ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2012, том 12, № 1 (43)

Институт математики МОН РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №1 (43), 2012

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12 **№ 1 (43)** **2012**

CONTENTS

Volume 12 **No. 1 (43)** **2012**

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 1 (43) . С.5–18*

УДК 517.925.5:519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЛАГРАНЖИАНОМ

Д. Т. Ажымбаев, М. И. Тлеубергенов

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова,
Институт математики МОН РК
030000, Актобе, Братьев Жубановых 263, e-mail: darkhan70@gmail.com
050010, Алматы, Пушкина 125, e-mail: marat207@mail.ru

По заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка строится эквивалентное стохастическое уравнение лагранжевой структуры. Строится линейная по скоростям функция Лагранжа. Приводятся иллюстрирующие примеры построения систем стохастических уравнений с вырожденным лагранжианом.

1. Постановка стохастической задачи Гельмгольца

Классическая задача Гельмгольца [1] — это задача построения по заданным уравнениям движения механической системы в форме Ньютона эквивалентных уравнений движения в форме Лагранжа. И уравнения, для которых такой переход возможен, называются системами Гельмгольца. В работах Майера [2] и Суслова [3] независимо друг от друга показано,

Keywords: *Inverse problem, stochastic differential equation, Lagrange function*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

что классические условия Гельмгольца являются не только необходимыми, но и достаточными условиями перехода от ньютоновых уравнений к лагранжевым.

С результатами по дальнейшему исследованию задачи Гельмгольца можно ознакомиться по работам [4,5,6], в которых наряду с собственными исследованиями, в основном, в классе ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) и ДУЧП (дифференциальных уравнений с частными производными) приводится исторический обзор по развитию и обобщению указанной задачи.

Решение задачи Гельмгольца в том или ином классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики.

Особое место по разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца и полноте изложения материала занимает двухтомная монография Р.М. Сантилли [4,5], посвященная задаче представления обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа. В монографии А.С. Галиуллина [7] рассматривается обобщение гамильтоновых систем в смысле приводимости уравнений движения неконсервативных механических систем к классическим уравнениям динамики и решается, в частности, задача гамильтонизации уравнений систем программного движения.

Задачу Гельмгольца в классе стохастических уравнений условно можно разбить на две взаимосвязанные подзадачи. Задача 1: по заданному стохастическому дифференциальному уравнению Ито второго порядка требуется построить эквивалентное ему стохастическое уравнение лагранжевой (гамильтоновой или биркгофиановой) структуры и задача 2: построить функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения лагранжевой структуры.

Вопросам разрешимости стохастической задачи 1 с невырожденным лагранжианом посвящены работы [8-16].

Пусть заданы уравнения

$$d\dot{y} = Y_1(y, \dot{y}, t)dt + Y_2(y, \dot{y}, t)d\xi, \qquad (a)$$

$$d\dot{z} = Z_1(z, \dot{z}, t)dt + Z_2(z, \dot{z}, t)d\xi. \qquad (b)$$

Определение A [17, с.153]. *Будем говорить, что уравнения* (a) *и* (b) *эквивалентны п.н., если из* $y(t_0) = z(t_0)\,, \dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0)$ *п.н. следует* $y(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = z(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)\,,\quad \dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = \;= \dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ *п.н. при всех* $t \geq t_0$. (Здесь п.н. означает почти наверное.)

Определение B [17, с.153]. *Будем говорить, что уравнения* (a) *и* (b) d*-эквивалентны (или эквивалентны по распределению), если для* $(y(t_0)^T, \dot{y}(t_0)^T)^T$ *и* $(z(t_0)^T, \dot{z}(t_0)^T)^T$ *с одинаковыми начальными распределениями на* R^{2n} *совпадают законы распределения процессов* $(y(t)^T, \dot{y}(t)^T)^T$ *и* $(z(t)^T, \dot{z}(t)^T)^T$ *в пространстве* $W^{2n} = C([0,\infty) \to R^{2n})$.

Определение C [18, с.279]. *Будем говорить, что уравнения* (a) *и* (b) *эквивалентны в среднем, если из* $My(t_0) = Mz(t_0)\,,\ M\dot{y}(t_0) = M\dot{z}(t_0)$ *следует* $My(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)\,,\ M\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ *при всех* $t \geq t_0$.

Определение D [18, с.282]. *Будем говорить, что уравнения* (a) *и* (b) *эквивалентны в среднем квадратическом, если из* $My^2(t_0) = Mz^2(t_0)\,,$ $M\dot{y}^2(t_0) = M\dot{z}^2(t_0)$ *следует* $My^2(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)\,,$ $M\dot{y}^2(t, t_0,\ y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ *при всех* $t \geq t_0$.

В [8] по заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные в смысле п.н. стохастические уравнения лагранжевой структуры. Определяются условия прямого и непрямого аналитического представлений лагранжиана при наличии случайных возмущений. В [9] получены необходимые и достаточные условия для построения по заданному уравнению Ланжевена-Ито или Ланжевена-Стратоновича эквивалентного в смысле п.н. уравнения лагранжевой структуры. Приводятся примеры на построение стохастического уравнения лагранжевой структуры, иллюстрирующие тот факт, что коэффициент при белом шуме играет существенную роль при построении функции Лагранжа по заданным стохастическим дифференциальным уравнениям типа Ито второго порядка. Работа [10] посвящена разрешению стохастической задачи Гельмгольца методом дополнительных переменных. И, в частности, методом Шульгина стохастические уравнения Ито второго порядка приводятся к стохастическим уравнениям лагранжевой структуры и соответственно стохастические уравнения Ито первого порядка методом Лиувилля – к эквивалентным стохастическим уравнениям канонической структуры. В работе

[11] анализ разрешимости задачи Гельмгольца в отличие от [8-10], где эквивалентность уравнений понимается в смысле определения A об эквивалентности п.н., проводится в классе d-эквивалентных уравнений в смысле определения B.

По заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка в [11] строятся стохастические уравнения лагранжевой структуры с использованием методов преобразования фазового пространства по скоростям, абсолютно непрерывного преобразования меры и случайной замены времени.

Если в работах [8-10] задача Гельмгольца исследуется в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка и эквивалентность уравнений понимается в смысле эквивалентности п.н., а в [11] – в смысле эквивалентности по распределению, то в [12] анализ разрешимости стохастической задачи Гельмгольца, в отличие от работ [8-11], понимается, во-первых, в смысле эквивалентности уравнений в среднем и среднем квадратическом и, во-вторых, рассматривается линейная постановка задачи.

Суть метода моментных функций заключается в том, что он сводит исследование стохастического уравнения к системе ОДУ относительно рассматриваемых моментов.

В работе [12] стохастическая задача Гельмгольца исследуется в смысле определений C и D. А именно: по заданным линейным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся уравнения лагранжевой структуры как в пространстве моментных функций первого порядка, так и в пространстве моментных функций второго порядка. В рассматриваемых пространствах получены необходимые и достаточные условия прямого и косвенного представлений лагранжиана.

В работе [13] решается задача представления уравнения Ито второго порядка в виде уравнения с заданной структурой сил. Определяются условия, при которых заданная система стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка представима в виде стохастических уравнений Лагранжа с непотенциальными силами определенной структуры.

Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа рассматривается в работе [14], где по заданному стохастическому уравнению Ланжевена-Ито в непрямом представлении строится как уравнение гамильтоновой структуры, так и уравнение биркгофиановой структуры. Методом моментных функций определяется функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения Биркгофа в форме усредненного действия по Биркгофу. В [15] задача Гельмгольца рассматривается при дополнительном предположении, что на неголономную механическую систему помимо непотенциальных сил действуют также случайные возмущающие силы типа белого шума. По заданной стохастической системе строится в прямом и косвенном представлениях эквивалентное п.н. уравнение лагранжевой структуры в предположении, что на исходную систему наложены неголономные связи. Прямая задача Гельмгольца исследуется в классе как систем Чаплыгина, так и систем Воронца. Приводится вывод необходимых и достаточных условий косвенного представления стохастического уравнения Воронца в форме уравнения лагранжевой структуры. Полученные в [8-15] результаты по решению задачи 1 иллюстрируются на конкретных примерах.

В работе [16], в предположении невырожденности лагранжиана, исследуется задача 2 (вторая часть стохастической задачи Гельмгольца) — задача построения функционала, принимающего стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения лагранжевой структуры, или, что эквивалентно, задача распространения принципа Гамильтона на класс натуральных механических систем, на который действуют случайные возмущающие силы типа белого шума.

В упомянутой выше двухтомной монографии Р. М. Сантилли [4,5] в классе ОДУ задача Гельмгольца рассмотрена, в частности, и в случае вырожденного лагранжиана. При этом понятие вырожденного лагранжиана встречается впервые, по-видимому, в работе П.Дирака [19].

В данной работе рассматривается задача 1 стохастической задачи Гельмгольца, которая в отличие от работ [8-16] предполагает вырожденность функции Лагранжа.

Определение 1. *Лагранжиан L называется сингулярным, если*

$$rank\left|\frac{\partial^2 L(x,\,\dot{x})}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_k}\right|_n^n = m < n. \tag{1}$$

Предположим, что имеет место случай полного вырождения лагранжиана

$$\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \equiv 0, \quad i,k=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу построения по заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка

$$F_k(t,x,\dot{x}) = \sigma_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad k=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}\,, \tag{3}$$

эквивалентного уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad \nu=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}\,, \tag{4}$$

в косвенном представлении в смысле следующего определения [4, с.121] с учетом случайных возмущений.

Определение 2. *Если имеет место тождество*

$$h_k^\nu(F_k(t,x,\dot{x}) - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j, \tag{5}$$
$$k,\nu=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}\,,$$

и матрица h_k^ν *не является единичной, то представление называется косвенным, в противном случае – прямым.*

Предварительно для решения стохастической задачи Гельмгольца предположим, что для исходного уравнения (3), домноженного на множитель h_k^ν, выполнены условия Гельмгольца, как необходимые и достаточные условия существования функции Лагранжа для заданного уравнения. Эти условия, следуя [4, с.194], имеют вид

$$\frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial \dot{x}_k}; \quad \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial x_i}; \qquad i,k=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}\,, \tag{6}$$

где $\widetilde{F}_k = h_k^\nu F_\nu$.

Далее для решения поставленной задачи косвенного построения по заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка (3) для эквивалентного уравнения лагранжевой структуры (4) в силу стохастического дифференцирования Ито [18] раскроем в уравнении (4) выражение $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_\nu}F_\nu +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_\nu}\sigma_{ij}\sigma_{\nu j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_\nu}\sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j. \qquad (7)$$

Из предположения о полной вырожденности лагранжиана (2) следует, что (7) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu. \qquad (8)$$

Следовательно, уравнение (4) с учетом (8) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \qquad (9)$$

а тождество (5) при выполнении условия полной вырожденности лагранжиана (2) в косвенном представлении запишется в виде

$$h_k^\nu(F_\nu(t,x,\dot{x}) - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}\dot{\xi}^j,$$
$$k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \qquad (10)$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты в обеих частях тождества (10), приходим к соотношениям

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = h_k^\nu F_k(t,x,\dot{x}), \qquad (11)$$

$$\sigma'_{\nu j} = h_k^\nu \sigma_{kj}, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \qquad (12)$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана* (2) *и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu(F_\nu - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\,, \tag{13}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления стохастического уравнения (3) *в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно выполнения условий* (11) *и* (12).

Доказательство. Достаточность. Пусть задано уравнение (3) и имеет место тождество (5). Тогда из сравнения обеих частей тождества (5) вытекают условия (11) и (12), которые обеспечивают косвенное представление заданного стохастического уравнения (3) в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры (4).

Необходимость. Пусть задано стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4) и выполнены условия (11), (12). Тогда заданное стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4) при выполнении условий (11), (12) переходит в косвенное уравнение (13)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j \equiv h_k^\nu(\dot{x}_\nu - F_\nu - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j), \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}.$$

2. Постановка задачи построения лагранжиана по заданному стохастическому уравнению, линейному по скоростям

По заданному стохастическому уравнению Ито, линейному по скоростям

$$X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k = \sigma_{kj}\dot{\xi}^j, \quad k,i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\,, \tag{14}$$

построить стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4).

Иначе говоря, требуется определить условия, налагаемые на функции h_k^ν, L, $\sigma_{\nu j}$, при которых имеет место соотношение (5). В данном случае (5) эквивалентно следующему соотношению:

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j. \tag{15}$$

Учитывая (8), выражение (15) примет вид

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j. \tag{16}$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях тождества (16), имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_l} = h_k^\nu X_{kl}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = h_k^\nu Y_k, \tag{17}$$

$$\sigma'_{\nu j} = h_k^\nu \sigma_{kj}, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \tag{18}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана* (2) *и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}\,, \tag{19}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления стохастического уравнения (14) *в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно выполнения условий* (17) *и* (18).

Замечание 1. Условия (17), (18) при $\sigma_{kj} \equiv \sigma_{\nu j} \equiv 0$ совпадают с условиями Р.М. Сантилли [4, с. 193].

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

3. Метод построения лагранжиана по заданному стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка типа Ито

Пусть искомый лагранжиан, следуя Сантилли Р. М.[4], имеет вид

$$L = \gamma_k(t,x)\dot{x}_k + \delta(t,x), \quad k = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Так как для функции Лагранжа (20)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} = \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} = \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_\nu}\dot{x}_k + \frac{\partial \delta}{\partial x_\nu},$$

то условия (11), (12) в терминах γ, δ эквивалентны следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial t} - \frac{\partial \delta}{\partial x_v} = h_k^v F_k(t, x, \dot{x}), \tag{21}$$

$$h_k^v \sigma_{kj} = \sigma'_{vj}, \quad k, v = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{22}$$

Тогда из теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана* (2) *и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu (F_\nu - \sigma_{\nu j} \dot{\xi}^j) = 0, \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}\,, \tag{23}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления уравнения (3) *в виде уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно существования функции Лагранжа вида* (20)*, удовлетворяющей условиям* (21)*,* (22)*.*

Аналогично для функции Лагранжа (20), с учетом вида функции $F_k = X_{ki}(t, x)\dot{x}_i + Y_k$, в уравнении (14) условия (17), (18) в терминах γ, δ эквивалентны следующим дифференциальным уравнениям с частными производными:

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial x_k} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_v} = h_l^v X_{lk}, \; \frac{\partial \gamma_v}{\partial t} - \frac{\partial \delta}{\partial x_v} = h_k^v Y_k, \; h_k^v \sigma_{kj} = \sigma'_{vj}, \\ k, \nu, l = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{24}$$

Тогда из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана* (2) *и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu (X_{ki}(t, x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj} \dot{\xi}^j) = 0, \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}\,, \tag{25}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления уравнения (14) *в виде уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно существования функции Лагранжа вида* (20)*, удовлетворяющей условиям* (24)*.*

4. Примеры построения систем стохастических уравнений с вырожденным лагранжианом

Пример 1. По заданной системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} (1-2x_1)\dot{x}_2 - 2x_1 = \sigma_1\dot{\xi}, \\ (2x_1-1)\dot{x}_1 - 2x_2 = \sigma_2\dot{\xi} \end{cases} \tag{26}$$

требуется построить функцию Лагранжа вида $L = \gamma_1(x_1,x_2)\dot{x}_1 + \gamma_2(x_1,x_2)\dot{x}_2 + \delta(x)$.

Иначе говоря, рассматривается стохастическая задача прямого представления уравнения (26) в форме уравнения Лагранжа вида (4).

Предварительно проверим выполнение условий Гельмгольца [4, с. 193] для системы уравнений (26), которые являются необходимыми и достаточными условиями существования лагранжиана и которые эквивалентны при $n=2$ следующим соотношениям:

$$\begin{cases} X_{11}=0, & \dfrac{\partial X_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_{21}}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_2}, \\ X_{12}+X_{21}=0, & \dfrac{\partial X_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial X_{21}}{\partial x_2} = 0, \\ X_{22}=0. \end{cases} \tag{27}$$

В примере 1 функции X_{ij} и Y_i $(i,j=1,2)$ имеют соответственно вид:

$$\begin{array}{lll} X_{11}=0, & X_{12}=1-2x_1, & Y_1=2x_1, \\ X_{22}=0, & X_{21}=2x_1-1, & Y_2=2x_2 \end{array}$$

и, подставляя их в (27), убеждаемся, что условия Гельмгольца выполняются.

Из условия (17) теоремы 2 следует, что искомые функции γ_1,γ_2,δ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} = 1-2x_1, & -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_1} = 2x_1, \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} = 2x_1-1, & -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_2} = 2x_2. \end{cases}$$

Из полученных условий следует, что для системы уравнений (26) вырожденная функция Лагранжа имеет вид $L = (x_1 + x_2)\dot{x}_1 + (x_1^2 + x_2^2)\dot{x}_2 - (x_1^2 + x_2^2)$, что при $\sigma_1' = \sigma_1, \quad \sigma_2' = \sigma_2$ обеспечивает представление системы стохастических уравнений (26) в виде системы стохастических уравнений лагранжевой структуры:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \sigma_1(x,t)\dot{\xi}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \sigma_2(x,t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{28}$$

Пример 2. По заданной системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} (x_2^2 - x_1^2)\dot{x}_2 - x_1^3 \sin t = \sigma_1\dot{\xi}, \\ (x_1^2 - x_2^2)\dot{x}_1 - x_2^3 \sin t = \sigma_2\dot{\xi} \end{cases} \tag{29}$$

требуется построить функцию Лагранжа вида $L = \gamma_1(x_1, x_2)\dot{x}_1 + \gamma_2(x_1, x_2)\dot{x}_2 + \delta(x)$.

Аналогично системе (26) проверяем выполнение условий Гельмгольца [4, с. 193]. В примере 2 при $n = 2$ функции X_{ij} и Y_i $(i, j = 1, 2)$ имеют соответствующий вид:

$$\begin{array}{lll} X_{11} = 0, & X_{12} = x_2^2 - x_1^2, & Y_1 = x_1^3 \sin t, \\ X_{22} = 0, & X_{21} = x_1^2 - x_2^2, & Y_2 = x_2^3 \sin t \end{array}$$

и подстановкой их в (27) убеждаемся, что условия Гельмгольца выполняются.

И в терминах функций $\gamma_1, \gamma_2, \delta$, с помощью которых строится лагранжиан, условия (28) перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} = x_2^2 - x_1^2, \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} = x_1^2 - x_2^2, \\ -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_1} = x_1^3 \sin t, \\ -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_2} = x_2^3 \sin t. \end{cases}$$

Из полученных соотношений для системы уравнений (29) строим вырожденную функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3)\dot{x}_1 + \frac{1}{3}(x_1^3 - x_2^3)\dot{x}_2 - \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4)\sin t,$$

которая при $\sigma_1' = \sigma_1, \quad \sigma_2' = \sigma_2$ обеспечивает представление системы стохастических уравнений (29) в виде системы стохастических уравнений лагранжевой структуры (28).

Цитированная литература

[1]. Гельмгольц Г. *О физическом значении принципа наименьшего действия*, Вариационные принципы механики, М., 1959, С. 430 – 459.

[2]. Mayer A. *Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales*, Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, 1896, V. 48, P. 519 – 529.

[3]. Суслов Г. К. *О кинетическом потенциале Гельмгольца*, Мат. сб., 1896, Т. 19. № 1, С. 197 – 210.

[4]. Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer–Verlag, New–York, 1978.

[5]. Santilli R. M. *Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*, Springer–Verlag, New–York, 1983.

[6]. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов*, Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, ВИНИТИ, 1992, Т. 40, С. 3 – 178.

[7]. Галиуллин А. С. *Системы Гельмгольца*, М.: Изд-во РУДН, 1995.

[8]. Тлеубергенов М. И. *О представлении уравнения Ито второго порядка в виде уравнения лагранжевой структуры*, Изв. МН-АН РК., Сер. физ.-мат., 1997, № 1, С. 53 – 62.

[9]. Тлеубергенов М. И. *Об условиях приведения стохастического уравнения второго порядка к эквивалентному уравнению лагранжевой структуры*, Изв. МН-АН РК., Сер. физ.-мат., 1997, № 3, С. 78 – 90.

[10]. Тлеубергенов М. И. *Метод дополнительных переменных в стохастической задаче Гельмгольца*, Изв. МН–АН РК., Сер. физ.-мат., 1996, № 1, С. 49 – 54.

[11]. Тлеубергенов М. И. *К вопросу разрешимости стохастической задачи Гельмгольца*, Изв. МН–АН РК., Сер. физ.-мат., 1996, № 3, С. 53 – 63.

[12]. Тлеубергенов М. И. *О методе моментных функций в стохастической задаче Гельмгольца*, Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика 1999, № 1, С. 44 – 51.

[13]. Тлеубергенов М. И. *О представлении уравнения Ито второго порядка в виде уравнения с заданной структурой сил*, Изв. НАН РК., Сер. физ.-мат., 1995, № 3, С. 61 – 68.

[14]. Тлеубергенов М. И. *Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа*, Изв. МН-АН РК., Сер. физ.-мат., 1997, № 5, С. 84 – 92.

[15]. Тлеубергенов М. И. *Стохастическая задача Гельмгольца с ограничениями, линейно зависящими от скоростей*, Изв. МН–АН РК., Сер. физ.-мат., 1998, № 1, С. 80 – 85.

[16]. Тлеубергенов М. И. *Задача Гельмгольца для стохастических дифференциальных систем*, Матем. журнал МОН РК., Алматы, 2001, Т. 1, № 1, С. 84 – 93.

[17]. Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, М., 1986.

[18]. Пугачев В. С., Синицын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы*, Анализ и фильтрация, М., 1990.

[19]. Dirac P. A. M. *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Proc. Roy. Soc., 1958, Ser. A. V. 246, № 1246, P. 326 – 332.

Поступила в редакцию 11.08.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 1 (43) . С.19—23*

УДК 517.938

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Т. М. Алдибеков, М. М. Алдажарова

КазНУ им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби 71, e-mail: tamash59@mail.ru

Доказана экспоненциальная устойчивость тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений по первому приближению относительно некоторой монотонно возрастающей функции.

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

— линейная однородная система дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами, где

$$t \geq t_0 > 1,\ n \in \aleph,\ x \in R^n,\ A(t) - (n \times n) \text{ - матрица},\ A(t) \in C[t_0, +\infty),$$

$$\|A(t)\| \leq K\varphi(t),\ K > 0,\ \varphi(t) \in C[t_0, +\infty),\ \varphi(t) > 0,$$

$$q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)ds.$$

Keywords: *system of differential equations, generalized exponents, generalized regular system, Lyapunov's exponents*

2010 Mathematics Subject Classification: 34D08

Предполагаем, что линейная система (1) имеет конечные обобщенные показатели относительно $q(t)$ и выполняются неравенства $\ln t < q(t) < t$. Случай $q(t) > t$ см. в [1,2].

Дана нелинейная система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{2}$$

где n-мерная векторная функция $f(t,x)$ непрерывна по $t \geq t_0$ и непрерывно дифференцируема по $x \in R^n$, $f(t,0) = 0$.

Определение. *Тривиальное решение $x = 0$ системы (2) называется экспоненциально устойчивым относительно $q(t)$ при $t \to +\infty$, если для каждого решения $x(t) \equiv x(t; t_0, x_0)$ этой системы в некоторой области $t_0 \leq t < \infty$, $\|x\| \leq h$ справедливо неравенство*

$$\|x(t)\| \leq N\|x(t_0)\|e^{-\alpha(q(t)-q(t_0))},\ t \geq t_0\,,$$

где N и α — положительные постоянные, независящие от выбора решения $x(t)$.

Заметим, при $q(t) = t$ получаем (см. [3]) обычное определение экспоненциальной устойчивости тривиального решения $x = 0$ системы (2). Для определенности будем говорить, что имеет место слабая экспоненциальная устойчивость относительно $q(t)$, если $\dfrac{q(t)}{t} = o(t)$ при $t \to \infty$, и сильная экспоненциальная устойчивость относительно $q(t)$, если $\dfrac{q(t)}{t} = O(t^\alpha)$ при $t \to \infty,\ \alpha > 1$.

Теорема. *Если выполняются следующие условия:*
1) линейная система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$,
2) старший обобщенный показатель относительно $q(t)$ — отрицательный, т. е.

$$\lambda_1(q) < 0,$$

3) n-мерная векторная функция $f(t,x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(t,x)\| \leq \varphi(t)\|x\|^m,$$

где

$$m > 1 + \frac{1}{|\lambda_1(q)|}\,,$$

тогда тривиальное решение нелинейной системы (2) слабо экспоненциально устойчиво относительно $q(t)$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Возьмем γ такое, что

$$\frac{1}{m-1} < \gamma < |\lambda_1(q)|.$$

В системе (2) выполним преобразование

$$x = ye^{-\gamma[q(t)-q(t_0)]}. \tag{3}$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,y), \tag{4}$$

где

$$B(t) = A(t) + \gamma \frac{dq(t)}{dt} E,$$

E — $(n \times n)$ - единичная матрица, $g(t,y) = e^{\gamma[q(t)-q(t_0)]} f(t, ye^{-\gamma[q(t)-q(t_0)]})$, причем $y(t_0) = x(t_0)$. Легко проверить, что линейная система

$$\dot{y} = B(t)y \tag{5}$$

обобщенно правильная и имеет отрицательный старший обобщенный показатель. Векторная функция $g(t,y)$ непрерывна по $t \geq t_0$ и непрерывно дифференцируема по y.

Переходим от дифференциального уравнения (4) с начальным условием

$$y(t_0) = x(t_0) = x_0,$$

применяя метод произвольных постоянных, к интегральному уравнению

$$y(t) = H(t)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)g(t,y(\tau))d\tau, \tag{6}$$

где $H(t)$ – нормированная фундаментальная матрица линейной системы (5),

$$K(t,\tau) = H(t)H^{-1}(\tau), \ \ \|H(t)\| \leq C_1 \quad (C_1 \geq 1), \, t \geq t_0,$$

$$\|K(t,\tau)\| \leq C_2 e^{\varepsilon[q(\tau)-q(t_0)]}$$

при $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$, $C_2 \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное. Возьмем ε такое, что

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{(m-1)\gamma - 1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Далее, оценивая векторную функцию $g(t,y)$, имеем

$$\|g(t,y)\| \leq C_3 e^{[\varepsilon-(m-1)\gamma][q(t)-q(t_0)]}\|y\|^m \quad (C_3 > 1).$$

Теперь из интегрального уравнения (6), оценивая по норме, получаем, что

$$\|y(t)\| \leq C_3\|y(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} C_2 C_3 e^{[2\varepsilon-(m-1)\gamma][q(\tau)-q(t_0)]}\|y\|^m d\tau\,. \tag{7}$$

Заметим: для достаточно малой окрестности точки $y(t_0)$ в силу условия

$$\ln t < q(t)$$

имеет место неравенство

$$(m-1)C_1^{m-1}\|y(t_0)\|^{m-1}\int\limits_{t_0}^{t} C_2 C_3 e^{-[(m-1)\gamma-2\varepsilon][q(\tau)-q(t_0)]}d\tau < 1.$$

Отсюда, используя лемму Бихари, имеем

$$\|y(t)\| \leq \frac{C_1\|y(t_0)\|}{\left[1-(m-1)C_1^{m-1}\|y(t_0)\|^{m-1}\int\limits_{t_0}^{t} C_2 C_3 e^{-[(m-1)\gamma-2\varepsilon][q(\tau)-q(\tau_0)]}d\tau\right]^{\frac{1}{m-1}}}. \tag{8}$$

Следовательно, решение $y(t)$ определено при $t \geq t_0 > 1$ и выполнено неравенство

$$\|y(t)\| \leq N\|y(t_0)\|,$$

где $N = N(t_0) > 0$. Возвращаясь к $x(t)$, имеем

$$\|x(t)\| \leq N\|x(t_0)\|e^{-\gamma(q(t)-q(t_0))}$$

при $x(t_0) < \Delta$, где Δ достаточно мала. Поэтому тривиальное решение нелинейной системы (2) слабо экспоненциально устойчиво относительно $q(t)$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{1}{3(\ln t + 3)\sqrt{t}}x^3, \;\; 1 < t_0 \leq t < +\infty\,. \tag{9}$$

Легко установить, что тривиальное решение дифференциального уравнения слабо экспоненциально устойчиво относительно $q(t) = \sqrt{t}$ при $t \to +\infty$.

Цитированная литература

[1]. Алдибеков Т.М. *Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению*, Дифференциальные уравнения, 2006, Т. 42, № 6, С. 859 – 860, Р.Рус.06.11-13Б.188.

[2]. Алдибеков Т.М. *Об устойчивости по первому приближению*, Современные проблемы науки и образования, М., 2008, № 3, С. 133.

[3]. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*, М., 1967, 472 с.

Статья поступила в редакцию 11.04.2012 г.

УДК 517.95

ON THE SOLUTIONS OF THE LINEAR FREE BOUNDARY PROBLEMS OF STEFAN TYPE WITH A SMALL PARAMETER. I

G. I. Bizhanova

Institute of Mathematics,
Pushkin str. 125, Almaty 050010, Kazakhstan, e-mail: galina_math@mail.ru

The linear Stefan type problems for the heat equations with a small parameter at the principle terms in the boundary conditions are studied. In the Hölder spaces there are obtained the coercive estimates of the solutions of the perturbed problems with the constants independent on the small parameter.

Let $D_1 := \mathbb{R}^n_- = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n < 0\}$, $D_2 := \mathbb{R}^n_+ = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $n \geq 2$, $R := \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = 0\}$, $D_{jT} := D_j \times (0, T)$, $R_T := R \times [0, T]$, where $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter.

We formulate the problems.

Consider the problem 1 with the unknown functions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ and $\psi(x',t)$

$$\partial_t u_j - a_j\,\Delta u_j = 0 \text{ in } D_{jT},\ j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\psi|_{t=0} = 0 \text{ on } R,\ u_j|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j,\ j = 1, 2, \tag{2}$$

Keywords: *parabolic equation, small parameter in the boundary condition, singular perturbation, coercive estimates, Hölder space*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B25, 35C05

$$u_1|_{x_n=0} - \alpha_1\psi = u_2|_{x_n=0} - \alpha_2\psi = 0 \text{ on } R_T, \tag{3}$$

$$(\varepsilon\,\partial_t\psi + b\nabla^T u_1 - c\nabla^T u_2 + h'\nabla'\psi)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T, \tag{4}$$

here all coefficients are constant, $b = (b', b_n)$, $b' = (b_1, \dots, b_{n-1})$, $c = (c', c_n)$, $c' = (c_1, \dots, c_{n-1})$, $h' = (h_1, \dots, h_{n-1})$, $\nabla^T = \mathrm{colon}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\nabla'^T = \mathrm{colon}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-1}})$ — column-vectors, $b\,c^T = b_1c_1 + \dots + b_nc_n$ - scalar product, $\Delta = \partial^2_{x_1} + \dots + \partial^2_{x_n}$.

The problem 2 with the unknown functions $u_1(x,t)$ and $u_2(x,t)$ is

$$\partial_t u_j - a_j\,\Delta u_j = 0 \text{ in } D_{jT},\ j = 1,2, \tag{5}$$

$$u_j|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j,\ j = 1,2, \tag{6}$$

$$(u_1 - u_2)|_{x_n=0} = 0 \text{ on } R_T, \tag{7}$$

$$(\varepsilon\,\partial_t u_1 + b\nabla^T u_1 - c\nabla^T u_2)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T, \tag{8}$$

These problems are linearized model two - phase free boundary problems with a free boundary of a Stefan type for the second order parabolic equations and with a small parameter ε at a velocity of a free boundary in the condition on it. The Stefan type free boundary problems with $\varepsilon = 1$ were studied in [1, 2, 3, 4].

In the present paper we shall find uniform with respect to ε estimates of the solutions to these two linear problems in the Hölder space $C^{2+l,\,1+l/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, l - positive non-integer. This permits us to prove the solvability of some linear and nonlinear perturbed free boundary problems as small parameter goes to zero without loss of the smoothness of the given functions.

The problem (1) – (4) with $\varepsilon = 1$ was studied by B.V.Bazaliy [1], E.V.Radkevich [2], G.I.Bizhanova [3, 5], G.I.Bizhanova, V.A.Solonnikov [4].

J.F. Rodrigues, V.A.Solonnikov, F. Yi [6] have investigated one-phase linear and nonlinear free boundary problems for the second order parabolic equations with a small parameter ε. They have established the uniform with respect to ε estimates of the solution in the Hölder space $C^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$, from which the existence of the solutions to the considered problems with $\varepsilon = 0$ follows.

There were obtained the coercive estimates of the solution of the problem (1) – (4) with a constants independent on a small parameter ε in the classical $C^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$ [7] and weighted $C^{2+\alpha}_s(\overline{\Omega}_T)$, $1 < s \le 2+\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, [8] Hölder spaces. But for to study the convergence of the solutions of the free boundary problems of Stefan type as a small parameter ε goes to zero and its asymptotics with respect to ε we must obtain the solutions of these model problems in the Hölder space $C_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, l - positive non-integer, such that $[l]=0,1,\ldots$.

We shall study the problems in the Hölder space $C_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, l - positive non-integer, of the functions $u(x,t)$ with the norm [9]:

$$|u|_{\Omega_T}^{(2+l)} = \sum_{2m_0+|m|\le 2+[l]} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{\Omega_T} + \sum_{2m_0+|m|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{\Omega_T}^{(\alpha)}$$

$$+ \sum_{2m_0+|m|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ \alpha = l-[l]\in(0,1), \tag{9}$$

where $\Omega_T := \Omega\times(0,T)$, Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, $m=(m_1,\ldots,m_n)$, m_i, $i=1,\ldots,n$, – non-negative integers, $|m| = m_1+\ldots+m_n$,

$$|v|_{\Omega_T} = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}} |\,v|,\quad [v]_{\Omega_T}^{(\alpha)} = [v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)},$$

$$[v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \max_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(z,t)\big|}{|x-z|^\alpha},$$

$$[v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = \max_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(x,t_1)\big|}{|t-t_1|^\alpha}.$$

By $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$ we designate the subset of the functions $u(x,t)\in C_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, such that $\partial_t^k u\big|_{t=0}=0$, $k=0,\ldots,1+[l/2]$.

The following lemma is valid.

Lemma 1 [10]. *In* $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$ *the norm* $|u|_{\Omega_T}^{(2+l)}$ *defined by formula* (9) *is equivalent to the norm*

$$||u||_{\Omega_T}^{(2+l)} = \sup_{(x,t)\in\Omega_T} t^{-(1+l/2)}|u(x,t)|$$

$$+ \sum_{2m_0+|m|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{\Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{2m_0+|m|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ \alpha = l-[l]. \tag{10}$$

We formulate the main results of a present work.

Theorem 1. *Let* $\alpha_j > 0,\ j = 1,2,\ b_n > 0,\ c_n > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

For every function $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, *$l$ — positive non-integer, the problem (1) – (4) has a unique solution* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\ \ \ t}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2$, $\psi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x'\ \ \ t}(R_T)$, $\varepsilon\,\partial_t\psi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, *and it satisfies the estimate*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} + |\psi|^{(2+l)}_{R_T} + |\varepsilon\partial_t\psi|^{(1+l)}_{R_T} \le C_1|\Phi|^{(1+l)}_{R_T}, \tag{11}$$

where a constant C_1 does not depend on ε.

Theorem 2. *Let* $b_n > 0,\ c_n > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

For every function $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, *$l$ — positive non-integer, the problem (5)-(8) has a unique solution* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\ \ \ t}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2$, $\varepsilon\,\partial_t u_1(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, *and it satisfies the estimate*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} + |\varepsilon\partial_t u_1|^{(1+l)}_{R_T} \le C_2|\Phi|^{(1+l)}_{R_T}, \tag{12}$$

where a constant C_2 does not depend on ε.

Consider the problem (1)–(4).

Proof of Theorem 1. As it was pointed out there was proved Theorem 1 for $l = \alpha,\ \alpha \in (0,1)$, in [7, 8], i.e for the solution $u_j(x,t)$, $j = 1,2$, of the problem 1 beloning to the classical $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x\ \ \ t}(\overline{D}_{jT})$ and weighted $C^{2+\alpha,}_{s}(D_{jT})$, $1 < s \le 2+\alpha$, Hölder spaces. But to study the convergence of the solution to the perturbed problem as small parameter goes to zero, its asymptotics with respect to small parameter we have to know the estimates of the solution in the space $C^{2+l,1+l/2}_{x\ \ \ t}(\overline{D}_{jT})$, l – positive non-integer, $[l] = 0,1,\ldots$.

With the help of the Laplace on t and Fourier on x' transforms we can find the solution of the problem (1)–(4) in an explicit form [5, 7, 8]

$$u_j(x,t) = \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',\tau)G_j(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy' := \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\big(\Phi * G_j\big), \tag{13}$$

$$\psi(x',t)=\frac{1}{\alpha_j}u_j(x',0,t)\equiv\frac{1}{\varepsilon}\big(\Phi*G_j\big)|_{x_n=0},\ j=1,2,$$

where

$$G_j(x,t)=\int_0^t\partial_{x_n}g_j(x'-\frac{d'\sigma}{\varepsilon},(-1)^jx_n,\frac{\sigma}{\varepsilon},t-\sigma)\,d\sigma,$$

$$g_1(x'-\frac{d'\sigma}{\varepsilon},-x_n,\frac{\sigma}{\varepsilon},t)=4a_1a_2\int_0^t d\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Gamma_1(x'-\eta'-\frac{d'\sigma}{\varepsilon},\frac{\alpha_1b_n\sigma}{\varepsilon}-x_n,t-\tau_1)\times$$

$$\times\partial_{\eta_n}\Gamma_2(\eta',\frac{\alpha_2c_n\sigma}{\varepsilon}-\eta_n,\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'\equiv$$

$$\equiv 2a_1\int_0^t d\,\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{(2\sqrt{\pi a_1(t-\tau_1)})^n}\frac{\alpha_2c_n\,\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi a_2\tau_1})^n\tau_1}\times$$

$$\times\mathrm{e}^{-\frac{(x'-\eta'-d'\sigma/\varepsilon)^2+(\alpha_1b_n\,\sigma/\varepsilon-x_n)^2}{4a_1(t-\tau_1)}}\mathrm{e}^{-\frac{\eta'^2+(\alpha_2c_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_2\tau_1}}\,d\,\eta',\ x_n<0,$$

$$g_2(x-\frac{d'\sigma}{\varepsilon},x_n,\frac{\sigma}{\varepsilon},t)=4a_1a_2\int_0^t d\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_{\eta_n}\Gamma_1(\eta',\frac{\alpha_1b_n\sigma}{\varepsilon}+\eta_n,\tau_1)\times$$

$$\times\Gamma_2(x'-\eta'-\frac{d'\sigma}{\varepsilon},\frac{\alpha_2c_n\sigma}{\varepsilon}+x_n,t-\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'\equiv$$

$$\equiv -2a_2\int_0^t d\,\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\alpha_1b_n\,\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi a_1\tau_1})^n\tau_1}\frac{1}{(2\sqrt{\pi a_2(t-\tau_1)})^n}\times$$

$$\times e^{-\frac{\eta'^2+(\alpha_1b_n\,\sigma/\varepsilon)^2}{4a_1\tau_1}}\mathrm{e}^{-\frac{(x'-\eta'-d'\sigma/\varepsilon)^2+(\alpha_2c_n\sigma/\varepsilon+x_n)^2}{4a_2(t-\tau_1)}}\,d\,\eta',\ x_n>0,$$

$$\Gamma_j(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{a_j\pi t})^n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a_jt}}$$

is a fundamental solution to the heat equation (1) satisfying an estimate

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\Gamma_j(x,t)|\le C_3\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\,e^{-\frac{x^2}{8a_jt}},\ j=1,2.$$

Let

$$v_j(x',t):=u_j(x,t)|_{x_n=0},\ j=1,2,$$

be the the traces of the solution on the plane $x_n=0$.

In [7] we have obtained the following estimates of the heat potentials (13) at $x_n = 0$

$$[\partial_t v_j]^{(\alpha)}_{R_T} \equiv \frac{\alpha_j}{\varepsilon}[(\Phi * \partial_t G_j|_{x_n=0})]^{(\alpha)}_{R_T} \le C_4[\Phi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}, \tag{14}$$

$$[\partial^2_{x'} v_j]^{(\alpha)}_{R_T} \equiv \frac{\alpha_j}{\varepsilon}[(\partial_{y'}\Phi(y',\tau) * \partial_{x'} G_j|_{x_n=0})]^{(\alpha)}_{R_T} \le C_5[\partial_{x'}\Phi]^{(\alpha)}_{x',R_T}, \tag{15}$$

$$[\partial_{x'} v_j]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T} \equiv \frac{\alpha_j}{\varepsilon}[(\partial_{y'}\Phi(y',\tau) * G_j|_{x_n=0})]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T} \le C_6[\partial_{x'}\Phi]^{(\alpha/2)}_{t,R_T}, \tag{16}$$

where $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{x'\quad t}(R_T)$, $\alpha \in (0,1)$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, the constants $C_4 - C_6$ do not depend on ε.

To prove the estimates of the function

$$v_j(x',t) = \frac{\alpha_j}{\varepsilon}(\varphi * G_j|_{x_n=0}),\ j = 1,2$$

in the space $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x'\quad t}(R_T)$, l - positive non - integer, $[l] = 0,1,\ldots$, in according to the norm (10) we should estimate the following Hölder constants of the highest derivatives

$$\sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j]^{(\alpha)}_{R_T} \tag{17}$$

$$= \sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j]^{(\alpha)}_{x',R_T} + \sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j]^{(\alpha/2)}_{t,R_T},$$

and

$$\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]} [\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'} v_j]^{(1+\alpha)}_{t,R_T}, \tag{18}$$

where $\alpha = l - [l] \in (0,1)$, $m' = (m_1,\ldots,m_{n-1})$, $q' = (q_1,\ldots,q_{n-1})$, [l]=0,1,. . . ,

Let $[l] = 2k,\ k = 0,1,\ldots$, be an even positive number.

Due to the formulas (17), (18) we have

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ |m'|=0}} \partial_t^{m_0} v_j(x',t) \equiv \partial_t^{1+[l]/2} v_j(x',t)$$

$$= \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\big(\partial_\tau^{[l]/2}\Phi(y',\tau) * \partial_t G_j|_{x_n=0}\big),\ |m'| = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} \partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j(x',t)$$

$$= \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\sum_{2p_0+|p'|=1+[l]}\big(\partial_\tau^{p_0}\partial_{y'}^{p'}\Phi(y',\tau) * \partial_{x'} G_j|_{x_n=0}\big),\ |m'| \neq 0, \tag{20}$$

$$\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]} \partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'} v_j(x',t) = \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]}\big(\partial_\tau^{q_0}\partial_{y'}^{q'}\Phi(y',\tau) * G_j|_{x_n=0}\big), \tag{21}$$

where $p' = (p_1, \dots, p_{n-1})$, and

$$\partial_t^{[l]/2}\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R_T),$$

$$\partial_t^{p_0}\partial_{x'}^{p'}\Phi(x',t),\ \partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ t}^{\alpha,\alpha/2}(R_T),$$

$2p_0 + |p'| = 1 + 2k = 1 + [l],\ 2q_0 + |q'| = 1 + 2k = 1 + [l].$

We can see that the potentials (19) – (21) are the same as in the estimates (14) – (16), so applying (14) – (16) to these potentials we shall have

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ |m'|=0,\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{m_0} v_j]_{R_T}^{(\alpha)} \equiv [\partial_t^{1+[l]/2} v_j]_{R_T}^{(\alpha)} = \frac{\alpha_j}{\varepsilon}[(\partial_\tau^{[l]/2}\Phi(y',\tau) * \partial_t G_j|_{x_n=0})]_{R_T}^{(\alpha)}$$

$$\le C_7[\partial_t^{[l]/2}\Phi]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \equiv C_7 \sum_{\substack{2q_0+|q'|=[l],\\ |q'|=0,\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{q_0}\Phi]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ |m'| = 0,$$

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j]_{R_T}^{(\alpha)} \le \frac{\alpha_j}{\varepsilon}\sum_{\substack{2p_0+|p'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}} [(\partial_\tau^{p_0}\partial_{y'}^{p'}\Phi(y',\tau) * \partial_{x'} G_j|_{x_n=0})]_{R_T}^{(\alpha)}$$

$$\le C_8 \sum_{\substack{2p_0+|p'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{p_0}\partial_{x'}^{p'}\Phi]_{x',R_T}^{(\alpha)},\ |m'| \neq 0,$$

and

$$\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'} v_j(x',t)]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

$$\leq \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}} [(\partial_\tau^{q_0}\partial_{y'}^{q'}\Phi(y',\tau) * G_j|_{x_n=0})]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

$$\leq C_9 \sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}} [\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi(x',t)]_{t,R_T}^{(\alpha/2)},$$

where the constants C_7 – C_9 do not depend on $\varepsilon > 0$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$.

Let $[l] = 1 + 2k$, $k = 0, 1, \ldots$, be an odd positive number, then the derivatives in (17), (18) may be written as follows

$$\sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} \partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j(x',t) = \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \sum_{2p_0+|p'|=1+[l]} \left(\partial_\tau^{p_0}\partial_{y'}^{p'}\Phi * \partial_{x'} G_j|_{x_n=0}\right), \quad (22)$$

$$\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]} \partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'} v_j(x',t) = \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \sum_{2q_0+|q'|=1+[l]} \left(\partial_\tau^{q_0}\partial_{y'}^{q'}\Phi * G_j|_{x_n=0}\right), \quad (23)$$

where

$$\partial_t^{p_0}\partial_{x'}^{p'}\Phi(x',t),\ \partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ t}^{\alpha,\alpha/2}(R_T),$$

$2p_0 + |p'| = 1 + [l]$, $2q_0 + |q'| = 1 + [l]$, $j = 1, 2$.

In this case the potentials (22), (23) are the same as in the estimates (15), (16) respectively, so we have

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} v_j]_{R_T}^{(\alpha)} \leq \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \sum_{\substack{2p_0+|p'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\left(\partial_\tau^{p_0}\partial_{y'}^{p'}\Phi * \partial_{x'} G_j|_{x_n=0}\right)]_{R_T}^{(\alpha)}$$

$$\leq C_{10} \sum_{\substack{2p_0+|p'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\partial_t^{p_0}\partial_{x'}^{p'}\Phi]_{x',R_T}^{(\alpha)},\ j = 1, 2,$$

$$\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'} v_j]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq \frac{\alpha_j}{\varepsilon} \sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\left(\partial_\tau^{q_0}\partial_{y'}^{q'}\Phi * G_j|_{x_n=0}\right)]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

$$\leq C_{11} \sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}} [\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]_{t,R_T}^{(\alpha/2)},\ j = 1, 2,$$

where $\alpha_j > 0$, the constants C_{10}, C_{11} do not depend on $\varepsilon > 0$.

Thus, we have obtained

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ |m'|=0,[l]-\text{even}}}[\partial_t^{m_0}v_j]^{(\alpha)}_{R_T}+\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ |m'|\neq 0,[l]-\text{even}}}[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}v_j]^{(\alpha)}_{R_T}$$

$$+\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}v_j]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}\le C_7\sum_{\substack{2q_0+|q'|=[l],\\ |q'|=0,\,[l]-\text{even}}}[\partial_t^{q_0}\Phi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$$

$$+C_8\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\alpha)}_{x',R_T}+C_9\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{even}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\alpha/2)}_{t,R_T},\tag{24}$$

$$\sum_{\substack{2m_0+|m'|=2+[l],\\ [l]-\text{odd}}}[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}v_j]^{(\alpha)}_{R_T}+\sum_{\substack{2q_0+|q'|=[l],\\ [l]-\text{odd}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}v_j]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$$

$$\le C_{10}\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\alpha)}_{x',R_T}+C_{11}\sum_{\substack{2q_0+|q'|=1+[l],\\ [l]-\text{odd}}}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\alpha/2)}_{t,R_T}.\tag{25}$$

Gathering the estimates (24), (25) we shall have

$$\sum_{2m_0+|m'|=2+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}v_j]^{(\alpha)}_{R_T}+\sum_{2m_0+|m'|=1+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}v_j]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$$

$$\le C_{12}\Big(\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\alpha)}_{R_T}+\sum_{2q_0+|q'|=[l]}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}\Big),\tag{26}$$

where a constant C_{12} does not depend on ε

As it follows from (10) we should also estimate the module of the function $v_j(x',t)=u_j(x,t)|_{x_n=0}$ defined by the formula (13). Taking into account that $\Phi(x',t)\in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$ satisfies an inequality

$$|\Phi(x',t)|\le C_{13}M\,t^{\frac{1+l}{2}},\quad M=[\partial_t^{[\frac{1+l}{2}]}\Phi]^{(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}])}_{t,R_T},$$

we shall have

$$|v_j(x',t)|=|u_j(x,t)|_{x_n=0}|\le\frac{C_{14}}{\varepsilon}\,M\int_0^t\tau^{\frac{1+l}{2}}d\tau\int_0^{t-\tau}d\sigma\int_0^{t-\tau-\sigma}d\tau_1\int_{\mathbb{R}^{n-1}}dy'$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\alpha_1 b_n\sigma/\varepsilon}{(t-\tau-\sigma-\tau_1)^{\frac{n+2}{2}}}\,\frac{\alpha_2 c_n\sigma/\varepsilon}{\tau_1^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{(x'-y'-\eta'-d'\sigma/\varepsilon)^2+(\alpha_1 b_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_1(t-\tau-\sigma-\tau_1)}}\,e^{-\frac{\eta'^2+(\alpha_2 c_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_2(\tau_1}}\,d\eta',$$

here $\alpha_j>0$, $j=1,2$, $b_n>0$, $c_n>0$.

We integrate with respect to η' using the table formula

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2\pi\tau_1(t-\tau_1)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\eta_i)^2}{4a_1(t-\tau_1)}-\frac{(\eta_i-z_i)^2}{4a_2\tau_1}}d\eta_i$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_1(t-\tau_1)+a_2\tau_1}}e^{-\frac{(x_i-z_i)^2}{4(a_1(t-\tau_1)+a_2\tau_1)}},$$

take an integral over y', then with the help of a table formula

$$\int_0^t\frac{a\,b}{\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}\,\tau_1^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t-\tau_1}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{\tau_1}}\,d\tau_1=\frac{a+b}{t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{(a+b)^2}{t}},\ a>0,\ b>0,$$

we integrate with respect to τ_1

$$|v_j(x',t)|\le\frac{C_{15}}{\varepsilon}\,M\,t^{\frac{1+l}{2}}\int_0^t d\tau\int_0^{t-\tau}\,d\sigma\,\int_0^{t-\tau-\sigma}\frac{\alpha_1 b_n\sigma/\varepsilon}{(t-\tau-\sigma-\tau_1)^{3/2}}\,\frac{\alpha_2 c_n\sigma/\varepsilon}{\tau_1^{3/2}}$$

$$\times e^{-\frac{(\alpha_1 b_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_1(t-\tau-\sigma-\tau_1)}}\,e^{-\frac{(\alpha_2 c_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_2\tau_1}}\,d\tau_1$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{1}{\big(a_1(t-\tau-\sigma-\tau_1)+a_2\tau_1\big)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{(x'-y'-\eta'-d'\sigma/\varepsilon)^2}{4(a_1(t-\tau-\sigma-\tau_1)+a_2\tau_1)}}dy'=\frac{C_{16}}{\varepsilon}\,M\,t^{\frac{1+l}{2}}$$

$$\times\int_0^t d\sigma\int_0^{t-\sigma}\frac{(\alpha_1 b_n)\sigma/(\sqrt{a_1}\,\varepsilon\,)+(\alpha_2 c_n)\sigma/(\sqrt{a_2}\varepsilon)}{(t-\tau-\sigma)^{3/2}}\,e^{-\frac{(\alpha_1 b_n/\sqrt{a_1}+\alpha_2 c_n/\sqrt{a_2})^2\sigma^2}{4\varepsilon^2(t-\tau-\sigma)}}\,d\tau.$$

In the integral with respect to τ we make the substitution $\zeta^2=\frac{(\alpha_1 b_n/\sqrt{a_1}+\alpha_2 c_n/\sqrt{a_1})^2\sigma^2}{4\varepsilon^2(t-\tau-\sigma)}$ and integrate with respect to σ

$$|v_j(x',t)|\le\frac{C_{17}}{\varepsilon}\,M\,t^{\frac{1+l}{2}}\int_0^t d\sigma\int_{\frac{(\alpha_1 b_n)/\sqrt{a_1}+(\alpha_2 c_n)/\sqrt{a_2})\sigma}{2\varepsilon\sqrt{t-\sigma}}}^{\infty}e^{-\zeta^2}\,d\zeta$$

$$\le\frac{C_{17}}{\varepsilon}\,M\,t^{\frac{1+l}{2}}\int_0^t e^{-\frac{(\alpha_1 b_n/\sqrt{a_1}+\alpha_2 c_n/\sqrt{a_1})^2\sigma^2}{8\varepsilon^2 t}}\,d\sigma\int_0^{\infty}e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta$$

$$= C_{18}\, M\, t^{1+l/2} \int_0^{\frac{(\alpha_1 b_n/\sqrt{a_1}+\alpha_2 c_n/\sqrt{a_1})\sqrt{t}}{2\sqrt{2}\varepsilon}} e^{-\xi^2}\, d\xi \le C_{19}\, M\, t^{1+l/2},$$

we remind that $\alpha_j,\ j=1,2,\ b_n,\ c_n$, are positive constants.

We have derived

$$|v_j(x',t)| \le C_{19}\, [\partial_t^{[\frac{1+l}{2}]}\Phi]_{t,R_T}^{(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}])}\, t^{1+l/2},\ (x',t)\in R_T,\ j=1,2, \tag{27}$$

where constant C_{19} does not depend on ε.

With the help of the inequalities (26), (27) we obtain an estimate of a norm (10), which is equivalent to the norm (9) due to Lemma 1

$$|v_j|_{R_T}^{(2+l)} \le C_{20}||v_j||_{R_T}^{(2+l)}$$

$$\le C_{20}\Big(C_{12}\big(\sum_{2q_0+|q'|=1+[l]}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]_{R_T}^{(\alpha)} + \sum_{2q_0+|q'|=[l]}[\partial_t^{q_0}\partial_{x'}^{q'}\Phi]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big)$$

$$+C_{19}\, [\partial_t^{[\frac{1+l}{2}]}\Phi]_{t,R_T}^{(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}])}\Big) \le C_{21}|\Phi|_{R_T}^{(1+l)},\ j=1,2, \tag{28}$$

where the constant C_{21} does not depend on ε.

Thus, we have proved that the functions $u_j(x,t)|_{x_n=0} := v_j(x',t)$, $j=1,2$, belong to the space $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(R_T)$ and satisfy an estimate (28).

We can consider the functions $u_j(x,t)$, $j=1,2$, as the solution of the first boundary value problem

$$\partial_t u_j - a_j\,\Delta u_j = 0 \text{ in } D_{jT},$$

$$u_j|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j,\ u_j|_{x_n=0} = v_j(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{2+l,1+l/2}(R_T).$$

This problem has a unique solution $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $j=1,2$, satisfying an estimate [9]

$$|u_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_{22}|v_j|_{R_T}^{(2+l)} \le C_{23}|\Phi|_{R_T}^{(1+l)},\ j=1,2, \tag{29}$$

where a constant C_{23} is independent on ε.

From the conditions (3)

$$u_1|_{x_n=0} - \alpha_1\psi = u_2|_{x_n=0} - \alpha_2\psi = 0 \text{ on } R_T, \tag{3}$$

we obtain that the unknown function $\psi(x',t) = \frac{1}{\alpha_j} u_j(x',0,t) = \frac{1}{\alpha_j} v_j(x',t)$ $j = 1,2$, satisfies an estimate (28)

$$|\psi|^{(2+l)}_{R_T} \le C_{24} |\Phi|^{(1+l)}_{R_T}. \tag{30}$$

From the conditions (4)

$$(\varepsilon\, \partial_t \psi + b\nabla u_1 - c\nabla u_2 + h'\nabla'\psi)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T, \tag{4}$$

we shall nave

$$|\varepsilon \partial_t \psi|^{(2+l)}_{R_T} \le C_{25} |\Phi|^{(1+l)}_{R_T}. \tag{31}$$

Gathering the estimates (29), (30), (31) we obtain an estimate (11), where a constant does not depend on ε. □

Proof of Theorem 2. Consider the problem (1)– (4). We make the substitution in it

$$\frac{u_j(x,t)}{\alpha_j} = z_j(x,t),\ j = 1,2$$

and exclude the function $\psi(x',t) = u_1(x',0,t)/\alpha_1 = z_1(x,t)|_{x_n=0}$ from the condition (4), then we obtain the problem for the functions $z_j(x,t),\ j = 1,2,$

$$\partial_t z_j - a_j\, \Delta z_j = 0 \text{ in } D_{jT},$$

$$z_j|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j,$$

$$(z_1 - z_2)|_{x_n=0} = 0 \text{ on } R_T,$$

$$(\varepsilon\, \partial_t z_1 + (\alpha_1 b' + h')\nabla'^T z_1 + \alpha_1 b_n \partial_{x_n} z_1 - \alpha_2 c \nabla^T z_2)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T,$$

here $\alpha_j > 0$, $b_n > 0$, $c_n > 0$.

Due to Theorem 1 and an estimate (11) the functions $z_j(x,t) = u_j(x,t)/\alpha_j$ belong to $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2,$ and satisfy an estimate

$$|z_j|^{(2+l)}_{D_{jT}} \le C_1/\alpha_j |\Phi|^{(1+l)}_{R_T}$$

with a constant C_1/α_j independent on ε.

We can see that the problem for the functions $z_j(x,t)$ is similar to the problem (5)– (8). So the problem (5)– (8) has a unique solution $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x\ \ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_{jT})$, $j=1,2$, which is subjected to an estimate

$$|u_j|_{D_{jT}}^{(2+l)} \le C_{26}|\Phi|_{R_T}^{(1+l)}, \tag{32}$$

from the condition (8) and an estimate (32) we find

$$|\varepsilon\partial_t u_1|_{R_T}^{(1+l)} \le C_{27}|\Phi|_{R_T}^{(1+l)}, \tag{33}$$

where the constants $C_{26},\ C_{27}$ are independent on ε.

The estimates (32), (33) lead to the estimate (12) of the Theorem 2. $\square$

In the second part of the present paper we shall study two problems in the domain $x_n > 0$ with unknowns $u_2(x,t)$, $\psi(x,' t)$ in the first problem and $u_2(x,t)$ in the second one satisfying zero initial conditions, heat equation

$$\partial_t u_2 - a_2\,\Delta u_2 = 0 \text{ in } D_{2T},$$

and congugate conditions

$$u_2|_{x_n=0} - \alpha_2\psi = 0 \text{ on } R_T,$$

$$(\varepsilon\,\partial_t\psi - c\nabla^T u_2 + h'\nabla'\psi)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T$$

in the first problem and

$$(\varepsilon\,\partial_t u_2 - c\nabla^T u_2)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T$$

in the second one.

We point out that we can not obtain the solutions of these problems from the solutions of the problems (1)– (4) and (5)– (8) respectively. Using the conditions (3), (7) we can exclude the tangential derivatives $\partial_{x_i}u_1(x,t)|_{x_n=0}$, $i=1,\dots,n-1$, in the conditions (4), (8), but we can not let equalled to zero coefficient b_n at the normal derivative $\partial_{x_n}u_1|_{x_n=0}$ (principal term), it becomes a small parameter and problems are perturbed as $b_n \to 0$.

References

[1]. Bazaliy B.V., *Stefan problem*, Doklady AN USSR. Ser.A., 1986, №11, P.3-7.

[2]. Radkevich E.V. *On the solvability of the general nonstationary free boundary problems*, Some applications of functional analysis to the problems of mathematical physics, Novosibirsk, 1986, P. 85-111.

[3]. Bizhanova G.I. *Solution of the multidimensional two-phase Stefan and Florin problems for the second order parabolic equations in the bounded domain in the weighted Hölder space*, Algebra i Analiz, 1995, Vol. 7, №2, P.46–76.

[4]. Bizhanova G.I.; Solonnikov V.A. *On the free boundary problems for the parabolic equations*, Algebra i Analiz, 2000, Vol. 12, №6, P.3–45.

[5]. Bizhanova G.I. *Solution of the initial - boundary value problem with a time derivative in the conjugate condition for the second order parabolic equation in the weighted Hölder space*, Algebra i Analiz, 1994, Vol. 6, №1, P.62–92.

[6]. Rodrigues J.F.; Solonnikov V.A.; Yi. F. *On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems*, Math.Ann., 1999, №315, P. 61–95.

[7]. Bizhanova G.I. *Uniform estimates of the solution to the linear two – phase Stefan problem with a small parameter*, Matem. zhurnal, Almaty, 2005, №1, P. 19 - 28.

[8]. Bizhanova G.I. *Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boundary, Stefan type problems*, Zapiski nauchn. semin. POMI, 2008, Vol. 362, P. 64-91.

[9]. Ladyženskaja, O.A.; Solonnikov, V.A.; Ural'çeva, N.N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, M., "Nauka", 1967.

[10]. Solonnikov, V.A. *On an estimate of the maximum of a derivative modulus for a solution of a uniform parabolic initial-boundary value problem*, 1977, LOMI, Preprint № P-2-77.

This work was carried out under the grant №0763/GF of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Received 31.05.2012

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 1 (43) . С. 38–47*

УДК 517.925.5:519.216

О МЕТОДЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Г. К. Василина

Институт математики МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

Методом функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности интегрального многообразия дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Метод функций Ляпунова исследования устойчивости невозмущенного движения достаточно полно разработан в классе обыкновенных дифференциальных уравнений. Благодаря фундаментальным исследованиям [1-12] и др. в настоящее время известны различные модификации и обобщения классических теорем второго метода Ляпунова [1] об устойчивости невозмущенного движения, значительно расширяющие возможности качественного исследования движения в задачах нелинейной механики и особенно нелинейных процессов управления.

Keywords: *Stochastic differential equations, integral manyfold, stability, asymptotic stability*

2010 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10

Существенное обобщение и развитие эти исследования получили в работах [13-18], в которых основные теоремы Ляпунова и их различные модификации обобщаются на случай устойчивости как инвариантных множеств, так и множеств, зависящих от времени, с помощью функции Ляпунова вида $V(\rho,t)$, где $\rho=\rho(x,\Lambda(t))$ – расстояние от изображающей точки $x\in R^n$ до множества $\Lambda(t):\ \lambda(x,t)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}^r,\ r\le n$.

Устойчивость по вероятности невозмущенного движения со случайными возмущениями из класса процессов с независимыми приращениями исследована в [19], а устойчивость по вероятности интегрального многообразия со случайными возмущениями из класса винеровских процессов, более узкого, чем класс процессов с независимыми приращениями, рассмотрена в [20].

В данной работе рассматривается задача устойчивости по вероятности интегрального многообразия для стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Постановка задачи

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=X(x,t)+\sigma(x,t)\dot{\zeta}, \qquad (1)$$

где $\zeta(t)$ – m-мерный процесс с независимыми приращениями [21]:

$$\zeta(t)=w(t)+\int_{\mathbb{R}^n}c(x)P^0(t,dx),$$

$w(t)$ – винеровский процесс, $P^0(t,A)$ – пуассоновский процесс, как функция от t и пуассоновская стохастическая мера, как функция множества A, $c(x)$ – векторная функция, отображающая $\mathbb{R}^n$ в пространство значений процесса $\zeta(t)$ при каждом t, $t\ge 0$.

Предположим, что

1) уравнение (1) допускает интегральное многообразие в виде совокупности частных интегралов $\Lambda(t)$ в фазовом пространстве $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(t):\lambda(x,t)=0, \qquad (2)$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ – r-мерная вектор-функция, $r \leq n$;
2) вектор-функция $X(x,t)$ и матрица $\sigma(x,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x в области

$$\Lambda_h(t) : \rho\big(x, \Lambda(t)\big) < h,\ t \geq t_0 \geq 0, \tag{3}$$

$(\rho(x,\Lambda) = inf\{\|x-a\|, a \in \Lambda\})$, что обеспечивает существование и единственность достохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом.

Определение 1. *Назовем $a(r)$ функцией класса K ($a \in K$), если $a(r)$ — непрерывная, строго возрастающая функция и $a(0) = 0$.*

Будем рассматривать непрерывные функции $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda x t} : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $V(0; x, t) = 0$.

По уравнению (1) с использованием формулы стохастического дифференцирования Ито (см. формулу (76) на стр. 204 из [21]) составим уравнение возмущенного относительно $\Lambda(t)$ движения:

$$d\lambda_\mu = \{\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial t} + \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial^2 \lambda_\mu}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ik}\sigma^T_{jk}] +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} [\lambda_\mu(x + \sigma_{ik}c_k(x), t) - \lambda_\mu(x,t) -$$

$$- \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T \sigma_{ik}c_k(x)]dx\}dt + \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T \sigma_{ik} dw_k +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} [\lambda_\mu(x + \sigma_{ik}c_k(x), t) - \lambda_\mu(x,t)] dP(t, dx), \tag{4}$$

где $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, \ldots, \lambda_r)$, $c^T = (c_1, c_2, ..., c_k, ..., c_m)$ – векторы-столбцы. Здесь знак "T" означает транспонирование матрицы и по повторяющимся индексам предполагается суммирование ($i, j = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,m}$).

При исследовании стохастической устойчивости $\Lambda(t)$ будем использовать функцию Ляпунова вида $V(\lambda; x, t)$ с производящим дифференциальным оператором

$$\widetilde{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ik}\sigma^T_{jk}] +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}[V(\lambda_\mu(x+\sigma_{ik}c_k(x),t);x+\sigma_{ik}c_k(x),t)-V(\lambda_\mu(x,t);x,t)-$$

$$-(\frac{\partial V}{\partial x_i})^T\sigma_{ik}c_k(x)]dx+(\frac{\partial V}{\partial x_i})^T\sigma_{ik}dw_k+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}[V(\lambda_\mu(x+\sigma_{ik}c_k(x),t);x+\sigma_{ik}c_k(x),t)-$$

$$-V(\lambda_\mu(x,t);x,t)]dP(t,dx)+\frac{\partial V}{\partial \lambda_\mu}d\lambda_\mu.$$

Определение 2. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой (2), уравнения (1) называется ρ-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\rho(x_0,\Lambda(t_0))\to 0} P_{x_0}\left\{\sup_{t>0}\rho(x^{x_0,t_0}(t),\Lambda(t))>\varepsilon\right\}=0. \tag{5}$$

В обозначении P_{x_0} индекс x_0 показывает, что берется решение, выходящее из точки x_0 в момент времени t_0 [23].

Определение 3. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой (2), уравнения (1) называется λ-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{||\lambda(x_0,t_0)||\to 0} P_{x_0}\left\{\sup_{t>0}||\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)||>\varepsilon\right\}=0. \tag{6}$$

Определение 4. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически ρ-устойчивым по вероятности, если оно ρ-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\rho(x_0,\Lambda(t_0))\to 0} P_{x_0}\left\{\lim_{t\to\infty}\sup_{t>0}\rho(x^{x_0,t_0}(t),\Lambda(t))=0\right\}=1. \tag{7}$$

Определение 5. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$, определяемое формулой (2), уравнения (1) называется асимптотически λ-устойчивым по вероятности, если оно λ-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{||\lambda(x_0,t_0)||\to 0} P_{x_0}\left\{\lim_{t\to\infty}\sup_{t>0}||\lambda(x^{x_0,t_0}(t),t)||=0\right\}=1. \tag{8}$$

Основные результаты

Теорема 1. *Если для процесса $x(t)$, описываемого уравнением (1), существует функция Ляпунова $V(\lambda;x,t)\in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0;x,t)\equiv 0$, со свойствами*

$$V(\lambda;x,t)\geq a(||\lambda||),\ \ a\in K; \tag{9}$$

$$\widetilde{L}V\leq 0 \tag{10}$$

и, кроме того, вектор-функция $\lambda=\lambda(x,t)$ удовлетворяет условию

$$||\lambda(x,t)||\geq\alpha(\rho),\quad \alpha\in K, \tag{11}$$

то интегральное многообразие $\Lambda(t):\ \lambda(x,t)=0$ (2) уравнения (1) ρ-устойчиво по вероятности.

Доказательство. Возьмем произвольное достаточно малое число $\varepsilon>0$, произвольный момент t_0 и начальную точку x_0. Рассмотрим решение $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1). Пусть $\tau_\varepsilon=\inf\{t:||\lambda(x(t)||>\varepsilon\}$, а $\tau_\varepsilon(t)=\min(\tau_\varepsilon,t)$. Тогда, используя один частный случай формулы Дынкина [23] для системы уравнений (1) и (4), получим

$$M_{x_0,t_0}V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t));x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))=V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0)+$$

$$+M_{x_0,t_0}\int\limits_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)}\widetilde{L}V(\lambda(x(u),u);x(u),u)du, \tag{12}$$

откуда в силу (10) вытекает неравенство

$$M_{x_0,t_0}V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t));x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))\leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0),$$

которое с учетом (9) можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\tau_\varepsilon<t}a(||\lambda(x(\tau_\varepsilon),\tau_\varepsilon)||)P_{x_0,t_0}(d\omega)+$$

$$+\int\limits_{\tau_\varepsilon\geq t}a(||\lambda(x(t),t)||)P_{x_0,t_0}(d\omega)\leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0).$$

Следовательно,

$$a(\varepsilon)P_{x_0,t_0} \leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0).$$

В силу непрерывности по λ функции $V(\lambda;x_0,t_0)$ и $V(0;x,t) \equiv 0$, из последнего неравенства вытекает соотношение

$$\lim_{||\lambda|| \to 0} P_{x_0,t_0}\{\tau_\varepsilon < t\} = 0,$$

которое влечет за собой λ-устойчивость $\Lambda(t)$ в соответствии с определением 3. И, учитывая оценку (11), получаем ρ-устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$ уравнения (1).

Замечание 1. *В случае винеровского процесса* ($c(x) \equiv 0$) *оператор* $\widetilde{L}$ *переходит в оператор* L *вида:*

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T X_i(x,t) + \frac{1}{2}tr[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ik}\sigma_{jk}^T] + (\frac{\partial V}{\partial x_i})^T\sigma_{ik}dw_k + \frac{\partial V}{\partial \lambda_\mu}d\lambda_\mu$$

и теорема 1 совпадает с теоремой 1 из [20].

Теорема 2. *Если для процесса* $x(t)$*, описываемого уравнением* (1)*, существует функция Ляпунова* $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0;x,t) \equiv 0$, *со свойствами*

$$V(\lambda;x,t) \geq a(||\lambda||),\ a \in K, \tag{9}$$

$$V(\lambda;x,t) \leq b(||\lambda||),\ b \in K, \tag{13}$$

$$\widetilde{L}V \leq -c(||\lambda||),\ c \in K, \tag{14}$$

и, кроме того, вектор-функция $\lambda = \lambda(x,t)$ *удовлетворяет условию*

$$||\lambda(x,t)|| \geq \alpha(\rho), \quad \alpha \in K, \tag{11}$$

то интегральное многообразие $\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0$ *уравнения* (1) *асимптотически* ρ*-устойчиво по вероятности.*

Доказательство. По теореме 1 условия (9) и (10) обеспечивают λ-устойчивость $\Lambda(t)$ по вероятности, а (11) влечет за собой ρ-устойчивость по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Докажем справедливость соотношения (8) – асимптотической λ -устойчивости по вероятности $\Lambda(t)$, и из оценки (11) тогда будет следовать асимптотическая ρ -устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Пусть аналогично теореме 1 $\tau_\varepsilon = \inf\{t : ||\lambda(x(t)|| > \varepsilon\}$, $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$ таких, что $\tau_\varepsilon(t) = t$, $t \in \mathbb{R}^*$, то есть те траектории, которые до момента t не вышли из множества $||\lambda(x(t)|| < \varepsilon$. Тогда по теореме 1 следует

$$\lim_{||\lambda(x_0,t_0)||\to 0} P_{x_0,t_0}\{\mathcal{R}\} = 1.$$

Из (12) и (14) вытекает неравенство

$$M_{x_0,t_0}V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) \leq V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0),$$

т.е. случайный процесс $V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))$ является неотрицательным супермантингалом и по теореме Дуба [23] с вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) = \lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = æ.$$

Покажем, что с вероятностью 1 $æ = 0$. Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что найдется хотя бы одна пара $x_0^*, t_0^* \in U_\varepsilon(0)$, где $U_\varepsilon = \{x : ||\lambda(x,t)|| < \varepsilon\}$, такая, что для выборочных траекторий из множества $\mathcal{R}$ с вероятностью q выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = V_* > 0.$$

Тогда из свойства (13) бесконечно малого высшего предела функции V вытекает, что с вероятностью q

$$\lim_{t\to\infty} ||\lambda(x(t),t)|| \geq b^{-1}(V_*) > \varepsilon_1 > 0.$$

Для дальнейших рассуждений нам необходимо доказать свойство возвратности выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$ по отношению к области $\{||\lambda(x(t),t)|| < \nu\}$ для каждого ν, $0 < \nu < \varepsilon$. Действительно, для таких ν и всех $\{x : \nu \leq ||\lambda(x(t),t)|| \leq \varepsilon\}$ из строгой монотонности $c(r)$ выполняется оценка (14): $LV \leq -c(\nu)$.

Пусть τ^ν – момент первого выхода процесса $x^{x_0,t_0}(t)$ из области $\nu \leq ||\lambda|| \leq \varepsilon$. Используя (12), имеем

$$M_{x_0,t_0}\tau^\nu(t) - t_0 \leq c^{-1}(\nu)V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0),$$

отсюда на основании неравенства Чебышева получим

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\nu \geq t\} \leq \frac{c^{-1}(\nu)V(\lambda(x_0,t_0);x_0}{t}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, будем иметь

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\nu < \infty\} = 1, \tag{15}$$

что доказывает возвратность траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$ по отношению к $\{||\lambda(x,t)|| < \nu\}$.

Из (15) и строго марковости процесса $x(t)$ получаем для любого $\nu > 0$

$$q = P_{x_0^*,t_0^*}\{\lim_{t\to\infty} ||\lambda(x(t),t)|| > \varepsilon_1\} =$$

$$= \int\limits_{\{x:||\lambda(x,t)||=\nu\}} \int\limits_0^\infty P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty} ||\lambda(x(t),t)|| > \varepsilon_1\} P_{x_0^*,t_0^*}\{\tau^\nu \in dt,\ x(\tau^\nu) \in dx \leq$$

$$\leq \sup_{\{x:||\lambda(x,t)||\leq\nu,\ t_0>0\}} P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty} ||\lambda(x(t),t)|| > \varepsilon_1\},$$

что противоречит λ-устойчивости по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$. Таким образом, для почти всех выборочных траекторий множества $\mathcal{R}$ с вероятностью 1 $\lim ||\lambda(x(t),t)|| = 0$ при $t \to \infty$ для всех $x \in U_\varepsilon(0)$. Отсюда и из оценки $V(\lambda;x,t) \geq a(||\lambda||)$ для почти всех траекторий из $\mathcal{R}$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} ||\lambda(x(t),t)|| = 0$, откуда с учетом (15) и оценки (11) вытекает утверждение теоремы.

Цитированная литература

[1]. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*, М.-Л., "Гостехиздат 1950.

[2]. Четаев Н. Г. *Устойчивость движения*, М.:Наука, 1965.

[3]. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*, М., 1966.

[4]. Каменков Г. В. *Избранные труды в двух томах, Т.2. Устойчивость и колебания нелин. систем*, М., 1972.

[5]. Персидский К. П. *Избранные труды, Т.1. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей*, Алма-Ата, 1976.

[6]. Барбашин Е. А. *Введение в теорию устойчивости*, М., 1967.

[7]. Барбашин Е. А. *Функции Ляпунова*, М., 1970.

[8]. Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, М., 1959.

[9]. Летов А. М. *Динамика полета и управление*, М., 1969.

[10]. Зубов В. И. *Устойчивость движения*, М., 1973.

[11]. Дубошин Г. Н. *Основы теории устойчивости движения*, М., 1952.

[12]. Румянцев В. В. *Об устойчивости движения по отношению к части переменных*, Вестник МГУ, серия матем., хим., астрон., 1957, № 4, С. 9 – 16.

[13]. Матросов В. М. *Об устойчивости движения*, ПММ, 1962, Т. 26, № 5, С. 885 – 895.

[14]. Yoshizawa T. *Stability theory by Liapunov's second method*, Tokyo, The Math. Soc. of Japan, 1966.

[15]. Матросов В. М. *Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия систем*, Труды КАИ , 1965, № 89, С. 20 – 32.

[16]. Шестаков А. А. *Признаки неустойчивости множества относительно неавтономной дифференциальной системы*, Дифференц. уравн., 1977, Т. 13, № 5, С. 958 – 960.

[17]. Сейберт П. *Об устойчивости относительно некоторого множества и всего пространства*, Труды 5 межд. конф. по нелин. колеб., Т. 2, Качеств. методы теории нелин. лолебаний, 1970, С. 448 – 457.

[18]. Hajek O. *Ordinary and asymptotic stability of Noncompact sets*, J. of Diff. Eq., 1972, № 11, P. 49 – 65.

[19]. Гихман И. И., Дороговцев А. Я. *Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений*, Укр. матем. журнал, 1965, Т. 17, № 6, С. 3 – 21.

[20]. Тлеубергенов М. И. *Об устойчивости интегрального многообразия стохастического дифференциального уравнения Ито*, Известия МОН РК, НАН РК, 2001, № 3(217), С. 55 – 62.

[21]. Пугачев В. С., Синицын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, М., 1990.

[22]. Hahn W. *Stability of motion*, Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[23]. Хасьминский Р. З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, М., 1969.

Статья поступила в редакцию 12.08.2011г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 1 (43) . С.48–70*

УДК 517.982.1/.3, 517.983

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ. II.

И. Н. Панкратова

Институт математики МОН РК
050010, Алматы, ул.Пушкина 125, e-mail: irina.pankratova@math.kz

Определены некоторые свойства инвариантных подпространств линейного оператора, содержащих циклы лучей. Выделены циклические инвариантные подпространства (неотрицательного оператора) конечного периода, в которых все или почти все циклы лучей имеют одинаковый период. Определены необходимые и достаточные условия, при которых инвариантное подпространство, содержащее циклы лучей, является циклическим инвариантным подпространством. Получена формула для определения периода суммы циклических инвариантных подпространств.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n- мерное вещественное векторное пространство и $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \varnothing$. Множество вида

$$\mathrm{cone}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \geq 0, y_i \in M, m \in N \right\}$$

называется конической оболочкой подмножества M, где $\alpha_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, m}$. Коническую оболочку $\mathrm{cone}(y)$ одноточечного множества $\{y\}$ при $y \neq 0$

Keywords: *Dynamical system, linear operator, invariant subspace, nonnegative matrix*
2010 Mathematics Subject Classification: 15A03, 37C05, 39A12

называют лучом с вершиной в нуле, направленным в точку y, или лучом, исходящим из нуля вдоль вектора y. Таким образом,

$$\mathrm{cone}(y) = \{\alpha y \mid \alpha \geq 0\}.$$

Множество X называется инвариантным относительно отображения F, если $F : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ или $F\mathrm{X} \subseteq \mathrm{X}$. В работе [1] рассматривались множества в $\mathbb{R}^n$ в виде систем лучей и были определены условия, при которых система из конечного числа лучей $l_1, ..., l_p$, $p \in N$, является инвариантным относительно линейного оператора $\mathbf{A}$ множеством в $\mathbb{R}^n$, а также установлены некоторые свойства инвариантных подпространств, содержащих инвариантные системы лучей. В работе [2] рассматривается пространство лучей и определяются условия его полноты в введенной метрике. Компоненты конусов в виде лучей рассматриваются также в [3] (с. 77) в связи с изучением вопросов существования собственных векторов фокусирующих операторов. Инвариантные множества в виде систем лучей ранее не рассматривались, что делает актуальным их изучение.

В настоящей работе продолжено исследование инвариантных подпространств, содержащих инвариантные относительно линейного оператора $\mathbf{A}$ системы лучей. Определение этих множеств связано с решением автором данной статьи проблемы асимптотического поведения класса динамических систем, порожденных отображением F вида

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad Fy = \Phi(y)\mathbf{A}y,$$

где $\Phi(y)$ – скалярная функция (см., например, [4]–[7]). Пусть множество $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно отображения F. Тогда отображение F, в общем случае необратимое, порождает на X циклическую полугруппу отображений $\{F^m\}$, $m \in Z_+$, которая называется динамической системой ([8], с. 156) и обозначается $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$, где Z_+ – множество целых неотрицательных чисел. При этом X называется фазовым пространством системы. Для системы $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$ проблема асимптотического поведения состоит в том, чтобы описать расположение всех ее нетривиальных ω- предельных множеств ([9], с. 25) в X и далее, для конкретных видов $\Phi(y)$ и $\mathbf{A}$ определить тип и структуру ω- предельных множеств. Здесь, как и в [1], изучается вопрос о расположении ω- предельных множеств системы $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ некоторый базис Δ. Вектор

$y = (\xi_1, \ldots, \xi_n)'$ называется неотрицательным и обозначается $y \geq 0$, если $\xi_i \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq n$ в базисе Δ. Множество всех неотрицательных векторов обозначим через K_+. Таким образом,

$$\mathrm{K}_+ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0\}.$$

В качестве X выберем компактное множество следующего вида: $\mathrm{X} = \{y \in \mathrm{K}_+ \mid \|y\| \leq a\}$, $a < +\infty$. Отметим, что одним из условий инвариантности относительно F множества X является неотрицательность (≥ 0) оператора $\mathbf{A}$ (теорема 1 из [1]). По определению $\mathbf{A} \geq 0$, если $\mathbf{A} : \mathrm{K}_+ \to \mathrm{K}_+$. Согласно [3] (с. 17) $\mathbf{A} \geq 0$, если и только если для соответствующей оператору $\mathbf{A}$ в базисе Δ матрицы $A = (a_{ij})_1^n$ выполнены условия $a_{ij} \geq 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$. Матрица A называется при этом неотрицательной и обозначается $A \geq 0$ ([10], с. 332). Установлено, что все нетривиальные ω-предельные множества системы $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$ расположены в инвариантных относительно F множествах, представляющих собой пересечение с X инвариантных относительно $\mathbf{A}$ конечных систем несовпадающих лучей [4], [11]. Таким образом, вопрос о расположении ω- предельных множеств системы $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$ сводится к решению следующих задач.

1. Задача выделения в $\mathbb{R}^n$ инвариантных множеств оператора $\mathbf{A}$ в виде конечной системы лучей

Эта задача состоит в определении условий, при которых система из конечного числа лучей является инвариантным множеством оператора $\mathbf{A}$. Ее решение представлено в [1]. Приведем некоторые сведения из [1], которые необходимы для изложения результатов настоящей работы. Следующая теорема определяет условия инвариантности относительно $\mathbf{A}$ системы лучей.

Теорема 1 (Теорема 2 из [1]). *Пусть $\mathbf{A}$ – линейный оператор и для некоторого ненулевого $y \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $p \in N$ и $r > 0$ такие, что*

$$\mathbf{A}^p y = ry. \tag{1}$$

Тогда системы лучей

$$K = (\mathrm{cone}(y),\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}y),\ \ldots,\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}^{p-1}y)) \tag{2}$$

и $-K$ *(при* $-K \neq K$*) инвариантны относительно оператора* $\mathbf{A}$*, и если* p *– наименьшая степень оператора* $\mathbf{A}$*, при которой выполнено* (1)*, то в системах* K *и* $-K$ *все лучи различны.*

Если в (1) вместо $r > 0$ положить $-r$, то при выполнении условий теоремы 1 система лучей

$$K = (\mathrm{cone}(y),\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}y),\ \ldots,\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}^{2p-1}y))$$

инвариантна и все лучи различны, при этом $-K = K$.

Замечание 1. На самом деле, условие (1) является необходимым и достаточным для инвариантности относительно $\mathbf{A}$ системы лучей K (и $-K$ при $-K \neq K$). Достаточность установлена в [1].

Доказательство необходимости условия (1). Пусть система лучей K инвариантна относительно $\mathbf{A}$. Так как операция взятия конической оболочки коммутирует с любым линейным оператором, то в одномерном случае имеем

$$\mathbf{A}\,\mathrm{cone}(y) = \mathrm{cone}(\mathbf{A}y). \tag{3}$$

Согласно (3) под действием оператора $\mathbf{A}$ луч переходит в луч, поэтому инвариантность K относительно $\mathbf{A}$ означает, что $\mathbf{A}K = K$. Продолжая (3), получим

$$\mathbf{A}\,\mathrm{cone}(\mathbf{A}y) = \mathrm{cone}(\mathbf{A}^2y), \ldots, \mathbf{A}\,\mathrm{cone}(\mathbf{A}^{p-1}y) = \mathrm{cone}(\mathbf{A}^p y) = \mathrm{cone}(y).$$

Последнее равенство имеет место в силу инвариантности K относительно $\mathbf{A}$ и означает, что векторы $\mathbf{A}^p y$ и y коллинеарны и однонаправлены, т.е. существует $r > 0$ такое, что выполнено (1), ч.т.д.

Условие: p – наименьшая степень оператора $\mathbf{A}$, при которой выполнено (1), определяет в $\mathbb{R}^n$ систему p несовпадающих лучей, которая называется циклом лучей периода p. Определение следующее.

Определение 1 (из [1]). *Луч* $\mathrm{cone}(y)$ *назовем периодическим периода* $p \geq 1$ *относительно оператора* $\mathbf{A}$*, если*

$$\mathbf{A}^p(\mathrm{cone}(y)) = \mathrm{cone}(y)$$

и при $p > 1$

$$\mathrm{cone}(y) \,\cap\, \mathrm{cone}(\mathbf{A}^j y) = \{0\}, \quad j = \overline{1, p-1}.$$

Систему лучей K *вида* (2) *назовем циклом лучей (оператора* $\mathbf{A}$*) периода* p.

Вектор y луча $\mathrm{cone}(y)$ является образующим вектором цикла лучей K (можно полагать $\|y\| = 1$). Обобщая понятия цикла и неподвижной точки оператора $\mathbf{A}$, приведем определение цикла лучей в более общем виде.

Определение 2. *Система несовпадающих лучей* $l_1, ..., l_p$ *называется циклом лучей (оператора* $\mathbf{A}$*) периода* $p < \infty$ *и обозначается, как* $(l_1, ..., l_p)$, *если*

$$\mathbf{A} l_k = l_{k+1}, \;\; k = 1, \ldots, p-1, \quad \mathbf{A} l_p = l_1.$$

Из теоремы 1 и замечания 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для того, чтобы* $x \in \mathbb{R}^n$ *был образующим вектором цикла лучей периода* 1, *необходимо и достаточно, чтобы* x *был собственным вектором оператора* $\mathbf{A}$, *соответствующим собственному значению* $\mu > 0$.

Пример 1. Существование циклов лучей линейных операторов периодов p **и** $2p$**.** Рассмотрим линейные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, заданные соответственно матрицами A и B следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{A}$ имеет два собственных значения $\pm\mu = \pm 1$, которым соответствуют одномерные собственные подпространства L_1, L_2 с векторами $x_1 = (1,1)' \in L_1$, $x_2 = (1,-1)' \in L_2$. Для любого $y \in L_1$ имеем $\mathbf{A}y = y$, т.е. y удовлетворяет условию (1) теоремы 1 при $r = 1$, $p = 1$. Поэтому $K = \mathrm{cone}(x_1)$ и $-K$ – циклы лучей оператора $\mathbf{A}$ периода 1. Для любого $y \in L_2$ $\mathbf{A}y = -y$, т.е. y удовлетворяет условию (1) теоремы 1 при $-r = -1$, $p = 1$. Так как $\mathrm{cone}(\mathbf{A}x_2) = -\mathrm{cone}(x_2)$, то $K = (\mathrm{cone}(x_2), \, -\mathrm{cone}(x_2))$ – цикл лучей оператора $\mathbf{A}$ периода 2. Более того, возьмем произвольный $y \in \mathbb{R}^2$ и представим его в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$, $y_i \neq 0$,

$i = 1, 2$. Тогда $\mathbf{A}y = y_1 - y_2 \neq \pm y$ и $\mathbf{A}^2 y = y$, т.е. y удовлетворяет условию (1) теоремы 1 при $r = 1$, $p = 2$ и значит, $K = (\mathrm{cone}(y),\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}y))$ – цикл лучей оператора $\mathbf{A}$ периода 2.

Оператор $\mathbf{B}$ имеет два комплексно- сопряженных собственных значения $\pm\mu = \pm i$. Для любого $y \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{B}y \neq \pm y, \quad \mathbf{B}^2 y = -y,$$

т.е. y удовлетворяет условию (1) теоремы 1 при $-r = -1$, $p = 2$, при этом p – наименьшее число. Поэтому система лучей

$$K = (\mathrm{cone}(y),\ \mathrm{cone}(\mathbf{B}y),\ -\mathrm{cone}(y),\ -\mathrm{cone}(\mathbf{B}y))$$

есть цикл лучей оператора $\mathbf{B}$ периода 4.

Согласно теореме 1 векторы, удовлетворяющие (1), образуют инвариантное относительно $\mathbf{A}$ подпространство вида $\ker(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$ при $r > 0$, где $\ker \mathbf{A}$ – ядро оператора $\mathbf{A}$,

$$\ker \mathbf{A} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}y = 0\},$$

и $\mathbf{E}$ – тождественный оператор. С учетом замечания 1, подпространства $\ker(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$ при $r > 0$ и только они содержат циклы лучей. Поэтому следующим шагом при рассмотрении вопроса о расположении ω- предельных множеств системы $\{F^m, \mathrm{X}, Z_+\}$ является решение еще одной задачи.

2. Задача выделения инвариантных подпространств оператора A, содержащих циклы лучей

Эта задача состоит в определении свойств подпространств $\ker(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$ и условий их пересечения с конусом K_+, содержащим множество X. Согласно определению подпространства $\ker(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$ число r является характеристическим числом матрицы A^p, которому соответствует собственный вектор $y \in \ker(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$, $y \neq 0$. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – характеристические числа матрицы A с учетом их кратностей. Тогда матрица A^p имеет характеристические числа $\mu_1^p, \ldots, \mu_n^p$ ([10], с. 88) и, следовательно, существует характеристическое число μ матрицы A такое, что $r = \mu^p$. Таким образом, задача сводится к изучению свойств подпространств $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, где

$$\mathcal{P}(\rho) = \rho^p - \mu^p \tag{4}$$

– полином от ρ степени $p \in N$ и μ – собственное значение оператора $\mathbf{A}$. Часть результатов этих исследований также опубликована в [1]. Для изложения результатов настоящей статьи используется следующее утверждение, доказанное в [1]. Обозначим

$$\mathcal{P}_1(\rho) = \rho - \mu, \tag{5}$$

$$\mathcal{P}_2(\rho) = \mu^{p-i} + \mu^{p-2}\rho + \ldots + \mu\rho^{p-2} + \rho^{p-1}. \tag{6}$$

Теорема 2 (Теорема 6 из [1])**.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *– линейный оператор,* $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ *и* $\mu \in \mathbb{R}^1$*. Тогда имеет место разложение подпространства*

$$\ker\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) + \ker\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \tag{7}$$

и, если в (4) $\mu \neq 0$*, то сумма* (7) *прямая.*

Пример 2. Разложение на множители полинома $\mathcal{P}(\mathbf{A})$. Пусть оператор $\mathbf{A}$ задан матрицей A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } ab > 0.$$

Оператор $\mathbf{A}$ имеет два вещественных собственных значения $\pm\mu = \pm\sqrt{ab}$. Так как

$$A^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \mu^2 E,$$

то $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mu^2\mathbf{E}$ разложим на множители, а именно:

$$\mathbf{A}^2 - \mu^2\mathbf{E} = (\mathbf{A} - \mu\mathbf{E})(\mathbf{A} + \mu\mathbf{E}).$$

Каждый из сомножителей в правой части этого равенства можно принять за $\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ (соответственно, другой полином есть $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$).

Основное внимание уделяется определению свойств подпространств $\ker\,\mathcal{P}(A)$ оператора $\mathbf{A} \geq 0$. Обозначим через λ максимальное собственное значение матрицы $A \geq 0$. Из общей теории неотрицательных матриц следует, что $\lambda \geq 0$, ему соответствует собственный вектор $e \geq 0$; модули всех собственных чисел матрицы A не превосходят λ ([10], с. 344).

Замечание 2. При $\lambda = 0$ матрица A является нильпотентной: существует $t > 0$ такое, что $A^t = 0$ ([9], с. 195). Поэтому $A^m L = \{0\}$ для любого множества $L \subseteq \mathbb{R}^n$ и $m \geq t$. Отсюда следует, что в $\mathbb{R}^n$ любая система лучей, в том числе инвариантная, вырождается. Значит, оператор $\mathbf{A}$, заданный нильпотентной матрицей A, не имеет циклов лучей.

Пусть $\lambda > 0$. С учетом замечания 2 упорядочим все собственные значения матрицы $A \geq 0$ следующим образом:

$$\lambda = \mu_1 = |\mu_2| = \ldots = |\mu_k| > |\mu_{k+1}| \geq \ldots \geq |\mu_n| \geq 0, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{8}$$

Обозначим через $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^{n-k}$ подпространства, анулируемые многочленами $\prod\limits_{i=1}^{k}(\rho - \mu_i)$, $\prod\limits_{i=k+1}^{n}(\rho - \mu_i)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{n-k},$$

причем сумма прямая. Пусть $\mathbb{R}^{'}$ – инвариантное подпространство оператора $\mathbf{A} \geq 0$, соответствующее отрицательным и комплексным собственным числам, по модулю равным λ, и $\mathrm{int}\mathrm{K}_+ = \{y \in \mathrm{K}_+ \mid y > 0\}$. Под ν- мерным координатным подпространством будем понимать любое подпространство в $\mathbb{R}^n$ с базисом $\{\epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{i_\nu}\} \subset \Delta$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_\nu \leq n)$, $\nu < n$.

Лемма 1 (из [12]). *Если* $\mathbf{A} \geq 0$, *то*

$$\mathbb{R}^{'} \cap \mathrm{K}_+ = \{0\}. \tag{9}$$

Лемма 2 (из [12]). *Если* $\mathbf{A} \geq 0$, *то*

$$\mathbb{R}^{n-k} \cap \mathrm{int}\mathrm{K}_+ = \varnothing. \tag{10}$$

Обозначим через $\mathbb{R}^{''}$ инвариантное подпространство оператора $\mathbf{A}$, соответствующее отрицательным и комплексным собственным числам.

Лемма 3. *Если* $\mathbf{A} \geq 0$, *то*

$$\mathbb{R}^{''} \cap \mathrm{K}_+ = \{0\}. \tag{11}$$

Доказательство. При $\lambda = 0$ равенство (11) выполнено. Пусть $\lambda > 0$. Так как $\mathbb{R}^k$ содержит собственный вектор $e \geq 0$ оператора $\mathbf{A} \geq 0$, то $k \geq 1$ и $\mathbb{R}^k \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$. Если в (8) $k = n$, то $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$, поэтому (11) совпадает с (9). Пусть $k < n$. Если $L = \mathbb{R}^{n-k} \cap \mathrm{K}_+ = \{0\}$, то (11) выполнено в силу (9). Если $L \neq \{0\}$, то согласно лемме 2 любой вектор $y \in L$ принадлежит границе конуса K_+, т.е. расположен в некотором инвариантном координатном подпространстве матрицы $A \geq 0$ и значит, содержит некоторое число $\nu < n$ нулевых координат (пусть для определенности ν первых). Представим вектор y в виде $y = (0, x)'$, а матрицу A – в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix},$$

где $x \geq 0$ – вектор размерности $n-\nu$, $A_i \geq 0$ – матрицы размерности $\nu\times\nu$, $(n-\nu)\times(n-\nu)$, $\nu\times(n-\nu)$, $(n-\nu)\times\nu$ соответственно, $i = \overline{1,4}$. Из $AL \subseteq L$ следует, что $A_4 = 0$, т.е. $Ay = (0, A_2x)$. Это равенство позволяет рассматривать ограничение оператора $\mathbf{A} \geq 0$, заданного матрицей A_2, на $(n-\nu)$-мерное инвариантное координатное подпространство. Так как $A_2 \geq 0$, то A_2 имеет максимальное собственное значение $\tilde{\lambda} \geq 0$. Если $\tilde{\lambda} = 0$, то лемма доказана. Если $\tilde{\lambda} > 0$, то для подпространства, соответствующего отрицательным и комплексным собственным значениям, по модулю равным $\tilde{\lambda}$, имеет место равенство, аналогичное (9). Если подпространство, соответствующее собственным числам, по модулю строго меньше $\tilde{\lambda}$, имеет с конусом K_+ ненулевое пересечение, то снова можно рассмотреть ограничение оператора $\mathbf{A} \geq 0$ на соответствующее инвариантное координатное подпространство размерности меньше, чем $n-\nu$. Ввиду того, что оператор $\mathbf{A}$ имеет конечное число (n) собственных значений, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Следующее утверждение определяет значения μ, при которых $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A})\cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{A} \geq 0$ и в представлении $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ число $\mu \neq 0$ – произвольное (возможно, комплексное). Тогда для выполнения неравенства*

$$\ker\mathcal{P}(A) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\} \tag{12}$$

необходимо и достаточно существования $\ker\,\mathcal{P}_1(A)$*, для которого*

$$\ker\mathcal{P}_1(A) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}, \tag{13}$$

где $\mathcal{P}_1(A) = A - \tilde{\mu}E$ *и* $|\tilde{\mu}| = |\mu|$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (12). Тогда инвариантный относительно $\mathbf{A} \geq 0$ конус $L = \ker \mathcal{P}(A) \cap \mathrm{K}_+$ содержит собственный вектор $x \geq 0$ ([3], с. 66), соответствующий согласно лемме 3 некоторому собственному значению $\tilde{\mu} \geq 0$. Имеем

$$\mathbf{A}x = \tilde{\mu}x, \ \ \mathbf{A}^p x = \tilde{\mu}^p x.$$

С другой стороны, т.к. $x \in \ker \mathcal{P}(A)$, то $\mathbf{A}^p x = \mu^p x$, откуда следует, что $\tilde{\mu}^p = \mu^p \neq 0$ и значит, $\tilde{\mu} > 0$, $\mu^p > 0$ и, если $\tilde{\mu} \neq \mu$, то μ такое, что $|\mu| = \tilde{\mu}$. Таким образом, существует $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - \tilde{\mu}\mathbf{E})$, для которого выполнено (13).

Достаточность. Пусть выполнено (13) и $|\tilde{\mu}| = |\mu| \neq 0$, т.е. $\tilde{\mu} \neq 0$. Тогда существует $x \in \ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, $x \neq 0$, такой, что $x \geq 0$, $\mathbf{A}x = \tilde{\mu}x$, откуда согласно лемме 3 следует, что $\tilde{\mu} > 0$. Так как $\mathbf{A}^p x = \tilde{\mu}^p x$, то $x \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и значит, выполнено (12), при этом $\tilde{\mu}^p = \mu^p > 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что в подпространстве $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A} \geq 0$, имеющем с конусом K_+ ненулевое пересечение, полином $\mathcal{P}(\rho)$ всегда можно представить в виде (4), заменив $\mu \neq 0$ его модулем. Рассмотрим случай $\mu = 0$.

Лемма 4. *Если* $\mathbf{A}$ *– линейный оператор и* $\mu = 0$*, то подпространство* $\ker\ \mathcal{P}(A)$ *не содержит циклы лучей.*

Доказательство. Положим в (4) $\mu = 0$, тогда $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^p$. Предположим, что в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ существует цикл лучей периода $t \geq 1$ с образующим вектором $y \neq 0$. Согласно теореме 1 существует $\tilde{r} > 0$ такое, что

$$\mathbf{A}^t y = \tilde{r}y. \tag{14}$$

Очевидно, что $t < p$. В противном случае, при $t \geq p$ получим $\mathbf{A}^t y = 0$, что противоречит (14). Так как $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, то t является делителем p. Положим $p = st$, тогда $1 < s \leq p$. Умножим обе части (14) слева на $\mathbf{A}^{(s-1)t}$, получим

$$\mathbf{A}^{(s-1)t}\mathbf{A}^t y = \tilde{r}\mathbf{A}^{(s-1)t} y = \tilde{r}^p y \neq 0.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{A}^{(s-1)t}\mathbf{A}^t y = \mathbf{A}^p y = 0.$$

Получили противоречие, т.е. в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ циклы лучей отсутствуют. Лемма доказана.

Из теоремы 3 и лемм 3, 4 следует, что в подпространстве $\ker\, \mathcal{P}(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A} \geq 0$, содержащем циклы лучей и имеющем с конусом K_+ ненулевое пересечение, полином $\mathcal{P}(\rho)$ всегда можно представить в виде (4) с $\mu > 0$. Из леммы 3 при $\mu > 0$, в частности, имеем

$$\ker\, \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \mathrm{K}_+ = \{0\} \tag{15}$$

(свойство 2 из [1]).

Пусть $\mathcal{Q}(\mathbf{A})$ – полином вида

$$\mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^q - \tilde{\mu}^q \mathbf{E}, \tag{16}$$

где $q \geq 1$, $\tilde{\mu} > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $\ker \mathcal{Q}(\mathbf{A})$ – *инвариантные подпространства оператора* $\mathbf{A}$. *Если*

$$\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \ker \mathcal{Q}(\mathbf{A}) \neq \{0\},$$

то $\mu = \tilde{\mu}$; *если* $\mu \neq \tilde{\mu}$, *то*

$$\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \ker \mathcal{Q}(\mathbf{A}) = \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим $K = \ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \ker \mathcal{Q}(\mathbf{A})$ и пусть $y \in K$. Если $y \neq 0$, то по тереме 1 найдется t такое, что y – образующий вектор цикла лучей периода t и значит, t является делителем p и q. Имеем

$$\mathbf{A}^t y = \mu^t y, \;\; \mathbf{A}^t y = \tilde{\mu}^t y,$$

откуда следует, что

$$(\mu^t - \tilde{\mu}^t) y = 0. \tag{17}$$

Из (17) при $y \neq 0$ получаем, что $\mu = \tilde{\mu}$. Если предположить, что $\mu \neq \tilde{\mu}$ и $K \neq \{0\}$, то из (17) следует, что $y = 0$, т.е. предположение $K \neq \{0\}$ неверно. Лемма мдоказана.

Вторая часть утверждения леммы 5 следует также из того, что инвариантные подпространства $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и $\ker \mathcal{Q}(\mathbf{A})$ содержат собственные подпространства линейного оператора $\mathbf{A}$ (и только эти подпространства), соответствующие разным собственным значениям.

Замечание 3. Рассматривая оператор $\mathbf{A}$ в $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A})$, мы фактически рассматриваем сужение оператора $\mathbf{A}$ на это подпространство.

Следующее свойство связано с дальнейшим расщеплением подпространства $\ker\mathcal{P}(A)$. Для произвольного линейного оператора $\mathbf{A}$ в общем случае размерность $\dim\ker\,\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \geq 1$. Рассмотрим вначале случай $\dim\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = 1$. Тогда $\ker\mathcal{P}_2(A)$ – гиперплоскость в $\ker\mathcal{P}(A)$, разделяющая $\ker\mathcal{P}(A)$ на два открытых полуподпространства вида

$$\{y \in \ker\,\mathcal{P}(\mathbf{A}) \;\mid\; \mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = \tilde{y} \neq 0\}.$$

Дополним нулем каждое их этих полуподпространств и обозначим их через $Se^{\pm}\,\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ (от слова *semi - полу*), тогда имеет место представление из [1]:

$$\ker\,\mathcal{P}(\mathbf{A}) = Se^{+}\,\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cup Se^{-}\,\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cup \ker\,\mathcal{P}_2(\mathbf{A}). \tag{18}$$

В [1] установлена инвариантность множеств в (18) относительно оператора $\mathbf{A} \geq 0$ при $\mu > 0$, а также для любого ненулевого $y \in \ker\mathcal{P}(\mathbf{A})$ выполнение следующих соотношений (соотношений (34) - (36) из [1]):

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \ker^{+}\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \setminus \{0\}, \quad y \in Se^{+}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}), \tag{19}$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A}A)y \in \ker^{-}\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \setminus \{0\}, \quad y \in Se^{-}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}), \tag{20}$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = 0, \quad y \in \ker\mathcal{P}_2(\mathbf{A}). \tag{21}$$

Здесь через $\ker^{\pm}\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ обозначена часть подпространства $\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$: $\ker^{\pm}\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subseteq Se^{\pm}\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, при этом каждое из $\ker^{\pm}\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, по построению, содержит нуль. Если $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$, то согласно (15) K_+ пересекается с одним из множеств $\mathrm{Se}^{\pm}\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Условимся считать в этом случае, что $\mathrm{Se}^{+}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$. Отметим, что при $p = 1$ в представлении (18)

$$\ker\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}),\;\; \ker\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \{0\}, \quad \mathrm{Se}^{\pm}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \ker^{\pm}\mathcal{P}_1(\mathbf{A}).$$

3. Циклические инвариантные подпространства оператора $\mathbf{A} \geq 0$ конечного периода

Введем определение инвариантного относительно оператора $\mathbf{A}$ множества, содержащего циклы лучей, для всех или почти всех (с точностью до множества меры нуль относительно меры этого множества) векторов y которого циклы лучей с образующими векторами y имеют один и тот же период. Пусть $\dim\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = 1$ и $\mu > 0$.

Определение 3. *Подпространство* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ *назовем циклическим инвариантным подпространством оператора* $\mathbf{A} \geq 0$ *периода* $p \geq 1$*, если для всех или почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$*)* $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *упорядоченная система лучей* (2)*:*

$$K = (\mathrm{cone}(y),\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}y),\ \ldots,\ \mathrm{cone}(\mathbf{A}^{p-1}y))$$

есть цикл лучей периода p*.*

В циклическом инвариантном подпространстве $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ обозначим через x собственный вектор оператора $\mathbf{A} \geq 0$, соответствующий собственному значению $\mu > 0$ (условимся считать, что $x \in Se^{+}\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Подпространство $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ представим в виде:

$$\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \mathrm{cone}(x) \cup -\mathrm{cone}(x). \tag{22}$$

С учетом (22) для любого ненулевого $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ соотношения (19) – (21) перепишем следующим образом:

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \mathrm{cone}(x) \setminus \{0\}, \quad y \in Se^{+}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}),$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in -\mathrm{cone}(x) \setminus \{0\}, \quad y \in \mathrm{Se}^{-}\mathcal{P}_2(\mathbf{A}),$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = 0, \quad y \in \ker \mathcal{P}_2(\mathbf{A}).$$

Замечание 4. Из определения 3 следует, что циклы лучей периода $\leq p$, $p \in N$, содержатся во множестве нулевой меры (относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$). Более того, подпространство $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ вообще не содержит циклы лучей периода $> p$. Действительно, предположим, что в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ существует цикл лучей периода $> p$. Тогда образующий вектор $y \neq 0$ этого цикла лучей при некотором $q > p$ удовлетворяет равенству $\mathbf{A}^q y = \mu^q y$ и q – наименьшая степень оператора $\mathbf{A}$, при которой выполнено данное равенство. Значит, $\mathbf{A}^p y \neq \mu^p y$, т.е. $y \notin \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Пусть $\mathbf{A}$ задан неразложимой матрицей $A \geq 0$ индекса импримитивности h, $1 \leq h \leq n$ ([10], с. 334). Согласно общей теории неотрицательных матриц матрица A имеет h собственных чисел, которые являются простыми корнями характеристического уравнения

$$\rho^h - \lambda^h = 0,$$

гдк $\lambda > 0$ – максимальное собственное значение матрицы A. Для частного случая оператора $\mathbf{A}$, заданного неразложимой матрицей A индекса импримитивности n, согласно определению 3 и на основании теоремы 8 и равенства (46) из [1] получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица индекса импримитивности n. Тогда $\mathbb{R}^n$ является циклическим инвариантным пространством оператора $\mathbf{A}$ периода n.*

Следующая теорема определяет условия, при которых $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ является циклическим инвариантным подпространством оператора $\mathbf{A} \geq 0$ периода p.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{A} \geq 0$, $\dim \ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = 1$ и $\mu > 0$. Для того, чтобы $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ было циклическим инвариантным подпространством оператора $\mathbf{A}$ периода $p \geq 1$, необходимо и достаточно, чтобы p было наименьшей степенью оператора $\mathbf{A}$, при которой для всех (почти всех с точностью до множества нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$) $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$*

$$\mathcal{P}(\mathbf{A})y = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ – циклическое инвариантное подпространство периода $p \geq 1$. При $p = 1$ равенство (23) очевидно. Пусть $p > 1$. По определению 3 для почти всех $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ система лучей (2) есть цикл лучей периода p, а значит, равенство (23) выполняется при наименьшей степени p. Согласно замечанию 4 циклы лучей периодов $\leq p$ принадлежат множеству меры нуль (относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$).
Достаточность. Пусть (23) выполнено для всех или почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$) $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и p – наименьшая степень оператора $\mathbf{A}$. По теореме 1 система лучей (2) с образующим вектором y есть цикл лучей периода p. Согласно замечанию 4 в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ не существуют циклы лучей периодов $> p$. При $p = 1$ $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ – циклическое инвариантное подпространство периода 1 и все циклы лучей имеют период 1. Пусть $p > 1$. Определим, каким множествам принадлежат циклы лучей периода $< p$. Пусть для некоторого $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $y \neq 0$,

$$A^s y = \mu^s y \tag{24}$$

и s – наименьшая степень оператора $\mathbf{A}$, при которой выполнено (24), $s < p$. Значит, $y \in \ker(\mathbf{A}^s - \mu^s \mathbf{E})$. Так как s является делителем p, т.е. $p = sq$, где $q > 1$, то $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ разложимо в сумму:

$$\ker(\mathbf{A}^p - \mu^p \mathbf{E}) = \ker(\mathbf{A}^s - \mu^s \mathbf{E}) + \ker \mathcal{P}_5(\mathbf{A}), \tag{25}$$

где для наглядности полиномы $\mathcal{P}(\rho)$ и $\mathcal{P}_4(\rho)$ выписаны в явном виде,

$$\mathcal{P}_4(\rho) = \rho^s - \mu^s, \quad \mathcal{P}_5(\rho) = \rho^{p-s} + \mu^s \rho^{p-2s} + \ldots + \mu^{p-2s}\rho^s + \mu^{p-s}.$$

В разложении (25) $\ker \mathcal{P}_5(\mathbf{A}) \neq \{0\}$, иначе $s = p$. Покажем, что в $\ker \mathcal{P}_5(\mathbf{A})$ нет циклов лучей периода s. Действительно, при $s = 1$ разложение (25) совпадает с разложением (7) в прямую сумму. Значит, $y \notin \ker \mathcal{P}_5(\mathbf{A})$ и $y \in \ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A})$, где одномерное подпространство $\ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A})$ имеет меру нуль (относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$). Пусть $s > 1$. Очевидно, что $s \leq p - s$, иначе p нацело не делится на s. При $s = p - s$ имеем

$$\mathcal{P}_4(\rho) = \rho^s - \mu^s, \quad \mathcal{P}_5(\rho) = \rho^s + \mu^s,$$

откуда следует, что при $\mu \neq 0$ полиномы $\mathcal{P}_4(\rho)$, $\mathcal{P}_5(\rho)$ взаимно просты, т.е. $\mathcal{P}_5(\rho)$ нацело не делится на $\mathcal{P}_4(\rho)$ и значит, $\ker \mathcal{P}_5(\mathbf{A})$ не содержит циклы лучей периода s. При $s < p - s$ полином $\mathcal{P}_5(\rho)$ также нацело не делится на $\mathcal{P}_4(\rho)$, т.к.

$$\mathcal{P}_5(\rho) = \mathcal{P}_4(\rho)\mathcal{P}_6(\rho) + q\mu^{p-s},$$

где $q\mu^{p-s} \neq 0$ и $\mathcal{P}_6(\rho)$ – полином от ρ степени $p - 2s$:

$$\mathcal{P}_6(\rho) = \rho^{p-2s} + 2\mu^s \rho^{p-3s} + 3\mu^{2s}\rho^{p-4s} + \ldots + (q-2)\mu^{p-3s}\rho^s + (q-1)\mu^{p-2s}.$$

Таким образом, циклы лучей периода s расположены только в $\ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A})$ и $\dim \ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A}) < \dim \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, т.е. $\ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A})$ имеет меру нуль (относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$). Подпространство $\ker \mathcal{P}_4(\mathbf{A}) \subset \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ является циклическим инвариантным подпространством оператора $\mathbf{A} \geq 0$ периода s, $1 < s < p$, и его также можно разложить в прямую сумму (7), заменив p на s. Теорема доказана.

Пример 3. Множества меры нуль циклических инвариантных подпространств. Пусть оператор $\mathbf{A}$ задан неразложимой матрицей $A \geq 0$

индекса импримитивности n. Согласно предложению 1 $\mathbb{R}^n$ является циклическим инвариантным пространством оператора $\mathbf{A}$ периода n, т.е. $\mathbb{R}^n = \ker(\mathbf{A}^n - \lambda^n \mathbf{E})$, где $\lambda > 0$ – максимальное собственное значение матрицы A. По теореме 4 циклы лучей периода $q < n$ принадлежат множеству меры нуль, при этом q является делителем n. Рассмотрим случаи $n = 6$ и $n = 5$. Тогда при $n = 6$ в $\ker(\mathbf{A}^6 - \lambda^6\mathbf{E})$, кроме циклов лучей периода 6 и 1, существуют циклы лучей периода 2 и 3. Множество меры нуль образуют подпространства $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$, $\ker(\mathbf{A}^2 - \lambda^2\mathbf{E})$ и $\ker(\mathbf{A}^3 - \lambda^3\mathbf{E})$. Поскольку 5 – простое число, то в $\ker(\mathbf{A}^5 - \lambda^5\mathbf{E})$ все циклы лучей имеют период 5, за исключением цикла лучей периода 1, расположенного во множестве меры нуль – подпространстве $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.

Следующая теорема определяет условия, при которых оператор $\mathbf{A} \geq 0$ имеет континуум циклических инвариантных подпространств.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{A} \geq 0$, $\dim\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) > 1$, $\mu > 0$ *и* $p \geq 1$ *– наименьшая степень оператора* $\mathbf{A}$, *при которой для всех или почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры* $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A})$*)* $y \in \ker\mathcal{P}(\mathbf{A})$ *выполнено* (23). *Тогда* $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A})$ *состоит из континуума циклических инвариантных подпространств оператора* $\mathbf{A}$ *периода* p.

Доказательство. Выделим в $\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ сферу

$$S = \{x \in \ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \mid \|x\| = 1\} \tag{26}$$

и разделим ее на 2 части S^+, S^- так, что выполнены следующие равенства:

$$S = S^+ \cup S^-, \quad S^- = -S^+, \; S^+ \cap S^- = \varnothing.$$

Если $\ker\mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$, то согласно теореме 3 $\ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$. Условимся считать в этом случае, что $S^+ \cap \mathrm{K}_+ \neq \{0\}$. Обозначим через $\ker_x\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subset \ker\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ одномерное подпространство вида (22), содержащее собственный вектор x оператора $\mathbf{A}$:

$$\ker_x\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \mathrm{cone}(x) \cup -\mathrm{cone}(x), \quad x \in S^+,$$

где индекс x указывает на вектор x. Используя разложение (7), образуем подпространство

$$\ker_x\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker_x\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) + \ker\mathcal{P}_2(\mathbf{A}). \tag{27}$$

Согласно теореме 4 подпространство $\ker_x \mathcal{P}(\mathbf{A})$ является циклическим инвариантным подпространством оператора $\mathbf{A}$ периода p. Подпространство $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ представим в виде

$$\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \bigcup_{x \in S^+} \ker_x \mathcal{P}_1(\mathbf{A}). \tag{28}$$

Из (27) – (28) имеем

$$\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \bigcup_{x \in S^+} \ker_x \mathcal{P}(\mathbf{A}), \tag{29}$$

т.е. $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ состоит из континуума циклических инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$ периода p. В частности, при $p = 1$ $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, где $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ имеет вид (28) и значит, $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ состоит из континуума циклических инвариантных подпространств периода 1, которые совпадают с собственными подпространствами оператора $\mathbf{A}$, соответствующими собственному значению μ. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 4 и 5, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *– инвариантное подпространство оператора* $\mathbf{A} \geq 0$, $\mu > 0$ *и* $p \geq 1$ *– наименьшая степень оператора* $\mathbf{A}$*, при которой для всех или почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$*)* $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *выполнено* (23)*. Тогда либо само подпространство* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *является циклическим инвариантным подпространством оператора* $\mathbf{A}$ *периода* p*, либо* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *состоит из континуума циклических инвариантных подпространств периода* p*.*

Предложение 2. *Количественной характеристикой циклического инвариантного подпространства* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *оператора* $\mathbf{A} \geq 0$ *является тройка чисел* $\{p, \mu, x\}$*, где* $p \geq 1$, $\mu > 0$ *– числа полинома* $\mathcal{P}(\mathbf{A})$*:* p *– степень оператора* $\mathbf{A}$*,* μ *– собственное значение оператора* $\mathbf{A}$ *и* x *– единичный вектор (с точностью до знака) одномерного собственного подпространства* $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ *в разложении* (7)*, соответствующего* μ*.*

Доказательство. Пусть L – инвариантное подпространство оператора $\mathbf{A}$ с тройкой чисел $\{p, \mu, x\}$. Согласно замечанию 4 $L \subseteq \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Если L не является циклическим инвариантным подпространством оператора $\mathbf{A}$, то

$L \neq \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и значит, $L \subset \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и содержит циклы лучей периода $\leq p$, т.е. расположено во множестве меры нуль (относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$). Пусть далее $\ker \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A})$ – другое циклическое инвариантное подпространство оператора $\mathbf{A}$ с тройкой чисел $\{\tilde{p}, \tilde{\mu}, \tilde{x}\}$, где $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{\tilde{p}} - \tilde{\mu}^{\tilde{p}}\mathbf{E}$, $\tilde{p} \geq 1$, $\tilde{\mu} > 0$. Если $p \neq \tilde{p}$ и/или $\mu \neq \tilde{\mu}$, то $\mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A})$ и

$$\{\tilde{p}, \tilde{\mu}, \tilde{x}\} \neq \{p, \mu, x\}, \quad \ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \ker \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A}). \tag{30}$$

Если $p = \tilde{p}$ и $\mu = \tilde{\mu}$, то $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A})$, $\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \tilde{\mathcal{P}}_1(\mathbf{A})$. Если $\ker \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) \neq \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, то согласно разложению (7) и теореме 6 в представлении (22)

$$\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \neq \ker \tilde{\mathcal{P}}_1(\mathbf{A}),$$

т.е. $x \neq \tilde{x}$ ($x \neq -\tilde{x}$), откуда вновь следует (30). Таким образом, тройка чисел $\{p, \mu, x\}$ однозначным образом определяет циклическое инвариантное подпространство $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Утверждение доказано.

Пусть

$$\mathcal{Q}_j(\rho) = \rho^{h_j} - \mu^{h_j}, \quad j, h_j \in N.$$

Обозначим через НОК(l, m) наименьшее общее кратное чисел l, $m \in N$ и пусть $\mathcal{P}(\rho)$ – полином вида (4). Следующее утверждение определяет период суммы циклических инвариантных подпространств.

Теорема 7. *Пусть* $\ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$ *– циклические инвариантные подпространства оператора* $\mathbf{A} \geq 0$ *периода* h_j, $j = \overline{1, t}$, $t > 1$, *и пусть* $\sum\limits_1^t \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$ *– их прямая сумма. Тогда*

$$\sum_1^t \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A}) = \ker \mathcal{P}(\mathbf{A}), \tag{31}$$

где

$$p = \text{НОК}(h_1, \dots, h_t) \tag{32}$$

– наименьшая степень оператора $\mathbf{A}$, *при которой для всех или почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры* $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$*)* $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *выполнено* (23).

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $y \in \sum\limits_{1}^{t} \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$, $y \neq 0$. Представим y однозначным образом в виде $y = \sum_1^t y_j$, где $y_j \in \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$. По теореме 4 для почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$) y_j степень h_j полинома $\mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$ является наименьшим числом, при котором

$$\mathcal{Q}_j(\mathbf{A}) y_j = 0. \tag{33}$$

Пусть в представлении вектора y для каждого y_j степень h_j наименьшая. Тогда $y_j \neq 0$. Так как для y_j наряду с равенством (33) выполнены также равенства

$$\mathbf{A}^{mh_j} y_j - \mu^{mh_j} y_j, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

то существует $h \in N$ такое, что равенство

$$\mathbf{A}^h y_j = \mu^h y_j$$

выполнено одновременно для всех $j = \overline{1,t}$, т.е. h кратно каждому из h_j. Среди всех таких h выберем наименьшее, которое обозначим через p. Тогда p определяется формулой (32) и для $y \in \sum\limits_{1}^{t} \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$ выполнено (23), т.е. $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Покажем, что p – наименьшее для всех или почти всех $y \in \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Действительно, пусть $h_j = 1$ для всех $j = \overline{1,t}$. Тогда $p = 1$ – наименьшее в (32). Пусть существуют $j \in \{1, \ldots, t\}$, для которых $h_j > 1$. Тогда $p > 1$, иначе p не является кратным для всех $j = \overline{1,t}$. Согласно замечанию 4 в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ не существуют циклы лучей периода $> p$. Предположим, что в $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ существует цикл лучей периода $q < p$ с образующим вектором y. Тогда $q \neq \text{НОК}(h_1, \ldots, h_t)$. Последнее означает, что либо

$$q = \text{НОК}(h_{j_1}, \ldots, h_{j_l}), \quad 1 \leq l < t,$$

либо при некоторых $j \in \{1, \ldots, t\}$ y_j принадлежит множеству нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$. В первом случае $y_j = 0$ при $j \neq j_1, \ldots, j_l$ и значит, y принадлежит множеству нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Во втором случае размерность инвариантного подпространства, которому принадлежит y, также строго меньше размерности $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$, т.е. y принадлежит множеству нулевой меры относительно меры $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда при* $t = 1$ $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *является циклическим инвариантным подпространством оператора* $\mathbf{A} \geq 0$ *периода* h_1*; при* $t > 1$ $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *состоит из континуума циклических инвариантных подпространств периода* p.

Доказательство. При $t = 1$ $\ker \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \ker \mathcal{Q}_1(\mathbf{A})$. Пусть $t > 1$. Каждое из $\ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$ разложим в прямую сумму вида (7), $j = \overline{1,t}$. Обозначим через x_j единичный вектор одномерного подпространства $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subseteq \ker \mathcal{Q}_j(\mathbf{A})$, где $\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ – полином вида (5). Векторы x_j, $j = \overline{1,t}$, линейно независимы, иначе сумма в (31) непрямая. Подпространство $\ker \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subseteq \ker \mathcal{P}(\mathbf{A})$ с базисом $\{x_1, \ldots, x_t\}$ имеет размерность t. Из теоремы 5 получаем требуемое утверждение.

Пример 4. Определение периода суммы циклических инвариантных подпространств. Пусть оператор $\mathbf{A}$ задан матрицей $A \geq 0$ 8-го порядка квазидиагонального вида, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где матрица A_i порядка n_i имеет максимальное собственное значение λ_i, $i = 1, 2$. Пусть $n_1 = 5$, $n_2 = 3$ так, что $n = n_1 + n_2 = 8$, и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$. Рассмотрим два вида матрицы A. В первом случае A_1 и A_2 – неразложимые матрицы индекса импримитивности $h_1 = n_1$, $h_2 = n_2$ соответственно:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы A_1 являются число 2 и две пары комплексно-сопряженных чисел, по модулю равных 2. Собственными значениями матрицы A_2 являются число 2 и пара комплексно-сопряженных чисел, по модулю равных 2. Таким образом, $\lambda = 2$. Согласно предложению 1 подпространство $\mathbb{R}^5 \subset \mathbb{R}^8$ является циклическим инвариантным подпространством сужения оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей A_1, т.е.

$\mathbb{R}^5 = \ker \mathcal{Q}_1(\mathbf{A})$, где $\mathcal{Q}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 - 2^5\mathbf{E}$. Аналогично, $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^8$ является циклическим инвариантным подпространством сужения оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей A_2, т.е. $\mathbb{R}^3 = \ker \mathcal{Q}_2(\mathbf{A})$, где $\mathcal{Q}_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 - 2^5\mathbf{E}$. Очевидно, что сумма подпространств $\ker \mathcal{Q}_i(\mathbf{A})$ – прямая, $i = 1, 2$. По теореме 7 справедливо равенство (31), где согласно (32) $p = \text{НОК}(5, 3) = 15$. Во втором случае A_2 – та же матрица, что и в первом случае, и

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– неразложимая матрица индекса импримитивности $h_1 = n_1 - 1 = 4$. Собственными значениями матрицы A_1 являются числа ± 2, $\pm 2i$, 0, где $i = \sqrt{-1}$. Собственным значениям, по модулю равным 2, соответствует четырехмерное инвариантное подпространство $\ker \mathcal{Q}_1(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^5$, где $\mathcal{Q}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 2^4\mathbf{E}$. Снова сумма подпространств $\ker \mathcal{Q}_i(\mathbf{A})$ – прямая, $i = 1, 2$. По теореме 7 справедливо равенство (31), где согласно (32) $p = \text{НОК}(4, 3) = 12$.

Заключение

Пусть в вещественном линейном пространстве L отношение порядка определяется некоторым (положительным) конусом K и пусть выделенный конус K – замкнутый телесный, тогда L – пространство Канторовича ([13], с. 331). Пусть, кроме того, конус K миниэдральный: для любых x, $y \in \text{K}$ существует $z = \sup[x, y] \in \text{K}$ такой, что из $z \geq x$, $z \geq y$ и любого w, удовлетворяющего неравенствам $w \geq x$, $w \geq y$, следует, что $z \leq w$. В частности, в пространстве $\mathbb{R}^n$ отношение порядка порождается миниэдральным, замкнутым телесным конусом K_+ ([12], с. 332). Согласно теореме Юдина [14] (см. также [13], с. 332) существует изоморфизм пространств L и $\mathbb{R}^n$, сохраняющий порядок и все линейные соотношения. Таким образом, с точки зрения решения линейных проблем пространства Канторовича с миниэдральными положительными конусами неразличимы. Поэтому результаты, полученные в статье [1] и в настоящей статье для операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \geq 0$, обобщаются на класс линейных операторов, действующих в пространстве Канторовича с миниэдральным положительным конусом.

Цитированная литература

[1]. Панкратова И.Н. *Инвариантные множества неотрицательных линейных операторов. I.*, Математический журнал, Алматы, 2010, Т. 10, № 4, С. 80–88.

[2] Забрейко П., Красносельский М., Покорный Ю.В. *Об одном классе линейных положительных операторов*, Функц. ан. его прил., 1971, Т. 5, № 4, С. 9–17.

[3]. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*, М., 1985.

[4]. Панкратова И.Н. *О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения*, Дифференциальные уравнения, 1996, Т. 32, № 7, С. 995–997.

[5]. Панкратова И.Н. *Циклические инвариантные множества двумерного отображения с нелинейностью скалярного типа*, Математический журнал, Алматы, 2007, Т. 7, № 2, С. 88–94.

[6]. Панкратова И.Н. *Об инвариантных множествах динамической системы, порожденной произведением скалярной и линейной векторной функций*, Дифференциальные уравнения, 2009, Т. 45, № 1, С. 138–144.

[7]. Панкратова И.Н. *Циклические инвариантные множества одного класса отображений*, Сибирский математический журнал, 2009, Т. 50, № 1, С. 132–145.

[8]. Аносов Д.В. *Гладкие динамические системы*, В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Совр. проблемы математики. Фунд. направления, М.: ВИНИТИ, 1985, Т. 1, С. 151–242.

[9]. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М., 1947.

[10]. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*, М., 1988.

[11]. Панкратова И.Н. *Сведение многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения к одномерному*, Дифференциальные уравнения, 2004, Т. 40, № 11, С. 1514–1515.

[12]. Панкратова И.Н. *Инвариантные подпространства многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения*, Известия МН–АН РК. Серия физ.-матем., 1998, № 1, С. 43–51.

[13]. Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ в задачах*, М., 1969.

[14]. Юдин А. *Решение двух проблем полуупорядоченных пространств*, ДАН СССР, 1939, Т. 23, № 4, С. 418–422.

Поступила в редакцию 30.03.2012г.

УДК 517.938

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.Х.Турметов, М.А.Муратбекова

МКТУ им.Х.Яссави
161200, Туркестан, пр. Б.Саттарханов, 29, e-mail: turmetovbh@mail.ru

В данной работе в классе гармонических функций изучаются свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов. В качестве применения полученных свойств рассматриваются вопросы разрешимости одной краевой задачи для уравнения Лапласа в единичном шаре.

1. Введение

Пусть $0 < \alpha$ — действительное число. Известно (см. например [1], с. 252), что для функции $\varphi(t)$, заданной на интервале $(0,b)$, $b < \infty$, дробные интегралы и производные порядка α в смысле Адамара определяется равенствами:

$$I^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{-(\alpha+1)} \frac{\varphi(s)}{s}ds,\ t > 0, \tag{1}$$

Keywords: *Hadamard-Marshaud operator, fractional derivative, boundary value problem, smoothness of solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 35J25

$$D^{\alpha}\varphi(t) = \delta^{m+1} I^{1-\gamma}\varphi(t)\,, \tag{2}$$

где $\delta = t\frac{d}{dt}$ – оператор Дирака, $m = [\alpha]$ – целая часть, $\gamma = \{\alpha\}$ – дробная часть α. Если $0 < \alpha < 1$, то в классе достаточно "хороших" функций оператор (2) можно привести к виду:

$$D^{\alpha}\varphi(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(st)}{s(\ln s)^{\alpha+1}} ds\,. \tag{3}$$

Данный оператор называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара-Маршо. В работе [2] рассмотрена следующая модификация оператора Адамара-Маршо:

$$D_{\mu}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(st)}{s^{1-\mu}(\ln s)^{\alpha+1}} ds + \mu^{\alpha}\varphi(t)\,, \mu \geq 0\,. \tag{4}$$

Далее в работе И. И. Баврина [3] в классе гармонических в шаре функций изучены свойства операторов вида:

$$\delta_{\mu} = r\frac{d}{dr} + \mu, \delta_{\mu}^{m} = \left(r\frac{d}{dr} + \mu\right)^{m}, \tag{5}$$

где $\mu > 0, r = |x|, x = (x_1, ..., x_n), r\frac{\partial}{\partial r}$ – дифференциальный оператор вида $r\frac{\partial}{\partial r} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера. На основе представления операторов интегродифференцирования вида (1)-(4) рассмотрим некоторую модификацию оператора Баврина (5) на дробные степени. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в области Ω, $\alpha = m + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$.

Рассмотрим операторы

$$I_{\mu}^{\alpha}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (\ln s)^{\alpha-1} s^{\mu-1} u(sx)\, ds,$$

$$D_{\mu}^{\alpha}\left[u\right](x)=\delta_{\mu}^{m}D_{\mu}^{\gamma}\left[u\right](x)=$$

$$=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\mu\right)^{m}\left[\frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{0}^{1}\frac{u\left(x\right)-u\left(sx\right)}{s^{1-\mu}\left(\ln s\right)^{1+\gamma}}ds+\mu^{\gamma}u\left(x\right)\right].$$

Отметим, что аналогичные операторы с дифференциальными операторами дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто рассматривались в работах [4-6].

2. Свойства операторов I_{μ}^{α} и D_{μ}^{α}

Исследуем некоторые свойства операторов I_{μ}^{α} и D_{μ}^{α} в классе гармонических функций.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha=m+\gamma$, $m=0,1,...,$ $0<\gamma<1,$ $\mu\geq 0$ *и* $H_k\left(x\right)$ — *однородный гармонический полином степени* k *при* $k\in N_0=\{0,1,...\}$. *Тогда справедливы равенства*

$$I_{\mu}^{\alpha}\left[H_k\right](x)=\left\{\begin{array}{l}(k+\mu)^{-\alpha}H_k\left(x\right),\mu>0,k\in N_0\,,\\ k^{-\alpha}H_k\left(x\right),\mu=0,k=1,2,...,\end{array}\right. \tag{6}$$

$$D_{\mu}^{\alpha}\left[H_k\right](x)=\left(k+\mu\right)^{\alpha}H_k\left(x\right),k\in N_0,\mu\geq 0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $H_k\left(x\right)$ — однородный гармонический полином степени k и $k\in N_0$. Тогда при $\mu>0,$ используя однородность полинома $H_k\left(x\right),$ получаем

$$I_{\mu}^{\alpha}\left[H_k\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}|\ln s|^{\alpha-1}s^{\mu-1}H_k\left(sx\right)ds=\frac{H_k\left(x\right)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}|\ln s|^{\alpha-1}s^{k+\mu-1}ds.$$

Значение последнего интеграла легко вычисляется заменой $z=-\ln s$. Действительно,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}|\ln s|^{\alpha-1}s^{k+\mu-1}ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}z^{\alpha-1}e^{-(k+\mu)z}dz=$$

$$= \frac{(k+\mu)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = (k+\mu)^{-\alpha}.$$

Отметим, что если $\mu = 0$, то для $H_0(x) = 1$ оператор I_0^α неопределен. А для $H_k(x)$, $k \geq 1$, вычисления проводятся, как в случае $\mu > 0$. Равенство (6) доказано.

Переходим к доказательству равенства (7). Заметим, что для оператора δ_μ^m имеет место равенство

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + \mu \right)^m H_k(x) = (k+\mu)^m H_k(x), k \in N_0, \mu \geq 0. \tag{8}$$

Изучим действия оператора D_μ^α на функцию $H_k(x)$ в случае $m = 0$. Используя определение оператора D_μ^α и однородность полинома $H_k(x)$, получаем

$$D_\mu^\gamma [H_k](x) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 \frac{H_k(x) - H_k(sx)}{s^{1-\mu} (\ln s)^{1+\gamma}} ds + \mu^\gamma H_k(x) =$$

$$= \frac{\gamma H_k(x)}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 \left(s^{1-\mu} - s^{k+\mu-1} \right) (\ln s)^{-(1+\gamma)} ds + \mu^\gamma H_k(x) =$$

$$= \frac{\gamma H_k(x)}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 \frac{1-s^k}{s^{1-\mu} (\ln s)^{\gamma+1}} ds + \mu^\gamma H_k(x).$$

Легко доказать, что верно равенство:

$$I = \int\limits_0^1 \left(s^{\mu-1} - s^{k+\mu-1} \right) \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-(1+\gamma)} ds = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} (k+\mu)^\gamma - \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \mu^\gamma.$$

Отсюда имеем: $D_\mu^\gamma [H_k](x) = (k+\mu)^\gamma H_k(x)$. Далее, с учетом равенства (8), в общем случае для $\alpha = m+\gamma$ получаем $D_\mu^\alpha [H_k](x) = (k+\mu)^\alpha H_k(x)$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha = m + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда функция $D_\mu^\alpha [u](x)$ также является гармонической в шаре Ω и при $\mu = 0$ справедливо: $D_0^\alpha [u](0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω. Тогда известно (см. [7], стр. 548), что функция $u(x)$ представляется в виде:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_k} u_k^i H_k^i(x), \tag{9}$$

где $\left\{H_k^i(x) : i = 1, ..., h_k\right\}$ — полная система однородных гармонических полиномов, а u_k^i — коэффициенты разложения (9).

Известно, что $h_k = \left(\frac{1+2k}{(n-2)}\right) C_{k+n-3}^{n-3} \sim 2k \frac{n-2}{(n-2)!}, n \geq 3, k \to \infty$. Более того, ряд (9) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq \rho < 1$ и значит, для любого $\rho < 1$ существует c_ρ такое, что для любых x, $|x| \leq \rho$ имеет место неравенство: $\left|u_k^i H_k^i(x)\right| \leq c_\rho$. Применяя формально оператор D_μ^α к ряду (9) и учитывая равенство (7), получим

$$D_\mu^\alpha [u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{H_k} (k+\mu)^\alpha u_k^i H_k^i(x). \tag{10}$$

Так как $h_k (k+\mu)^\alpha \approx 2k^{n-2} \frac{(k+\mu)^\alpha}{(n-2)!}, n \geq 3$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{h_k (k+\mu)^\alpha = 1}$ и значит, при $|x| \leq r\rho$ и $r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+\mu)^\alpha \left|u_k^i H_k^i(x)\right| \leq c_\rho \sum_{k=0}^{\infty} (k+\mu)^\alpha h_k r^k < \infty.$$

Значит, ряд (10) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leq r\rho < 1$ и его сумма представляет собой гармоническую функцию. В силу произвольности $\rho < 1$ функция $D_\mu^\alpha [u](x)$ определена во всем шаре Ω. Далее, поскольку в случае $\mu = 0$ $D_0^\alpha [H_0](x) = D_0^\alpha [1] = 0$, то в разложении функции $D_0^\alpha [u](x)$ в ряд вида (9) отсутствует свободный член и поэтому $D_0^\alpha [u](0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, ...,$ $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда*

1) если $\mu > 0$, то $I_\mu^\alpha [u](x)$ также является гармонической в шаре Ω;

2) если $\mu = 0$, то при выполнении условия: $u(0) = 0$ функция $I_0^\alpha [u](x)$ также является гармонической в шаре Ω.

Доказательство. Представим функцию $u(x)$ в виде ряда (9). Если $\mu = 0$, то при выполнении условия $u(0) = 0$ в представлении (9) отсутствует свободный член и поэтому, формально применяя к ряду (9) оператор I_0^α, с учетом второго равенства из (6) получаем $I_0^\alpha[u](x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{h_k} k^{-\alpha} u_k^i H_k^i(x)$. Сходимость данного ряда проверяется, как в случае теоремы 1, и поэтому функция $I_0^\alpha[u](x)$ — гармоническая в шаре Ω. Случай $\mu > 0$ проверяется аналогично.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, \ldots$, $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$ *и* $u(x)$ *— гармоническая функция в области* Ω. *Тогда для любого* $x \in \Omega$ *справедливы равенства*

1) при $\mu = 0$ $\quad u(x) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha[u](sx)\,ds,$

2) при $\mu > 0$ $\quad u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha[u](sx)\,ds.$

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Представим гармоническую функцию в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} u_k^i H_k^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{k^\alpha} k^\alpha u_k^i H_k^i(x) + \sum_{i=1}^{h_0} u_0^i H_0^i(x). \qquad (11)$$

Так как $h_0 = 1$, $u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = u(0)$, то, учитывая равенства (6), (7) и равномерную сходимость ряда (11) по x при $|x| \leq \rho < 1$, ряд (11) можно привести к виду

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{k^\alpha H_k^{(i)}(sx)}{s} |\ln s|^{\alpha-1} ds =$$

$$= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{|\ln s|^{\alpha-1}}{s} D_0^\alpha[u](sx)\,ds.$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $\mu > 0$. Тогда аналогично, как в случае $\mu = 0$, имеем

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{(k+\mu)^{\alpha}} (k+\mu)^{\alpha} u_k^i H_k^i(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} (k+\mu)^{\alpha} u_k^i \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} H_k^i(sx)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_{\mu}^{\alpha}[u](sx)\, ds.$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha = m + \gamma$, $m = 0, 1, ...,$ $0 < \gamma < 1$, $\mu \geq 0$ *и* $u(x)$ — *гармоническая функция в области* Ω. *Тогда справедливы равенства*

1) если $\mu = 0$, *то* $I_0^{\alpha}[D_0^{\alpha}[u]](x) = u(x) - u(0)$;

2) если $\mu = 0$ *и* $u(0) = 0$, *то* $D_0^{\alpha}[I_0^{\alpha}[u]](x) = u(x)$;

3) если $\mu > 0$, *то* $I_{\mu}^{\alpha}\left[D_{\mu}^{\alpha}[u]\right](x) = D_{\mu}^{\alpha}\left[I_{\mu}^{\alpha}[u]\right](x) = u(x)$.

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Докажем первое равенство теоремы. Так как $D_0^{\alpha}[u](0) = 0$, то к функции $D_0^{\alpha}[u](x)$ можно применить оператор I_0^{α}. Поэтому

$$I_0^{\alpha}[D_0^{\alpha}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{-1} |\ln s|^{\alpha-1} D_0^{\alpha}[u](sx)\, ds.$$

Далее, используя первое утверждение теоремы 3, получаем

$$I_0^{\alpha}[D_0^{\alpha}[u]](x) = u(x) - u(0).$$

Для доказательства второго равенства теоремы применим оператор D_0^{γ} к функции $I_0^{\alpha}[u](x)$. Имеем

$$D_0^{\gamma}[I_0^{\alpha}[u]](x) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\gamma+1)} s^{-1} [I_0^{\alpha}[u](x) - I_0^{\alpha}[u](sx)]\, ds =$$

$$= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\gamma+1)} s^{-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} \left[u(\tau x) - u(\tau s x)\right] d\tau ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} D_0^{\gamma}[u](\tau x)\, d\tau.$$

В общем случае, когда $\alpha = m + \gamma$, имеем

$$D_0^{\alpha}\left[I_0^{\alpha}[u]\right](x) = \delta_{\mu}^{m} D_0^{\gamma}\left[I_0^{\gamma}[u]\right](x) =$$

$$= \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^m \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} D_0^{\gamma}[u](\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D_0^{\gamma}[u](\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} D_0^{\alpha}[u](\tau x)\, d\tau.$$

Далее, используя равенство 1) из теоремы 3, получаем

$$D_0^{\alpha}\left[I_0^{\alpha}[u]\right](x) = u(x) - u(0) = u(x).$$

Второе равенство теоремы также доказано. Переходим к доказательству третьего равенство теоремы. Применяя к функции $D_{\mu}^{\alpha}[u](x)$ оператор I_{μ}^{α}, имеем

$$I_{\mu}^{\alpha}\left[D_{\mu}^{\alpha}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_{\mu}^{\alpha}[u](sx)\, ds.$$

Но в силу второго утверждения теоремы значение последнего интеграла равно $u(x)$, т.е. $I_{\mu}^{\alpha}\left[D_{\mu}^{\alpha}[u]\right](x) = u(x)$.

Для доказательства последнего равенства применим оператор D_μ^α к функции $I_\mu^\alpha [u](x)$. Имеем

$$D_\mu^\gamma \left[I_\mu^\alpha [u]\right](x) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\gamma+1)} s^{\mu-1} \left[I_\mu^\alpha [u](x) - I_\mu^\alpha [u](sx)\right] ds+$$

$$+\mu^\gamma I_\mu^\alpha [u](x) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\gamma+1)} s^{\mu-1} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} [u(\tau x) - u(\tau s x)] d\tau ds + \mu^\gamma I_\mu^\alpha [u](x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\gamma+1)} s^{\mu-1} [u(\tau x) - u(\tau s x)] ds d\tau+$$

$$+\mu^\gamma I_\mu^\alpha [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} \left[D_\mu^\gamma [u](\tau x) - \mu^\gamma u(\tau x)\right] d\tau+$$

$$+\mu^\gamma I_\mu^\alpha [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} D_\mu^\gamma [u](\tau x) d\tau-$$

$$-\mu^\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} u(\tau x) d\tau + \mu^\gamma I_\mu^\alpha [u](x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} D_\mu^\gamma [u](\tau x) d\tau.$$

Отсюда $D_\mu^\gamma \left[I_\mu^\alpha [u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} D_\mu^\gamma [u](\tau x) d\tau = u(x)$.

3. Постановка и решение основной задачи

Иследуем вопросы разрешимости краевой задачи с граничным оператором D_μ^α

Задача B. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $D_\mu^\alpha [u](x)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условию

$$D_\mu^\alpha [u](x) = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Заметим, что аналогичные задачи для уравнения Лапласа с операторами целого порядка рассматривались в работе [3], а для операторов дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто – в работах [4-6]. Пусть $v(x)$ – классическое решение задачи Дирихле в шаре Ω, т.е.

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, \\ v(x) = f(x). \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in C(\partial\Omega)$. *Тогда*

1) если $\mu > 0$, *то решение задачи B существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = I_\mu^\alpha [v](x), \tag{13}$$

где $v(x)$ *– решение задачи (12);*

2) если $\mu = 0$, *то для разрешимости задачи B необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, ds_x = 0. \tag{14}$$

Если решение задачи B существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x) = C + I_0^\alpha [v](x). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $\mu > 0$ и решение $u(x)$ задачи B существует. Применим к функции $u(x)$ оператор D_μ^α и обозначим $v(x) = D_\mu^\alpha [u](x)$. По предположению $D_\mu^\alpha [u](x) \in C(\bar{\Omega})$ и поэтому

$v(x) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ – гармоническая функция в Ω, то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ также гармоническая в шаре Ω и $v(x)\,|_{\partial\Omega} = f(x)$.

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (12). Причем, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$. Применим к равенству $v(x) = D_\mu^\alpha [u](x)$ оператор I_μ^α и, используя утверждение теоремы 4, получим

$$I_\mu^\alpha [v](x) = u(x).$$

Значит, $u(x) = I_\mu^\alpha [v](x)$ и мы получаем равенство (13).

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (12) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Очевидно, что $v(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$. Рассмотрим функцию $u(x) = I_\mu^\alpha [v](x)$. В силу теоремы 4 имеем $D_\mu^\alpha [u](x) = D_\mu^\alpha \left[I_\mu^\alpha [v]\right](x) = v(x)$. Значит, $u(x)$ – гармоническая функция в Ω и $D_\mu^\alpha [u](x)\,|_{\partial\Omega} = v(x)\,|_{\partial\Omega} = f(x)$.

Пусть теперь $\mu = 0$ и решение задачи B существует. Обозначим его через $u(x)$. Применяя к этой функции оператор D_0^α и обозначив $v(x) = D_0^\alpha [u](x)$, получаем, что $v(x)$ является решением задачи (12). Представим это решение в виде интеграла Пуассона, т.е.

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^n} f(y)\, dS_y.$$

По утверждению теоремы 1 в случае $\mu = 0$ имеет место равенство $v(0) = D_\mu^\alpha [u](0) = 0$ и, следовательно, $v(0) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} f(y)\, dS_y = 0$. Таким образом, мы получаем условие (14). Применяя оператор I_0^α к равенству $v(x) = D_0^\alpha [u](x)$ и используя первое утверждение теоремы 4, получим $I_0^\alpha [v](x) = I_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](x) = u(x) - u(0)$. Значит, $u(x) = u(0) + I_0^\mu [v](x)$ и мы получаем (15). Необходимость доказана.

Покажем, что условие (14) является и достаточным для существования решение задачи B. Действительно, если выполняется условие (14) и $v(x)$ – решение задачи (12), то $v(0) = 0$. Покажем, что функция $u(x) = C + I_0^\alpha [v](x)$ является решением задачи B. Гармоничность данной функции следует из второго утверждения теоремы 4. Из равенства $D_0^\alpha [C] = 0$ следует, что

$D_0^{\alpha}[u](x) = D_0^{\alpha}[C] + D_0^{\alpha}[I_0^{\alpha}[v]](x) = v(x)$. Тогда $D_0^{\alpha}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x)$. Таким образом, если выполняется условие (14) и $v(x)$ – решение задачи (12), то функция (15) является решением задачи B. Теорема доказана.

Цитированная литература

[1]. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и Техника, 1987.

[2]. Килбас А.А., Титюра А.А. *Дробная производная типа Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов*, Доклады Национальной академии наук Беларуси, Т. 50, № 4, С. 5 – 10.

[3]. Баврин И.И. *Операторы для гармонических функций и их приложения*, Дифференциальные уравнения, 1985, Т. 21, № 1, С. 9 – 15.

[4]. Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. *О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении*, Математические труды, 2011, Т. 14, № 1, С. 99 – 125.

[5]. Турметов Б.Х. *Об одной краевой задаче для гармонического уравнения*, Дифференциальные уравнения, 1996, Т. 32, № 8, С. 1089 – 1092.

[6]. Турметов Б.Х. *О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка*, Математические труды, 2004, Т. 7, № 1, С.189 – 199.

[7]. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*, М.: Наука, 1974.

Статья поступила в редакцию 29.11.2011 г.

РЕФЕРАТТАР — REVIEWS

УДК: 517.925.5:519.216 2010 MSC: 34K29, 60H10

Әжымбаев Д.Т., Тілеубергенов М.Ы.

Лагранждығы өзгеше стохастикалық Гельмгольц есебі туралы // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 5 – 18.

Берілген бірінші ретті стохастикалық Ито теңдеуі бойынша балама стохастикалық Лагранж құрылымды теңдеу тұрғызылады. Жылдамдық бойынша сызықты Лагранж функциясы құрылады. Лагранждығы өзгеше стохастикалық теңдеулер жүйелерінің тұрғызылуын өрнектейтін мысалдар келтіріледі.

Әдебиеттер тізімі – 19.

Azhymbaev D.T., Tleubergenov M.I. **On stochastic Helmholtz problem with degenerated lagrangian** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 1 (43). P. 5 – 18.

By the given first order stochastic Ito equation an equation of Lagrange's structure is considered. Linear in velocities Lagrange function is constructed. Examples of construction of systems of stochastic equations with degenerated Lagrangian are illustrated.

References – 19.

УДК: 517.938 2010 MSC: 34D08

Алдибеков Т.М., Алдажарова М.М. **Дифференциалдық жүйелердің бірінші жуықтау бойынша орнықтылығы туралы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 19 – 23.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімінің кейбір монотонды өспелі функциямен салыстырғанда бірінші жуықтау бойынша экспоненциалды орнықтылығы дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі – 3.

Aldibekov T.M., Aldazharova M. M. **On stability to the first approximation of differential systems** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 1 (43). P. 19 – 23.

Exponential stability to the first approximation of trivial solution of nonlinear system of differential equations relatively to some monotonously increasing function is proved.

References – 3.

УДК: 517.95 2010 MSC: 35K20, 35B25, 35C05

Бижанова Г.И. **Кіші параметрі бар еркін шекаралы стефандық текті сызықтық есептердің шешімдері туралы. I** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 24 – 37.

Шекара шартындағы бас мүшелердегі кіші параметрлі еркін шекаралы стефандық текті жылу өткізгіштік теңдеулері үшін сызықтық есептер қарастырылады. Тұрақтылары кіші параметрге тәуелсіз қобалжыған есептер шешімдерінің Гельдер кеңістіктерінде коэрцитивті бағалаулары орнатылды.

Әдебиеттер тізімі – 10.

Бижанова Г.И. **О решениях линейных задач со свободной границей стефановского типа с малым параметром. I** //Математический журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). С. 24 – 37.

Изучаются линейные задачи со свободной границей стефановского типа для уравнений теплопроводности с малым параметром при старших членах в граничных условиях. Установлены в пространствах Гельдера коэрцитивные оценки решений возмущенных задач с константами, не зависящими от малого параметра.

Цитированная литература – 10.

УДК: 517.925.5:519.216 2010 MSC: 37H10, 60H10

Василина Г.Қ. **Интегралдық көпбейненің ықтималдық бойынша орнықтылығы туралы есебіндегі Ляпунов функциясының әдісі туралы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 38 – 47.

Ляпунов функцияларының әдісі арқылы дифференциалдық теңдеулердің интегралдық көпбейнесінің тәуелсіз өсімшелері бар процесстер класынан кездейсоқ түркілері болған жағдайында ықтималдық бойынша орнықтылығының және асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарттары алынған.

Әдебиеттер тізімі – 23.

Vasilina G.K. **On Lyapunov function method in the problem of stability in probability of integral manifold** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 1 (43). P. 38 – 47.

Using Lyapunov function method sufficient conditions of stability and asymptotic stability in probability of the given integral manifold of differential equations in the presence of random perturbations in a class of processes with independent increments are obtained.

References – 23.

УДК: 517.982.1/.3, 517.983 2010 MSC: 15A03, 37C05, 39A12

Панкратова И.Н. **Теріс емес сызықты операторлардың инварианттық жиындары. II** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 48 – 70.

Сәулелер циклдарынан тұратын инвариантты ішкеңістікті сызықты оператордың кейбір қасиеттері анықталды. Ақырлы периодты (теріс емес оператордың) циклдық инвариантты ішкеңістіктері ажыратылды, онда сәулелер циклдарының барлығы немесе барлыққа жуығы бірдей периодты болады. Сәулелер циклдарынан тұратын инвариантты кеңістік циклдық инвариантты ішкеңістік болыуының, қажетті және жеткілікті шарттары анықталды. Циклдық инвариантты ішкеңістіктердің қосындыларының периодын анықтауға арналған формула алынды.

Әдебиеттер тізімі – 14.

Pankratova I.N. **Invariant Sets of Nonnegative Linear Operators. II** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 1 (43). P. 48 – 70.

Some properties of invariant subspaces of linear operator which are contained cycles of rays, are determined. Among these subspaces cyclic invariant subspaces (of nonnegative operator) of finite period in which all or almost all cycles of rays are of the same period, are identified. Necessary and sufficient conditions under which invariant subspace containing cycles of rays is cyclic invariant subspace are obtained. Formula for the period of the sum of cyclic invariant subspaces are received.

References – 14.

УДК: 517.938 2010 MSC: 35J25

Турметов Б.Х., Муратбекова М.А. **Бөлшек ретті шекаралық операторлы бір шеттік есептің шешімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 1 (43). Б. 71 – 82.

Бұл жұмыста гармониялық функциялар класында кейбір интегралдық - дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелінеді. Бұл қасиеттердің қолданылуы ретінде бірлік шарда Лаплас тендеуі үшін бір шеттік есептің шешімділігі қарастырылады.

Әдебиеттер тізімі – 7.

Turmetov B.Kh., Muratbekova M.A. **On solvability of boundary value problem with fractional order boundary operator** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 1 (43). P. 71 – 82.

Properties of some integro - differential operators in the classes of harmonic functions are investigated. Solvability of one boundary value problem for Laplace equation in the unit ball are considered as an application of these properties.

References – 7.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении нужно отразить актуальность, новизну, имеющиеся результаты по теме представленной работы. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О., *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А., *Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем.наук, 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":
Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №1 (43), 2012

Адрес редакции:
Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 07.06.2012г.
Тираж 300 экз. Объем 89 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

г. Алматы
пр. Достык, 85а, офис 309б
Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88
e-mail: la_creation@inbox.ru,
web-site: http://www.lacreation.kz