,t)=W_1(0,y,t), \tag{24}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}W_1(x,y,t)=\sigma_1(y,t)+\frac{\partial}{\partial x}W_1(0,y,t). \tag{25}$$

5. Сведение краевой задачи (1)—(5) к системе интегральных уравнений.

Решение будем искать в виде суммы специально, построенных потенциалов задачи (1)—(5):

$$u(x,y,t)=W_0(x,y,t)+W_1(x,y,t)=$$

$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\eta,\tau)K_0(x,y-\eta,t-\tau)d\eta+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)K_1(x,y-\eta,t-\tau)d\eta, \tag{26}$$

где $\sigma_0(y,t)$, $\sigma_1(y,t)$ — неизвестные непрерывные функции.

Нетрудно убедиться, что функция $u(x,y,t)$, определяемая равенством (24), удовлетворяет однородному уравнению $Lu=0$ и нулевым начальным условиям (2)—(3).

Неизвестные функции $\sigma_0(y,t)$, $\sigma_1(y,t)$ выберем так, чтобы имели место краевые условия (4), (5). В силу свойств потенциалов $W_0(x,y,t)$, $W_1(x,y,t)$ из краевых условий (4), (5) относительно $\sigma_0(y,t)$, $\sigma_1(y,t)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sigma_0(y,t)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\eta,\tau)K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)K_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta=\varphi_0(y,t),$$

$$\sigma_1(y,t)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial x}K_{01}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_0(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial x}K_{11}(x,y,t;\xi,\eta,\tau)d\eta=\varphi_1(y,t). \tag{27}$$

Вводя операторную запись, система будет иметь вид

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_0+R_{11}\sigma_0+R_{12}\sigma_1=\varphi_0,\\ \sigma_1+R_{21}\sigma_1+R_{22}\sigma_0=\varphi_1.\end{array}\right. \tag{28}$$

Таким образом, данную задачу свели к системе интегро-дифференциальных уравнений (26). Полученную систему можно решить методом последовательных приближений [4].

Т е о р е м а 4. *Если коэффициенты*

$$a(x,y,t) \in C^{1,1,(1+\alpha)/2}_{x,y,t}(D_t),\ b_i(x,y,t) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t}(D_t),$$

$$c(x,y,t) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t}(D_t),\ a(x,y,t) > a_0,\ \ a_0 - const,$$

заданные функции

$$F(x,y,t) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t},\ \ f_i(x,y) \in C^{1,0}_{x,y}, \varphi_0(y,t) \in C(R_t), \varphi_1(y,t) \in C(R_t)$$

ограничены, кроме того удовлетворяют условию согласования $f_0(0,y) = \varphi_0(y,0)$, $\frac{\partial}{\partial x} f_0(0,y) = = \varphi_1(y,0)$, *то решение краевой задачи (1)—(5) можно представить в виде суммы объемных потенциалов (15)—(17) и поверхностных потенциалов (20)—(21).*

Цитированная литература

1. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического уравнения. М. 1967.

2. **Орынбасаров М.О.** //Сб.по вопросам математики и механики. Вып.2. 1973. С.51—58.

3. **Орынбасаров М.О.** //Сб.по вопросам математики и механики. Вып.2. 1973. С.49—62.

4. **Самбетова А.А.** // Материалы 57-й научной конференции студентов и молодых ученых, посв. 70-летию КазНУ им. аль-Фараби. Алматы, 2003. С.90—95.

Поступила в редакцию 01.06.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 82 – 86*

УДК 517.946

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.Ж.Талипова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
030000 г.Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263 talipova_mira@rambler.ru

С помощью метода Фробениуса - Латышевой установлены необходимые условия существования нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Найдены требования на рекуррентные системы, определяющие неизвестные коэффициенты нормальных решений, при которых эти условия являются также и достаточными.

Рассматривается неоднородная система двух совместных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{aligned} &Z_{xx} + x^k \cdot p_1 \cdot Z_x + y^k \cdot p_2 \cdot Z_y + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = p_4(x,y), \\ &Z_{yy} + x^k \cdot q_1 \cdot Z_x + y^k \cdot q_2 \cdot Z_y + y^{2k} \cdot q_3 \cdot Z = q_4(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где ранг $p = k + 1 > 0$, коэффициенты $p_i = p_i(x,y)$ и $q_i = q_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$ представимы сходящимися рядами двух переменных

$$p_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad q_i(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (i = 1,2,3). \tag{2}$$

Система (1) имеет ряд отличительных свойств.

1. Согласно аналитической теории таких систем, для нее особенность (∞,∞) является иррегулярной.

Соответствующая однородная система

$$\begin{aligned} &Z_{xx} + x^k \cdot p_1 \cdot Z_x + y^k \cdot p_2 \cdot Z_y + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = 0, \\ &Z_{yy} + x^k \cdot q_1 \cdot Z_x + y^k \cdot q_2 \cdot Z_y + y^{2k} \cdot q_3 \cdot Z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Keywords: *rang, normal solution,nonhomogeneous partial differential equation of second order*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20,35A25,35C05

с иррегулярной особенностью в (∞, ∞) изучены в работах [1]-[2]. Установлены необходимые условия существования нормального решения системы (3):

$$Z = exp\left(Q(x,y)\right) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \ (C_{0,0} \neq 0)\,, \tag{4}$$

$$Q\left(x,y\right) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^{k+1} + ... + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y, \tag{5}$$

где $\rho,\ \sigma,\ C_{\mu,\nu}\ (\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ – некоторые постоянные; $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1},\ \alpha_{1,1}, \ldots,\ \alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}$ – неопределенные коэффициенты.

Первое необходимое условие существования нормального решения (4) позволяет определить неизвестные параметры $Q\left(x,y\right)$, а второе – найти корни системы определяющих уравнений – пару (ρ,σ).

Целью настоящей работы является установление необходимых условий существования и нормальных решений неоднородной системы (1). Нормально-регулярные решения неоднородной системы (1) вблизи особенности $(0,0)$ были построены в работе [3].

2. Однородная система (3) является системой Вильчинского [4] и при выполнении условия совместности она имеет четыре линейно-независимых частных решения.

3. Для системы (1)-(2) справедлива теорема 1 из [3, с. 48], устанавливающая представление общего решения неоднородной системы в виде суммы частного решения неоднородной системы – $\overline{Z}\left(x,y\right)$ и общего решения однородной системы – $Z_o\left(x,y\right)$:

$$Z\left(x,y\right) = Z_o\left(x,y\right) + \overline{Z}\left(x,y\right). \tag{6}$$

4. В случае, когда неоднородная система (1)-(2) имеет иррегулярную особенность (∞, ∞), правую часть можно представить в виде нормальных рядов Томе двух переменных, т.е. в виде

$$\begin{aligned} p_4(x,y) &= exp\left(Q(x,y)\right) \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} p_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (p_{0,0} \neq 0)\,, \\ q_4(x,y) &= exp\left(Q(x,y)\right) \cdot x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} q_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (q_{0,0} \neq 0)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Как и в однородном случае, при определении частных решений неоднородной системы необходимые условия существования нормальных решений устанавливаются аналогично. Отличие заключается в определении неизвестных постоянных $C_{\mu,\nu} \quad (\mu,\nu = 0,1,2,...)$ в искомом решении (4).

Согласно методу Фробениуса-Латышевой для отыскания неопределенных параметров $\alpha_{k+1,0},\ \alpha_{0,k+1}, \ldots,\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ многочлена $Q(x,y)$ используется следующее преобразование:

$$Z\left(x,y\right) = exp\left(Q(x,y)\right) \cdot U\left(x,y\right). \tag{8}$$

Система (1) с коэффициентами (2), (7), полученная после преобразования (8), называется вспомогательной и она принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &U_{xx} + \left[2 \cdot Q_x + x^k \cdot p_1\right] \cdot U_x + y^k \cdot p_2 \cdot U_y + \left\{\left[(Q_x)^2 + Q_{xx}\right] + x^k \cdot p_1 \cdot Q_x + \right. \\ &\qquad \left. + y^k \cdot p_2 \cdot Q_y + x^{2k} \cdot p_3\right\} \cdot U = p_4^*(x,y), \\ &U_{yy} + x^k \cdot q_1 \cdot U_x + \left[2 \cdot Q_y + y^k \cdot q_2\right] \cdot U_y + \left\{\left[(Q_y)^2 + Q_{yy}\right] + x^k \cdot q_1 \cdot Q_x + \right. \\ &\qquad \left. + y^k \cdot q_2 \cdot Q_y + y^{2k} \cdot q_3\right\} \cdot U = q_4^*(x,y), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$p_4^*(x,y) = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} p_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (p_{0,0} \neq 0)\,,$$
$$q_4^*(x,y) = x^\gamma \cdot y^\delta \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} q_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (q_{0,0} \neq 0)\,. \tag{10}$$

Отсюда видно, что как в системе (1), так и в системе (9) наибольшие степени коэффициентов при частных производных по x, y и при искомой функции остаются без изменений, т.е. соответственно k и $2k$. Значит преобразование (8) не изменяет ранга системы (1).

Далее мы исследуем условия существования решения вспомогательной системы (9) в виде обобщенного степенного ряда

$$U\,(x,y) = x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \quad (C_{0,0} \neq 0) \tag{11}$$

в зависимости от особенности (∞, ∞).

Коэффициенты при $U(x,y)$ в первом уравнении обозначим через $R_3(x,y)$, а во втором уравнении – через $E_3(x,y)$:

$$R_3(x,y) = \left\{ \left[(Q_x)^2 + Q_{xx} \right] + x^k \cdot p_1 \cdot Q_x + y^k \cdot p_2 \cdot Q_y + x^{2k} \cdot p_3 \right\},$$
$$E_3(x,y) = \left\{ \left[(Q_y)^2 + Q_{yy} \right] + x^k \cdot q_1 \cdot Q_x + y^k \cdot q_2 \cdot Q_y + y^{2k} \cdot q_3 \right\}.$$

Из вспомогательной системы (9), приравнивая к нулю коэффициенты при старших степенях независимых переменных x и y неизвестной функции $U(x,y)$, с помощью некоторых систем двух алгебраических уравнений определяем неизвестные параметры $\alpha_{k+1,0}$, $\alpha_{0,k+1}, \ldots,$ $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ многочлена $Q(x,y)$.

Эти системы мы обозначим через

$$d_{k+1,0}^{(j)} = 0, \quad d_{0,k+1}^{(j)} = 0, \quad \ldots, \quad d_{1,1}^{(j)} = 0, \quad d_{1,0}^{(j)} = 0, \quad d_{0,1}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{12}$$

Методику для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x,y)$ приведем для случая $k = 1$. Тогда ранг системы (9) равен $p = 1 + 1 = 2$,

$$Q(x,y) = \frac{\alpha_{1,0}}{2} \cdot x^2 + \frac{\alpha_{0,1}}{2} \cdot y^2 + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{2,0} \cdot x + \alpha_{0,2} \cdot y,$$
$$Q_x = \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{1,1} \cdot y + \alpha_{2,0}; \quad Q_{xx} = \alpha_{10},$$
$$Q_y = \alpha_{0,1} \cdot y + \alpha_{1,1} \cdot x + \alpha_{0,2}; \quad Q_{yy} = \alpha_{0,1}. \tag{13}$$

Во вспомогательной системе (9) коэффициенты $R_3(x,y)$ и $E_3(x,y)$ принимают вид:

$$R_3(x,y) = d_{2,0}^{(1)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(1)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(1)} \cdot xy + d_{1,0}^{(1)} \cdot x + d_{0,1}^{(1)} \cdot y + d_{0,0}^{(1)} + \ldots + d_{1,0}^{(1)} \cdot \frac{1}{x} + \ldots,$$
$$E_3(x,y) = d_{2,0}^{(2)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(2)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(2)} \cdot xy + d_{1,0}^{(2)} \cdot x + d_{0,1}^{(2)} \cdot y + d_{0,0}^{(2)} + \ldots + d_{1,0}^{(2)} \cdot \frac{1}{x} + \ldots,$$

где $d_{2,0}^{(j)}, d_{0,2}^{(j)}, \ldots \quad (j = 1, 2)$ зависят от неизвестных коэффициентов многочлена $Q(x,y)$.

Для того, чтобы вспомогательная система (9) имела хотя бы одно решение вида (11), необходимо выполнение равенств (12) при $k = 1$.

Отсюда получаем шесть систем характеристических уравнений для определения коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} d_{2,0}^{(1)} = \alpha_{1,0}^2 + \alpha_{1,0} \cdot a_{0,0}^{(3)} = 0 \\ d_{2,0}^{(2)} = \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{1,0} \cdot b_{0,0}^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x^2; \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{0,2}^{(1)} &= \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0 \\ d_{0,2}^{(2)} &= \alpha_{0,1}^2 + \alpha_{0,1} \cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad y^2; \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{1,1}^{(1)} &= 2\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{1,1} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0 \\ d_{1,1}^{(2)} &= 2\alpha_{0,1} \cdot \alpha_{1,1} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad xy; \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{1,0}^{(1)} &= 2\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{2,0} + \alpha_{1,0} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,1}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{1,0}^{(3)} = 0 \\ d_{1,0}^{(2)} &= 2\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{0,2} + \alpha_{0,1} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot b_{0,1}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{0,1}^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x; \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{0,1}^{(1)} &= 2\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,0} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{0,0}^{(2)} = 0 \\ d_{0,1}^{(2)} &= 2\alpha_{0,1} \cdot \alpha_{0,2} + \alpha_{1,1} \cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot b_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1} \cdot b_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{1,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad y; \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} & d_{0,0}^{(1)} = \alpha_{2,0}^2 + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,0} \cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,2}^{(2)} + \\ & + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{0,2}^{(3)} = 0 \\ & d_{0,0}^{(2)} = \alpha_{0,2}^2 + \alpha_{0,1} + \alpha_{1,0} \cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0} \cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{0,1} \cdot a_{0,2}^{(2)} + \\ & + \alpha_{1,1} \cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2} \cdot a_{0,1}^{(1)} + a_{2,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x^0, y^0. \tag{19}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}$ определяются из систем (14)-(16), а $\alpha_{2,0}$ и $\alpha_{0,2}$ — из систем (17)—(19).

Теперь определим ρ, σ и $C_{\mu,\nu}$. Подставляя (11) в (9), получаем систему характеристических уравнений

$$\begin{aligned} & x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \Big\{ C_{0,0} \cdot \varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + \Big[C_{1,0} \cdot \varphi_{00}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot \varphi_{10}^{(j)}(\rho,\sigma) \Big] \cdot \frac{1}{x} + \\ & + \Big[C_{0,1} \cdot \varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot \varphi_{01}^{(j)}(\rho,\sigma) \Big] \cdot \frac{1}{y} + \Big[C_{1,1} \cdot \varphi_{00}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1) + \\ & + C_{1,0} \cdot \varphi_{01}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,1} \cdot \varphi_{10}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot \varphi_{11}^{(j)}(\rho,\sigma) \Big] \cdot \frac{1}{xy} + \ldots \Big\} = \varphi_j(x,y), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\varphi_1(x,y) = p_4^*(x,y)$, $\varphi_2(x,y) = q_4^*(x,y)$, а $\varphi_{00}^j(\rho,\sigma)$ $(j = 1,2)$ имеет вид относительно особенности (∞,∞) :

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) &= \rho \cdot (\rho - 1) + a_{00}^{(1)} \cdot \rho + a_{00}^{(2)} \cdot \sigma + a_{00}^{(3)}, \\ \varphi_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) &= \sigma \cdot (\sigma - 1) + b_{00}^{(1)} \cdot \rho + b_{00}^{(2)} \cdot \sigma + b_{00}^{(3)}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Отсюда следует, что (11) будет формальным частным решением только тогда, когда неопределенные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ удовлетворяют следующей рекуррентной системе:

$$\begin{aligned} & C_{0,0} \cdot \varphi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,0}^{(j)}, \\ & C_{1,0} \cdot \varphi_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot \varphi_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,0}^{(j)}, \\ & C_{0,1} \cdot \varphi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot \varphi_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{0,1}^{(j)}, \\ & C_{1,1} \cdot \varphi_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1) + C_{1,0} \cdot \varphi_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + \\ & + C_{0,1} \cdot \varphi_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0} \cdot \varphi_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)} \\ & C_{2,0} \cdot \varphi_{0,0}^{(j)}(\rho+2,\sigma) + C_{1,0} \cdot \varphi_{1,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0} \cdot \varphi_{2,0}^{(j)}(\rho,\sigma) = \alpha_{2,0}^{(j)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{22}$$

Полученная рекуррентная система, определяющая неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, распадается на две системы: $\alpha^{(1)}_{\mu,\nu} = p_{\mu,\nu}$, когда $j = 1$; $\alpha^{(2)}_{\mu,\nu} = q_{\mu,\nu}$, когда $j = 2$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, где $p_{\mu,\nu}$ и $q_{\mu,\nu}$ — коэффициенты соответствующих обобщенных степенных рядов $p^*_4(x, y)$ и $q^*_4(x, y)$. Пусть коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, определенные последовательно из этих двух систем при $j = 1$ и $j = 2$, одинаковые. Из (22) они определяются только при условии, когда степени $\alpha + k_1, \quad \beta + k_1$ и $\alpha + k_2, \quad \beta + k_2$, где k_j $(j = 1, 2)$ — любые натуральные числа, не являются показателями решения однородной системы (3).

Из системы характеристических уравнений (20) видно, что сходимость рядов $\varphi_j(x, y)$ $(j = 1, 2)$ обеспечивает сходимость ряда (11). Тогда можно построить частное решение $\overline{Z}(x, y)$ неоднородной системы (1).

Во втором случае, когда степени $\alpha + k_1, \beta + k_1$ и $\alpha + k_2, \beta + k_2$, где k_j $(j = 1, 2)$ — любые натуральные числа, являются показателями решения однородной системы (3), получим так называемый "резонансный" случай, когда правая часть неоднородной системы (1) совпадает с одним из частных решений соответствующей однородной системы (3).

Следовательно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для того, чтобы вспомогательная система (9), полученная с помощью преобразования (8) из системы (1)—(2), (7), имела хотя бы одно решение вида (11), необходимо, чтобы имели место равенства (12).*

Лемма 2. *. Для того, чтобы вспомогательная система (9) имела решения вида (11), необходимо, чтобы пара (ρ, σ) была корнем системы определяющих уравнений $\varphi^{(j)}_{0,0} = 0$ относительно особенности (∞, ∞), где $\varphi^{(j)}_{0,0}(\rho, \sigma) \quad (j = 1, 2)$ есть коэффициенты при старших членах системы характеристических функций, полученных из вспомогательной системы (9) путем подстановки вместо неизвестной $U(x, y)$ выражения $x^\rho \cdot y^\sigma$.*

На основе лемм 1 и 2 докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *. Если коэффициенты ряда (4) $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют рекуррентной системе (22), то неоднородная система (1)-(2) с правой частью (7) имеет нормальные решения вида (4).*

Доказательство. Следуя [1], нормальные решения неоднородной системы (1)—(2) ищем в виде ряда (4). По лемме 1 определяются коэффициенты многочлена $Q(x, y)$, а по лемме 2 — ρ и σ, которые входят в обобщенный степенной ряд (4). Оставшиеся пока неопределенными $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, также входящие в ряд (4), определяются из рекуррентной системы (22).

Цитированная литература

1. **Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Тасмамбетов Ж.Н.** Нормальные решения одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Препр./ АН УССР. Ин-т математики. 89.4. Киев, 1989

2. **Тасмамбетов Ж.Н., Тасмамбетова А.Ж.** //Труды Межд.научн.и научно-метод.конф. "Наука и образование — 97". Шымкент, 1997. С.180—186.

3. **Талипова М.Ж.,Тасмамбетов Ж.Н.** // Известия НАН РК, Серия физ.-матем. 2003. № 3. С.47—55.

4. **Wilczynski E.J.** Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig. 1906. 120 p.

Поступила в редакцию 15.08.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 87 – 95*

УДК 519.624

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. Б.Тлеулесова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия корректной разрешимости данной задачи.

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0,T] \backslash \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}, \quad \theta_i \in (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B_i, C_i $(i = \overline{0,m})$ — постоянные матрицы. Решением задачи (1)—(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) на $[0,T]$, кроме точек $t = \theta_i$, а также условиям (2) и (3), $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, $||A(t)|| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \leq \alpha$, $\|f\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|$. Через $\tilde{C}([0,T], R^n)$ обозначим пространство кусочно-непрерывных на $[0,T]$ функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_2 = \max\limits_{i=\overline{0,m}} \sup\limits_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$, где $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$. К необходимости изучения краевых задач для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием приводят многие задачи физики, техники, биологии, которые описывают реальные процессы, подвергающиеся импульсному воздействию. Обзор и библиографию работ, посвященных исследованию систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием можно найти в [1—6]. В [7] периодическая краевая задача с импульсным воздействием в одной внутренней точке интервала исследована методом параметризации [8]. Предложены алгоритмы нахождения решения и установлены достаточные условия их сходимости,

Keywords: *ordinary differential equation, two-point boundary-value problem, impulse influence, parametrization's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемой задачи. В [9] предложены алгоритмы нахождения решения задачи (1)—(3) и в терминах матрицы $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$, $\nu \in \mathbb{N}$, $h_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $j = \overline{1, m+1}$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$, составляемой по матрицам $A(t)$, B_i, C_i, $i = \overline{0, m}$, моментам времени воздействия импульса θ_j, получены условия их сходимости. Установлено, что из однозначной разрешимости задачи (1)—(3) следует существование ν, при котором матрица $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ обратима и выполняются некоторые неравенства. В настоящей работе исследуется влияние изменения шага разбиения интервала при фиксированном ν на сходимость алгоритма, однозначную разрешимость задачи (1)—(3).

Возьмем число $l \in \mathbb{N}$ и по нему произведем разбиение $[0, T) = \bigcup\limits_{r=1}^{(m+1)l} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = 0$, $t_r = t_{r-1} + \frac{h_1}{l}$, $r = \overline{1, l}$ $t_r = t_{r-1} + \frac{h_2}{l}$, $r = \overline{l+1, 2l}, \ldots, t_r = t_{r-1} + \frac{h_{m+1}}{l}$, $r = \overline{ml+1, (m+1)l}$, $h^0 = \max\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i$, $h_0 = \min\limits_{i=\overline{1,m+1}} h_i$, $\delta = \frac{h^0}{h_0}$.

Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1}, t_r)$ и задачу (1)-(3) сведем к многоточечной краевой задаче с импульсным воздействием:

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \tag{4}$$

$$B_0 x_1(0) + C_0 \lim_{t \to T-0} x_{(m+1)l}(t) = d, \tag{5}$$

$$B_i \lim_{t \to t_{il}-0} x_{il}(t) - C_i x_{il}(t_{il+1}) = p_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$\lim_{t \to t_s - 0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \qquad s = \{\overline{1, (m+1)l - 1}\} \setminus \{il\}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Здесь (7) — условия сшивания решения во внутренних точках разбиения. Если $x(t)$ — решение задачи (1)—(3), то система его сужений $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{(m+1)l}(t))'$ является решением задачи (4)—(7). И наоборот, если система вектор-функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_{(m+1)l}(t))'$ — решение задачи (4)—(7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, (m+1)l}$, $\widetilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{x}_{(m+1)l}(t)$, будет решением исходной задачи. Введем обозначения $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ и на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (4)—(7) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \tag{8}$$

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \lim_{t \to T-0} u_{(m+1)l}(t) + C_0 \lambda_{(m+1)l} = d, \tag{9}$$

$$B_i \lim_{t \to t_{il}-0} u_{il}(t) + B_i \lambda_{il} - C_i \lambda_{il+1} = p_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \{\overline{1, (m+1)l - 1}\} \setminus \{il\}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(m+1)l})' \in R^{n(m+1)l}$, $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{(m+1)l}(t))'$ — решение задачи (8)—(11), то система функций $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \ldots, \lambda_{(m+1)l} + u_{(m+1)l}(t))'$ будет решением задачи (4)—(7). И наоборот, если $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_{(m+1)l}(t))'$ — решение (4)—(7), то пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, где $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{x}_1(0), \widetilde{x}_2(t_1), \ldots, \widetilde{x}_{(m+1)l}(T))'$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{x}_1(t) - \widetilde{x}_1(0), \widetilde{x}_2(t) - \widetilde{x}_2(t_2), \ldots, \widetilde{x}_{(m+1)l}(t) - \widetilde{x}_{(m+1)l}(t_{(m+1)l-1}))'$ будет решением задачи (8)—(11). Однако задача (8)—(11) от задачи (4)—(7) отличается тем, что здесь появились начальные условия в точках $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, которые позволяют определить $u_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}. \tag{12}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставив соответствующую правую часть (12) и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) раз, получим представление функции $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u,t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{13}$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1})d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1})d\tau_{j+1}d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1) \ldots \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_\nu} A(\tau_{\nu+1})u_r(\tau_{\nu+1})d\tau_{\nu+1} \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1,(m+1)l}.$$

Из (13) находим

$$\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t) = D_{\nu r}(t_r)\lambda_r + F_{\nu r}(t_r) + G_{\nu r}(u_r, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}. \tag{14}$$

Подставляя соответствующие правые части (14) в условия (9), (10), (11) и умножив (9), (10) на соответствующие $\frac{h_i}{l} > 0$, $i = \overline{1, m+1}$, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(m+1)l}$:

$$\frac{h_{m+1}}{l}B_0\lambda_1 + \frac{h_{m+1}}{l}C_0[I + D_{\nu,(m+1)l}(T)]\lambda_{(m+1)l} =$$

$$= d\frac{h_{m+1}}{l} - \frac{h_{m+1}}{l}C_0F_{\nu,(m+1)l}(T) - \frac{h_{m+1}}{l}C_0G_{\nu,(m+1)l}(u,T), \tag{15}$$

$$\frac{h_i}{l}B_i[I + D_{\nu,il}(t_{il})]\lambda_{il} - \frac{h_i}{l}C_i\lambda_{il+1} = \frac{h_i}{l}p_i - \frac{h_i}{l}B_iF_{\nu,il}(t_{il}) - \frac{h_i}{l}B_iG_{\nu,il}(u,t_{il}), \quad i = \overline{1,m}, \tag{16}$$

$$[I + D_{\nu,s}(t_s)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{\nu,s}(t_s) - G_{\nu,s}(u,t_s), \quad s = \{\overline{1,(m+1)l-1}\}\backslash\{il\}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{17}$$

где I — единичная матрица размерности $(n \times n)$, которую запишем в виде

$$Q_\nu(l)\lambda = -F_\nu(l) - G_\nu(u,l), \quad \lambda \in R^{n(m+1)l}, \tag{18}$$

$Q_\nu(l)-$ $(n(m+1)l \times n(m+1)l)$ — матрица, соответствующая левой части систем уравнений (15), (16), (17):

$$F_\nu(l) = \Big(-d\frac{h_{m+1}}{l} + \frac{h_{m+1}}{l}C_0F_{\nu,(m+1)l}(T), F_{\nu,1}(t_1), \ldots, \frac{h_1}{l}p_1 - \frac{h_1}{l}B_1F_{\nu,l}(t_l),$$

$$F_{\nu,l}(t_l+1), \ldots, \frac{h_m}{l}p_m - \frac{h_m}{l}B_mF_{\nu,ml}(t_{ml}), F_{\nu,ml+1}(t_{ml+1}, \ldots, F_{\nu,(m+1)l-1}(t_{(m+1)l-1})\Big),$$

$$G_\nu(u,l)=\Big(\frac{h_{m+1}}{l}C_0G_{\nu,(m+1)l}(u,T),G_{\nu,1}(u,t_1),\ldots,G_{\nu,l-1}(u,t_{l-1}),\frac{h_1}{l}B_1G_{\nu,l}(u,t_l),G_{\nu,}(u,t_{l+1}),$$

$$,\ldots,\frac{h_m}{l}B_mG_{\nu,ml}(u,t_{ml}),G_{\nu,ml+1}(u,t_{ml+1}),\ldots,G_{\nu,(m+1)l-1}(u,t_{(m+1)l-1})\Big)\in R^{n(m+1)l}.$$

Таким образом, для нахождения пары $(\lambda,u[t])$ — решения задачи (8)—(11) имеем замкнутую систему уравнений (12), (18). Пара $(\lambda,u[t])$ — решение задачи (8)—(11), находится как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $\quad k=0,1,2,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму.

0-шаг. а) Предполагая, что при выбранных $l\in\mathbb{N}$, $\nu\in\mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(l):R^{n(m+1)l}\to R^{n(m+1)l}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_{(m+1)l}^{(0)})'\in R^{n(m+1)l}$ определяем из уравнения $Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)$, т.е. $\lambda^{(0)}=-[Q_\nu(l)]^{-1}F_\nu(l)$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)}\in R^{n(m+1)l}$ и решая задачи Коши (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$ на интервалах $[t_{r-1},t_r)$, находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,(m+1)l}$.

1-шаг. а) Найденные $u_r^{(0)}(t)$ подставляя в правую часть (18), из уравнения $Q_\nu(l)\lambda=-F_\nu(l)-G_\nu(u^{(0)},l)$ определяем первое приближение по параметру $\lambda^{(1)}$. б) Решая задачу Коши (8) на интервалах $[t_{r-1},t_r)$ при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r=\overline{1,(m+1)l}$. И т.д.

Продолжая процесс, на **k−ом шаге** получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)},u_r^{(k)}(t))$, $r=\overline{1,(m+1)l}$, $k=0,1,2,\ldots$

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и оценку решения задачи (1)—(3) устанавливает

Т е о р е м а 1. *Пусть при некоторых $l\in\mathbb{N}$ и $\nu\in\mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(l):R^{n(m+1)l}\to R^{n(m+1)l}$ обратима и выполняются неравенства:*

$$a)\quad ||[Q_\nu(l)]^{-1}||\le\gamma_\nu(l),$$

$$б)\quad q_\nu(l)=\gamma_\nu(l)\max(1,\max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_i}{l}\|B_i\|,\frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|)\times\Big[\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j\Big]<1.$$

Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1)—(3) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_2\le L_\nu(l)\max(\|d\|,\|f\|_1,\max_{i=\overline{1,m}}\|p_i\|),\tag{19}$$

где

$$L_\nu(l)=\Bigg\{\gamma_\nu(l)\Big[\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)-1\Big]\max\Bigg\{1+\frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j,$$

$$1+\max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_i}{l}\|B_i\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j\Bigg\}+\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)\Bigg\}\frac{h^0}{l}\times$$

$$\times\Big\{\gamma_\nu(l)\frac{1}{1-q_\nu(l)}\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)\max\Big(1,\frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|,\max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_{il}}{l}\|B_i\|\Big)+1\Big\}+$$

$$+\gamma_\nu(l)\max\Bigg\{1+\frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h_{m+1}}{l}\Big)^j,1+\max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_{il}}{l}\|B_i\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h_{il}}{l}\Big)^j,\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j\Bigg\}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [9, с.97—99]. При доказательстве необходимости мы воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 1. *Если $x^*(t)$ — решение задачи (1)—(3), то $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{(m+1)l}^*)'$ с компонентами $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, удовлетворяет уравнению*

$$H^{-1}Q_*(l)\lambda^* = -F_*(f, d, p_1, \ldots, p_m, l), \quad \lambda^* \in R^{n(m+1)l}, \tag{20}$$

где диагональная матрица

$$H = \frac{1}{l} diag\Big(\underbrace{h_{m+1}I, h_1 I, \ldots, h_1 I}_{l}, \underbrace{h_1 I, h_2 I, \ldots, h_2 I}_{l}, \ldots, \underbrace{h_m I, h_{m+1} I, \ldots, h_{m+1} I}_{l}\Big)$$

имеет размерность $(n(m+1)l) \times (n(m+1)l)$, $Q_*(l) = \lim\limits_{\nu \to \infty} Q_\nu(l)$,

$$F_*(f, d, p_1, \ldots, p_m, l) = H^{-1} \lim_{\nu \to \infty} F_\nu(l).$$

И наоборот, если $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_{(m+1)l})'$ — решение (20), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, $\widetilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_{(m+1)l} + \lim\limits_{t \to T-0} \widetilde{u}_{(m+1)l}(t)$, - решение задачи Коши (8) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, будет решением задачи (8)—(11).

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — решение задачи (1)—(3), тогда пара $(\lambda^*, u^*[t])$, где $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, и $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*(t_{r-1})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, будет решением задачи (8)—(11) и имеют место равенства

$$u_r^*(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r^* + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u^*, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{21}$$

$$Q_\nu(l)\lambda^* = -F_\nu(l) - G_\nu(u^*, l). \tag{22}$$

Так как $D_{\nu,r}(t)$, $F_{\nu,r}(t)$ при $\nu \to \infty$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,(m+1)l}$, равномерно сходятся к $D_{*,r}(t)$, $F_{*,r}(t)$, а $G_{\nu,r}(u,t)$ в силу оценки

$$\|G_{\nu,r}(u,t)\| \le \max\left(1, \max_{i=\overline{1,m}} \frac{h_i}{l}\|B_i\|, \frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|\right) \frac{1}{\nu!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^\nu \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|u_r(t)\|$$

стремится к нулю, то в (21), (22) переходя к пределу при $\nu \to \infty$ и умножив обе части (22) на H^{-1}, получим

$$u_r^*(t) = D_{*,r}(t)\lambda_r^* + F_{*,r}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}, \tag{23}$$

$$H^{-1}Q_*(l)\lambda^* = -F_*(f, d, p_1, \ldots, p_m, l). \tag{24}$$

Таким образом, если $(\lambda^*, u^*[t])$ — решение задачи (8)—(11), то $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{(m+1)l}^*)'$ удовлетворяет уравнению (24), а соответствующие им $u_r^*(t)$ — решение задач Коши (8), имеют вид (23). Теперь пусть $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_{(m+1)l})'$ — решение системы уравнений (20), т.е.

$$B_0\widetilde{\lambda}_1 + C_0[I + D_{*,(m+1)l}(T)]\widetilde{\lambda}_{(m+1)l} = d - C_0 F_{*,(m+1)l}(T), \tag{25}$$

$$B_i[I + D_{*,il}(t_{il})]\widetilde{\lambda}_{il} - C_i\widetilde{\lambda}_{il+1} = p_i - B_i F_{*,il}(t_{il}), \quad i = \overline{1,m}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{t_s - t_{s-1}}[I + D_{*,s}(t_s)]\widetilde{\lambda}_s - \frac{1}{t_s - t_{s-1}}\widetilde{\lambda}_{s+1} = -\frac{1}{t_s - t_{s-1}}F_{*,s}(t_s), \quad s = \{\overline{1,(m+1)l-1}\}\backslash\{il\}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{27}$$

и $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_{(m+1)l}(t))'$ – система решений задач Коши (8) на $[t_{r-1}, t_r)$ при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1,(m+1)l}$. Покажем, что пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ — решение задачи (8)-(11). Так как $\widetilde{u}[t]$ — решение задачи Коши (8) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, то из равенства (23) следует, что

$$\widetilde{u}_r(t) = D_{*,r}(t)\widetilde{\lambda}_r + F_{*,r}(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,(m+1)l}. \tag{28}$$

Перепишем (25)—(27) в следующем виде:

$$B_0\widetilde{\lambda}_1 + C_0\widetilde{\lambda}_{(m+1)l} + C_0[D_{*,(m+1)l}(T)\widetilde{\lambda}_{(m+1)l} + F_{*,(m+1)l}(T)] = d, \tag{29}$$

$$B_i\widetilde{\lambda}_{il} + C_i\widetilde{\lambda}_{il+1} + B_i[D_{*,il}(t_{il})\widetilde{\lambda}_{il} + F_{*,il}(t_{il})] = p_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{t_s - t_{s-1}}\widetilde{\lambda}_s + \frac{1}{t_s - t_{s-1}}[D_{*,s}(t_s)\widetilde{\lambda}_s + F_{*,s}(t_s)] = \frac{1}{t_s - t_{s-1}}\widetilde{\lambda}_{s+1}, s = \{\overline{1,(m+1)l-1}\}\backslash\{il\}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{31}$$

и в силу равенства (28) выражения, стоящие в квадратных скобках, равны $\lim\limits_{t \to t_r - 0} \widetilde{u}_r(t)$, $r = \overline{1,(m+1)l}$. Отсюда следует, что пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}_r[t])$ является решением задачи (8)—(11). Лемма доказана.

Следующее утверждение устанавливает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости задачи (1)—(3).

Теорема 2. *Краевая задача с импульсным воздействием (1)—(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $l \in \mathbb{N}$ существует $\nu \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(l) : R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ обратима и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.*

Теорема 2 доказывается аналогично схеме доказательства теоремы 3 из [9, с.101] с незначительными изменениями и с учетом введения $l \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Задача (1)—(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t)$, d, $p_1, \ldots, p_m$ она имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедливо неравенство*

$$\|x^*\| \leq K \max(\|d\|, \|f\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|), \tag{36}$$

где $K - const$, независящая от $f(t)$, d, $p_i, i = \overline{1,m}$.

Число K называется константой корректной разрешимости задачи (1)—(3). Покажем, что для корректной разрешимости задачи (1)—(3) при фиксированном ν условия теоремы не только достаточны, но и необходимы.

Теорема 3. *Краевая задача с импульсным воздействием (1)—(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $l = l(\nu) > 0$, $l \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(l) : R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ обратима и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть краевая задача (1)—(3) корректно разрешима. Обратимость матрицы $Q_*(l)$ устанавливается аналогично схеме доказательства обратимости матрицы $Q_*(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ теоремы 3 из [9, с.101—102]. Матрица $Q_*(l)$ обратима при любых $l \in \mathbb{N}$ и $\|[Q_*(l)]^{-1}\| \leq \gamma(l)$. Покажем, что существует l_0, при котором для всех $l \geq l_0$ справедлива оценка

$$\|[H^{-1}Q_*(l)]^{-1}\| \leq \widehat{\gamma}, \tag{37}$$

а $\widehat{\gamma}$ — константа, независящая от l. С этой целью рассмотрим уравнение

$$H^{-1}Q_*(l)\lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{n(m+1)l}. \tag{38}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, а $l_0(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\exp\left(\frac{\alpha h^0}{l} - 1\right) \le \frac{\varepsilon/2}{2(1+\varepsilon/4)(1+\varepsilon/2)}$. Теперь для всех $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{(m+1)l})' \in R^{n(m+1)l}$, используя лемму из [3], можно построить функцию $f_c(t) \in \widetilde{C}([0,T], R^n)$, обладающую свойствами

$$F_r(A, f_c) \equiv \frac{1}{t_r - t_{r-1}} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} f_c(t)dt + \frac{1}{h_r} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f_c(\tau)d\tau dt+$$

$$+\frac{1}{t_r - t_{r-1}} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} A(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} f_c(\tau_1)d\tau_1 d\tau dt + \ldots = c_{r+1}, \quad r = \overline{1, (m+1)l - 1},$$

$F_{il}(A, f_c) = 0$, $i = \overline{1,m}$, $\|f_c\|_1 \le (1+\varepsilon/2)\|c\|$. Если взять $d_c = -c_1$, $p_1(c) = -c_{l+1}, p_2(c) = -c_{2l+1}, \ldots, p_m(c) = -c_{ml+1}$, то $F_*(d_c, f_c, p_1(c), p_2(c), \ldots, p_m(c), l) = -c$. Из однозначной разрешимости (1)-(3) и неравенства (36) при всех $d \in R^n$, $f(t) \in \widetilde{C}([0,T], R^n)$ следует, что уравнение (38) имеет единственное решение $\lambda \in R^{n(m+1)l}$, и справедлива оценка

$$\|\lambda\| = \|[H^{-1}Q_*(l)]^{-1}F_*(d_c, f_c, p_1(c), \ldots, p_m(c), l)\| =$$

$$= \max_r \|x_c(t_{r-1})\| \le \|x_c(t)\|_2 \le K \max(\|d_c\|, \|f_c\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i(c)\|). \tag{39}$$

Неравенство (39) следует из корректной разрешимости задачи (1)—(3). Так как по построению $f_c(t)$ и по выбору d_c, $p_1(c), \ldots, p_m(c)$ имеет место неравенство

$$\max(\|d_c\|, \|f_c\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i(c)\|) \le (1+\varepsilon/2)\|c\|,$$

то из (39) получим оценку $\|[H^{-1}Q_*(l)]^{-1}c\| \le (1+\varepsilon/2)K\|c\|$. Поэтому ввиду произвольности $c \in R^{n(m+1)l}$ для любого $l \ge l_0(\varepsilon)$ будет справедлива оценка

$$\|[H^{-1}Q_*(l)]^{-1}\| \le (1+\varepsilon/2)K, \tag{40}$$

где $K-$ константа корректной разрешимости задачи (1)-(3), независящая от l, т.е. оценка (37) справедлива с $\gamma = (1+\varepsilon/2)K$. Далее, учитывая, что

$$\|H^{-1}Q_*(l) - H^{-1}Q_\nu(l)\| \le \|H^{-1}\| \cdot \|Q_*(l) - Q_\nu(l)\| \le$$

$$\le \frac{\delta l}{h^0} \max\left(1, \frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|, \max_{i=\overline{1,m}} \frac{h_i}{l}\|B_i\|\right) \left[\exp\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right) - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right)^j\right], \tag{41}$$

и выбирая $l_1 \ge l_0(\varepsilon)$, удовлетворяющим неравенству

$$K(1+\varepsilon/2)\frac{\delta l_1}{h^0} \max\left(1, \frac{h_{m+1}}{l_1}\|C_0\|, \max_{i=\overline{1,m}} \frac{h_i}{l_1}\|B_i\|\right) \left[\exp\left(\frac{\alpha h^0}{l_1}\right) - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha h^0}{l_1}\right)^j\right] < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [10, с.142] имеем

$$\|[H^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}\| \le K(1+\varepsilon).$$

Поэтому матрица $Q_\nu(l_1)$ обратима и выполняются неравенства

$$\|[Q_\nu(l_1)]^{-1}\| \le \frac{\delta l_1}{h^0}(1+\varepsilon)K,$$

$$q_\nu(l_1) = \frac{\delta l_1}{h^0}(1+\varepsilon)K\max(1, \frac{h_{m+1}}{l_1}\|C_0\|, \max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_i}{l_1}\|B_i\|)\Big[\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l_1}\Big) - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l_1}\Big)^j\Big] < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < 1.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если краевая задача с импульсным воздействием (1)—(3) корректно разрешима с константой K, то для любых $\varepsilon > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ существует $\bar l = \bar l(\varepsilon,\nu)$, при котором матрица $Q_\nu(l)$ обратима для всех $l \ge \bar l(\varepsilon,\nu)$ и справедлива оценка*

$$\|[H^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}\| \le (1+\varepsilon)K. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть краевая задача (1)—(3) корректно разрешима с константой K. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 3, для любого $\varepsilon > 0$ существует $l_0 = l_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $l \ge l_0(\varepsilon)$ матрица $Q_*(l)$ обратима и справедлива оценка (40). Выбирая $\bar l = \bar l(\varepsilon,\nu)$, удовлетворяющим неравенству

$$K(1+\frac{\varepsilon}{2})\frac{\delta\bar l}{h^0}\max\Big(1, \frac{h_{m+1}}{\bar l}\|C_0\|, \max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_i}{\bar l}\|B_i\|\Big)\left[\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{\bar l}\Big) - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{\bar l}\Big)^j\right] < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)},$$

получим обратимость матрицы $H^{-1}Q_\nu(l)$ для всех $l \ge \bar l(\varepsilon,\nu)$ и оценку (42). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $l_0 = l_0(\nu)$ такое, что для всех $l \ge l_0(\nu)$, при которых матрица $Q_\nu(l)$ обратима, ее обратная удовлетворяет оценке*

$$\|[H^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}\| \le \gamma, \tag{43}$$

где $\gamma - const$, не зависящая от l. Тогда задача (1)—(3) корректно разрешима с константой $K = \gamma$.

Доказательство. Пусть для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(l)$ обратима при всех $l \ge l_0(\nu)$ и имеет место оценка (43). Тогда, учитывая, что

$$q_\nu(l) = \gamma\frac{\delta l}{h^0}\max(1, \frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|, \max_{i=\overline{1,m}}\frac{h_i}{l}\|B_i\|)\Big[\exp\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big) - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}\Big(\frac{\alpha h^0}{l}\Big)^j\Big] = O\Big[\Big(\frac{h^0}{l}\Big)^\nu\Big],$$

и выбирая $\widetilde{l} \ge l_0(\nu)$, удовлетворяющим неравенству $q_\nu(l) < 1$, из теоремы 1 получим корректную разрешимость задачи (1)—(3). При этом оценка (19) справедлива для всех $l \ge \widetilde{l}$. Заменяя $\gamma_\nu(l)$ на $\gamma\frac{\delta l}{h^0}$, переходя в (19) к пределу при $l \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{l\to\infty} L_\nu(l) = \gamma$, имеем

$$\|x^*\|_2 \le \gamma\max(\|d\|, \|f\|_1, \max_{i=\overline{1,m}}\|p_i\|),$$

т.е. задача (1)—(3) корректно разрешима с константой $K = \gamma$. Теорема 5 доказана.

Цитированная литература

1. **Халанай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

2. **Самойленко А. М., Перестюк Н. А.** // Дифференциальные уравнения. 1974. Т.10, № 11.

3. **Самойленко А. М., Перестюк Н. А.** //Украинский математический журнал. 1982.Т. 34, № 1. С.66—73.

4. **Самойленко А. М., Перестюк Н.,А., Ахметов М.У.** Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.- Киев, 1983.—(Препринт/АН УССР. Ин-т матем.)

5. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

6. **Самойленко А. М., Перестюк Н. А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.

7. **Тлеулесова А. Б.** // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 5. С. 114 – 122.

8. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

9. **Тлеулесова А. Б.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 4. С. 93-102.

10. **Треногин В. В.** Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 27.02.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 96 – 102*

УДК 539.3:534.1

РЕАКЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА БЕГУЩУЮ ВДОЛЬ ОСИ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

В.Н. Украинец

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125.

Решена задача о действии на упругое полупространство движущейся вдоль его свободной поверхности оси с постоянной дорелеевской скоростью периодической нагрузки.

В ходе решения волновые уравнения для потенциалов Ламе приведены к уравнениям Гельмгольца, решения которых представлены в виде суперпозиции рядов Фурье-Бесселя (заданных потенциалов нагрузки) и интегралов Фурье. В общем виде получены интегральные выражения для определения компонент напряжённо- деформированного состояния полупространства.

С использованием полученных зависимостей проведено исследование динамического воздействия движущейся нагрузки, заданной разными потенциалами, на поверхность полупространства.

Задача о реакции бесконечного упругого тела на движущуюся вдоль оси точечную нагрузку рассмотрена в [1]. В статье [2] построено аналитическое решение задачи о подвижной периодической нагрузке в круговом тоннеле в упругом полупространстве. Используя идею [2], здесь получено решение задачи о нагрузке, движущейся с постоянной дорелеевской скоростью вдоль оси, параллельной свободной поверхности полупространства.

1. Постановка задачи. Пусть в упругом полупространстве $x \le h$ вдоль оси Z, параллельной свободной поверхности, с постоянной скоростью c движется нагрузка, заданная потенциалами

$$\varphi_j^{(1)} = \Phi_j^{(1)} e^{i\xi\eta}, \qquad \eta = z - ct, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Движение полупространства описывается системой уравнений

$$(\lambda + \mu) grad\ div \overrightarrow{u} + \mu \Delta \overrightarrow{u} = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\overrightarrow{u}$ — вектор смещения упругой среды, λ, μ, ρ — ее параметры Ламе.

Граница полупространства свободна от действия нагрузки, то есть при x = h

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \tag{3}$$

Keywords: *partial differential equation, periodic load, springy half-space*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H35

Решение уравнений (2) ищем в виде

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(r,\theta,\eta) = \overrightarrow{u}(x,y,\eta). \tag{4}$$

Обозначим $c_p = \left[(\lambda+2\mu)/\rho\right]^{1/2}$, $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$, и введем числа Маха : $\mathrm{M_p = c/c_p}$, $M_\mathrm{s} = \mathrm{c/c_s}$. С учетом введенных обозначений уравнения (2) преобразуются к виду

$$\left(\frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2}\right) graddiv\,\overrightarrow{u} + \frac{1}{M_s^2}\Delta\overrightarrow{u} = \frac{\partial^2\overrightarrow{u}}{\partial\eta^2}. \tag{5}$$

Для решения задачи воспользуемся потенциалами Ламе [3]:

$$\overrightarrow{u} = grad\varphi_1 + rot\overrightarrow{\psi}. \tag{6}$$

В цилиндрической системе координат потенциал $\overrightarrow{\psi}$ можно представить в виде [4]:

$$\overrightarrow{\psi} = \varphi_2\overrightarrow{e_\eta} + rot(\varphi_3\overrightarrow{e_\eta}), \tag{7}$$

где $\overrightarrow{e_\eta}$ – орт оси η.

Из (5) следует, что потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi_j = M_j^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\eta^2}, \quad j=1,2,3. \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{M_1 = M_p, M_2 = M_3 = M_s}$.

Потенциалы φ_j будем искать в виде

$$\varphi_j\left(r,\theta,\eta\right) = \Phi_j(r,\theta)e^{i\xi\eta}. \tag{9}$$

Из (8) видно, что Φ_j удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta_2\Phi_j - m_j^2\xi^2\Phi_j = 0, \tag{10}$$

где $m_j^2 = 1 - M_j^2$, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа.

Представим Φ_j в виде

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}. \tag{11}$$

Здесь

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}K_n(k_jr)e^{in\theta}, \tag{12}$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j\left(\xi,\zeta\right) exp(iy\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}(x-h))d\zeta, \tag{13}$$

$K_n(k_jr)$ — функции Макдональда, $k_j = \sqrt{m_j^2\xi^2}$, a_{nj} — заданные коэффициенты, $\mathrm{g_j}(\xi,\zeta)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Нетрудно видеть, что слагаемые рядов Фурье-Бесселя (12) — частные решения уравнений Гельмгольца — описывают излучаемые на оси волны при выполнении условия

$$Re \quad k_j > 0. \tag{14}$$

Подынтегральные функции в соотношениях (13) — плоские гармонические волны, отраженные границей полупространства и затухающие при $x \to -\infty$, если

$$Re\sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \geq 0, \quad Im\sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \leq 0. \tag{15}$$

Воспользовавшись представлением [5], разложим (12) на плоские волны:

$$H_n(kr)e^{in\theta} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - k^2}}{k}\right)^n \frac{exp\left(iy\zeta - x\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}}d\zeta, \tag{16}$$

$$Re\sqrt{\zeta^2 - k^2} \geq 0, Im\sqrt{\zeta^2 - k^2} \leq 0,$$

которое справедливо при $x = r \quad cos > 0$. Здесь $Hn(kr)$ – функция Ханкеля первого рода.

Используя идею аналитического продолжения, из (16) можно получить

$$K_n(kr)e^{in\theta} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k}\right)^n \frac{exp\left(iy\zeta - x\sqrt{\zeta^2 + k^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 + k^2}}d\zeta, \tag{17}$$

$$Re\sqrt{\zeta^2 + k^2} \geq 0, \quad Re \quad k \geq 0, \ x > 0.$$

Соотношением (17) следует пользоваться при $\mathrm{M_j} < 1$.

2. Представление потенциалов. Рассмотрим дозвуковой случай, наиболее типичный для практики, более того, предположим, что $M_R = c/c_R < 1$ (c_R — скорость распространения волн Релея в полупространстве [3]).

Подставляя (17) в (11), представим потенциалы в окрестности $\mathrm{x = h}$ в виде

$$\Phi_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j}\sum_n a_{nj}\Phi_{nj} + g_j(\xi,\zeta)e^{(x-h)f_j}\right]e^{iy\zeta}d\zeta, \tag{18}$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}, \Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j}\right)^n, \quad j = 1, 2, 3.$

Воспользуемся граничными условиями (3). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая, в силу произвольности y, их нулю, получим систему трех уравнений, из которой определяем $g_j(\xi,\zeta)$:

$$g_j(\xi,\zeta) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\Delta_{jk}}{\Delta}e^{-hf_k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nk}\Phi_{nk}. \tag{19}$$

Здесь

$$\Delta = \left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2 - 4\rho_0^2\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{11} = \tfrac{\Delta}{2\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}} - \tfrac{\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12} = -2\zeta(2\rho_0^2 - \beta^2), \quad \Delta_{13} = 2\xi\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$
$$\Delta_{21} = -\tfrac{M_s^2}{m_s^2}\Delta_{12}, \quad \Delta_{22} = -\tfrac{\overline{\Delta}}{2\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23} = -4\xi\zeta\tfrac{M_s^2}{m_s^2}\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$
$$\Delta_{31} = -\tfrac{\Delta_{13}}{m_s^2\xi^2}, \quad \Delta_{32} = \tfrac{\Delta_{23}}{\beta^2}, \quad \Delta_{33} = -\tfrac{\overline{\Delta}}{2\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}} + \tfrac{\left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2}{\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2}},$$
$$\alpha = M_p\xi, \quad \beta = M_s\xi, \quad \rho_0^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \overline{\Delta} = \left(2\rho_0^2 - \beta^2\right)^2 - 4\overline{\rho}_0^2\sqrt{\rho_0^2 - \alpha^2}\sqrt{\rho_0^2 - \beta^2},$$
$$\overline{\rho}_0^2 = \xi^2 + \left(2/m_S^2 - 1\right)\zeta^2.$$

Выражая компоненты напряженно-деформированного состояния полупространства через Φ_j (18), получим

$$u_l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left(\mathrm{T}_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + \mathrm{T}_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta,$$

$$\frac{\sigma_{lm}}{\mu} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \left(S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta. \tag{20}$$

Здесь $l = x, y, \eta$, $m = x, y, \eta$,

$$F_{nj}^{(1)} = \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_n a_{nj} \Phi_{nj}, \quad F_{nj}^{(2)} = e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^{3} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_n a_{nk} \Phi_{nk},$$

$$T_{x1}^{(1)} = -T_{x1}^{(2)} = -f_1, \quad T_{x2}^{(1)} = T_{x2}^{(2)} = -\zeta, \quad T_{x3}^{(1)} = -T_{x3}^{(2)} = f_3\xi,$$

$$T_{y1}^{(1)} = T_{y1}^{(2)} = i\zeta, \quad T_{y2}^{(1)} = -T_{y2}^{(2)} = if_2, \quad T_{y3}^{(1)} = T_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta,$$

$$T_{\eta1}^{(1)} = T_{\eta1}^{(2)} = i\xi, \quad T_{\eta2}^{(1)} = T_{\eta2}^{(2)} = 0, \quad T_{\eta3}^{(1)} = T_{\eta3}^{(2)} = -im_s^2\xi^2,$$

$$S_{xx1}^{(1)} = S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_p^2), \quad S_{xx2}^{(1)} = -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, \quad S_{xx3}^{(1)} = S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2\xi,$$

$$S_{yy1}^{(1)} = S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_p^2), \quad S_{yy2}^{(1)} = -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2\zeta, \quad S_{yy3}^{(1)} = S_{yy3}^{(2)} = 2\xi\zeta^2,$$

$$S_{\eta\eta1}^{(1)} = S_{\eta\eta1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, \quad S_{\eta\eta2}^{(1)} = S_{\eta\eta2}^{(2)} = 0, S_{\eta\eta3}^{(1)} = S_{\eta\eta3}^{(2)} = 2m_s^2\xi^3,$$

$$S_{xy1}^{(1)} = -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1\zeta i, \quad S_{xy2}^{(1)} = S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2)i, \quad S_{xy3}^{(1)} = -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 i\xi\zeta,$$

$$S_{\eta y1}^{(1)} = S_{\eta y1}^{(2)} = -2\xi\zeta, \quad S_{\eta y2}^{(1)} = -S_{\eta y2}^{(2)} = -\xi f_2, \quad S_{\eta y3}^{(1)} = S_{\eta y3}^{(2)} = n_2\zeta,$$

$$S_{x\eta1}^{(1)} = -S_{x\eta1}^{(2)} = -2f_1 i\xi, \quad S_{x\eta2}^{(1)} = S_{x\eta2}^{(2)} = -\xi\zeta i, \quad S_{x\eta3}^{(1)} = -S_{x\eta3}^{(2)} = n_2 f_3 i,$$

$$n_1 = (1 + m_p^2)\xi^2, \quad n_2 = (1 + m_s^2)\xi^2.$$

При построении волн, отражённых от поверхности (13), мы воспользовались представлением решения в виде интеграла Фурье, что верно лишь в том случае, если подынтегральные функции интегрируемы на $(-\infty, \infty)$, а для этого достаточно, чтобы $\Delta(\rho_0) \neq 0$. Поскольку, как известно, функция Релея $\Delta(\rho_0)$ имеет только действительные нули, то $\Delta(\rho_0) = 0$ при $\rho_0 = \xi M_R$. Из соотношения $\rho_0 = (\xi^2 + \zeta^2)^{1/2}$ получим $\Delta(\rho_0) = 0$ при $\zeta = \pm\xi(M_R - 1)^{1/2}$. То есть, если $M_R < 1$, то $\Delta(\rho_0) \neq 0$ при любых ζ, что соответствует рассматриваемому случаю.

3. **Результаты расчета.** В качестве примера рассмотрим полупростанство из алевролита ($\nu = 0,20$, $\mu = 2,532 \cdot 10^3$) МПа, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг /м^3 . Вдоль оси, параллельной свободной поверхности и заглубленной на h=1м, с постоянной дорелеевской скоростью c=100 м/с движется периодическая нагрузка, заданная потенциалами (1), (12). Принимаем $\xi = 2\pi$, тогда период $T = h$.

Исследуем динамическое поведение свободной поверхности полупростанства при воздействии подвижных нагрузок, заданных следующими потенциалами:

а) $\Phi_1^{(1)}$ с отличным от нуля только коэффициентом $a_{01} = 1$;

б) $\Phi_3^{(1)}$ с отличным от нуля только коэффициентом $a_{03} = 1$.

На рис. 1,2 в сечении $\eta = 0$ изображены эпюры нормальных напряжений $\sigma_{yy}, \sigma_{\eta\eta}$ и смещений u_x, u_y на поверхности полупространства. Кривая 1 соответствует случаю воздействия нагрузки,

Рис. 1: Нормальные напряжения на границе полупространства

Рис. 2: Перемещения на границе полупространства заданной условием а), кривая 2 — условием б). Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы

1. Кривые 1 и 2 носят ярко выраженный локальный характер. Наибольшие значения σ_{yy}, $\sigma_{\eta\eta}$ и u_x имеют при $y = 0$, а u_y — при $y = \pm 0.4T$ (при $y = 0, u_y = 0$). Причем, преобладающее воздействие на поверхность оказывает нагрузка, заданная потенциалом $\Phi_3^{(1)}$.

2. С увеличением $|y|$ происходит быстрое затухание напряжений и перемещений и при $|y| = T$ ими можно пренебречь. Таким образом, динамическое воздействие движущейся нагрузки на поверхность практически ощутимо лишь в пределах$|y| \leqslant T$.

потенциалы Ламе, уравнения Гельмгольца, функции Макдональда.

Цитированная литература

1. **Watanabe Kazumi.** // Bull. JSME. 1981. № 193. P.1115—1122.

2. **Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н.** // Известия АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 5. С.75—80.

3. **Новацкий В.** // Теория упругости. М., 1975.

4. **Гузь Л.И., Кубенко В.Л., Черевко М.А.** // Дифракция упругих волн. Киев, 1978.

5. **Алексеева Л.А.** // Известия АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат. 1983. № 5. С.1—5.

Поступила в редакцию 12.08.2005

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17). С. 103 – 106*

УДК 517.925.32

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Утеулиева К.Н., Камматов К.К., Рамазанова Х.

Атырауский государственный университет им. Х.Досмухамедова
465045 Атырау, Студенческий пр., 212 AtyrauUniv@nursat.kz

Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости стационарных колебаний нелинейной системы специального вида с медленно меняющимися коэффициентами.

Данная работа является продолжением работы авторов и посвящена вопросу об устойчивости стационарных колебаний.

В исследовании устойчивости по Ляпунову фундаментальные работы сделаны математиками Казанской школы: Н.Г.Четаевым, И.Г.Малкиным, Г.В.Каменковым и К.П.Персидским. Следует отметить, что А.Ляпуновым была поставлена задача о необходимых и достаточных условиях устойчивости по первому приближению и дано полное ее решение для периодических движений. Он рассмотрел также случай, когда при исследовании устойчивости нельзя ограничиваться первыми приближениями, а необходимо принимать во внимание члены высших порядков. Эти случаи были названы критическими или особенными. Главные трудности в методах А.Ляпунова и Н.Четаева об устойчивости движения заключаются в отсутствии вычислительных алгоритмов для построения функций Ляпунова и Четаева. В работе Г.В.Каменкова [1] даны решения задач устойчивости в различных критических по Ляпунову случаях, исследованы задачи об устойчивости движения в случаях, близких к критическим; рассматриваются также системы дифференциальных уравнений, определяющее уравнение, которое имеет по крайней мере один малый вещественный корень или пару комплексных корней с малой вещественной частью, не применяя классического определения устойчивости, данного Ляпуновым. Он также исследовал проблему двух нулевых корней определяющего уравнения с одной группой решений. В монографии одного из авторов данной работы [2] был применен критерий Г.Каменкова об устойчивости колебаний существенно нелинейных систем, а также рассмотрен вопрос об устойчивости движения некоторых существенно нелинейных систем, у которых

Keywords: *Liyapunov' s function, nonlinear system, oscillation*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

правые части системы обращаются в нуль только в точке $x_s = y_s = 0$. Эта точка будет единственной особой точкой системы, если $X_{s0}^{(m)}, X_{s0}^{(m+1)}, \dots Y_{s0}^{(m)}, Y_{s0}^{(m+1)}$ обращаются в нуль только при $x_s = y_s = 0$.

Рассматриваются движения, описываемые системами со многими степенями свободы с медленно меняющимися коэффициентами [1—3]:

$$\dot{x_s} = X_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu X(x_s, y_s, \tau, \mu),$$

$$\dot{y_s} = Y_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu Y(x_s, y_s, \tau, \mu), \quad s = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

где правые части обращаются в нуль при $x_s = y_s = 0$, а $X_{s0}^{(m_0)}, \quad Y_{s0}^{(m_0)}$ — однородные многочлены, не содержащие линейных членов относительно x_s, y_s, причем

$$X_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} A_{sp} x_s^{m_0 - p} y_s^p,$$

$$Y_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} B_{sp} x_s^{m_0 - p} y_s^p.$$

$X(x_s, y_s, \tau, \mu), Y(x_s, y_s, \tau, \mu)$ — функции, аналитические относительно x_s, y_s и μ , представимые в виде абсолютно сходящихся рядов по целым положительным степеням μ в исследуемой области изменения x_s, y_s, μ и для любых τ в интервале $[0, \infty)$:

$$X(x_s, y_s, \tau, \mu) = \mu X_{s1}(x_s, y_s, \tau) + \mu^2 X_{s2}(x_s, y_s, \tau) + \dots,$$

$$Y(x_s, y_s, \tau, \mu) = \mu Y_{s1}(x_s, y_s, \tau) + \mu^2 Y_{s2}(x_s, y_s, \tau) + \dots,$$

где μ — малый положительный параметр, $\tau = \mu t$ — медленное время, а

$$X_{s1}(x_s, y_s, \tau), \ Y_{s1}(x_s, y_s, \tau), (i = 1, 2, ...)$$

— многочлены относительно x_s и y_s любой конечной степени m_i с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями по τ с ограниченными по τ производными причем

$$\mathbf{X}_{si}^{(m_i)}(x_s, y_s, \tau) = \sum_{k_1^{(i)} + \dots + k_n^{(i)} + e_1^{(i)} + \dots + e_n^{(i)} = m_0 - 1}^{m_i} A_{si}^{\left(k_1^{(i)}, \dots, e_n^{(i)}\right)}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} \dots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} \dots y_n^{e_n^{(i)}},$$

$$\mathbf{Y}_{si}^{(m_i)}(x_s, y_s, \tau) = \sum_{k_1^{(i)} + \dots + k_n^{(i)} + e_1^{(i)} + \dots + e_n^{(i)} = m_0 - 1}^{m_i} B_{si}^{\left(k_1^{(i)}, \dots, e_n^{(i)}\right)}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} \dots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} \dots y_n^{e_n^{(i)}}.$$

Для системы (1) в [3] при некоторых ограничениях получены необходимые и достаточные условия существования решений и способы их построения. В связи с этим данная работа является естественным продолжением статьи [3], посвященной этому же вопросу. Таким образом, исследуется устойчивость решений системы (1) (см. [3]) α -го приближения, не привлекая к рассмотрению уравнения в вариациях. Для этого рассмотрим корни [3]

$$\rho_{1k}^{(i_1^{(k)})}, \rho_{2k}^{(i_2^{(k)})}, \dots, \rho_{nk}^{(i_n^{(k)})} \tag{2}$$

исследуемой системы (1) и с учетом

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s1})^{\bar{M}_k^{(s)}} \bar{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}(\ldots) + \ldots,$$

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \varepsilon_{s2}^{\bar{M}_k^{(s)}} \bar{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}(\ldots) + \ldots$$

перепишем их в следующем виде:

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s1})^{\bar{M}_k^{(s)}} \tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right), \tag{3}$$

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \varepsilon_{s2}^{\bar{M}_k^{(s)}} \tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right). \tag{4}$$

В этих равенствах знаки $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right)$ и $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right)$ одинаковы: или оба положительны или оба отрицательны, так как $\tilde{A}_{sk}$ сохраняют постоянный знак и согласно [3]

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \left[\rho_s - \rho_s^{(i_s^{(k)})}(\rho_{1k}^{(i_1^{(k)})}, \ldots, \rho_{s-1}^{(i_{s-1}^{(k)})}, \rho_{s+1,k}^{(i_{s+1}^{(k)})}, \ldots, \rho_{n,k}(i_n^{(k)}), \tau^*)\right]^{\bar{M}_k^{(s)}} \bar{A}_{sk}^{(\rho_s, \tau^*)} +$$

$$+ \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}(\ldots) + \ldots$$

в пределах ρ_s от $\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}$ до $\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}$, $\quad s = 1, 2, ..., n.$; При достаточно малом значении μ знак производных ρ_s' как в (3), так и в (4) определяется членами α -го порядка по μ независимо от членов $\mu^{\alpha+1}$ и выше. Тогда, если $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right) > 0$, то $\rho_s' < 0$

и, если $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right) < 0$, то $\rho_s' > 0$;

если же $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right) < 0$, то $\rho_s' > 0$

и, если $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right) > 0$, то $\rho_s' < 0$.

Отсюда можно заключить, что при $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}, \tau^*\right) > 0$ стационарное решение устойчиво, а при $\tilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}, \tau^*\right) < 0$ неустойчиво. Эти условия можно выразить в виде теоремы.

Теорема. *Если система уравнений (1) при значениях μ, удовлетворяющих условию*

$$1 + \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \sum_{k_1^{(s)} + \ldots + k_n^{(s)} = m_0 - 1}^{M_k^{(s)}} u_{sk}^{(k_1^{(s)}, \ldots, k_n^{(s)})}(\theta_s, \tau^*) k_s^{(s)} \rho_1^{k_1^{(s)}} \ldots \rho_n^{k_n^{(s)}} > 0,$$

такова, что соответствующие этой системе уравнения [5]

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k Q_{sk}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \tau^*) = 0$$

имеют вещественные неотрицательные корни (2) нечетной кратности, равной $\bar{M}_k^{(s)}$, и если

$\frac{d^{\bar{M}_k^{(s)}} Q_{sk}(\rho_s,\tau^*)}{d\rho_s^{\bar{M}_k^{(s)}}} < 0$ *при* $\rho_s = \rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}$, *то стационарные колебания, отвечающие корням (2), устойчивы. Если же* $\frac{d^{\bar{M}_k^{(s)}} Q_{sk}(\rho_s,\tau^*)}{d\rho_s^{\bar{M}_k^{(s)}}} > 0$ *при* $\rho_s = \rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}$, *то колебания неустойчивы.*

Цитированная литература

1. **Каменков Г.В.** Избранные труды. Т.1 и 2, М., 1971.
2. **Камматов К.К.** Устойчивость и колебания существенно нелинейных систем. Алматы, 2001г.
3. **Утеулиева К.Н., Камматов К.К., Рамазанова Х.** // Материалы научно-теор. конф. посв. 70-летию КазНУ. Алматы, 2004

Поступила в редакцию 28.10.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 3 (17) . С. 107 – 109*

ХРОНИКА

ЛИДЕРУ КАЗАХСТАНСКОЙ НАУКИ ПОСВЯЩАЕТСЯ

23 мая 2005 г. на 68-ом году жизни скончался выдающийся казахстанский ученый академик НАН РК доктор физико-математических наук профессор Умирзак Махмутович Султангазин. Имя этого человека занимает достойное место в ряду ученых, внесших значительный вклад в развитие науки и образования нашей страны.

Становлению и развитию науки в Казахстане способствовало образование в 40-х годах Академии наук Казахской ССР. Математическая наука стала интенсивно развиваться с создания в академии сектора математики и механики и лаборатории машинной и вычислительной математики, на базе которых в 1965 году был открыт Институт математики и механики. Выдающиеся ученые М.В. Келдыш, Н.Н. Боголюбов, И.М. Виноградов, А.А. Дородницын, А.Н. Тихонов, С.Л. Соболев, С.М. Никольский, И.Н. Векуа, М.С. Лаврентьев, Г.И. Марчук, Н.Н. Яненко, С.К. Годунов оказали существенную поддержку в деле подготовки кадров и формировании основных научных направлений института. В организации казахстанской математической науки неоспорим вклад казахстанских ученых: К.П. Персидского, О.А. Жаутыкова, А.Д. Тайманова, Ж.С. Ержанова, Т.И Аманова, И.И. Кима и многих других математиков и механиков, прошедших подготовку в крупных научных центрах СССР и успешно перенявших эстафету предыдущего поколения ученых. В этом ряду особое место занимает У.М. Султангазин.

У.М. Султангазин родился 4 октября 1936 г. в п. Кара-Оба Урицкого района Кустанайской области. Выпускник механико-математического факультета Каз.ГУ им. С.М. Кирова (1953–1958 гг.), начал преподавательскую и научную деятельность там же, где проработал до 1978 года, пройдя путь от ассистента, до заведующего кафедрой вычислительной математики. В 1966 году У.М. Султангазин защитил кандидатскую диссертацию на тему "Метод расщепления для кинетического уравнения переноса" (специальность 01.01.07 — вычислительная математика), выполненную под руководством акад.АН СССР Н.Н. Яненко. Защита докторской диссертации "Метод сферических гармоник для нестационарного кинетического уравнения переноса" (специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения и математическая физика) состоялась в 1972 г. в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР (научные консультанты Г.И. Марчук и С.К. Годунов). В 1974 г. он стал профессором, а 1983 г. был избран академиком АН КазССР.

С 1978 по 1989 гг. У.М. Султангазин работал директором Института математики и механики АН КазССР. На этом посту внес большой вклад в развитие фундаментальных и прикладных исследований. Под его руководством был организован мощный Вычислительный Центр коллективного пользования. В эти годы институт достиг наибольшего расцвета и занял передовые позиции в мировой науке.

С 1985 г. он академик-секретарь Отделения физико-математических наук, член Президиума АН КазССР, затем вице-президент (1986–1988 гг.) и президент АН КазССР (1988–1992 гг.) и НАН РК (1992–1994 гг.). С 1996 по 1998 первый заместитель министра - вице-президент Министерства науки — Академии наук РК. В 2002–2003 — вице-президент НАН РК.

В должности президента Академии наук проявился талант Умирзака Махмутовича, не только как крупного ученого, но и как выдающегося организатора науки. Им совместно с ведущими учеными Казахстана были определены главные направления научных исследований, поставлены конкретные научные задачи для решения социальных, экономических, экологических и др. актуальных для республики проблем, привлечены самые высококвалифицированные кадры для их решения.

Умирзаку Махмутовичу всегда были присущи такие качества, как трудолюбие, требовательность, государственный подход к делу. Ясно понимая актуальность развития космической отрасли научных исследований для РК, он стал организатором Института космических исследований (ИКИ) и его бессменным директором с 1991 г. Под его непосредственным руководством в 1994 году в ИКИ был организован Центр приема и обработки спутниковой информации.

Многосторонние научные связи с ведущими научными центрами мира были установлены У.М.Султангазиным в результате многолетнего труда в области математической теории переноса излучений. Он создатель казахстанской научной школы в этой области науки. Научные результаты академика Султангазина получили практическое воплощение при расчете ядерных реакторов, решении задач атмосферной оптики, дистанционного зондирования. Им опубликовано более 300 научных работ, 10 монографий, подготовлено 6 докторов и более 30 кандидатов наук. За цикл работ по теории переноса в 1987 г. он был удостоен Государственной премии СССР, в 1989 г. премии Академии наук СССР и Чехословацкой академии наук в области естественных наук. Он лауреат Премии "Тарлан-2002".

По приглашению ведущих зарубежных научных центров и университетов Умирзак Махмудович читал лекции в Карловом университете (Прага), в Парижском университете, в Международной математической школе им. Банаха (Польша), в Стэнфордском и Мэрилендском университетах (США), в Киото университете в Японии.

На протяжении многих лет он был редактором научных журналов: "Доклады МВОиН и АН РК", "Доклады НАН РК" (1992, 1995, 1998–2004), "Известия Академии Наук КазССР" ныне "Известия НАН РК", серия физико-математическая" (1987–1990, 2000–2002), "Вестник АН КазССР", "Вестник НАН РК" (1988–1990, 2003–2004гг.). Он являлся членом редколлегий многих международных журналов, возглавлял Математическое общество РК с момента его основания.

В 1994 г. У.М. Султангазин был избран член-корреспондентом Российской академии космонавтики, членом-корреспондентом Международного союза научных работников радио (URSI, Бельгия). В 1994–2003 гг. был членом Управляющего совета Международного института прикладного системного анализа (IIASA, Австрия) от Республики Казахстан, с 2002 г. член Канадского научного общества по дистанционному зондированию. Умирзак Махмудович осуществлял научное руководство всех казахстанских программ научных исследований и экспериментов на борту орбитального комплекса "Мир" с участием космонавтов Т.О. Аубакирова и Т.А. Мусабаева (1991, 1994, 1998 гг.) и Программы научных исследований и экспериментов Республики Казахстан на борту международной космической станции с участием Т.А. Мусабаева (2001 г). На базе Евразийского национального университета им. Л.Гумилева в Астане под руководством Султангазина создан филиал Института космических исследований — Центр космического мониторинга (2003г.). Здесь впервые в Казахстане внедрена технология приема, архивации и обработки данных высокого разрешения (5,6 м) с индийских спутников серии IRS на основе лицензионного соглашения с Индийским космическим агентством. Сертифицирована станция приема данных активного зондирования с канадского спутника RADARSAT-1. Первая казахстанская станция включена в международную сеть станций приема данных RADARSAT.

У.М. Султангазин избирался депутатом Верховного Совета Казахской ССР одиннадцатого созыва (1986–1990), народным депутатом СССР от Карагандинского-Октябрьского национально-территориального округа № 142 (1989–1991). Он член Совета президентов Академий наук СНГ, председатель Казахского республиканского Фонда мира. Награжден орденами Ленина (1991 г.), Трудового Красного Знамени (1987 г.), медалью им. С.П. Королева (1986 г.), медалью им. П.Л. Капицы (1996 г.), Большой бронзовой медалью Международной Ассоциации участников космических полетов (ASE) — за крупный вклад в развитие космических исследований в Казахстане (2001 г.), юбилейной медалью к 10-летию независимости Казахстана (2001), двумя почетными грамотами Президиума Верховного Совета Казахской ССР (1982 г., 1986 г.), почетной грамотой Российской Академии космонавтики им. К.Э. Циолковского (2002 г.). В 2004 году он был удостоен высокой государственной награды — ордена "Парасат"за выдающийся вклад в развитие науки и формирование космической отрасли в РК.

Проявляя глубокий подход к социально-экономическому развитию Казахстана, акад. У.М. Султангазин руководил работой по ряду перспективных направлений, связанных с программами устойчивого развития нашей страны, решения актуальных прикладных задач по космическому мониторингу сельскохозяйственных угодий в регионах Северного, Центрального и Западного Казахстана, мониторинга чрезвычайных ситуаций и техногенных воздействий в различных областях республики по заказам заинтересованных Министерств, ведомств и областных акиматов. Он был инициатором разработки Государственной Программы развития космической отрасли в РК на 2005–2007 годы, которая утверждена указом президента РК Н.А. Назарбаева от 25 января 2005 г.

Мечтой его жизни было желание увидеть Казахстан крупной индустриальной страной, вооруженной современными достижениями науки и техники. Он многое сделал для этого. Тяжело переживая за казахстанскую науку, оказавшуюся в последнее десятилетие в затяжном кризисе, он делал все, что было в его силах, для ее выживания.

Он был высоко эрудированным человеком, способным разобраться в любой научно-технической проблеме, безусловным лидером казахстанской науки, человеком, чьим мнением и отношением дорожили, а советам старались следовать.

С глубоким уважением к светлой памяти
Умирзака Махмутовича его коллеги и ученики

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.95 2000 MSC: 35L20

Abdikalikova G.A. **On solvability of one the non-local boundary value problem**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.5–10.

A linear boundary value problem for the systems of hyperbolic equations is under consideration by the parameterizations method. Sufficient coefficients conditions of unique existence of a solution of this problem are obtained by the parameterizations method as well as algorithm of finding the solution.

References — 7.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35L20

Әбдіхалықова Ғ.Ә. **Локальды емес шеттік есептің шешімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.5–10.

Гиперболалық типті теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есеп зерттелген. Параметрлеу әдісі арқылы қарастырылған есептің шешімінің бар және жалғыз болуының коэффициенттік жеткілікті шарттары алынған және шеімді табу алгоритмі ұсынылған.

Библ. — 7.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35D05, 35Q30

Abulkairov U.U. **On unique solvability of a flow problem for 2D and 3D Navier - Stokes system. II.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.11–18.

Theorems of existence and uniqueness of strong solutions of two flow problems for 2D – 3D Navier - Stokes system with nonstandard conditions are received.

References — 2.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35D05, 35Q30

Абылкаиров У.У. **2-3 өлшемді Навье - Стокс жүйесі үшін ағу есебінің бірмәнді шешілуі II** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.11–18.

Екі және үш өлшемді Навье - Стокс жүйелері үшін екі есептерінің күшті шешімдерінің бар және жалғыздығы туралы теорема дәлелденді.

Библ. — 2.

УДК: 004.3 2000 MSC: 65G40

Baymuhamedov M.F. **Synthesis of Adaptive Automatization Learning System**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.19–24.

Principles of constructions of adaptive automatization management systems of the complex objects are considered. An analytical model of the object is under control is proposed. The algorithms for construction of the adaptive automatization learning system is given.
References — 3.

УДК: 004.3 2000 MSC: 65G40

Баймухамедов М.Ф. **Адапты автоматтандырылған оқыту жүйесінің синтезі**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б. 19–24.

Күрделі объекті лерді басқ ару жүйелерін адаптивті автоматтандыру принциптері қарастырылған, матрицалық түрде объекті баскарудың аналитикалық моделі берілген, оқыту жүйесінің адаптивті автоматтандыру жобалау алгоритмдері келті рілген.
Библ. — 3.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Bakirova E. A. **On necessary and sufficient conditions of unique solvability of two points boundary value problem for loaded differential equations.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б. 25–34.

Two-points boundary value problem for loaded differential equations is investigated by parametrization method. The coefficient necessary and sufficient conditions of unique solvability of the problem are established.
References — 4.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B373

Бәкірова Э. А. **Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары туралы**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P. 25–34.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есеп параметрлеу әдісімен зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің бірмәнді шешілімділігінің коэффициенттік қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалған.
Библ. — 4.

УДК: 519.62 2000 MSC: 42A16

Ixsanov E.B. **Sufficient conditions of existence of gamographic solution of Newton nine-body problem**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P. 35–39.

A theorem of sufficient conditions of existence of gamographic solution of Newton nine-body problem that is represented as two rotating squares with the same angular velocity is proved.
References — 5.

УДК: 519.62 2000 MSC: 42A16

Иқсанов Е.В. **Ньютондық тоғыз дене есебiнiң гамографикалық шешуi болуының жеткiлiктi шарттары.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.35–39.

Бiрдей бұрыштық жылдамдықпен айналатын қос квадрат бейнесiндегi тоғыз дененiң Ньютон есебiнiң гамографиялық шешiмiнiң бар болуының жеткiлiктi шарты туралы теорема дәлелденедi.

Библ. — 5.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

Kokotova Eh.V. **A approximation of bounded solution of the system of the linear ordinary differential equations with unbounded coefficients**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.40–43.

A problem of finding bounded solutions of systems of linear ordinary differential equations with unbounded matrix is investigated. Regular two points boundary value problems approximating original problem are constructed. Interrelations of correct solvability of original and approximating problems are established. Estimated of approximation is obtained.

References — 3.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

Кокотова Е.В. **Коэффициенттерi шектелмеген сызықты жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесiнiң шектелген шешiмiн аппроксимациялау.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.40–43.

Шектелмеген матрицасы бар сызықты жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесiнiң шектелген шешiмiн табу есебi зерттеледi. Бастапқы есептi аппроксимациялайтын регулярлы қос нүктелi шеттiк есеп тұрғызылған. Бастапқы есеп пен аппроксимациялаушы есептiң корректiлi шешiлiмдiлiктерi арасындағы өзара байланыс тағайындалған. Аппроксимация бағалауы алынған.

Библ. — 3.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Kapshaev I.R. **On the one singular property of perturbed linear systems of differential equations.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.44–52.

A family of morphisms of vector stratification defined by the linear systems of differential equations is investigated. It is proved that the this family of morphisms of vector stratification is not sated.

References — 5.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Капшаев И.Р. **Сызықтық дифференциалдық теңдеулерiне парапар ауытқыған сызықтық дифференциалдық жүйелерiнiң қасиеттерiнiң бiр ерекшелiгi туралы.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.44–52.

Сызықтық дифференциалдық теңдеулеріне парапар дифференциалдық теңдеулер жүйелерімен анықталған мегземелік текшелердің тұрпаттық үйірі зерттелген. Көрсетілген мегземелік текшелердің тұрпаттық үйірі қаныққан болмайтындығы дәлелденген.

Библ. — 5.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10, 35P15

Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. **Estimates of spectrum of one class of mixed type operators** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.53–60.

In this paper semi-periodical Dirichlet problem for one class of mixed type equations is studied. Under some coefficients conditions the following results are received: smoothness of solutions, two-sided estimates of singular and eigne values.A problem of many gravitating bodies with isotrope variable masses changing with different temps on time is under consideration. Differential equations of motion are obtained in barycentric coordinates. Invariants of center of mass are received.

References — 14.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10, 35P15

Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М. **Аралас типті бір клас операторлардің спектрінің бағалары.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.53–60.

Бұл мақалада аралас типті бір клас теңдеулерге арналған Дирихле есебі зерттеледі. Коэффициентерге кейбір шарттар орындалғанда келесі нәтижелер алынған: шешімнің тегістігі, сингулярлы және меншікті сандардың екі жақты бағалары.

Библ. — 14.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

Ospanov M.N. **Bounded solutions of a family of systems of differential equations and their applications.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.61–67.

Sufficient conditions of existence of a unique bounded on the whole axis solution of a family of system of ordinary differential equations with unbounded coefficients and unbounded right side of the equations are obtained as well as their estimates. The results are used for getting conditions existence and uniqueness of bounded on the stripe solution of a system hyperbolic equations with unbounded coefficients and unbounded right side of the equations.

References — 6.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70

Оспанов М.Н. **Дифференциалдық теңдеулер жүйелері әулетінің шектелген шешімдері және олардың қолданымдары.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.61–67.

Оң жағы мен коэффициенттері шектелмеген дифференциалдық теңдеулер жүйелері әулетінің бүкіл осьтегі шектелген шешімінің жалғыз болуының жеткілікті шарттары алынған және оның бағасы тағайындалған. Нәтижелер оң жағы мен коэффициенттері шектелмеген гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақтағы шектеулі шешімінің жалғыз болуының шарттарын табуға пайдаланылған.

Библ. — 6.

УДК: 517.9215.8 2000 MSC: 35A05, 35K20

Sakhauyeva M.A. **On asymptotic behavior of a solution of one-dimensional two-phase degenerated Muskat-Verigin problem.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.68–74.

Asymptotic behavior of a solution of one-dimensional two-phase degenerated Muskat-Verigin problem for large time is studied.

References — 7.

УДК: 517.925.8 2000 MSC: 35A05, 35K20

Сахауева М.А. **Бір өлшемді екі фазалық Маскет-Веригин өзгешеленген есептер шешімінің асимптоталық сипаттамасы.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.68–74.

Уақыттың үлкен мәндері үшін бір өлшемді екі фазалық Маскет-Веригин өзгешеленген есептер шешімінің асимптоталық сипаттамасы зарттелген.

Библ. — 7.

УДК: 517.956 2000 MSC: 37C75

Sambetova A.A. **A special boundary value problem for biparabolic equation with nonconstant or varying coefficients** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.75–81.

In this article the existence of a solution of boundary value problem for biparabolic equation with nonconstant or varying coefficients is proved by constructing special potentials.

References — 4.

УДК: 517.956 2000 MSC: 37C75

Самбетова А.А. **Коэффициенттері айнымалы бипараболалық теңдеу үшін ерекше шекаралық есеп.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.75–81.

Мақалада коэффициенттері айнымалы бипараболалық теңдеу үшін шекаралық есептің шешімінің бар болуын арнайы потенциалдар құру және олардың қасиеттерін келтіру арқылы дәлелденген.

Библ. — 4.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Talipova M.Zh. **On existence of normal solutions of nonhomogeneous systems of second order partial differential equations** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.82–86.

The nesessary conditions of existence of normal solutions of nonhomogeneous systems of second order partial differential equations are established by Frobenius-Latysheva's method. The requirements for recursive systems defining of unknown coefficients of normal solutions under which these conditions are also sufficient are found.

References — 4.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

Талипова М.Ж. **Екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты шешімінің бар болуы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.82–86.

Фробениус-Латышева әдісімен екінші ретті дербес туындылы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты шешімі болуының қажетті шарттары тағайындалды. Қалыпты шешімнің белгісіз коэффициенттерін анықтайтын рекуррентті жүйелерге талаптар табылды, сонымен қатар бұл шарттар жеткілікті болады.

Библ. — 4.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Tleulesova A.B. **On a correct solvability of two-points boundary value problem with impulse influence.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.87–95.

Linear two-points boundary value problem with impulse influence for a system of ordinary differential equations is considered.

The necessary and sufficient conditions of correct solubility of the problem correct solvability are established.

References — 10.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Тілеулесова А.Б. **Екі нүктелі импульстік әсері бар шеттік есептің корректі шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.87–95.

Кәдімгі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі импульстік әсері бар шеттік есеп қарастырылады. Берілген есептің корректі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалған.

Библ. — 10.

УДК: 539.3:534.1 2000 MSC: 74H35

Ukrainets V.N. **Response of springy half space on running along axis periodic load.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.96–102.

It's solved f problem of influence of periodic load on the springy half-space that is running along a free surface of the axis of the half-space with constant velocity.

References — 5.

УДК: 539.3:534.1 2000 MSC: 74H35

Украинец В.Н. **Серпімді жартылай жазықтықтың ось бойынша периодикалық жүктенуге реакциясы.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.96–102.

Серпімді жартылай жазыктыктың еркін бетінің осі бойынша тұрақты Релейге дейінгі жылдамдықпен қозғалатын периодикалық жүктенудің әсері туралы есеп шешілген. Шешу барысында Ламе потенциалдары үшін толқындық теңдеулер Гельмгольц теңдеулеріне келтірілген. Олардың шешімдері Фурье-Бессель (жүктенудң берілген потенцаалдары) және Фурье интегралдары түрінде берілген. Жалпы түрде жартылай жазықтықтың кернеулі-деформацияланған күйінің компоненттерін анықтайтын интегралды теңдеулер алынған. Алынған теңдеулерді пайдаланып потенциалдар түрінде берілген қозғалмалы жүктенудің жартылай жазықтық бетіне динамикалық әсері зерттелген.

Библ. — 5.

УДК: 517.925.32 2000 MSC: 42A16

Uteulieva K.N., Cammatov K.K., Ramazanova H. **On stability of stationary oscillations of systems with many degrees of freedom and slowly changing coefficients.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 3 (17). P.103–106.

Sufficient conditions of stability and instability of stationary oscillations of special nonlinear system with many degrees of freedom and slowly changing coefficients are obtained.
References — 3.

УДК: 517.925.32 2000 MSC: 42A16

Өтеулиева К.Н., Камматов К.К., Рамазанова Х. **Баяу өзгеретін коэффициентті көп дәрежелі еркіндігі бар жүйелердің стационар тербелісінің орнықтылығы туралы.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 3 (17). Б.103–106.

Баяу өзгеретін коэффициентті арнайы түрлі бейсызық жүйенің стационар тербелісінің орнықсыздығының жеткілікті шарттары алынды.
Библ. — 3.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.