ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2007   том 7   № 2 (24)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 2 (24) 2007

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 7, № 2 (24), 2007

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 5 — 15*

УДК 517.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ

Ш. А. Балгимбаева

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина 125 sholpan@math.kz

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления эллиптического дифференциального оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах Никольского - Бесова по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

1. Введение. Постановка задачи.

Введем некоторые обозначения. Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^n x_i y_i$ — скалярное произведение. Для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ через $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$ обозначим его длину.

Обозначим

$$\mathcal{L} := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha + \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha D^\alpha$$

оператор эллиптического типа с постоянными коэффициентами, где

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Приведем определение эллиптического оператора (см.[1, 2]).

Главную часть эллиптического оператора $\mathcal{L}$ обозначим

$$P_m(D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha.$$

Определение. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ называется эллиптическим, если его главная часть $P_m(D)$ удовлетворяет условию $P_m(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.*

Keywords: *wavelet, elliptic differential operator, spectral information*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45,26B40

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстроубывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на $\mathbb{R}^n$ соответственно, $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$. В частности, если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx.$$

Обратное преобразование Фурье обозначим через $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим сужение $\mathcal{F}(f)$ на $[-\sigma,\sigma]^n$ как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}((-\sigma,\sigma)^n)$. Обозначим данное сужение через $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда как обычно имеем

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Напомним определение пространства Никольского - Бесова $B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$ (см., напр., [3, 4]).

Определение. *Функция f принадлежит пространству $B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le \theta < \infty$, $s > 0$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и для нее конечна полунорма* ($\bar{s} = [s]$)

$$\|f\|_{b^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\int\limits_0^\infty t^{-1-\theta s} \|\triangle_j^{\bar{s}+1}(t) f\|_p^\theta dt \right)^{1/\theta}.$$

При этом полагаем

$$\|f|\, B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \|f\|_p + \|f\|_{b^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь $\triangle_j^m$ — оператор m-й разности по j-й переменной.

Рассмотрим задачу восстановления оператора эллиптического типа $\mathcal{L}$ в пространстве $B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Будем использовать в качестве информации о функциях $f \in B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$ сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$. Таким образом, будем предполагать известными значения функционала $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ на любых функциях из $\mathcal{D}((-\sigma,\sigma)^n)$.

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора $\mathcal{L}$, использующего информацию $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$ о функции $f \in B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$, будем рассматривать действие эллиптического оператора на специальную "частную сумму" разложения в ряд по всплескам Мейера, которое обозначим $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ (см. подробнее п.3).

2. Предварительные сведения. Здесь сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе.

1. Как известно ([3], стр. 295), функция

$$D_N(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{sinNt_j}{t_j}$$

называется ядром Дирихле порядка N в n-мерном непериодическом случае.

Ее преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}(D_N(t)) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^n (\chi)_{\triangle_N}, \quad \triangle_N = \{|x_j| < N,\, j = \overline{1,n}\}.$$

Отметим, что $D_N(z)$ обладает следующими свойствами, которые будут использованы ниже.
1) $D_N(z)$ — целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной z_j $(j = \overline{1,n})$, принадлежит L_p, $1 < p \leq \infty$.
2) Свертка

$$S_N(f,x) = D_N * f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_N(x-t) f(t) dt$$

для $f \in L_p$ есть целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной и принадлежит L_p. При этом

$$\|D_N * f\|_p \leq \varkappa \|f\|_p,$$

где $\varkappa$ зависит только от n и от p, $1 < p < \infty$.
3) $S_N(f) \to f$ слабо при $N \to \infty$.

Тогда регулярную в смысле L_p функцию f можно разложить в (слабо сходящийся) ряд

$$f = S_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[S_{2^k}(f) - S_{2^{k-1}}(f) \Big].$$

Верна теорема (см. [3]).

Теорема А. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, s — произвольное действительное число. Тогда $f \in B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда f регулярна в смысле L_p и ее (сходящийся к ней слабо) ряд*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k,$$

$\beta_0 = S_{2^0}(f)$, $\beta_k = S_{2^k}(f) - S_{2^{k-1}}(f)$, $k = 1, 2, ...$, *таков, что*

$$\|f|\, B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)\| \asymp \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\theta} \|\beta_j\|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty$$

(с естественной метрикой при $\theta = \infty$).

2. Преобразование Фурье масштабной функции Мейера φ определяется как

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \begin{cases} cos(\lambda(\xi)), & |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & |\xi| > \frac{4\pi}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} cos(t\xi) cos(\lambda(\xi)) d\xi.$$

Тогда

$$\mathcal{F}(\psi)(\xi) = e^{-i\xi/2} sin(\lambda(\xi))$$

или

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} cos((t - \frac{1}{2})\xi) sin(\lambda(\xi)) d\xi.$$

С помощью операций сдвига и растяжения определяем функции

$$\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \;\; j,k \in \mathbb{Z}.$$

Из определения видно, что
$$supp\,\mathcal{F}(\psi)(\xi)\subset\Big[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\Big],$$
поэтому
$$supp\,\mathcal{F}(\psi_{jk})(\xi)\subset\Big[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\Big].$$
Ясно также, что всплески Мейера — это целые функции экспоненциального типа, принадлежащие $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Теперь введем n-мерную систему всплесков Мейера $\Psi:=\{\varphi_{0k},\psi^e_{jk}\}_{e\neq\varnothing,\,j\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{Z}^n}$ следующим образом:
$$\Big\{\varphi_{0k}(x):=\prod_{\nu=1}^{n}\varphi_{0k_\nu}(x_\nu),\quad \psi^e_{jk}(x):=\prod_{\nu\in e'}\varphi_{jk_\nu}(x_\nu)\prod_{\nu\in e}\psi_{jk_\nu}(x_\nu)\Big\}_{e\neq\varnothing,\,j\in\mathbb{N}_0,\,k\in\mathbb{Z}^n};$$
здесь e пробегает все непустые подмножества множества $\{1,2,...,n\}$, $e'=\{1,2,...,n\}\setminus e$. Известно, что система всплесков Ψ образует безусловный базис в пространстве $B^s_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}, 1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ (см., напр., [6]).

Верна теорема (см. [8]).

Теорема B. *Для любой $\bar h$ ограниченной целой функции экспоненциального типа 2^{j+1} справедливо соотношение $P_j(\bar h)=\bar h$.*

Здесь P_j — проекционный оператор на подпространство $span\Big\{\varphi_{0k}(x),\ \psi^e_{ik}(x)\Big\}_{e\neq\varnothing,\,i=\overline{0,j},\,k\in\mathbb{Z}^n}$.

В качестве метода приближенного восстановления оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим следующий оператор:
$$\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]=\mathcal{L}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k(f)\varphi_{0k}+\sum_{e\neq\varnothing}\sum_{j=0}^{j_\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}\right),$$
где
$$c_k(f)=(f,\varphi_{0k}),\quad c^e_{jk}(f)=(f,\psi^e_{jk})$$
— коэффициенты Фурье f по системе Ψ, а $j_\sigma=\big[\log_2\frac{3\sigma}{4\pi}\big]$.

По формуле Планшереля для любых $h\in\mathcal{S}',\phi\in\mathcal{S}$:
$$(h,\phi)=\frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}(h),\mathcal{F}(\phi)).$$

Из определения следует, что $\Psi\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ясно также, что
$$supp\,\mathcal{F}(\psi^e_{jk})(\xi)\subset\Big[-2^j\frac{4\pi}{3},2^j\frac{4\pi}{3}\Big]^n,$$
$$supp\,\mathcal{F}(\varphi_{0k})(\xi)\subset\Big[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\Big]^n.$$
Таким образом, метод $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ использует информацию только об $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}$.

3. Основной результат. Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ s > 0,\ r \ge p$, *причем* $0 < \frac{n}{p} - \frac{n}{r} < s - m$, $0 < t < s - m$, *где* $m = |\alpha|$, α— *мультииндекс.*

Тогда для метода восстановления $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]$ *справедливы оценки*

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]|\ B^t_{p\,\theta}\| \asymp 2^{-j_\sigma(s-m-t)},$$

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]\|_r \asymp 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

Доказательство. Введем сокращенное обозначение

$$\mathcal{L}S_\sigma(f) := \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}].$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{L}S_\sigma(f) = \mathcal{L}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\varphi_{0k} + \sum_{e\ne\varnothing}\sum_{j=0}^{j_\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c^e_{jk}(f)\psi^e_{jk}\right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(f)\mathcal{L}(\varphi_{0k}) + \sum_{e\ne\varnothing}\sum_{j=0}^{j_\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c^e_{jk}(f)\mathcal{L}(\psi^e_{jk}) = S_\sigma\mathcal{L}(f).$$

Получим оценку сверху разности $\|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X$ в норме банахова пространства X.

По неравенству треугольника, теореме B и согласно линейности оператора $\mathcal{L}$ и оператора $\mathcal{L}S_\sigma(h)$ имеем

$$\|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X \le \|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X =$$
$$= \|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f - f)\|_X =$$
$$= \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f - f)\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|S_\sigma\mathcal{L}(g_f - f)\|_X \le$$
$$\le \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X\|S_\sigma\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X(1 + \|S_\sigma\|_X),$$

где $g_f = \sum\limits_{j=0}^{j_\sigma} \beta_j$ — целая функция экспоненциального типа $2^{j_\sigma+1}$. Известно, что g_f дает порядок наилучшего приближения функции f в пространстве X.

Оценим теперь норму $\|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X$ отдельно в случае пространств $B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$ и $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $X = B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$, функция $f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Согласно теореме A имеет место разложение в (слабо сходящийся) ряд $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j(x)$, поэтому $f - g_f = \sum\limits_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \beta_j(x)$.

Далее, (т.к. функция $f - g_f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$) функция

$$\mathcal{L}(f - g_f) = \sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \mathcal{L}(\beta_j(x)) \in B^{s-m}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n),\ t < s - m.$$

Первое вложение справедливо по теореме из [3] (раздел 5.6), второе вложение — из [3] (п.6.2).

Оценим норму разности

$$\|\mathcal{L}(f - g_f)|B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \|\sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \beta_j|B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \left(\sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} 2^{j\theta t}\|\mathcal{L}(\beta_j)\|^\theta_p\right)^{1/\theta}. \qquad (1)$$

Используя неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа (см. [3], раздел 2.5)

$$\|Q_j^{(\rho)}\|_p \leq C2^{\rho j}\|Q_j\|_p,$$

можно оценить $\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p$ в равенстве (1):

$$\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p = \left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha \beta_j}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} + \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha \frac{\partial^\alpha \beta_j}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| \left\| \frac{\partial^\alpha \beta_j}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_p + \sum_{|\alpha|<m} |b_\alpha| \left\| \frac{\partial^\alpha \beta_j}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_p \leq C_1 2^{mj}\|\beta_j\|_p. \tag{2}$$

Тогда для $\|\mathcal{L}(f-g_f)|B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|$ имеем

$$\|\mathcal{L}(f-g_f)|B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| \leq \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{j\theta t} C_1^\theta 2^{mj\theta} \|\beta_j\|_p^\theta 2^{-js\theta} 2^{js\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= C_1 \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j\theta(s-m-t)} \|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta} \right)^{1/\theta} \leq 2^{-j_\sigma(s-m-t)} \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} \|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta} \right)^{1/\theta} \ll 2^{-j_\sigma(s-m-t)}\|f|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\leq 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]|\ B^t_{p\,\theta}\| \ll 2^{-j_\sigma(s-m-t)}.$$

Получим оценку сверху в пространстве $L_r(\mathbb{R}^n)$. Как и выше, $f - g_f = \sum\limits_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \beta_j(x)$ и справедливо вложение $\mathcal{L}(f-g_f) \in B^{s-m}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L_r(\mathbb{R}^n), p \leq r$.

Оценим норму разности $\|\mathcal{L}(f-g_f)\|_r$.

В силу неравенства Минковского имеем

$$\|\mathcal{L}(f-g_f)\|_r = \left\| \sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \mathcal{L}(\beta_j(x)) \right\|_r \leq \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} \|\mathcal{L}(\beta_j)\|_r. \tag{3}$$

Далее, по неравенству разных метрик для целых функций экспоненциального типа (см. [3], теорема 3.3.4, раздел 3.3)

$$\|g_\nu\|_{p'} \leq 2^n \left(\prod_1^n \nu_k \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_\nu\|_p,\ 1 \leq p \leq p' \leq \infty,$$

из (3), используя (2) и неравенство Гельдера, получим

$$\|\mathcal{L}(f-g_f)\|_r \leq \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^n 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{mj} 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|\beta_j\|_p 2^{js} 2^{-js} = \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j(s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-m)} \|\beta_j\|_p 2^{js} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} \|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta}\right)^{1/\theta} \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j(s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-m)\theta'}\right)^{1/\theta'} \ll 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}\|f|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\leq 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]\|_r \ll 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

Получим теперь оценки снизу в нормах обоих пространств.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_k(x) = \prod_{j=1}^{n} \overline{\Phi}_k(x_j), \tag{4}$$

где

$$\overline{\Phi}_k(x_j) = D_{2^{k+1}}(y_j) - D_{2^k}(y_j).$$

Здесь $D_n(x_j) = \frac{\sin x_j N}{x_j}$ — j-ый сомножитель n-мерного ядра Дирихле, $y_j = \frac{3}{4\pi}x_j$.

Известно, что

$$supp\mathcal{F}(\Phi_k)(x) = \{x|2^k < |x_j| < 2^{k+1},\ j=\overline{1,n}\}$$

и

$$\|\Phi_k\|_p = (2^{k(1-\frac{1}{p})}C_p)^n.$$

Легко показать, что

$$\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}\right\|_p = C_3C_p^n 2^{l(1-\frac{1}{p})n}2^{lm}.$$

Далее, положим

$$Q_k(x) = C_p^{-n}2^{-k(s+(1-\frac{1}{p})n)}\Phi_k(x),$$

тогда

$$\|Q_k(x)\|_p = 2^{-ks}.$$

Теперь введем функцию

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j\geq j_\sigma} Q_j(x)j^{-\beta}. \tag{5}$$

Справедлива

Лемма. *Пусть* $s>0, 1<p\leq\infty$, $1<\theta\leq\infty$, $\theta^{-1}<\beta<1$. *Тогда*

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j\geq j_\sigma} Q_j(x)j^{-\beta}$$

принадлежит пространству $B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Ясно, что функция $j^{-\beta}Q_j(x)$ является целой функцией экспоненциального типа 2^j. Далее,

$$\sum_{j\geq j_\sigma} 2^{js\theta}\|Q_j(x)j^{-\beta}\|_p^\theta =$$

$$= \sum_{j\geq j_\sigma} 2^{js\theta}j^{-\beta\theta}2^{-js\theta} = \sum_{j\geq j_\sigma} j^{-\beta\theta} \ll 1.$$

Следовательно, по обратной теореме представления (см. [3], [9]) функция $\tilde{f} \in B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$ и ее норма

$$\|\widetilde{f}|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| \ll \left(\sum_{j\ge j_\sigma} 2^{js\theta}\|Q_j(x)j^{-\beta}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll 1.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим "частную" сумму разложения в ряд по всплескам Мейера функции $\widetilde{f}(x)$:

$$S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{[-\sigma,\sigma]^n}] = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(\tilde{f})\varphi_{0k} + \sum_{e\ne\varnothing}\sum_{j=0}^{j_\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c^e_{jk}(\tilde{f})\psi^e_{jk}\right).$$

Легко показать, что $S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \equiv 0$. Тогда и $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{[-\sigma,\sigma]^n}] \equiv 0$.

Перейдем к получению оценок снизу. Сначала получим оценку в норме пространства $B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup_{\|f|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma(f)|\ B^t_{p\,\theta}\| \ge \|\mathcal{L}\widetilde{f} - \mathcal{L}S_\sigma(\widetilde{f})|\ B^t_{p\,\theta}\| = \|\mathcal{L}\widetilde{f}|\ B^t_{p\,\theta}\|. \tag{6}$$

Согласно лемме $\widetilde{f} \in B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{L}\widetilde{f} \in B^{s-m}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset B^t_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$, $t < s-m$. Далее,

$$\mathcal{L}\widetilde{f}(x) = \sum_{l\ge j_\sigma} \mathcal{L}Q_l(x)l^{-\beta}.$$

Продолжим неравенство (6)

$$\|\mathcal{L}\widetilde{f}|\ B^t_{p\,\theta}\| = \|\sum_{l\ge j_\sigma} \mathcal{L}Q_l(x)l^{-\beta}|\ B^t_{p\,\theta}\| =$$

$$= \|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\mathcal{L}\Phi_l(x)|\ B^t_{p\,\theta}\| \ge$$

$$\ge \|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}|\ B^t_{p\,\theta}\| -$$

$$-\|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\sum_{|\alpha|<m} b_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}|\ B^t_{p\,\theta}\|. \tag{7}$$

Используя неравенство Бернштейна, неравенство Минковского и норму функции $\Phi_l(x)$, оценим сверху вторую норму в (7):

$$\|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\sum_{|\alpha|<m} b_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}|\ B^t_{p\,\theta}\| =$$

$$= \left(\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{-l\theta(s+(1-\frac{1}{p})n)}2^{l\theta t}C_p^{-n}\left\|\sum_{|\alpha|<m} b_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}\right\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{-l\theta(1-\frac{1}{p})n}2^{l\theta(s-t)}C_p^{-n}\Big(\sum_{|\alpha|<m}|b_\alpha|2^{|\alpha|l}\|\Phi_l\|_p\Big)^\theta\right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{-l\theta(1-\frac{1}{p})n}2^{l\theta(s-t)}2^{l\theta(1-\frac{1}{p})n}\Big(\sum_{|\alpha|<m}|b_\alpha|2^{|\alpha|l}\Big)^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\leq \Big(\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{l\theta(s-t)}2^{(m-1)l\theta}\big(\sum_{|\alpha|<m}|b_\alpha|\big)^\theta\Big)^{1/\theta} =$$

$$= \Big(\sum_{|\alpha|<m}|b_\alpha|\Big)\Big(\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{-l\theta(s+1-t-m)}\Big)^{1/\theta} \leq C_2 2^{-j_\sigma(s+1-t-m)},$$

где $C_2 = \Big(\sum\limits_{|\alpha|<m}|b_\alpha|\Big)\Big(\sum\limits_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta\theta}\Big)^{1/\theta}$.

Оценим снизу первое слагаемое в (7)

$$\Big\|\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}\Big|\ B^t_{p\,\theta}\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}P_m(D)\Phi_l(x)\Big|\ B^t_{p\,\theta}\Big\| =$$

$$= \Big(\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta\theta}2^{-l\theta(s+(1-\frac{1}{p})n)}2^{l\theta t}C_p^{-n}\Big\|P_m(D)\Phi_l\Big\|_p^\theta\Big)^{1/\theta}. \tag{8}$$

Используя эллиптичность оператора и тот факт, что

$$P_m(D)\Phi_l(x) = \mathcal{F}^{-1}(P_m(\xi)\mathcal{F}(\Phi_l(\xi))),$$

получим

$$\Big\|\sum_{l\geq j_\sigma} l^{-\beta}2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)}C_p^{-n}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}|\ B^t_{p\,\theta}\Big\| \gg 2^{-j_\sigma(s-t-m)}.$$

Действительно, если $p\in(1,2]$, то, используя неравенство Хаусдорфа-Юнга

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_p,\ \ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,$$

и информацию о носителе $\mathcal{F}(\Phi_l)(\xi)$, легко показать справедливость оценки

$$\Big\|P_m(D)\Phi_l\Big\|_p \gg 2^{lm}2^{nl(1-\frac{1}{p})},$$

откуда следует необходимая оценка снизу.

Для $p\in(2,\infty)$ построения также используют эллиптичность рассматриваемого оператора.

Окончательно имеем

$$\sup_{\|f|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\leq 1}\|\mathcal{L}f-\mathcal{L}S_\sigma(f)|\ B^t_{p\theta}\| \geq \|\mathcal{L}\tilde{f}|\ B^t_{p\,\theta}\| \gg 2^{-j_\sigma(s-t-m)}.$$

Докажем теперь оценку снизу в норме пространства $L_r(\mathbb{R}^n)$.

В качестве пробной функции возьмем $\widetilde{f}(x) = Q_{j_\sigma}$.

Ясно, что

$$\sup_{\|f|B^s_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\leq 1}\|\mathcal{L}f-\mathcal{L}S_\sigma(f)\|_r \geq \|\mathcal{L}\widetilde{f}-\mathcal{L}S_\sigma(\widetilde{f})\|_r = \|\mathcal{L}\widetilde{f}\|_r.$$

Как и выше, $\mathcal{L}\widetilde{f}\in B^{s-|\alpha|}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)\subset L_r(\mathbb{R}^n),\ p\leq r$.

Далее,

$$\|\mathcal{L}\widetilde{f}\|_r \gg \|\mathcal{L}Q_{j_\sigma}\|_r \gg$$

$$\gg \left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_r - \left\| \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_r. \tag{9}$$

Оценим второе слагаемое (9) сверху, при этом будем использовать неравенство разных метрик, неравенство Бернштейна и неравенство Гельдера

$$\left\| \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_r \le \sum_{|\alpha|<m} |b_\alpha| \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_r \le$$

$$\le \sum_{|\alpha|<m} |b_\alpha| 2^n 2^{j_\sigma(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_p \le 2^n \sum_{|\alpha|<m} |b_\alpha| 2^{j_\sigma(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n} 2^{j_\sigma(m-1)} \|Q_{j_\sigma}\|_p \le$$

$$\le [2^n \sum_{|\alpha|<m} |b_\alpha|] 2^{j_\sigma(m-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n)} \|Q_{j_\sigma}\|_p = C_5 2^{-j_\sigma(s+1-m-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n)}. \tag{10}$$

Первое слагаемое в (9) имеет оценку снизу

$$\left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}Q_{j_\sigma}}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_r \gg 2^{-j_\sigma(s-m-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n)}. \tag{11}$$

Подставив (10), (11) в (9), получим

$$\|\mathcal{L}\widetilde{f}\|_r \gg C_8 2^{-j_\sigma(s-m-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})n)}.$$

Таким образом получили окончательно оценку снизу

$$\sup_{\|f|\ B^s_{p\,\theta}\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]\|_r \gg 2^{-j_\sigma(s-m-\frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

З а м е ч а н и е. *Хорошо известно, что дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами можно интерпретировать как свертку с соответствующей комбинацией производных δ – функции. Таким образом, задачу восстановления такого оператора можно рассматривать как задачу восстановления оператора свертки с сингулярной обобщенной функцией. В работе [10] рассматривалась задача восстановления оператора свертки с гладкой функцией из подходящего пространства Никольского - Бесова.*

Цитированная литература

1. **Трев Ф.** Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т.1 Псевдодифференциальные операторы М., 1984.

2. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.

3. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1979.

4. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств. М., 1986.

5. **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** // Функ. анализ и его приложения. 2003. Т.37, вып.3. С. 51 – 64.

6. **Meyer Y.** Wavelets and operators. Cambridge Univ. Press. 1992.

7. **Стечкин С. Б., Новиков И. Я.** // Успехи мат. наук. 1998. Т.53, вып.6(324). С. 54 – 128.

8. **Новиков И. Я.** // Мат. заметки. 1992. Т.52, вып.5. С. 88 – 92.

9. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.

10. **Балгимбаева Ш. А.** // Мат. журнал. 2006. Т.6, № 4(22). С. 26 – 32.

Поступила в редакцию 05.04.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 16 – 25*

УДК 517.938, 523.98

МЕТОДЫ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И НЕЙРОИНФОРМАТИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИКИ СОЛНЦА

Е. Б. Есимхан

Институт Математики МОиН РК
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 chaos@math.kz

Временной ряд чисел Вольфа, описывающий число пятен на Солнце, тестируется на обратимость на масштабах, не превышающих среднюю длину цикла. Методом символической динамики обратимость проверяется для ряда среднемесячных и среднегодовых чисел Вольфа. С помощью искусственных нейронных сетей строится прогноз и палегноз солнечных циклов для прямого и инвертированного рядов среднемесячных чисел Вольфа.

Современные успехи в развитии численных методов топологической динамики привели к появлению новых подходов к моделированию и предсказанию временных рядов [1]. Нелинейные схемы локальных и глобальных предикторов, основанные на методе аналогов [2], часто дают удовлетворительные результаты в тех случаях, когда доля детерминированной компоненты в данных не слишком мала. Существует, однако, ряд интересных проблем, связанных с "палегнозом т.е. предсказанием ряда в прошлое. Например, при исследованиях палеоклимата важно иметь реконструкцию "прямых"солнечных индексов таких, как интенсивность солнечной радиации за пределами короткого периода спутниковых наблюдений [12]. Для этого обычно используют линейные корреляционные связи прямого индекса с косвенным, например, числами Вольфа на общем временном интервале. Среднемесячные значения этого наиболее длинного инструментального ряда измеряются с 1849г.; кроме того, существуют их реконструкции с 1749г. Для среднегодовых значений наименее спорными являются реконструкции с 1700г. Числа Вольфа $W(t)$ являются косвенными индексами магнитной активности Солнца, поскольку представляют собой лишь комбинацию видимых групп пятен и их полного числа во всех группах без учета напряженности поля и площадей. График $W(t)$ демонстрирует рекуррентное поведение (циклы Швабе) с продолжительностью от 8 до 15 лет (рис. 1).

Экстраполяция спутниковых измерений в прошлое, основанная на линейных корреляциях $W(t)$ с интегральным потоком излучения от ультафиолетовой до инфракрасной частей спектра, называемым солнечной постоянной, зависит от выбранной модели [12] и надежности регрессии. Последняя, в свою очередь, зависит от выбранного масштаба времени. В этой ситуации разумно использовать нелинейные методы для прогноза инвертированных данных. Обратный

Keywords: *Wolf number, symbolic time-series analysis, neural network*
2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

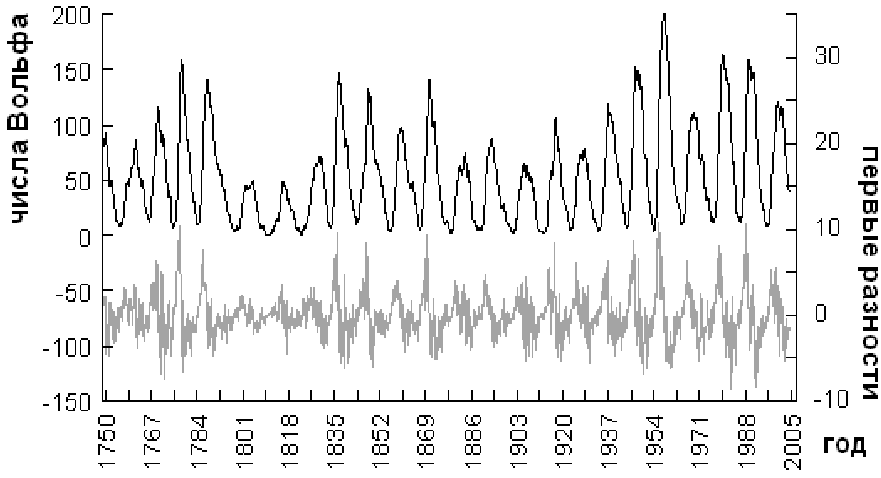

Рис. 1: Среднемесячные сглаженные числа Вольфа (черные) и их первые разности (серые)

во времени прогноз может быть полезен также при решении проблемы "потерянного"в конце 18 века солнечного цикла [4].

Инвертирование временного ряда не обязательно сохраняет его оригинальные свойства: в общем случае не существует явной связи между *обратимостью* временного ряда [5] и *степенью его предсказуемости*. Статистически обратимыми являются гауссовские процессы и их линейные трансформации, однако, они не прогнозируются, независимо от направления времени. Обратимые ряды консервативных систем должны одинаково хорошо прогнозироваться в прямом и обратном направлениях. Динамическая диссипативная система, находящаяся в бассейне аттрактора, должна прогнозироваться в обратном направлении с большой ошибкой из-за существования нескольких прообразов [6].

Существует несколько конкурирующих моделей [7, 8, 9, 10] для объяснения солнечных циклов. Так, модели солнечного динамо [10] и низкоразмерный диссипативный хаос [8] должны порождать существенно необратимые временные ряды, имеющие "стрелу времени". В случае нелинейного стохастического осциллятора ряд чисел Вольфа должен быть обратимым и иметь значимые корреляции между мгновенными амплитудами и частотами [9]. В феноменологии циклов известно несколько видов памяти, для каждой из которых существует собственный масштаб стрелы времени. Так, видимая асимметрия формы цикла согласуется с необратимостью на масштабах 11 лет. Правило Гневышева-Оля (нечетный цикл выше четного) [11], магнитный цикл Хейла и связь длины предыдущего цикла с амплитудой последующего [12] интерпретируются как 22-летняя стрела времени. Возможно, существует причинная связь трех циклов [13], а сравнимые с длиной ряда корреляции идентифицируются с вековым циклом [11].

В данной работе проблема обратимости временного ряда чисел Вольфа исследуется методами символической динамики и нейрокомпьютинга. Учитывая ограниченность данных, обратимость проверяется только на коротких масштабах времени.

Символическая динамика.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ — стационарный временной ряд и $\mathbf{y}_n = (x_n, x_{n+\tau}, \ldots, x_{n+\tau(m-1)})$ — векторы запаздывающих координат [14, 15] с лагом τ, полученные вложением ряда в пространство R^m. Временной ряд называют обратимым [5], если распределение вероятностей $p(\mathbf{y}_n)$ инвариантно относительно оператора инверсии времени T для всех m и τ, т.е. $p(\mathbf{y}_n) = p(T\mathbf{y}_n)$, где

$$T\mathbf{y}_n : (x_n, x_{n+\tau}, \ldots, x_{n+\tau(m-1)}) \to (x_{n+\tau(m-1)}, \ldots, x_{n+\tau}, x_n).$$

Практическое применение этого определения требует вычисления статистик высокого порядка [5], поэтому для построения теста на обратимость обычно используют методы символической динамики [16], восходящие к пионерским работам Адамара и Пуанкаре по исследованию поведения сложных многомерных динамических систем. Пуанкаре предложил ввести в фазовом пространстве R^n системы плоскость, трансверсальную рекуррентному фазовому потоку, которую называют сечением Пуанкаре. Трансверсальной называют плоскость, находящуюся "в общем положении"относительно пучка траекторий, которые должны пересекать ее "почти перпендикулярно". При этом группа диффеоморфизмов, описывающих эволюцию рекуррентных траекторий в R^n, редуцируется в каскад на R^2, т.е. группу дискретных преобразований плоскости, задающих эволюцию последовательности упорядоченных во времени точек возврата фазовой траектории. Если разбить сечение Пуанкаре на помеченные символами клетки, то рекуррентная траектория "напечатает"некоторый текст. Для периодической орбиты и бинарного алфавита получится "текст"вида $1111\ldots$ Траектории с двумя периодами будет соответствовать текст $1010\ldots$, для хаотического движения будем иметь случайную последовательность нулей и единиц.

В символическом анализе временных рядов [17, 18] ряд кодируется последовательностью символов, так что полученный текст сохраняет "крупнозернистую"информацию о рекуррентных свойствах динамики в статистике слов одинаковой длины. Разделим область значений временного ряда на n интервалов. Припишем каждому из них символ (букву), задав алфавит из n букв. Каждому отсчету ряда в зависимости от того, в какой интервал он попадает, будет соответствать определенный символ. Исходный ряд преобразуется, таким образом, в некоторый текст. Для тестирования обратимости ряда "прочитаем"его с помощью шаблона фиксированной длины L, который будем последовательно сдвигать вдоль текста на один символ вправо [18]. Подсчитаем частоту встречаемости полученных слов и сравним ее с аналогичной гистограммой, соответствующей инвертированному тексту. Если исходный временной ряд является обратимым, гистограммы совпадут. Описанная процедура схематично представлена на рис. 2 [17]. Здесь используется бинарный алфавит $\{0, 1\}$ и длина шаблона $L = 3$.

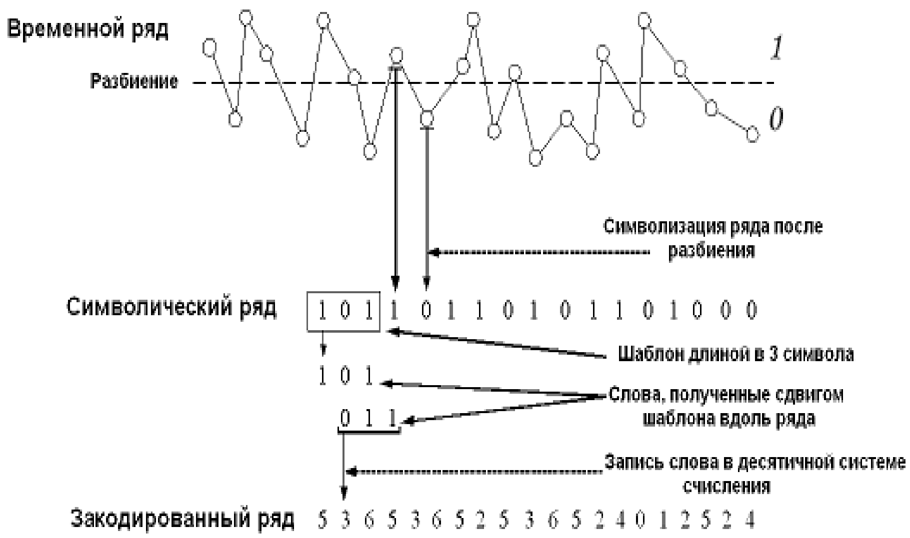

Рис. 2: Символизация временного ряда

В общем случае выбор емкости алфавита n и длины шаблона L осуществляются опытным путем. Большие значения n и L улучшают разрешение, однако при этом увеличивается число возможных слов ($\sim n^L$) и доля симметричных слов (палиндромов, например, 110011) ($\sim n^{(L-1)/2-L}$), которые не дают вклада при оценке обратимости [17]. Малые же значения n и L уменьшают статистические флуктуации в словах, но при этом снижается лингвистическое разрешение ряда.

Для численных экспериментов в работе использовались временные ряды первых разностей среднемесячных сглаженных скользящим средним по 13 точкам (1749-2002 гг.) и среднегодовых (1700-2002 гг.) значений чисел Вольфа [23]. Для ряда среднемесячных чисел Вольфа алфавит состоял из 8 символов $\{0, 1, \dots, 7\}$, длина шаблона $L = 3$. Такие параметры символизации приводят к словарю оптимального объема. Полученные в восьмеричном коде слова для удобства представления переводились в десятичную систему счисления. Частотная гистограмма всех "прочитанных"слов для прямого (forward) и инвертированного (backward) текстов приведена на рис. 3.

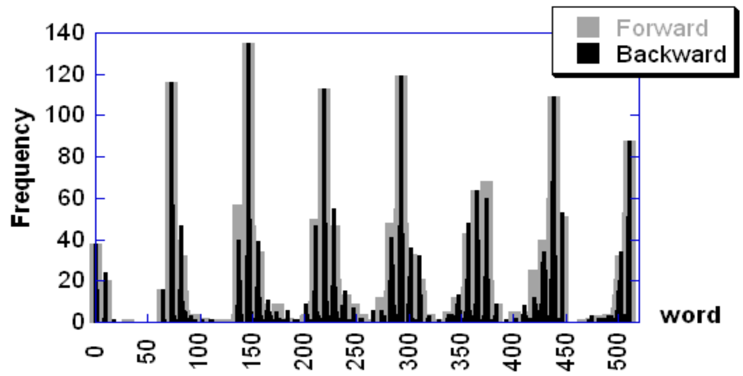

Рис. 3: Частотная гистограмма встречаемости 3-х буквенных слов во временном ряде первых разностей среднемесячных значений чисел Вольфа. По оси абсцисс отложены перекодированные в десятичную систему счисления слова.

Количественной мерой обратимости служили статистики [18]:

$$\begin{aligned} &T = N^{-1} \textstyle\sum_{\{W\}} (p_{f,W} - p_{b,W})^2, \\ &\chi^2 = \textstyle\sum_{\{W\}} (p_{f,W} - p_{b,W})^2 / \sum_{\{W\}} (p_{f,W} + p_{b,W}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $p_{f,W}, p_{b,W}$ — относительные частоты встречаемости слова W при прочтении текста в прямом и обратном направлениях соответственно; N — количество слов в словаре. Значение $T = 0$ соответствует полной обратимости текста.

К сожалению, прямая оценка доверительных интервалов для статистик (1) невозможна из-за корреляций между частотами встречаемости отдельных слов для короткого временного ряда. Иными словами, ряд первых разностей плохо темперирован, т.е. в нем существуют корреляции меньше, чем длина ряда. Можно получить альтернативные статистики на основе суррогатных данных [19] с помощью случайной перестановки оригинальных отсчетов ряда, однако и этот метод требует большого объема выборки. Поэтому при оценке степени необратимости ряда мы ограничились здесь только относительным сравнением статистик для различных временных рядов. Для рис. 3 мы получили $T = 8,31 \cdot 10^{-5}, \chi^2 = 1,95 \cdot 10^{-4}$. Поскольку гистограммы прямого и обратимого рядов практически совпадают и визуально, и по статистикам, можно полагать, что на масштабах шаблона (3 месяца) ряд обратим.

Для проверки обратимости ряда чисел Вольфа на масштабах, сравнимых с длиной цикла, использовались первые разности их среднегодовых значений. Емкость алфавита n выбиралась равной 7 и 8. Максимальная длина слова $L = 9$; это ограничение связано с особенностями нашей программной реализации алгоритма символизации. В силу большой длины слова и короткого временного ряда словарь после "чтения"символьного текста оказался очень большим ($\sim 8^9$) и состоял, в основном, из оригинальных слов, встречающихся один раз в прямом, либо обратном направлениях. Для того, чтобы редуцировать количество слов, использовалась метрика

$$\rho(x_1x_2\dots x_L, y_1y_2\dots y_L) = \sum_{i=1}^{L} |x_i - y_i|, \tag{2}$$

аналогичная расстоянию Хемминга для бинарных слов. Расстояние Хемминга равно числу замен 0 и 1 для преобразования одного слова в другое. Например, для слов 100101 и 101011 это расстояние равно 3. В отличие от нее, метрика (2) учитывает не только число позиций, различных для двух сравниваемых слов, но также: находятся ли символы в этих позициях в смежных интервалах разбиения или в далеких, т.е. оценивает степень близости слов. Так, например, для слов $w_1 = 5112$, $w_2 = 5113$ и $w_3 = 5117$ $\rho(w_1, w_2) = 1$, $\rho(w_1, w_3) = 5$ и $\rho(w_2, w_3) = 4$. Слова, расстояние между которыми не превышало некоторого выбранного значения ρ_c, считались эквивалентными, что и приводило к редукции словаря.

Затем для каждого слова W подсчитывалась разность частот встречаемости $(P_{f,W} - P_{b,W})$ при прочтении текста в прямом и обратном направлениях. Эта величина приведена на рис. 4: верхний график соответствует первоначально полученному словарю, нижний — словарю после использования метрики. Соответствующие статистики (1) равны: $T = 6,13\cdot10^{-4}$, $\chi^2 = 5,3\cdot10^{-3}$.

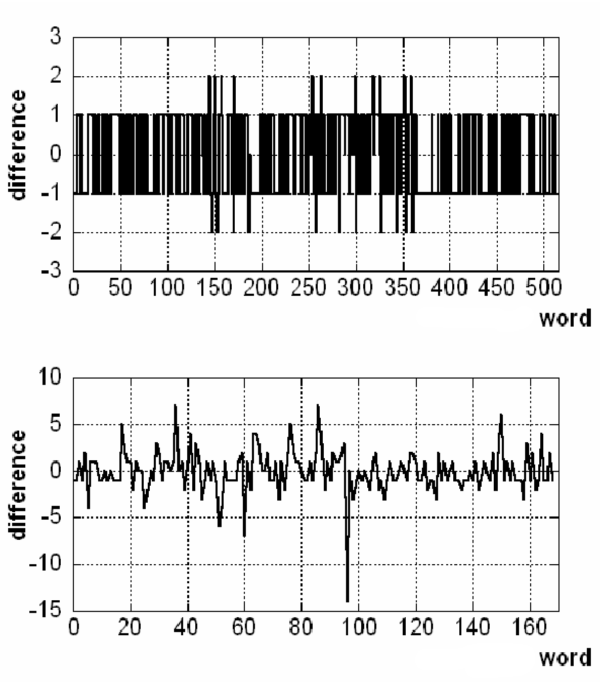

Рис. 4: Разность гистограмм встречаемости слов для временного ряда первых разностей среднегодовых значений чисел Вольфа. Число интервалов разбиения $n = 7$, длина шаблона $l = 9$, $\rho_c = 6$

Альтернативой служили результаты, полученные для трех модельных рядов. В первом случае отсчеты оригинального временного ряда были перемешаны случайным образом. Эта процедура разрушила существующие корреляционные связи, и ряд, следовательно, можно было считать обратимым. На рис. 5 представлены полученные результаты. Первая статистика $T = 2,03\cdot10^{-4}$ уменьшилась в 3 раза, вторая $\chi^2 = 3,64\cdot10^{-3}$ — почти в полтора раза. Визуально гистограммы на рис. 4 и рис. 5 также отличаются: после введения метрики у перемешанного ряда осталось гораздо больше оригинальных слов, чем у исходного ряда; при этом частоты их встречаемости стали меньше отличаться друг от друга.

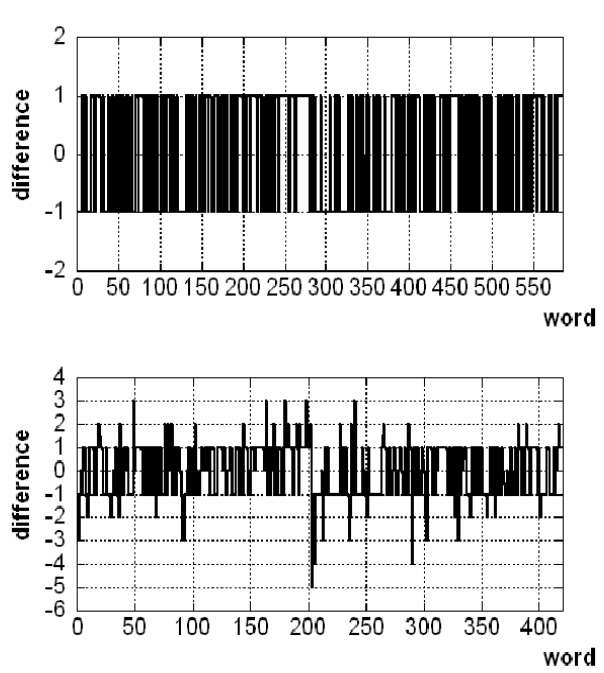

Рис. 5: Разность гистограмм встречаемости слов для первых разностей перемешанного ряда среднегодовых значений чисел Вольфа. Число интервалов разбиения $n = 7$, длина шаблона $l = 9$, $\rho_c = 6$.

В качестве второй модели был выбран временной ряд равномерно распределенных случайных чисел, длина которого совпадала с длиной ряда среднегодовых чисел Вольфа. Разность гистограмм для него приведена на рис. 6.

Полученные значения статистик $T = 1,62 \cdot 10^{-4}, \chi^2 = 3,07 \cdot 10^{-3}$, оказались сравнимыми с их значениями для перемешанного ряда чисел Вольфа; соответствующие гистограммы также похожи. Все эти результаты позволяют полагать, что ряд среднегодовых чисел Вольфа, по-видимому, необратим на масштабах 9 лет.

Наконец, в качестве модели необратимого ряда была использована временная последовательность x-координаты отображения Хенона:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n,$$

$$y_{n+1} = bx_n,$$

где $a = 1,4, b = 0,3$, длина ряда 2000. Для статистик (1) были получены значения $T = 1,38 \cdot 10^{-3}, \chi^2 = 2,08 \cdot 10^{-2}$.

Статистики всех численных экспериментов для разности гистограмм прямого и обратного текстов приведены в Таблице1.

Прогноз и палегноз солнечных циклов.

Второй подход для тестирования обратимости ряда чисел Вольфа был основан на сравнении качества прогнозов и палегнозов, полученных с помощью искусственных нейронных сетей (ИНС) [20]. Для построения глобального нелинейного предиктора использовалось топологическое вложение [15] прямого и инвертированного рядов среднемесячных сглаженных значений чисел Вольфа в пространство R^8 с лагом $\tau = 132$, который гарантировал получение векторного прогноза на всю длину цикла за один шаг[21]. Глобальный нелинейный предиктор [1]

$$x_{t+\tau} = F(\mathbf{x}_t) = F(x_t, x_{t-\tau}, \ldots, x_{t-\tau(m-1)})$$

Таблица 1: Статистики T и χ^2

	$T(\cdot 10^{-4})$	$\chi^2(\cdot 10^{-3})$
среднемесячные W	0,83	0,19
среднегодовые W	6,13	5,30
перемешанные среднегодовые W	2,03	3,64
случайный ряд	1,62	3,07
отображение Хенона	13,8	20,80

аппроксимировался ИНС с обратным распространением ошибок [1, 20]. Для тестирования качества палегноза были выбраны "центральные"циклы ряда №10-13, позволяющие получить состоятельную обучающую выборку для прогноза и палегноза. Каждый из 4-х циклов предсказывался отдельно в прямом и обратном направлениях. Параметры вложения, архитектура используемой ИНС, а также метод ее обучения были фиксированными. Средняя квадратичная ошибка прогноза и коэффициент корреляции между прогнозными и реальными данными приведены в Таблице 2.

Таблица 2: Средняя квадратичная ошибка прогноза и коэффициент корреляции

цикл	прямой ряд		инвертированный ряд	
	ошибка	корреляция	ошибка	корреляция
№10	35,28	0,62	23,42	0,72
№11	14,93	0,96	13,38	0,96
№12	16,22	0,91	22,64	0,80
№13	12,42	0,92	13,86	0,89

Эксперимент показал, что палегноз циклов вполне возможен. Наилучший результат был

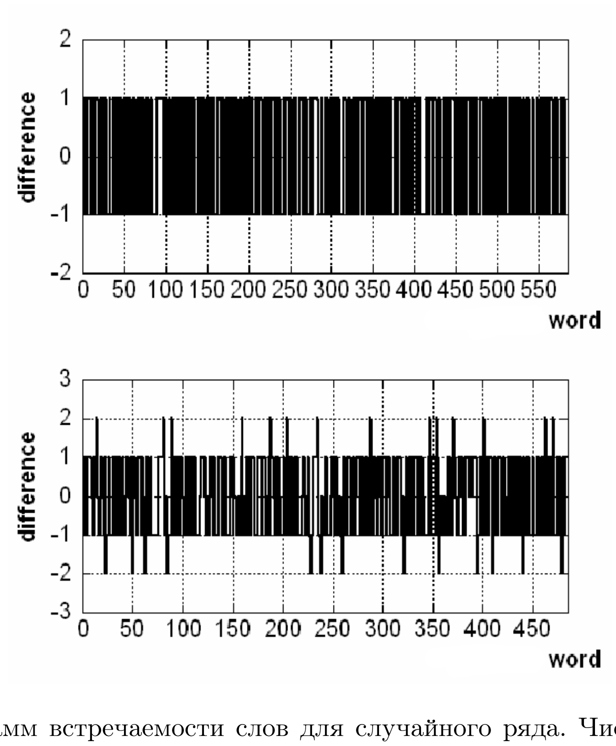

Рис. 6: Разность гистограмм встречаемости слов для случайного ряда. Число интервалов разбиения $n = 7$, длина шаблона $l = 9$, $\rho_c = 6$.

получен для цикла №11 (рис. 7), результаты для циклов №12,13 сравнимы. Разброс ошибок частично вызван неоднородностью обучающих выборок, построенных для исходного и инвертированного рядов. Так, например, выборка для палегноза включала самый высокий цикл №19. Прогноз и палегноз цикла №10 нам получить не удалось. Достаточно высокие значения корреляций в этом случае объясняются тем, что линейные оценки плохо отслеживают геометрию двух графиков.

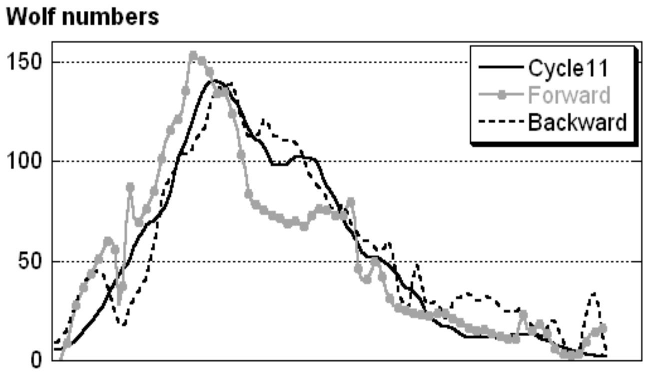

Рис. 7: Прогноз и палегноз 11 цикла. Сплошная линия — реальные данные, серая линия — прогноз, пунктир — палегноз.

В следующем эксперименте пары циклов, сформированные по правилу Гневышева-Оля, были переставлены в произвольном порядке. Таким образом, мы разрушили вековой цикл, сохранив корреляции только на парах. Для перемешанного ряда и его инверсии были сделаны предсказания и палегнозы циклов №10-13. Результаты приведены в Таблице 3 и на рис. 8.

Таблица 3: Средняя квадратичная ошибка прогноза и коэффициент корреляции

цикл	прямой ряд		инвертированный ряд	
	ошибка	корреляция	ошибка	корреляция
№10	22,45	0,79	20,86	0,79
№11	22,00	0,93	30,77	0,72
№12	27,57	0,51	16,91	0,71
№13	25,12	0,58	18,39	0,78

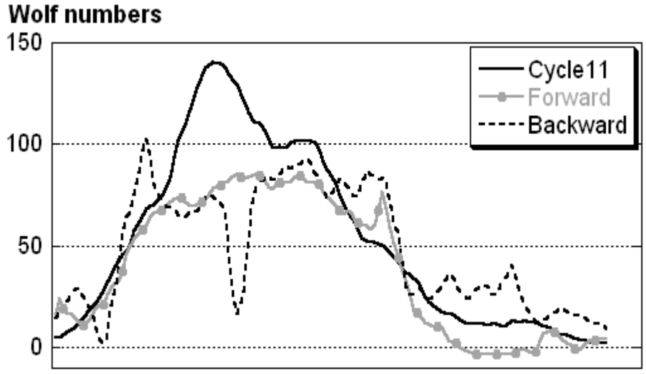

Рис. 8: Прогноз и палегноз 11 цикла, полученные для перемешанного ряда чисел Вольфа.

В целом результаты прогноза и палегноза ухудшились, за исключением цикла №10. Мы считаем, что уменьшение ошибки палегноза является эффектом селекции обучающей выборки. Малая статистика не дает права утверждать, что наши результаты доказывают существование вековой стрелы времени. Это согласуется с выводами работы [22], в которой для тестирования памяти использовался синтаксический анализ и метрика Левенштейна.

Выводы.

Полученные результаты не позволяют дать однозначный ответ о существовании явной стрелы времени в циклах Вольфа. Методы символической динамики показали, что почти наверное ряд среднемесячных сглаженных значений чисел Вольфа обратим на масштабах 3 месяца. Диссипативные свойства временного ряда среднегодовых значений больше, чем у случайного ряда, но меньше по сравнению с хаотической динамикой системы Хеннона. Поскольку анализируемые тексты получены с использованием 9-летнего шаблона со сдвигом на один год, масштаб отслеживаемых корреляций находился в интервале $(1 \div 14)$ лет. Если опираться на традиционную спектральную феноменологию циклов [11], следовало бы ожидать более существенных отличий при сравнении оригинальных гистограмм с их декоррелированными аналогами, начиная, по меньшей мере, с масштабов так называемой "квазидвухлетней"моды, т.е. с 2,5-6 лет.

Тестирование ряда методами нейроинформатики показало, что (а) инвертирование ряда Вольфа не приводит к значительному снижению качества палегноза отдельных циклов по сравнению с их прогнозом; (б) разрушение векового цикла перемешиванием пар, по-видимому, увеличивает ошибки прогноза и палегноза; (в) вопрос о существовании масштабов памяти, превышающих продолжительность одного цикла, остается открытым.

Таким образом, можно предположить, что либо причинно-следственные связи в циклах имеют фрагментарный по масштабам и спонтанный по времени характер, либо временной ряд чисел Вольфа не является "детерминированно-порожденной наблюдаемой" в смысле Такенса [14].

Работа выполнена при поддержке гранта ИНТАС 2001-0550.

Благодарности.

Автор благодарна Макаренко Н.Г. за полезные советы и дискуссии в ходе выполнения работы.

Цитированная литература

1. **Макаренко Н.Г.** // Лекции по нейроинформатике. Ч. 1. М., 2003. С.86 – 148.

2. **Такенс Ф.** Хаос // Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы. Москва-Ижевск, 2003. С.119 – 132.

3. **Solanki S.K., Fligge M.** // Geophys. Res. Lett. 1999. V. 26(16). P. 2465 – 2468.

4. **Usoskin I.G., Mursula K., and Kovaltsov G.A.** // Astron. and Astrophys. 2003. V. 403 P. 743 – 748.

5. **Diks C., Houwelingen J.C. van, Takens F., DeGoede J.** // Phys.Lett. A. 1995. V. 201. P. 221 – 228.

6. **Shaw R.** // Z.Naturforsch. 1981. V. 36a. P. 80 – 112.

7. **Гудзенко Л.И., Чертопруд В.Е.** // тр. ФИАН. 1976. Т. 90. С. 154 – 197.

8. **Serre T., Nesme-Ribes E.** // Astron. and Astrophys. 2000. V. 360. P. 319 – 330.

9. **Palus M., Novotná D.** // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3406 – 3409.

10. **Parker E.N.** // Astron. and Astrophys. 1970. V. 8. P. 1 – 30.

11. **Витинский Ю.И., Копецкий М., Куклин Г.В.** Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. М., 1986.

12. **Solanki S.K., Krivova N.A., J. Beer** // Astron. and Astrophys. 2002. V. 396. P. 235 – 242.

13. **Михайлуца В.П.** // Астрономический журнал. 1993. Т. 70. Вып. 3. С. 543 – 555.

14. **Takens F.** // Book: Nonlinear dynamics and turbulence. By Ed. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D.Joseph. N.Y.: Pitman, 1983. P. 314 – 333.

15. **Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.** // J.Statist.Phys. 1991. V. 65. № 3/4. P. 579 – 616.

16. **Боуэн Р.** // Сб статей. Математика. Новое в зарубежной науке. Вып.13. М., 1979.

17. **Daw C.S., Finney C.E.A., Tracy E.R.** // Review of Scientific Instruments. 2003. V. 74. P. 916 – 930.

18. **Daw C.S., Finney C.E.A., Kennel M.B.** // Physical Review E. 2000. V. 62. № 2. P. 1912 – 1921.

19. **Schreiber T., Schmitz A.** // Physica D. 2000. V. 142. P. 346 – 382.

20. **Ежов А.А., Шумский С.А.** Нейрокомпьютинг и его приложения в экономике и бизнесе. М., 1998.

21. **Данилкина Е.Б., Куандыков Е.Б., Каримова Л.М., Макаренко Н.Г.** // Сб. науч. тр. Нейроинформатика. Ч. 2. 2001. С. 13 – 20.

22. **Каримова Л.М., Макаренко Н.Г.** // Сб.: Пространственно-временные аспекты Солнечной активности. 1992. С. 141 – 151.

23. URL:http://www.sidc.oma.be/index.php3

Поступила в редакцию 27.02.2007 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 26 – 31*

УДК 517.925.5:519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Т. Ибраева, М. И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК,
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125,marat207@math.kz

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости основной по классификации А.С. Галиуллина обратной задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов, с вырождающейся относительно части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных.

Введение.

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1-7] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2-7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [7].

В работе [8] рассматривается одна из обратных задач – задача построения множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка по заданному интегральному многообразию в предположении, что 1) строящееся уравнение является уравнением с вырождающейся диффузией; 2)заданное интегральное многообразие зависит от всех переменных.

В данной работе, в отличие от [8], предполагается, что заданное интегральное многообразие зависит лишь от части переменных.

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которого лежит

Keywords: *Inverse problem, stochastic differential equation, integral manyfold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Л е м м а 1 [7, с.12-13].Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n},\ m \le n, \tag{1}$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu, \tag{2}$$

здесь s – произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \ldots h_m c_{m+1} \ldots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & \ldots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & \ldots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ h_{11} & \ldots & h_{1k} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & \ldots & h_{mk} & \ldots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \ldots & c_{m+1,n} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & \ldots & c_{n-1,k} & \ldots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

1. Постановка общей задачи построения стохастических дифференциальных систем с вырождающейся по части переменных диффузией и с заданными свойствами, зависящими от части переменных, и ее решение.

Пусть задано множество

$$\Lambda(t): \qquad \lambda(y, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \qquad \lambda = \lambda(y, t) \in C_{yt}^{22}. \tag{3}$$

Требуется построить систему стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot y = f_1(y, z, t), \\ \dot z = f_2(y, z, t) + \sigma(y, z, t)\dot\xi. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $y \in R^l$, $z \in R^p$, $l + p = n$, σ - матрица $(p \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [9], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Предположим,что вектор-функция $f_1 \in C_{yzt}^{121}$, а f_2 и σ из класса K непрерывных по t и липшицевых по y и z функций : $f_2 \in K$, $\sigma \in K$.

Поставленная задача обобщает рассмотренную в [8] задачу построения стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка (4) по заданному множеству:

$$\Lambda(t): \lambda(y, z, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(y, z, t) \in C_{yzt}^{121} \tag{3'}$$

так, чтобы множество $(3')$ было интегральным многообразием уравнения (4).

Для решения поставленной задачи построения системы уравнений (4) по заданному интегральному многообразию (3) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [9] $\lambda = \lambda(y,t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\ddot{\lambda} = M_1 + 2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t}f_1 + f_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y}f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma\dot{\xi}, \tag{5}$$

где

$$M_1 = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial z} : \sigma\sigma^T.$$

Далее вводятся произвольные типа Н.П. Еругина [1] m-мерная вектор-функция $A(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$ и $(m\times k)$- матрица $B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)$, обладающие свойствами: $A(0,0,y,z,t)\equiv 0, B(0,0,y,z,t)\equiv \equiv 0$,

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t) + B(\lambda,\dot{\lambda},y,z,t)\dot{\xi}. \tag{6}$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), приходим к соотношениям

$$\left(2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + f_1^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}f_2 = A - \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial z} : \sigma\sigma^T\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\sigma = B. \tag{8}$$

Перепишем выражения (7) и (8) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}f_2 = A - M_1 - \left(2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + f_1^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\sigma = B. \end{cases} \tag{9}$$

Из соотношений (9) по формуле (2) леммы 1 определим вектор-функцию f_2 и матрицу σ в виде

$$f_2 = s_1\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^+ A_1, \tag{10}$$

$$\sigma_i = s_2\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^+ B_i, \tag{11}$$

где $A_1 = A - M_1 - \left(2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial t} + f_1^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)f_1$, $\sigma_i = (\sigma_{1i},\sigma_{2i},...,\sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$ $(\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k})$; $B_i = (B_{1i},B_{2i},...,B_{mi})^T$ – i -ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,k})$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение типа Ито (4) имело заданное интегральное многообразие (3), необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f и матрица σ уравнения (4) имели соответственно вид (10) и (11).*

2. Линейный случай общей задачи.

По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv H_1(t)y + h(t) = 0, \quad \lambda\in R^m, \quad y\in R^l, \tag{11}$$

требуется построить линейную стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида

$$\begin{cases} \dot{y} = \Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \phi_1(t), \\ \dot{z} = \Psi_1(t)y + \Psi_2(t)z + \phi_2(t) + T(t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{12}$$

для которой множество (11) являлось бы интегральным многообразием, т.е. по заданной матрице $H_1(t)$ и m- мерной функции $h(t)$ определить матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и вектор-функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$, а также матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенной системы уравнений (12) заданные свойства (11) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (5) имеет вид

$$\ddot{\lambda} = M_1(t)y + M_2(t)z + M_3 + H_1(t)\Phi_2(t)\Psi(t)y + H_1(t)\Phi_2(t)\Psi_2(t)z+$$

$$+H_1(t)\Phi_2(t)\phi_2(t) + H_1(t)\Phi_2(t)T(t)\dot{\xi}, \tag{13}$$

где

$$\begin{array}{l} M_1(t) = \ddot{H}_1(t) + 2\dot{H}_1(t)\Phi_1(t) + H_1(t)\dot{\Phi}_1(t) + H_1(t)\Phi_1^2(t), \\ M_2(t) = 2\dot{H}_1\Phi_2(t) + H_1(t)\dot{\Phi}_2(t) + H_1(t)\Phi_1(t)\Phi_2(t), \\ M_3(t) = \ddot{h}(t) + 2\dot{H}_1(t)\dot{\phi}_1(t) + H_1(t)\Phi_1(t)\phi_1(t). \end{array}$$

С другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda + A_2(t)\dot{\lambda}$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0,0,y,z,t) \equiv 0$, имеем

$$\ddot{\lambda} = A_1\lambda + A_2\dot{\lambda} + B_1\dot{\xi}. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) следуют равенства

$$\begin{cases} H_1(t)\Phi_2(t)\Psi_1(t) = A_1H_1(t) + A_2\dot{H}_1 + A_2H_1(t)\Phi_1(t) - M_1(t), \\ H_1(t)\Phi_2(t)\Psi_2(t) = A_1H_1(t)\Phi_2(t) - M_2(t), \\ H_1(t)\Phi_2(t)\phi_2(t) = A_1h(t) + A_2\dot{h}(t) + A_2H_1(t)\phi_1(t) - M_3(t), \\ H_1(t)\Phi_2(t)T(t) = B_1. \end{cases} \tag{15}$$

Предположим, что $\Phi_1(t) = Y(t), \Phi_2(t) = Z(t)$, где $Y(t), Z(t)$ – соответственно произвольные непрырывно дифференцируемые матрицы порядков $(m\times l)$, $(m\times p)$, а вектор-функция $\phi_1(t) = \phi(t)$, где $\phi(t)$ – непрырывно дифференцируемая вектор-функция. Далее введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \widetilde{M_1} = A_1H_1(t) + A_2\dot{H}_1 + A_2H_1(t)\Phi_1(t) - M_1(t), \\ \widetilde{M_2} = A_1H_1(t)\Phi_2(t) - M_2(t), \\ \widetilde{M_3} = A_1h(t) + A_2\dot{h}(t) + A_2H_1(t)\phi_1(t) - M_3(t), \\ \widetilde{L} = H_1(t)\Phi_2(t), \end{cases}$$

тогда из равенств (15) с использованием леммы 1 имеем

$$\Psi_1(t) = s_1\left[\widetilde{L}C\right] + (\widetilde{L})^+\widetilde{M_1}, \tag{16}$$

$$\Psi_2(t) = s_2\left[\widetilde{L}C\right] + (\widetilde{L})^+\widetilde{M_2}, \tag{17}$$

$$\phi_2(t) = s_3\left[\widetilde{L}C\right] + (\widetilde{L})^+\widetilde{M_3}, \tag{18}$$

$$T_i(t) = s_4\left[\widetilde{L}C\right] + (\widetilde{L})^{+}B_i, \tag{19}$$

где T_i – i-ый столбец матрицы $T=(T_{\nu j})$ $(\nu=\overline{1,n}\,,\ \ j=\overline{1,k})$; $B_{1i}-i$ -ый столбец матрицы $B_1=(B_{\mu l})$ $(\mu=\overline{1,m},\ \ l=\overline{1,k})$. Здесь $s_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$ – произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы стохастическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка Ито (12) имела заданное линейное интегральное многообразие (11), необходимо и достаточно, чтобы* $\Psi_1(t),\ \Psi_2(t),\phi_2(t)$ *и* $T(t)$ *имели соответственно вид (16)-(19).*

3. Скалярный нелинейный случай общей задачи (стохастическая задача Еругина на плоскости).

Пусть интегральная кривая задана в виде

$$\Lambda(t):\eta(y,t)=0,\quad \text{где}\quad \eta\in R^1,\quad \eta\in C^{2\ 2}_{y\ t}, \tag{20}$$

по заданной кривой требуется построить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot y = g_1(y,z,t), \\ \dot z = g_2(y,z,t)+\gamma(y,z,t)\dot\zeta, \end{cases} \tag{21}$$

где $\zeta=\zeta(t,\omega)$ – скалярный винеровский процесс [9].

Задача заключается в определении скалярных функций $g_1(y,z,t)$, $g_2(y,z,t)$ и $\gamma(y,z,t)$ по заданной функции $\eta=\eta(y,t)$ так, чтобы множество (20) было интегральным многообразием уравнения (21).

Дифференцируя сложную функцию $\eta=\eta(y,t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [9], в случае винеровского процесса имеем

$$\ddot\eta=\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g_1+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g_1^2+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial y}g_1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}g_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\gamma^2+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g_1}{\partial z}\gamma\dot\zeta. \tag{22}$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a=a(\eta,\dot\eta,y,z,t)$ и $b= =b(\eta,\dot\eta,y,z,t)$ такие, что $a(0,0,y,z,t)\equiv b(0,0,y,z,t)\equiv 0$ и имеет место равенство

$$\ddot\eta=a+b\dot\zeta. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следуют соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial z}g_2=a-\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g_1+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g_1^2+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial y}g_1+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\gamma^2\right), \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g_1}{\partial z}\gamma=b. \end{cases} \tag{24}$$

Пусть $g_1=g(y,z,t)\in C^{111}_{yzt}$, тогда (24) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}g_2=a-\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g^2+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y}g+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\gamma^2\right), \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\gamma=b. \end{cases} \tag{25}$$

Из (25) в предположении, что $\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} \neq 0$, обозначив

$$\widetilde{a} = a - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial y}g + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}g^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}g + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\gamma^2\right),$$

на основе (2) имеем

$$\begin{cases} g_2 = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\widetilde{a}, \\ \gamma = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} b. \end{cases}$$

Таким образом, в основной обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях построены множества стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией и обладающих заданным интегральным многообразием, зависящим от части переменных.

Цитированная литература

1. **Еругин Н. П.** // ПММ. 1952. Т.10, В.16. С.659-670.

2. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971.

3. **Галиуллин А. С.** // Дифференц.уравнения. 1981. Т. XYII, №8. С.1487 – 1489.

4. **Галиуллин А. С.** // Дифференц.уравнения. 1982. Т. XYIII, № 5. С. 744 – 748.

5. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.

6. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** // Вестник РУДН. Сер. прикл. математика и информатика. 1994. № 1. С. 5 – 21.

7. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.

8. **Тлеубергенов М. И.,Ибраева Г. Т.** // Математический журнал. 2004. Т.4, №4(14). С.86 – 92.

9. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила 30.07.2007

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 32 – 42*

УДК 517.956.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. С. Кабдрахова

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина,125 anar@math.kz

Получены достаточные условия существования изолированного решения полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения со смешанной производной.

В области $\bar{\Omega} = [0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается краевая задача для нелинейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad u(0,t) = \psi(t), \psi(0) = \psi(T), \ \ x\in[0,\omega],\ t\in[0,T], \tag{2}$$

где $f:\overline{\Omega}\times R^3 \to R$ – непрерывная на $\overline{\Omega}$ функция. Пусть $C([0,\omega],R^{N_1})$ – пространство непрерывных на $[0,\omega]$ функций $\lambda:[0,\omega]\to R^{N_1}$ с нормой $\|\lambda\|_0 = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\|\lambda(x)\| = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\max\limits_{r=\overline{1,N_1}}|\lambda_r(x)|$, $C(\overline{\Omega})$ – множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u:\overline{\Omega}\to R$. Для функций $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ при фиксированном $x\in[0,\omega]$ введем норму $\|u(x,\cdot)\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]}|u(x,t)|$.

Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u^2(x,t)}{\partial x\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, называется классическим решением задачи (1),(2), если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ и краевым условиям (2).

Введем новые неизвестные функции $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $w(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и задачу (1),(2) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x,t,u(x,t),w(x,t),v),\ (x,t)\in\overline{\Omega},\ v(x,0) = v(x,T),\ x\in[0,\omega], \tag{3}$$

Keywords: *semiperiodic boundary value problem, nonlinear hyperbolic equation, isolated solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20,35L70,35B10

$$u(x,t)=\psi(t)+\int_0^x v(\xi,t)d\xi,\ w(x,t)=\dot\psi(t)+\int_0^x v_t(\xi,t)d\xi, \tag{4}$$

Возьмем шаг $h_1>0: N_1h_1=T,\ \ N_1=1,2,3,...,$ и по нему произведем разбиение $[0,T)=$ $=\bigcup\limits_{r=1}^{N_1}[(r-1)h_1,rh_1]$. Сужение функции $v(x,t)$ на $r-$ый интервал обозначим через $v_r(x,t)\ :\ v_r(x,t)=v(x,t),\,(x,t)\in\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h_1,rh_1),r=\overline{1,N_1}$, а через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v(x,t)$ в точке $t=(r-1)h_1,\,r=\overline{1,N_1}$ и на каждом интервале $[(r-1)h_1,rh_1)$ произведя замену $\widetilde v_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x)$, задачу (3) сведем к эквивалентной краевой задаче с параметром

$$\frac{\partial\widetilde v_r}{\partial t}=f(x,t,u(x,t),w(x,t),\widetilde v_r+\lambda_r(x)),\ (x,t)\in\Omega_r,\ \ \widetilde v_r(x,(r-1)h_1)=0,\ x\in[0,\omega] \tag{5}$$

$$\lambda_1(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde v_{N_1}(x,t)-\lambda_{N_1}(x)=0,\ \lambda_s(x)+\lim_{t\to sh_1-0}\widetilde v_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0,\ s=\overline{1,N_1-1}. \tag{6}$$

При фиксированном значении параметра $\lambda_r(x)$ задача Коши (5) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$\widetilde v_r(x,t)=\int\limits_{(r-1)h_1}^{t}f(x,\tau,u(x,\tau),w(x,\tau),\widetilde v_r(x,\tau)+\lambda_r(x))d\tau,\ (x,t)\in\Omega_r,\ \ r=\overline{1,N_1}. \tag{7}$$

Подставив вместо $\widetilde v_r(x,\tau)$ соответствующую правую часть (7) и повторив этот процесс ν раз, $(\nu=1,2,...)$ для функции $\widetilde v_r(x,t)$ получим следующее представление:

$$\widetilde v_r(x,t)=\int\limits_{(r-1)h_1}^{t}f\Bigg(x,\tau_1,u(x,\tau_1),w(x,\tau_1),\lambda_r(x)+\int\limits_{(r-1)h_1}^{\tau_1}f\Bigg(x,\tau_2,u(x,\tau_2),w(x,\tau_2),\lambda_r(x)+...+$$
$$+\int\limits_{(r-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}}f(x,\tau_\nu,u(x,\tau_\nu),w(x,\tau_\nu),\lambda_r(x)+\widetilde v_r(x,\tau_\nu))d\tau_\nu\Bigg)...d\tau_2\Bigg)d\tau_1,\quad r=\overline{1,N_1}.$$

Отсюда, определив $\lim\limits_{t\to rh_1-0}\widetilde v_r(x,t),\ \ r=\overline{1,N_1}$, подставив их в (6), получим относительно неизвестных функциональных параметров $\lambda_r(x)$ систему нелинейных уравнений

$$\lambda_1(x)+\lambda_{N_1}(x)-\int\limits_{(N_1-1)h_1}^{N_1h_1}f\Bigg(x,\tau_1,u(x,\tau_1),w(x,\tau_1),\lambda_{N_1}(x)+...+\int\limits_{(N_1-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}}f\Bigg(x,\tau_\nu,u(x,\tau_\nu),w(x,\tau_\nu),$$
$$\lambda_{N_1}(x)+\widetilde v_{N_1}(x,\tau_\nu)\Bigg)d\tau_\nu...\Bigg)d\tau_1=0,\ \lambda_s(x)+\int\limits_{(s-1)h_1}^{sh_1}f\Bigg(x,\tau_1,u(x,\tau_1),w(x,\tau_1),\lambda_s(x)+...+$$
$$+\int\limits_{(s-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}}f\Bigg(x,\tau_\nu,u(x,\tau_\nu),w(x,\tau_\nu),\lambda_s(x)+\widetilde v_s(x,\tau_\nu)\Bigg)d\tau_\nu...\Bigg)d\tau_1=0,\ s=\overline{1,N_1-1},$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h_1}(x,u,w,\lambda,\widetilde v)=0. \tag{8}$$

Рассмотрим семейство периодических краевых задач

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,\hat u(x,t),\hat w(x,t),v),\ (x,t)\in\overline\Omega,\qquad v(x,0)=v(x,T),\ \ x\in[0,\omega], \tag{9}$$

где $\hat u(x,t),\hat w(x,t)$ – известные, непрерывные на $\overline\Omega$ функции. Для нахождения решения задачи (9) используем метод параметризации [1].

Через $C(\overline\Omega,h_1,R^{N_1})$ обозначим пространство систем функций $\widetilde v(x,[t])=$ $=(\widetilde v_1(x,t),\ldots,\widetilde v_{N_1}(x,t))'$, где функции $\widetilde v_r(x,t)$ непрерывны на Ω_r и имеют конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t\to rh_1-0}\widetilde v_r(x,t),\ \ r=\overline{1,N_1}$, с нормой $\|\widetilde v(x,[\cdot])\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,N_1}}\ \sup\limits_{t\in[(r-1)h_1,rh_1)}|\widetilde v_r(x,t)|$.

Предположим, что параметр $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\ldots,\lambda_{N_1}^{(0)}(x))'\in R^{N_1}$ и система функций $\widetilde v^{(0)}(x,[t])=\Big(\widetilde v_1^{(0)}(x,t),\ldots,\widetilde v_{N_1}^{(0)}(x,t)\Big)'$ известны и пусть $v^{(0)}(x,t)=\lambda_r^{(0)}(x)+\widetilde v_r^{(0)}(x,t)$,

$(x,t)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N_1},\ v^{(0)}(x,T)=\lambda^{(0)}_{N_1}(x)+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}^{(0)}_{N_1}(x,t).$
Взяв непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\rho(x)>0,\widetilde{\rho}(x)>0,$ построим множества

$$S\left(\lambda^{(0)}(x),\rho(x)\right)=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_{N_1}(x))'\in C([0,\omega],R^{N_1}):\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}(x)\|<\rho(x)\},$$
$$S\left(\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]),\widetilde{\rho}(x)\right)=\{(\widetilde{v}_1(x,t),\ldots,\widetilde{v}_{N_1}(x,t))'\in C(\overline{\Omega},h_1,R^{N_1}):\|\widetilde{v}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot])\|_2<\widetilde{\rho}(x)\},$$
$$S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)=\{v(x,t)\in C(\overline{\Omega}):\|v(x,\cdot)-v^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_1(x)=\rho(x)+\widetilde{\rho}(x)\},$$
$$G_1^0=\{(x,t,u,v,w):(x,t)\in\overline{\Omega},\ u=\hat{u}(x,t),\ w=\hat{w}(x,t),\ \ \|v-v^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_1(x)\}.$$

Условие A_0 **.** Пусть функция $f(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{w}(x,t),v)$ имеет в G_1^0 равномерно непрерывную частную производную по v и $|f_v(x,t,\hat{u}(x,t),\hat{w}(x,t),v)|\le L(x),$ где $L(x)$ – непрерывная на $[0,\omega]$ функция.

Берем систему $(\lambda_r^{(0)}(x),\widetilde{v}_r^0(x,t)),\ r=\overline{1,N_1},$ и последовательные приближения строим по следующему алгоритму.

1-Шаг. а) Функциональный параметр $\lambda^{(1)}(x)=(\lambda_1^{(1)}(x),\ldots,\lambda_{N_1}^{(1)}(x))'\in R^{N_1}$ определяем из уравнения (8), где $u=\hat{u}(x,t),\ w=\hat{w}(x,t),\ \widetilde{v}=\widetilde{v}^{(0)}(x,t).$
б) Решая задачу Коши (5) при $u=\hat{u}(x,t),w=\hat{w}(x,t),\lambda_r=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t),\ t\in[(r-1)h_1,rh_1),\ r=\overline{1,N_1}.$

2-Шаг. а) Подставляя вместо $\widetilde{v}$ найденную $\widetilde{v}^{(1)}$ и решая уравнения (8), где $u=\hat{u}(x,t),$ $w=\hat{w}(x,t)$ определяем $\lambda^{(2)}(x)\in R^{N_1}.$
б) Решая задачу Коши (5) при $u=\hat{u}(x,t),w=\hat{w}(x,t),\lambda_r=\lambda_r^{(2)}(x),$ находим функции $\widetilde{v}_r^{(2)}(x,t),\ \ t\in[(r-1)h_1,rh_1),r=\overline{1,N_1},$ и т.д.

Продолжая процесс, на **k- ом шаге** алгоритма получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}(x),\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)),$ $r=\overline{1,N_1}.$ Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho(x),\widetilde{\rho}(x)$ *имеет место условие* A_0 *и существуют* $h_1>0:\ N_1h_1=T\ (N_1=1,2,3,...),\ \nu\in\mathbb{N},$ *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u},\hat{w},\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda}$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega],\ (\lambda(x),\widetilde{v}(x,t))\in S\left(\lambda^{(0)}(x),\rho(x)\right)\times$ $\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),\widetilde{\rho}(x)\right)$ *и выполнены следующие неравенства:*

1) $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u},\hat{w},\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(x,h_1),$

2) $q_\nu(x,h_1)=\gamma_\nu(x,h_1)\{e^{L(x)h_1}-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\dfrac{1}{i!}(L(x)h_1)^i\}<1,$

3) $\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u}(x,\cdot),\hat{w}(x,\cdot),\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]))\|<\rho(x),$

4) $\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)q_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}[e^{L(x)h_1}-1]\|Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u}(x,\cdot),\hat{w}(x,\cdot),\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]))\|+$
$+\|\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot])\|_2<\widetilde{\rho}(x).$

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $(\lambda^{(k)}(x),\widetilde{v}^{(k)}(x,t)),\ k=1,2,3,\ldots,$ *содержатся в* $S\left(\lambda^{(0)}(x),\rho(x)\right)\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),\widetilde{\rho}(x)\right),$ *сходится к* $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*(x,t))$ – *решению задачи (5),(6) при* $u=\hat{u}(x,t),\ \ w=\hat{w}(x,t)$ *и справедливы оценки:*

а) $\|\lambda^*(x)-\lambda^{(0)}(x)\|\le\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u}(x,\cdot),\hat{w}(x,\cdot),\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]))\|,$

б) $\|\widetilde{v}^*(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot])\|_2 \le \dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)q_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u}(x,\cdot),\hat{w}(x,\cdot),\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]))\| \times$
$\times\,[e^{L(x)h_1}-1]+\|\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot])\|_2.$
Причем любое решение задачи (5),(6) при $u=\hat{u}(x,t)$, $w=\hat{w}(x,t)$ *из* $S\left(\lambda^{(0)}(x),\rho(x)\right)\times$ $\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),\widetilde{\rho}(x)\right)$ *изолировано.*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 из [1].

Пусть $v^{(0)}(t)$ – решение нелинейной двухточечной краевой задачи

$$\frac{dv}{dt}=f(0,t,\psi(t),\dot{\psi}(t),v),\ v(0)=v(T),\quad t\in[0,T]. \tag{10}$$

Достаточные условия существования решений задачи (10) в терминах f,T получены в [2].

За $\lambda_r^{(0)}$ берем значение функции $v^{(0)}(t)$ в точке $t=(r-1)h_1$, $r=\overline{1,N_1}$, а $\widetilde{v}_r^{(0)}(t)=v_r^{(0)}(t)-\lambda_r^{(0)}$, где $v_r^{(0)}(t)$ – сужение функции $v^{(0)}(t)$ на $r-$ й интервал. По функции $v^{(0)}(t)$ построим функции $u^{(0)}(x,t)=\psi(t)+v^{(0)}(t)x$, $w^{(0)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+\dot{v}^{(0)}(t)x$, $(x,t)\in\overline{\Omega}$.
Взяв непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\rho(x)>0$, $\widetilde{\rho}(x)>0$, $\rho_2(x)>0$, построим множества:
$S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)=\{\lambda(x)\in C([0,\omega],R^{N_1}):\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}\|<\rho(x)\}$,
$S\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)=\{\widetilde{v}(x,[t])\in C(\overline{\Omega},h_1,R^{N_1}):\|\widetilde{v}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\|_2<\tilde{\rho}(x)\}$,
$S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)=\{u(x,t)\in C(\overline{\Omega}):\|u(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_2(x)\}$,
$S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)=\{v(x,t)\in C(\overline{\Omega}):\|v(x,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1<\rho_1(x)=\rho(x)+\widetilde{\rho}(x)\}$,
$S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)=\{w(x,t)\in C(\overline{\Omega}):\|w(x,\cdot)-w^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_2(x)\}, G_2^0=\{(x,t,u,w,v):$ $(x,t)\in\overline{\Omega},\|u-u^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_2(x),\|w-w^{(0)}(x,\cdot)\|_1<\rho_2(x),\|v-v^{(0)}(\cdot)\|_1<\rho_1(x)\}$.

Условие А. Пусть функция $f(x,t,u,w,v)$ в G_2^0 имеет равномерно непрерывные частные производные $f_u(x,t,u,w,v)$, $f_v(x,t,u,w,v)$, $f_w(x,t,u,w,v)$ и $|f_u(x,t,u,w,v)|\le L_1(x)$, $|f_w(x,t,u,w,v)|\le L_2(x)$, $|f_v(x,t,u,w,v)|\le L_3(x)$, где $L_i(x)$, $i=1,2,3,$ – непрерывные на $[0,\omega]$ функции.

Решение задачи (3),(4) находится как предел последовательности троек $\{u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t),v^{(k)}(x,t)\}, k=1,2,3,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму.

1-Шаг. А) Функцию $v^{(1)}(x,t)$ находим, решая краевую задачу (3), при $u(x,t)=u^{(0)}(x,t)$, $w(x,t)=w^{(0)}(x,t)$. Взяв в качестве начального приближения $\lambda_r^{(1,0)}=\lambda^{(0)}$, $\widetilde{v}_r^{(1,0)}(t)=v^{(0)}(t)-$ $-\lambda_r^{(1,0)}$ построим следующий алгоритм.
1-Шаг. a_1) Параметр $\lambda^{(1,1)}(x)$ определяем из уравнения (8) при $\widetilde{v}=\widetilde{v}^{(1,0)}$.
b_1) Функцию $\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)$ находим, решая задачу Коши (5) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1,1)}(x)$.
2-Шаг. a_1) Найденную $\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)$, $r=\overline{1,N_1}$, подставляя в уравнения (8) и решая его, находим $\lambda^{(1,2)}(x)$.
b_1) При $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1,2)}(x)$ решая задачу Коши (5), найдем функцию $\widetilde{v}_r^{(1,2)}(x,t)$.
Таким образом, на m-ом шаге алгоритма получаем систему пар $\left(\lambda_r^{(1,m)}(x),\,\widetilde{v}_r^{(1,m)}(x,t)\right), r=$ $=\overline{1,N_1}$. Предположим, что при $m\to\infty$ $\lambda^{(1,m)}(x)$ и $\widetilde{v}^{(1,m)}(x,[t])$ сходятся по нормам $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_2$ к $\lambda^{(1)}(x)\in C([0,\omega],R^{N_1})$, $\widetilde{v}^{(1)}(x,[t])\in C(\overline{\Omega},h_1,R^{N_1})$. Тогда функция $v^{(1)}(x,t)$ определяется равенством $v^{(1)}(x,t)=\lambda_r^{(1)}(x)+\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N_1}$, $v^{(1)}(x,T)=$ $=\lambda_{N_1}^{(1)}(x)+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}_{N_1}^{(1)}(x,t)$.

Б) Через $v^{(1)}(x,t)$ определим функции $u^{(1)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v^{(1)}(\xi,t)d\xi$ и $w^{(1)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+$

$+\int\limits_0^x v_t^{(1)}(\xi,t)d\xi.$

2-Шаг. А) Решая краевую задачу (3) при $u(x,t)=u^{(1)}(x,t)$, $w(x,t)=w^{(1)}(x,t)$, находим функцию $v^{(2)}(x,t)$. Взяв в качестве начального приближения $\lambda_r^{(2,0)}(x)=v^{(1)}(x,(r-1)h_1)$, $\widetilde{v}_r^{(2,0)}(x,t)=v^{(1)}(x,t)-\lambda_r^{(2,0)}(x)$, построим следующий алгоритм.
1-Шаг. a_1) Параметр $\lambda^{(2,1)}(x)$ определяем из уравнения (8) при $\widetilde{v}=\widetilde{v}^{(2,0)}$.
b_1) Функцию $\widetilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)$ находим, решая задачу Коши (5) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(2,1)}(x)$.
2-Шаг. a_1) Найденную $\widetilde{v}_r^{(2,1)}(x,t)$, $r=\overline{1,N_1}$, подставляя в уравнения (8) и решая его находим $\lambda^{(2,2)}(x)$.
b_1) При $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(2,2)}(x)$ решая задачу Коши (5), найдем функцию $\widetilde{v}_r^{(2,2)}(x,t)$.
Таким образом, на m-ом шаге алгоритма получаем систему пар $\Big(\lambda_r^{(2,m)}(x),\widetilde{v}_r^{(2,m)}(x,t)\Big)$, $r=\overline{1,N_1}$. Предположим, что при $m\to\infty\,\lambda^{(2,m)}(x)$ и $\widetilde{v}^{(2,m)}(x,[t])$ сходятся по нормам $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_2$ к $\lambda^{(2)}(x)\in C([0,\omega],R^{N_1})$, $\widetilde{v}^{(2)}(x,[t])\in C(\overline{\Omega},h_1,R^{N_1})$. Тогда функция $v^{(2)}(x,t)$ определяется равенством $v^{(2)}(x,t)=\lambda_r^{(2)}(x)+\widetilde{v}_r^{(2)}(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N_1}$, $v^{(2)}(x,T)=\lambda_{N_1}^{(2)}(x)+\lim\limits_{t\to T-0}\widetilde{v}_{N_1}^{(2)}(x,t)$.

Б) Через $v^{(2)}(x,t)$ определим функции $u^{(2)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v^{(2)}(\xi,t)d\xi$ и $w^{(2)}(x,t)=$ $=\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^x v_t^{(2)}(\xi,t)d\xi$.

Продолжая процесс, на **k-ом шаге** алгоритма получаем систему троек $\{u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t),v^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,3,...$

Условия следующей теоремы обеспечивают сходимость предложенного алгоритма к решению краевой задачи (3),(4), эквивалентной задаче (1),(2).

Теорема 2. *Пусть при* $\lambda^{(0)}$, $\widetilde{v}^{(0)}[t],\rho(x),\widetilde{\rho}(x),\rho_2(x)$ *имеет место условие А и существуют* $h_1>0$: $N_1h_1=T\,(N_1=1,2,3,...)$, $\nu\in\mathbb{N}$, *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,u,w,\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda}$ *обратима для любых* $(x,\ u(x,t),\ w(x,t),\ \lambda(x),\ \widetilde{v}(x,[t]))\in[0,\omega]\times S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)$ *и выполнены следующие неравенства:*

1) $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,u,w,\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(x,h_1),$

2) $q_\nu(x,h_1)=\gamma_\nu(x,h_1)\{e^{L_3(x)h_1}-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\dfrac{1}{i!}\,(L_3(x)h_1)^i\}<1,$

3) $a_0^1(x,h_1)+c_0^1(x,h_1)\exp(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi<\rho(x),$

4) $a_0^2(x,h_1)+c_0^2(x,h_1)\exp(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi<\widetilde{\rho}(x),$

5) $\exp(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi<\rho_2(x),$

где $c_0^1(x,h_1)=[L_1(x)+L_2(x)]\,h_1\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\sum\limits_{i=0}^{\nu-1}\dfrac{1}{i!}(L_3(x)h_1)^i$, $c_0^2(x,h_1)=c_0^1(x,h_1)(e^{L_3(x)h_1}-1)+$ $+[L_1(x)+L_2(x)]\,h_1e^{L_3(x)h_1}$, $a_0^1(x,h_1)=\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,u^{(0)}(x,\cdot),w^{(0)}(x,\cdot),\lambda^{(0)},\widetilde{v}^{(0)}[\cdot])\|,$

$a_0(x,h_1)=\|f(x,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),\lambda_r^{(0)}+\widetilde{v}_r^{(0)}(\cdot))-f(0,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),\lambda_r^{(0)}+\widetilde{v}_r^{(0)}(\cdot))\|_1 h_1+[L_1(x)+L_2(x)]\,h_1\times$
$\times\max(\|v^{(0)}(\cdot)\|_1,\|\dot v^{(0)}(\cdot)\|_1)x,\ a_0^2(x,h_1)=a_0(x,h_1)e^{L_3(x)h_1}+a_0^1(x,h_1)\left(e^{L_3(x)h_1}-1\right),\ B^{(0)}(x,h_1)=$
$=\max\Big(e^{L_3(x)h_1}\left[a_0^1(x,h_1)+a_0(x,h_1)\right],L_3(x)h_1e^{L_3(x)h_1}\left[a_0^1(x,h_1)+a_0(x,h_1)\right]+[L_1(x)+L_2(x)]\times$
$\times\max(\|v^{(0)}(\cdot)\|_1,\|\dot v^{(0)}(\cdot)\|_1)x+\|f(x,\cdot,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),v^{(0)}(\cdot))-f(0,\cdot,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),v^{(0)}(\cdot))\|_1\Big),$
$c_1(x,h_1)=L_1(x)+L_2(x)+L_3(x)\ c_0(x,h_1),\ c_0(x,h_1)=c_0^1(x,h_1)+c_0^2(x,h_1),\ c(x,h_1,\nu)=$
$=\max(c_0(x,h_1),c_1(x,h_1)).$
Тогда, определяемая алгоритмом последовательность троек $\{u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t),v^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,3,\ldots$, *принадлежит* $S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times\ \times S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)$ *и сходится к* $\{u^*(x,t),w^*(x,t),v^*(x,t)\}$ *– решению задачи (3),(4). Причем любое решение задачи (3),(4) из* $S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)$ *изолировано.*

Доказательство. В силу условий теоремы для задачи с параметром при $u=u^{(0)}(x,t)$, $w=w^{(0)}(x,t)$ в $S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)$ выполняются условия теоремы 1, она имеет изолированное решение $\left(\lambda^{(1)}(x),\widetilde{v}^{(1)}(x,t)\right)\in S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)\times S\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}\|\le\frac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,u^{(0)}(x,\cdot),w^{(0)}(x,\cdot),\lambda^{(0)},\widetilde{v}^{(0)}[\cdot])\|,\tag{11}$$

$$\|\widetilde{v}^{(1)}(x,\cdot)-\widetilde{v}^{(0)}(\cdot)\|_2\le\|\widetilde{v}^{(1,1)}(x,\cdot)-\widetilde{v}^{(1,0)}(\cdot)\|_2+(e^{L_3(x)h_1}-1)q_\nu(x,h_1)a_0^1(x,h_1).\tag{12}$$

Учитывая, что $\widetilde{v}_r^{(1,0)}(t)=\int\limits_{(r-1)h_1}^{t}f(0,\tau,\psi(\tau),\dot\psi(\tau),\widetilde{v}_r^{(1,0)}(\tau)+\lambda_r^{(1,0)})d\tau$ и

$$\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,t)=\int\limits_{(r-1)h_1}^{t}f(x,\tau,u^{(0)}(x,\tau),w^{(0)}(x,\tau),\widetilde{v}_r^{(1,1)}(x,\tau)+\lambda_r^{(1,1)}(x))d\tau\,,$$

получим

$$\|\widetilde{v}^{(1,1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(1,0)}[\cdot]\|_2\le e^{L_3(x)h_1}a_0(x,h_1)+(e^{L_3(x)h_1}-1)\|\lambda^{(1,1)}(x)-\lambda^{(1,0)}\|\le$$

$$\le e^{L_3(x)h_1}a_0(x,h_1)+(e^{L_3(x)h_1}-1)\gamma_\nu(x,h_1)\left\|Q_{\nu,h_1}\left(x,u^{(0)}(x,\cdot),w^{(0)}(x,\cdot),\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\right)\right\|.\tag{13}$$

Из оценок (11)-(13) имеем

$$\|\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\|_2\le(e^{L_3(x)h_1}-1)a_0^1(x,h_1)+e^{L_3(x)h_1}a_0(x,h_1).\tag{14}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|v^{(1)}(x,[\cdot])-v^{(0)}[\cdot]\|_2\le e^{L_3(x)h_1}\left[a_0^1(x,h_1)+a_0(x,h_1)\right].\tag{15}$$

Так как $v^{(0)}(t)$ и $v^{(1)}(x,t)$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям (10) и (3) при $u=u^{(0)}(x,t),w=w^{(0)}(x,t)$, то для их производных справедливо неравенство

$$\|v_t^{(1)}(x,\cdot)-\dot v^{(0)}(\cdot)\|_1\le L_3(x)\|v^{(1)}(x,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1+\max\left(\|v^{(0)}(\cdot)\|_1,\|\dot v^{(0)}(\cdot)\|_1\right)x\,[L_1(x)+L_2(x)]+$$

$$+\|f(x,\cdot,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),v^{(0)}(\cdot))-f(0,\cdot,\psi(\cdot),\dot\psi(\cdot),v^{(0)}(\cdot))\|_1.\tag{16}$$

Найденное $v^{(1)}(x,t)$ подставляя в функциональное соотношение (4), имеем

$$u^{(1)}(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v^{(1)}(\xi,t)d\xi\ \text{ и }\ w^{(1)}(x,t)=\dot\psi(t)+\int\limits_0^x\dot v^{(1)}(x,t).$$

Тогда из неравенств (15),(16) вытекает оценка

$$\max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\|_1,\|w^{(1)}(x,\cdot)-w^{(0)}(x,\cdot)\|_1)\le$$

$$\leq \int\limits_0^x \max(\|v^{(1)}(\xi,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1, \|v_t^{(1)}(\xi,\cdot)-\dot{v}^{(0)}(\cdot)\|_1)d\xi \leq \int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi. \tag{17}$$

Возьмем $\rho^{(1)}(x) = c_0^1(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + \widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{\rho}^{(1)}(x) = c_0^2(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + \widetilde{\varepsilon}_1$,

$\rho_1^{(1)}(x) = \rho^{(1)}(x) + \widetilde{\rho}^{(1)}(x)$ и $\rho_2^{(1)}(x) = \int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi \int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}}$,

где числа $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{\varepsilon}_1 > 0$, и $\widetilde{\widetilde{\varepsilon}} > 0$ соответственно удовлетворяют неравенствам $a_0^1(x,h_1) + c_0^1(x,h_1)\exp\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + \widetilde{\varepsilon} < \rho(x)$, $a_0^2(x,h_1) + c_0^2(x,h_1)\times$
$\times\exp\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + \widetilde{\varepsilon}_1 < \widetilde{\rho}(x)$,
$c_0(x,h_1)\exp\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + \exp\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1,\nu)d\xi\right)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} < \rho_2(x)$.
Построим множества $S\left(\lambda^{(1)}(x),\rho^{(1)}(x)\right)$, $S\left(\widetilde{v}^{(1)}(x,t),\widetilde{\rho}^{(1)}(x)\right)$, $S\left(v^{(1)}(x,t),\rho_1^{(1)}(x)\right)$,
$S\left(u^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right)$, $S\left(w^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right)$.
Покажем, что $S\left(\lambda^{(1)}(x),\rho^{(1)}(x)\right) \subset S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)$, $S\left(\widetilde{v}^{(1)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(1)}(x)\right) \subset S\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)$,
$S\left(v^{(1)}(x,t),\rho_1^{(1)}(x)\right) \subset S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)$, $S\left(u^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right) \subset S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)$,
$S\left(w^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right) \subset S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)$.

Действительно, если $\lambda(x) \in S\left(\lambda^{(1)}(x),\rho^{(1)}(x)\right)$, $\widetilde{v}(x,t) \in S\left(\widetilde{v}^{(1)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(1)}(x)\right)$,
$v(x,t) \in S\left(v^{(1)}(x,t),\rho_1^{(1)}(x)\right)$, $u(x,t) \in S\left(u^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right)$, $w(x,t) \in S\left(w^{(1)}(x,t),\rho_2^{(1)}(x)\right)$, то, учитывая неравенства (11),(14) получим

$$\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}\| \leq \|\lambda(x)-\lambda^{(1)}(x)\| + \|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}\| \leq$$

$$\leq \rho^{(1)}(x) + \|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}\| \leq c_0^1(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + a_0^1(x,h_1) + \widetilde{\varepsilon} < \rho(x), \tag{18}$$

$$\|\widetilde{v}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \|\widetilde{v}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])\|_2 + \|\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq$$

$$\leq \widetilde{\rho}^{(1)}(x) + \|\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq c_0^2(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + a_0^2(x,h_1) + \widetilde{\varepsilon}_1 < \widetilde{\rho}(x). \tag{19}$$

Из неравенств (18),(19) получим

$$\|v(x,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1 \leq \rho_1^{(1)}(x) + \|v(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1 + \|v^{(1)}(x,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1 \leq$$

$$\leq c_0(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi + e^{L_3(x)h_1}\left[a_0^1(x,h_1)+a_0(x,h_1)\right] + \widetilde{\varepsilon} + \widetilde{\varepsilon}_1 < \rho_1(x). \tag{20}$$

Используя неравенство (17), имеем

$$\max(\|u(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\|_1, \|w(x,\cdot)-w^{(0)}(x,\cdot)\|_1) \leq$$

$$\leq \max(\|u(x,\cdot)-u^{(1)}(x,\cdot)\|_1, \|w(x,\cdot)-w^{(1)}(x,\cdot)\|_1) + \max(\|u^{(1)}(x,\cdot)-u^{(0)}(x,\cdot)\|_1, \|w^{(1)}(x,\cdot)-$$

$$-w^{(0)}(x,\cdot)\|_1) \leq \rho_2^1(x) + \int\limits_0^x \max(\|v^{(1)}(\xi,\cdot)-v^{(0)}(\cdot)\|_1, \|v_t^{(1)}(\xi,\cdot)-\dot{v}^{(0)}(\cdot)\|_1)d\xi < \int\limits_0^x c(\xi,h_1,\nu)d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + \int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi \leq \left(1+\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}} < \rho_2(x). \tag{21}$$

Взяв за начальное приближение $\{\lambda^{(1)}(x),\widetilde{v}^{(1)}(x,t)\}$ и в множестве $S\left(\lambda^{(1)}(x),\rho^{(1)}(x)\right)\times$ $\times S\left(\widetilde{v}^{(1)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(1)}(x)\right)$ вновь применяя теорему 1 при $\hat{u}(x,t) = u^{(1)}(x,t)$, $\hat{w}(x,t) = w^{(1)}(x,t)$, получим существование изолированного решения $\left(\lambda^{(2)}(x),\widetilde{v}^{(2)}(x,t)\right) \in S\left(\lambda^{(1)}(x),\rho^{(1)}(x)\right)\times$

$S\left(\widetilde{v}^{(1)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(1)}(x)\right)$ и оценку

$$\|\lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\|\leq\frac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-q_\nu(x,h_1)}\|Q_{\nu,h_1}(x,u^{(1)}(x,\cdot),w^{(1)}(x,\cdot),\lambda^{(1)}(x),\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot]))\|.$$

Учитывая, что $\|Q_{\nu,h_1}(x,u^{(0)}(x,\cdot),w^{(0)}(x,\cdot),\lambda^{(1)}(x),\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot]))\|=0$ и неравенство (17), получим

$$\|\lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\|\leq c_0^1(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi,$$

$$\|\widetilde{v}^{(2)}(x,[\cdot])-\widetilde{v}^{(1)}(x,[\cdot])\|_2\leq c_0^2(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi.$$

Из последних оценок имеем

$$\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1\leq c_0(x,h_1)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi. \tag{22}$$

Для их производных справедливо неравенство

$$\|v_t^{(2)}(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1\leq\|f(x,\cdot,u^{(1)}(x,\cdot),w^{(1)}(x,\cdot),v^{(2)}(x,\cdot))-$$
$$-f(x,\cdot,u^{(0)}(x,\cdot),w^{(0)}(x,\cdot),v^{(1)}(x,\cdot))\|_1\leq c_1(x,h_1,\nu)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi. \tag{23}$$

Из оценок (22),(23) получим

$$\max(\|v^{(2)}(x,\cdot)-v^{(1)}(x,\cdot)\|_1,\|v_t^{(2)}(x,\cdot)-v_t^{(1)}(x,\cdot)\|_1,)\leq c(x,h_1,\nu)\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi. \tag{24}$$

Предполагая, что $v^{(k)}(x,t),u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t)$ известны и установлена оценка

$$\max(\|v^{(k)}(x,\cdot)-v^{(k-1)}(x,\cdot)\|,\|v_t^{(k)}(x,\cdot)-v_t^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1)\leq$$
$$\leq c(x,h_1,\nu)\int\limits_0^x\max(\|v^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1,\|v_t^{(k-1)}(\xi,\cdot)-v_t^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_1)d\xi, \tag{25}$$

следующее приближение по v найдем, решая семейство периодических краевых задач

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t}=f(x,t,u^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t),v^{(k)}),\ v^{(k+1)}(x,0)=v^{(k+1)}(x,T),\ (x,t)\in\overline{\Omega},\ x\in[0,\omega], \tag{26}$$

а функции $u^{(k+1)}(x,t),w^{(k+1)}(x,t)$ определяются из функциональных соотношений

$$u^{(k+1)}(x,t)=\psi(t)+\int_0^x v^{(k+1)}(\xi,t)d\xi,\ w^{(k+1)}(x,t)=\dot{\psi}(t)+\int_0^x v_t^{(k+1)}(\xi,t)d\xi. \tag{27}$$

Возьмем $\rho^{(k)}(x)=c_0^1(x,h_1)\dfrac{1}{(k-1)!}\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)^{k-1}\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi+\widetilde{\varepsilon},\ \widetilde{\rho}^{(k)}(x)=c_0^2(x,h_1)\times$ $\times\dfrac{1}{(k-1)!}\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)^{k-1}\int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1)d\xi+\widetilde{\varepsilon}_1,\quad \rho_1^{(k)}(x)=\rho^{(k)}(x)+\widetilde{\rho}^{(k)}(x),\quad \rho_2^{(k)}(x)=$

$= \dfrac{1}{k!}\left(\int\limits_0^x c(\xi,h_1)d\xi\right)^k \int\limits_0^x B^{(0)}(\xi,h_1,\nu)d\xi + \widetilde{\widetilde{\varepsilon}}$ и построим множества $S\left(\lambda^{(k)}(x),\rho^{(k)}(x)\right)$, $S(\widetilde{v}^{(k)}(x,t),\widetilde{\rho}^{(k)}(x))$, $S(v^{(k)}(x,t),\rho_1^{(k)}(x))$, $S(u^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x))$, $S(w^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x))$.

Для любых $\lambda \in S(\lambda^{(k)}(x),\rho^{(k)}(x)), \widetilde{v}(x,t) \in S(\widetilde{v}^{(k)}(x,t),\widetilde{\rho}^{(k)}(x))$, $v(x,t) \in S(v^{(k)}(x,t),\rho_1^{(k)}(x))$, $u(x,t) \in S(u^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x)), w(x,t) \in S(w^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x))$ аналогично (18)-(21) устанавливаются неравенства, обеспечивающие соотношения $S(\lambda^{(k)}(x),\rho^{(k)}(x)) \subset S(\lambda^{(0)},\rho(x))$, $S(\widetilde{v}^{(k)}(x,[t]),\ \widetilde{\rho}^{(k)}(x)) \subset S(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x))$, $S(v^{(k)}(x,t),\rho_1^{(k)}(x) \subset S(v^{(0)}(t),\rho_1(x))$, $S(u^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x)) \subset S(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x))$, $S(w^{(k)}(x,t),\rho_2^{(k)}(x)) \subset S(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x))$.

Взяв за начальное приближение $\{\lambda^{(k)}(x),\widetilde{v}^{(k)}(x,t\}$ и в множестве $S\left(\lambda^{(k)}(x),\rho^{(k)}(x)\right)\times$ $\times S\left(\widetilde{v}^{(k)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(k)}(x)\right)$ вновь применяя теорему 1 при $\hat{u}(x,t)=u^{(k)}(x,t)$, $\hat{w}(x,t)=w^{(k)}(x,t)$, получим существование изолированного решения $\left(\lambda^{(k+1)}(x),\widetilde{v}^{(k+1)}(x,t)\right) \in S\left(\lambda^{(k)}(x),\rho^{(k)}(x)\right)\times$ $S\left(\widetilde{v}^{(k)}(x,[t]),\widetilde{\rho}^{(k)}(x)\right)$.

Найденные $v^{(k+1)}(x,t)$, $v^{(k)}(x,t)$ подставляя в функциональное соотношение (4) и оценивая их разность, имеем

$$\max(\|u^{(k+1)}(x,\cdot)-u^{(k)}(x,\cdot)\|_1,\|w^{(k+1)}(x,\cdot)-w^{(k)}(x,\cdot)\|_1) \leq$$
$$\leq \int\limits_0^x \max(\|v^{(k)}(\xi,\cdot)-v^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|,\|v_t^{(k)}(\xi,t)-v_t^{(k-1)}(\xi,t)\|_1)d\xi,\ k=1,2,3,\ldots, \tag{28}$$

и аналогично из неравенства (25) получим оценку

$$\max(\|v^{(k+1)}(x,\cdot)-v^{(k)}(x,\cdot)\|,\|v_t^{(k+1)}(x,\cdot)-v_t^{(k)}(x,\cdot)\|_1) \leq$$
$$\leq c(x,h_1,\nu)\int\limits_0^x \max(\|v^{(k)}(\xi,\cdot)-v^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_1,\|v_t^{(k)}(\xi,\cdot)-v_t^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_1)d\xi,\ k=1,2,3,\ldots, \tag{29}$$

Из (28),(29) следует, что последовательность функций $\{u^{(k)}(x,t),v^{(k)}(x,t),w^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,3,\ldots$ на $\overline{\Omega}$ равномерно сходится к $\{u^{(*)}(x,t),v^{(*)}(x,t),w^{(*)}(x,t)\}$ и содержится в $S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right) \times S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right) \times S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)$. Причем тройка функций $\{u^{(*)}(x,t),v^{(*)}(x,t),w^{(*)}(x,t)\}$ является решением задачи (3),(4).

Покажем изолированность решения. Пусть тройка функций $\{\overline{u}(x,t),\overline{w}(x,t),\overline{v}(x,t)\}$ - решение задачи (3),(4), принадлежащее $S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)\times S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)$. В силу эквивалентности задач (3),(4) и (5),(6) четверка функций $\{\overline{u}(x,t),\overline{w}(x,t),\overline{\lambda}(x),\overline{\widetilde{v}}(x,[t])\}$ является решением задачи (5),(6), где $\overline{\lambda}_r(x)=\overline{v}_r(x,(r-1)h_1), r=\overline{1,N_1}$, $\overline{v}(x,[t]) = (\overline{\widetilde{v}}_1(x,t),\ldots,\overline{\widetilde{v}}_{N_1}(x,t))', \overline{\widetilde{v}}_r=\overline{v}_r(x,t)-\overline{\lambda}_r(x)$, $t\in[(r-1)h_1,rh_1)$, $r=\overline{1,N_1}, \overline{v}_r(x,t)-$ сужение функции $\overline{v}(x,t)$ на $r-$ ый интервал. Тогда существуют непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\delta(x)>0,\overline{\delta}(x)>0,\overline{\delta}_1(x)>0,\overline{\delta}_2(x)>0$ такие что,

$$\|\overline{\lambda}-\lambda^{(0)}\|+\delta(x)<\rho_2(x),\quad \|\overline{\widetilde{v}}-\widetilde{v}^{(0)}([t]\|+\overline{\delta}(x)<\widetilde{\rho}(x),\quad \|\overline{v}-v^{(0)}(\cdot)\|+\overline{\delta}_1(x)<\rho_1(x),$$
$$\|\overline{u}-u^{(0)}(x,\cdot)\|+\overline{\delta}_2(x)<\rho_2(x),\ \|\overline{w}-w^{(0)}(x,\cdot)\|+\overline{\delta}_2(x)<\rho_2(x). \tag{30}$$

Теперь, если $\lambda(x)\in S\left(\overline{\lambda}(x),\delta(x)\right)$, $\widetilde{v}(x,[t])\in S\left(\overline{\widetilde{v}}(x,[t]),\overline{\delta}(x)\right), v(x,t)\in S\left(\overline{v}(x,t),\overline{\delta}_1(x)\right)$, $u(x,t)\in S\left(\overline{u}(x,t),\overline{\delta}_2(x)\right)$, $w(x,t)\in S\left(\overline{w}(x,t),\overline{\delta}_2(x)\right)$, то в силу неравенств (30) получим, что $\lambda(x)\in\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)$, $\widetilde{v}(x,[t])\in\left(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x)\right)$, $v(x,t)\in S\left(v^{(0)}(t),\rho_1(x)\right)$, $u(x,t)\in$ $\in S\left(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)$, $w(x,t)\in S\left(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x)\right)$ т.е. $S\left(\overline{\lambda}(x),\delta(x)\right)\subset S\left(\lambda^{(0)},\rho(x)\right)$, $S(\overline{\widetilde{v}}^{(0)}(t),\overline{\delta}(x))\subset S(\widetilde{v}^{(0)}[t],\widetilde{\rho}(x))$, $S(\overline{u}(x,t),\overline{\delta}_2(x))\subset S(u^{(0)}(x,t),\rho_2(x))$, $S(\overline{w}(x,t),\overline{\delta}_2(x))\subset$ $\subset S(w^{(0)}(x,t),\rho_2(x))$.

Возьмем число $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)<1$, $q_\nu(x,h_1)<1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)$. Из равномерной непрерывности $f_u(x,t,u,w,v)$, $f_v(x,t,u,w,v)$, $f_w(x,t,u,w,v)$ в G_2^0 и из структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,u,w,\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda}$ вытекает ее равномерная непрерывность в $S\left(\overline{\lambda}(x),\delta(x)\right)\times$ $\times S\left(\overline{\widetilde{v}},\overline{\delta}(x)\right)\times S\left(\overline{u}(x,t),\overline{\delta}_2(x)\right)\times S\left(\overline{w}(x,t),\overline{\delta}_2(x)\right)$. Поэтому существуют $\widetilde{\delta}(x)\in(0,\delta(x)]$, $\widetilde{\overline{\delta}}(x)\in$

$\in (0,\overline{\delta}(x)], \widetilde{\delta}_2(x) \in (0,\overline{\delta}_2(x)]$, при которых $\left\| \dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,u,w,\lambda,\widetilde{v})}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda} \right\| < \varepsilon$ для всех $(x,u,w,\lambda,\widetilde{v}) \in S\left(\overline{u}(x,t),\widetilde{\overline{\delta}}_2(x)\right) \times S\left(\overline{w}(x,t),\widetilde{\overline{\delta}}_2(x)\right) \times S\left(\overline{\lambda}(x),\widetilde{\delta}(x)\right) \times S\left(\overline{\widetilde{v}}(t),\widetilde{\overline{\delta}}(x)\right)$.

Пусть $\left(\hat{u}(x,t),\hat{w}(x,t),\hat{\lambda}(x),\hat{\widetilde{v}}(x,[t])\right) \in S\left(\overline{u}(x,t),\widetilde{\overline{\delta}}_2(x)\right) \times S\left(\overline{w}(x,t),\widetilde{\overline{\delta}}_2(x)\right) \times S\left(\overline{\lambda}(x),\widetilde{\delta}(x)\right) \times$ $\times S\left(\overline{\widetilde{v}}^{(0)}(t),\widetilde{\overline{\delta}}(x)\right)$ - другое решение задачи (5), (6).

Так как $Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u}(x,\cdot),\overline{w}(x,\cdot),\overline{\lambda}(x),\overline{\widetilde{v}}(x,[\cdot]))=0$ и $Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u}(x,\cdot),\hat{w}(x,\cdot),\hat{\lambda}(x),\hat{\widetilde{v}}(x,[\cdot]))=0$, то из равенств

$$\overline{\lambda}(x)=\overline{\lambda}(x)-\left[\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\cdot Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}}),$$

$$\hat{\lambda}(x)=\hat{\lambda}(x)-\left[\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\cdot Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u},\hat{w},\hat{\lambda},\hat{\widetilde{v}})$$

получим, что

$$\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)=-\left[\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\left[Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\hat{\lambda},\overline{\widetilde{v}})-Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u},\hat{w},\hat{\lambda},\hat{\widetilde{v}})\right]-$$

$$-\left[\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}\right]^{-1}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\hat{\lambda}+\theta(\overline{\lambda}-\hat{\lambda}),\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\overline{\lambda},\overline{\widetilde{v}})}{\partial\lambda}\right)d\theta\times$$

$\times\left(\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\right)$, откуда

$$\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\|\le\frac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)}\cdot\left\|Q_{\nu,h_1}(x,\overline{u},\overline{w},\hat{\lambda},\overline{\widetilde{v}})-Q_{\nu,h_1}(x,\hat{u},\hat{w},\hat{\lambda},\hat{\widetilde{v}})\right\|\le$$

$$\le\frac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)}\Bigg\{[L_1(x)+L_2(x)]h_1\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{i!}\left(L_3(x)h_1\right)^i\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1)+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N_1}}\left|\int\limits_{(r-1)h_1}^{rh_1}L_3(x)\ldots\int\limits_{(r-1)h_1}^{\tau_{\nu-1}}L_3(x)|\overline{\widetilde{v}}_r(x,\tau)-\hat{\widetilde{v}}_r(x,\tau)|d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right|\Bigg\}. \tag{31}$$

Учитывая, что функции $\overline{\widetilde{v}}(x,t),\hat{\widetilde{v}}(x,t)$ являются решениями задачи Коши (5) при $\lambda_r(x)=$ $=\overline{\lambda}_r(x)$, $u(x,t)=\overline{u}(x,t)$, $w(x,t)=\overline{w}(x,t)$, $\lambda_r(x)=\hat{\lambda}_r(x)$, $u(x,t)=\hat{u}(x,t)$, $w(x,t)=\hat{w}(x,t)$ соответственно и используя лемму Гроноулла - Беллмана, имеем

$$\|\overline{\widetilde{v}}(x,[\cdot])-\hat{\widetilde{v}}(x,[\cdot])\|_2\le[L_1(x)+L_2(x)]h_1\max\Big(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1\Big)\times$$

$$\times e^{L_3(x)h_1}+\Big(e^{L_3(x)h_1}-1\Big)\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\|.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (31), получим

$$\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\|\le d_0(x,h_1)\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1)+\frac{q_\nu(x,h_1)}{1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)}\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\|,$$

где $d_0(x,h_1)=\dfrac{\gamma_\nu(x,h_1)}{1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)}\,[L_1(x)+L_2(x)]\,h_1\,(e^{L_3(x)h_1}+1)\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu-1}\frac{1}{i!}\,(L_3(x)h_1)^i$.

Тогда $$\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\|\le\frac{d_0(x,h_1)}{1-a_\nu(x,h_1)}\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1), \tag{32}$$

где $a_\nu(x,h_1)=\dfrac{q_\nu(x,h_1)}{1-\varepsilon\gamma_\nu(x,h_1)}$, $\quad\|\overline{\widetilde{v}}(x,[\cdot])-\hat{\widetilde{v}}(x,[\cdot])\|_2\le d_1(x,h_1)\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,$

$\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1)$, здесь $$d_1(x,h_1)=\frac{d_0(x,h_1)}{1-a_\nu(x,h_1)}\left(e^{L_3(x)h_1}-1\right)+[L_1(x)+L_2(x)]\,h_1e^{L_3(x)h_1}. \tag{33}$$

Таким образом,

$$\|\overline{v}(x,\cdot)-\hat{v}(x,\cdot)\|_1 \le \|\overline{\overline{v}}(x,[\cdot])-\hat{\hat{v}}(x,[\cdot])\|_2+\|\overline{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\| \le d(x,h_1)\times$$

$$\times \max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\, \|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1), \quad \|\dot{\overline{v}}(x,\cdot)-\dot{\hat{v}}(x,\cdot)\|_1 \le L_1(x)+L_2(x)+L_3(x)\times$$

$$\times d(x,h_1)\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1), \text{ где } d(x,h_1)=\frac{d_0(x,h_1)}{1-a_\nu(x,h_1)}+d_1(x,h_1). \quad (34)$$

Используя функциональное соотношение (4) и неравенство (34), получим

$$\max(\|\overline{u}(x,\cdot)-\hat{u}(x,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(x,\cdot)-\hat{w}(x,\cdot)\|_1) \le \int_0^x \max\Big[d(\xi,h_1), L_1(\xi)+L_2(\xi)+$$

$$+L_3(\xi)\cdot d(\xi,h_1)\Big]\max(\|\overline{u}(\xi,\cdot)-\hat{u}(\xi,\cdot)\|_1,\|\overline{w}(\xi,\cdot)-\hat{w}(\xi,\cdot)\|_1)d\xi. \quad (35)$$

Из интегрального неравенства (35) следует, что $\overline{u}(x,t)=\hat{u}(x,t)$, $\overline{w}(x,t)=\hat{w}(x,t)$. В силу неравенств (32)-(34) имеют место равенства $\overline{\lambda}(x)=\hat{\lambda}(x)$, $\overline{\overline{v}}(x,t)=\hat{\hat{v}}(x,t)$, $\overline{v}(x,t)=\hat{v}(x,t)$. Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Темешева С. М.** // Известия НАН РК. Сер.физ.-мат. 2003. №1. С. 93 – 100.
2. **Джумабаев Д. С.,Темешева С. М.** // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47, №1. С. 45 – 63.

Поступила в редакцию 11.08.2007г.

УДК 550.385

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРЕДСКАЗАНИЕ ГЕОМАГНИТНОГО Dst-ИНДЕКСА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ IFS

Л. М. Каримова, С. А. Мухамеджанова

Институт Математики МОиН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 chaos@math.kz

В статье дается методика вероятностного прогноза временных рядов на основе системы итерированных функций с вероятностями из теории фракталов. Итерации системы приводят к аттрактору (фракталу) в пространстве компактов, который является носителем инвариантной вероятностной меры (мультифрактала) в пространстве борелевых мер. Обратная задача состоит в нахождении коэффициентов функций системы и их вероятностей по оценкам эмпирической меры. Эмпирическую меру можно получить из временного ряда, используя методы символической динамики. Описываемая техника применяется для моделирования и предсказания пороговых значений геомагнитных возмущений, характеризуемых так называемым Dst индексом.

Известно, что возмущения околоземного космического пространства — *факторы космической погоды* — существенно влияют на биосферу [1], качество радиосвязи и функционирование космических аппаратов [2]. Поэтому интерес к исследованию и предсказанию таких явлений вполне объясним [3-5]. Возмущения магнитного поля Земли являются следствием изменения режимов космической погоды и отслеживаются различными локальными и планетарными геомагнитными индексами [6]. Одним из них является Dst — индекс геомагнитной активности в низких широтах, который характеризует интенсивность симметричного экваториального кольцевого тока на расстоянии 3-5 радиусов Земли и тока на магнитопаузе [7]. Индекс вычисляется как усредненная величина возмущений, отсчитываемых от спокойного уровня по данным четырех магнитных обсерваторий, расположенных приблизительно вдоль магнитного экватора. В магнитоспокойные дни величина Dst лежит в пределах $\pm 20nT$ (нанотеслов). Магнитной бурей считают значения $Dst \leq -30nT$; для сильных бурь $Dst \leq -50nT$ и очень сильных $Dst \leq -100nT$. Скейлинговые свойства этого индекса исследованы в работе [8].

Основной причиной сильных геомагнитных бурь являются геоэффективные межпланетные возмущения солнечного происхождения, такие как выбросы корональных масс или межпланетные направленные взрывы, связанные с инверсиями межпланетного магнитного поля. Природа источников этих явлений до сих пор не имеет корректного описания [9]. К тому же эти факторы

Keywords: *Iterated Function System, collage, inverse problem, invariant measure*
2000 Mathematics Subject Classification: 37M25

имеют стохастический характер и нестационарны во времени, что в значительной степени затрудняет их моделирование [10]. Поэтому здесь полезны стохастические модели, основанные на марковских процессах [11]. В данной работе такой процесс управляется эволюцией случайной динамической системы (СДС), которая реализуется *Рекуррентной Системой Итерированных Функций с Вероятностями* (*Recurrent Iterated Function System with Probabilities, RIFSP*), заданной на компакте [12,13]. Рекуррентность означает здесь зависимость выбора номера отображения от выбора отображения на предыдущем шаге. Таким образом, модель полностью описывается вероятностями переходов из одного состояние в другое, следуя принципу Марковских цепей: будущее зависит от прошлого через настоящее. Такая СДС имеет единственную инвариантную меру на $[0,1]$, которая и является предметом моделирования [14]. Инвариантную меру СДС можно оценить с помощью эмпирической плотности распределения слов на отрезке $[0,1]$, полученных в результате символического преобразования наблюдаемого временного ряда [15]. Если полученная плотность стационарна и обладает свойством статистического самоподобия (мультифрактальности) [8], то обратная задача моделирования сводится к поиску параметров RIFSP по оценке инвариантной меры [11,14]. Поскольку носитель меры (аттрактор) известен — им является единичный отрезок — обратная задача корректна и решается методами минимизации линейного или квадратичного функционала в зависимости от выбранной метрики [16].

В статье мы описываем методику марковского моделирования с помощью RIFSP, приводим результаты решения обратной задачи с использованием *Теоремы о Коллаже* и *Метода Моментов* и применяем марковскую модель к проблеме предсказания магнитных бурь.

Статья имеет следующую структуру. В начале приводится краткое введение в теорию *Систем Итерированных Функций* (*Iterated Function System, IFS*), определение обратной задачи IFS, а также коллаж-метод ее решения. Затем описываются результаты применения теории к моделированию и предсказанию Dst-индекса.

Основные понятия теории Систем Итерированных Функций [12,17,18]. Напомним, что отображение $S : X \to X$, где $(X, \|\cdot\|)$ — полное метрическое пространство, называется *сжимающим*, если выполняется условие: $\|S(x) - S(y)\| \le c\|x - y\|$, $0 < c < 1$. Очевидно тогда, что S является непрерывной функцией и имеет единственную неподвижную точку. Конечный набор $\{S_i\}_{i=1}^m$ таких отображений с коэффициентами сжатия $\{c_i\}_{i=1}^m$ называется IFS [19].

Пусть $\mathbf{H}$ — пространство компактов из R^n. Если ввести метрику Хаусдорфа в $\mathbf{H}$ как

$$h(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\},$$

где $X_\delta = \{x \in R^n : \|x - a\| \le \delta\}$ — дилатация компакта X, то можно определить действие сжимающего отображения на множество:

$$T(B) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B),$$

где $S_i(B) = \{S_i(x)|x \in B\}$. Заметим, что $(\mathbf{H}, h)$ — полное метрическое пространство. Тогда оператор T, который называется *оператором Хатчинсона*, является сжатием в $(\mathbf{H}, h)$, и, следовательно, имеет единственную неподвижную «точку» (фактически компакт!), называемую *аттрактором* или *фракталом IFS* [17,18].

Теорема 1 [19].*Пусть IFS задана отображениями* $\{S_i\}_{i=1}^m$ *с коэффициентами* $\{c_i\}_{i=1}^m, c_i < 1$. *Тогда существует единственное непустое компактное множество* A, *инвариантное относительно действия оператора* T,

$$F = T(A).$$

Более того, для любого компакта E итерации оператора $T: E, T(E), T(T(E)) \equiv T^2(E), ...$ сходятся к A в метрике Хаусдорфа:

$$T^k(E) \to A, k \to \infty.$$

Примером фрактала является так называемый «фрактальный мозг» (Рис. 1), который является аттрактором IFS, заданной двумя преобразованиями на плоскости:

$$S_{1,2}(x,y) = (\frac{x}{2} \pm \frac{y}{2\sqrt{3}} \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})$$

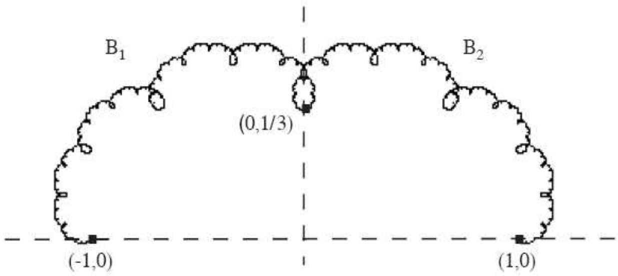

Рис. 1: Фрактальный мозг

Очевидно, «мозг» B является *коллажем*, т.е. объединением своих преобразованных (уменьшенных и повернутых) копий: $B = T(B) = S_1(B) \cup S_2(B) = B_1 \cup B_2$.

Естественным обобщением изложенного являются Системы Итерированных Функций с Вероятностями (*Iterated Function Systems with Probabilities, IFSP*) [13,20,21]. Рассмотрим простой пример. Пусть *IFS* $S_1 = \frac{3}{4}x$, $S_2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ определена на единичном интервале. Для получения стохастической системы снабдим ее вероятностями $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$. Тогда исходная вероятностная мера начнет меняться при итерациях оператора T, образуя так называемый мультипликативный каскад. Название обусловлено тем обстоятельством, что мера на убывающей последовательности интервалов задается произведением вероятностей [19]. В пределе получится структура, называемая биномиальной (мультифрактальной) мерой. На Рис. 2 изображено распределение меры такого каскада после нескольких итераций. Такой процесс управляется СДС, в которой орбита определяется как $x_0, x_1, ..., x_k, ...$, где $x_k = S_{\sigma_k}(x_{k-1})$, а номера $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k, ... \in \{1, 2\}$ генерируются с вероятностями $p_1 = P(\sigma_k = 1)$, $p_2 = P(\sigma_k = 2)$.

В марковской схеме выбор текущего отображения зависит от предыдущего, т.е. $p_1 = P(\sigma_k = 1) = p_{1,\sigma_{k-1}}$ и $p_2 = P(\sigma_k = 2) = p_{2,\sigma_{k-1}}$; таким образом, эволюция полностью описывается матрицей переходных вероятностей (p_{ij}) [14].

Фактически, первоначальная единичная мера «перевзвешивается» под действием оператора T на каждом шаге итерации по правилу $T(\mu) = p_1 S_1(\mu) + p_2 S_2(\mu)$. Условие сохранения меры можно записать следующим образом [20]:

$$T(\mu(B)) = p_1(S_1^{-1}(B)) + p_2\mu(S_2^{-1}(B)),$$

где $S_i^{-1}(B)$ — прообраз B.

Формально, по аналогии с пространством компактов, можно рассмотреть пространство $\mathbf{M}$, точками которого являются вероятностные борелевы меры [17]. Аналогом отображения $T(B)$ в этом пространстве является *марковский оператор*

$$M(\mu)(B) = \sum_{i=1}^{m} p_i\mu(S_i^{-1}(B)).$$

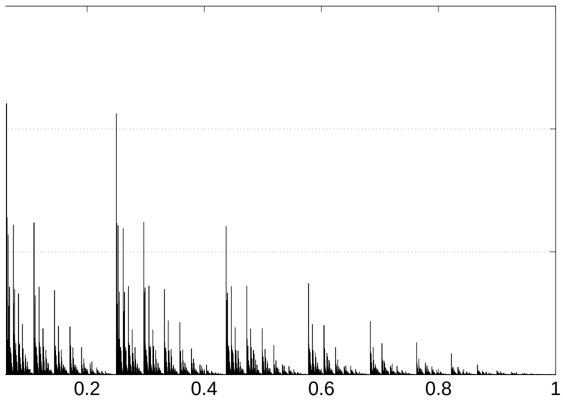

Рис. 2: Биномиальный каскад

Можно показать [17,19,21], что марковский оператор является сжатием в метрике Монжа-Канторовича:

$$d_{MK}(\mu,\nu) = \sup\left\{\int_X f d\mu - \int_X f d\nu\right\},$$

где верхняя грань берется по всем функциям f , удовлетворяющим условию Липшица с константой ≤ 1. Метрическое пространство $(\mathbf{M}, d_{MK})$ является полным и, следовательно, согласно теореме Банаха, марковский оператор имеет единственную неподвижную точку - *инвариантную меру*, носителем которой будет аттрактор соответствующей IFS.

Теорема 2 [17,19]. *Для IFSP $\{S_i, p_i\}_{i=1}^m$ существует единственная борелева вероятностная мера μ такая, что для любого подмножества B из множества элементарных Борелевых подмножеств*

$$\mu(B) = M(\mu)(B) \equiv \sum_{i=1}^m p_i \mu \circ S_i^{-1}(B),$$

и для любой меры $\nu \in \mathbf{M}$ последовательность итераций M сходится к μ в метрике Монжа-Канторовича:

$$M^k(\nu) \to \mu, k \to \infty.$$

Носителем инвариантной меры является аттрактор F соответствующей IFS $\{S_i\}_{i=1}^m$. Кроме того, для всех непрерывных функций $g : X \to R$

$$\int g(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^m p_i \int g \circ S_i(x) d\mu(x).$$

Предположим теперь, у нас есть оценка инвариантной меры, полученная из данных следующим образом [11,14,15]. Область значений временного ряда делится на n интервалов и каждому отсчету ряда в зависимости от того, в какой интервал он попадает, ставится в соответствие символ из некоторого алфавита мощности n. Например, в случае $n = 2$ алфавит состоит из символов 0 и 1. «Читаем» полученную бинарную последовательность с помощью шаблона фиксированной длины l (длина слова), последовательно сдвигая его на один символ вдоль текста. Тем самым мы набираем статистику слов $\{w\}_{i=1}^q, w_i = s_{i1}s_{i2}...s_{il}$ (s_{ij} — j-ый символ слова w_i). Далее каждому слову $w_i, i = 1,...,q$ ставится в соответствие точка единичного отрезка по правилу $r_i = \sum_{j=1}^l 2^{-j} s_{ij}$. Последним этапом является построение частотной гистограммы встречаемости слов (т.е. точек на $[0, 1]$) и ее нормализация.

Если мера обладает мультифрактальными свойствами [22] и свойством стационарности, то разумно предположить, что ее моделью может служить мера, полученная с помощью IFSP, как результат действия марковского оператора. Следовательно, проблема моделирования сводится к нахождению параметров отображений $\{S_i\}_{i=1}^m$ и их вероятностей $\{p_i\}_{i=1}^m$. Это и составляет содержание *обратной задачи для IFS*, которая традиционно решается методом моментов [23]. В этой статье описан другой подход, основанный на *теореме о коллаже* [19].

Теорема 3. *Пусть $B \in \mathbf{H}$, $\{S_i\}_{i=1}^m$ — IFS с аттрактором A с коэффициентом сжатия $c = \max\{c_i\}_{i=1}^m$. Тогда*

$$h(A, B) \leq \frac{h(B, T(B))}{1 - c},$$

где T — оператор Хатчинсона.

Эта теорема фактически оценивает скорость сходимости итераций оператора $T(B)$ к аттрактору и утверждает, что чем ближе выбранное B и его коллаж $T(B)$, тем ближе B к аттрактору A. Теорема является не просто теоретическим результатом, касающимся IFS, но и мощным инструментом моделирования. Единственным ее недостатком является трудность отыскания лучшего коллажа, поиск которого производится на основе эвристических соображений. Это делает решение обратной задачи IFS нетривиальным.

Численные эксперименты. Оценка инвариантной меры для Dst-индекса была получена из ряда суточных значений, соответствующего периоду с 1981 по 1996г. [24]. Ряд содержал 5844 отсчета. Длина бинарного слова составляла 12 букв и порог возмущения был выбран равным -30nT. Таким образом, символ 1 соответствовал выбросу отсчета ряда за порог («магнитной буре»), а символ 0 — отсутствию возмущения. На Рис. 3 и Рис. 4 приведен сам ряд Dst-индекса и соответствующая ему эмпирическая мера, содержащая $2^{12} = 4096$ бинов.

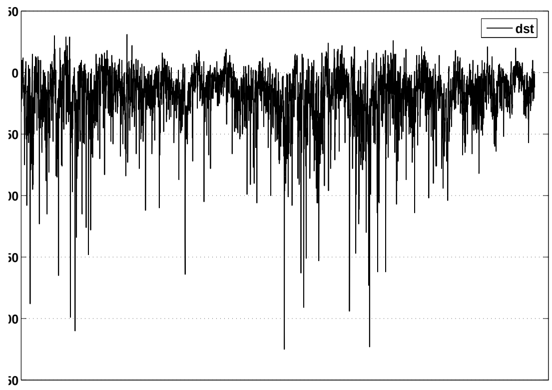

Рис. 3: Ряд среднесуточных значений Dst-индекса (1957 - 2002 гг.)

Самоподобные свойства меры проверялись вычислением мультифрактального спектра Лежандра (Рис. 5) [22]. Кроме того, мера оказалась стационарной во времени, что дает основание моделировать ее с помощью RIFSP [25].

Из практических соображений функции, составляющие RIFSP, были выбраны следующим образом:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}x, S_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Оптимизируемыми параметрами при решении обратной задачи являлись вероятности p_{ij} выбора j-го оператора при условии, что последним применялся i-ый оператор RIFSP, т.е. факти-

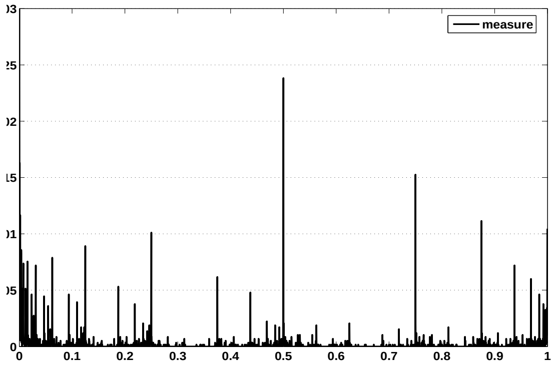

Рис. 4: Гистограмма встречаемости бинарных слов длиной l=12 для ряда Dst-индекса с порогом p=-30

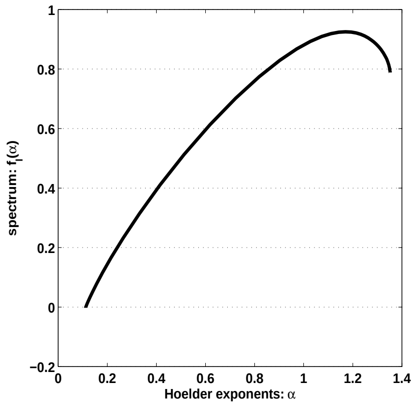

Рис. 5: Мультифрактальный спектр Лежандра для эмпирической меры Dst-индекса

чески матрица

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

где вероятности перехода связаны соотношениями: $p_{12} = 1 - p_{11}$, $p_{22} = 1 - p_{21}$. Для сравнения полученных результатов с прогнозом, приведенным в работе [8], кроме теоремы о коллаже был реализован и метод моментов. Для оптимизации параметров RIFSP использовались несколько методов, в том числе и так называемый прямой поиск [26]. Все они дали одинаковые с точностью до четвертого знака результаты: $p_{11} = 0.9161$, $p_{12} = 0.3024$.

На Рис. 6 и Рис. 7 приведено сравнение эмпирической и модельной мер, а также их накопленных блужданий, вычисленных как $walk = \sum(\mu_i - \mu_{mean})$, где суммирование происходит по всем бинам эмпирической меры.

Полученная модельная мера была использована для прогноза бинарных событий (магнитной бури или ее отсутствия) по Dst-индексу. Для последнего известного префикса в слове по модельной мере находились вероятности суффиксов 0 или 1 в случае прогноза на одно значение и всех возможных комбинаций длины из 2 и 3 символов в случае прогноза на 2 и 3 значения соответственно. В качестве предсказания выбирался наиболее вероятный суффикс. Для моделирования использовались 4844 первых значений ряда, на остальных отсчетах осуществлялась верификация прогноза.

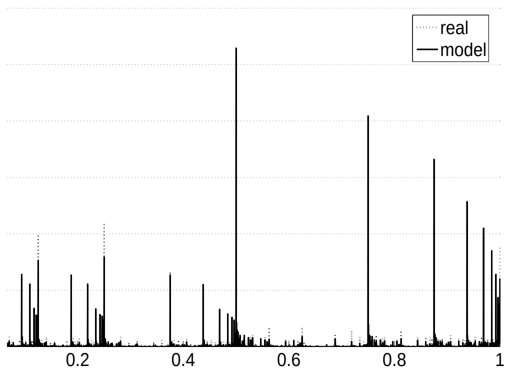

Рис. 6: Сравнение эмпирической и модельной мер Dst-индекса

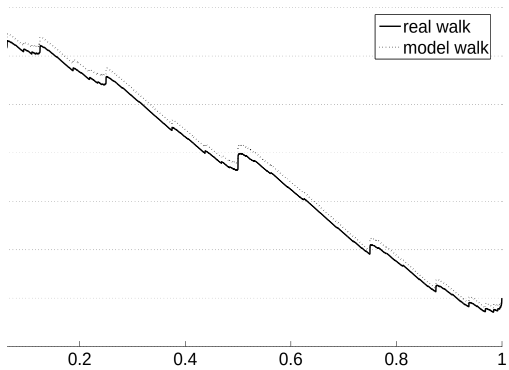

Рис. 7: Сравнение накопленных блужданий для эмпирической и модельной мер Dst-индекса

Для оценки качества прогноза использовались следующие три коэффициента, предложенные в работе [8]:

$r_1 = \frac{n_1}{n}$, где n_1 — количество *правильно* предсказанных суффиксов, n — общее количество прогнозов;

$r_2 = \frac{n_2}{n_3}$, где n_2 — количество *правильно* предсказанных суффиксов, если соответствующие реальные значения содержали единицу, n_3 — количество прогнозов слов, реально содержащих единицу;

$r_3 = \frac{n_4}{n_3}$, где n_4 — количество *частично* предсказанных суффиксов, если соответствующие реальные значения содержали единицу. Частичное предсказание успешно, если независимо от длины суффикса была предсказана хотя бы одна единица.

Таблица — Результаты прогноза

	Эмпирическая мера			Коллаж-метод			Метод моментов		
%	1 день	2 дня	3 дня	1 день	2 дня	3 дня	1 день	2 дня	3 дня
r_1	86.43	76.62	69.29	86.98	77.27	69.66	86.52/**75.83**	77.26/ **58.12**	69.66/ **43.73**
r_2	58.00	27.75	14.61	70.00	35.08	19.63	68.67/**67.24**	34.03/**34.89**	19.18/**19.47**
r_3	58.00	50.79	46.12	70.00	59.69	54.79	68.67/**67.24**	59.16/**55.78**	54.79/**48.44**

Таким образом, при вычислении исключались слова, состоящие только из нулей. Полученные результаты для интервалов 1-3 дня резюмированы в Таблице, где для сравнения приведены значения коэффициентов для эпигноза по эмпирической мере. В последнем блоке (жирным шрифтом) приведены результаты, полученные в [8]. Приведенные оценки показывают, что результаты вероятностного предсказания воспроизводимы и не слишком зависят от метода решения обратной задачи. Предсказание магнитных бурь на один день вполне успешно по сравнению со случайным инерционным прогнозом. Более того, успешность предсказания на 2 и 3 дня также может представлять практический интерес, если принять во внимание то обстоятельство, что речь идет о предсказании событий, априорная вероятность которых не превышает 30-40%.

Заключение. Марковское предсказание, основанное на решении обратной задачи IFS, эффективно в случаях, когда система, продуцирующая временной ряд, допускает разумное разбиение динамического диапазона отсчетов порогами на конечное число поддиапазонов. Эмпирическая мера, полученная методами символической динамики, должна быть стационарной и достаточно хорошо представлять хвосты распределения. Мультифрактальные свойства меры желательны для корректного использования мультикаскадов в качестве теоретической модели. Обобщение приведенного случая (один порог, два символа) на прогноз ситуации с двумя и более порогами очевидно.

В качестве возможного варианта можно делать упрощенный прогноз, опираясь только на эмпирическую меру. Однако его качество всегда хуже, поскольку в реальной выборке могут быть плохо представлены или вообще отсутствовать некоторые из возможных слов.

Приведенные результаты показывают, что коллективная линейная динамика сжимающих отображений с вероятностями может быть полезна для обоснованного вероятностного предсказания сложных природных процессов.

Авторы статьи выражают искреннюю благодарность Николаю Григорьевичу Макаренко за обсуждения и замечания, а также остальным сотрудникам Лаборатории Компьютерного Моделирования Института Математики за помощь в осуществлении задуманного.

Цитированная литература

1. **F. Halberg et al.** // Neuroendocrinology Letters. 2000. V .21. P .233-258.

2. **V. Pilipenko, N. Yagova, N. Romanova, J. Allen.** // Advances in Space Research. 2006. V. 37. Issue 6. P. 1192-1205.

3. **Sh. Watanabe, E. Sagawa, K. Ohtaka, H Shimazu.** // Earth Planet's Space. 2002. V. 54. P. 1263.

4. **M. Stepanova, E. Antonova, O. Troshichev.** // J. Atmosph. and Solar-Terrestrial Phys. 2005. V. 67. P. 1658.

5. **N. Srivastava.** // Ann. Geophys. 2005. V. 23. P. 2969.

6. **Н.А. Заболотная.** Москва, Гидрометиздат. 1977. 39 с.

7. **А.С. Амиантов, А.Н. Зайцев, В.И. Одинцов, В.Г. Петров.** Москва, СтройАрт. 2001. 52 с.

8. **J. A. Wanliss, V. V. Anh, Z. G. Yu, S. Watson.** //J.Geopys.Res. 2005. V. 110. P. AO814.

9. **М. И. Пудовкин, О. М. Распопов, Н. Т. Клейменова.** Ленинград, ЛГУ. 1976. 247 с.

10. **R. Schwenn.** // Living Reviews on Solar Physics. 2006. V. 3. № 2.

11. **Н. Г. Макаренко.** Известия РАН, сер. физ. 2006. Т. 70, С. 1408-1412.

12. **M. F. Barnsley and S. Demko.** // Proc. Roy. Soc. London. 1985. V. A399. P. 497-520.

13. **B. Forte and E.R. Vrscay.** 1998. /http://links.uwaterloo.ca/ person.ed.html

14. **Н. Г. Макаренко, Л. М. Каримова, С. А. Мухамеджанова, И. С. Князева.** // Прикладная Нелинейная Динамика. 2006. Т. 14. № 6. С. 3-20.

15. **C. S. Daw, C. E. A. Finney and E. R. Tracy.** // Review of Scientific Instruments. 2003. № 74, P. 916 – 930.

16. **S. M. Iacus, D. La Torre.** // math.ST/0302016

17. **K. Falconer.** John Wiley & Sons. 1997. P. 256.

18. **Р. М. Кроновер.** Москва, Постмаркет. 2000. С. 352.

19. **M. Barnsley.** Academic Press. 1993. P. 531.

20. **D. van Melkebeek and A. Bultheel.** Report TW 240, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. 1996.

21. **J. E. Hutchinson and L. Ruschendorf.** // Adv. Appl. Probability. 2000. V. 32. № 4. P. 925 – 947.

22. **D. Harte.** CRC Press. 2001. P. 247.

23. **M. F. Barnsley, V. Ervin, D. Hardin J. and Lancaster.** // Proc. of the National Academy of Science. 1986. № 83. P. 1975 – 1977.

24. http://swdcdb.kugi.kyoto-u.ac.jp/dstdir/.

25. **J. C. Hart.** PhD thesis, University of Illinois at Chicago. 1991.

26. MatLab 7.0.1 Help on Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox.

Поступила в редакцию 27.02.2007 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 52 – 57*

УДК 517.925

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРИОДОМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕНИ

А. А. Кульжумиева, Ж. А. Сартабанов

Актюбинский государственный университет им.К.Жубанова
030000 г.Актобе ул.Бр.Жубановых, 263 aiman-80@mail.ru

В работе при исследовании систем уравнений с многомерным временем, содержащих характеристики дифференциального оператора, входящего в рассматриваемые системы, и введении понятия переменного периода, зависящего от характеристик, расширен класс дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, порождающих квазипериодические системы обыкновенных дифференциальных уравнений на диагонали пространства временных переменных. Приводится новое представление периодических решений рассматриваемых линейных систем и предложен основанный на понятии переменного периода метод исследования периодических решений нелинейных систем уравнений многомерного времени.

1. Постановка задачи. Из теории дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$Dx = g(\tau, t, x) \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j}$ известно[1-3], что решение x с начальным данным $x|_{\tau=0} = u(t)$ наряду с независимыми временными переменными τ, $t = (t_1, ..., t_m)$ зависит от характеристик $\sigma = t - e\tau$, где $e = (1, ..., 1)$ – m- вектор, причем начальная функция $u(t)$ в решение входит, как функция переменной σ. Учет такой зависимости решения $x = x(\tau, t, \sigma, u(\sigma))$ имеет принципиальное значение в исследовании квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varphi(\tau, \xi), \tag{2}$$

которые можно получить из уравнения (1)[1] при $\tau = t_1 = ... = t_m$, когда вектор-функция $g(\tau, t, x)$ многопериодична по (τ, t) с вектор-периодом $(\theta, \omega) = (\theta, \omega_1, ..., \omega_m)$, где $\varphi(\tau, \xi) = g(\tau, e\tau, \xi)$.

Keywords: *periodic solution, variable period, multidimensional*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

Очевидно, что начальные функции $u(t)$ (θ, ω)-периодических решений x системы (1) принадлежат пространству U непрерывных ω-периодических по t, непрерывно дифференцируемых функций $\|u\| = sup|u(t)|$ при $t \in R^m$. При этом в случае справедливости теоремы существования и единственности для системы (1) можно убедиться, что решение $x = x(\tau, t, \sigma, u(\sigma))$ является также ω-периодическим как по t, так и по σ.

Далее заметим, что для установления существования решений $x = x(\tau, t, \sigma, u(\sigma))$, обращающихся при $t = e\tau$ в квазипериодические решения $\xi = \xi(\tau)$ системы (2), достаточно найти такие решения, которые являются θ-периодическими по первому аргументу τ, хотя переменная τ в решения входит и в составе $\sigma = t - e\tau$, причем последнее аннулируется при рассмотрении x на главной диагонали пространства независимых переменных. Следует отметить, что такое обстоятельство дел избавляет нас от рассмотрения задачи о разрешимости функционально-разностных уравнений в пространстве U [4].

В дальнейшем предположим выполненным условие

$$g(\tau + \theta, t + k\omega, x) = g(\tau, t, x) \in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,x}(R \times R^m \times R^m) \tag{3}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, ..., k_m) \in Z^m$.

Условие (3) является достаточным для существования и единственности решений системы (1) с начальными данными из U, причем решения x принадлежат классу n-вектор-функций, обладающих свойствами

$$x(\tau, t + k\omega, \sigma + k\omega) = x(\tau, t, \sigma) \in C^{(1,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R \times R^m \times R^m).$$

Класс V функций $x(\tau, t, \sigma)$ назовем классом функций с многомерным временем (τ, t), причем в случае θ-периодичности по τ этот класс при $t = e\tau$ образует класс квазипериодических по τ функций с частотным базисом $\nu_0 = \frac{1}{\theta}, \nu_1 = \frac{1}{\omega_1}, ..., \nu_m = \frac{1}{\omega_m}$. Такое положение позволяет нам вместо системы (1) рассмотреть систему дифференциальных уравнений с многомерным временем

$$Dx = f(\tau, t, \sigma, x), \tag{4}$$

где правая часть удовлетворяет условию

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega, x) = f(\tau, t, \sigma, x) \in C^{(0,1,1,1)}_{\tau,t,\sigma,x}(R \times R^m \times R^m \times R^n) \quad \forall k \in Z^m, \tag{5}$$

и реализовать идею работы [1] по исследованию квазипериодических решений системы (2) с правой частью $\varphi(\tau, \xi) = f(\tau, e\tau, 0, \xi)$.

Таким образом, расширен класс уравнений с дифференциальным оператором D, используемых для изучения квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, стало возможным изучение многопериодических решений систем вида

$$Dx = f(\sigma, x)$$

с n-вектор-функцией

$$f(\sigma + k\omega, x) = f(\sigma, x) \in C^{(1,1)}_{\sigma,x}(R^m \times R^n) \quad \forall k \in Z^m,$$

которая на главной диагонали пространства (τ, t) порождает автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этом случае естественно ожидать, что период θ искомого решения $x(\tau, t, \sigma)$ по τ зависит от $\sigma = t - e\tau$. Например, скалярное уравнение

$$Dx = (\sqrt{2} + sin\sigma)\sqrt{5 - cos\sigma - x^2}$$

допускает решение $x(\tau,\sigma) = \sqrt{5 - cos\sigma} sin[\tau(\sqrt{2} + sin\sigma)]$, период которого по аргументу τ равен $\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{2}+sin\sigma}$.

В связи с этим для уравнений вида (4) расширим понятие периода θ по τ, положив его зависящим от $\sigma = t - e\tau$. С этой целью функцию $\theta(\sigma)$ положительную, ω-периодическую и непрерывно дифференцируемую назовем периодом функции $x(\tau,t,\sigma)$ по τ, если выполнено условие $x(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) = x(\tau,t,\sigma)$ для всех $(\tau,t,\sigma) \in R \times R^m \times R^m$.

Заметим [5], что задача о нахождении периодических с переменным периодом по τ решений возникает при распространении идеи метода Ляпунова для системы (4).

Таким образом, в условии (5) период θ будем считать зависящим от σ и ставится задача о существовании $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических по (τ,t,σ) решений этой системы.

2. Условие периодичности систем многомерного времени с переменным периодом. Для решения этой задачи докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы при условии (5) решение $x(\tau,t,\sigma)$ системы (4) с начальным условием $x|_{\tau=0} = u(t) \in U$ было $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическим по (τ,t,σ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$x(\theta(\sigma), \sigma, \sigma) = x(0, \sigma, \sigma). \tag{6}$$

Для доказательства теоремы наряду с решением $x(\tau,t,\sigma)$ рассмотрим функцию $z(\tau,t,\sigma) = z(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)$, которая также удовлетворяет системе (4). Очевидно, что при $\tau = 0$ эти решения в силу (6) удовлетворяют одному и тому же начальному условию. Следовательно, они совпадают всюду. Обратно, из определения $\theta(\sigma)$-периодичности $x(\tau,t,\sigma)$ по τ следует соотношение (6). Таким образом, условие $\theta(\sigma)$-периодичности решения $x(\tau,t,\sigma)$ доказано. Периодичность этого решения t и σ с периодом ω следует из аналогичного свойства вектор-функции $f(\tau,t,\sigma,x)$ и ω-периодичности начальной функции $u(\sigma)$.

Эта теорема обобщает результат работы [3] на случай систем с переменным периодом.

3. Линейные системы многомерного времени. Рассмотрим систему

$$Dx = P(\tau,t,\sigma)x \tag{7}$$

с $(n \times n)$-матрицей $P(\tau,t,\sigma)$, удовлетворяющей условию

$$P(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega) = P(\tau,t,\sigma) \in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R \times R^m \times R^m) \quad \forall k \in Z^m. \tag{8}$$

При условии (8) система имеет матрицант $X(\tau,t,\sigma)$, обладающий свойством ω-периодичности по t и σ, удовлетворяющий условию

$$X(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) = X(\tau,t,\sigma)X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma). \tag{9}$$

Предположим, что система (7) не имеет $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических решений, кроме тривиального. Этот случай называется некритическим. Тогда имеем $X(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) \neq X(\tau,t,\sigma)$ и существует матрица $Y(\tau,t,\sigma) = [X^{-1}(\tau + \theta(\sigma),t,\sigma) - X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Y(\tau,t,\sigma)$ является ω-периодическим по t и σ матричным решением системы (7), причем в силу соотношения (9) имеем

$$Y(\tau + \theta(\sigma), t, \sigma) = Y(\tau,t,\sigma)X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma). \tag{10}$$

В критическом случае нетривиальные $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодические решения определяются $x(\tau,t,\sigma) = X(\tau,t,\sigma)u(\sigma)$, где начальная функция $u(t) \in U$ в силу (6) удовлетворяет условию периодичности

$$[X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma)-E]u(\sigma)=0.$$

Далее исследуем $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодические решения системы многомерного времени

$$Dx=P(\tau,t,\sigma)x+f(\tau,t,\sigma), \tag{11}$$

где n-вектор-функция $f(\tau,t,\sigma)$ обладает свойством

$$f(\tau+\theta(\sigma),t+k\omega,\sigma+k\omega)=f(\tau,t,\sigma)\in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R\times R^m\times R^m)\quad \forall k\in Z^m. \tag{12}$$

При условиях (8) и (12) общее решение системы (11) можно представить в виде

$$x(\tau,t,\sigma)=X(\tau,t,\sigma)u(\sigma)+\int\limits_{(0,\sigma)}^{(\tau,t)}X(\tau,t,\sigma)X^{-1}(\alpha,\beta,\sigma)f(\alpha,\beta,\sigma)ds, \tag{13}$$

где $u(t)\in U$, а интегрирование проводится вдоль отрезка $\alpha=s$, $\beta=\sigma+es$ от точки $(0,\sigma)$ до точки (τ,t).

Заметим, что интегрирование в соотношении (13) реализуется через определенный интеграл, где принимают участие все временные переменные. Но введенное обозначение интеграла удобно при проверке периодичности интеграла по каждой из этих переменных.

Тогда в силу теоремы 1 из представления (13) условие $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодичности решений системы (11) имеет вид

$$[X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma)-E]u(\sigma)=-\int\limits_{(0,\sigma)}^{(\theta(\sigma),\sigma)}X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma)X^{-1}(\alpha,\beta,\sigma)f(\beta,\beta,\sigma)ds. \tag{14}$$

Далее, решив систему (14) в пространстве U и подставив найденные решения в общее решение (13), получим искомые периодические решения.

В некритическом случае из (14) вектор-функция $u(\sigma)$ определяется единственным образом. Тогда с учетом того, что $Y(\tau,t,\sigma)=X(\tau,t,\sigma)[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),\sigma,\sigma)-E]^{-1}$, из (13) простым преобразованием получим представление периодического решения в виде

$$x^*(\tau,t,\sigma)=[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}X^{-1}(\alpha,\beta,\sigma)f(\alpha,\beta,\sigma)ds. \tag{15}$$

Заметим, что соотношениями (9) и (10) легко проверить периодичность решения (15).

Теорема 2. *При условиях (8) и (12) в некритическом случае линейная однородная система (11) допускает единственное $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическое решение, которое можно представить в виде (15).*

4. Нелинейная система многомерного времени. Для некритического случая рассмотрим вопрос о существовании $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических решений системы

$$Dx=P(\tau,t,\sigma)x+f(\tau,t,\sigma,x), \tag{16}$$

где n-вектор-функция $f(\tau,t,\sigma,x)$ удовлетворяет условию

$$f(\tau+\theta(\sigma),t+k\omega,\sigma+k\omega,x)=f(\tau,t,\sigma,x)\in C^{(0,2,2,2)}_{\tau,t,\sigma,x}(R\times R^m\times R^m\times R^n)\quad \forall k\in Z^m. \tag{17}$$

Введем оператор

$$(Qx)(\tau,t,\sigma)=[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}X^{-1}(\alpha,\beta,\sigma)f(\alpha,\beta,\sigma,x(\alpha,\beta,\sigma))ds, \qquad (18)$$

который переводит пространство W непрерывных в $R\times R^m\times R^m$ $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодических n-вектор-функций $x(\tau,t,\sigma)$ в себя. Действительно, на основе (9), (10) и замены переменной под интегралом, имеем периодичность

$$(Qx)(\tau+\theta(\sigma),t+k\omega,\sigma+k\omega)=$$

$$=[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}X(\theta(\sigma),\sigma,\sigma)\int\limits_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}X^{-1}(\alpha-\theta(\sigma),\beta-k\omega,\sigma)\times$$

$$\times f(\alpha-\theta(\sigma),\beta-k\omega,\sigma,x(\alpha-\theta(\sigma),\beta-k\omega,\sigma))ds=(Qx)(\tau,t,\sigma).$$

Непрерывность (18) очевидна.

Оператор

$$(Q_0f)(\tau,t,\sigma)=[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,t)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}X^{-1}(\alpha,\beta,\sigma)f(\alpha,\beta,\sigma)ds$$

ограничен в W. Следовательно, положим $\|Q_0f\|\le q\|f\|$, где $\|f\|=sup|f(\tau,t,\sigma)|$ при $(\tau,t,\sigma)\in R\times R^m\times R^m$. Тогда для $x(\tau,t,\sigma)$, имеем $\|Qx-Qz\|\le ql\|x-z\|$, где $l>0$ – постоянная Липшица вектор-функции f по x. При $ql<1$ оператор Q в W имеет единственную неподвижную точку $x^*(\tau,t,\sigma)=(Qx^*)(\tau,t,\sigma)$.

При условии (17) нетрудно доказать дифференцируемость $x^*(\tau,t,\sigma)$ по t_j, причем $z(\tau,t,\sigma)=\frac{\partial x^*}{\partial t_j}$ определяется как непрерывное $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическое решение операторного уравнения

$$z(\tau,t,\sigma)=(Q_0[\tfrac{\partial P}{\partial t_j}x^*+\tfrac{\partial f}{\partial t_j}+\tfrac{\partial f}{\partial x}z])(\tau,t,\sigma).$$

Таким образом, доказано нижеследующее утверждение.

Теорема 3. *При условиях (8) и (17) в случае $ql<1$ некритическая система (16) допускает единственное $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическое решение.*

В заключение отметим, что некоторые результаты, связанные с существованием периодических с переменным периодом решений таких систем, получены в [6].

Цитированная литература

1. **Харасахал В.Х.** Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1970.

2. **Умбетжанов Д.У.** Почти многопериодические решения в частных производных. Алма-Ата, 1979.

3. **Сартабанов Ж.А.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2004. №3. С. 44 – 48.

4. **Сартабанов Ж.А.** // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1985. №5. С. 34 – 40.

5. **Омарова Б.К., Сартабанов Ж.А.** // Материалы Межд. научно-теоретической конференции "Роль физико-математических наук в современном образовательном пространстве". Атырау, 2005. С. 123 – 127.

6. **Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.** // Поиск. Сер. естественно-технических наук. 2005. №2. С. 194 – 200.

Поступила в редакцию 27.09.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 58 – 65*

УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДОЗВУКОВОМ СПУТНОМ ПОТОКЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВХОДНЫХ ЧИСЕЛ МАХА

А. П. Макашева

Институт математики Министерства образования и науки
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

Представлены результаты численного исследования пространственных сверхзвуковых струй, распространяющихся в спутном дозвуковом потоке. Численное решение осредненных параболизованных уравнений Навье-Стокса проводилось на основе разработанной схемы, которая позволяет единым образом проводить расчеты в сверхзвуковых и дозвуковых областях течений. Исследовано течение в струях с числами Маха входного спутного потока в диапазоне $0,05 \leq M_\infty \leq 7$ и показано его влияние на структуру слоя смешения. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными и численными данными других авторов.

На данный момент одной из важных прикладных проблем является изучение сверхзвуковых струй в спутном потоке. Они имеют широкое приложение в реактивных двигателях и ракетной технике для конструкции летательных аппаратов и газодинамического регулирования вектора тяги маршевых двигателей. До недавнего времени эти исследования проводились, в основном, на осесимметричных струях, тогда как имеющиеся немногочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что картина течения недорасширенных трехмерных струй (ударно-волновая структура, слой смешения) существенно отличается от того, что наблюдается в круглых струях. Проблема становится еще более актуальней в связи с широким привлечением численных методов для устранения основных проблем, связанных со сращиванием решения в дозвуковых и сверхзвуковых областях и устранения осцилляций в решении.

Постановка задачи. Рассматривается истечение системы пространственных сверхзвуковых турбулентных струй из круглого сопла в спутный сверхзвуковой (дозвуковой) поток. Во всей области течения газ считается совершенным, вязким, а режим течения — турбулентным. Для описания рассматриваемого течения используются параболизованные уравнения Навье-Стокса (ПУНС)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \left(\vec{F} - \vec{F}_v\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\vec{G} - \vec{G}_v\right)}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

Keywords: *Mach number, supersonic jet, subsonic flow, Mach-Disk, pressure*
2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

здесь векторы $\vec{E}$, $\vec{F}$, $\vec{G}$ включают невязкие члены:

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u\upsilon \\ \rho uw \\ (E_t + p)\ u \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \rho \upsilon \\ \rho u\upsilon \\ \rho \upsilon^2 + p \\ \rho \upsilon w \\ (E_t + p)\ \upsilon \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho \upsilon w \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)\, w \end{pmatrix},$$

а $\vec{F}_v$, $\vec{G}_v$ — вязкие члены:

$$\vec{F}_v = [0\,, \quad \tau_{xy}\,,\ \tau_{yy}\,,\ \tau_{yz}\,, \quad u\tau_{xy} + \upsilon\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y]^T\,,$$

$$\vec{G}_v = [0\,, \quad \tau_{xz}\,,\ \tau_{yz}\,,\ \tau_{zz}, \quad u\tau_{xz} + \upsilon\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z]^T\,.$$

Давление и температура могут быть определены из следующих выражений:

$$p = (\gamma - 1)\ \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho \upsilon^2 + \rho w^2\right)\right]\,, \qquad c_v = \frac{1}{\gamma\,(\gamma - 1)\, M_a^2}\,,$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v}\right)\ \left[E_t - \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \rho \upsilon^2 + \rho w^2\right)\right]\,.$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\,(2u_y - w_z)\,, \tau_{zz} = \frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\,(2w_z - \upsilon_y)\,, \tau_{xy} = \frac{\mu_t}{Re}u_y, \tau_{xz} = \frac{\mu_t}{Re}u_z, \tau_{yz} = \frac{\mu_t}{Re}\,(\upsilon_z + w_y)\,,$$

$$q_y = -\frac{k_t}{(\gamma - 1)\, M_a^2 Pr\, Re} T_y, \quad q_z = -\frac{k_t}{(\gamma - 1)\, M_a^2 Pr\, Re} T_z.$$

Здесь приняты следующие обозначения: ρ — плотность; u, υ, w — продольная и поперечные составляющие скорости; E_t — полная энергия; p — давление; T — температура; $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ отношение удельных теплоемкостей, c_p, c_v — теплоемкость при постоянном давлении и объеме, M_a — число Маха струи;μ_t — коэффициент турбулентной вязкости, k_t — коэффициент теплопроводности, Re — число Рейнольдса; Pr — число Прандтля.

Система уравнений (1) записана в безразмерной консервативной форме. В качестве безразмерных параметров приняты характеристики на срезе сопла ρ_0, u_0, T_0, при этом для полной энергии $E_t \sim \rho_0 u_0^2$, давления $p \sim \rho_0 u_0^2$.

В системе (1) коэффициент турбулентной вязкости определяется с помощью известной алгебраической модели Болдуина - Ломакса.

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид
в начальном сечении при $x = 0$

— в струе $u = 1$, $T = 1$, $\rho = 1$, $\upsilon = w = 0$;
— в потоке $T = 1$, $u = \frac{M_a}{M_\infty}\sqrt{T}$, $p = \frac{1}{\gamma n M_a^2}$, $\upsilon = w = 0$;

при $x > 0$ задавались условия симметрии

$$\upsilon = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0\,, L,$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0\,, \quad z = 0\,, L\,.$$

Метод решения. В исходных уравнениях движения градиент давления в продольном направлении создает возможность распространения возмущений вверх по потоку через дозвуковые части поля течения. Вследствие этого маршевый по пространственной координате метод становится плохо обусловленным, что во многих случаях приводит к расходящимся решениям. Существуют различные способы устранения экспоненциально нарастающего решения. Одним из них является метод учета продольного градиента давления, предложенный Виньероном и др. [1]. В этом подходе в дозвуковой вязкой зоне часть продольного градиента давления $\omega\ (\partial p/\partial x)$ в уравнении сохраняется, а остальная — $(1-\omega)\ (\partial p/\partial x)$ либо опускается, либо рассчитывается на явном слое при помощи разностей назад. Согласно этому методу вектор потока $\vec{E}$ расщепляется на две части

$$\vec{E} = \vec{E}^{*} + \vec{E}^{p},$$

$$\vec{E}^{*} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \omega p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (E_t + p)\, u \end{pmatrix}, \quad \vec{E}^{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\omega)\, p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Как видно из (2), в уравнении движения по продольной координате x в качестве множителя перед градиентом давления в продольном направлении имеется параметр ω , выбор которого будет указан ниже. Таким образом, система (1) с учетом (2) приводится к виду

$$\frac{\partial \vec{E}^{*}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}^{p}}{\partial x} + \frac{\partial \left(\vec{F} - \vec{F}_v\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\vec{G} - \vec{G}_v\right)}{\partial z} = 0\ . \tag{3}$$

Система (3) решается численно с помощью двухэтапной схемы расщепления, в которой на первом этапе предполагается, что перенос потоков осуществляется конвекцией, во втором — диффузией.

1 этап. Вычисление промежуточных величин потоков

$$\frac{\vec{E}^{*i} - \vec{E}^{*n}}{\Delta x} = -\frac{\partial \vec{F}^{n}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{G}^{n}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}^{p}}{\partial x}. \tag{4}$$

2 этап. Расчет окончательных значений искомых величин

$$\frac{A^{n}\ \left(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n}\right)}{\Delta x} = \frac{\partial \vec{F}_v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}_v^{n+1}}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\vec{U} = [\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho w,\ E_t]^T$, $A = \frac{\partial \vec{E}^{*}}{\partial \vec{U}}$ — матрица Якоби, приведенная в работе Андерсона [1]. Численное решение системы уравнений (4) и (5) производится с помощью методики, приведенной в работе [2].

Анализ результатов. Численный расчет проводился при следующих значениях характерных параметров: $\mathrm{Pr} = 0,71, \quad 1,35 \le M_a \le 3, \quad 0,05 \le M_\infty \le 7, \quad 1 \le n \le 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$. Использовалась сетка, содержащая в поперечных направлениях $75x75$ узлов, с шагами $\Delta y = \Delta z = 0,15$, шаг по маршевой координате варьировался в пределах $\Delta x = 0,0035 \div 0,015$.

Исследуются влияния числа Маха струи и потока на картину течения. В работе Авдуевского [3] экспериментально установлены особенности истечения системы сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток для $M_\infty \le 2$ и $M_\infty > 2$. Одной из особенностей является то, что структура сверхзвуковой струи для $M_\infty \le 2$ аналогична структуре затопленной, т.е. граница струи имеет бочкообразную форму и около оси струи на участке торможения появляется прямой скачок уплотнения, получивший название диска Маха, за которым скорость течения становится дозвуковой. На рисунках 1-5 приведены численные эксперименты влияния числа Маха потока на картину взаимодействия системы струй. Из графиков изобар и его 3-х мерного вида в сечениях x ($M_a = 3$, $n = 10$) для $M_\infty = 2$ (рис. 1A) и $M_\infty = 7$ (рис. 1B) видно, что скорость распространения ударных волн при меньших числах Маха потока существенно больше. Так например, при $M_\infty = 2$ ударная волна в сечении $x = 12.7$ (рис. 1A,в) достигает оси компоновки, в то время как при $M_\infty = 7$ (рисунок 1B,в) она по-прежнему распространяется в сторону спутного потока.

Численные эксперименты показывают, что при $M_\infty = 2$ граница струи имеет бочкообразную форму, что отчетливо видно из линии изомах (рис. 2а) и изолинии завихренности (рис. 2б). Для $M_\infty = 7$, как следует из рисунка 3, граница струи практически линейно возрастает с увеличением расстояния от среза сопла.

Следует отметить, что в численном эксперименте диск Маха для $M_\infty = 2$ не наблюдается, скорость потока во всем поле течения является сверхзвуковой. Дальнейшее уменьшение входных чисел Маха струи и потока привело к тому, что диск Маха обнаруживается при следующих параметрах: $M_a = 1.35, \quad M_\infty = 0.05, \quad n = 2, \quad T_0 = T_\infty = 1$(рис. 4).

Ниже представлены результаты истечения системы сверхзвуковых струй в спутный дозвуковой поток. На рис. 5 ($M_a = 3$, $M_\infty = 0,05$, $n = 1$) приведены результаты сравнения осевой скорости, рассчитанной по методу Уорминга-Катлера-Ломакса (кривая 1), по методу глобальной итерации (кривая 2) с экспериментальными данными Жесткова и др. [4] ($\circ$ - $m = 0$, $\quad \Delta$ - $m = 0.081$, $\quad +$ - $m = 0.204$, $\quad \bullet$ - $m = 0.316$, здесь $m = \frac{u_\infty}{u_0}$). Видно, что метод глобальной итерации не вносит изменений в распределение скорости.

По экспериментальным ($\circ$ — эксперимент [4]) и численным результатам (— - расчет) видно, что при уменьшении входного числа Маха струи ($M_a = 1,5$, $M_\infty = 0,05$, $n = 1$) на основном участке происходит резкое падение осевой продольной составляющей скорости, которое объясняется интенсивным смешением струи с потоком (рис. 6а). Результаты расчетов показывают, что с уменьшением M_a дальнобойность струи убывает.

Также было проведено сравнение осевой скорости с экспериментальными данными [5] для $M_a = 3, \quad M_\infty = 0.256, \quad n = 1, \quad T_0 = T_\infty = 1$ (рис. 7б). Получено удовлетворительное согласование между расчетом и экспериментом ($\circ$ - $m = 0$, $\quad \Delta$ - $m = 0.081$, $\quad +$ - $m = 0.204$, $\quad \bullet$ - $m = 0.316$, здесь $m = \frac{u_\infty}{u_0}$).

Цитированная литература

1. **Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М. 1990. Т. 1, 2.

2. **Найманова А.Ж., Калтаев А.Ж.** // Математическое моделирование. РАН. 2002. Т. 4, № 2. С. 105 – 116.

3. **Авдуевский В.С., Иванов А.В., Карпман И.М., Трасковский В.Д., Юделович М.Я.** // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 3. С. 15 – 29.

4. **Абрамович Г.Н.** Теория турбулентных струй. М. 1984.

5. **Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. М. 1969.

Поступила в редакцию 11.07.2007г.

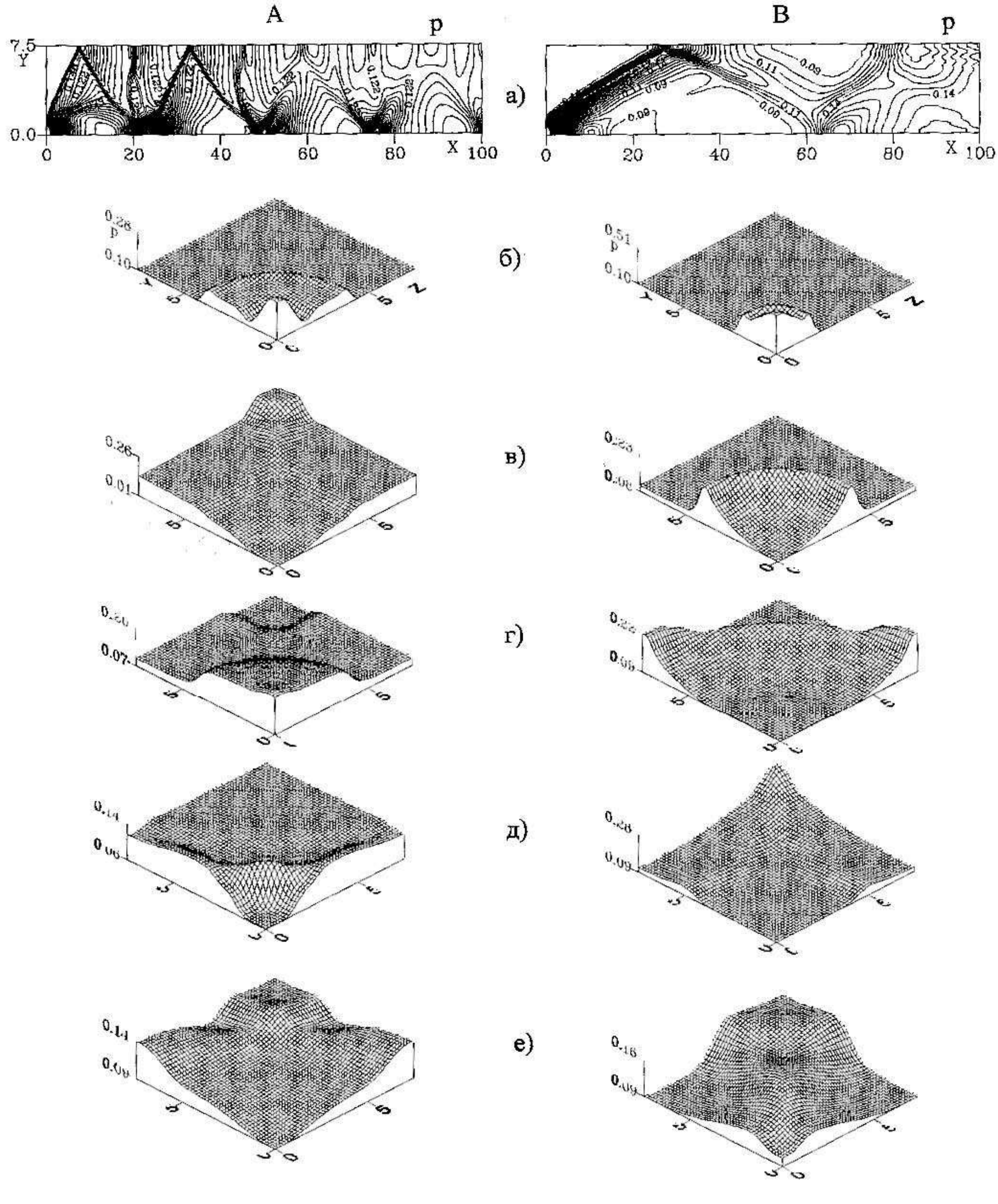

Рис. 1: а) изобары в плоскости хоу; профили давления в сечениях: б) $x = 3.2$, в) 12.7, г) 28.7, д) 44.6, е) 60.5;

А. $M_\infty = 2$; В. $M_\infty = 7$

$M_a = 3, \quad n = 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$

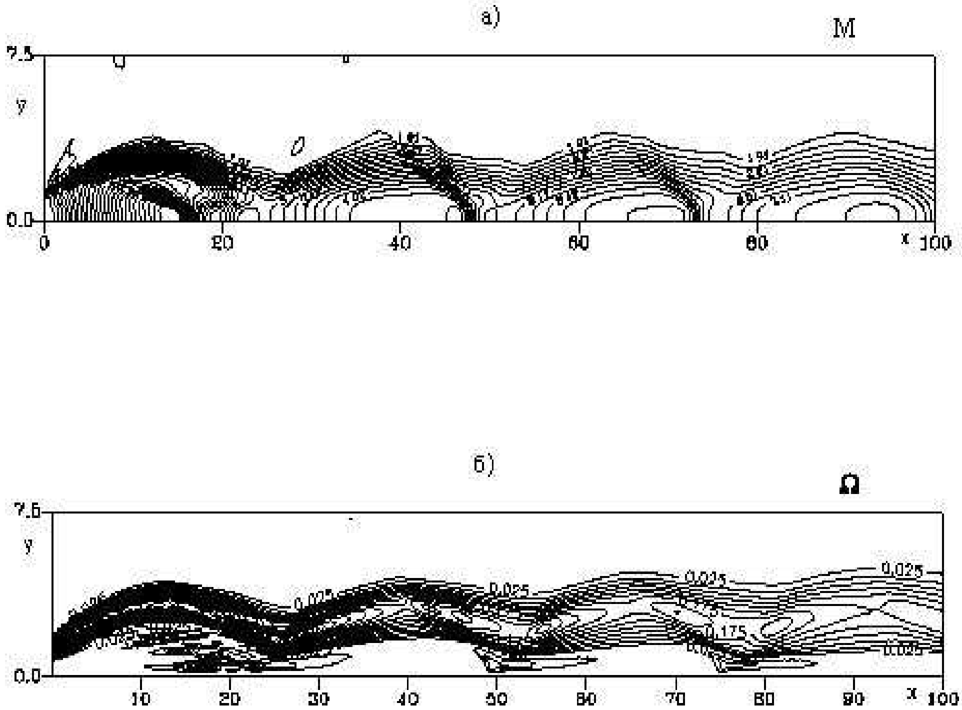

Рис. 2: а) изомахи; б) изолинии завихренности в плоскости XOY
$M_a = 3, M_\infty = 2, \quad n = 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$

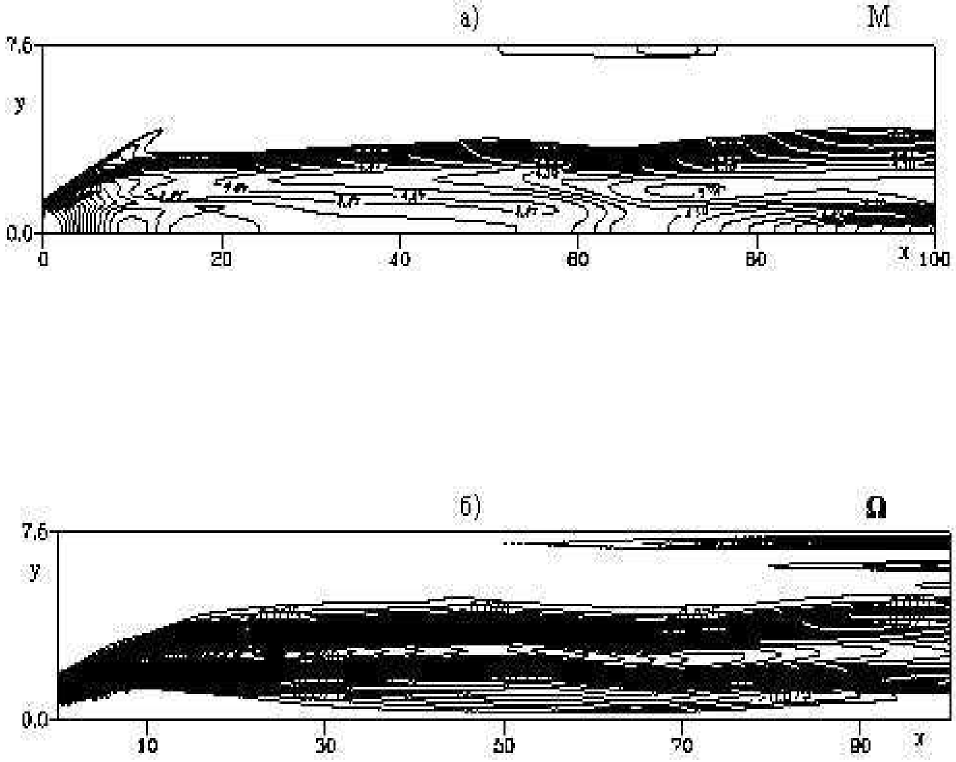

Рис. 3: а) изомахи; б) изолинии завихренности в плоскости XOY
$M_a = 3, M_\infty = 7, \quad n = 10, \quad T_0 = T_\infty = 1$

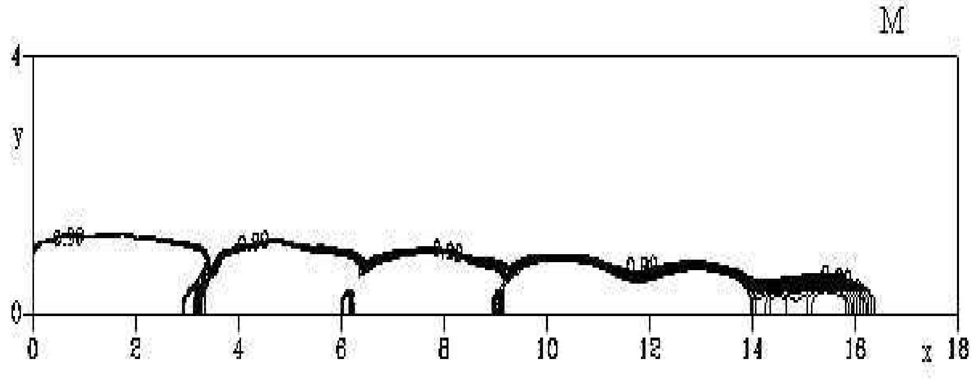

Рис. 4: Изомахи в плоскости XOY
$M_a = 1.35, M_\infty = 0.05, \quad n = 2, \quad T_0 = T_\infty = 1$

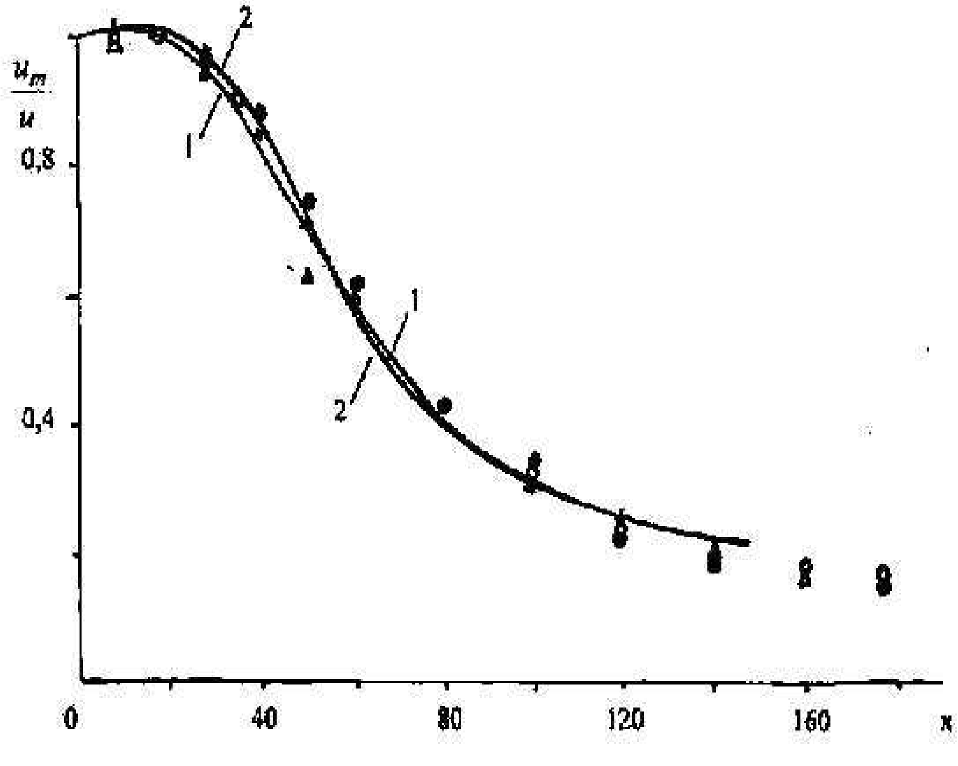

Рис. 5: Распределение осевой продольной составляющей скорости
1 - по методу Уорминга-Катлера-Ломакса, 2 - глобальной итерации
$\circ$ - $m = 0$, Δ - $m = 0.081$, $+$ - $m = 0.204$, $\bullet$ - $m = 0.316$,
$M_a = 3, M_\infty = 0.05, \quad n = 1, \quad T_0 = T_\infty = 1$

Распределение осевой продольной составляющей скорости

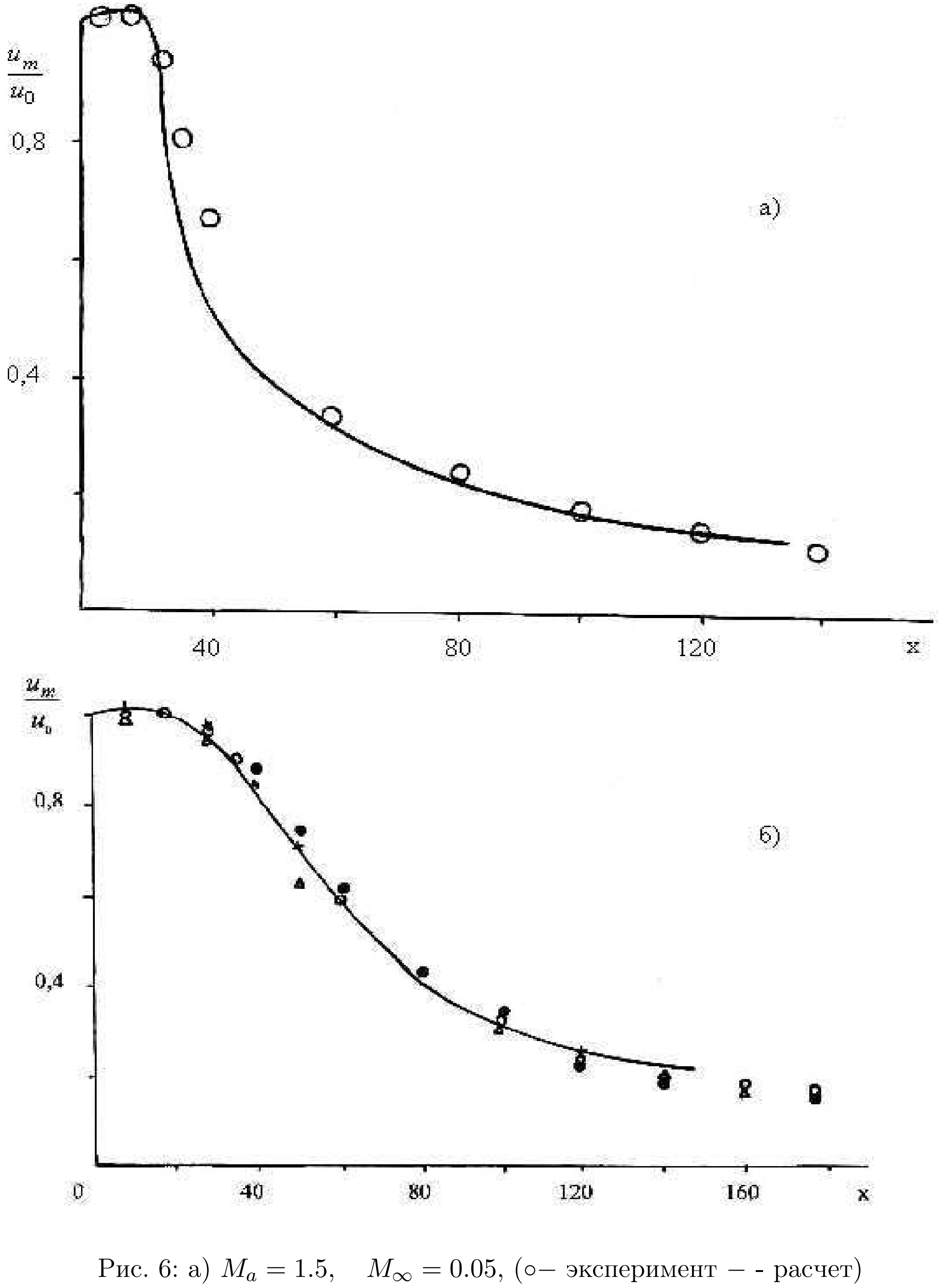

Рис. 6: а) $M_a = 1.5$, $M_\infty = 0.05$, ($\circ$— эксперимент — - расчет)
б) $M_a = 3$, $M_\infty = 0.258$, $\circ$ - $m = 0$, Δ - $m = 0.081$, $+$ - $m = 0.204$, $\bullet$ - $m = 0.316$,
$n = 1$, $T_0 = T_\infty = 1$

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 66 – 71*

УДК УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ УПРОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

В.Т.Мураталиева

Жалалабатский Государственный Университет КР
г.Жалалабат ул. Женижок,7 e-mail: vmuratalieva70@mail.ru}

С помощью метода дополнительного аргумента доказано локальное существование ограниченного решения задачи Коши для квазилинейного одномерного уравнения Больцмана с нелинейным интегральным членом.

В начале девяностых годов прошлого столетия академик НАН Кыргызской Республики М.И. Иманалиев предложил новый метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка [1], который называется методом дополнительного аргумента. С помощью этого метода уравнения с частными производными преобразуются к интегральным уравнениям, где количество независимых переменных на одну больше, однако структура уравнений достаточно простая и позволяет досконально и безусловно вывести ограничения на исходные данные, при которых исходное уравнение имеет решение. Этим метод дополнительного аргумента существенно отличается от классического метода характеристик, в котором для нахождения решения в исходных переменных необходимо выразить характеристические переменные через исходные. Для квазилинейных уравнений это, как правило, сделать не удается, и возможность такого возврата к исходным переменным принимается в качестве условия.

Рассмотрим возможность применения метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости упрощенного уравнения Больцмана с нелинейным интегральным членом [2,3]:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} + a(v,t,f)\frac{\partial f(v,t)}{\partial v} + \nu(v,t)f(v,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(v,v')\nu(v',t)f(v',t)(1-f(v',t))dv'. \qquad (1)$$

Для этого уравнения задано начальное условие

$$f(v,0) = f_0(v), -\infty < v < \infty. \qquad (2)$$

Keywords: *one-dimensional Boltzmann equation, nonlinear integral term*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

Условие(2) является следствием системы нелинейных кинетических уравнений Больцмана [4] при некоторых упрощениях:

$$\partial_t f_1 + v_1(k)\cdot\nabla_x f_1 - \left(\frac{q}{\bar{h}}\right) E\cdot\nabla_x f_1 = Q_1(f_1) + R_1(f_1,f_2),$$

$$\partial_t f_2 + v_2(k)\cdot\nabla_x f_2 - \left(\frac{q}{\bar{h}}\right) E\cdot\nabla_x f_2 = Q_2(f_2) + R_2(f_1,f_2),$$

$x\in R^d,\ \ k\in R^3,\ \ t\geq 0,\ \ d=1,2,3;\ \ f_1,f_2-$неизвестные функции, $E(x,t=\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r})\int\limits_{R^d}\frac{x-y}{|x-y|^d}\rho(y,t)dy,$

$\rho(x,t)=q\left(N(x)-\int\limits_B \frac{1}{4\pi^3}f_1(x,k,t)dk+\int\limits_B\frac{1}{4\pi^3}f_2(x,k,t)dk\right),$

$$Q_i(f)=\int\limits_B[s_i(x,k',k)f(k')(1-f(k))-s_i(x,k,k')f(k)(1-f(k'))]dk',$$

$$R_1(f_1,f_2)=\int\limits_B[g(x,k',k)(1-f_1(k))(1-f_2(k'))-r(x,k,k')f_1(k)f_2(k')]dk',$$

$$R_2(f_1,f_2)=\int\limits_B[g(x,k,k')(1-f_(k'))(1-f_2(k))-r(x,k',k)f_1(k')f_2(k)]dk'.$$

Основные положения метода дополнительного аргумента, используемые в данной работе, содержатся в статьях [5,6,7]. Он не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их. Применение этого метода позволяет во многих случаях более эффективно и конкретно определять условия разрешимости уравнений первого порядка.

В данной статье определяются условия существования единственного ограниченного решения задачи Коши (1) – (2) на всей оси. В [8] были определены условия существования решения аналогичной задачи для уравнения с линейным интегральным членом. Запишем расширенную характеристическую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\eta(v,t,s)}{ds}=a(\eta(v,t,s),s,w(v,t,s)),\\ \frac{dw(v,t,s)}{ds}=-\nu(\eta(v,t,s),s)w(v,t,s)+\\ +\int\limits_{-\infty}^{\infty}k((\eta(v,t,s)),v')\nu(v',t)w(v',s,s)(1-w(v',s,s))dv' \end{cases}\tag{3}$$

с условиями Коши

$$\eta\mid_{s=t}=v,\tag{4}$$

$$w(v,t,0)=f_0(\eta(v,t,0)).\tag{5}$$

Решая (3), с учетом (5) получаем, что система дифференциальных уравнений (3) с данными Коши (4) – (5) приводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \eta(v,t,s)=v-\int\limits_s^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho)),\\ w(v,t,s)=e^{-\int\limits_0^s\nu(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho}\left(f_0\left(v-\int\limits_0^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))d\rho\right)+\right.\\ \left.+\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\infty}k((\eta(v,t,\rho)),v')\nu(v',\rho)w(v',\rho,\rho)(1-w(v',\rho,\rho))e^{\int\limits_0^\rho\nu(\eta(v,t,\xi),\xi)d\xi}dv'd\rho\right). \end{cases}\tag{6}$$

Дифференцируя (6) по t и v, получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}=-\int\limits_s^t\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\frac{\partial a}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right)d\rho, \tag{7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial w}{\partial v}=-e^{-\int\limits_0^s\nu(\eta,\rho)d\rho}\int\limits_0^s\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)d\rho\times\left[f_0\left(v-\int\limits_0^t a(\eta,\rho,w)d\rho\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\eta,v')\nu(v',\rho)w(v',\rho,\rho)(1-w(v',\rho,\rho))e^{\int\limits_0^\rho\nu(\eta,\xi)d\xi}d\rho dv'\right]-$$

$$-\,e^{-\int\limits_0^s\nu(\eta,\rho)d\rho}f_0'\left(v-\int\limits_0^t a(\eta,\rho,w)d\rho\right)\left[\int\limits_s^t\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\frac{\partial a}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial w}{\partial v}\right)\right)d\rho\right]+ \tag{8}$$

$$+\,e^{-\int\limits_0^s\nu(\eta,\rho)d\rho}\int\limits_0^s\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(v',\rho)w(v',\rho,\rho)(1-w(v',\rho,\rho))e^{\int\limits_0^\rho\nu(\eta,\xi)d\xi}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial k}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+k(\eta,v')\int\limits_0^\rho\frac{\partial v}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)d\xi\right)dv'd\rho.$$

Обозначим

$$N_0=\sup_{\theta_T}\{|f_0|:-\infty<v<\infty\},\quad N_\nu=\sup_{\theta_T}\{|v|:-\infty<v<\infty\},$$

$$N_\nu'=\sup_{\theta_T}\left\{\left|\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right|:-\infty<v<\infty\right\},\quad N_0'=\max\left\{1,\sup_{\theta_T}\{|f_0'|:-\infty<v<\infty\}\right\},$$

$$C_w=\sup_{\theta_T}\left\{|w(v',\rho,\rho)|:-\infty<v'<\infty,0\le\rho\le T\right\},$$

$$N_a=\sup_{\theta_T}\left\{|a(v,t,f)|:-\infty<v<\infty,0\le t\le T\right\},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(v,v')dv'\equiv1,\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial k}{\partial\eta}\right|dv'\le C_k,$$

$$\omega_\eta=\frac{\partial\eta}{\partial t}+a\frac{\partial\eta}{\partial v},\qquad\omega_\eta=\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial w}{\partial v}, \tag{A}$$

$$\Theta_T=\{(v,t,s):0\le s\le t\le T,-\infty<v<\infty\},$$

$$\Gamma=\max\left\{\sup_{\theta_T}|\omega_\eta|,\sup_{\theta_T}|\omega_w|\right\},\qquad N_\eta=\sup_{\theta_T}\left|\frac{\partial a}{\partial\eta}\right|,\quad N_\eta=\sup_{\theta_T}\left|\frac{\partial a}{\partial w}\right|.$$

С этими обозначениями из (7) получаем

$$|\omega_\eta| \le \int\limits_s^t \left|\frac{\partial a}{\partial \eta}\right| |\omega_\eta| d\rho + \int\limits_s^t \left|\frac{\partial a}{\partial w}\right| |\omega_w| d\rho \le \int\limits_s^t N_\eta \Gamma d\rho + \int\limits_s^t N_w \Gamma d\rho \le \Gamma t (N_\eta + N_w) \Rightarrow \sup_{\theta_T} |\omega_\eta| \le \Gamma t (N_\eta + N_w).$$

Из (8) получаем

$$|\omega_w| \le N'_\nu \Gamma t \left(N_0 + N_\nu C_w (1 - C_w) t \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\eta, v') dv' \right) + N'_0 t (N_\eta \Gamma + N_w \Gamma) \ + N_\nu C_w (1 - C_w) \Gamma C_k t \ +$$

$$+ N_\nu C_w (1 - C_w) \Gamma N'_\nu \frac{t^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\eta, v') dv' \le (N'_\nu N'_0 \Gamma + N'_0 N_\eta \Gamma + N'_0 N_w \Gamma + N_\nu C_w (1 - C_w) C_k \Gamma) t \ +$$

$$+ \ (1 - C_w) \left(N'_\nu N_0 + (N'_0 + 1)(N_\eta + N'_w) + N_\nu C_w (1 - C_w) C_k \right) \Gamma t + \frac{3}{2} N'_\nu N_\nu C_w (1 - C_w) \Gamma t^2.$$

Обозначим:

$$A(t) = \left(N'_\nu N_0 + (N'_0 + 1)(N_\eta + N'_w) + N_\nu C_w (1 - C_w) C_k \right) t + \frac{3}{2} N'_\nu N_\nu C_w (1 - C_w) t^2 \times$$

$$\times \sup_{\theta_T} |\omega_\eta| \le A(t)\Gamma; \sup_{\theta_T} |\omega_w| \le A(t)\Gamma \Rightarrow \Gamma \le A(t)\Gamma.$$

Обозначим через Λ значение t, при котором $A(t) = 1$. Значит, для $0 \le t < \Lambda$ получаем $\Gamma = \max\left\{\sup_{\theta_T} |\omega_\eta|, \sup_{\theta_T} |\omega_w|\right\}$. Следовательно, для всех $0 \le s \le t < \Lambda, -\infty < v < \infty$ будет выполняться

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + a \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial v} = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что решение задачи Коши (1) – (2) дает решение уравнения (6_2) при $s = t$. И наоборот, достаточно гладкое ограниченное решение уравнения (6_2) при $s = t$, будет решением задачи (1) – (2).

Произведем замену: $\mu(v, t, s) = v - \nu(v, t, s)$.

Тогда система уравнений (6) примет вид

$$\begin{cases} \mu(v,t,s) = \int\limits_s^t a(v - \mu, \rho, w), \\ w(v,t,s) = e^{-\int\limits_0^s \nu(v-\mu,\rho) d\rho} \left(f_0 \left(v - \int\limits_0^t a(v - \mu, \rho, w) d\rho \right) + \right. \\ \left. + \int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(v - \mu, v') \nu(v', \rho) w(v', \rho, \rho)(1 - w(v', \rho, \rho)) e^{\int\limits_0^\rho \nu(v-\mu,\xi) d\xi} dv' d\rho \right). \end{cases} \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть Λ – положительный корень уравнения*

$$\left(N'_\nu N_0 + (N'_0 + 1)(N_\eta + N'_w) + N_\nu C_w (1 - C_w) C_k \right) t + \frac{3}{2} N'_\nu N_\nu C_w (1 - C_w) t^2 = 1$$

и

$$T_1 = \begin{cases} \Lambda - \varepsilon, & \text{если } \Lambda \le T, \\ T, & \text{если } \Lambda > T, \end{cases}$$

где ε – любое число из интервала $0, \Lambda$. Тогда при $0 \le t \le T$ система уравнений (10) имеет единственное решение $\mu(v,t,s) \in C(\theta_T)$ и $w(v,t,s) \in C(\theta_T)$, где $\theta_T = \{(v,t,s) : 0 \le s \le t \le T_1, \ \ -\infty < v < \infty\}$.

Доказательство. Для доказательства существования ограниченного решения системы интегральных уравнений (10) также, как в [8] применим метод последовательных приближений. По существу, в доказательстве принципиальным отличием является только вывод ограниченности последовательных приближений. Нулевые приближения определим в виде

$$\mu_0 = 0, \quad w_0 = f_0(v) e^{-\int\limits_0^s \nu(v,\rho)d\rho}.$$

Последующие приближения определяются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} \mu_n(v,t,s) = \int\limits_s^t a(v - \mu_{n-1}(v,t,\rho), \rho, w_{n-1}(v,t,\rho), & (11) \\ w_n(v,t,s) = e^{-\int\limits_0^s \nu(v-\mu_{n-1},\rho)d\rho} \Bigg[f_0 \left(v - \int\limits_0^t a(v - \mu_{n-1}, \rho, w_{n-1}) d\rho \right) + \\ + \int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(v - \mu_{n-1}, v') \nu(v', \rho) w_{n-1}(v', \rho, \rho)(1 - w_{n-1}) e^{\int\limits_0^\rho \nu(v-\mu_{n-1},\xi)d\xi} dv' d\rho \Bigg]. & (12) \end{cases}$$

Из (11) при всех $n, n = 1, 2, ...,$ следует, что

$$\mu_n(v,t,s) \le (t-s) N_a. \qquad (13)$$

С учетом оценки (13) выведем оценку для w_n при всех n. Из (12) при $N_\nu(1+2N_0)t \le \frac{1}{2}$ следует

$|w_0| \le N_0,$

$|w_1| \le N_0 + tN_\nu N_0(1 + N_0) \le 2N_0,$

$|w_2| \le N_0 + tN_\nu 2N_0(1 + 2N_0) \le 2N_0,$

. . . .

$|w_n| \le N_0.$

При условии $t \le \frac{1}{2N_\nu(1+2N_0)}$ получаем $|w_n| \le 2N_0$.

Значит, при $t \le \frac{1}{2N_\nu(1+2N_0)}$ функции $\mu_n(v,t,s)$ и $w_n(v,t,s), \ \ n = 1, 2, ...,$ ограничены.

Также, как в [8], доказывается, что при $0 \le t \le T_1$ последовательные приближения сходятся к $\mu(v,t,s)$ и $w(v,t,s)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (12), получим, что функция $w(v,t,s)$ будет удовлетворять второму уравнению системы (10).

Аналогичные рассуждения справедливы и для функции $\mu(v,t,s)$.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 $w(v,t,s) \in C_{1,1,1}(\Theta_T)$ и $\mu(v,t,s) \in C_{1,1,1}(\Theta_T)$.*

Доказательство леммы сводится к выводу соответствующих оценок для продифференцированных по каждому аргументу последовательных приближений (11), (12) и очень близко к тому, как это было проделано в [8] для уравнения с линейным интегральным членом. В первую очередь, это связано с тем, что процесс дифференцирования не затрагивает нелинейность под интегралом. Сформулируем основной итог в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $f_0 \in C^1(R^1)$, $a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in C^{1,0,1}(\Theta_T)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(v,v')dv' \equiv 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial k}{\partial \eta} \right| dv' \le C_k$, где $\Theta_T = \{(v,t,s) : 0 \le s \le t \le T_1, -\infty < v < \infty\}$.*

Пусть, далее, Λ *– положительный корень уравнения*

$$\left(N'_\nu N_0 + (N'_0+1)(N_\eta + N'_w) + N_\nu C_w(1-C_w)C_k\right)t + \frac{3}{2}N'_\nu N_\nu C_w(1-C_w)t^2 = 1$$

и

$$T_1 = \begin{cases} \Lambda - \varepsilon, \text{ если } \Lambda \le T, \\ T, \text{ если } \Lambda > T, \end{cases}$$

где ε *– любое число из интервала* $(0,\Lambda)$. *Тогда задача Коши (1) – (2) при* $0 \le t \le T_1$ *имеет единственное решение* $f(v,t) \in C^{1,1}\left((-\infty < v < \infty) \times [0,T_1]\right)$, *которое при* $s = t$ *совпадает с решением системы (6).*

Цитированная литература

1. **Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н.** // Тезисы докладов Межд. научной конф. "Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики". Алматы, 2005. С. 95.

2. **Frazali G., Cornelis V.M., Van der Mee and S.L.Paveri-Fontana** // J.Math.Phys.1989. V.30, № 5. P.1177 – 1186.

3. **Lods B.** // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2004. V.27. P.1049 – 1075.

4. **F.Poupaud** // J.Appl.Math. 1990. V.50. P.1593 – 1609.

5. **Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.** //Докл.РАН. 1992. Т.323, №3. С.410 – 414.

6. **Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.** //Докл. РАН. 2001. Т.379, №1. С.16 – 21.

7. **Мураталиева В.Т.** //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек. 2006. Вып. 34.

Поступила в редакцию 15.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 72 – 82*

УДК 517.92

НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К.Р.Мырзатаева, Р.Ойнаров

Евразийский национальный университет им Л.Н.Гумилева
010000 Астана ул. Мунаитпасова, 5 o_ryskul@mail.ru

Для полулинейного дифференциального уравнения второго порядка устанавливаются достаточные признаки его неосцилляторности.

1. Введение. На интервале I вещественной оси рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \upsilon(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{1}$$

где $1 < p < \infty$, $\rho : I \to R$, $\upsilon : I \to R$ – непрерывные функции, причем $\rho(t) > 0$ на I.

При $p = 2$ уравнение (1) переходит в классическое уравнение Штурма-Лиувилля

$$(\rho(t)y'(t))' + \upsilon(t)y(t) = 0. \tag{2}$$

Решением уравнения (1) назовем непрерывно дифференцируемую функцию $y : I \to R$ такую, что функция $\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)$ непрерывно дифференцируема при любом $t \in I$ и на I удовлетворяет уравнению (1).

Напомним необходимые нам определения и понятия.

Несовпадающие две точки t_1, t_2 интервала I называются сопряженными по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (1) такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$.

Если любое нетривиальное решение уравнения(1) имеет на I не более одного нуля, то уравнение (1) называется без сопряженных точек на интервале I. Если граничная точка $t = b$ интервала I (возможно, бесконечная) не принадлежит этому интервалу, то уравнение (1) называется осцилляторным при $t = b$, когда некоторое (или каждое) ненулевое решение имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к $t = b$. В противном случае уравнение (1) называется неосцилляторным при $t = b$.

Keywords: *Half-linear differential equation, conjugate point, nonoscillatory criteria, variational method*
2000 Mathematics Subject Classification: 39A10

Известно (см.[1]), что теории осцилляции уравнений (1) и (2) очень похожы. В частности, для уравнения (1) справедливы теоремы Штурма о сравнении и о разделении нулей.

Вопросы осцилляторности или неосцилляторности достаточно хорошо изучены для уравнения (2), и полученные классические результаты изложены в книгах [5,6]. Эти вопросы для уравнения (1) рассмотрены сравнительно недавно, см. например, [1,2,3,4] и приведенные там литературные ссылки.

Отметим, что вышеуказанные вопросы еще не нашли окончательного ответа даже для уравнения (2).

Основным методом исследования уравнения (1) является вариационный метод и так называемая "техника Риккати" (см.[1]).

2. Вариационный принцип. В настоящей работе мы применяем вариационный принцип, суть которого для уравнения (2) хорошо изложена в книгах [5,6].

В работе [4] доказана

Теорема А. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на конечном интервале $(\alpha,\beta)\subset I$ тогда и только тогда, когда функционал*

$$F(f,\alpha,\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\rho(t)|f'(t)|^p-\upsilon(t)|f(t)|^p]dt>0 \tag{3}$$

для всех ненулевых функций $f\in \overset{\circ}{AC}_p[\alpha,\beta]$, где $\overset{\circ}{AC}_p[\alpha,\beta]$ – совокупность абсолютно непрерывных на $[\alpha,\beta]$ функций, для которых $f(\alpha)=f(\beta)=0$ и $f'\in L_p[\alpha,\beta]$.

Пусть I – открытый или полуоткрытый интервал с концами $a,b:-\infty\le a<b\le\infty$.

Для любого конечного отрезка $[\alpha,\beta]\subset I$ функции $f\in \overset{\circ}{AC}_p[\alpha,\beta]$ продолжим нулем на $I\setminus[\alpha,\beta]$ и совокупность таких функций обозначим через $\overset{\circ}{AC}_p(I)\equiv \overset{\circ}{AC}_p(a,b)$.

Из теоремы А вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на (a,b) тогда и только тогда, когда функционал*

$$F(f,a,b)=\int\limits_{a}^{b}[\rho(t)|f'(t)|^p-\upsilon(t)|f(t)|^p]dt>0 \tag{4}$$

для всех ненулевых функций $f\in \overset{\circ}{AC}_p(a,b)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на (a,b). Тогда оно является уравнением без сопряженных точек на любом конечном интервале $(\alpha,\beta)\subset I$. Так как для любой $f\in \overset{\circ}{AC}_p(a,b)$ существует конечный отрезок $(\alpha,\beta)\subset I$, сужение функции f на $[\alpha,\beta]$ принадлежит $\overset{\circ}{AC}_p[\alpha,\beta]$. Поэтому на основании теоремы А

$$F(f,a,b)=F(f,\alpha,\beta)>0.$$

Достаточность. Пусть для любой ненулевой функции $f\in \overset{\circ}{AC}_p(a,b)$ выполняется (4). Допустим, что существуют точки $t_1,t_2\in(a,b)$, $t_1<t_2$, являющиеся сопряженными по отношению к уравнению (1). Тогда существует конечный отрезок $[\alpha,\beta]$ такой, что $a<\alpha<t_1<t_2<\beta<b$, то есть на интервале (α,β) уравнение (1) имеет сопряженные точки t_1,t_2. Но, в силу (4) выполняется (3) для $f\in \overset{\circ}{AC}_p[\alpha,\beta]$. Тогда на основании теоремы А уравнение (1) не имеет сопряженных точек на интервале (α,β). Полученное противоречие доказывает достаточность леммы 1. Лемма 1 доказана.

Из определения сопряженных точек и неосцилляторности уравнения (1) следует, что уравнение неосцилляторно при $t=b$ $(t=a)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $c\in(a,b)$ уравнение является уравнением без сопряженных точек на интервале (c,b) $((a,c))$. Поэтому из леммы 1 легко вытекает

Л е м м а 2. *Уравнение (1) неосцилляторно при $t=b$ $(t=a)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $c\in(a,b)$ выполняется*

$$F(f,c,b)>0(F(f,a,c)>0)$$

для всех ненулевых $f\in \overset{\circ}{AC}_p(c,b)$ $(f\in \overset{\circ}{AC}_p(a,c))$.

Следующие утверждения дают критерии осцилляторности уравнения (1) при $t=b$ $(t=a)$.

Л е м м а 3. *Уравнение (1) осцилляторно при $t=b$ $(t=a)$ тогда и только тогда, когда для любого $c\in(a,b)$ существует ненулевая функция $f\in \overset{\circ}{AC}_p(c,b)$ $(f\in \overset{\circ}{AC}_p(a,c))$, для которой*

$$F(f,c,b)\le 0(F(f,a,c)\le 0). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Докажем только для случая $t=b$, а случай $t=a$ доказывается аналогично. Пусть уравнение (1) осцилляторно при $t=b$. Тогда по определению осцилляторности существует последовательность точек $t_n\subset(a,b)$ и ненулевое решение $y(\cdot)$ уравнения (1) такие, что $t_n\uparrow b$ и $y(t_n)=0\forall n\ge 1$. Пусть $c\in(a,b)$. Тогда существует $m\in N$ такое, что $t_n\in(c,b)$ при всех $n\ge m$. Следовательно, уравнение (1) на интервале (c,t_{m+2}) имеет сопряженные точки. Тогда на основании теоремы A существует ненулевая функция $f\in \overset{\circ}{AC}_p[c,t_{m+2}]$ такая, что $F(f,c,t_{m+2})=F(f,c,b)\le 0$, т.е. выполняется (5).

Достаточность. Пусть для любого $c\in(a,b)$ существует $f\in \overset{\circ}{AC}_p(c,b)$ и выполнено (5). Тогда для $c_1\in(a,b)$ существует ненулевая функция $f_1\in \overset{\circ}{AC}_p(c_1,b)$ такая, что

$$F(f_1,c_1,b)\le 0.$$

Из $f_1\in \overset{\circ}{AC}_p(c_1,b)$ следует, что существует $[\alpha_1,\beta_1]\subset(c_1,b)$ и $f_1\in \overset{\circ}{AC}_p[\alpha_1,\beta_1]$, $f_1(t)=0$ при $t\in(c_1,b)\setminus[\alpha_1,\beta_1]$.

Поэтому

$$F(f_1,c_1,b)=F(f_1,\alpha_1,\beta_1)\le 0.$$

Тогда в силу теоремы A уравнение (1) на (α_1,β_1) имеет сопряженные точки $t_1<t_1^*$.
Пусть $c_2>\beta_1$. Для c_2 существует ненулевая функция $f_2\in \overset{\circ}{AC}_p(c_2,b)$ и $F(f_2,c_2,b)\le 0$. Рассуждая, как выше, найдем $\alpha_2,\beta_2:\beta_2>\alpha_2>c_2$ такие, что уравнение (1) имеет сопряженные точки $t_2<t_2^*$ на (α_2,β_2). Продолжая этот процесс, находим последовательность точек $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательности взаимно непересекающихся интервалов$\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^\infty$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=b$ и в каждом интервале (α_k,β_k) уравнение (1) имеет сопряженные точки $t_k,t_k^*:c_k<\alpha_k<t_k<t_k^*<\beta_k<c_{k+1}$.

Так как $c_k\uparrow b$, то $t_k\uparrow b$ и $t_k^*\uparrow b$ при $k\to\infty$. В силу теоремы Штурма о разделении нулей существует последовательность точек $z_k:t_k\le z_k\le t_k^*$ и ненулевое решение уравнения (1), обращающееся в нуль в точках $\{z_k\}$. Следовательно, уравнение (1) осцилляторно при $t=b$. Лемма 3 доказана.

3. Признаки неосцилляторности уравнения (1). Пусть $\upsilon^+(t)=\max\{0,\upsilon(t)\}$, $\upsilon^-(t)=\max\{0,-\upsilon(t)\}$ $\forall t\in I$. Тогда $\upsilon(t)=\upsilon^+(t)-\upsilon^-(t)\,\forall t\in I$.

Для любого $\lambda>0$ и $t\in I$ определим величины

$$d^+(t,\lambda)=\sup\left\{d>0:\left(\int\limits_t^{t+d}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac1q}\left(\int\limits_t^{t+d}\upsilon^-(s)ds\right)^{\frac1p}\le\lambda,[t,t+d]\subset I\right\},$$

$$d^-(t,\lambda)=\sup\left\{d>0:\left(\int\limits_{t-d}^{t}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{t-d}^{t}\upsilon^-(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\leq\lambda,[t-d,t]\subset I\right\},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Из определения $d^{\pm}(\cdot,\cdot)$ вытекает, что функции $t\pm d^{\pm}(t,\lambda)$ не убывают по $\lambda>0$ и по $t\in I$ и $d^-(t+d^+(t,\lambda),\lambda)=d^+(t,\lambda)$, если $t+d^+(t,\lambda)$ – внутренняя точка интервала I.

Далее предположим, что $I=[a,b)$, $-\infty<a<b\leq+\infty$ и для любого $t\in(a,b)$

$$\int\limits_{t}^{b}\rho^{1-q}(s)ds=\infty, 0<\int\limits_{t}^{b}\upsilon^-(s)ds\leq\infty. \tag{6}$$

Положим

$$\triangle^+(t,\lambda)=[t,t+d^+(t,\lambda)],\ \triangle^-(t,\lambda)=[t-d^-(t,\lambda),t],\ \triangle^+(t,\lambda)\cup\triangle^-(t,\lambda)=\triangle(t,\lambda),$$

$$B_p(\lambda)\equiv B_p(\lambda,a,b)=(p^{q-1}q+1+\frac{1}{\lambda^q})^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)}\upsilon^+(s)ds,$$

$$\widetilde{B}_p(\lambda)=\max\{pq^{p-1},(1+\frac{1}{\lambda^q})^{p-1}\}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)}\upsilon^+(s)ds,$$

$$B_p=\inf_{0<\lambda}B_p(\lambda),\widetilde{B}_p=\inf_{0<\lambda}\widetilde{B}_p(\lambda).$$

Пусть $\lambda_p=(\frac{1}{p^{q-1}q-1})^{\frac{1}{q}}$. Тогда $p(q)^{p-1}\geq(1+\frac{1}{\lambda^q})^{p-1}$ при $\lambda\geq\lambda_p$ и $p(q)^{p-1}\leq(1+\frac{1}{\lambda^q})^{p-1}$ при $0<\lambda\leq\lambda_p$.

Так как в силу монотонности $d^{\pm}(t,\lambda)$ по λ $\triangle^{\pm}(t,\lambda_1)\subset\triangle^{\pm}(t,\lambda_2)$ при $\lambda_1<\lambda_2$, то

$$\inf_{\lambda_p\leq\lambda}\widetilde{B}_p(\lambda)=p(q)^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda_p)}\upsilon^+(s)ds\right)\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda_p)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}.$$

Поэтому

$$\widetilde{B}_p=\inf_{0<\lambda\leq\lambda_p}(1+\frac{1}{\lambda^q})^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)}\upsilon^+(s)ds\right)\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}.$$

Далее, для удобства, выражения $d^{\pm}(t,\lambda)$, $\triangle^{\pm}(t,\lambda)$ при $\lambda=1$ и $\lambda=\lambda_p$ соответственно обозначим $d^{\pm}(t)$, $\triangle^{\pm}(t)$ и $d^{\pm}_p(t)$, $\triangle^{\pm}_p(t)$

Обозначим через $W^1_p(\rho,\upsilon^-,I)\equiv W^1_p(\rho,\upsilon^-)$, $\mathring{W}^1_p(\rho,\upsilon^-,I)\equiv\mathring{W}^1_p(\rho,\upsilon^-)$ соответственно множество всех локально абсолютно непрерывных на I функций f, для которых конечен функционал

$$\|f\|_{W^1_p}=\left(\int\limits_{a}^{b}[\rho(t)|f'(t)|^p+\upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

и замыкание множества $\overset{\circ}{AC}_p(I)$ по полунорме (7).

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнены условия (6). Если $2B_p < 1$, то уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале (a, b).*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что

$$F(f, a, b) > 0, \forall f \in \overset{\circ}{AC}_p(a, b),\ f \neq 0. \tag{8}$$

Так как множество $\overset{\circ}{AC}_p(a, b)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, \upsilon^-)$, то условие (8) выполнено, если

$$\int_a^b \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt < \int_a^b [\rho(t)|f'(t)|^p + \upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt \tag{9}$$

для ненулевых $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, \upsilon^-)$.

На основании (6) и утверждения леммы 1.6 из [7] следует, что

$$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, \upsilon^-) = \{f : f \in W^1_p(\rho, \upsilon^-),\ f(a) = \lim_{t \to a+0} f(t) = 0\}. \tag{10}$$

Пусть $\lambda > 0$. Полагая $a = t_0$, определим последовательность точек $t_k = t_{k-1} + d^+(t_{k-1}, \lambda)$, $k = 1, 2, ...$ В силу (6) $d^+(t, \lambda) > 0$ для всех $t \in [a, b)$ и $t + d^+(t, \lambda) \to b$ при $t \to b$. Поэтому $t_0 < t_1 < ... < t_k < ...$, $t_k \to b$ при $k \to \infty$ и

$$[a, b) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \triangle^+(t_k, \lambda) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \triangle^-(t_k, \lambda). \tag{11}$$

Тогда

$$\int_a^b \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt. \tag{12}$$

Оценим интегралы в (12). Так как в силу (10) $f(a) = 0$ для $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, \upsilon^-)$, то по обобщенному неравенству Харди [7,8] (см.лемму 1.4 из [7])

$$\int_{\triangle^+(t_0,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt \leq$$

$$\leq p(q)^{p-1} \sup_{t \in \triangle^+(t_0,\lambda)} \left(\int_t^{t_1} \upsilon^+(s)ds \right) \left(\int_{t_0}^t \rho^{1-q}(s)ds \right)^{p-1} \int_{\triangle^+(t_0,\lambda)} \rho(s)|f'(s)|^p ds. \tag{13}$$

Учитывая, что $[t, t_1] \subset \triangle^+(t, \lambda)$ и $[t_0, t] = \triangle^-(t, \lambda)$ для $t \in \triangle^+(t_0, \lambda)$, из (13) имеем

$$\int_{\triangle^+(t_0,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt \leq$$

$$\leq p(q)^{p-1} \sup_{t \in \triangle^+(t_0,\lambda)} \left(\int_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds \right) \left(\int_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{p-1} \|f\|_{W^1_p(\triangle^+(t_0,\lambda))} \leq$$

$$\leq p(q)^{p-1} \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds \right) \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{p-1} \|f\|_{W_p^1(\triangle^+(t_0,\lambda))}. \tag{14}$$

Для $k \geq 1$ имеем

$$\left(\int\limits_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)-f(t_k)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} |f(t_k)|. \tag{15}$$

Применяя обобщенное неравенство Харди и поступая как выше, получим

$$\left(\int\limits_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)-f(t_k)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W_p^1(\triangle^+(t_k,\lambda))}. \tag{16}$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница и неравенство Гельдера, имеем

$$|f(t_k)| \leq \int\limits_t^{t_k} |f'(s)|ds + |f(t)| \leq \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho(s)|f'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + |f(t)|. \tag{17}$$

Умножим обе части (17) на $\upsilon^-(t)$ и интегрируем по $t \in \triangle^-(t_k,\lambda)$, а затем применяем неравенство Гельдера, тогда

$$|f(t_k)| \int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt \right) \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho(s)|f'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \int_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)|f(t)|dt \leq \lambda \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho(s)|f'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (\lambda^q+1)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} [\rho(t)|f'(t)|^p + \upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$|f(t_k)| \le \left(1+\frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W_p^1(\triangle^-(t_k,\lambda))}. \tag{18}$$

В последнем соотношении учтено, что

$$\left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \upsilon^-(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t_k,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda$$

при $k = 1, 2, ...$

Из (15), (16), (18) имеем

$$\left(\int\limits_{\triangle^+(t_k,\lambda)} \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left[(p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\triangle^+(t_k,\lambda))} + \left(1+\frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W_p^1(\triangle^-(t_k,\lambda))}\right] \le$$

$$\le \left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\|f\|^p_{W_p^1(\triangle^+(t_k,\lambda))} + \|f\|^p_{W_p^1(\triangle^-(t_k,\lambda))}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W_p^1(\triangle(t_k,\lambda))}. \tag{19}$$

Из (12), (14), (19) следует

$$\int\limits_a^b \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt \le B_p(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \|f\|^p_{W^1_{p(\triangle(t_k,\lambda))}} \le 2B_p(\lambda) \int\limits_a^b [\rho(t)|f'(t)|^p + \upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt. \tag{20}$$

В последнем неравенстве появился множитель 2 в силу того, что на основании (11) покрытие интервала I по $\{\triangle(t_k)\}_{k=0}^{\infty}$ не более двухкратное.

Левая часть (20) не зависит от $\lambda > 0$, следовательно,

$$\int\limits_a^b \upsilon^+(t)|f(t)|^p(t)dt \le 2B_p \int\limits_a^b [\rho(t)|f'(t)|^p + \upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt.$$

Отсюда и из условия теоремы $2B_p < 1$ следует (9). Теорема 1 доказана.

Так как $B_p(\lambda) \le 2^{p-1}\tilde{B}_p(\lambda)$, $B_p \le 2^{p-1}\tilde{B}_p$ и $\tilde{B}_p \le \tilde{B}_p(\lambda_p)$, $\tilde{B}_p \le \tilde{B}_p(1)$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если выполнено одно из условий:*

$$\inf_{0<\lambda\le\lambda_p}\left(1+\frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)}\upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{1}{2},$$

$$\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle_p^+(t)}\upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\triangle_p^-(t)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{21}$$

$$\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^+(t)}\upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\triangle^-(t)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{1}{2}\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \tag{22}$$

то уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на (a,b).

Так как по определению $d^-(t)$

$$\left(\int\limits_{\triangle^-(t)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\int\limits_{\triangle^-(t)}\upsilon^-(s)ds\right)^{-\frac{1}{p}}\quad\forall t\in I,$$

то из (22) имеем

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если*

$$\sup_{a<t<b}\left[\left(\int\limits_{\triangle^-(t)}\upsilon^-(s)ds\right)^{-1}\left(\int\limits_{\triangle^+(t)}\upsilon^+(s)ds\right)\right]^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{2}\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \tag{23}$$

то уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на (a,b).

Из (21) и (23) при $p=2$ следует

Следствие 3. *Пусть условия (6) выполнены при $p=2$. Если выполнено одно из условий:*

$$\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle_2^+(t)}\upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\triangle_2^-(t)}\rho^{-1}(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{4},$$

$$\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^-(t)}\upsilon^-(s)ds\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\triangle^+(t)}\upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{4},$$

то уравнение (2) является уравнением без сопряженных точек на (a,b).

Теорема 2. *Пусть $1<p<\infty$ и выполнено условие (6). Если*

$$\inf_{\lambda>0}\left(p^{q-1}q+1+\frac{1}{\lambda^q}\right)^{p-1}\varlimsup_{t\to b}\left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1}\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)}\upsilon^+(s)ds<\frac{1}{2}, \tag{24}$$

то уравнение (1) неосцилляторно при $t = b$.

Доказательство. Пусть выполнено (24). Тогда по определению инфимума существует $\lambda_0 > 0$ такое, что

$$\left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda_0^q}\right)^{p-1} \varlimsup_{t\to b} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda_0)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1} \int\limits_{\triangle^+(t,\lambda_0)} \upsilon^+(s)ds < \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из определения верхнего предела существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda_0^q}\right)^{p-1} \sup_{c<t<b} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda_0)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1} \int\limits_{\triangle^+(t,\lambda_0)} \upsilon^+(s)ds < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$2B_p(\lambda_0, c, b) < 1. \tag{25}$$

Для $\lambda = \lambda_0$, $a = c$ неравенство (20) имеет вид

$$\int\limits_c^b \upsilon^+(t)|f(t)|^p dt \leq 2B_p(\lambda_0, c, b) \int\limits_c^b [\rho(t)|f'(t)|^p + \upsilon^-(t)|f(t)|^p]dt.$$

Отсюда и из (25) вытекает

$$F(f, c, b) > 0$$

для всех ненулевых $f \in \overset{\circ}{A}C_p(c,b)$.

Следовательно, по лемме 2 уравнение (1) неосцилляторно при $t = b$. Теорема доказана.

В соответствие с утверждениями следствий 1-3 имеем

Следствие 4. *Пусть выполнено условие теоремы 2. Если выполнено одно из условий:*

$$\inf_{0<\lambda\leq\lambda_p} \left(1 + \frac{1}{\lambda^q}\right)^{\frac{1}{q}} \varlimsup_{t\to b} \left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2},$$

$$\varlimsup_{t\to b} \left(\int\limits_{\triangle_p^+(t)} \upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle_p^-(t)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\varlimsup_{t\to b} \left[\left(\int\limits_{\triangle^-(t)} \upsilon^-(s)ds\right)^{-1} \left(\int\limits_{\triangle^+(t)} \upsilon^+(s)ds\right)\right] < \frac{1}{2^p} \min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{q}\right)^{p-1}, \frac{1}{2^{p-1}}\right\},$$

то уравнение (1) неосцилляторно при $t = b$.

Следствие 5. *Пусть при $p = 2$ выполнено условие (6). Если выполнено одно из условий:*

$$\varlimsup_{t\to b} \left[\int\limits_{\triangle_2^+(t)} \upsilon^+(s)ds \int\limits_{\triangle_2^-(t)} \rho^{-1}(s)ds\right] < \frac{1}{16},$$

$$\overline{\lim_{t\to b}}\left[\left(\int\limits_{\triangle^-(t)} \upsilon^-(s)ds\right)^{-1} \int\limits_{\triangle^+(t)} \upsilon^+(s)ds\right] < \frac{1}{16},$$

то уравнение (2) неосцилляторно при $t = b$.

4. Дополнение. Здесь мы приведем основные изменения, когда рассматриваемый интервал $I = (a, b]$, $-\infty \le a < b < \infty$. В этом случае вместо условия (6) предполагаем, что для любого $t \in (a, b)$

$$\int\limits_a^t \rho^{1-q}(s)ds = \infty, \quad 0 < \int\limits_a^t \upsilon^-(s)ds \le \infty. \tag{26}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнено условие (26).*
Если

$$\inf_{\lambda>0}\left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda^q}\right)^{p-1} \sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1} \int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds < \frac{1}{2},$$

то уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале (a, b).

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнено условие (26).*
Если

$$\inf_{\lambda>0}\left(p^{q-1}q + 1 + \frac{1}{\lambda^q}\right)^{p-1} \overline{\lim_{t\to a}}\left(\int\limits_{\triangle^+(t,\lambda)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{p-1} \int\limits_{\triangle^-(t,\lambda)} \upsilon^+(s)ds < \frac{1}{2},$$

то уравнение (1) неосцилляторно при $t = a$.

При доказательстве теоремы 3, полагая $b = t_0$, по формуле $t_k = t_{k-1} - d^-(t_{k-1}, \lambda), k = 1, 2, ...$ строим монотонно убывающую последовательность точек $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, сходящихся к точке $t = a$. Далее доказательство такое же, как в теореме 1, только отрезок $\triangle^{\pm}(t, \lambda)$ соответственно переходит в отрезок $\triangle^{\mp}(t, \lambda)$.

Из теорем 4 и 5 вытекает аналог следствий 1-5. Приведем одно из них

Следствие 6. *Пусть выполнено условие теоремы 4.*
Если

$$\overline{\lim_{t\to a}}\left(\int\limits_{\triangle_p^-(t)} \upsilon^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\triangle_p^+(t)} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

то уравнение (1) неосцилляторно при $t = a$.

Цитированная литература

1. **Dosly O.** // Czechoslovak Math.J. 2000. V.50(125). P.657 – 671.
2. **Jaros J., Kusano T.** //Acta. Math. Univ. Comen. 1999. V.68. P.137 – 151.
3. **Li H.J., Yeh C.C** // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1996. V.125A. P.1193 – 1204.
4. **Marik R.** //Arch. Math.(Brno).1999. V.35. P.155 – 164.

5. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.

6. **Глазман Н.М.** Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963.

7. **Oinarov R.** // J.London Math. Soc. 1993. V.48, № 2. P.103 – 116.

8. **Opic B., Kufner A.** Hardy-type inequalities. Longman Scientific and Technikal, 1990.

Поступила в редакцию 25.01.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 83 – 87*

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Т. Орумбаева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина,125 anar@math.kz

Устанавливаются достаточные условия существования изолированного решения полупериодической краевой задачи для системы нелинейных гиперболических уравнений и предлагается алгоритм его нахождения.

На $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (x, t) \in \overline{\Omega}, \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$u(0, t) = \psi(t), \qquad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \qquad x \in [0, \omega], \tag{3}$$

где $f : \overline{\Omega} \times R^n \times R^n \to R^n$ непрерывна, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ n-вектор-функция, удовлетворяющая условию $\psi(0) = \psi(T)$, $\|u(x, t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x, t)|$.

В работе при предположении непрерывной дифференцируемости функции f по u и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ предложен алгоритм нахождения решения задачи (1) – (3) аналогично алгоритму нахождения решения соответствующей линейной задачи [1]. С помощью теоремы, обобщающей локальный вариант теоремы Адамара [2], устанавливаются достаточные условия сходимости алгоритма и существования изолированного решения нелинейной краевой задачи (1) – (3).

Пусть $C(J, R^n)$ – множество непрерывных на J ($J \subset R^1$ или $J \subset R^2$) функций $u : J \to R^n$. Функция $u(x, t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x, t)}{}\partial x \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \in$ $\in C(\overline{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x, t) \in \overline{\Omega}$ и краевым условиям (2),(3).

Keywords: *system of hyperbolic equations,semi periodical boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ и задачу (1) – (3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,u(x,t),v), \qquad (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$v(x,0)=v(x,T), \qquad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi, \qquad t\in[0,T], \quad x\in[0,\omega]. \tag{6}$$

Здесь мы свели полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональному соотношению.

Пара принадлежащих $C(\overline{\Omega},R^n)$ функций $(v(x,t),u(x,t))$ называется решением задачи (4) – (6), если функция $v(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$ является решением задачи (4),(5), где функция $u(x,t)$ связана с $v(x,t)$ функциональным соотношением (6).

Задачи (1) – (3) и (4) – (6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u^*(x,t)$, является решением задачи (1) – (3), то пара $(v^*(x,t)=\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x},u^*(x,t))$ будет решением задачи (4) – (6) и, наоборот, если пара $(\widehat{v}(x,t),\widehat{u}(x,t))$ – решение задачи (4) – (6), то $\widehat{u}(x,t)$ – решение задачи (1) – (3).

Для решения задачи (4) – (6) применяется метод параметризации. По шагу $h>0:Nh=T$ произведем разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh), N=1,2,...$, при этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t),u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функций $v(x,t),u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}$. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$ и сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t}=f(x,t,u_r,\widetilde{v}_r+\lambda_r(x)), \quad (x,t)\in\Omega_r, \tag{7}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0, \quad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,N}, \tag{8}$$

$$u_r(x,t)=\psi(t)+\int\limits_0^x\widetilde{v}_r(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}, \tag{9}$$

$$\lambda_1(x)-\lambda_N(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N(x,t)=0, \quad x\in[0,\omega], \tag{10}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0, \quad x\in[0,\omega], \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{11}$$

Задачи (4) – (6) и (7) – (11) эквивалентны в том смысле, что если пара функций $\{v(x,t),u(x,t)\}$ является решением задачи (4) – (6), то система троек $\{\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h);\widetilde{v}_r(x,t)=v_r(x,t)--v_r(x,(r-1)h),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (7) – (11) и, наоборот, если $\{\lambda_r(x),\,\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$ – решение задачи (7) – (11), то пара функций $\{v(x,t),u(x,t)\}$, определяемая равенствами $v(x,t)=\lambda_r(x)+\widetilde{v}_r(x,t)$, $u(x,t)=u_r(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, $v(x,T)=\lambda_N(x)+\lim\limits_{t\to Nh-0}\widetilde{v}_N(x,t)$, $\quad u(x,T)=\lim\limits_{t\to Nh-0}u_N(x,t)$, будет решением задачи (4) – (6).

Задача (7),(8) при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x,t)$, является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$, и эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau,u_r(x,\tau),\widetilde{v}_r(x,\tau)+\lambda_r(x))d\tau. \tag{12}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(x,\tau)$ подставим соответствующую правую часть (12) и, повторив этот процесс ν $(\nu = 1,2,...)$ раз, получим

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\Bigg(x,\tau_1,u_r(x,\tau_1), \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} f\Bigg(x,\tau_2,u_r(x,\tau_2),... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f\Bigg(x,\tau_\nu,u_r(x,\tau_\nu),\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)+$$

$$+\lambda_r(x)\Bigg)d\tau_\nu + ... + \lambda_r(x)\Bigg)d\tau_2 + \lambda_r(x)\Bigg)d\tau_1. \tag{13}$$

Отсюда, определив $\lim\limits_{t\to rh-0} \widetilde{v}_r(x,t)$, подставив их в (10), (11) и умножив обе части уравнения (10) на $h>0$, получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r(x)$, которую запишем в виде

$$Q_{\nu,h}(x,u(x,[\cdot]),\widetilde{v}(x,[\cdot]),\lambda(x)) = 0. \tag{14}$$

Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}, r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (14),(13) и (9), определяемую через функцию f, шагу разбиения $h>0$ и числу подстановок ν.

Через $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на Ω_r функций $u_r : \Omega_r \to R^n$. $C([0,\omega],R^n)$ - множество непрерывных на $[0,\omega]$ функций $\lambda_r:[0,\omega]\to R^n$. Выберем шаг $h>0 : Nh = T(N=1,2,...)$, вектор-функцию $\lambda^{(0)}(x) = (\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),...,\lambda_N^{(0)}(x))' \in$ $\in R^{nN}$ и предположим, что задача (7)-(9) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $r=\overline{1,N}$, имеет решение $u_r^{(0)}(x,t) \in \widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t) \in \widetilde{C}(\Omega_r,R^n), r=\overline{1,N}$. Множество таких $\lambda^{(0)}(x) \in R^{nN}$ обозначим $G_0(f,x,h)$, а соответствующую $\lambda^{(0)}(x)$ систему решений интегральных уравнений (13),(9) – через $\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]) = (\widetilde{v}_1^{(0)}(x,t),\widetilde{v}_2^{(0)}(x,t),...,\widetilde{v}_N^{(0)}(x,t))'$, $u^{(0)}(x,[t]) = (u_1^{(0)}(x,t),$ $u_2^{(0)}(x,t),...,u_N^{(0)}(x,t))'$.

Взяв $\lambda^{(0)}(x) \in G_0(f,x,h)$, $u^{(0)}(x,[t])$, $\widetilde{v}^{(0)}(x,[t])$, число $\rho>0$, построим множества:
$S(\lambda^{(0)}(x),\rho) = \big\{(\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_N(x))' \in C([0,\omega],R^{nN}) : \|\lambda_r(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\| < \rho, r=\overline{1,N}\big\}$,
$S(\lambda^{(0)}(x)+\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho) = \big\{\lambda(x)+\widetilde{v}(x,[t]), \lambda(x) = (\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_N(x))' \in C([0,\omega],R^{nN}),$ $(\widetilde{v}_1(x,t),\widetilde{v}_2(x,t),...,\widetilde{v}_N(x,t))', \widetilde{v}_r(x,t) \in \widetilde{C}(\Omega_r,R^n) : \|\lambda_r(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\| + \|\widetilde{v}_r(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| < \rho,$ $r=\overline{1,N}\big\}$, $S(u^{(0)}(x,[t]),\omega\rho) = \{(u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_N(x,t))', u_r(x,t) \in \widetilde{C}(\Omega_r,R^n) : \|u_r(x,t)-$ $-u_r^{(0)}(x,t)\| < \omega\rho, (x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}\}$, $G_0(\omega,\rho) = \{(x,t,u,v) : (x,t)\in\overline{\Omega}, \|u-u_r^{(0)}(x,t)\| <$ $< (1+\omega)\rho, (x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}, \|u - \lim\limits_{t\to Nh-0} u_N^{(0)}(x,t)\| < (1+\omega)\rho,\ t=T,\quad x\in[0,\omega], \|v-$ $-\lambda_r^{(0)}(x)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| < (1+\omega)\rho, (x,t)\in\Omega_r, r=\overline{1,N}, \|v-\lambda_N^{(0)}(x) - \lim\limits_{t\to Nh-0}\widetilde{v}_N^{(0)}(x,t)\| < (1+\omega)\rho,$ $t=T, x\in[0,\omega]\}$.

Через $D_0(f,L_1,L_2,x,h)$ обозначим совокупность $(\lambda^{(0)}(x),\widetilde{v}^{(0)}(x,[t]),u^{(0)}(x,[t]),\omega,\rho)$, при которых функция $f(x,t,u,\widetilde{v})$ в $G_0(\omega,\rho)$ имеет непрерывные частные производные $f'_u(x,t,u,\widetilde{v})$, $f'_{\widetilde{v}}(x,t,u,\widetilde{v})$ и $\|f'_u(x,t,u,\widetilde{v})\| \le L_1$, $\|f'_{\widetilde{v}}(x,t,u,\widetilde{v})\| \le L_2$, где $L_1,L_2 - const$. По системе троек $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, составим тройку $\{\lambda(x),\widetilde{v}(x,[t]),\ u(x,[t])\}$, где $\lambda(x) = (\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_N(x))'$, $\widetilde{v}(x,[t]) = (\widetilde{v}_1(x,t),\widetilde{v}_2(x,t),...,\widetilde{v}_N(x,t))'$, $u(x,[t]) =$

$= (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_N(x,t))'$. Предполагая существование $\lambda^{(0)}(x) \in G_0(f,x,h)$, за начальное приближение задачи (7) – (11) возьмем систему троек $(\lambda_r^{(0)}(x), u_r^{(0)}(x,t), \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)), r = \overline{1,N}$, и последовательные приближения строим по алгоритму.

Шаг 1. Подставляя $u_r^{(0)}(x,t), \widetilde{v}_r^{(0)}(x,t), r = \overline{1,N}$, в (14), из системы функциональных уравнений $Q_{\nu,h}(x, u^{(0)}(x,[\cdot]), \widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]), \lambda(x)) = 0$ определяем $\lambda_r^{(1)}(x)$, $r = \overline{1,N}$. Подставляя в (13) вместо $u_r(x,t)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$, $\lambda_r(x)$ соответственно $u_r^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, $\lambda_r^{(1)}(x)$, $r = \overline{1,N}$, получаем $\{\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)\}, r = \overline{1,N}$. Функции $u_r^{(1)}(x,t)$, $r = \overline{1,N}$, определяем из соотношений(9), где $\widetilde{v}_r(x,t = \widetilde{v}_r^{(1)}(x,t), \quad \lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x), \quad (x,t) \in \Omega_r$.

Шаг 2. Функцию $\lambda^{(2)}(x) = (\lambda_1^{(2)}(x), \lambda_2^{(2)}(x), ..., \lambda_N^{(2)}(x))'$ определяем как решение системы уравнений (14), где $u_r(x,t) = u_r^{(1)}(x,t)$, $\widetilde{v}_r(x,t) = \widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)$, $r = \overline{1,N}$. Вновь подставляя в (13) вместо $u_r(x,t)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$, $\lambda_r(x)$ соответственно $u_r^{(1)}(x,t)$, $\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)$, $\lambda_r^{(2)}(x), r = \overline{1,N}$, получаем $\{\widetilde{v}_r^{(2)}(x,t)\}, r = \overline{1,N}$. Функции $u_r^{(2)}(x,t), r = \overline{1,N}$, определяем из соотношений (9), где $\widetilde{v}_r(x,t) = \widetilde{v}_r^{(2)}(x,t), \quad \lambda_r(x) = \lambda_r^{(2)}(x), \quad (x,t) \in \Omega_r$. Продолжая процесс, на k-м шаге получаем систему троек $\{\lambda_r^{(k)}(x), \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t), u_r^{(k)}(x,t)\}, r = \overline{1,N}$. Достаточные условия осуществимости, сходимости алгоритма и существования решения многохарактеристической краевой задачи с функциональными параметрами (7) – (11) устанавливает

Теорема 1. *Пусть существуют* $h > 0: \quad Nh = T, \quad (N = 1,2,...), \quad \nu \in \mathbb{N}$, $(\lambda^{(0)}(x), \widetilde{v}^{(0)}(x,[t]), u^{(0)}(x,[t]), \omega, \rho) \in D_0(f, L_1, L_2, x, h)$, *при которых матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(x, u(x,[\cdot]), \widetilde{v}(x,[\cdot]), \lambda(x))}{\partial \lambda}$ *обратима для всех* $(x, u(x,[\cdot]), \widetilde{v}(x,[\cdot]), \lambda(x))$, *где* $x \in [0,\omega], (\lambda(x) + \widetilde{v}(x,[t]),\ u(x,[t])) \in S(\lambda^{(0)}(x) + \widetilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho) \times S(u^{(0)}(x,[t]), \omega\rho)$, *и выполнены следующие неравенства:*

1) $\left\| \left[\frac{\partial Q_{\nu,h}(x,u(x,[\cdot]),\widetilde{v}(x,[\cdot]),\lambda(x))}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_\nu(x,h)$,

2) $q_\nu(h) = \frac{(L_2 h)^\nu}{\nu!} \left(1 + \max\limits_{x \in [0,\omega]} \gamma_\nu(x,h) \max\{1,h\} \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_2 h)^j}{j!} \right) < \frac{1}{2}$,

3) $\dfrac{\frac{d^{[d]}}{[d]!} \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_2 h)^j}{j!}}{1 - 2q_\nu(h)} \max\limits_{x \in [0,\omega]} \gamma_\nu(x,h) \| Q_{\nu,h}(x, u^{(0)}(x,[\cdot]), \widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]), \lambda^{(0)}(x)) \| < \rho$,

где $d = \frac{\chi\omega}{q_\nu(h)}, \quad \chi = \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_2 h)^j}{j!} L_1 h \left[1 + \max\limits_{x \in [0,\omega]} \gamma_\nu(x,h) \max\{1,h\} \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_2 h)^j}{j!} \right]$.

Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар $(\lambda^{(k)}(x) + \widetilde{v}^{(k)}(x,[t]),\ u^{(k)}(x,[t]))$, $k = 0,1,...$, *содержится в* $S(\lambda^{(0)}(x) + \widetilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho) \times S(u^{(0)}(x,[t]), \omega\rho)$, *сходится к* $(\lambda^*(x) + \widetilde{v}^*(x,[t]), u^*(x,[t]))$ *– решению задачи (7) – (11) и справедливы оценки:*

а) $\max\limits_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{(k)}(x)\| + \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t \in [(r-1)h, rh)} \|\widetilde{v}_r^*(x,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\| \leq$

$$\leq \frac{(2q_\nu(h))^k \frac{d^{[d]}}{[d]!} \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} \frac{(L_2 h)^j}{j!}}{1 - 2q_\nu(h)} \max_{x \in [0,\omega]} \gamma_\nu(x,h) \| Q_{\nu,h}(x, u^{(0)}(x,[\cdot]), \widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]), \lambda^{(0)}(x)) \|,$$

б) $\max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^*(x,t) - u_r^{(k)}(x,t)\| \leq$

$$\leq \int_0^x \left(\max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r^*(\xi) - \lambda_r^{(k)}(\xi)\| + \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|\widetilde{v}_r^*(\xi,t) - \widetilde{v}_r^{(k)}(\xi,t)\| \right) d\xi.$$

Причем любое решение $u(x,t), \widetilde{v}(x,t), \lambda(x)$ *задачи (7)-(11), где* $\widetilde{v}(x,[t]) + \lambda(x) \in S(\lambda^{(0)}(x) + \widetilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho)$, $u(x,[t]) \in S(u^{(0)}(x,[t]), \omega\rho)$, *изолировано.*

При доказательстве теоремы 1 используется теорема, обобщающая локальный вариант теоремы Адамара [2] и алгоритм, предложенный в работе [1].

Ввиду эквивалентности задач (1) – (3) и (7) – (11) из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то последовательность функций* $(u^{(k)}(x,t))$, $k=0,1,\ldots$, *содержится в* $G(u^{(0)}(x,t),[\omega+1]\rho)$, *сходится к* $u^*(x,t)$ *– решению задачи (1)-(3) в* $G(u^{(0)}(x,t),[\omega+1]\rho)$ *и справедливо неравенство*

$$\|u^*(x,t)-u^{(k)}(x,t)\|\leq\frac{\omega(2q_\nu(h))^k\frac{d^{[d]}}{[d]!}\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{(L_2h)^j}{j!}}{1-2q_\nu(h)}\gamma_\nu(x,h)\|Q_{\nu,h}(x,u^{(0)}(x,[\cdot]),\widetilde{v}^{(0)}(x,[\cdot]),\lambda^{(0)}(x))\|.$$

Причем любое решение задачи (1) – (3) в $G(u^{(0)}(x,t),[\omega+1]\rho)$ *изолировано.*

Цитированная литература

1. **Орумбаева Н. Т.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 4(14). С. 64 – 74.
2. **Джумабаев Д. С.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, № 1. С. 20 – 30.

Поступила в редакцию 25.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 88 – 94*

УДК 517.9

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДВУМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СКАЛЯРНОГО ТИПА

И. Н. Панкратова

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 irina@math.kz

Установлен бифуркационный характер расположения ω-предельных множеств двумерного отображения с нелинейностью скалярного типа.

Рассматривается динамическая система F^m, где $F : L^n \to L^n$ – отображение вида $Fx = \Phi(x)Ax$. Здесь L^n – n-мерное линейное нормированное пространство с нормой $\|x\| = \sum_1^n |x_i|$, A – $n \times n$- матрица, $\Phi(x)$ – скалярная функция. В качестве компактного фазового пространства системы F^m выберем множество $K_a^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \|x\| \leq a\}$, где $a > 0$ – константа, $x \geq 0$ означает $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Множество K_a^n инвариантно (в положительном направлении) относительно отображения F при условиях, что A – неотрицательная матрица ($a_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j = \overline{1, n}$), $\|A\| = \max\limits_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq a/\tilde{C}$, $\Phi(x) \geq 0$ непрерывна в K_a^n, где $\tilde{C}$ – ограничивающая сверху константа функции $\Phi(x)\|x\|$, $x \in K_a^n$.

Отображение F является обобщением логистического отображения f, $fx = (1 - \|x\|)Ax$ [1], на случай замены скалярного множителя $1 - \|x\|$ произвольной, непрерывной в K_a^n функцией $\Phi(x) \geq 0$ и единичного симплекса $K_1^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \|x\| \leq 1\}$ симплексом K_a^n конечного размера $a > 0$. В свою очередь, отображение f является многомерным аналогом одномерного нелинейного логистического отображения $\chi_\lambda : L^1 \to L^1$, $\chi_\lambda x = \lambda(1 - x)x$ ($n = 1$, $A = \lambda$, $K_a^n \equiv I = [0, 1]$), динамика которого достаточно хорошо и полно изучена [2,3].

Приведем примеры отображений F, задающих популяционные модели, в которых функция $\Phi(x)$ играет роль лимитирующего по численности фактора.

При $\Phi(x) = 1 - \|x\|$ и $K_a^n \equiv K_1^n$ система f^m задает популяционную модель [1], представляющую собой один из вариантов нелинейной модели Лесли [4].

Многомерное логистическое отображение с весами $f_\alpha : K_1^n \to K_1^n$ имеет вид: $f_\alpha x = (1 - \sum_1^n \alpha_i x_i)Ax$ [5]. Отображение f_α задает *популяционную модель с иерархической структурой*, которая вводится с помощью весовых множителей α_i, учитывающих конкурентоспособность каждой из возрастных групп, в то время как в модели, задаваемой отображением f, все возрастные группы вносят одинаковый вклад в значение лимитирующей функции $\Phi(x)$.

В качестве двух других моделей Лесли назовем системы, заданные с помощью отображений f_1, $f_1 x = (1 + (\lambda - 1)\|x\|/K)^{-1} Lx$, и f_2, $f_2 x = \exp(r(1 - \|x\|/K))Ax$ [6]. Здесь L – матрица Лесли,

Keywords: *Dynamical system, nonnegative matrix, bifurcation*
2000 Mathematics Subject Classification: 74J05

λ – максимальное собственное значение матрицы L, K – "емкость среды r – коэффициент естественного прироста.

Для любого вектора $x \in K_a^n$ вектор $F^m x$ представим, как $F^m x = \Phi^{(m)}(x) A^m x$, где $\Phi^{(m)}(x) = \prod_{i=0}^{m-1} \Phi(F^i x)$. Поскольку скалярный множитель $\Phi^{(m)}(x)$ не влияет на направления ω-предельных векторов траектории $\Phi^{(m)}(x) A^m x$, то отсюда следует, что направления ненулевых ω-предельных векторов траектории $F^m x$ определяются направлениями векторов последовательности $A^m x$ при $m \to \infty$, т.е. расположение ω-предельных множеств системы F^m определяется линейной частью отображения F (линейным оператором $\mathbf{A}$, заданным матрицей A) и не зависят от вида скалярной функции $\Phi(x)$.

Согласно [1] и [7] ω-предельные множества расположены в инвариантных относительно отображения F множествах, образованных пересечением с K_a^n инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$, на конечном числе отрезков лучей, циклически переходящих друг в друга под действием отображения F, – *циклах отрезков лучей конечного периода*. Лучи цикла отрезков лучей периода $p \geq 1$ направлены вдоль неотрицательных собственных векторов матрицы A^p, соответствующих числу λ^p, где $\lambda \geq 0$ – неотрицательное собственное значение матрицы A, которому соответствует неотрицательный собственный вектор матрицы A. (В [7] допущена неточность относительно числа p: поскольку p может быть больше размерности системы n, то следует полагать $p \geq 1$.)

Поскольку не существует непрерывной зависимости между коэффициентами матрицы и ее собственными векторами, то их расположение в пространстве L^n может меняться скачком, т.е. носит бифуркационный характер.

В настоящей работе определены положения инвариантных множеств системы F^m в K_a^n, содержащих циклы отрезков лучей, и периоды этих циклов в зависимости от коэффициентов матрицы $A \geq 0$ для двумерного отображения F.

Запишем матрицу A отображения F в виде $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$.

Согласно общей теории матрица $A \geq 0$ имеет неотрицательное максимальное собственное значение, которому соответствует неотрицательный собственный вектор ([8], с. 332)).

Собственные значения матрицы $A \geq 0$ определяются из следующего уравнения:

$$|A - \lambda E| \equiv \lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 - a_3 a_4 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = (a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3 a_4})/2.$$

Тогда $\lambda_1 = (a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3 a_4})/2 \geq 0$ – максимальное собственное значение матрицы $A \geq 0$.

В данном уравнении дискриминант $D = (a_1 - a_2)^2 + 4a_3 a_4 \geq 0$. Если $D > 0$, то $\lambda_1 > \lambda_2$; $D = 0$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и хотя бы одно из чисел a_3, a_4 (или оба) равны нулю, в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть $e^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)})'$, $e^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)})'$ – собственные векторы матрицы $A \geq 0$, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2. Координаты этих векторов при каждом $i = 1, 2$ определяются из следующей системы уравнений: $Ae^{(i)} = \lambda_i e^{(i)}$ или

$$a_1 e_1^{(i)} + a_4 e_2^{(i)} = \lambda_i e_1^{(i)}, \quad a_3 e_1^{(i)} + a_2 e_2^{(i)} = \lambda_i e_2^{(i)},$$

при этом всегда $e^{(1)} \geq 0$.

Обозначим через $con\ M$ множество $con\ M \stackrel{def}{=} \{cx \mid x \in M,\ c \geq 0\}$ $\forall M \subset K_a^2$, $K^{2+} = \{x \in L^2 | x_i \geq 0, i = 1, 2\}$ – неотрицательный конус векторов из L^2, $\omega_F x$ – ω-предельное множество траектории $F^m x$.

Поскольку $A^m e^{(i)} = \lambda_i^m e^{(i)}$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, то множества $con\ e^{(i)}$ инвариантны относительно оператора $\mathbf{A}$, а $J_1^i = con\ e^{(i)} \cap K_a^2$ являются инвариантными относительно отображения F множествами и представляют собой отрезки лучей, направленных вдоль векторов $e^{(i)}$, $i = 1, 2$ ($J_1^2 \neq \{0\}$, если $e^{(2)} \geq 0$).

Таким образом, для любого вектора $x \in J_1^i$ $\omega_F x \subseteq J_1^i$, $i = 1, 2$.

Произвольный вектор $x \in L^2$ представим в виде линейной комбинации собственных векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ матрицы A: $x = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)}$, где α_1, α_2 – константы. Тогда

$$A^m x = A^m(\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)}) = \lambda_1^m \alpha_1 e^{(1)} + \lambda_2^m \alpha_2 e^{(2)}.$$

Согласно формуле для вычисления вектора $A^m x$ направления предельных векторов последовательности $A^m x$ зависят от собственных значений матрицы A, поэтому возможны различные расположения ω-предельных множеств системы F^m в K_a^2 (см. также [1] для многомерного аналога логистического отображения, заданного уравнением $Fx = (1 - \|x\|)Ax$).

Отметим возможные здесь случаи.

1) $|\lambda_2| = \lambda_1$ или $\lambda_2 = \pm\lambda_1$.

При $\lambda_2 = \lambda_1$ для любого $x \in K^{2+}$ $A^m x = \lambda_1^m(\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)}) = \lambda_1^m x$, т.е. $x \geq 0$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий максимальному собственному значению λ_1.

При $\lambda_2 = -\lambda_1$ для любого $x \in K^{2+}$ $A^m x = \lambda_1^m(\alpha_1 e^{(1)} + (-1)^m \alpha_2 e^{(2)})$.

Отсюда следует, что если $\alpha_2 = 0$ (т.е. $x \parallel e^{(1)}$), то $A^m x = \lambda_1^m x$, т.е. $x \geq 0$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_1.

Если $\alpha_2 \neq 0$ (т.е. $x \nparallel e^{(1)}$), то $Ax \neq \lambda_1 x$, $A^2 x = \lambda_1^2 x$, т.е. x – собственный вектор матрицы A^2, соответствующий собственному значению λ_1^2.

2) $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда, если $\alpha_1 \neq 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m x_2\| / \|A^m x_1\| = \lim_{m\to\infty} \|\lambda_2^m \alpha_2 e^{(2)}\| / \|\lambda_1^m \alpha_1 e^{(1)}\| = \lim_{m\to\infty} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^m \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0.$$

Рассмотрим матрицы A, которые отвечают приведенным здесь случаям, и расположение в K_a^2 ω-предельных множеств соответствующих этим матрицам систем F^m.

I. Матрица $A \geq 0$ – *неразложимая* ([8], с. 332)). У такой матрицы $\lambda_1 > 0$ – простое число, $e^{(1)} > 0$; других неотрицательных собственных векторов матрица A не имеет.

I.1 *Индекс импримитивности матрицы A равен* 2 (максимально возможный индекс импримитивности матрицы A) ([8], с. 355)). Этому случаю соответствуют значения $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & a_4 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица A имеет 2 собственных значения $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_3 a_4}$.

Пусть $x \in K_a^2$.

Тогда для векторов $x = \alpha_1 e^{(1)}$ $\omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ e^{(1)} \cap K_a^2$.

Для векторов $x \nparallel e^{(1)}$ $\omega_F x \subseteq J_2$, где J_2 – цикл отрезков лучей периода 2, образованный двумя отрезками лучей $J_2^1 = con\ x \cap K_a^2$ и $J_2^2 = con\ Ax \cap K_a^2$, циклически переходящих друг в друга под действием отображения F: $J_{2x} == \{con\ x \cap K_a^2, con\ Ax \cap K_a^2\}$.

Таким образом, в случае отображения F с неразложимой матрицей A индекса импримитивности 2 фазовое пространство K_a^2 системы F^m состоит из одного отрезка луча $J_1^1 = con\ e^{(1)} \cap K_a^2$ и континуума циклов отрезков лучей J_2 периода 2, отрезки лучей каждого из которых расположены по обе стороны от инвариантного множества J_1^1. Для любого вектора $x \in K_a^2$ x и $\omega_F x$ расположены на одном и том же цикле отрезков лучей из K_a^2: J_1^1 периода 1 для всех $x = \alpha_1 e^{(1)}$, $J_{2x} = \{con\ x \cap K_a^2, con\ Ax \cap K_a^2\}$ периода 2 для всех $x \nparallel e^{(1)}$.

Отметим, что это единственный случай, когда отображение F имеет циклы отрезков лучей периода 2; при всех других значениях коэффициентов матрицы A ω-предельные множества системы F^m расположены в K_a^2 на множествах, состоящих из одного отрезка луча.

I.2 *Индекс импримитивности матрицы A равен* 1. Такая матрица называется *примитивной* ([8], с. 355)).

Частным случаем примитивной матрицы A является положительная матрица ($a_i > 0$, $i = \overline{1,4}$).

Согласно ([8], с.355) матрица A примитивна тогда и только тогда, когда некоторая ее степень $A^p > 0$, $p \geq 1$. Поскольку вне диагональные элементы матрицы A^p при любом $p \geq 1$ представимы в виде $a_3 \cdot Q_1$ (нижний левый элемент), $a_4 \cdot Q_2$ (верхний правый элемент), то необходимо, чтобы $a_3 > 0$, $a_4 > 0$; если, кроме того, $a_1 = 0$ ($a_2 > 0$) или $a_2 = 0$ ($a_1 > 0$), то $A^2 > 0$; если $a_1 = a_2 = 0$, то не существует числа $p > 1$, при котором $A^p > 0$. Здесь Q_1, Q_2 – многочлены от $a_i \geq 0$ степени $p - 1$, $i = \overline{1,4}$. Таким образом, примитивная матрица имеет не более одного нулевого элемента $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$.

У примитивной матрицы $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\alpha_1 \neq 0$.

Для любого $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ e^{(1)} \cap K_a^2$.

Таким образом, в случае отображения F с неразложимой матрицей A индекса импримитивности 1 отрезок луча $J_1^1 = con\ e^{(1)} \cap K_a^2$ является единственным притягивающим все траектории из K_a^2 инвариантным множеством; для любого вектора $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1^1$.

II. Матрица A – *разложимая* ([8], с.344). С помощью перестановки рядов ее можно привести к нормальной форме ([8], с.351). Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $a_3 \geq 0$, $a_4 = 0$ (случай $a_3 = 0$, $a_4 > 0$ можно свести к данному, рассмотрев отображение с транспонированной матрицей A').

Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda = a_1$ и $\lambda = a_2$.

Вычислим матрицу A^m: $A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & 0 \\ \sum_{i=0}^{m-1} a_2^i a_3 a_1^{m-i-1} & a_2^m \end{pmatrix}$. Для любого вектора $x \geq 0$ вектор $A^m x$ равен $A^m x = (a_1^m x_1,\ \sum_{i=0}^{m-1} a_2^i a_3 a_1^{m-i-1} x_1 + a_2^m x_2)'$.

II.1 Пусть $a_3 = 0$. Матрица A в этом случае называется *квазидиагональной* и имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ ([8], с. 351).

Собственным значениям матрицы A $\lambda = a_1$ и $\lambda = a_2$ соответствуют собственные векторы $e_{a_1} = (1, 0)'$ и $e_{a_2} = (0, 1)'$.

Множества $J_{1(a_1)} = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$, $J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ инвариантны относительно отображения F и представляют собой отрезки координатных лучей.

II.1.1 При $a_1 > a_2$ максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_1$, $e^{(1)} = e_{a_1}$; $\lambda_2 = a_2$, $e^{(2)} = e_{a_2}$ (при $a_2 > a_1$ максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_2$, $e^{(1)} = e_{a_2}$; $\lambda_2 = a_1$, $e^{(2)} = e_{a_1}$).

Для любого $x \in K_a^2 \backslash J_1^2$ $\omega_F x \subseteq J_1^1$, т.е. отрезок координатного луча J_1^1 притягивает почти все (с точностью до множества J_1^2 нулевой меры) траектории из K_a^2 (для любого $x \in K_a^2 \backslash J_1^1$ $\omega_F x \subseteq J_1^2$, т.е. отрезок координатного луча J_1^2 притягивает почти все (с точностью до множества J_1^1 нулевой меры) траектории из K_a^2).

II.1.2 При $a_1 = a_2$ максимальное собственное значение $\lambda_1 = a_1 = a_2$ имеет кратность 2. Для любого $x \in K_a^2$ множество $J_1(x) = con\ x \cap K_a^2$ инвариантно относительно отображения F. Вектор x и множество $\omega_F x$ расположены на одном и том же отрезке луча $J_1(x)$, т.е. из $x \in J_1(x)$ следует, что $\omega_F x \subseteq J_1(x)$.

II.2 Пусть $a_3 > 0$. Тогда $Ae_{a_2} = a_2 e_{a_2}$, где $e_{a_2} = (0,1)'$. Множество $J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ – отрезок координатного луча – инвариантно относительно отображения F. Собственному значению $\lambda = a_1$ уже не соответствует координатный вектор $(1,0)'$: координатное подпространство $con\ (1,0)'$ не инвариантно относительно линейного оператора $\mathbf{A}$ ([8], с.352).

II.2.1 При $a_1 = a_2$ максимальное собственное значение $\lambda_1 = a_1 = a_2$ имеет кратность 2; $Ae^{(1)} = \lambda_1 e^{(1)}$, где $e^{(1)} = (0,1)'$, и множество $J_1^1 = con\ e^{(1)} \ \cap\ K_a^2$ инвариантно относительно отображения F.

Нетрудно заметить, что матрица A с точностью до постоянного множителя имеет вид жордановой клетки $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$. Запишем вектор $x \geq 0$ в виде $x = \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 \tilde{e^{(1)}}$, где $\tilde{e^{(1)}}$ – присоединенный вектор, т.е. $A\tilde{e^{(1)}} = \lambda_1 \tilde{e^{(1)}} + e^{(1)}$. Тогда $A^m x = \lambda_1^m x + \alpha_2 C_m^1 \lambda_1^{m-1} e^{(1)}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Оценим предел отношения

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|\lambda_1^m x\|}{\|\alpha_2 C_m^1 \lambda_1^{m-1} e^{(1)}\|} = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_1 \|x\|}{|\alpha_2| m} = 0.$$

Отсюда следует, что векторы последовательности $A^m x$ при $m \to \infty$ располагаются вдоль вектора $e^{(1)} = (0,1)'$.

Таким образом, для любого $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ (0,1)' \ \cap\ K_a^2$, т.е. отрезок координатного луча J_1^1 является единственным притягивающим все траектории из K_a^2 инвариантным множеством (см. также [1]).

Еще одно доказательство данного утверждения можно провести непосредственным вычислением.

Оценим предел отношения первой координаты вектора $A^m x$ ко второй:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|A^m x_1|}{|A^m x_2|} = \lim_{m\to\infty} \frac{|a_2^m x_1|}{|a_2^m x_2 + m a_3 a_2^{m-1} x_1|} = \lim_{m\to\infty} \frac{|x_1|}{|x_2 + m a_3 a_2^{-1} x_1|} = 0,$$

откуда следует, что предельные векторы последовательности $A^m x$ располагаются параллельно вектору $(0,\ A^m x_2)'$, т.е. параллельно вектору $e_{a_2} = (0,1)'$.

II.2.2 Пусть $a_1 \neq a_2$. Тогда матрица A имеет собственный вектор e_{a_1}, соответствующий собственному значению $\lambda = a_1$, равный $e_{a_1} = (\alpha,\ \frac{\alpha a_3}{a_1 - a_2})'$, где константа α выбирается из условия $\|e_{a_1}\| = 1$. Собственному значению $\lambda = a_2$ соответствует собственный вектор $e_{a_2} = (0,\ 1)'$.

II.2.2.1 $a_2 > a_1 > 0$. Максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_2$, которому соответствует собственный вектор $e^{(1)} \equiv e_{a_2}$.

Для любого вектора $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1^1 \equiv J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$, т.е. отрезок координатного луча J_1^1 является единственным притягивающим все траектории из K_a^2 инвариантным множеством, т.к. $J_1^2 \equiv J_{1(a_1)} = con\ e_{a_1} \cap K_a^2 = \{0\}$.

Убедимся еще раз в правильности результата, оценив предел отношения первой координаты вектора $A^m x$ ко второй:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|a_1^m x_1|}{|a_2^m x_2 + \sum_{i=0}^{m-1} a_2^i a_3 a_1^{m-i-1} x_1|} = \lim_{m\to\infty} (\frac{a_1}{a_2})^m \cdot \frac{|x_1|}{|x_2 + \sum_{i=0}^{m-1} a_2^{i-m} a_3 a_1^{m-i-1} x_1|} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} (\frac{a_1}{a_2})^m \cdot \frac{|x_1|}{|x_2 + \sum_{i=0}^{m-1} (\frac{a_1}{a_2})^{m-i} \frac{a_3}{a_1} x_1|} \leq \lim_{m\to\infty} (\frac{a_1}{a_2})^m \cdot \frac{|x_1|}{|x_2 + m(\frac{a_1}{a_2})^m \frac{a_3}{a_1} x_1|} = 0.$$

Отсюда следует, что предельные векторы последовательности $A^m x$ располагаются параллельно вектору $e_{a_2} = (0,1)'$.

II.2.2.2 $a_1 > a_2 > 0$. Максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_1$, которому соответствует собственный вектор $e^{(1)} \equiv e_{a_1} = (\alpha,\ \frac{\alpha a_3}{a_1 - a_2})' > 0$.

Для любого вектора $x \in K_a^2 \backslash J_1^2\ \omega_F x \subseteq J_1^1$, где $J_1^1 \equiv J_{1(a_1)} = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$, $J_1^2 \equiv J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ – отрезок координатного луча, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = a_2$ (инвариантный относительно отображения F), $e_{a_2} = (0, 1)'$. Таким образом, отрезок луча J_1^1 притягивает почти все (с точностью до множества J_1^2 нулевой меры) траектории из K_a^2.

Получим тот же результат непосредственным вычислением. Координаты вектора $A^m x$, $x \geq 0$, разделим на положительную величину a_1^m и оценим предельное значение его второй координаты при $m \to \infty$. Имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{a_1^m} \cdot |a_2^m x_2 + \sum_{i=0}^{m-1} a_2^i a_3 a_1^{m-i-1} x_1| = \lim_{m\to\infty} (\frac{a_2}{a_1})^m x_2 + \frac{a_3 x_1}{a_1} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (\frac{a_2}{a_1})^i =$$

$$= \lim_{m\to\infty} (\frac{a_2}{a_1})^m \cdot x_2 + \frac{a_3 x_1}{a_1} \cdot \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} (\frac{a_2}{a_1})^i = \frac{b x_1}{a_1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{a_2}{a_1})^i = \frac{a_3 x_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a_2}{a_1}} = \frac{a_3 x_1}{a_1 - a_2}.$$

Получили, что предельные векторы последовательности $A^m x$, $x \geq 0$, имеют вид $(x_1,\ \frac{a_3 x_1}{a_1 - a_2})'$ и, значит, параллельны собственному вектору матрицы $A \geq 0$ $e^{(1)} \equiv e_{a_1} = (\alpha,\ \frac{\alpha a_3}{a_1 - a_2})' > 0$.

Далее рассмотрим случаи неотрицательной матрицы A, которые не представляются в виде, описываемом в п.п. I, II.

Пусть матрица A имеет вид разложимой матрицы, где числа a_1, a_2 могут быть нулевыми.

III. $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ ($a_2 = 0$, $a_1 > 0$) или $a_1 = a_2 = 0$ и одно из чисел a_3, a_4 равно нулю (пусть $a_3 > 0$, $a_4 = 0$).

III.1 При $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ $\lambda_1 = a_2$, $\lambda_2 = a_1 = 0$, $e^{(1)} \equiv e_{a_2} = (0, 1)'$, $e^{(2)} \equiv e_{a_1} \not\geq 0$, $J_1^1 \equiv J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$, $J_1^2 \equiv J_{1(a_1)} = con\ e_{a_1} \cap K_a^2 = \{0\}$ и для любого $x \geq 0$ $A^m x = (0, a_2^m(\frac{a_3}{a_2} \cdot x_1 + x_2))'$.

Таким образом, для любого вектора $x \in K_a^2\ \omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$.

III.2 При $a_2 = 0$, $a_1 > 0$ $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2 = 0$, $e^{(1)} = e_{a_1} > 0$, $e^{(2)} = e_{a_2} = (0, 1)'$, $J_1^1 \equiv J_{1(a_1)} = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$, $J_1^2 \equiv J_{1(a_2)} = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ и для любого $x \in K_a^2 \backslash J_1^2$ $A^m x = a_1^m (x_1, \frac{a_3}{a_1} \cdot x_1)'$, $\omega_F x \subseteq J_1^1$.

Таким образом, отрезок луча $J_1^1 = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$ притягивает почти все (с точностью до множества J_1^2 нулевой меры) траектории из K_a^2. На инвариантном множестве $J_1^2 = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ для любого $x \in J_1^2$ $\omega_F x = \{0\}$.

III.3 $a_1 = a_2 = 0$. Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $e^{(1)} = e^{(2)} = (0, 1)'$. Это случай отображения F с *нильпотентной матрицей* ($A^2 \equiv 0$) ([8], с.195).

Для любого $x \in K_a^2$ $\omega_F x = \{0\}$ и достигается за два шага.

III.4 Пусть $a_1 = 0$, $a_2 > 0$ ($a_2 = 0$, $a_1 > 0$), $a_3 = a_4 = 0$. Максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_2$, $\lambda_2 = a_1 = 0$ (максимальным собственным значением матрицы $A \geq 0$ является число $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2 = 0$). Собственным числам $\lambda_1 = a_2$, $\lambda_2 = 0$ соответствуют собственные векторы матрицы $A \geq 0$ $e^{(1)} = e_{a_2} = (0, 1)'$, $e^{(2)} = e_{a_1} = (1, 0)'$ (собственным числам $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = 0$ соответствуют собственные векторы матрицы $A \geq 0$ $e^{(1)} = e_{a_1} = (1, 0)'$, $e^{(2)} = e_{a_2} = (0, 1)'$).

Для любого вектора $x \in K_a^2 \backslash J_1^2\ \omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$, т.е. отрезок луча J_1^1 притягивает почти все (с точностью до множества $J_1^2 = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$ нулевой меры) траектории из K_a^2 (для любого вектора $x \in K_a^2 \backslash J_1^2\ \omega_F x \subseteq J_1^1 = con\ e_{a_1} \cap K_a^2$, т.е. отрезок луча J_1^1 притягивает почти все (с точностью до множества $J_1^2 = con\ e_{a_2} \cap K_a^2$ нулевой меры) траектории из K_a^2).

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если максимальное собственное значение матрицы* $A \geq 0$ $\lambda > 0$, *то для всех (или почти для всех с точностью до множества нулевой меры)* $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1 = con\ e \cap K_a^2$, *где* $e \geq 0$ *– соответствующий числу* λ *собственный вектор матрицы* A;
если $e > 0$, *то возможно также, что для любого* $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_{1x} = con\ x \cap K_a^2$ *или* $\omega_F x \subseteq J_{2x} = \{con\ x \cap K_a^2,\ con\ Ax \cap K_a^2\}$, *т.е.* x *и* $\omega_F x$ *принадлежат одному и тому же циклу отрезков лучей периода* 1 *или* 2.

Если максимальное собственное значение матрицы $A \geq 0$ $\lambda = 0$, *то для любого* $x \in K_a^2$ *множество* $\omega_F x = \{0\}$ *достигается за две итерации.*

Замечание. *Пусть* $A \geq 0$ *– матрица с пропорциональными строками, т.е.* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{pmatrix}$, *где* a_1, a_2, $k > 0$. *Тогда* $A > 0$ *– примитивная матрица. Максимальным собственным значением матрицы* A *является число* $\lambda = a_1 + ka_2$, *которому соответствует собственный вектор* $e = (\alpha, k\alpha)' > 0$, $\alpha > 0$.

Если матрица $A_1 \geq 0$ *имеет пропорциональные столбцы, т.е.* $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{pmatrix}$, *то* $A_1 = A'$. *Числу* $\lambda = a_1 + ka_2$ *соответствует собственный вектор* $e = (\alpha, k'\alpha)' > 0$, *где* $k' = a_2/a_1$.

Для любого $x \in K_a^2$ $\omega_F x \subseteq J_1 = con\ e \cap K_a^2$.

Цитированная литература

1. **Панкратова И.Н.** // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995 – 997.

2. **Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.** Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.

3. **Шарковский А.Н., Коляда С.Ф. и др.** Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.

4. **Leslie P.H.** // Biometrika. 1945. V. 33, P. 183 – 212.

5. **Панкратова И.Н.** // Проблемы эволюции открытых систем. Алматы, 2003. Т.1, вып.5. С.215 – 218.

6. **Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических популяций. М., 1978.

7. **Панкратова И.Н.** // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1574 – 1575.

8. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М., 1988.

Поступила в редакцию 05.04.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 95 – 102*

УДК 512.54. 0:510.5

ПОЗИТИВНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Хисамиев Н.Г.

Восточно- Казахстанский государственный технический университет им. Д.Серикбаева
070004 Усть-каменогорск Набережная Красных Орлов, 69 hisamiev@ mail.ru

Дано необходимое и достаточное условие для позитивной определенности двухступенно нильпотентной группы без кручения, у которой ранг фактор центра группы по изолятору коммутанта бесконечен.

Класс позитивно определенных групп содержит вычислимые группы и, в отличие от них, обладает рядом важных свойств. Например, нильпотентное произведение позитивно определенных нильпотентных групп позитивно определено. В [1] доказано, что позитивно определенная абелева группа без кручения вычислима. Однако, это неверно для нильпотентных групп без кручения [2]. Поэтому представляет интерес исследования позитивно определенных нильпотентных групп.

В статье получено достаточное условие вычислимости подгруппы позитивно определенной группы. Дано необходимое и достаточное условие позитивной определенности двухступенно нильпотентной группы без кручения, у которой ранг фактор группы центра по изолятору коммутанта бесконечен. Доказана упорядоченно позитивная определенность позитивно определенной двухступенно нильпотентной группы без кручения, коммутант которой имеет конечный ранг и ранг фактор группы центра по изолятору коммутанта бесконечен. Найдено необходимое условие позитивной определенности нильпотентной группы без кручения.

Все используемые, но не определенные понятия можно найти по теории конструктивных моделей в [3], а по теории групп – в [4].

В следующей теореме получено достаточное условие вычислимости подгруппы конструктивной группы.

Теорема 1. *Пусть (G,ν) – позитивно нумерованная группа и B – такая её вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре $Z(G)$ группы G, что фактор-группа G/B абелева без кручения и ранг $Z(G)/B$ бесконечен. Тогда существует позитивная нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства:*

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки МОиН РК, грант №1.7.1-2.
Keywords: *pozitive nilpotent group, computable group, center of group*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

1) *подгруппа B вычислима в (G,μ);*

2) *существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{c_i | i \in \omega\}$ в (G,μ), что смежные классы $\{c_i + B\}$ образуют базис фактор-группы G/B.*

Доказательство. Пусть группа (G,μ) и подгруппа B удовлетворяют условиям теоремы. Пусть $D^+_\nu(G) = \{\langle n,m\rangle \mid \nu n = \nu m\}$.Так как (G,ν) – позитивная группа, то $D^+_\nu(G)$ вычислимо перечислимо. Через $\{D^t \mid t \in \omega\}$ обозначим сильно вычислимую последовательность конечных множеств таких, что $\bigcup\{D^t \mid t \in \omega\} = D^+_\nu(G)$. Пусть даны элементы $g_1, g_2 \in G$. Будем говорить, что g_1 t -равен g_2 $(g_1 =_t g_2)$, если $< n,m > \in D^t$ и $\nu n = g_1, \nu m = g_2$ для некоторых n,m. В дальнейшем элемент $g \in G$ будем также отождествлять с его номером.

Пусть $\{B^t | t \in \omega\}$ – сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что выполнены условия:

1. $\bigcup B^t = B$,

2. $\{x^\alpha \cdot y^\beta | x,y \in B^t, |\alpha|,|\beta| \le t\} \subseteq B^{t+1}$.

Пусть $\overline{c} = \{c_i | c < n\}$ – система элементов группы G. t-оболочкой системы $\overline{c}$ назовем множество $[\overline{c}]_t = \{x | x^\alpha = \prod c_i^{\alpha_i} b,\ b \in B^t, |\alpha|, |\alpha_i| \le t, \alpha \ne 0\}$.

Введем множества $\overline{B_t} = B_t \bigcup\{[x,y] | x,y \in [\overline{c_t}]\} \bigcup\{x | x^\alpha \in B^t, \nu^{-1}x \le t, \alpha < t\}$,

$B_t = \{x_1 \dots x_t | x_i \in \overline{B_t}\}$.

Систему $\overline{c}$ назовем t-независимой, если из

$$\prod_{i<n} c_i^{\alpha_i} b =_t e,$$

где $b \in B_t, |\alpha_i| \le t$, следует $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

Пусть G_0, G_1 – конечные подмодели группы G. Отображение $\varphi : G_0 \to G_1$ назовем t- изоморфизмом, если выполнены условия:

1. если $g_0, g_1 \in G_0$ и $g_1 =_t g_2$, то $\varphi g_1 =_t \varphi g_2$,

2. для любого $s, 0 < s \le t$, и элемента $g \in G_0$ справедлива эквивалентность

$$\exists g_0 \in G_0(g_0^s =_t g) \Leftrightarrow \exists g_0^{'}(g_0^{'} =_t \varphi g).$$

Следующие две леммы известны.

Лемма 1. *Пусть G – двухступенно нильпотентная группа и даны элементы $c_i \in G$, $i < t$, $\alpha_i, \beta_i \in Z$. Тогда справедливо равенство*

$$\prod_i c_i^{\alpha_i} \cdot \prod_i c_i^{\beta_i} = \prod_i c_i^{\alpha_i+\beta_i} \prod_{i>j} [c_i,c_j]^{\alpha_i\beta_j}.$$

Лемма 2. *Пусть G – двухступенно нильпотентная группа и даны элемент $x = \prod c_i^{\alpha_i} b$, где $b \in Z(G)$, $\alpha_i \in Z$ и число $\beta \in Z$. Тогда справедливо равенство*

$$x^\beta = \prod c_i^{\alpha_i\beta} \prod_{i>j} [c_i,c_j]^{\frac{\beta^2-|\beta|}{2}\alpha_i\alpha_j} b^\beta$$

Лемма 3. *Пусть элементы c_i, a_i, $i < n$, такие, что для любой системы чисел $\{k_i\}$, $0 < k_i < [t!]^2$, системы элементов $\overline{c} = \{c_i\}$, $\overline{d} = \{c_i, a_i^{k_i}\}$ является $9t^6$-независимыми и $[a_i,c_j] = e$, $i,j < n$. Тогда существует t- изоморфизм $\varphi : [\overline{c}]_t \to [\overline{c'_t}]$, что $\varphi c_i = c'_i$, $\varphi \restriction B_t = id$, где $\overline{c'} = \{c'_i\}$, $c'_i = c_i \cdot a_i^{[t!]^2}$.*

Доказательство. Пусть $x \in [\overline{c}]_t$. Тогда существуют числа α, α_i и элемент $b \in B^t$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t, \alpha \neq 0$ и

$$x^{\alpha} = \prod c_i^{\alpha_i} b. \tag{1}$$

Тогда положим

$$\varphi x \leftrightharpoons x' \leftrightharpoons x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i l}{\alpha}}, \tag{2}$$

где $l = [t!]^2$.

Из (1), (2) следует, что $x' \in [\overline{c'}_t]$. Покажем, что φ определенно корректно. Пусть

$$x^{\alpha'} = \prod c_i^{\alpha'_i} b', \tag{3}$$

где $|\alpha'|, |\alpha'_i| \leq t$, $\alpha' \neq 0$, $b' \in B^t$. Тогда имеем

$$\varphi x \leftrightharpoons \tilde{x'} = x \prod a_i^{\frac{\alpha'_i l}{\alpha}}. \tag{4}$$

Покажем, что $x' = \tilde{x}$! Для этого возведем (1) в степень α', а (3) – в α, и найдем выражение элемента $x^{\alpha\alpha'} x^{-\alpha\alpha'} = e$. По лемме 2

$$x^{\alpha\alpha'} = (\prod c_i^{\alpha_i} b)^{\alpha'} = \prod_i c_i^{\alpha_i\alpha'} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{\alpha'^2 - |\alpha'|}{2}\alpha_i\alpha_j} b^{\alpha'},$$

$$x^{-\alpha\alpha'} = (\prod c_i^{\alpha'_i} b)^{-\alpha} = \prod c_i^{-\alpha'_i\alpha} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{\alpha^2 - |\alpha|}{2}\alpha'_i\alpha'_j} b'^{-\alpha}.$$

Если положить $\beta_{ij} = \frac{\alpha'^2 - |\alpha'|}{2}\alpha_i\alpha_j + \frac{\alpha^2 - |\alpha|}{2}\alpha'_i\alpha'_j$, то по лемме 1 имеем

$$e = x^{\alpha\alpha'} x^{-\alpha\alpha'} = \prod c_i^{\alpha_i\alpha'} \prod c_i^{-\alpha'_i\alpha} \prod [c_i, c_j]^{\beta_{ij}} b^{\alpha'} \cdot b'^{\alpha} =$$

$$= \prod c^{\alpha_i\alpha' - \alpha'_i\alpha} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{-\alpha_i\alpha'\alpha'_j\alpha + \beta_{ij}} b^{\alpha'} b'^{\alpha}.$$

Так как справедливо неравенство $-\alpha_i\alpha'\alpha'_j\alpha + \beta + \alpha' + \alpha \leq 5t^{\varphi} < 9t^6$, то из $9t^6$-независимости $\{c_i\}$ и последнего равенства получим $\alpha_i\alpha' - \alpha'_i\alpha = 0$, т.е. $\frac{\alpha_i}{\alpha} = \frac{\alpha'_i}{\alpha'}$.

Отсюда и из (2), (4) следует, что $x' = \tilde{x}'$. Стало быть отображение φ определенно корректно.

Аналогично доказывается, что φ является t-сильным изоморфизмом. Лемма доказана.

Сформулируем некоторые свойства системы элементов, необходимые в дальнейшем. Они непосредственно следуют из доказательства леммы 4.

Замечание 1._Если для любого числа $s > 0$ система элементов $\{c_j | j \leq k\}$, $k \leq n$ является s-независимой, то для любых чисел m, t элемент $a_j = 0$._

Замечание 2._Пусть k – такое наименьшее число, что $a_k \neq 0$. Тогда система элементов $\{c_j | j \leq k\}$, c_k является m-зависимой. В этом случае a_k выбирается следующим образом. Он имеет наименьший ν-номер среди таких элементов x, что $[c_i, x] = 1$, $i \leq n$, и система элементов $\{c_j\}$, x является m-независимой._

Замечание 3._Если для некоторого числа $s > 0$ система $\{c_j | j \leq k\}$ является s-зависимой, то существует такое j, что для некоторых чисел m, t элемент $a_j \neq 0$._

Приступим теперь к построению требуемой нумерации μ. Пусть R, S такие вычислимые множества натуральных чисел, что $S \subset \overline{R}$, $|R| = |B|$, $\overline{R} \setminus S$ бесконечно. Далее, пусть $S = \{s_i | i \in$

$\omega\}$, $s_i < s_j$ для $i < j$. Нумерацию μ построим по шагам t. Пусть сделаны t шагов и определена система элементов $\overline{c}^t = \{c_i^t | i \le t-1\}$ и построена нумерация μ^t некоторого конечного множества G^t. При этом выполнены следующие условия:

1. $B^t \bigcup \{x | \nu^{-1}x \le t, x \in [\overline{c}^t]_t\} \subseteq G^t \subseteq [\overline{c}^t]_t$.

ШАГ $t+1$. По лемме 4 для системы $\{c_i^t\}$ и чисел $m = 9t^6, t$ эффективно находим систему элементов $\{a_i^{t+1}\}$ и положим $c_i' = c_i^t \cdot a^{[t!]^2}$. Затем выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером, что система $\{c_i'\}$, a является m-независимой. Тогда полагаем $c_i^{t+1} \leftrightharpoons c_i^t, c_i^{t+1} \leftrightharpoons a, \overline{c}^{t+1} = \{\{c_i'\}, c_t^{t+1}\}$.

По лемме 3 существует t- изоморфизм $\varphi_t : [\overline{c}^t]_t \to [\{c_i'\}]_t$. Теперь полагаем

$$G^{t+1} \leftrightharpoons B^{t+1} \bigcup \varphi_t G^t \bigcup \{x | \nu^{-1}x \le t+1, x \in [\overline{c}^{t+1}]_{t+1}\}.$$

Определим теперь нумерацию μ^{t+1} множества G^{t+1} следующим образом.

1. Если $x \in \varphi_t G^t, \varphi_t y = x, \mu^t n = y$, то полагаем $\mu^{t+1} n = x$, элемент y освобождаем от номера.

2. $\mu^{t+1} s_t = c_t^{t+1}$.

Пусть элемент $x \in G^{t+1}$ имеет наименьший ν-номер среди таких элементов A^{t+1}, что они еще не имеют μ^{t+1}-нумерации и $x^\alpha = \prod (c_i^{t+1})^{\alpha_i} \cdot b$, где $b \in B^{t+1}, |\alpha|, |\alpha_i| \le t+1$. Тогда элементу x присваиваем μ^{t+1}-номер следующим образом.

3a). Если $\sum |\alpha_i| = 0$, то полагаем $\mu^{t+1} r = x$, где r – наименьшее неиспользованное число из множества R, т.е. r еще не является μ^{t+1}-номером никакого элемента.

3б). Если $\sum |\alpha_i| \ne 0$, то полагаем $\mu^{t+1} n = x$, где n – наименьшее неиспользованное число из множества $\overline{R} \setminus S$.

Аналогично присваиваем μ^{t+1}-номера следующему элементу из G^{t+1}.

Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Положим

$$\mu n = \lim_t \mu^t k$$

Покажем, что построенная нумерация требуемая. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 5. *Для любого i существует шаг t_i, что выполнено $\forall t \ge t_i$ $(c_i^t = c_i^{t_i})$.*

Доказательство. Проведем индукцией по i. Пусть для $i < m$ лемма доказана и $i = m$. Положим $c_j = c_j^{t_j}$, $j < m$ и $q = max\{t_j\}$. Из замечания 3 следует, что для любого t системы $\{c_j\}$ является t-независимой. Допустим, что элементы $c_m^t, t \ge q$ бесконечно часто меняются.Выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером, что для любого s система $\{c_j\}, a$ является s-независимой и элемент a принадлежит к центру группы G. Тогда из замечаний $2, 3$ следует, что на некотором шаге $l+1$ элемент $c_m^{l+1} = c_m^l \cdot a^{[l!]^2}$. Отсюда для любого $t \ge l+1$ системы $\{c_j\}, c_m^{l+1}$ будет t-независимой. По замечанию 1 имеем $\forall t > l$ $(c_m^t = c_m^{t+1})$. Получим противоречие, что и доказывает лемму.

Для дальнейшего положим $c_i \leftrightharpoons c_i^{t_i}$.

Лемма 6. *Для любых чисел k и t система $\{c_i^t | i < k\}$ зависит от системы $\{c_i^{t+1} | i < k\}$.*

Доказательство. Пусть i – наименьшее такое число, что $c_i^{t+1} \ne c_i^t$. Тогда по построению c_i^t зависит от $c_0^t, \dots c_{i-1}^t$ и $c_j^{t+1} = c_j^t$. Отсюда c_i^t зависит от $\bar{c} = \{c_0^t, \dots c_{i-1}^t\}$. Рассмотрим элемент c_{i+1}^t. Если c_{i+1}^t. не зависит от $\bar{c}$, то $c_{i+1}^{t+1} = c_{i+1}^t$. Поэтому c_{i+1}^t. зависит от $\bar{c}, c_{i+1}^{t+1}$. Что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Смежные классы $\{c_i B | i \in \omega\}$ образуют базис фактор-группы G/B.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть элемент a с наименьшим ν-номером такой, что система $\{c_iB\}, aB$ является линейно независимой. Тогда найдутся число m и шаг t' такие, что все элементы из множества $\{x|\nu^{-1}x < \nu^{-1}a\}$ будут t'-зависимы от системы $\{c_j|j < m\}$. Можно считать, что $t' \geq max\{t_j\}$. Пусть s такое наибольшее число k, что $k < t'$ и элементы $c_0^{t'}, \dots, c_k^{t'}$ не меняются в дальнейшем. Очевидно, что $s \geq m$. Если $s = t' - 1$, то по построению элемент $c_{t'}^{t'+1} = a$. Отсюда по замечанию 1 элемент $c_{t'} = a$. Получим противоречие.

Поэтому $s < t' - 1$. Тогда на некотором шаге $l + 1 \geq t'$ элемент c_{s+1}^l меняется. Пусть l – наименьший такой шаг. Рассмотрим возможные случаи.

1.$c_{s+1}^{l+1} = c_{s+1}^l a$.

Тогда по построению c_{s+1}^l зависит от $\bar{c} = \{c_0, \dots, c_s\}$. Отсюда и из предположения следует, что c_{s+1}^{l+1} не зависит от $\bar{c}$. По замечанию 1 имеем $c_{s+1} = c_{s+1}^l a$. Отсюда a зависит от $\{c_0, \dots, c_{s+1}\}$. Противоречие.

2.Случай 1 не выполняется.

Тогда из построения следует, что для некоторого $i < s$ верно $[c_i, a] \neq 1$. Поэтому по построению $c_l^{l+1} = a$ и для любых чисел $k, s < k < l$, и шага $t \geq l + 1$ верно $c_k^{t+1} \neq c_k^t a$. Покажем, что для любого шага $t \geq l + 1$ элемент a не зависит от системы $\bar{c}^t = \{c_0^t, \dots, c_{l-1}^t\}$. Действительно, допустим противное и t – наименьшее число, что a зависит от $\bar{c}^t$. Тогда по лемме 5 элемент a зависит от $c_0, \dots, c_{l-1}$. Противоречие, a не зависит от c^t. Поэтому $c_l = a$, что невозможно. Лемма доказана.

Из замечания 2 следует, что в этом случае $c_{s+1}^{l+1} = c_{s+1}^l \cdot a^{[l!]^2}$. Отсюда по замечанию 1 имеем $c_{s+1} = c_{s+1}^{l+1}$. Следовательно, элемент a зависит от $c_0, \dots, c_{s+1}$. Получим противоречие, что и доказывает лемму.

Лемма 8. *μ – нумерация группы A.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента x существует шаг l и число m такие, что выполнено $\forall t \geq e\ (\mu^t m = \mu^e m = x)$. По лемме 6 для элемента x найдутся числа $s, \alpha, \alpha_i, i < s$, и элемент $b \in B$ такие, что

$$x^\alpha = \prod_{i<s} c_i^{\alpha_i} b.$$

Пусть шаг $e + 1$ такой, что $e \geq max\{t_i\}, b \in B^e$ и $|\alpha|, |\alpha_i| \leq e$, $\nu^{-1}x \leq e$. Тогда $x \in G^{e+1}$. Отсюда для некоторого числа m имеем $\mu^{e+1}m = x$. Так как для любого $t \geq e+1$ верно $\varphi_t c_i = c_i$, $\varphi_t b = b$, то из построения нумерации μ^t следует, что $\mu^t m = \mu^e m = x$. Аналогично доказывается, что для любого числа n существует

$$\lim_t \mu^t n.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Справедливо $\mu^{-1}B = R$.*

Доказательство. Пусть элемент $b \in B$. Докажем, что тогда для некоторого числа r из R верно $\mu r = b$. По лемме 7 существуют такие числа e и r, что $\forall t \geq e\ (\mu^t r = \mu^e r = b)$. Пусть e – наименьшее такое число. Можно считать, что $e \geq 2$. Рассмотрим отдельно случаи из определения нумерации μ^{t+1} на шаге $t + 1$ при $t = e - 1$ и $x = b$.

Пусть имеет место случай 1:

$$b \in \varphi_{e-1} G^{e-1}, \varphi_{e-1} y = b, y \in G^{e-1}.$$

Тогда существуют числа $\alpha, \alpha_i, i \leq e-2$, и элемент $b' \in B^{e-1}$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \leq e-1, |\alpha| \neq 0$ и

$$y^\alpha = \prod c_i^{(e-1)^{\alpha_i}} b!. \qquad (5)$$

Если $\sum|\alpha_i| = 0$, то $b \in B^{e-1}$. Тогда из определений φ_e и μ_e следует, что $\forall t \geq e$ $(\mu^t r = \mu^{e-1} r = b)$. Это противоречит минимальности e.

Поэтому $\sum|\alpha_i| \neq 0$. Отсюда и из (5) следует, что на некотором шаге $s, s > e$, обнаружится $9s^6$ – зависимость элементов $\{c_i^e\}$. Тогда по замечанию 3 имеем $\varphi_{s+1} b \neq b$. Поэтому на шаге $s+1$ номер элемента b изменится. Противоречие. Т.о., случай 1 невозможен. Аналогично показывается, что невозможны случаи 2 и 3б. Пусть имеет место случай 3a. Тогда по построению нумерации μ^e имеем $r \in R$. Лемма доказана.

Лемма 10. (G, μ) – *позитивно нумерованная группа.*

Доказательство. Пусть $\mu^t : N^t \to G^t$ – нумерация модели G^t, построенная на шаге t. Через N^t обозначим такую модель $< N^t, \cdot, e >$, что отображение μ^t есть изоморфизм моделей G^t и N^t. Аналогично определим модель N по нумерации $\mu : \omega \to G$.Через D_t^+, D^+ обозначим положительные диаграммы моделей соответственно N^t, N, т.е.

$$D^t = \{< n, m > | \mu^t n =_t \mu^t m\},$$

$$D = \{< n, m > | \mu n =_t \mu m\}.$$

Так как по построению нумерации верно $\mu^{t+1} m = \varphi_t \mu^t m$, то $D_t \subseteq D_{t+1}$. По определению нумерации μ имеем $D = \cup D_t$. Так как (G, ν) – позитивно нумерованная группа, то $\{D_t\}$ – вычислимая последовательность конечных множеств. Следовательно, D вычислимо,т.е. (G, μ) – позитивно нумерованная группа.

Из лемм 3 – 10 непосредственно следует, что построенная нумерация требуемая.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G – позитивно определенная двухступенно нильпотентная группа и изолятор коммутанта $I(G')$ содержится в центре группы G и ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ бесконечен, где $Z(G)$ – центр группы G. Тогда существует такая позитивная нумерация μ группы G, что подгруппа $I(G')$ вычислима в (G, μ).*

Действительно, если ν – позитивная нумерация группы G, то подгруппа $I(G')$ вычислимо перечислима и фактор-группа $G/I(G')$ – абелева без кручения, т.е. все условия теоремы 1 выполнены.

Следствие 2. *Пусть G – позитивно определенная двухступенно нильпотентная группа без кручения и ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ бесконечен. Тогда существует такая позитивная нумерация μ группы G, что изолятор коммутанта $I(G')$ вычислим в (G, μ).*

Пусть даны абелевы группа $< A, \circ >, < B, \cdot >, A \bigcap B = \{e\}$ и функция $f : A \times A \to B$, удовлетворяющая равенствам

1. $f(a, e) = f(e, a) = e$,
2. $f(a, a^{-1}) = f(a^{-1}, a) = e$,
3. $f(a_i \circ a_j, a_k) \cdot f(a_i, a_j) = f(a_i, a_j \circ a_k) \cdot f(a_j, a_k)$.

Функцию f назовем системой факторов из A в B. По ней определим двухступенно нильпотентную группу следующим генетическим кодом: $G =$ гр $(A, B \| a_0 b_0 = b_0 a_0, a_0 b_0 \times a_1 b_1 = a_0 \circ a_1 f(a_0, a_1) b_0 b_1, a_i \in A, b_i \in B)$, которая называется расширением группы B посредством группы A и системы факторов f.

Легко проверить, что если (A, ν) и (B, μ) – позитивно нумерованные абелевы группы и система факторов вычислима, т.е. является морфизмом нумерованных множеств из $(A, \nu) \times (A, \nu)$ в (B, μ), то естественная нумерация γ группы G, определяемая по ν и μ, будет позитивной.

Теорема 2. *Пусть G – двухступенно нильпотентная группа и изолятор коммутанта $I(G')$ содержится в центре группы G и ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ бесконечен. Тогда* *группа G позитивно определена, если и только если она изоморфна расширению некоторой позитивно нумерованной абелевой группы (B,ν), содержащейся в центре $Z(G)$ группы G, посредством конструктивной абелевой группы без кручения (A,μ) и вычислимой системы факторов f из (A,μ) в (B,ν).*

Доказательство. Достаточность доказана выше.

Необходимость. Пусть (G,ν) – позитивно нумерованная абелева группа, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда подгруппа $B \leftrightharpoons I(G')$ перечислима и фактор-группа G/B – абелева без кручения. По теореме 1 существует позитивная нумерация μ группы G такая, что подгруппа B вычислима в (G,μ). Пусть $\mu^{-1}B = R$ и вычислимая функция g перечисляет множество R. Если положим $\beta n = \mu g n$, то (B,β) – позитивно нумерованная группа. Введем перечислимое множество A представителей в смежных классах $\{xB \mid x \in G\}$ следующим образом. Представителем единичного класса B считаем элемент e и его обозначим через a_0. Пусть представители $a_0,\ldots,a_{n-1}$ уже выбраны и μm_n – элемент с наименьшим μ-номером такой, что для всех $i<n$ верно $\mu m_n \neq a_i (mod B)$. Если для некоторого $i<n$ имеем $a_i\cdot(\mu m_n)^{-1} \in B$, то полагаем $a_n = a_i^{-1}$. Если же это не так, то $a_n \leftrightharpoons \nu m_n$. На множестве A введем операцию умножения $\circ$, положив

$$a_i \circ a_j = a_k \Leftrightarrow a_i a_j a_k^{-1} \in B.$$

Тогда группа $\langle A,\circ\rangle$ изоморфна G/B и нумерация α группы $A(\alpha n \leftrightharpoons a_n)$ будет конструктивной. Определим функцию $f : A\times A \to B$, положив $f(a_i,a_j) = a_i a_j a_k^{-1}$, где $a_i \circ a_j = a_k$. Легко проверить, что f является морфизмом нумерованных множеств $(A,\alpha)\times(A\times\alpha) \to (B,\beta)$ и удовлетворяет равенствам $1-3$ и группа (G,μ) вычислима изоморфна расширению (B,β) посредством (A,α) и вычислимой системы факторов f.

Необходимость и, следовательно, теорема доказаны.

Следствие 5. *Двухступенно нильпотентная группа G без кручения, у которой ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ бесконечен, позитивно определена тогда и только тогда, когда она изоморфна расширению позитивно нумерованной абелевой группы (B,ν), содержащейся в центре группы G, посредством конструктивной абелевой группы без кручения (A,μ) и некоторой рекурсивной системы факторов из (A,μ), в (B,ν).*

Предложение 1. *Пусть (G,ν) – позитивно определенная двухступенно нильпотентная группа G без кручения, у которой ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ центра по изолятору коммутанта $I(G')$ конечен. Тогда центр и фактор группа $G/Z(G)$ группы G по центру конструктивизируемы.*

Действительно, пусть для позитивно нумерованной группы (G,α) справедливы условия теоремы. Тогда подгруппа $I(G')$ вычислимо перечислима. Отсюда и из конечности ранга фактор группы $Z(G)/I(G')$ следует, что и центр $Z(G)$ вычислимо перечислим. Отсюда абелевы группы без кручения $Z(G)$ и $G/Z(G)$ являются позитвно определенными. Тогда по следствию 3 [1] они конструктивизируемы.

Теорема 3. *Позитивно определенная двухступенно нильпотентная группа G без кручения, коммутант G' которой имеет конечный ранг и ранг фактор группы $Z(G)/I(G')$ центра по изолятору коммутанта $I(G')$ бесконечен, упорядоченно позитивно определенна.*

Доказательство. Предположим, что для группы G справедливы условия теоремы. По следствию 4 существует такая позитивная нумеровация μ группы G, что изолятор коммутанта $I(G')$ вычислим, а в фактор-группе $G/I(G')$ существует вычислимо перечислимая база $\{\overline{a}_i | i \in \omega\}$, т.е. множество $\{\mu^{-1}a_i | i \in \omega\}$ вычислимо перечислимо. Пусть $b_0,\ldots,b_t$ – база изолятора

$I(G')$. Тогда по любому элементу $x \in G$ можно эффективно найти такую последовательность чисел $\langle k, r_0, \ldots, r_{n-1}, s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$, что

$$x^k = a_0^{r_0} \ldots a_{n-1}^{r_{n-1}} b_0^{s_o} \ldots b_{t-1}^{s_{t-1}}.$$

Тогда введем порядок на G, положив $x \geq e \Leftrightarrow r_0 = \ldots = r_{i-1} = 0 \ r_i > 0 \ \vee (r_0 =, \ldots, = r_{n-1} = 0, \ s_0 = \ldots = s_{j-1} = 0, \ s_j > 0$.

Легко проверить, что относительно этого порядка группа $\langle G, \cdot, \leq, \mu \rangle$ будет упорядоченно позитивно определеной.

Приведем одно необходимое условие положительной определенности нильпотентной группы без кручения.

Предложение 2. *Пусть G – позитивно определенная нильпотентная группа без кручения. Тогда существует такой центральный ряд подгрупп*

$$R = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

что все его секции G_{n+1}/G_n конструктивизируемы.

Доказательство. Пусть (G, ν) – позитивно определенная нильпотентная группа без кручения ступени n. Через G_i, Z_i обозначим соответственно изолятор i-го централа и i-й гиперцентр. Легко проверить, что подгруппы G_i вычислимо перечислимы в (G, ν) и $G_i \subset Z_{n-(i-1)}$. Поэтому фактор-группа G_i/G_{i+1} вычислимо перечислимо определенная абелева группа без кручения. Тогда по следствию 3 [1] она конструктивизируема.

Цитированная литература

1. **Хисамиев Н.Г.** //Алгебра и логика. 1986. Т.25, № 2. С.205 – 226.
2. **Латкин И.В.** //Алгебра и логика. 1996. Т.35, № 3. С.308 – 313.
3. **Гончаров С.С., Ершов Ю.Л.** Конструктивные модели. Новосибирск, 1999.
4. **Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М., 1996.

Поступила в редакцию 04.01.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 2 (24) . С. 103 – 104*

ХРОНИКА

К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

В 2007 году исполнилось бы 70 лет известному специалисту в области теории дифференциальных уравнений в частных производных, доктору физико-математических наук, профессору Абдрахманову Марату Абдулхаковичу.

Абдрахманов Марат Абдулхакович родился 28 декабря 1937 года в селе Сергиополь Аягузского района Семипалатинской области. Отец, Абдрахманов Абдулхак, 1906 г. рождения, работал на различных должностях железнодорожного транспорта. В 1941 году он был мобилизован в ряды Красной армии и погиб в 1943 году в боях под городом Харьковым. Мать, Абдрахманова Төлеу, 1908 г. рождения, также работала на железной дороге.

В 1955 году М.А.Абдрахманов окончил среднюю школу №8 г. Аягуза с серебряной медалью и в том же году поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета им.С.М.Кирова, который окончил в 1960 году по специальности "математика".

После окончания университета вся дальнейшая трудовая деятельность Марата Абдулхаковича Абдрахманова была связана сначала с Сектором математики и механики, в дальнейшем выросшего в Институт математики и механики АН КазССР (ныне Институт математики Министерства образования и науки Республики Казахстан). В разные годы он по совместительству преподавал спецкурсы на кафедре дифференциальных уравнений и уравнений математической физики механико-математического факультета КазНУ им.аль-Фараби.

С октября 1960 г. по декабрь 1962 г. Абдрахманов работал старшим лаборантом Сектора математики и механики АН КазССР. С января 1963 года по январь 1966 года он проходил подготовку в аспирантуре Института математики и механики (ИММ) по специальности "Дифференциальные и интегральные уравнения". С декабря 1966 года по декабрь 1973 года работал младшим научным сотрудником лаборатории уравнений математической физики ИММ АН КазССР, а с декабря 1973 г. по 1991 г. в этой же лаборатории занимал должность старшего научного сотрудника по специальности "Дифференциальные уравнения и математическая физика". С 1991 по 1994 гг. М. А. Абдрахманов — ВНС и с 1995 г. до конца своей жизни — главный научный сотрудник, руководитель научно-исследовательской темы по Программе фундаментальных исследований.

В 1971 году Марат Абдулхакович защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель, член-корреспондент АН КазССР Ким Е.И.) и в 1978 г. ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника. В 1994 году Марат Абдулхакович защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а в 1997 г. ему было присвоено ученое звание профессора.

Первые работы М.А.Абдрахманова были посвящены решению краевых задач сопряжения для уравнений параболического и гиперболичского типов методом интегральных уравнений. После стажировки в Ленинградском отделении Математического института им.В.А.Стеклова под руководством профессора В.А.Солонникова М.А.Абдрахманов меняет тематику работы, начинает исследовать начально-краевые задачи для уравнений и систем смешанной параболо-эллиптической структуры, которые не вкладываются в общую теорию параболических и эллиптических уравнений. Он разрабатывает математический аппарат решения таких задач в пространствах Соболева-Слободецкого и Гельдера, получает ряд законченных результатов. Им опубликованы около 100 научных работ, в том числе в центральных республиканских и российских изданиях, в частности, в журналах "Дифференциальные уравнения", "Записки научных семинаров ПОМИ", "Динамика сплошной среды", "Известия АН РК", "Доклады АН РК" и др., выпущена монография "Начально-краевые задачи для уравнений со смешанной параболо-эллиптической структурой" (Алматы. Изд. "Ғылым", 1998г.).

Марат Абдулхакович активно участвовал в подготовке научных кадров, был членом докторского диссертационного совета Д 53.04.01 при Институте математики. Им подготовлено 3 кандидата физико-математических наук.

Вместе с женой, Туганбаевой Куляш (ныне пенсионеркой), Марат Абдулхакович воспитал и вырастил трех дочерей: Ляйля, Айгерим и Алия; все они получили высшее образование.

14 марта 1999 года М.А.Абдрахманов на 62 году жизни скоропостижно скончался. Так, к огромной скорби всех, знавших его, неожиданно закончилась активная и плодотворная жизнедеятельность Марата Абдулхаковича. Он ушел из жизни в расцвете своих творческих сил.

Научная общественность и коллеги-математики дорожат его памятью и бережно относятся к его математическому наследию.

Редакционная коллегия

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 105 – 106*

ХРОНИКА

БЕГАЛЫ САДВОКАСОВИЧ ЖАНБЫРБАЕВ

На 79-ом году ушел из жизни кандидат физико-математи-ческих наук, профессор КазПИ им. Абая Бегалы Садвокасович Жанбырбаев.

Он родился 9 января 1929 года в совхозе "Аккуль" Карабутакского района Актюбинской области. В трудное военное время, будучи учеником 8-го класса, он прошел краткосрочные курсы в г. Актюбинске и стал учителем математики в Тасуткельской семилетней школе. Так определилась его дальнейшая судьба: математика и педагога.

В 1948 году Б.С. Жанбырбаев поступил в Казахский педагогический институт им. Абая на физико-математический факультет, который с отличием окончил в 1952 году и был оставлен в институте ассистентом. Вся его дальнейшая жизнь была неразрывно связана с КазПИ им. Абая. Ассистент, старший преподаватель, заведующий кафедрой, декан физико-математического факультета, доцент, профессор – это путь Бегалы Жанбырбаева в институте.

Курс аспирантуры Б.С. Жанбырбаев прошел при кафедре теории вероятностей в Московском государственном университете им. Ломоносова под руководством академика АН УзССР, доктора физико-математических наук, профессора С.Х. Сираждинова. В 1962 году он защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теме "О локальных теоремах для цепей Маркова". Это была первая кандидатская диссертация по теории вероятностей в Казахстане. По вопросам предельных теорем Бегалы Жанбырбаев неоднократно участвовал во Всесоюзных, международных и республиканских научных конференциях и семинарах, публиковал научные статьи. Б.С. Жанбырбаев был активным популяризатором науки. Он - автор многих статей в Казахской энциклопедии, участвовал в работе терминологической комиссии по созданию "Казахско-русского и русско-казахского терминологического словаря".

Большая часть жизни Б.С. Жанбырбаева связана с преподаванием. Великолепный педагог, блестящий лектор, он пользовался уважением и любовью всей математической общественности Казахстана. Его неоднократно приглашали читать лекции и вести курсы в разные высшие учебные заведения страны: КазНУ им. аль-Фараби, Акмолинский, Атырауский, Актюбинский, Павлодарский педагогические институты. В 1973 году, когда образовалась республиканская физико-математическая школа, академик О.А. Жаутыков пригласил Б.С. Жанбырбаева поработать в школе, где он несколько лет по совместительству вел уроки математики.

Много сил и времени Б.С. Жанбырбаев отдал написанию учебников на казахском языке. Он – автор первого учебного пособия по теории вероятностей на казахском языке "Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері," соавтор учебных пособий "Жоғары математика," "Математика және микрокалькулятор". В последний год своей жизни он в соавторстве со своей дочерью У.Б. Жанбырбаевой выпустил учебник "Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика." Б.С. Жанбырбаев участвовал в переводе на казахский язык известного учебника И.И. Привалова "Введение в теорию функций комплексного переменного," задачников-практикумов по теории вероятностей И.П.Госта, Н.Я.Виленкина, В.Г.Потапова.

Б.С. Жанбырбаев – автор нескольких десятков статей по методике преподавания математики в вузах и школе. Много времени он посвятил организации научно-методологических исследований в Казахстане, являясь главным редактором тематических сборников научных трудов профессорско-преподавательского состава вузов Министерства просвещения КазССР. Эти материалы являлись единственным учебным пособием для педвузов страны в течение нескольких лет и они не утратили своего значения и в настоящее время.

Светлая память о Бегалы Садвокасовиче навсегда останется в наших сердцах.

Редакционная коллегия

ХРОНИКА

КАБДУШ ЖУМАГАЗИЕВИЧ НАУРЫЗБАЕВ

29 марта 2007 года скоропостижно скончался один из ведущих математиков Республики Казахстан, талантливый педагог, организатор науки, профессор Казахского Национального университета им. аль-Фараби Кабдуш Жумагазиевич Наурызбаев.

Наурызбаев Кабдуш Жумагазиевич родился 10 декабря 1934 года в ауле Кызыл-Жар (ныне г. Лисаковск) Тарановского района Кустанайской области. В 1952–1957 гг. он учился на механико-математическом факультете МГУ им.М.В.Ломоносова. После окончания университета один год работал младшим научным сотрудником Отдела вычислительной математики и техники НИИ ПВО страны в г. Калинине.

В 1958–1961 гг. Наурызбаев учился в аспирантуре Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР в г. Москве под руководством профессора, ныне академика С.М.Никольского. Защита кандидатской диссертации на тему "Функции с интегрируемыми смешанными производными и первая краевая задача для одного общего уравнения в частных производных" состоялась в 1964 г.

В 1961–1965 гг. Наурызбаев — младший научный сотрудник, а с 1965 г. — старший научный сотрудник Сектора (Института) математики и механики АН КазССР. С 1965 по 1972 гг. работает по совместительству старшим преподавателем кафедры уравнений математической физики КазГУ. В 1972–1987 гг. — зав. кафедрой прикладной математики Казахского политехнического института, а 1987–1992 гг. — доцент кафедры высшей математики этого же института. В 1992–1996 гг. — профессор кафедры высшей математики Казахской государственной архитектурно-строительной академии. С 1996 г. — профессор кафедры функционального анализа и теории вероятностей КазНУ.

Научные труды К.Ж.Наурызбаева, в основном, связаны с теорией вложения функциональных классов и вопросами их приложения к теории краевых задач. Им получены обоснование вариационного метода решения краевой задачи типа первой для уравнения более общего типа, чем эллиптический, условия гладкости обобщенного решения; единственности классического решения.

Ряд статей, написанных для Казахской энциклопедии, посвящены крупным разделам математики. Цикл работ относится к проблемам создания и развития казахского научно-технического языка. Вышло учебное пособие на казахском языке по действительному анализу (2004).

Он подготовил к выпуску учебное пособие по функциональному анализу на казахском языке. Был руководителем авторского коллектива Казахско-русского и русско-казахского терминологического словаря по математике (Алматы, 1999г.).

Под научным руководством Наурызбаева К.Ж подготовлено восемь кандидатов наук, из числа его учеников вышли 6 докторов физико-математических наук.

Профессор К.Ж.Наурызбаев был ученым секретарем Объединенного ученого совета отделения физико-математических наук АН КазССР по защите кандидатских диссертаций с 1967 г. по 1972 г., членом диссертационного совета по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при КазНУ им. аль-Фараби с 1989 г.по 1996 г.

Наурызбаев награжден медалями "За доблестный труд в ознаменование 100-летия В.И.Ленина" (1970 г.), "Ветеран труда" (1989 г.), двумя Почетными грамотами Минвуза КазССР, Почетной грамотой Минпроса КазССР и почетной грамотой МОН РК.

Кабдуш Жумагазиевич Наурызбаев имел несомненную заслугу перед отечественной наукой и высшим образованием Республики Казахстан. В развитии теории функций в Казахстане принимали самое активное участие две математические школы, состоящие из его учеников, одна в Карагандинском государственном университете им.Е.А.Букетова, другая — в Казахском Национальном университете им.Аль-Фараби.

Кабдуш Жумагазиевич много раз приезжал в КарГУ им.Е.А.Букетова в качестве лектора, председателя ГАК, оппонента соискателей, защитивщих свои диссертации в диссертационном совете К.14.50.03 при КарГУ, принимал самое активное участие во всех научных конференциях, организованных карагандинскими математиками.

Профессор К.Ж.Наурызбаев пользовался заслуженным уважением математической общественности республики. Его уважали и любили и московские математики, в их числе академик РАН С.М.Никольский, член-корр. РАН О.В.Бесов, профессора: В.М.Тихомиров, М.К.Потапов, Г.Н.Яковлев и др.

Кабдуш Жумагазиевич был человеком высокой культуры и эрудиции, большим знатоком казахской и русской литературы, музыки и живописи. Его принципиальность, простота, отзывчивость и доброе отношение к окружающим неизменно вызывали глубокое уважение, любовь у всех, знавших его.

Память о Кабдуше Жумагазиевиче Наурызбаеве, навсегда останется в сердцах всех, кто имел счастливую возможность встретить его на своем жизненном пути.

Е.С.Смаилов, Н.А.Бокаев, Е.Д.Нурсултанов,
Н.Т.Тлеуханова, Г.А.Акишев, Ж.Х. Жантлесов, Т.У.Аубакиров,
К.А.Бекмаганбетов, М.Ж.Тургумбаев, С.Бітімхан, С.Макашев,
К.Сайдахметов, Е.Берниязов, С.Тазабеков,
Н.Сыздыкова, А.Аскарова, Ж.Джумабаева.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Balgimbayeva Sh. A. **Recovery of any order elliptic differential operator with constant coefficients with respect to spectral information** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.5 – 15.

Exact (in order sense) estimates for error bounds of a recovery method using spectral information for any order elliptic differential operator with constant coefficients on the Nikol'skii - Besov spaces are obtained.
References - 10.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Балғымбаева Ш. А. **Эллипстік дифференциал операторын спектрі туралы ақпары бойынша қалпына келтіру** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.5 – 15.

Никольский - Бесов кеністіктерінде эллипстік дифференциал операторын спектрі туралы ақпары бойынша қалпына келтіру бір әдісінің нақты реттік бағалаулары алынды.
Библ. – 10.

УДК: 517.938, 523.98 2000 MSC: 37N30

Yessimkhan Ye. B. **Symbolic dynamics and neuroinformatics methods for the Sun physics research** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.16 – 25.

In this article the reversibility of Wolf numbers time series is tested on the scales that don't exceed the averaged Sun cycle length. The Wolf numbers time series defines the spots number on the Sun disk. The reversibility of monthly average and yearly average Wolf numbers is tested by means of symbolic dynamics method. The Sun cycles prediction and postdiction is constructed for forward and backward monthly average Wolf numbers with the help of artificial neural networks.
References - 23.

УДК: 517.938, 523.98 2000 MSC: 37N30

Есимхан Е. Б. **Күннің физикасының зерттеуі үшін символдық динамика және нейроинформатика әдістері** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.16 – 25.

Күндегі дақтар санын сипаттайтын Вольф сандарының уақыттық қатары қайтымдылыққа циклдың орташа ұзындығынан аспайтын көлемдерде тестіленеді. Айлық орташа және жылдық орташа Вольф сандарының қатары үшін қайтымдылық символдық динамика әдісімен

тексеріледі. Айлық орташа Вольф сандарының тура және қайтымды қатары үшін Күн циклдарының болжауы мен палегнозы жасанды нейрондық желілер көмегімен құрылады.
Библ. – 23.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

I b r a e v a G. T., T l e u b e r g e n o v M. I. **On the main stochastic inverse problem with given properties depending on a part of variables** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.26 – 31.

Necessary and sufficient conditions of solvability of the main according to A.S. Galiullin classification inverse problem in the class of Ito stochastic differential equations of the first order with random disturbances in the class of Wiener processes and with a diffusion degenerating with respect to a part of variables and with given properties depending on a part of variables are received.
References – 9.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Ы б р а е в а Г. Т., Т і л е у б е р г е н о в М. Ы. **Айнымалының бөлігінен тәуелді берілген қасиеттері бар негізгі стохастикалық кері есебі туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.26 – 31.

Айнымалының бөлігінен тәуелді берілген қасиеттері бар және диффузиясы бөлігіне қарасты азғындалатын Винер үрдістері класында кездейсоқ түрткілі бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық теңдеулердің класында А.С. Галиуллин классификациясы бойынша негізгі кері есептің шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.
Библ. – 9.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

K a b d r a k h o v a S. S. **On existence of isolated solution of semi-periodic boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.32 – 42.

Sufficient conditions of existence of isolated solution of semi-periodical boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with mixed derivative are obtained.
References – 2.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

Қ а б д р а х о в а С. С. **Сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылайпериодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы туралы**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.32 – 42.

Аралас туындылы сызықты емес гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынған.
Библ. – 2.

УДК: 550.385 2000 MSC: 37M25

K a r i m o v a L. M., M u k h a m e j a n o v a S. A. **Modeling and prediction of geomagnetic Dst index on the basis of IFS inverse problem solution**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.43 – 51.

In the paper a method of probabilistic prediction of time series is considered. It is based on an Iterated Function System with Probabilities, which is a part of the fractal theory. The system iterations give an attractor (fractal) in a space of compact sets. The attractor supports an invariant probabilistic measure (multifractal), which is an element of Borel measures space. An inverse problem is to find an iterated function system with probabilities so as to match its attractor with an estimated empirical measure. The empirical measure is obtained from the original time series by using symbolic dynamics methods. The proposed technique is applied to model and forecast threshold geomagnetic disturbances, which are characterized by the so-called Dst-index.

References – 26.

УДК: 550.385 2000 MSC: 37M25

К а р и м о в а Л. М., М у х а м е д ж а н о в а С. А. **ИФС кері есібін шешу негізінде геомагниттік Dst индексін моделдеу және болжамдау** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.43 – 51.

Мақалада уақыттық қатарларды фракталдар теориясынан алынған ықтималдықтары бар итеряцияланған функциялар жүйесі негізінде ықтималдық болжау әдістемесі беріледі. Жүйенің итерациялары борельдік өлшемдер кеңістігінде инвариантты ықтималдық өлшемді (мультифракталды) компактілер кеңістігіндегі аттракторға (фракталға) әкіледі. Кері есеп жүйе функцияларының коэффициенттерін және олардың ықтималдықтарын эмпирикалық өлшем бағалаулары бойынша табудан тұрады. Эмпирикалық өлшемді уақыттық қатардан символдық динамика әдістерін пайдаланып табуға болады. Келтіріліп отырған техника Dst индексі деп аталатын шамамен сипатталатын геомагниттік ауытқулардың табалдырықтық мәндерін моделдеуге және болжамдауға қолданылады.

Библ. – 26.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

K u l z h u m i y e v a A. A., S a r t a b a n o v Zh. A. **Periodic solution with variable period of system of differential equations depending on multidimensional time** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.52 – 57.

In this paper a new representation of periodic solution with variable period of system of differential equations depending on multidimensional time is obtained.

References – 6.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

К у л ь ж у м и е в а А. А., С а р т а б а н о в Ж. А. **Көп өлшемді уақыт бойынша айнымалы периодты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің периодты шешімдері** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.52 – 57.

Бұл жұмыста өзіне еніп тұрған дифференциалдық оператордың характеристикасынан тәуелді теңдеулер жүйесін қарастыру мен айнымалы период ұғымын енгізу арқылы уақыт айнымалылары кеңістігінің диагоналында квазипериодты жәй дифференциалдық теңдеулер айналатын бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер класы кеңейтілген. Қарастырылған сызықты жүйелердің периодты шешімдерінің жаңа өрнектемесі ұсынылып, оған негізделген сызықты емес теңдеулер жүйелерінің көп өлшемді уақыт бойынша периодты шешімдерін зерттеу әдісі келтірілген.

Библ. – 6.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F4

M a k a s h e v a A . P. **Investigating mechanism of distribution of supersonic jet current in subsonic co-flow depending on input Mach numbers** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P. 58 – 65.

Results of numerical investigating three-dimensional supersonic jet in subsonic co-flow are given. numerical solution of averaged parabolized Navier-Stokes equations was obtained on the schemes developed.

References – 5.

УДК: 532.526 2000 MSC: 76F40

М а қ а ш е в а А . П . **Дыбыс жылдамдығынан жоғары жылдамдықпен таралатын ағыншалардың дыбыс жылдамдығынан төмен ағыста Мах санына байланысты таралу заңдылықтарын зерттеу** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.58 – 65.

Дыбыс жылдамдығынан жоғары ағыншалардың дыбыс жылдамдығынан төмен кеңіс-тікте таралуының сандық зерттеу нәтижелері келтірілген. Сандық зерттеу дыбыс жылдамдығынан жоғары және төмен аймақтағы ағыстарды бірыңңғай есептеуге мүмкіндік беретін схема арқылы параболалық Навье-Стокс теңдеулерін сандық шешу негізінде жүргізілді. Серіктес ағындағы Мах саны $0,05 \leq M_\infty \leq 7$ аралығындағы ағыстың таралу заңдылығы зерттелді және оның араласу қабатына әсері көрсетілді. Нәтижелер эксперименттер мен басқа авторлардың сандық нәтижелерімен салыстырылды.

Белгілеу сөздері: Мах саны, дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынша, дыбыс жылдамдығынан төмен ағыс, Мах дискісі, қысым.

Библ. – 5.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A16

M u r a t a l i e v a V . T . **Obtaining conditions of existence of bounded solution of simplified Boltzmann equation with nonlinear integral member** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P. 66 – 71.

With the help of the method of additional argument local existence of bounded solution of Cauchy problem for the quasilinear one-dimensional Boltzmann equation with a nonlinear integral term are proved.

References — 7.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A16

М ұ р а т а л и е в а В . Т . **Сызықсыз интегралдық мушесі бар қысқартылған Больцман теңдеуі үшін шектелген шешім бар болу шартын анықтау** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.66 – 71.

Қосымша аргумент әдісі арқылы сызықсыз интералдық мүшесі бар квазисызықты біралшемді Больцман теңдеуі үшін Коши есебінің шектелген шешімінің локалдық бар болуы дәлелденген.

Библ. – 7.

УДК: 517.92 2000 MSC: 39A10

M y r z a t a e v a K . R . , O i n a r o v R . **Nonoscillatory of half-linear second-order differential equa-tion** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P. 72 – 82.

Nonoscillatory criteria for the half-linear second-order differential equation are established.

References – 8.

УДК: 517.92 2000 MSC: 39A10

М ы р з а т а е в а К. Р., О й н а р о в Р. **Жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің тербелімсіздігі**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.72 – 82.

Жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \upsilon(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0,$$

тербелімсіздік шарттары алынған, мұндағы $1 < p < \infty$, $\rho : I \to R$, $\upsilon : I \to R$ үзіліссіз функциалар және $\rho(t) > 0$, $t \in I$.

Библ. – 8.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

O r u m b a y e v a N. T. **On solvability of semi-periodical boundary value problem for system of non-linear hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.83 – 87.

Sufficient conditions of existence of isolate solution of semi periodical boundary value problem for system of non-linear hyperbolic equations are established.

References – 9.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

О р ы н б а е в а Н. Т. **Бейсызық гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің шешілімдігі туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.83 – 87.

Бейсызық гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылады және оқшауланған шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынған.

Библ. – 9.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35F05, 35J45

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

P a n k r a t o v a I. N. **Cyclic Invariant Sets of Two-Dimensional Map with Nonlinearity of Scalar Type** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.88 – 94.

Bifurcation character of ω- limit sets' locations of dynamical system determined by two-dimensional map with nonlinearity of scalar type is established.

References – 8.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

П а н к р а т о в а И . Н . **Скаляр түрдегі бейсызықты екі өлшемді бейнелеудің циклді инварианттты жиындары** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.88 – 94.

ω- шекті орналосуының бифуркациялық сыпаты тағайындалды.

Библ. – 8.

УДК: 512.54, 0:510.5 2000 MSC: 42A16

K h i s a m i e v N . G . **Positively defined nilpotent group** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 2 (24). P.95 – 102.

Necessary and sufficient conditions for positively defined torsion- free class 2 nilpotent group, that has infinite rank factor of the group center in relation to the isolator of commutant are obtained.

References – 4.

УДК: 512.54, 0:510.5 2000 MSC: 42A16

Х и с а м и е в Н . Г . **Позитивті анықталхан нильпотенті топтар** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 2 (24). Б.95 – 102.

Екі сатылы бұралымсыз нильпотент тобы орталығының коммутант бойынша факторының рангісі шексіз болса, онда бұл топтың позитивті анықталуының қажетті және жеткілікті шарты берілген.

Библ. – 4.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 2 (24) 2007

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(3272)-91-20-03, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 03.09.2007г.
Тираж 300 экз. Объем 116 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru