ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2006 том 6 № 1 (19)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 1 (19) 2006

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 6, № 1 (19), 2006

О развитии математики и информатики в Казахстане
Арсланов М.З., Бижанова Г.И., Бияшев Р.Г., Дженалиев М.Т., Добрица В.П., Женсыкбаев А.А., Рахимбердиев М.И. 5

Метод обобщенных функций в нестандартных краевых задачах для волнового уравнения
Л. А. Алексеева 16

Особое интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода. 1. Однородный случай
М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, А. Е. Туймебаева 33

Матричная выпуклость множеств для различных семейств операторов
С.Н. Амиргалиева 47

О разделимости одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа
М.А. Ахметжанов 54

Об ограниченности на полосе решения и его производных системы гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами
Д. С. Джумабаев, М. Н. Оспанов 61

Численное моделирование формирования соляных диапиров в земной коре
Н. И. Мартынов, А. Г. Танирбергенов 67

О признаке корректной разрешимости двухточечной краевой задачи
К. Ж.Назарова 74

Одномерные представления нелинейных многомерных отображений
И. Н. Панкратова 80

О применении метода степенных рядов с тригонометрическими основаниями к исследованию одной задачи линейных систем дифференциальных уравнений
Ж.А.Сартабанов 84

О характере зависимости показателей Ляпунова от линейного параметра линейного дифференциального уравнения второго порядка
А.О. Султанбекова 91

Об одной граничной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка
О.С. Зикиров 96

Рефераты 103

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 5 — 15*

К 60-летию НАН РК

УДК 51

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В КАЗАХСТАНЕ. I

[*] Арсланов М.З., [†] Бижанова Г.И., [*] Бияшев Р.Г.,
[†] Дженалиев М.Т., [‡] Добрица В.П., [†] Женсыкбаев А.А., [†] Рахимбердиев М.И.

[†] Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[*] Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125
[‡] КазНПУ им.Абая МОН РК 050010 Алматы, пр.Достык, 13

Направления современных исследований в математике продиктованы, прежде всего, потребностями практической деятельности общества, его экономическими, производственными, экологическими, социальными и другими задачами. В этой связи получили интенсивное развитие методы обработки различного рода точной и неточной информации, математическое моделирование изучаемых процессов, а это, в свою очередь, привело к необходимости дальнейшего развития фундаментальной математической теории, привлечения в ней новых идей.

Математические исследования в Казахстане проводятся в области теории функций и функционального анализа, теории вероятности и математической статистики, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, алгебры и математической логики, теории математических моделей, вычислительной математики. В настоящей и последующих статьях приводится обзор основных достижений по математике и информатике в республике в контексте развития наших направлений в мировой науке.

1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Фундамент конструктивной теории функций (теории аппроксимации) заложил П.Л.Чебышев. В своем развитии она имела несколько заметных этапов. Это, прежде всего, приближение индивидуальной функции алгебраическими и тригонометрическими многочленами, затем наилучшее приближение классов функций и далее разработка других аппаратов и методов аппроксимации, развитие теории поперечников. Вклад в конструктивную теорию функций был внесен многими математиками, такими как А.Н.Колмогоров, С.Н.Бернштейн, Д.Джексон, Г.Г.Харди, Н.К.Бари, Д.Е.Меньшов, А.Зигмунд, Г.Г.Лоренц, С.М.Никольский, Н.П.Корнейчук, П.Л.Ульянов, В.К.Дзядык, О.В.Бесов, В.М.Тихомиров и др. С обзорами по ней можно ознакомиться в монографиях И.П.Натансона, А.М.Тимана, Н.И.Ахиезера, С.М.Никольского, В.М.Тихомирова и др.

Keywords: *Mathematics, Informatics*
2000 Mathematics Subject Classification: 00-02

Активная разработка новых методов приближения, отличных от приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами, началась, видимо, в середине прошлого столетия, когда были открыты замечательные свойства полиномиальных сплайнов. Оказалось, что интерполяционные сплайны реализуют колмогоровские поперечники на ряде классов дифференцируемых функций. В дальнейшем стали изучаться сплайны различной природы, то есть "склейки" из кусков функций заданного типа. Решение практических задач привело к введению атомарных, радиальных функций, вейвлетов и т.д. Одной из проблем стала интерполяция и сглаживание функций многих переменных: существование, единственность, сходимость. Для алгебраических многочленов заданной степени интерполяция не всегда возможна, сплайновая интерполяция требует либо регулярной (почти равномерной) сетки, либо (при триангуляции) избыточной информации для обеспечения единственности интерполирующего элемента. В последнее время удалось разрешить эту проблему, а также аналогичную задачу сглаживания введением новых аппаратов приближения. Здесь следует отметить работы В.Л.Гончарова, И.Шенберга, К.де Бора, Л.Шумахера, И.Добеши, К.Чуи, К.И.Осколкова, В.Н.Темлякова и др.

Теория функциональных пространств и неразрывно связанная с ней теория вложений и интерполяции операторов стали мощным аппаратом исследования задач теории приближений, теории операторов, теории рядов Фурье, теории уравнений в частных производных и других разделов математики. Теория вложения функциональных пространств, начало которой положил в тридцатых годах прошлого столетия С.Л.Соболев, получила широкое развитие в работах С.М.Никольского, О.В.Бесова, Х.Трибеля, П.И.Лизоркина, Л.Д.Кудрявцева, В.П.Ильина, С.В.Успенского, П.Л.Ульянова, В.И.Коляды, В.Н.Темлякова и др. и изложена в широко известных монографиях С.М.Никольского, О.В.Бесова, В.П.Ильина, Х.Трибеля.

Первая интерполяционная теорема в теории операторов для пространств L_p была получена М.Риссом в 1926 г. в виде некоторого неравенства для билинейных форм. Уточнение ее и операторная формулировка были даны Г.О.Ториным. В дальнейшем общие интерполяционные теоремы были получены В.Орличем, Ж.Марцинкевичем, И.Стейном, Г.Вейсом, Ж.Л.Лионсом, И.Гальярдо, А.П.Кальдероном, С.Г.Крейном, Н.Ароншайном, Ж.О.Петрэ. Современное состояние этих направлений и их всевозможные применения отражены в известных монографиях А.Зигмунда, С.М.Никольского, О.В.Бесова, В.И.Ильина, Ж.Л.Лионса, С.Г.Крейна, Е.М.Семенова, Ю.И.Петунина, Л.Хермандера, И.Стейна, Б.С.Кашина, М.Отелбаева и других.

Проблема восстановления операторов по заданной точной или неточной информации восходит к теории квадратур, получившей систематическое развитие в работах К.Гаусса и продолженной в различных направлениях А.Сардом (линейные задачи), С.М.Никольским (нелинейные задачи), Дж. фон Нейманом (теоретико-вероятностный подход). Большой вклад в нее внесен Н.П.Корнейчуком, Б.Д.Бояновым, Нгуен Тхи Тхьеу Хао и многими другими математиками. Теория кубатур в многомерном случае получила дальнейшее развитие в работах С.Л.Соболева, К.И.Бабенко, И.И.Мысовских, Н.М.Коробова, С.А.Смоляка и др. Общий подход к задачам восстановления операторов рассмотрен в цикле работ А.Н.Тихонова, Ч.Мичелли, Т.Ривлина, Г.Вожняковского, Дж.Трауба и др. Достаточно полный обзор по этой теме можно найти в монографиях С.Л.Соболева, С.М.Никольского, Н.М. Коробова, Г.Вожняковского, Дж.Трауба, А.А.Женсыкбаева и др.

В настоящее время исследования в области теории функций и функционального анализа направлены на решение многомерных задач, создание новых методов, которые были бы эффективными в применении к функциям многих переменных. Проблема в том, что прекрасные методы анализа функций одного переменного во многом оказались непригодными для решения задач в многомерных и безразмерных функциональных пространствах. Кроме того, потребности практики приводят к необходимости разрабатывать методы и алгоритмы решения задач, адаптированные к природе этих задач, с одной стороны, и проводить хорошую численную реализацию (построение удобных для программирования быстродействующих численных алгоритмов), с другой стороны.

Так, необходимость аналитического представления тех или иных физических процессов, описываемых, как правило, неточными данными (например, аналитическое моделирование радионуклидных полей Семипалатинского полигона, аэрокосмические съемки, мониторинг и др.), требует создания новых методов восстановления операторов на различных классах функций многих переменных при неполной и неточной информации о функциях в хаотически расположенных точках.

Современные задачи обработки и передачи цифровой информации (в частности, радиосигналов) повлекли за собой развитие теории всплесков (вейвлетов), радиальных функций, и в этом смысле актуальным является получение разложений функций по новым базисам и анализ Фурье по ним.

Развитие теории дизайна связано с задачами создания во многих электронных устройствах цифровых фильтров, преобразовывающих цифровой сигнал в сигнал с требуемыми свойствами. Исследование процессов различной и весьма сложной природы привело к интенсивному развитию математической теории фракталов. Активно развиваются методы построения нелинейных алгоритмов типа Greedy и проводится исследование их на оптимальность в различных функциональных пространствах.

Естественно, наряду с новыми направлениями интенсивно развивается и успешно применяется на практике и классическая теория.

В развитие современных аспектов упомянутой выше теории функций и функциональных пространств, в решение проблем интерполирования, сглаживания, в построение оптимальных методов восстановления операторов большой вклад внесли казахстанские математики: Т.И.Аманов, К.Ж.Наурызбаев, М.О.Отелбаев, А.А.Женсыкбаев, Р.Ойнаров, Л.П.Фалалеев, Е.С.Смаилов, Н.Т.Темиргалиев, К.Т.Мынбаев, Б.Л.Байдельдинов, Е.Д.Нурсултанов, Л.К.Кусаинова, Н.А.Бокаев, Д.Б.Базарханов и др.

В указанных направлениях теории функций и функционального анализа казахстанскими математиками получены новые интерполяционные теоремы и теоремы вложения в пространствах с более тонкой весовой шкалой; разработан новый интерполяционный метод, который обобщает интерполяционный метод Лионса-Петре; установлены многовесовые мультипликативные и аддитивные интегральные неравенства; найдены разложения функций по новым базисам, а также атомарные, молекулярные, всплесковые, кварковые и другие представления различных классов гладких функций многих переменных; получены характеризации банаховых и квазибанаховых функциональных пространств обобщенной смешанной гладкости в терминах достаточно общих усреднений и максимальных функций Петре; описано поведение функций и операторов вблизи их сингулярностей в терминах функциональных пространств.

Исследуются пространства типа пространств Бесова, Никольского-Бесова по обобщенным системам Хаара, Уолша, по мультипликативным базисам Прайса, основанным на кусочно-постоянных функциях, которые в вопросах обработки сигналов в ряде случаев имеют преимущественное значение по сравнению с классическими преобразованиями Фурье; изучаются вопросы абсолютной сходимости и суммируемости кратных рядов Фурье функций из пространств с анизотропной нормой; найдены оценки приближения функций рядами Фурье с различного типа лакунами на классах непрерывных функций.

Разработаны оптимальные линейные и нелинейные методы аппроксимации функций и восстановления операторов на классах функций многих переменных, в которых используется точная и неточная информация, линейные методы восстановления некоторых классических анизотропных псевдодифференциальных и сингулярных интегральных операторов.

Развитие теории дизайна способствовало продолжению исследований по разработке методов восстановления операторов с наивысшей степенью точности на различных системах функций. В результате были изучены свойства разного рода чебышевских систем, получены оценки наивысшей степени точности восстановления линейных, положительных и знакочувствительных функционалов на различных системах функций, установлены критерии достижения этих оценок.

2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Весьма важной и широко применяемой в решении многих экономических, биологических, экологических, социальных задач являются теория вероятности и математическая статистика. К сожалению, в этом направлении у нас работают всего лишь один доктор наук В.Г.Воинов и несколько кандидатов наук, но этого явно недостаточно.

В.Г.Воиновым и его учениками разработана и исследована новая многомерная дискретная вероятностная модель, основанная на урновой схеме с шарами, помеченными прямоугольными матрицами, в случае, когда наблюдаемы их суммы, а не сами элементы. Предложены различные методы оценивания параметров модели. Построено множество несмещенных оценок и найдена наиболее подходящая оценка из этого множества, обладающая хорошими асимптотическими свойствами. Определены условия существования оценок максимального правдоподобия и доказан факт несуществования оценок по методу минимума хи-квадрат для параметров исследуемой модели. Определены асимптотические свойства предложенной модели и построен критерий хи-квадрат для проверки адекватности модели экспериментальным данным. Предложены и исследованы мощностные свойства двух новых модифицированных критериев, основанных на оценках неизвестных параметров как по методу наибольшего правдоподобия, так и по методу моментов, который ранее считался неприемлемым. Предложены и исследованы мощностные свойства новых модифицированных критериев, основанных на классах Неймана-Пирсона. Большая научная работа проводится совместно с учеными из университета Бордо-2 (Франция).

На основе проведенных исследований даны конкретные рекомендации по практическому применению установленных критериев. Разработанная модель была применена

1) для описания и оценки радиоактивного загрязнения территорий РК, примыкающих к бывшему Семипалатинскому полигону, в частности, показано, что из исследованных радиоактивных изотопов (уран, торий, калий, цезий) только активность тория превышает безопасный уровень (этот результат основан на имеющихся реальных измерениях по данным изотопам);

2) для статистического оценивания вероятности оправдываемости прогноза погоды в метеорологии;

3) для описания и исследования цепей снабжения иностранных компаний в Казахстане.

3. АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Построение многих математических теорий происходит на основе аксиоматического метода. Естественно, что при таком подходе требуемые свойства формулируются в виде аксиом. Зачастую такой перечень аксиом оказывается бесконечным. В то же время для разработки теории с помощью выводимости желательно иметь конечное число аксиом. Поэтому возникает вопрос о возможности нахождения для этой теории конечного числа аксиом. Понятно, что это сделать можно далеко не всегда. Однако возможна разработка некоторой конечно аксиоматизируемой теории, в значительной степени похожей на исходную рекурсивно перечислимо аксиоматизируемую теорию и сохраняющей значительное число свойств исходной теории (наличие конструктивной модели, однородной модели, универсальной теории и т.д.). Впервые М.Г.Перетятькиным была разработана такая универсальная процедура, позволяющая по произвольной рекурсивно перечислимо аксиоматизируемой теории эффективно строить конечно аксиоматизируемую теорию, эквивалентную исходной по значительному списку (более 50 пунктов) различных свойств исходной теории в том смысле, что каждым из этих свойств исходная и полученная теории обладают или нет одновременно, Таким образом, показано, что в пределах большинства естественных теоретико-модельных свойств выразительные возможности конечно аксиоматизируемых теорий и рекурсивно аксиоматизируемых теорий совпадают.

Сложность математических понятий и утверждений зачастую оценивают семантически, т.е. по числу перемен кванторов в префиксной приставке предложения, точно определяющего это понятие и записанного на языке математической логики. Эффективность процедуры М.Г.Перетятькина перевода рекурсивно перечислимо аксиоматизируемой теории в конечно аксиоматизируемую теорию позволяет во многих случаях проводить такую точную оценку семантической сложности предложений. Это дает возможность проводить нижнюю оценку сложности различных классов конечно аксиоматизируемых теорий. Исследования в этой области являются перспективными и продолжаются под руководством профессора М.Г.Перетятькина.

Универсальная конструкция была применена к задаче характеризации алгебры Линденбаума классического исчисления предикатов. В качестве естественного продолжения этого направления взято исследование структуры алгебр Линденбаума семантических классов предложений. Характеристиками выступают универсальные булевы алгебры над классами иерархий.

Среди математических объектов значительный интерес представляют конструктивно заданные. Стремление их исследования эффективными методами привело к понятию конструктивной модели. Следуя подходу академика А.И. Мальцева, для конструктивизируемой модели существует конструктивная нумерация основного множества, относительно которой рассматриваемые на модели операции и отношения становятся эффективными. Исследования по конструктивным моделям ведутся в трех направлениях: существование конструктивных и сильно конструктивных моделей у данных теорий или в данных классах моделей, проблема существования (сильно) конструктивной нумерации у данной модели и исследование числа неэквивалентных (сильно) конструктивных нумераций у данной конструктивизируемой модели, что характеризует так называемую алгоритмическую размерность такой модели.

В русле первого из них М.Г.Перетятькиным доказано существование полной разрешимой теории, которая имеет единственную сильно конструктивную модель, причем эта модель не имеет собственных элементарных расширений. В этом же направлении К.Ж. Кудайбергеновым получены завершенные результаты в исследовании вопроса о возможном числе (сильно) конструктивизируемых моделей в полных теориях, а также вопрос о числе однородных сильно конструктивизируемых моделей в полных разрешимых теориях в зависимости от общего числа сильно конструктивизируемых моделей в этой теории.

Доказано существование конструктивной булевой алгебры, у которой имеется не рекурсивный автоморфизм, являющийся рекурсивным на атомах. В нетривиальных случаях восстановить структуру атомной булевой алгебры из действия группы автоморфизмов на основном множестве алгебры невозможно, однако при определенных условиях такое восстановление осуществимо (Б. Касымканулы).

В другом направлении В.П. Добрицей описаны конструктивизируемые абелевы группы без кручения конечного ранга, а Н.Г.Хисамиевым — конструктивизируемые периодические абелевы группы. Установлены связи между конструктивизациями коммутативного ассоциативного кольца с единицей и конструктивизациями матричных групп. Найдены условия упорядоченной конструктивизируемости групп. Решены важные проблемы существования обобщенной конструктивизируемости для вполне разложимых абелевых групп без кручения, линейных порядков, матричных и упорядочиваемых групп.

В рамках третьего направления большинство естественных конструктивизируемых моделей имеют либо единственную, либо счетное число неэквивалентных конструктивизаций. После доказательства С.С.Гончаровым теоремы о существовании конструктивизируемых моделей с любым конечным числом неэквивалентных конструктивизаций стало естественным рассматривать наибольшее число неэквивалентных конструктивных нумераций у модели как алгоритмическую размерность этой модели. В Казахстане были изучены алгоритмические размерности конкретных моделей, даны критерии бесконечности такой размерности, или равенства её единице (В.П.Добрица, Н.Г.Хисамиев, Б.Н.Дроботун, А.Т.Нуртазин и др.).

В последние годы исследовались так называемые обобщенно конструктивные модели (В.П. Добрица, Н.Г.Хисамиев и др.), когда операции и отношения модели, соотнесенные к нумерации основного множества, становятся функциями и предикатами из некоторого класса иерархии Клини-Мостовского. В частности, модель будет предельно конструктивной, если операции и отношения этой модели, соотнесенные к нумерации, становятся функциями и предикатами "проб и ошибок", когда их точные значения устанавливаются после конечного множества возможных ошибочных предположений. Такие модели являются методологической основой для теоретического рассмотрения нейронных сетей. В связи с этим отметим, что конструктивные модели отвечают идеологии исследования эффективно строящихся математических объектов, тогда как предельно конструктивные модели соответствуют идеологии исследования самонастраивающихся математических объектов. Проблемы теории вычислимых моделей представляют большой интерес в связи с применениями в теории баз данных, спецификации и в логическом программировании.

Рассмотрение формализации интуитивного понятия вычислимости семейств конструктивно заданных объектов привело к появлению теории вычислимых нумераций. Центральными в этой теории являются понятия вычислимой нумерации рекурсивно перечислимых множеств и сводимости нумераций, т.е. эффективной вложимости одной нумерации в другую. Вполне естественно рассмотрение этих нумераций с точностью до эквивалентности, т.е. взаимной сводимости нумераций. Классы эквивалентных вычислимых нумераций семейства рекурсивно перечислимых множеств относительно частичного порядка, индуцированного отношением сводимости нумераций, образуют верхнюю полурешетку, называемую полурешеткой Роджерса. Она характеризует алгоритмическую сложность самого семейства. Стремление определить среди вычислимых нумераций наиболее "естественные" привело к выделению классов главных и минимальных нумераций, играющих в теории нумераций важную роль. Исследование минимальных нумераций проводится в двух направлениях: описание семейств, обладающих теми или иными типами минимальных вычислимых нумераций, и выяснение возможного их числа для различных семейств. С.А.Бадаевым найден внутренний критерий минимальности нумераций и разработана методика построения минимальных нумераций для классификации минимальных вычислимых нумераций, для исследования семейства рекурсивно перечислимых множеств как одноэлементной, так и бесконечной полурешетки Роджерса, для исследования спектра минимальных вычислимых нумераций некоторых классических семейств.

Наиболее актуальным на современном этапе является выявление общих свойств в строении интервалов и идеалов полурешеток Роджерса. Как оказалось, алгебраические свойства таких полурешеток существенно зависят от уровня арифметической иерархии, из которых берутся исследуемые семейства (С.А.Бадаев, З.Г.Хисамиев). Доказано существование интервалов с различными арифметическими свойствами. В частности, построены вложения решетки рекурсивно перечислимых множеств по модулю идеала конечных множеств в интервалы полурешеток Роджерса арифметических нумераций. Из этого следует, что элементарная теория произвольной нетривиальной полурешетки Роджерса арифметических нумераций является наследственно неразрешимой и что класс всех полурешеток Роджерса вычислимых нумераций семейств арифметических множеств каждого фиксированного уровня имеет неразрешимую теорию. Получено алгебраическое описание полурешетки, порожденной одной нумерацией относительно операций пополнения и взятия точной верхней грани. Она является бесконечной дистрибутивной решеткой с наименьшим элементом, в которой каждый главный конус "вниз" конечен, атомами являются пополнения исходной нумерации относительно несобственных элементов. Две исходные нумерации с равными по мощности множествами особых и неособых элементов определяют один и тот же тип изоморфизма названных решеток.

С математической точки зрения вычислимость совокупности объектов означает возможность при определенной нумерации их эффективного и равномерного построения. При рассмотрении в качестве таких объектов конструктивных моделей мы приходим к вычислимым индексациям классов конструктивных моделей. Они естественно возникают при рассмотрении классов конструктивных расширений конкретных моделей, при рассмотрении совокупности различных конструктивизаций одной модели и т.д. Причем они являются естественной семантикой для изучения абстрактных типов данных.

Результаты целенаправленного изучения вычислимых классов конструктивных моделей (В.П.Добрица, Н.Г.Хисамиев, М.Г.Перетятькин, А.Т.Нуртазин и др.) можно условно разделить по четырем направлениям: выделение вычислимых и сильно вычислимых классов конструктивных моделей; изучение индексных множеств вычислимых индексаций; изучение различных сводимостей вычислимых индексаций; изучение свойств полурешеток Роджерса вычислимых индексаций.

По первому из этих направлений установлено, что имеются классы, различающие понятия невычислимости, вычислимости и сильной вычислимости; найдены необходимые условия вычислимости и сильной вычислимости классов конструктивных моделей, вычислимости естественных подклассов вычислимого класса конструктивных моделей.

По второму из указанных направлений найдены точные оценки арифметической сложности индексных множеств одной модели, естественных подклассов вычислимого класса конструктивных моделей, установлена связь между сложностью индексных множеств и сводимостью вычислимых индексаций. (Под индексным множеством понимается совокупность всех номеров в данной индексации, задающих конструктивную модель, автоэквивалентную одной из конструктивных моделей данного множества.)

По третьему направлению выявлены различные виды сводимостей: рекурсивная, предельная, предельно ограниченная, предельно ограниченная с данной мажорантой и установлены их свойства и взаимоотношения. В частности, установлено, что при наличии у класса двух непредельно эквивалентных вычислимых индексаций этот класс обладает бесконечным числом неэквивалентных индексаций. Это является существенным отличием понятия нумерации класса конструктивных моделей от понятия конструктивной нумерации самой модели, т.к. С.С.Гончаров доказал существование моделей с любым конечным числом неэквивалентных конструктивных нумераций, которые обязательно будут предельно неэквивалентны.

По четвертому направлению даны условия бесконечности полурешетки Роджерса вычислимых индексаций класса конструктивизаций одной модели, установлена связь между наличием конструктивных нумераций, отличающихся по различным сводимостям и числом элементов в полурешетке Роджерса конструктивных нумераций этой модели. Доказано, что полурешетка Роджерса вычислимых индексаций конечного класса конструктивных систем может быть либо одноэлементной, либо счетной.

По каждому из рассматриваемых направлений остаются открытые вопросы для дальнейших исследований.

Одним из основных разделов математической логики является теория моделей. Теория моделей логики первого порядка имеет ряд особенностей, среди которых отметим две. Первая — доказательством многих глубоких теорем теории моделей служит построение моделей нужного типа (например, М.Г. Перетятькин построил пример несчетно категоричной конечно аксиоматизируемой теории). Вторая особенность, придающая единство теории моделей, является проводимое во всей этой теории различие синтаксиса и семантики. Значительная часть теории моделей исследует взаимодействие синтаксических и семантических понятий. Эти особенности теории моделей ярко проявляются в методе ультрапроизведений построения новых моделей, например, насыщенных, универсальных, специальных. Метод ультрапроизведений стал привлекательным орудием в использовании и применении приложений теории моделей в алгебре. Все это оказалось возможным благодаря тому, что ультрапроизведения системы моделей обладают лишь такими свойствами, которые присущи "почти всем" моделям этой системы. Во второй половине прошлого столетия появилась более общая конструкция — фильтрованное произведение, которое стало важным методом и в теории моделей, как обобщение понятия ультрапроизведения, и в теории универсальных алгебр, как обобщение стандартного понятия декартовых произведений.

Большая часть исследований по элементарным теориям фильтрованных произведений велась в двух направлениях (в соответствии с названными особенностями):

— характеризация семейства фильтров над множеством номеров таких, что для каждого семейства однотипных моделей, занумерованных этим множеством, фильтрованные произведения являются наиболее "богатыми" системами;

— нахождение эквивалентов между синтаксическими и семантическими свойствами фильтрованных произведений (теоремы устойчивости).

По первому направлению найден критерий несчетной насыщенности алгебры Ершова, установлены условия, при которых теория генерической модели класса Фраиссе разрешима, а её функция Рыль-Нардзевского рекурсивна. Получены ответы на несколько вопросов Кореца об определимой сложности некоторых арифметических структур. Описаны все квартеты Эрдеша-Вудса, наименьший элемент которых не превосходит 100. Построен пример счетно категоричного арифметического случайного графа. Доказано существование нехарактеризуемых многообразий решеток, определенных одним тождеством от трех переменных, а также характеризуемость некоторых их подклассов, интересных с теоретико-решеточной точки зрения. (А.И.Омаров, Е.Р.Байсалов, К.А.Мейрембеков, Ж.А.Омаров и др).

В рамках второго направления А.И.Омаров получил синтаксическое описание фильтрующихся формул, т.е. формул, выполнимых на фильтрованном произведении тогда и только тогда, когда множество номеров моделей, в которых она выполнима, принадлежит фильтру. Он показал, что существует всего три класса фильтрующихся формул: все формулы фильтруются по ультрафильтру; мультипликативные формулы фильтруются по декартовому произведению; формулы, которые фильтруются по фильтрам, содержащим безатомный элемент P-формулы. В частности, выполнимая формула является фильтрующейся тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторой P-формуле. P-формулы, введенные Е.А Палютиным, имеют специальный вид. Они строятся при помощи индукции по длине, что позволяет обнаружить интересные свойства соответствующих теорий. Такого структурного свойства для мультипликативных формул пока не обнаружено. Тем не менее ряд теорем для P-формул имеет свои аналоги и для мультипликативных формул. Исследованы свойства мультипликативных формул, получен критерий для P-формул в классе мультипликативных формул.

Проявление обеих особенностей наглядно видно при изучении однородных моделей и их автоморфизмов, автоморфизмов моделей стабильных теорий и др. Выяснение строения группы автоморфизмов алгебраических систем таких, как группы, кольца, поля, алгебры Ли и т.п., является одной из фундаментальных проблем алгебры, которая издавна привлекает внимание многих специалистов.

К.Ж.Кудайбергеновым получены следующие результаты: для однородных моделей и их автоморфизмов наиболее важным является вопрос о существовании модельного компаньона, а также почти модельного компаньона для некоторых теорий структур с автоморфизмами; установлены некоторые условия отсутствия модельного компаньона, применение которых в конкретных ситуациях дает важные результаты, в частности, доказано, что теория линейного порядка не имеет модельного компаньона, а полная теория линейного порядка не имеет почти модельного компаньона; не имеют почти модельного компаньона любая o-минимальная теория и полная стабильная теория со свойством конечного покрытия; вопрос о существовании модельного компаньона для теорий структур с автоморфизмом оказывается тесно связанным с вопросом об аксиоматизируемости классов структур с генерическим автоморфизмом; в случае моделей теории полей описаны группы Галуа некоторых расширений неподвижного поля почти генерического автоморфизма стабильного поля, в частности, известный результат Макинтайра о неподвижности поля генерического автоморфизма алгебраически замкнутого поля обобщен на сепарабельно замкнутые поля.

Для одного класса суперстабильных теорий, содержащего омега стабильные теории, установлено, что любой автоморфизм любой модели продолжается до автоморфизма любого ее элементарного расширения (ответ на вопрос Т.Г. Мустафина). Получен отрицательный ответ на вопрос Болдуина о мощности группы автоморфизмов башни Морли счетных моделей теории. Дан критерий слабой o-минимальности линейно упорядоченной структуры. Элементарная теория o-минимальной, омега-насыщенной модели является о-минимальной (К.Жетписов, Б.Ш.Кулпешов и др.).

Дальнейшим развитием этого направления является вопрос о возможности представления группы автоморфизмов моделей в виде объединения возрастающей цепочки данной длины, состоящей из собственных подгрупп определенного вида. Доказано, что модель регулярной мощности и однородная модель несчетной мощности имеют группу автоморфизмов, которая не является объединением цепочки замкнутых неоткрытых собственных подгрупп меньшей мощности. В частности, группа автоморфизмов счетной модели счётно категоричной теории не является объединением цепочки замкнутых собственных подгрупп и группа автоморфизмов однородной модели сильно недостижимой мощности, превосходящей мощность языка, не является объединением цепочки замкнутых собственных подгрупп меньшей мощности.

Среди различных классов алгебр, заданных определенными тождествами, одним из важных является класс алгебр Ли, в силу их приложений в теоретической физике. Структурная теория алгебр Ли характеристики нуль базируется на таких когомологических результатах, как теорема Леви-Мальцева об отщепляемости радикалов и теорема Вейля о вполне приводимости представлений полупростых алгебр Ли. Однако теоремы Леви-Мальцева и Вейля не верны в случае алгебр Ли характеристики $p > 0$. А.С.Джумадильдаев установил, что всякая модулярная алгебра имеет по крайней мере одно нерасщепляемое расширение; число неприводимых модулей с нерасщепляемыми расширениями конечно. Поэтому естественен вопрос об описании неприводимых модулей с нерасщепляемыми расширениями и нерасщепляемых расширений. На когомологическом языке это равносильно задаче вычисления второй когомологии алгебр Ли. Среди модулярных алгебр Ли классического типа когомологии неприводимых модулей полностью описаны для трехмерной простой алгебры Ли. Разработан метод вычисления второй группы когомологий простой алгебры Ли классического типа как модуля над соответствующей алгебраической группой. Вычислены определяющие соотношения максимальных нильпотентных алгебр Ли картановских типов бесконечной размерности от многих переменных. Близким к понятию алгебр Ли являются алгебры Лейбница. Кососимметрические алгебры Лейбница являются алгебрами Ли. Структурная теория алгебр Лейбница только начинает развиваться. В алгебраическом понимании чисто лейбницевы алгебры не являются простыми. Всякая алгебра Лейбница, не являющаяся алгеброй Ли, имеет по крайней мере один несобственный идеал, так называемый аннулятор. Лейбницева алгебра будет простой, если она имеет не более трех идеалов: нулевой, саму алгебру и аннулятор. Доказано, что когомологии алгебр Лейбница с коэффициентами в неприводимом модуле тривиальны, если модуль неограничен; число неприводимых антисимметрических модулей с нетривиальными когомологиями конечно; имеется ровно одна (с точностью до изоморфизма) нестандартная простая алгебра с лиевым фактором, изоморфным единственной простой конечномерной алгебре Ли ранга 1 над полем характеристики 0; имеется ровно шесть (с точностью до изоморфизма) нестандартных простых алгебр с лиевым фактором, изоморфным алгебре Цассенхауза. Исследованы свойства бинарных операций на пространстве дифференциальных операторов, получено описание класса неассоциативных алгебр, близких к лиевским; найдены системы равенств, выделяющие класс алгебр Новикова-Йордана. Изучены $(k+1)$-лиевы, k-левокоммутативные и гомологические $(k+1)$-лиевы структуры (А.С.Джумадильдаев, С.А.Абдыкасымова, Р.К.Керимбаев, Ш.Ш.Ибраев и др.).

Классическим объектом исследований в алгебре являются автоморфизмы колец многообразий. Хорошо известно, что автоморфизмы колец многочленов от двух переменных являются "ручными", т.е. индуцируются простыми обратными линейными преобразованиями переменных. Известно, что автоморфизмы Нагаты являются стабильно ручными, т.е. становятся ручными после введения одной новой переменной. В случае колец многочленов первым кандидатом "дикого", т.е. неручного автоморфизма является известный автоморфизм Наганы. У.Умирбаев исследовал ручные и дикие автоморфизмы колец многочленов от трех переменных. Основным результатом является характеризация ручных автоморфизмов. В частности, доказано, что автоморфизм Наганты является диким. Также доказано, что ручные и дикие автоморфизмы кольца многочленов от трех переменных над конструктивным полем характеристики ноль алгоритмически распознаваемы.

Описаны все унимодулярные решетки над числами Эйзенштейна в размерности 14 и 15. Существует 58 неразложимых унимодулярных решеток в размерности 14 и 259 неразложимых унимодулярных решеток размерности 15. Вычислены их системы корней и порядки групп автоморфизмов. Установлено, что имеется только одна бескорневая решетка в размерности 14 и только 2 бескорневые решетки в размерности 15. Доказано вложение Магнуса для правосимметрических алгебр. Построены неприводимые правосимметрические бимодули над матрицами второго порядка. Вычислены ручные автоморфизмы колец многочленов и свободных ассоциативных алгебр. Установлено, что автоморфизм Аника свободных ассоциативных алгебр от трех порождающих является диким. Построен базис свободных метабелевых правосимметрических алгебр, исследованы алгоритмы решения проблемы равенства и вхождения. Доказана представимость универсальной мультпликативной обертывающей алгебры свободных правосимметрических алгебр в виде нетривиального свободного произведения. Описаны определяющие соотношения унитарных универсальных мультипликативных обертывающих алгебр алгебры матриц второго порядка в многообразии правосимметрических алгебр (У.Умирбаев, Ш.У.Абуталипова, А.Т.Абдихаликов и др.). В качестве приложений теоретических исследований предложена схема разделения секрета на основе конечной модели унарных независимых предикатов, что является новым и весьма перспективным подходом, невстречающемся в мировой практике (Е.Р.Байсалов).

Проводились исследования по теории нечетких множеств и нечетких алгебраических систем (В.П.Добрица и др.). Необходимость оперирования с нечеткой информацией требует введения операций над этими объектами. Один из возможных путей построения содержательной логической теории состоит в том, что вводятся так называемые размытые (т.е. нечетко-значные) операции над элементами нечетких множеств. Показано, что при таком подходе арифметика нечетких чисел становится "хорошей" теорией, обладающей многими интересными свойствами, подобными свойствам чисел в обычной арифметике. Эта теория находит важные применения.

В качестве приложения разработанных методов изучены нечетко-значные группы на нечетких множествах. Показано, что конструкция нечетко-значной группы обладает всеми естественными свойствами, которые обычно рассматриваются в теории групп. Для сравнения нужно отметить, что традиционно принятый в литературе подход, когда в качестве алгебраической системы рассматривается нечеткое множество с обычными, четкими операциями, приводит к теории со многими ограничениями, в результате чего использование такой теории в приложениях оказывается затруднительным. Традиционные исследования по теории чисел, заложенные еще член-корреспондентом АН Каз ССР Б.М.Уразбаевым, были направлены на подсчет числа абсолютно абелевых полей различных типов: $(l,l),(l,l,l,l),(l,l),(l,l)$ и т.д. (А.А.Болен, С.К.Кенжебаев и др.). В последние годы наметился уклон к обобщающим результатам. Получена формула роста числа абсолютно абелевых полей при росте их дискриминантов; дано алгоритмическое описание элементарно абелевых полей степени $2r$, что позволило подсчитать фундаментальный базис в общем случае, включая и критический случай; установлен фундаментальный базис композитов квадратичных полей и полей с заданным дискриминантом. А.А.Болен получил конструктивную реализацию теоремы Кронекера-Вебера, что дало возможность найти ряд интересных приложений. Теория мультипликативных и аддитивных функций, как один из основных разделов аналитической теории чисел, далеко продвинута для случая кольца целых рациональных чисел. Для алгебраических полей степени $n \geq 2$ соответствующая теория менее развита ввиду более сложной арифметики этих полей. Тем не менее, ряд труднейших задач классической теории чисел получил свое разрешение благодаря методам, развитым в многомерной аналитической теории чисел. Этой области исследований посвящены работы У.Б.Жанбырбаевой. Отметим также, что в Казахстане проводились исследования и по классической теории групп (И.Павлюк, Е.Джунисов, И. Латкин).

Поступила в редакцию 10.05.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С.16 — 32*

УДК 519.6:537.12:531.1

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л.А. Алексеева

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Рассматривается многомерный аналог уравнения Даламбера в пространстве обобщенных функций. Излагается метод построения условий на фронтах ударных волн. Разработан метод обобщенных функций для построения решений начально-краевых задач для волновых уравнений в пространствах разной размерности. Строятся динамические аналоги формул Грина и Гаусса для решений волнового уравнения в пространстве обобщенных функций. Построены их регулярные интегральные представления и сингулярные граничные интегральные уравнения для решения начально-краевых задач математической физики, в том числе при наличии ударных волн.

Решение многих задач акустики, гидромеханики, теории упругости и других разделов физики связано с краевыми задачами для волнового уравнения — многомерного аналога уравнения Даламбера, описывающего процессы распространения волн в однородных изотропных средах, поэтому весьма актуально построение эффективных способов их решения для областей с произвольной геометрией и разнообразным видом граничных условий.

Наиболее эффективным методом исследования таких задач является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Главное его достоинство — снижение размерности решаемых уравнений, что весьма существенно, особенно для областей, содержащих бесконечно удаленные точки. Существующие методы и программы сплайн-апроксимации произвольных контуров и поверхностей снимают проблему ограничения формы рассматриваемых областей при использовании МГИУ. В настоящее время этот метод широко используется для решения стационарных задач математической физики, что связано с успехами в разработке теории ГИУ для эллиптических уравнений и систем.

Решение нестационарных динамических задач на основе метода ГИУ требует введения понятия обобщенного решения, что связано с особенностью фундаментальных решений волновых уравнений, которые принадлежат классу обобщенных функций. Кроме того, классическое понятие дифференцируемости решений для гиперболических уравнений резко сужает класс

Keywords: *wave equation, generalized solution, shock wave, generalized Green's formula, nonstationary boundary value problem, boundary integral equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L15

задач, полезных для приложений. В частности, типичные физические процессы, сопровождающиеся ударными волнами, не описываются дифференцируемыми решениями гиперболических уравнений.

Здесь излагается метод ГИУ для построения решений начально-краевых задач для волновых уравнений в пространствах разной размерности. Строятся динамические аналоги формул Грина и Гаусса для решений волнового уравнения в пространстве обобщенных функций. Построены их регулярные интегральные представления и сингулярные граничные интегральные уравнения для решения начально-краевых задач математической физики, в том числе при наличии ударных волн.

1. Обобщенные решения волнового уравнения, ударные волны. Рассматривается многомерный аналог уравнения Даламбера:

$$\Box_c u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(x,t), \quad x \in R^N,\ t \in R^1. \tag{1}$$

Здесь $\Box_c$ – волновой оператор (даламбертиан), Δ – оператор Лапласа, G – локально интегрируемая функция. Далее обозначаем $u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \dot{u} = u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Уравнение (1) строго гиперболическое, класс его решений содержит разрывные по производным функции. Поверхности разрыва F в R^{N+1} – это характеристические поверхности уравнения (1), которые удовлетворяют характеристическому уравнению в пространстве $R^{N+1} = \{(x, \tau \equiv ct)\}$:

$$\nu_\tau^2 - \|\nu\|_N^2 = 0, \quad \|\nu\|_N = \sqrt{\nu_j \nu_j}, \tag{2}$$

где $\nu(x,\tau) = (\nu_1, ..., \nu_N, \nu_\tau)$ – вектор нормали к F (по повторяющимся индексам i, j в произведении здесь и далее всюду проводится суммирование от 1 до N). Ему соответствует конус характеристических нормалей — световой конус, для которого $\nu_\tau = \nu_{N+1} < 0$ [1, 2]. В R^N такие поверхности движутся с единичной скоростью по τ :

$$1 = -\nu_\tau / \|\nu\|_N , \tag{3}$$

это волновые фронты F_t , движущиеся со скоростью c по времени t . На них выполняются условия непрерывности Адамара :

$$[u\,(x,t)]_{F_t} = 0, \quad [\dot{u} + c n_i\, u_{,i}]_{F_t} = 0, \tag{4}$$

где через $[f\,(x,t)]_{F_t}$ обозначен скачок f на F_t :

$$[f\,(x,t)]_{F_t} = f^+\,(x,t) - f^-\,(x,t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(f\,(x + \varepsilon n, t) - f\,(x - \varepsilon n, t)\right), \quad x \in F_t,$$

$n(x,t)$ — единичный вектор нормали к F_t , направленный в сторону распространения фронта волны:

$$n_i = \frac{\nu_i}{\|\nu\|_N} = \frac{grad\, F_t}{\|grad\, F_t\|},\ i = 1, ..., N. \tag{5}$$

Последнее равенство справедливо, если уравнение фронта волны можно представить в виде $F_t(x,t) = 0$ при условии существования $grad\, F_t$.

Класс подобных решений гиперболических уравнений называют *ударными волнами*, на их фронтах производные функций и даже сами функции могут терпеть скачки.

Из второго условия (4) следует на фронтах

$$\dot{u}^- + c n_i\, u_{,i}^- = \dot{u}^+ + c n_i\, u_{,i}^+ . \tag{6}$$

Если перед фронтом волны $u \equiv 0$ (среда в покое), это равенство дает полезное соотношение на фронте $(grad\, u, n) = -c^{-1}\dot{u}, \quad x \in F_t$. Заметим, что касательные производные к характеристической поверхности в силу непрерывности u также непрерывны, т.е.

$$[u,_\tau \gamma_\tau + u_j\gamma_j]_F = 0 \quad \text{для} \ \ \forall\gamma \in R^{N+1}: \ (\nu,\gamma) = 0. \tag{7}$$

В частности, если $\gamma = \gamma^j = (-\nu_j, \ \nu_\tau\delta_1^j, \ \nu_\tau\delta_2^j, ..., \ \nu_\tau\delta_N^j)$, где δ_i^j – символ Кронекера, это приводит к условиям вида:

$$[-u,_\tau \nu_j + u_j\nu_\tau]_F = 0 \Rightarrow [\dot{u}n_j + cu_j]_{F_t} = 0, \quad j = 1,...,N. \tag{8}$$

Далее рассмотрим функции $u(x,t)$, которые непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно почти всюду, за исключением конечного или счетного числа поверхностей разрыва — волновых фронтов, достаточно гладких почти всюду, на которых выполнены условия на скачки (3). Назовем такие решения *классическими*. Покажем, что они являются обобщенными решениями уравнений (1).

Для этого рассмотрим (1) на пространстве обобщенных функций $D'(R^{N+1}) = \left\{\hat{f}(x,\tau)\right\}$, определенных на $D(R^{N+1}) = \{\varphi(x,\tau)\}$ – пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций [2]. Значение $\hat{f}$ на φ, как принято , обозначаем $(\hat{f},\varphi)$. Для регулярных функций $\hat{f}$, соответствующих локально интегрируемым f, $(\hat{f},\varphi) = \int\limits_{R^{N+1}} f(x,\tau)\varphi(x,\tau)dx_1...dx_N d\tau$. Далее обозначим $dV(x) = dx_1...dx_N$.

Определение. *Функция $\hat{f} \in D'(R^N)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для любого $\varphi \in D(R^{N+1})$ выполняется равенство $(\Box_c\hat{f},\varphi) \equiv (\hat{f},\Box_c\varphi) = (G,\varphi)$.*

Лемма 1.1. *Если u – классическое решение (1), то $\hat{u}$ является его обобщенным решением.*

Доказательство. Если u имеет конечный разрыв на F, то в $D'(R^{N+1})$ согласно правилам определения обобщенной производной [2]

$$\hat{u},_j = u,_j + [u]_F\nu_j\delta_F(x,\tau),$$

где первое слагаемое справа - классическая производная по x_j, $j = 1,...,N+1$, $\|\nu\| = 1$, δ_F — сингулярная обобщенная функция — *простой слой* на F:

$$([u]_F\nu_j\delta_F(x,\tau),\varphi(\mathrm{x},\tau)) = \int\limits_F [u(x,\tau)]_F\nu_j(\mathrm{x},\tau)\varphi(x,\tau)dF(x,\tau) \quad \forall\varphi \in D(R^{N+1}).$$

Здесь интеграл по F — поверхностный. В силу непрерывности u вне фронта волны

$$[u]_F = \lim_{\varepsilon\to+0}(u(x+\varepsilon\, n,t) - u(x-\varepsilon\, n,t)) = u^+(x,t) - u^-(x,t) = [u]_{F_t}.$$

Поэтому с учетом (5) получим

$$\hat{u},_j = u,_j + [u]_{F_t}\nu_j\delta_F(x,\tau) = u,_j + \|\nu\|_N [u_{\mathrm{F_t}} n_j\delta_F,$$

$$\hat{u},_{jj} = u,_{jj} + [u,_j]_{F_t}\|\nu\|_N n_j\delta_F + \partial_j\left\{\|\nu\|_N [u]_{F_t} n_j\delta_F\right\}.$$

В силу (3),

$$\hat{u},_\tau = u,_\tau + [u]_{F_t}\nu_\tau\delta_F = c^{-1}u,_t - \|\nu\|_N [u]_{F_t}\delta_F, \hat{u},_{tt} =$$

$$= c^{-2}u,_{tt} - c^{-1}[u,_t]_{F_t}\|\nu\|_N \delta_F - \partial_\tau\left\{\|\nu\|_N [u]_{F_t}\delta_F\right\}.$$

С учетом этих равенств и условий Адамара (1) имеем

$$\Box_c \hat{u} = \Box_c u + \left\{ c^{-1} \left[u_{,t}\right]_{F_t} + \left[n_j u_{,j}\right]_{F_t} \right\} \|\nu\|_N \, \delta_F(x,\tau) +$$
$$+ c^{-1} \partial_t \left\{ \|\nu\|_N \left[u\right]_{F_t} \delta_F(x,\tau) \right\} + \partial_j \left\{ \|\nu\|_N \left[u\right]_{F_t} n_j \delta_F(x,\tau) \right\} = \hat{G}(x,t),$$

поскольку все плотности простых и двойных слоев на F_t равны нулю. Действительно, второе слагаемое равно нулю в силу второго условия (4) на фронтах. А два других в силу первого, поскольку их действие на $D(R^{N+1})$ определяется так:

$$\left(c^{-1} \partial_t \left\{ \|\nu\|_N \left[u\right]_{F_t} \delta_F(x,\tau) \right\} + \partial_j \left\{ \|\nu\|_N \left[u\right]_{F_t} n_j \delta_F(x,\tau) \right\}, \varphi(x,t) \right) =$$
$$= - \int\limits_F \nu_\tau \left[u\right]_F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi_{,\tau} \right) dF(x,\tau) = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. *Из этой леммы следует, что условия на фронтах ударных волн легко получить, рассматривая классические решения гиперболических уравнений как обобщенные. Достаточно приравнять нулю плотности соответствующих независимых сингулярных обобщенных функций – аналогов простых, двойных и др. слоев, возникающих при обобщенном дифференцировании решений. Определение таких условий на основе классических методов — весьма трудоемкая процедура.*

Замечание 2. *Уравнение (1) допускает обобщенные решения со скачком производных и на подвижных поверхностях* $F(x,t) = 0$, *скорость движения которых может зависеть от точки фронта:* $v(x,t) = -F_{,t} \,/\, \|grad\, F\|$, *если на них выполняются условия Адамара (4). Такие решения могут порождаться правой частью уравнения, если носитель* $G(x,t)$ *расширяется с течением времени в* R^N.

2. Постановка краевых задач, единственность решений. Пусть в области $S^- \subset R^N$, ограниченной поверхностью Ляпунова S ([2], с. 409), строится решение (1) при $t \geq 0$. Обозначим $n = (n_1, ..., n_N)$ – единичный вектор внешней нормали к S, $D^- = S^- \times R^+$, $R^+ = [0, \infty)$.

Начальные условия при $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ для } x \in S^- + S, \quad u_{,t}(x,0) = \dot{u}_0(x) \text{ для } x \in S^-. \tag{9}$$

Здесь рассмотрим две краевые задачи, соответствующие условиям Дирихле и Неймана.

Граничные условия:

$$u(x,t) = u_S(x,t) \quad \text{для } x \in S,\ t \geq 0 \qquad \text{(первая КЗ)}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = p(x,t) \qquad \text{для } \ x \in S,\ t \geq 0 \qquad \text{(вторая КЗ)}. \tag{11}$$

Предполагается, что начальные и граничные функции $u_0(x)$ и $u_S(x,t)$ непрерывны, а $\dot{u}_0(x)$ и $p(x,t)$ кусочно–непрерывные. Для первой краевой задачи выполнены условия согласования граничных и начальных данных:

$$u_0(x) = u_S(x,0) \text{ для } x \in S. \tag{12}$$

На волновых фронтах, если они возникают, выполняются условия Адамара (4).

Заметим, что ударные волны всегда возникают, если не выполнено условие согласования начальных и граничных данных по скоростям:

$$\dot{u}_0(x) = \dot{u}_S(x,0) \text{ для } \ x \in S, \tag{13}$$

что типично для физических задач. В этом случае в начальный момент времени на границе S формируется фронт ударной волны, который распространяется со скоростью c в R^N. Для построения непрерывно дифференцируемых решений это условие является необходимым. Здесь мы его вводить не будем. Предполагается, что начальные условия заданы и известно одно из граничных условий соответственно рассматриваемой краевой задаче.

Введем функции $E = 0,5\left(u,_\tau^2 + \sum\limits_{j=1}^{N} u,_j^2\right)$, $L = 0,5\left(u,_\tau^2 - \sum\limits_{j=1}^{N} u,_j^2\right)$. Следствием условий Адамара являются условия на скачки этих функций.

Лемма 2.1. *Если u — классическое решение (1), то на фронтах*

$$[E]_{F_t} = -c^{-1}\left[\dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{F_t}, \quad [L(x,t)]_{F_t} = c^{-2}\left(\dot{u}^- + c\,\frac{\partial u^-}{\partial n}\right)[\,\dot{u}]. \tag{14}$$

Доказательство. В силу равенства $[ab] = a^+[b] + b^-[a]$, с учетом (1) и (8) получим :

$$\begin{aligned}
&\left[cE + \dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \left[0,5\left(c^{-1}\dot{u}^2 + cu,_j u,_j\right) + \dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \\
&= 0,5\left[\dot{u}\left(c^{-1}\dot{u} + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right] + 0,5\,[cu,_j u,_j] + 0,5[\dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}] = \\
&= 0,5c^{-1}\left(\dot{u}^+\left[\dot{u} + c\frac{\partial u}{\partial n}\right] + \left(\dot{u}^- + cu,_j^- n_j\right)[\dot{u}]\right) + 0,5u,_j^+[\,cu,_j + \dot{u}n_j] + \\
&+0,5\left(cu,_j^- + \dot{u}^- n_j\right)[u,_j] = 0,5c^{-1}[\dot{u}]\left(\dot{u}^- + cu,_j^- n_j\right) + \\
&+0,5\,[u,_j]\left(cu,_j^- + \dot{u}^- n_j\right) = 0,5cu,_j^-[u,_j + c^{-1}n_j\dot{u}] + 0,5c^{-1}\dot{u}^-[cn_j u,_j + \dot{u}] = 0
\end{aligned}$$

(здесь n — нормаль к фронту в R^N). Отсюда следует первая формула леммы.

Далее, поскольку $[a^2] = (a^+ + a^-)[a]$, и в силу (4) и (7) получим вторую формулу (14):

$$\begin{aligned}
&[L] = 0,5\left[u,_\tau^2 - \sum_{j=1}^{N} u,_j^2\right] = 0,5\left(u,_\tau^+ + u,_\tau^-\right)[u,_\tau] - 0,5\left(u,_j^+ + u,_j^-\right)[\,u,_j] = \\
&= 0,5\left(u,_\tau^+ + u,_\tau^-\right)[u,_\tau] + 0,5\left(u,_j^+ + u,_j^-\right)n_j\,[\,u,_\tau] = \\
&= 0,5\left\{\left(u,_\tau^+ + n_j u,_j^+\right) + \left(u,_\tau^- + n_j u,_j^-\right)\right\}[\,u,_\tau] = c^{-2}\left(\dot{u}^- + c\,\frac{\partial u^-}{\partial n}\right)[\,\dot{u}].
\end{aligned}$$

Замечание 1. *Если перед фронтом волны $u \equiv 0$, то с учетом (6) имеем $[L(x,t)]_{F_t} = 0$, т.е. в этом случае функция L непрерывна.*

Теорема 2.1. *Если $u(x,t)$ — классическое решение краевой задачи, то*

$$\int\limits_{S^-}(E(x,t) - E(x,0))dV(x) = -\int\limits_0^t dt\int\limits_{D^-} G(x,t)u,_t\,dV(x) + \int\limits_0^t\int\limits_S \dot{u}_S(x,t)p(x,t)dS(x)dt.$$

Доказательство. Умножая (1) на $u,_\tau$ в области дифференцируемости, после простых преобразований получим

$$E,_\tau - (u,_\tau\, u,_j),_j = -u,_\tau\, G. \tag{15}$$

А теперь проинтегрируем (15) по D^- с учетом разбиения области интегрирования волновыми фронтами F_k. Заметим, что первые два слагаемые можно рассматривать как дивергенцию соответствующего вектора в пространстве R^{N+1}, которая в областях между фронтами непрерывна. Поэтому, используя теорему Остроградского-Гаусса в R^{N+1}, получим

$$\int\limits_{D^-} E,_\tau dV(x)d\tau - \int\limits_{D^-} (u,_\tau u,_j),_j dV(x)d\tau + \int\limits_{D^-} u,_\tau G(x,\tau)dV(x)d\tau =$$

$$= \int\limits_{D^-} u,_\tau G(x,\tau)dV(x)d\tau + \int\limits_{S^-} (E(x,\tau) - E(x,0))dV(x) - \int\limits_0^\tau \int\limits_S (u,_\tau u,_j n_j)\, dS(x)d\tau +$$

$$+ \sum_{F_k} \int\limits_{F_k} [E\nu_\tau - u,_\tau u,_j \nu_j]_{F_k} dF_k(x,\tau) = 0$$

($dF_k(x,\tau)$) — дифференциал площади поверхности в соответствующей точке k-го волнового фронта). В силу (3) и (14) $[E\nu_\tau - u,_\tau u,_j \nu_j]_{F_k} = -c^{-1}\|\nu\|_N \left[cE + \dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0$. Поэтому последний интеграл равен нулю. С учетом обозначений для граничных функций, отсюда получаем формулу теоремы.

Замечание 2. *Первое условие (14) можно легко получить, рассматривая уравнение (15) в* $D'(R^{N+1})$ *:* $\hat{E},_\tau - (u,_\tau u,_j),_j = -u,_\tau G + \{[E]\,\nu_\tau - [u,_\tau u,_j]\,\nu_j\}\,\delta_F(x,\tau) = -u,_\tau G -$ $- \|\nu\|_N \{[E] + [u,_\tau u,_j]n_j\}\,\delta_{F_t}(x,t)$. *Следовательно, чтобы это уравнение выполнялось в* $D'(R^{N+1})$, *необходимо, чтобы* $\left[E + c^{-1}\dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right]_F = 0$.

Следствием теоремы 1.2 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если классическое решение первой (второй) краевой задачи существует, то оно единственно.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность нулевого решения. Для него $G = 0$, начальные и соответствующие граничные условия – нулевые. Тогда, как легко видеть, из теоремы 2.1 следует: $\int\limits_{S^-} E(x,t)dV(x) = 0$. Поскольку E неотрицательна, следовательно, $E \equiv 0 \Rightarrow u = const$. Из начальных условий следует $u \equiv 0$.

Теорема 2.3. *Если* $u(x,t)$ *— классическое решение краевой задачи, то*

$$\int\limits_{D^-} L(x,t)dV(x)dt = \int\limits_{D^-} uG(x,t)dV(x)dt - \int\limits_0^t \int\limits_S u_S(x,t)p(x,t)dS(x)dt +$$

$$+ c^{-2} \int\limits_{S^-} (u\dot{u}(x,t) - u_0\dot{u}_0(x))\, dV(x).$$

Доказательство. Умножая (1) на u, после простых преобразований получим

$$L(x,\tau) + (uu,_j),_j - (uu,_\tau),_\tau = G. \qquad (16)$$

Проинтегрируем (16) по области D^- с учетом разбиения ее волновыми фронтами F_k. Аналогично, как в теореме 2.1, используя теорему Остроградского-Гаусса, имеем

$$\int\limits_{D^-} L\, dV(x)d\tau = \int\limits_{D^-} uGdV(x)d\tau + \int\limits_{D^-} ((uu,_\tau),_\tau - (uu,_j),_j)\, dV(x)d\tau =$$

$$= \int\limits_{D^-} uG\, dV(x)d\tau + c^{-1} \int\limits_{S^-} (uu,_t - u_0\dot{u}_0)\, dV(x) - \int\limits_0^\tau d\tau \int\limits_S uu,_j n_j dS(x) +$$

$$+ \sum_{F_k} \int\limits_{F_k} [uu,_\tau \nu_\tau - uu,_j \nu_j]_{F_k} dF_k(x,\tau).$$

В силу условий Адамара (4) последнее слагаемое равно нулю. Поэтому с учетом условий на границе (10), (11) получим формулу теоремы.

Замечание. *Теорема 2.1 — это закон сохранения энергии. В задачах математической физики аналогично удобно использовать такой закон с учетом условий на фронтах ударных волн для доказательства единственности решений начально-краевых задач.*

3. Динамический аналог формулы Грина в $D'(R^{N+1})$. Для построения решения КЗ перейдем в пространство $D'(R^{N+1})$. Для этого введем характеристическую функцию области определения решения $H_D^-(x,t) \equiv H_S^-(x)\,H(t)$, где $H_S^-(x)$ — характеристическая функция множества S^-, *равная* 0,5 на его границе S, $H(t)$ — функция Хевисайда, равная 0,5 при $t=0$. H_D^- — характеристическая функция пространственно-временного цилиндра D^-. Легко показать, что

$$\frac{\partial H_D^-}{\partial x_j} = -n_j \delta_S(x) H(t), \quad \frac{\partial H_D^-}{\partial t} = -n_j H_S^-(x)\delta(t). \tag{17}$$

Введем обобщенные функции $\hat{u}(x,t) = u(x,t)H_D^-(x,t), \hat{G}(x,t) = G(x,t)H_S^-(x)\,H(t)$, где $u(x,t)$ — классическое решение КЗ, и рассмотрим действие волнового оператора на эту функцию. Поскольку $[u]_S = -u$, выполняя обобщенное дифференцирование, подобно тому, как в п.1, и используя (1) в области дифференцируемости, получим

$$\begin{gathered}\Box_c \hat{u}\,(x,t) = -\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S\,(x)\,H\,(t) - H\,(t)\,(u n_j \delta_S\,(x))\,,_j - \\ -c^{-2} H_S^-\,(x)\,u_0\,(x)\,\dot{\delta}(t) - c^{-2} H_S^-\,(x)\,\dot{u}_0\,(x)\,\delta(t) + \hat{G},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\beta\,(x,t)\,\delta_S(x)H(t)$ — простой слой на боковой поверхности пространственно-временного цилиндра $\{S \times R^+\}$, $\delta(t)$ — функция Дирака, $\frac{\partial u}{\partial n} = u,_i n_i$ — производная по нормали n к S. Заметим, что плотности простых и двойных слоев здесь определяются граничными условиями, часть из которых, в зависимости от решаемой КЗ, известна, и заданными начальными условиями.

Как известно из теории обобщенных функций [2], решением уравнения (18) является свертка фундаментального решения уравнения с правой частью этого уравнения. В качестве такового возьмем фундаментальное решение $\hat{U}\,(x,t)$, удовлетворяющее условиям:

$$\Box_c U = \delta(x)\delta(t), \tag{19}$$

$$U = 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ и } \|x\| > ct \quad (\textit{условия излучения}). \tag{20}$$

Назовем его *функцией Грина* уравнения (1) . Решение (17) представимо в виде следующей свертки:

$$\begin{gathered}\hat{u}\,(x,t) = u\,(x,t)\,H_S^-\,(x)\,H\,(t) = -\hat{U}\,(x,t) * \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S\,(x)\,H\,(t) - \left(\hat{U} * u n_j \delta_S\,(x)\,H\,(t)\right),_j - \\ -c^{-2}\left(\hat{U} \underset{x}{*} H_S^-\,(x)\,u_0\,(x)\right),_t - c^{-2}\hat{U} \underset{x}{*} H_S^-\,(x)\,\dot{u}_0\,(x) + \hat{G} * \hat{U},\end{gathered} \tag{21}$$

где символ " $\underset{x}{*}$ "означает, что свертка берется только по x, поскольку при взятии свертки можно воспользоваться свойством δ-функции. Причем решение (21) единственно в классе функций, допускающих свертку с U.

Рассмотрим (21) при нулевых начальных данных и $G=0$, используя свойство дифференцирования сверток:

$$\hat{u}\,(x,t) = -\hat{U}\,(x,t) * \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S\,(x)\,H\,(t) - \hat{U},_j * u n_j \delta_S\,(x)\,H\,(t)\,. \tag{22}$$

Формула выражает решение КЗ через граничные значения искомой функции и ее нормальной производной и аналогична формуле Грина для решений уравнения Лапласа [2]. Однако, в силу особенностей фундаментальных решений гиперболических уравнений на фронте волны, вид которых зависит от размерности пространства, ее интегральное представление дает расходящиеся интегралы (во втором слагаемом). Для построения ее регулярного интегрального представления введем функции – первообразные по t :

$$\hat{W}(x,t) = \hat{U}(x,t) * \delta(x) H(t) = \hat{U}(x,t) \underset{t}{*} H(t) \;\Rightarrow\; \partial_t \hat{W}(x,t) = \hat{U}(x,t); \tag{23}$$

$$\hat{H}(x,m,t) = \frac{\partial \hat{W}(x,t)}{\partial x_i} m_i = \frac{\partial \hat{W}(x,t)}{\partial m}.$$

Заметим, что в силу ограниченности носителя по t слева, обе свертки существуют. Легко видеть, что они также являются решениями (1) при $G = H(t)\delta(x)$ и $G = H(t)\frac{\partial \delta(x,t)}{\partial m}$ соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *В* $D'(R^{N+1})$ *решение КЗ удовлетворяет уравнению*

$$\hat{u}(x,t) = -\hat{U}(x,t) * \frac{\partial u}{\partial n} \delta_S(x) H(t) - \left(\hat{W},_j * \dot{u} n_j \delta_S(x) H(t)\right) - \tag{24}$$
$$-\hat{W},_j \underset{x}{*} u_0(x) n_j(x) \delta_S(x) - c^{-2} \hat{U} \underset{x}{*} H_S^-(x) \dot{u}_0(x) - c^{-2} \left(\hat{U} \underset{x}{*} H_S^-(x) u_0(x)\right),_t + \hat{G} * \hat{U}.$$

Доказательство. Легко показать, пользуясь определением производной обобщенной функции и непрерывностью u , что

$$(u n_j \delta_S(x) H(t)),_t = \dot{u}(x,t) n_j(x) \delta_S(x) H(t) + u(x,0) n_j(x) \delta_S(x) \delta(t).$$

Используя это равенство и свойство дифференцирования свертки, имеем

$$\left(\hat{U} * u n_j \delta_S(x) H(t)\right),_j = \left(\hat{W},_t * u n_j \delta_S(x) H(t)\right),_j = \hat{W},_j * (u n_j \delta_S(x) H(t)),_t =$$
$$= \hat{W},_j * \dot{u}(x,t) n_j(x) \delta_S(x) H(t) + \hat{W},_j * u(x,0) n_j(x) \delta_S(x) \delta(t).$$

Последняя свертка равна $\hat{W},_j \underset{x}{*} u_0(x) n_j(x) \delta_S(x)$. Подставляя эти соотношения в (21), получим формулу теоремы.

Из теоремы следует, что решение задачи полностью определяется граничными значениями нормальной производной функции $u(x,t)$ и ее скорости $\dot{u}$. По аналогии с представлением решений уравнения Лапласа, эти формулы можно назвать *динамическим аналогом формулы Грина.*

Формула (24) обладает преимуществом в сравнении с (21), так как позволяет сразу перейти к ее интегральной записи без регуляризации подынтегральных функций на фронтах, как ранее было предложено в [3]. Для $x \in S$ формула (24) дает, как покажем далее, граничное интегральное уравнение для решения начально-краевых задач. Если известна одна из граничных функций, то решая ГИУ на границе, находим вторую, после чего формула (24) дает решение $u(x,t)$.

4. Динамический аналог формулы Гаусса. Введем функции

$$U(x,y,t) = \hat{U}(x-y,t),\; W(x,y,t) = \hat{W}(x-y,t),\; H(x,y,m,t) = \hat{H}(x-y,m,t),$$

которые в силу свойств симметрии волнового оператора и δ -функции удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$U(x,y,t) = U(y,x,t),\; W(x,y,t) = W(y,x,t), \quad \frac{\partial W}{\partial x_j} = -\frac{\partial W}{\partial y_j}, \tag{25}$$
$$H(x,y,m,t) = -H(y,x,m,t) = -H(x,y,-m,t).$$

Лемма 4.1. *В* $D'(R^{N+1})$ *динамический аналог формулы Гаусса имеет вид*

$$-\hat{W}_{,i} \underset{x}{*} n_i(x)\,\delta(x) - c^{-2}\left(\hat{U} \underset{x}{*} H_S^-(x)\right)_{,t} = H_D^-(x,t). \qquad (26)$$

Доказательство. Свернем обе части уравнения (19) для U с $H_D^-(x,t)$, используя свойства дифференцирования сверток и (17):

$$-U_{,j} * n_j(x)\delta_S(x)\,H(t) - c^{-2}\left(U_{,t} * H_S^-(x)\,\delta(t)\right) = H_D^-(x,t).$$

С учетом (23), перебрасывая дифференцирование по t в первом слагаемом и выполняя свертку по t во втором, получим формулу леммы.

Формула (26) является аналогом известной формулы Гаусса для потенциала двойного слоя (с.406, [2]), которая дает интегральное представление характеристической функции множества с использованием фундаментального решения уравнения Лапласа. Формулу Гаусса часто используют для вывода ГИУ краевых задач для эллиптических уравнений и систем. Аналогично можно использовать динамический аналог формулы Гаусса для вывода ГИУ гиперболических уравнений. Здесь для построения ГИУ воспользуемся динамическим аналогом формулы Грина.

Интегральная запись этих соотношений зависит от размерности задачи. Далее дадим интегральное представление формул теоремы 3.1 и леммы 4.1 для пространств размерности $N = 1, 2, 3,$ наиболее характерных для задач математической физики.

5. ГИУ для плоских краевых задач. В случае $N = 2$ имеем плоскую задачу. Рассмотрим вначале задачу с нулевыми начальными условиями.

Обозначим $dS(y)$ – дифференциал длины дуги S в точке y, $S_t(x) = \{y \in S : r < ct\}$, $S_t^-(x) = \{y \in S^- : ,\ r < ct\}$, $r = \|x - y\|$, $dV(y) = dy_1 dy_2$.

Теорема 5.1. *При* $N = 2$ *функция* $\hat{u}(x,t)$, *удовлетворяющая нулевым начальным условиям* $(u_0 = 0,\ \dot{u}_0 = 0)$, *имеет следующее интегральное представление*:

$$\hat{u} = \frac{c}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{S_\tau(x)} \left(\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)} + \frac{\tau}{r}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\dot{u}(y,t-\tau)\right)\frac{dS(y)}{\sqrt{(c^2\tau^2 - r^2)}}, \qquad (27)$$

которое при перемене порядка интегрирования имеет вид

$$\hat{u}(x,t) = \frac{c}{2\pi}\int_{S_t(x)} dS(y)\int_{r/c}^t \frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}\frac{d\tau}{\sqrt{(c^2\tau^2 - r^2)}} +$$

$$+\frac{c}{2\pi}\int_{S_t(x)} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y)\int_{r/c}^t \frac{\tau\dot{u}(y,t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{(c^2\tau^2 - r^2)}}.$$

Для $x \in S$ *второй интеграл справа сингулярный, — берется в смысле главного значения.*

Доказательство. Для $N = 2$ функция Грина имеет следующий вид ([2], с. 206):

$$\hat{U}(x,t) = -\frac{cH(ct - R)}{2\pi\sqrt{(c^2\tau^2 - r^2)}}, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \qquad (28)$$

Вычисляя по формулам (23), найдем $\hat{W}$ и $\hat{H}$:

$$\hat{W}(x,t) = -\frac{H(ct - R)}{2\pi}\ln\left(\frac{ct - \sqrt{c^2t^2 - R^2}}{R}\right), \quad \hat{H}(x,m,t) = -\frac{ct\,H(ct - R)}{2\pi\sqrt{c^2t^2 - R^2}}\frac{x_j m_j}{R^2}. \qquad (29)$$

Если записать свертки в (24) в интегральном виде с учетом этих представлений, то получим соотношения теоремы. Заметим, что для $x \notin S$ интегралы справа являются регулярными и потому для таких x справа и слева стоят регулярные функции. Докажем справедливость (27) и для $x \in S$ с учетом определения $H_S^-(x)$.

Обозначим ε-окрестность точки x ($\varepsilon \ll ct, t > 0$) через $Ш_\varepsilon(x) = \{y : r < \varepsilon\}$, $S_\varepsilon^-(x) = S^- - Ш_\varepsilon(x), S_\varepsilon^+(x) = S^+ - Ш_\varepsilon(x), O_\varepsilon(x) = \{y \in S : r \leq \varepsilon\}$, $S_\varepsilon = S - O_\varepsilon$, $Ш_\varepsilon^- = S^- \cap Ш_\varepsilon$, $Ш_\varepsilon^+ = S^+ \cap Ш_\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon^\pm(x) = \{y \in S^\pm : r = \varepsilon\}$, $r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j}$.

Пусть $x^* \in S$. Трансформируем контур S в окрестности точки x^*, обходя ее по $\varepsilon-$полуокружности в S^- $(\varepsilon << ct, t > 0)$. Запишем динамический аналог формулы Грина для контура $S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^-$ в точке $x = x^*$:

$$0 = \frac{c}{\pi} \int\limits_{S_\varepsilon(x^*)+\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} H(ct-r)\, dS(y) \int\limits_{r/c}^{t} \frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)} \frac{d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} +$$

$$+\frac{c}{2\pi} \int\limits_{S_\varepsilon(x^*)} H(ct-r) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) \int\limits_{r/c}^{t} \frac{\tau \dot{u}(y,t-\tau)\, d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} +$$

$$+\frac{c}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} H(ct-r) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) \int\limits_{r/c}^{t} \frac{\tau \dot{u}(y,t-\tau)\, d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}.$$

При $\varepsilon \to +0$ первый интеграл в силу слабой особенности у подынтегральной функции стремится к интегралу по S, второй — к интегралу в смысле главного значения, который также существует, так как подынтегральная функция имеет особенность вида r^{-1} и содержит функцию $\frac{\partial r}{\partial n(y)} = n_j(y)\frac{(y_j - x_j)}{r}$. Последняя при $y \to x$ асимптотически эквивалентна $\frac{\partial r}{\partial n(x)} = n_j(x)\frac{(y_j - x_j)}{r}$, которая антисимметрична относительно точки x. Интегральный сомножитель при $r \to 0$ не имеет особенности.

Рассмотрим последнее слагаемое, которое обозначим $J_\varepsilon(x)$. На Γ_ε^-, $r = \varepsilon, \frac{\partial r}{\partial n(y)} = -\frac{\partial r}{\partial r} = -1, dS(y) = \varepsilon\, d\theta$, где θ – полярный угол с вершиной в точке $x; \theta_1$ и θ_2 – углы концов Γ_ε^-, пронумерованные по порядку при обходе контура Γ_ε^- в положительном направлении. С учетом этих соотношений

$$J_\varepsilon(x) = \frac{c}{2\pi} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} d\theta \int\limits_{\varepsilon/c}^{t} \frac{\tau \dot{u}(y,t-\tau)\, d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} = \frac{(\theta_2 - \theta_1)\, c}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon/c}^{t} \frac{\tau \dot{u}(y,t-\tau)\, d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\theta_2 - \theta_1) = -\pi, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(x) = -0,5 \int\limits_{0}^{t} \dot{u}(y,t-\tau)\, d\tau = -0,5u(x,t).$$

Перенося это слагаемое в левую часть, с учетом определения $H_D^-(x,t) = 0,5$ для $x \in S$, получим справедливость формулы и на границе. Поскольку слева и справа в (27) стоят регулярные обобщенные функции, в силу леммы Дюбуа-Реймона ([2], с. 97) равенство, справедливое в классе обобщенных функций, справедливо и в обычном смысле. Теорема доказана.

Для определения неизвестной граничной функции при решении краевых задач соотношение (27) дает *граничное интегральное уравнение*:

$$\pi c^{-1} u_S(x,t) =$$

$$= \int\limits_{S_t(x)} dS(y) \int\limits_{r/c}^{t} \frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)} \frac{d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} + V.P. \int\limits_{S_t(x)} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) \int\limits_{r/c}^{t} \frac{\tau \dot{u}_S(y,t-\tau)\, d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}.$$

В случае первой краевой задачи левая часть уравнения и второй интеграл справа известны и определяются граничным условием, а первый интеграл содержит ядро со слабой особенностью, но не в точке, как обычно для эллиптических задач, а на фронте функции Грина. Решая его, определяем нормальную производную искомой функции на границе, после чего формула (27) позволяет вычислить решение в любой точке области определения. В случае второй краевой задачи имеем сингулярное ГИУ для определения неизвестных граничных значений искомой функции $u(x,t)$. Решая его, определяем ее на границе, после чего (27) определяет решение.

В случае ненулевых начальных условий решение задачи дает следующая теорема.

Теорема 5.2. *При $N=2$ функция решение КЗ, имеет следующее интегральное представление*:

$$2\pi\hat{u} = \int_0^t d\tau \int_{S_\tau(x)} \left(\frac{\partial u\left(y,t-\tau\right)}{\partial n\left(y\right)} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n\left(y\right)}\tau\dot{u}\left(y,t-\tau\right)\right)\frac{dS\left(y\right)}{\sqrt{\tau^2-\left(r/c\right)^2}} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t^-(x)} \frac{u_0(y)dV\left(y\right)}{c\sqrt{c^2t^2-r^2}} + \int_{S_t^-(x)} \frac{\dot{u}_0(y)dV\left(y\right)}{c\sqrt{c^2t^2-r^2}} + c\int_0^t d\tau \int_{S_\tau^-(x)} \frac{G(y,t-\tau)dV\left(y\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}} +$$
$$-\int_{S_t(x)} u_0(y)\frac{ct}{r}\frac{\partial r}{\partial n\left(y\right)}\frac{dS\left(y\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 4.1. и 5.2. , если записать свертки с начальными данными в интегральном виде. Здесь интегралы со второго до четвертого совпадают с формулой Пуассона для задачи Коши. Последнее дополнительное слагаемое с начальными данными обусловлено наличием границы области.

Используя соотношения (28), динамический аналог формулы Гаусса можно записать в интегральном виде.

Лемма 5.1. *При $N=2$ динамический аналог формулы Гаусса имеет следующий вид*:

$$V.P.\int_{S_\tau(x)} \frac{1}{\sqrt{1-\left(r/ct\right)^2}}\frac{\partial}{\partial n\left(y\right)}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dS\left(y\right) + \frac{\partial}{c\partial t}\int_{S_t^-(x)} \frac{dV\left(y\right)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}} = 2\pi H_S^-(x)H(t),$$

где интеграл в смысле главного значения берется для граничных точек.

Доказательство. Формулу леммы 4.1 , с учетом (28),(29), можно записать так:

$$-\int_{S_t(x)} \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n\left(y\right)}dS(y) + \frac{\partial}{c\partial t}\int_{S_t^-(x)} \frac{dV(y)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}} = 2\pi H_S^-(x)H(t). \tag{30}$$

Из этой формулы элементарными преобразованиями получаем формулу леммы. Покажем, что это равенство, справедливое в области регулярности, сохраняется и для $x\in S$, если сингулярный интеграл слева, который содержит сильную особенность по r, брать в смысле главного значения. Аналогично (30) для области с выколотой $\varepsilon-$ окрестностью точки x получим

$$\begin{gathered}-\int_{S_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^-} \frac{ct\,H\left(ct-r\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n\left(y\right)}dS\left(y\right) + \frac{\partial}{c\partial t}\int_{S_\varepsilon^-(x)} \frac{H\left(ct-r\right)dV\left(y\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}} = 0,\\ -\int_{S_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^+} \frac{ct\,H\left(ct-r\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n\left(y\right)}dS\left(y\right) + \frac{\partial}{c\partial t}\int_{S_\varepsilon^-(x)+\text{Ш}_\varepsilon} \frac{H\left(ct-r\right)dv\left(y\right)}{\sqrt{c^2\tau^2-r^2}} = 2\pi.\end{gathered} \tag{31}$$

При $\varepsilon < ct$ интегралы по $\Gamma_\varepsilon^\pm$, Ш$_\varepsilon$ легко вычисляются переходом к полярной системе координат. На Γ_ε^+ $\frac{\partial r}{\partial n(y)} = 1$, на Γ_ε^- $\frac{\partial r}{\partial n(y)} = -1$, а подынтегральные выражения в первом интеграле равны $\pm(1 - 0,5(\varepsilon/ct)^2 + o(\varepsilon^2))d\theta$ соответственно знаку контура. Далее

$$I_\varepsilon(x,t) = \int\limits_{\text{Ш}_\varepsilon(x)} \frac{H(ct-r)\,dV(y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{rdr}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} = 2\pi(ct - \sqrt{c^2\tau^2 - r^2}) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} = 2\pi c \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{ct}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}\right) = 0 \text{ для } \forall t > 0.$$

Если оба равенства в (31) сложить и поделить на 2, с учетом свойств симметрии подынтегральных функций (25) и перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$, получим формулу

$$-V.P.\int\limits_{S_t(x)} \frac{ct}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n(y)} dS(y) + \frac{\partial}{c\partial t} \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{dV(y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} = \pi.$$

То есть с учетом определения $H_S^-(x)$ формула (30) справедлива для любых x.

6. ГИУ пространственных краевых задач $(N = 3)$.

Теорема 6.1. *Для* $N = 3$ *решение КЗ представимо в виде*:

$$4\pi u(x,t) = \int\limits_{S_t(x)} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)} - u(y,t-r/c)\frac{\partial}{\partial n(y)}\frac{1}{r} + c^{-1}\dot{u}(y,t-r/c)\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)}\right\} dS(y) +$$

$$+c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_t(x)} u_0(y)\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)} dS(y) + \int\limits_{r=ct} \frac{\dot{u}_0(y)}{c^2 t} H_S^-(y)\,dS(y) + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{r=ct} \frac{u_0(y)}{c^2 t} H_S^-(y)\,dS(y) -$$

$$-\int\limits_{S_t^-(x)} r^{-1} G(x, t-r/c) dV(y) \quad \textit{для } x \in S^-;$$

$$2\pi u(x,t) = \int\limits_{S_t(x)} \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)} + \frac{\dot{u}(y,t-r/c)}{c}\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)}\right\} dS(y) -$$

$$-V.P.\int\limits_{S_t(x)} u(y,t-r/c)\frac{\partial}{\partial n(y)}\frac{1}{r} ds(y) + c^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_t(x)} u_0(y)\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)} dS(y) +$$

$$+\int\limits_{r=ct} \frac{\dot{u}_0(y)}{c^2 t} H_S^-(y)\,dS(y) + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{r=ct} \frac{u_0(y)}{c^2 t} H_S^-(y)\,dS(y) - \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{G(x,t-r/c)}{r} dV(y), \quad \textit{для } x \in S.$$

Доказательство. При $N = 3$ $\hat{U}(x,t)$ – простой слой на поверхности конуса $K_t = \{(x,t) : \|x\| = ct\}$, который в отличие от формулы в ([4], с. 206) удобно записать в виде

$$\hat{U}(x,t) = -\frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R}, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{32}$$

Для любых $\varphi(x,t) \in D(R_4)$ (6.1) определяет линейный функционал вида:

$$(U,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3} \frac{\varphi(x, \|x\|/c)}{\|x\|} dV(x).$$

По формулам (23) найдем

$$\hat{W}(x,t) = -\frac{H(ct-R)}{4\pi R},\ \hat{H}(x,m,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j m_j}{R^2}\left(c^{-1}\delta(t-R/c) + \frac{H(ct-R)}{R}\right). \qquad (33)$$

Для построения интегральных представлений динамических аналогов формул Грина и Гаусса воспользуемся следующими равенствами, которые можно получить на основе определения операции свертки обобщенных функций:

$$\alpha(x)\,\delta(t-R/c) * f(x,t)\,H(t) = H(t)\int\limits_{S_t(x)} \alpha(x-y)\,f(y,t-r/c)\,dS(y),$$

$$\beta(x,t)\,\delta_S(x)\,H(t) * f(x,t)\,H(t) = H(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_t(x)} \beta(y,t-\tau)\,f(x-y,\tau)\,dS(y),$$

$$\alpha(x)\,\delta(t-R/c) * \beta(x,t)\,\delta_S(x)\,H(t) = H(t)\int\limits_{S_t(x)} \alpha(x-y)\,\beta(y,t-r/\ c)\,dS(y),$$

$$\alpha(x)\,\delta(t-R/c) \underset{x}{*} \gamma(x)\,\delta_S(x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_t(x)} \alpha(x-y)\,\gamma(y)\,dS(y),$$

$$\alpha(x)\,\delta(t-R/c) \underset{x}{*} H_S^-(x) = c^{-1}H(t)\int\limits_{r=ct} \alpha(x-y)\,H_S^-(y)\,dS(y).$$

Вычислим свертки в (24) с учетом этих соотношений. Первое слагаемое равно

$$-\hat{U}(x,t) * \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)\,H(t) = \frac{\delta(t-R/c)}{4\pi R} * \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)\,H(t) = \frac{H(t)}{4\pi}\int\limits_{S_t(x)} \frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)}dS(y).$$

Второе слагаемое ($-4\pi\,\hat{W}_{,j} * \dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)\,H(t)$) равно сумме двух сверток:

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{x_j}{R^2}\delta(t-\|x\|/c) * \dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)\,H(t) = \frac{H(t)}{c}\int\limits_{S_t(x)} r^{-1}\dot{u}(y,t-r/c)r_{,j}\,n_j(y)dS(y) =$$

$$= c^{-1}H(t)\int\limits_{S_t(x)} \dot{u}(y,t-r/c)\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)}dS(y),$$

$$-\frac{x_j}{R^3}H(ct-\|x\|) * \dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)\,H(t) = H(t)\int\limits_{S_t(x)} \frac{\partial r}{r^2\partial n(y)}dS(y)\int\limits_0^t \dot{u}(y,t-\tau)d\tau\ =$$

$$= H(t)\int\limits_{S_t(x)} u^0(y)\frac{\partial r^{-1}}{\partial n(y)}dS(y) - H(t)\int\limits_{S_t(x)} u(y,t)\frac{\partial r^{-1}}{\partial n(y)}dS(y)$$

Третье слагаемое –

$$-4\pi\,\hat{W}_{,j} \underset{x}{*} u_0(x)\,n_j(x)\,\delta_S(x) = -\frac{x_j}{R^2}\left(c^{-1}\delta(t-R/c) + \frac{H(ct-R)}{R}\right) \underset{x}{*} u_0(x)\,n_j(x)\,\delta_S(x) =$$

$$= \frac{\partial}{c\partial t}\int\limits_{S_t(x)} \frac{y_j-x_j}{r^2}u_0(y)\,n_j(y)\,dS(y) + \int\limits_{S_t(x)} \frac{y_j-x_j}{r^3}u_0(y)\,n_j(y)\,dS(y) =$$

$$= \frac{\partial}{c\partial t}\int\limits_{S_t(x)} \frac{\partial \ln r}{\partial n(y)}u_0(y)\,dS(y) - \int\limits_{S_t(x)} \frac{\partial r^{-1}}{\partial n(y)}u_0(y)\,dS(y).$$

Последние три слагаемые дают известную формулу Кирхгофа для решения задачи Коши [1, 2] с начальными условиями. Складывая эти свертки, получим формулу теоремы.

В части, зависящей от начальных данных, в формуле теоремы добавляется слагаемое, обусловленное наличием границы S. Оно исчезает при $t > t^*(x)$, $t^*(x) = \max\limits_{y\in S}\frac{\|x-y\|}{c}$, т.к. $S_t(x) = S$ и интеграл не зависит от t.

В формуле (17) для $x \notin S, t>0$ все интегралы существуют. Доказательство ее при $x \in S$ подобно п.5. При этом сильную особенность имеет второе слагаемое справа. Поскольку в этом случае на Γ_ε^-

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} u\left(y, t-\frac{r}{c}\right)\frac{\partial}{\partial n(y)}\frac{1}{r}dS(y) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-} u\left(y, t-\frac{r}{c}\right)dS(y) = -2\pi u(x,t),$$

ясно, что для $x\in S$ (32) сохраняет вид, если соответствующий сингулярный интеграл понимать в смысле главного значения и учесть значение $H_S^-(x)$ на границе S.

Для $x \in S$ формула дает сингулярные ГИУ для решения второй краевой задачи. Для первой краевой задачи эта же формула дает ГИУ, но уже не сингулярное.

Используя соотношения (20) – (23) динамический аналог формулы Гаусса также можно записать в интегральном виде. Сформулируем результат.

Лемма 6.1. *При N=3 динамический аналог формулы Гаусса имеет следующий вид*:

$$\int\limits_{S_t(x)}\frac{\partial r^{-1}}{\partial n(y)}dS(y) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{r=ct}\frac{H_S^-(y)}{r}dS(y) + \int\limits_{S_t(x)}\frac{\partial \ln r}{\partial n(y)}dS(y)\right\} = 4\pi H_S^-(x)H(t).$$

При $t > t^*(x)$ отсюда следует известная формула Гаусса [2]:

$$\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n(y)}\left(\frac{1}{r}\right) dS(y) = 4\pi H_S^-(x). \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой формулы аналогично доказательству леммы 5.1. Заметим, однако, что при $N=2$ из формул леммы 5.1 не следует двухмерный аналог формулы Гаусса.

7. Решение краевых задач для уравнения Даламбера ($N=1$).

Теорема 7.1. *Решение краевых задач для $N=1$ имеет следующее интегральное представление*:

$$\begin{gathered}
2\hat{u} = c\,H(ct-|x-a_2|)\int\limits_{|x-a_2|/c}^{t} u_{,x}(a_2,\tau)\,d\tau - c\,H(ct-|x-a_1|)\int\limits_{|x-a_1|/c}^{t} u_{,x}(a_1,\tau)\,d\tau + \\
+\operatorname{sgn}(x-a_1)\,H(ct-|x-a_1|)\,u\left(a_1, t-\frac{|x-a_1|}{c}\right) - \\
-\operatorname{sgn}(x-a_2)\,H(ct-|x-a_2|)\,u\left(a_2, t-\frac{|x-a_2|}{c}\right) + \\
+c^{-1}\int\limits_{a_1}^{a_2}\dot{u}_0(y)\,H(ct-|x-y|)dy + u_0(x+ct)\,H_S^-(x+ct) + u_0(x-ct)\,H_S^-(x-ct).
\end{gathered}\tag{35}$$

Доказательство. Обозначим $x_1 = x$. В этом случае ([2], с.206)

$$\begin{gathered}
\hat{U}(x,t) = -\frac{c}{2}H(ct-|x|), \quad \hat{U}_{,t} = -\frac{c}{2}\delta(t-|x|/c), \\
\hat{W}(x,t) = -\frac{c}{2}H(ct-|x|)(ct-|x|), \quad \hat{W}_{,x}(x,t) = \frac{c}{2}H(ct-|x|)\operatorname{sgn} x,
\end{gathered}\tag{36}$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{37}$$

В одномерном случае для построения интегрального аналога формулы Грина непосредственно воспользоваться формулой (24) нельзя, так как неопределены некоторые из входящих в нее функций. Можно получить аналогичную формулу, доопределяя u нулем вне заданной области и проводя дифференцирование в классе обобщенных функций. Поступим иначе, чтобы воспользоваться формулой (21). Расширим область определения $u(x,t)$ до полосы в $R^2 \times R^+$: $\{a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_2, \ -\infty < x_2 < \infty, t > 0\}$. Тогда граница S будет состоять из двух прямых $x_1 = a_1, x_1 = a_2$, внешние нормали которых имеют координаты $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно, $\frac{\partial u}{\partial n} = n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}$ для $x \in S$, $H_S^-(x) = H(x_1 - a_1) H(a_2 - x_1)$, $n_1 \delta_S(x) = \frac{\partial H_S^-}{\partial x_1} = -\delta(x_1 - a_1) + \delta(x_1 - a_2)$. Формула (24) (теорема 3.1) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered} \hat{u} = \hat{U}_2 * \frac{\partial u}{\partial x} H(t) \left(\delta(x - a_2) - \delta(x - a_1)\right) + \frac{\partial \hat{W}_2}{\partial x} * \dot{u}(x,t) H(t) \left(\delta(x - a_2) - \delta(x - a_1)\right) + \\ + c^{-2} \left(\hat{U}_{2,t} \underset{x}{*} u_0(x) H_S^-(x)\right) + c^{-2} \hat{U}_2 * \hat{G}. \end{gathered} \tag{38}$$

Здесь все свертки берутся с функцией Грина и ее первообразной при $N = 2$. На основе метода спуска по x_2, свертывая по x_2, поскольку u не зависит от x_2, получим

$$\begin{gathered} \hat{u} = \hat{U}(x - a_2, t) \underset{t}{*} \frac{\partial u(a_2,t)}{\partial x} H(t) - \hat{U}(x - a_1, t) \underset{t}{*} \frac{\partial u(a_1,t)}{\partial x} H(t) + \\ + \hat{W}_{,x}(x - a_2, t) \underset{t}{*} \dot{u}(a_2, t) H(t) - \hat{W}_{,x}(x - a_1, t) \underset{t}{*} \dot{u}(a_1, t) H(t) + \hat{W}_{,x}(x - a_2, t) u_0(a_2) - \\ - \hat{W}_{,x}(x - a_1, t) u_0(a_1) - c^{-2} \left(\hat{U} \underset{x}{*} \dot{u}_0(x) H_S^-(x)\right) - c^{-2} \hat{U}_{,t} \underset{x}{*} u_0(x) H_S^-(x) + \hat{U} * \hat{G}. \end{gathered} \tag{39}$$

Подставим (37)в (39) и выполним интегрирование, в результате получим (35).

Формула выражает $u(x,t)$ внутри области через начальные и граничные значения самой функции и ее первых производных. Легко показать, что она является справедливой и для $x = a_1$, $x = a_2$ (с учетом (37)). Для этого достаточно формулу (35) записать для интервала $(a_1', a_2) = (a_1 + \varepsilon, a_2)$ $((a_1, a_2 - \varepsilon))$. Полагая $x = a_1$, делаем предельный переход по $\varepsilon \to +0$:

$$\begin{gathered} 0 = \lim_{\varepsilon \to 0} c \left\{ H(ct - d) \int\limits_{\frac{|x - a_2|}{c}}^{t} u_{,x}(a_2, \tau) \, d\tau - H(ct - \varepsilon) \int\limits_{\frac{\varepsilon}{c}}^{t} u_{,x}(a_1, \tau) \, d\tau \right\} + \\ + H(ct - d) u(a_2, t - d/c) + \operatorname{sgn}(-\varepsilon) H(ct) u(a_1, t) + c^{-1} \int\limits_{a_1 + \varepsilon}^{a_2} \dot{u}_0(y) H(ct - |a_1 - y|) dy + \\ + u_0(a_1 + ct) H_S^-(a_1 + ct) + u_0(a_1 - ct) H_S^-(a_1 - ct) = \\ = c \left\{ H(t - d/c) \int\limits_{\frac{|x - a_2|}{c}}^{t} u_{,x}(a_2, \tau) \, d\tau - \int\limits_{0}^{t} u_{,x}(a_1, \tau) \, d\tau \right\} + H(t - d/c) u\left(a_2, t - \frac{d}{c}\right) + \\ + H(t) u(a_1, t) + c^{-1} \int\limits_{a_1}^{a_2} \dot{u}_0(y) H(t - |a_1 - y| / c) dy + u_0(a_1 + ct) H_S^-(a_1 + ct) + \\ + u_0(a_1 - ct) H_S^-(a_1 - ct) \end{gathered}$$

($d = |a_1 - a_2|$).
Перенося слагаемое $-H(t)\,u(a_1,t)$ в левую часть, с учетом значения характеристической функции на границе, получим формулу теоремы для левой границы. Аналогичные рассуждения проводятся для $x = a_2$. В результате на концах отрезка (a_1,a_2) имеем следующие соотношения для определения неизвестных:

$$u(a_1,t) = cH(ct-d)\int\limits_{d/c}^{t} u_{,x}(a_2,\tau)\,d\tau - cH(t)\int\limits_{0}^{t} u_{,x}(a_1,\tau)\,d\tau + H(ct-d)\,u\left(a_2, t-\frac{d}{c}\right)+$$

$$+c^{-1}\int\limits_{a_1}^{a_2} \dot u_0(y)\,H(ct-|a_1-y|)dy + u_0(a_1+ct)\,H(d-ct)\,H(t) \quad \text{для } x = a_1;$$

$$u(a_2t) = cH(t)\int\limits_{0}^{t} u_{,x}(a_2,\tau)\,d\tau - cH(ct-d)\int\limits_{d/c}^{t} u_{,x}(a_1,\tau)\,d\tau + H(ct-d)\,u\left(a_1, t-\frac{d}{c}\right)+$$

$$+c^{-1}\int\limits_{a_1}^{a_2} \dot u_0(y)\,H(ct-|a_2-y|)dy + u_0(a_2-ct)\,H(d-ct)\,H(ct) \quad \text{для } x = a_2.$$

При заданных $u_{,x}(a_k,t)$, $k = 1,2$, получим два функциональных уравнения с запаздывающим аргументом для определения u на границе области, которые можно решать пошагово по времени, начиная с $t = 0$. При известных $u(a_1,t)$, $u(a_2,t)$ это уже система интегральных уравнений, где искомые производные стоят под знаком интеграла. Можно рассмотреть смешанную задачу, когда на одном конце известна функция, а на другом — ее производная. И в этом случае эта система уравнений является разрешающей.

Заключение. Полученные решения КЗ без доказательств анонсированы в [3, 4] в виде кратких сообщений (есть погрешности в знаках слагаемых). Здесь изложен сам метод обобщенных функций на примере КЗ для волнового уравнения. Используя его, можно строить аналогичные формулы и граничные интегральные уравнения для решения КЗ в пространствах большей размерности ($N > 3$). Особенно эффективен этот метод в краевых задачах для систем уравнений математической физики, когда удается построить матрицу Грина системы. При этом несущественен тип уравнений, он может быть и эллиптическим, как, например, в задачах стационарной дифракции электромагнитных волн [5] и в задачах теории упругости для дозвуковых бегущих нагрузок [6], параболическим или смешанного типа в задачах термоупругости [7]. Но особенно эффективен МОФ для решения гиперболических уравнений, где использование аппарата классического дифференцирования весьма затруднительно, а иногда и просто невозможно (см., например, [6, 8, 9]).

Исследование разрешимости построенных ГИУ, которые для задач с граничными условиями типа Неймана являются сингулярными, представляет самостоятельную задачу функционального анализа, поскольку построенные уравнения не относятся к хорошо изученным классическим. Однако, заметим, что использование вычислительных методов на основе методов граничного элемента с переходом к дискретным аналогам ГИУ, позволяет достаточно эффективно строить решения подобных ГИУ [10].

Цитированная литература

1. **Петровский И.С.** Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

2. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М., 1978.

3. **Алексеева Л.А.** // Дифференциальные уравнения. 1992. № 8.

4. **Алексеева Л.А.** //Дифференциальные уравнения.1995. Т.31, №11. С. 1951-1953.

5. **Алексеева Л.А.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000.Т.40, №4. С. 611-622.

6. **Alekseyeva L.A..** //Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998. №11. P.37-44 (UK, Oxford)

7. **Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.** // Прикладная математика и механика. 2001. Т.65, №2. С. 334-345.

8. **Алексеева Л.А.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т.42, №1. С. 76-88.

9. **Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K.** // Journal of the Mechanical Behaviour of Materials. 2004. №5. P. 16-21.

10. **Alexeyeva L.A., Dildabaev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakiryanova G.K.** // Int. J. Computational Mechanics. 1996. V.18, №2. P. 147-157.

Статья поступила 10 февраля 2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 33 — 46*

УДК 517.956, 517.968.2

ОСОБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА. 1. ОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, А. Е. Туймебаева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Рассматриваются вопросы разрешимости особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода и его сопряженного. Показано, что исследуемое уравнение является нетеровым, и его индекс равен 1. Полученные результаты использованы при изучении нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения в четверти плоскости.

Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию однородного интегрального уравнения по описанию характеристического и резольвентного множеств (пп. 1 и 2). Неоднородный случай и применение результатов к нелокальным задачам (пп. 3 и 4) составляет вторую часть работы.

Для всей работы использована сквозная нумерация формул, т.е. нумерация формул первой части продолжается во второй части.

1. Постановки задач. На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы разрешимости следующего интегрального уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{\tau} = f(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

и его сопряженного

$$\mathbf{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = g(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \le z < +\infty; \end{cases} \tag{3}$$

Keywords: *special integral equation, Volterra equation, spectrum*
2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

и данные уравнений:

$$\lambda \in \mathbb{C} - \text{спектральный параметр}, \ e^{-t}f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \ \ e^t g(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{4}$$

Решения уравнений (1) и (2) соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \ \ e^t\nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{5}$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает следующими свойствами:

1°. в замкнутом интервале $[0,1]$ ядро $k(z)$ неотрицательно и непрерывно;

2°. для каждого $z_0 \geq \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{z\to+z_0} \int\limits_{z_0}^{z} k(z)dz = 0$;

3°. норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\operatorname{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi \neq 0$.

Свойство 3° определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1), так как для него метод последовательных приближений неприменим!

Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2–4], задач с подвижной границей [5] и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

2. Однородные уравнения. Вначале исследуем соответствующее (1) однородное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Применяя к нему преобразование Меллина [6, с.161], с учетом теоремы о свертке, получим

$$\widehat{\mu}(s)\cdot[1-\lambda\widehat{k}(s)] = 0, \ \ s = s_1 + is_2,$$

где

$$\widehat{\mu}(s) = \int\limits_0^\infty \mu(\tau)\tau^{s-1}d\tau, \ \ \operatorname{Re} s < 1,$$

— изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1}dx, \ \ \operatorname{Re} s < 0. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 1. *Известно [7], что наличие и вид собственных функций интегрального уравнения (6) определяются наличием и количеством корней следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра* s :

$$1 - \lambda\widehat{k}(s) = 0, \ \ Re\, s < 0 \ \ (s = s_1 + is_2), \tag{8}$$

а именно:

1°. действительным однократным корням $s^{(k)}$ уравнения (8) отвечают собственные функции

$$\mu_k(t) = t^{s^{(k)}},$$

2°. комплексным однократным корням $s^{(k)} = s_1^{(k)} + is_2^{(k)}$ уравнения (8) отвечают пары собственных функций

$$\mu_k^1(t) = t^{s_1^{(k)}} \cdot \cos\left(s_2^{(k)} \ln t\right), \ \ \mu_k^2(t) = t^{s_1^{(k)}} \cdot \sin\left(s_2^{(k)} \ln t\right).$$

Общее решение однородного уравнения (6) представляет собой линейную комбинацию собственных функций этого уравнения.

Изучим вопрос о наличии корней уравнения (8).

Для этого сначала введем другое, отличающееся от (7), представление изображения $\hat{k}(s)$ ядра интегрального оператора из (6). Воспользуемся производящей функцией для многочленов Лагерра, а именно, равенством [8, с.190]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) z^n = (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right), \ \ |z| < 1, \tag{9}$$

здесь $L_n^{1/2}(x)$ — многочлены Лагерра порядка n. Если теперь в (9) положить $\alpha = 1/2$, $x = 1/4$, то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{1/2}(1/4) z^n = \exp(1/4) \frac{1}{(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right), \ \ |z| < 1.$$

Таким образом, используя предыдущее соотношение и (7), для изображения $\widehat{k}(s)$ получим следующее представление:

$$\widehat{k}(s) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}, \ \ \mathrm{Re}\, s < 0, \tag{10}$$

где для краткости обозначено

$$L_n = L_n^{1/2}(1/4).$$

Отметим, что ряд, стоящий в правой части равенства (10), сходится для любого фиксированного значения s, когда $\mathrm{Re}\, s < 0$. Это следует из интегрального представления функции $\widehat{k}(s)$ (7).

Используя формулу суммы ряда по многочленам Лагерра [8, с.213]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1} = e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x), \quad \alpha > -1, \ \ x > 0,$$

где $\Gamma(\alpha, x)$ – неполная гамма-функция, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n+1} = 2\sqrt{\pi} \exp(1/4) \cdot \mathrm{erfc}\,(1/2).$$

Откуда, в частности, имеем справедливость следующего равенства: $\widehat{k}(-1) = \mathrm{erfc}\,(1/2)$, которое можно получить и непосредственно из (7). Действительно, имеем

$$\widehat{k}(-1) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\,(1-z)}\right) dz =$$

$$= \left\| \xi = \frac{1}{2\sqrt{1-z}},\ d\xi = \frac{dz}{4(1-z)^{3/2}} \right\| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erfc}(1/2).$$

То есть уравнение (8) при $\lambda = (\operatorname{erfc}(1/2))^{-1/2}$ имеет корень $s = -1$, а это означает, что однородное интегральное уравнение (6) при указанном значении λ имеет собственную функцию вида $\mu(t) = t$.

Далее из интегрального представления функции $\widehat{k}(s)$ (7) непосредственно следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Если s — действительное число и $s < 0$, то функция $\widehat{k}(s)$ неотрицательна и монотонно возрастает при $s \in (-\infty, 0)$. Поэтому для действительных значений $s \in (-\infty, 0)$*

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s} > 0$$

и справедливы соотношения: $\lim\limits_{s\to-\infty} S(s) = 0+,\ \lim\limits_{s\to 0-} S(s) = +\infty.$

Для последующего изучения перепишем уравнение (8) в виде

$$1 = \lambda \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}$$

и, считая, что $\lambda \neq 0$, преобразуем его к виду

$$\frac{1}{\lambda_1 + i\lambda_2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1) - is_2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{n-s_1}{(n-s_1)^2 + s_2^2}\ , \qquad \frac{\lambda_2}{-s_2|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{1}{(n-s_1)^2 + s_2^2}. \tag{11}$$

Покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *При условии $Re\, s = s_1 < 0$ обе суммы, стоящие в правых частях равенств (11), положительны, т.е. $Re\,\lambda = \lambda_1 > 0$, а $Im\,\lambda = \lambda_2$ имеет знак, противоположный знаку $Im\, s = s_2$.*

Доказательство леммы 1. Предварительно рассмотрим следующую сумму:

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}, \tag{12}$$

считая временно параметр s действительным. Используя рекуррентную формулу для многочленов Лагерра [8, с.189]:

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0,$$

которая в нашем случае (при $\alpha = 1/2,\ x = 1/4$) принимает вид

$$L_n = \frac{8n-3}{4n} L_{n-1} - \frac{2n-1}{2n} L_{n-2}, \quad L_0 = 1, \quad L_1 = 1,25,$$

Рис. 1: График функции L_n (увеличенный масштаб)

можно вычислить значения коэффициентов L_n, $n = 2, 3, \ldots,$ в сумме (12). Например, значения этих коэффициентов при $n = 0, 1, 2, ..., 635$, приведены на графике (рис.1). Также можно отметить, что при вещественном α и фиксированном $x > 0$ мы имеем формулу [8, с.199]:

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(x/2)\, x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right),$$

откуда, считая $\alpha = 1/2$, $x = 1/4$, получим

$$L_n = a \sin\sqrt{n} + O\left(n^{-1/2}\right), \text{ где } a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(1/8). \tag{13}$$

Рассматривая значения коэффициентов L_n (рис.1), а также учитывая формулу (13), которая в нашем случае достаточно точно аппроксимирует эти значения (рис.2), заключаем, что коэффициенты L_n знакопостоянны на определенных промежутках значений n. Например, $L_n > 0$ для $n = 0, 1, 2, ..., 9$; $L_n < 0$ для $n = 10, 11, ..., 38$; $L_n > 0$ для $n = 39, 40, ..., 88$; $L_n < 0$ для $n = 89, 90, ..., 157$, и т.д. То есть $L_n > 0$, когда $\left[(2k\pi)^2\right] \leqslant n < \left[((2k+1)\pi)^2\right]$, $k = 0, 1, \ldots,$ и $L_n < 0$ при $[((2k+1)\pi)^2] + 1 \leqslant n < [((2k+2)\pi)^2]$, $k = 0, 1, \ldots$ Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.

Над суммой (12) проделаем следующие операции (вставляем скобки в сходящийся ряд!). Не меняя местами члены данного сходящегося ряда ($s < 0$), будем группировать отдельно положительные и отрицательные слагаемые, т.е. представим данный ряд в виде следующего знакопеременного ряда

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k(s), \tag{14}$$

где $a_k(s) > 0$, причем (здесь и далее принято обозначение $[x]$ — целая часть числа x. Например, $[(2k\pi)^2]$ есть целая часть числа $(2k\pi)^2$)

$$a_0(s) = \sum_{m=0}^{9} \frac{L_m}{m-s}, \quad a_{2k}(s) = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Рис. 2: Графики функций L_n и $a \cdot \sin\sqrt{n}$ (уменьшенный масштаб).

$$a_{2k+1}(s) = -\sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Далее опять, не меняя местами члены ряда (14), представим его в виде

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(s). \tag{15}$$

Для конечных значений k непосредственно, а для достаточно больших k, используя формулу (13) и лемму Абеля [9, с.306; 10, с.385], можно показать, что для любого фиксированного значения $s < 0$ либо все члены ряда (15) будут положительными (т.е. $b_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$), либо только конечное число первых слагаемых ряда будут отрицательными, и, начиная с некоторого слагаемого, все члены ряда будут опять положительными (см. ниже утверждение 2). Например, при $s = -39$ всего лишь первый член ряда отрицателен ($b_0 = -0,200769211$), а все остальные положительны, т.е. $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Докажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Для $s < 0$ ряд (12), сумма которого положительна, можно представить в виде ряда (15), в котором в зависимости от значения s только лишь конечное число первых членов могут быть отрицательными.*

Доказательство утверждения 2. Предварительно рассмотрим расходящийся ряд (см. рис.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{2k}^0 - a_{2k+1}^0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k^0 = -\infty,$$

где

$$a_{2k}^0 = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} L_m, \quad a_{2k+1}^0 = -\sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} L_m,$$

Рис. 3: Случай $s = -1$.

Рис. 4: Случай $s = -7, \ s = -40$.

$$b_k^0 > b_{k+1}^0,\ b_k^0 = a_{2k}^0 - a_{2k+1}^0 < 0\ \ \forall k = 0, 1, 2, ... \tag{16}$$

Далее возвращаемся к ряду (12), для которого с учетом его представления (15) будем иметь следующее (см.рис.3 и 4). Амплитуда "синусоид" в этом случае монотонно убывает (это явно видно и на рис.3 и 4). Но в зависимости от значения отрицательного числа s это убывание вначале относительно медленнее, чем в последующем. Именно за счет этого эффекта происходит переход значений b_k от отрицательных к положительным. Чем больше число $-s$, тем медленнее убывает амплитуда "синусоид" в начале изменения индекса m. Поэтому согласно (16) и в силу того, что $S(s) > 0\ \forall s < 0$, первые слагаемые b_k могут еще оставаться отрицательными, при этом их значения только возрастают. А это означает, что при определенном значении $m = m_0$ соответствующее значение b_{k_0} станет положительным. И для всех $k > k_0$ слагаемые b_k будут только положительными.

Для обоснования этого положения мы воспользуемся асимптотическим представлением L_n через $a \sin \sqrt{n}$ (13) (см.рис.2) и формулой суммирования Эйлера-Маклорена [9, с.550]:

$$\sum_{m=p}^{p+n_m} f_m = \int\limits_p^{p+n_m} f(x)dx - \frac{1}{2}\left\{f(p+n_m) - f(p))\right\} + \frac{1}{12}\left\{f'(p+n_m) - f'(p)\right\} -$$

$$-\frac{1}{720}\left\{f^{'''}(p+n_m) - f^{'''}(p)\right\} + \frac{1}{30240}\left\{f^{\text{v}}(p+n_m) - f^{\text{v}}(p)\right\} -$$

$$-\frac{1}{1209600}\left\{f^{\text{vii}}(p+n_m) - f^{\text{vii}}(p)\right\} + \ldots$$

В нашем случае, учитывая, что $f_m = \dfrac{L_m}{m-s} \approx \dfrac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s}$ для всех m, начиная с некоторого m_0 имеем

$$a_{2k}(s) = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s} \approx \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s} \approx 2\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{a\,x \sin\,x\,dx}{x^2-s} - O_1(k^{-1}), \tag{17}$$

где

$$O_1(k^{-1}) = \frac{a\,\pi}{6}\cdot\frac{16\pi^2k^3 + 12\pi^2k^2 + (2\pi^2-s)k - s}{\{((2k+1)\pi)^2+1\}\{(2k\pi)^2+1\}};$$

$$-a_{2k+1}(s) = \sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s} \approx \sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s} \approx$$

$$\approx 2\int\limits_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{a\,x \sin\,x\,dx}{x^2-s} + O_2((k+1)^{-1}), \tag{18}$$

и аналогично

$$O_2((k+1)^{-1}) = \frac{a\,\pi}{6}\cdot\frac{16\pi^2(k+1)^3 + 12\pi^2(k+1)^2 + (2\pi^2-s)(k+1) - s}{\{((2k+2)\pi)^2+1\}\{((2k+1)\pi)^2+1\}};$$

кроме того, имеем, что $O(k^{-2}) \equiv O_1(k^{-1}) - O_2((k+1)^{-1}) > 0$. Поэтому ясно, что имеет место следующее неравенство:

$$a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s) \le 2\left\{\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s} - \int\limits_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s}\right\} =$$

$$= 2 \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \frac{x^2 + \pi x - s}{\{x^2 - s\}\{(x+\pi)^2 - s\}}\, dx.$$

Отсюда получаем: существует такое положительное целое число ($[y]$ означает целую часть числа y) $k_0(s) = \left[-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{s}{4\pi^2}} \right]$ (соответствующее фиксированному значению отрицательного числа s), что разность $a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)$ подчиняется условию

$$\{a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)\} < 0, \text{ если } 0 \le k < k_0(s).$$

Таким образом, мы показали, что первые слагаемые ряда (15) могут иметь отрицательный знак. Это подтверждается и непосредственными вычислениями. Например, для $s = -1$ все слагаемые ряда (15) являются положительными, а для $s = -7$ и $s = -40$ — первое слагаемое, т.е. $b_0(-7) < 0$, $b_0(-40) < 0$.

С другой стороны, для достаточно больших k формулы (17) и (18) с любой требуемой точностью представляют числа $a_{2k}(s)$ и $a_{2k+1}(s)$. Поэтому для таких значений k имеем

$$\operatorname{sign} \{a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)\} = \operatorname{sign} \left\{ \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \frac{x^2 + \pi x - s}{\{x^2 - s\}\{(x+\pi)^2 - s\}}\, dx \right\}.$$

И знак интеграла в этой формуле будет "плюс", если $k \ge k_1$, где $k_1 -$ достаточно большое число. Таким образом, нами показано, что, начиная с некоторого значения индекса k, все слагаемые $b_k(s)$ будут положительными. Осталось учесть монотонность убывания амплитуд "синусоид" (см. рис.3 и 4), чтобы утверждать: ряд (15) может иметь конечное число первых отрицательных слагаемых, а остальные слагаемые будут только положительными.

Этим завершается доказательство утверждения 2.

Продолжим доказательство леммы 1. Для $s_1 < 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{n - s_1}{(n - s_1)^2 + s_2^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{n - s_1}{s_2} \right)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \begin{array}{c} \text{в силу утверждения 2} \\ \text{и леммы Абеля [10, с.385]} \end{array} \right\| \geqslant S(s_1) - S(s_1) \frac{1}{1 + \left(\dfrac{-s_1}{s_2} \right)^2} = S(s_1) \frac{\left(\dfrac{-s_1}{s_2} \right)^2}{1 + \left(\dfrac{-s_1}{s_2} \right)^2} \geqslant 0.$$

Отсюда и из первого из равенств (11) получаем, что $\lambda_1 > 0$.

Теперь покажем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n - s_1)^2 + s_2^2} \geqslant 0.$$

Учитывая, что

$$0 = 0 \cdot \frac{1}{-s_1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} \cdot \frac{1}{n - s_1} \leqslant S(s_1) \cdot \frac{1}{-s_1} \quad \text{(по лемме Абеля [10, с.385])},$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n - s_1)^2 + s_2^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n - s_1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n - s_1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{n - s_1}{s_2} \right)^2} \geqslant 0.$$

Поэтому заключаем что s_2 и λ_2 имеют противоположные знаки. Тем самым лемма 1 полностью доказана.

Из утверждения леммы 1 непосредственно следует

Предложение 1. *Для того, чтобы уравнение (8) имело корни $s^{(k)}$ с $Re\, s^{(k)} < 0$ необходимо, чтобы значение спектрального параметра λ принадлежало правой (комплексной) полуплоскости, т.е. $Re\,\lambda > 0$. Если же $Re\,\lambda < 0$, то уравнение (8) не будет иметь корней $s^{(k)}$ с $Re\, s_k < 0$.*

Теперь, предполагая, что $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, приступим к нахождению корней уравнения (8). При этом, прежде всего, выясним качественную картину расположения этих корней в комплексной плоскости.

Используя формулу (13), преобразуем первое из уравнений (11) к виду (здесь знак $\approx$ заменяется на знак $=$):

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\frac{-s_1}{(-s_1)^2+s_2^2} + \frac{e^{-1/8}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-s_1)\sin\sqrt{n}}{(n-s_1)^2+s_2^2}.$$

Далее, применяя формулу суммирования Эйлера – Маклорена [11, с.26] для этой формулы, получим

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\frac{-s_1}{(-s_1)^2+s_2^2} + \frac{2e^{-1/8}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin x\cdot(x^2-s_1)}{(x^2-s_1)^2+s_2^2}dx = \Big\|[12,\text{ с.}425]\Big\| =$$
$$= \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\frac{(-s_1)}{(-s_1)^2+s_2^2} + e^{-1/8}e^{-A}\cos B. \quad (19)$$

Аналогично, для второго уравнения из (11) имеем

$$\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} = -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\frac{s_2}{(-s_1)^2+s_2^2} + \frac{s_2e^{-1/8}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{(n-s_1)^2+s_2^2} =$$
$$= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\frac{s_2}{(-s_1)^2+s_2^2} + \frac{2s_2e^{-1/8}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin x}{(x^2-s_1)^2+s_2^2}dx =$$
$$= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s_2}{(-s_1)^2+s_2^2} + e^{-1/8}e^{-A}\sin B. \quad (20)$$

В равенствах (19), (20) использованы обозначения [12, с.424]:

$$\left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\sqrt{(-s_1)^2+s_2^2}+(-s_1)}{2}} = \sqrt{\frac{|-s|+(-s_1)}{2}}, \\ B &= \sqrt{\frac{\sqrt{(-s_1)^2+s_2^2}-(-s_1)}{2}} = \sqrt{\frac{|-s|-(-s_1)}{2}}\,. \end{aligned}\right. \quad (21)$$

Таким образом,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} &= \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{-s_1}{|-s|^2} + e^{-(A+1/8)}\cos B, \\ \frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} &= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{s_2}{|-s|^2} + e^{-(A+1/8)}\sin B. \end{aligned}\right. \quad (22)$$

Здесь величины A, B определяются согласно равенств (21).

Заметим, что в равенствах (22) при достаточно малых $|\lambda|$ роль главных частей выполняют, соответственно, слагаемые

$$\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-s_1}{|-s|^2}, \qquad -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{|-s|^2}.$$

Таким образом, при достаточно малых $|\lambda|$ имеем

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} \approx \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-s_1}{|-s|^2}, \qquad -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} \approx \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{|-s|^2}. \tag{23}$$

Из соотношений (23) получаем

$$|-s| \approx (2\sqrt{\pi}e^{1/4})^{-1} \cdot |\lambda|, \qquad \arg(-s) \approx -\arg\lambda,$$

или же искомыми корнями уравнения (8) будут

$$s_1^* \approx -\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\pi}e^{1/4}}, \qquad s_2^* \approx -\frac{\lambda_2}{2\sqrt{\pi}e^{1/4}}. \tag{24}$$

Если же $|\lambda|$ достаточно большое (например, $|\lambda| > \exp(1/8 + \pi/4)$), то в равенствах (22) роль главных частей выполняют, соответственно, слагаемые

$$e^{-(A+1/8)} \cos B, \qquad e^{-(A+1/8)} \sin B.$$

Таким образом, из (22) вытекает справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} \approx e^{-(A+1/8)} \cos B, \qquad -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} \approx e^{-(A+1/8)} \sin B. \tag{25}$$

Второе уравнение из (25) умножим на $-i$ и, складывая полученный результат с первым уравнением, получим (здесь мы заменили знак $\approx$ на $=$)

$$\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{|\lambda|^2} = e^{-(A+1/8)-iB}. \tag{26}$$

Логарифмируя обе части уравнения (26) и учитывая, что $\mathrm{Re}\lambda > 0$ (выбрана однозначная ветвь логарифма такая, что $\ln 1 = 0$), будем иметь $\ln\dfrac{\lambda}{|\lambda|^2} = -A - \dfrac{1}{8} - iB$.

Проведя некоторые преобразования в левой части полученного соотношения

$$\ln\frac{\lambda}{|\lambda|^2} = \ln\lambda - 2\ln|\lambda| = \ln|\lambda| + i\arg\lambda - 2\ln|\lambda| = -\ln|\lambda| + i\arg\lambda,$$

получаем

$$-\ln|\lambda| + i\arg\lambda = -(A + 1/8) - iB.$$

Приравнивая действительные и мнимые части этого выражения, получим следующую систему соотношений:

$$A = \ln(e^{-\frac{1}{8}} \cdot |\lambda|), \quad B = -\arg\lambda. \tag{27}$$

Пусть параметр λ задан и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Тем самым будут заданы величины A и B. Отсюда с учетом равенств (27) находим

$$-s_1 = A^2 - \frac{s_2^2}{4A^2}, \quad -s_1 = \frac{s_2^2}{4B^2} - B^2. \tag{28}$$

Рис. 5: Точки пересечения парабол (28) определяют корни $s^* = s_1^* \pm is_2^*$ (29)

Таким образом, искомые корни $s^* = s_1^* + is_2^*$ уравнения (8) являются точками пересечения парабол (28) (см.рис.5), или же, учитывая (27),

$$s_1^* = -\ln^2\left(e^{-1/8} \cdot |\lambda|\right) + \arg^2\lambda; \qquad s_2^* = -2\ln\left(e^{-1/8} \cdot |\lambda|\right) \cdot \arg\lambda. \tag{29}$$

Из соотношений (25) и (29) следует справедливость

Утверждение 3. *Каждому $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\lambda > 0\}$ соответствует единственный корень s уравнения (8), для которого $Re\,s < 0$. При $Re\,\lambda = 0$ и $Im\,\lambda \neq 0$ корень s уравнения (8) будет удовлетворять условиям $Re\,s = s_1 = 0$ и $Im\,s = s_2 \neq 0$. Если же $\lambda \to 0$, то и корень уравнения (8) $s \to 0$. В частности, каждому действительному значению $\lambda \in \mathbb{R}_+$ соответствует единственный действительный корень $s \in \mathbb{R}_+$ уравнения (8).*

Итак, факт о существовании и виде собственных функций интегрального оператора в уравнении (6) показывает следующее предложение.

Предложение 2. *Если $Re\,\lambda \geqslant 0$, то однородное интегральное уравнение (6) имеет собственные функции вида*

$$\mu_*(t) = t^{-s^*},$$

где s^* является корнем уравнения (8)

$$1 - \lambda\widehat{k}(s) = 0.$$

Если же $Re\,\lambda < 0$, то однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение.

Сформулируем полученный результат применительно к спектральной задаче для интегрального уравнения (6).

Теорема 1. *Для интегрального оператора $\mathbf{K}$ из (6) множество $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda|\, \lambda \in \mathbb{C}, Re\,\lambda \geq 0\}$ является множеством характеристических чисел, а $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ — резольвентным множеством.*

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения для уравнения (2):

$$\nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{30}$$

Если в уравнении (30) произвести замены: $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = \nu(t_1^{-1})$, то (30) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right) \nu_1(\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т.е. оно совпадает с интегральным уравнением (6), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Итак, мы установили

Предложение 3. *Однородное интегральное уравнение (30)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $Re\, \lambda < 0$, *имеет только тривиальное решение. Если же* $Re\, \lambda > 0$, *то однородное интегральное уравнение (30) имеет одну собственную функцию вида* $\nu_{2s^{(0)}}(t) = t^{s^{(0)}}$, *где* $s^{(0)}$*– корень трансцендентного уравнения (7), причем* $Re\, s^{(0)} < 0$. *А это означает, что однородное сопряженное уравнение (30) имеет собственные функции только вида* $\nu_{s^{(0)}}(t) = e^t t^{s_0}$, $Re\, s_0 < 0$, *которые, очевидно, не принадлежат пространству* $L_\infty(\mathbb{R}_+)$. *Таким образом, в пространстве* $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ *однородное интегральное уравнение (30)* $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ *имеет только тривиальное решение.*

Сформулируем полученный результат применительно к спектральной задаче для интегрального уравнения (2).

Теорема 2. *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}^*$ *из (2) вся комплексная плоскость является резольвентным множеством.*

Цитированная литература

1. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е.** Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40с.

2. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.

3. **Дженалиев М.Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

4. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.** // Материалы межд. Российско - Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа и информатики". Нальчик, 2004. С. 62 – 65.

5. **Харин С.Н.** Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения. Автореферат дис.... канд.физ.-матем.н. Алма-Ата, 1968.

6. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения. М., 1975.

7. **Полянин А.Д., Манжиров А.В.** Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.

8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т.2. М., 1974.

9. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1969.

10. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.** Математический анализ. М., 1979.

11. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М., 1979.

12. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила в редакцию 03.04.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 47 – 53*

УДК 518.9

МАТРИЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ МНОЖЕСТВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ

С.Н. Амиргалиева

Казахстанско-Британский технический университет
Алматы, пр.Толе-Би, 59 s.amirgalieva@kbtu.kz

В данной работе рассматриваются некоторые результаты о матрично-выпуклых множествах для конечного и бесконечного семейства операторов, с помощью которых конструктивно строятся стратегии игроков в дифференциальных играх

В данной статье изучаются матрично-выпуклые множества для конечного и бесконечного семейства операторов.

Необходимость изучения матричной выпуклости [1] возникла в теории управления и дифференциальных игр. С помощью матричной выпуклости удается описать достаточно широкий класс дифференциальных игр [2], в которых относительно конструктивно строятся стратегии игроков. При этом основное внимание уделяется изучению тех свойств матричной выпуклости, которые требуются для теории дифференциальных игр [2, 3].

В общем случае матрично-выпуклые объекты не обязаны быть выпуклыми в обычном скалярном смысле. Однако при определенных предположениях классы матрично-выпуклых объектов являются подклассами скалярно-выпуклых объектов. Показано, что в достаточно общем случае матрично-выпуклые множества являются H -выпуклыми [4]. Следует отметить, что H -выпуклые множества хорошо изучены и относительно конструктивно описываются в ряде конкретных примеров [3]. Таким образом, для каждого набора матриц, определяющих выпуклость, строится подкласс выпуклых множеств.

Пусть E^n – n-мерное евклидово пространство. В этих обозначениях E^1– обычная числовая ось. Для $x, y \in E^n$ под $\langle x, y\rangle$ будем понимать скалярное произведение; $\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ – норма оператора $x \in E^n$. Норму линейного оператора A, действующего в E^n, будем понимать в обычном смысле:

$$\|A\| = \sup_{x\in M} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Через E будем обозначать тождественный оператор, который задается матрицей $diag\{1, \ldots, 1\}$.

Координаты вектора x будем обозначать $(x^1, \ldots, x^n)$ с индексами вверху. В более общем виде вектор x можно представить следующим образом. Пусть n_i – целые числа такие, что $n_1 + \ldots + n_k = n$. Тогда $x = (x^1, \ldots, x^k)$, где $x^1 \in E^{n_1}, \ldots, x^k \in E^{n_k}$, то есть x^i– это не числа, а некоторые векторы меньшей размерности.

Keywords: *differential game, strategy of player, matrix convexity, infinite family of operators*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

Напомним традиционное определение скалярно-выпуклого множества.

Определение 1. *Множество $M \subset E^n$ называется выпуклым, если для любых $x, y \in M$ и любых чисел $\lambda_i \geq 0$ таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется равенство*

$$\lambda_1 M + \lambda_2 M = M. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть λ_1 и λ_2 – фиксированные положительные числа такие, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Замкнутое множество M является выпуклым тогда и только тогда, когда выполняется равенство (1).*

Если M незамкнуто, то лемма 1 неверна [5].

Рассмотрим матричную выпуклость множеств в терминах [1]. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что M – замкнутое множество.

Пусть A, B – линейные операторы, действующие в E^n такие, что $A + B = E$. Семейство этих операторов обозначим через $\Re$, $\Re = \{A, B\}$.

Определение 2. *Множество $M \subset E^n$ называется $\Re-$ выпуклым, если*

$$AM + BM = M. \tag{2}$$

Определение 2 отличается от определения 1 тем, что здесь вместо скаляров λ_1 и λ_2 берутся линейные операторы, которые в конкретных базисах представляются матрицами. Такую выпуклость, естественно, будем называть матричной, а обычную – скалярной. Если $A = \lambda_1 E$, $B = \lambda_2 E$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$, то определение 2, в силу леммы 1 является определением обычной, скалярной выпуклости. Отметим, что равенству (2) могут удовлетворять скалярно-выпуклые множества.

Пример 1. Рассмотрим двумерное пространство $E^2 = \{x = (x^1, x^2), x^i \in E^1\}$. Пусть линейные операторы A, B задаются следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество M имеет вид

$$M = \{(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)\}.$$

Данное множество состоит из четырех точек, которые являются вершинами квадрата.

Матрица A переводит точки $(0,1)$ и $(1,1)$ в точки $(0,0)$ и $(1,0)$, соответственно, оставляя последние на месте. Отсюда $AM = \{(0,0); (1,0)\}$. Аналогично $BM = \{(0,0); (0,1)\}$. Нетрудно видеть, что $AM + BM = \{(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)\} = M$. Таким образом, построен пример невыпуклого множества, удовлетворяющего при определенных A и B равенству (2). Поскольку определение 2 является обобщением обычной выпуклости, то возникает вопрос: при каких условиях равенство (2) гарантирует скалярную выпуклость.

Теорема 1. *Пусть $\|A - B\| < 1$. Тогда из равенства (2) следует скалярная выпуклость множества M [5].*

Замечание. *Заметим, что в случае $A = \lambda_1 E$, $B = \lambda_2 E, \lambda_1, \lambda \in [0, 1]$, условие $\|A - B\| < 1$ превращается в условие $|\lambda_1 - \lambda_2| < 1$, которое означает, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Последнее условие согласуется с леммой 1.*

Изучим класс $\Re$ – выпуклых множеств. Приведем необходимые и достаточные условия $\Re$ – выпуклости.

С каждым множеством $M \subset E^n$ можно связать опорную функцию, определенную для всех $x^* \in E^n$

$$W_M(x^*) = \sup_{x \in M} \langle x, x^* \rangle.$$

Положим

$$M(x^*) = \{x \in M : \langle x, x^* \rangle = W_M(x^*)\}.$$

По определению множество $M(x^*)$ либо пусто, либо на его точках достигается данный супремум. Отметим, что в случае x^* естественно считать, что $M(0) = M$.

Под A^* будем понимать оператор, сопряженный к A. По определению для любых $x, x^* \in E^n$:

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, Ax^*x^* \rangle.$$

Матрица, соответствующая $A(x^*)$, является транспонированной к матрице, соответствующей A.

Теорема 2. *Для выполнения равенства (2) необходимо, чтобы для всех $x^* \neq 0$ выполнялись включения*

$$M(x^*) \subset M(A^*x^*), \quad M(x^*) \subset M(B^*x^*). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим опорную функцию левой части (2)

$$W_{AM+BM}(x^*) = sup\{\langle x, x^* \rangle : x \in AM + BM\} =$$

$$= sup\{\langle Ax + By, x^* \rangle : x, y \in M\} = sup\{\langle x, A^*x^* \rangle + \langle y, B^*x^* \rangle : x, y \in M\} =$$

$$= \sup_{x \in M} \{\langle x, A^*x^* \rangle + \sup_{x \in M} \langle y, B^*x^* \rangle = W_M(A^*x^*) + W_M(B^*x^*).$$

Из (2) следует, что $W_M(A^*x^*) + W_M(B^*x^*) = W_M(x^*)$. Отсюда, и из очевидного равенства $x^* = (A^* + B^*)x^*$ вытекает, что для всех $x \in M(x^*)$

$$\sup_{y \in M} \langle y, A^*x^* \rangle + \sup_{y \in M} \langle y, B^*x^* \rangle - \langle x, (A^* + B^*)x^* \rangle = 0$$

или

$$\left[\sup_{y \in M} \langle y, A^*x^* \rangle - \langle x, A^*x^* \rangle\right] + \left[\sup_{y \in M} \langle y, B^*x^* \rangle - \langle x, B^*x^* \rangle\right] = 0. \tag{4}$$

Каждое из выражений в квадратных скобках неотрицательно. Поэтому из (4) вытекает, что

$$\sup_{y \in M} \langle y, A^*x^* \rangle = \langle x, A^*x^* \rangle, \quad \sup_{y \in M} \langle y, B^*x^* \rangle = \langle x, B^*x^* \rangle,$$

и, следовательно, $x \in M(A^*x^*)$ и $x \in M(B^*x^*)$, что и доказывает теорему.

Под полупространством понимается множество вида $\{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq c\}$. Полупространство определяется вектором x^* и числом c.

Известно, что каждое выпуклое множество представимо в виде пересечения полупространств:

$$M = \bigcap_{x^* \in H(M)} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq c(x^*)\}, \tag{5}$$

где $H(M)$ – некоторое множество ненулевых векторов из E^n , $c(x^*)$ – число, возможно, равное $+\infty$.

Лемма 2. *Пусть множество M представимо в виде*

$$M = \bigcap_{\alpha \in a} \left\{ x \in E^n : f_\alpha(x) \le 0 \right\},$$

где $\{f_\alpha\}$ – множество выпуклых функций, a – произвольное множество индексов; для некоторого α_0 справедливо неравенство $f_{\alpha_0} < 0$ для любого $x \in M$. Обозначим $a_0 = a \setminus \{\alpha_0\}$ и положим

$$M_0 = \bigcap_{\alpha \in a_0} \left\{ x : f_\alpha(x) \le 0 \right\}.$$

Тогда $M = M_0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое $x_0 \in M_0$, что $x \notin M$. Поскольку для любого $\alpha \in a_0$ выполняется $f_\alpha(x_0) \le 0$, то выражение $x \notin M$ означает, что $f_{\alpha_0}(x_0) > 0$. Поскольку в силу выпуклости функции f_α непрерывны, то множество M замкнуто. Следовательно, существует $x_1 \in M$, ближайшая к x_0. Рассмотрим точку $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$. Поскольку x_1– ближайшая к x_0, то $x_\lambda \not\in M$ для всех $\lambda \in [0,1)$. Из выпуклости M_0 следует, что $x_\lambda \in M_0$ для $\lambda \in [0,1]$. Функция $g(\lambda) = f_{\alpha_0}(x_\lambda)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Кроме того, $g(0) > 0$, а из условия леммы $g(1) < 0$. Отсюда следует существование такого $\lambda_0 \in (0,1)$, что $g(\lambda_0) = 0$, то есть $f_{\alpha_0}(x_{\lambda_0}) = 0$. Сопоставляя данное равенство с включением $x_{\lambda_0} \in M_0$, получаем, что для любого $\alpha \in a f_\alpha(x_{\lambda_0}) \le 0$, то есть $x_{\lambda_0} \in M$. Но поскольку $\lambda_0 < 1$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть множество M представимо в виде (5). Тогда для выполнения равенства (2) достаточно, чтобы для всех $x^* \in H(M)$ выполнялись включения (3).*

Доказательство. Пусть $x^* \in H(M)$. Из леммы 2 следует, что достаточно рассмотреть случай $M(x^*) \neq \varnothing$. Тогда существует $x \in M(x^*)$ такое, что

$$\sup_{y \in M} \langle y, A^* x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle, \qquad \sup_{y \in M} \langle y, B^* x^* \rangle = \sup_{y \in M} \langle y, B^* x^* \rangle.$$

Отсюда следует справедливость равенства (4) и, значит,

$$W_{AM+BM}(x^*) = sup\{\langle y, x^* \rangle : y \in AM + BM\} = \langle x, (A^* + B^*)x^* \rangle \le$$

$$\le \sup_{x \in M} \langle x, x^* \rangle \le c(x^*).$$

Последнее неравенство означает, что левая часть (2) включается в правую. Обратное включение очевидно. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 дают некоторое описание класса H – выпуклых множеств. Однако это описание недостаточно наглядно. Приведенные ниже результаты дают более конструктивное описание $\Re$ – выпуклости в терминах H — выпуклости [3].

Определение 3 . Пусть H — подмножество единичной сферы пространства E^n, то есть $H \subset \{x^* \in E^n : \|x^*\| = 1\}$. Множество M называется H — выпуклым, если оно представимо в виде

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \left\{ x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \le c(x^*) \right\}, \tag{6}$$

где число $c(x^*)$ может принимать значение, равное $+\infty$.

Свяжем множество H с операторами A и B. Будем обозначать через H множество единичных $x^* \in E^n$, для которых выполняются условия:

а) $A^* x^* = \lambda_A(x^*) x^*, \quad B^* x^* = \lambda_B(x^*) x^*$, б) числа $\lambda_A x^*, \lambda_B x^*$ неотрицательны.

Таким образом, векторы $x^* \in H$ являются собственными векторами операторов A^*, B^* с неотрицательными собственными числами.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что H– определенное таким образом множество.

Теорема 4. *Пусть множество M является $\Re$ – выпуклым и скалярно–выпуклым множеством и $intM \neq \varnothing$. Тогда M является H – выпуклым множеством.*

Доказательство. Известно, что для выпуклого множества, если $x_0 \in \partial M$, то в любой окрестности x_0 существует точка $x_1 \in \partial M$ такая, что в ней конус нормальных направлений натянут на один вектор. Обозначим этот вектор через $n(x_1)$ и считаем, что $\|n(x_1)\| = 1$.

Предположим, что M не является H – выпуклым множеством и рассмотрим множество

$$M_1 = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq W_M(x^*)\}.$$

Множество M_1 является H – выпуклой оболочкой M. Поскольку $M \neq M_1$, то существует точка $x_0 \in \partial M$ такая, что $x_0 \in intM_1$. Действительно, если бы такой точки не существовало, то $intM = intM_1$ и в силу замкнутости M и M_1 эти множества совпадали бы.

Выше было отмечено существование точки $x_1 \in \partial M \bigcap intM_1$, для которой конус нормалей натянут на один вектор. Это означает, что если $x_1 \in M(x^*)$, то $x^* = \lambda_0 n(x_1)$ для некоторого $\lambda_0 > 0$. Ясно, что $n(x_1) \notin H$. Из определения H следует, что $n(x_1)$ не может быть собственным вектором операторов A^* и B^* с неотрицательными собственными числами. Пусть для определенности $A^* n(x_1) \neq \lambda n(x_1)$ для $\lambda \geq 0$. Это означает, что $A^* n(x_1)$ не принадлежит конусу нормалей в точке x_1 и, значит, $x_1 \notin M(A^* n(x_1))$. Таким образом, нарушаются необходимые условия теоремы 2. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 5. *Пусть M — H – выпуклое множество. Тогда M — $\Re$ – выпуклое множество.*

Доказательство данной теоремы вытекает из теоремы 3, если положить $H(M) = H$.

1. Матричная выпуклость для конечного семейства операторов.

Обобщим результаты на случай нескольких операторов. Пусть $\Re_k = \{A_1, \ldots, A_1\}$ — семейство линейных операторов, действующих в E^n таких, что $A_1 + \ldots + A_1 = E$.

Определение 4. *Множество $M \subset E^n$ называется $\Re_k$–выпуклым, если*

$$A_1 M + A_2 M + \ldots + A_k M = M. \tag{7}$$

Пусть $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ $(1 \leq m \leq k)$ – некоторый набор операторов из $\Re_k$. Положим $A = A_{i_1} + \ldots + A_{i_m}, B = E - A$.

Лемма 3. *Пусть M — $\Re_k$ – выпуклое множество. Тогда M — $\Re$ – выпуклое множество, где как и выше $\Re = \{A, B\}$.*

Доказательство. Пусть $A_{i_{m+1}}, \ldots, A_{i_k}$ – остальные операторы из $\Re_k$. Тогда $B = A_{i_{m+1}} + \ldots + A_{i_k}$. Рассмотрим произвольные $x, y \in M$. Поскольку M– $\Re$– выпукло, то

$$Ax + By = A_{i_1} x + \ldots + A_{i_m} + A_{i_{m+1}} y + A_{i_k} y,$$

что и доказывает $\Re$– выпуклость M.

Теорема 6. *Пусть для некоторого набора $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ операторов из $\Re_k$ выполняется неравенство $\|E - 2(A_{i_1} + \ldots + A_{i_m})\| < 1$. Тогда $\Re_k$– выпуклое множество является скалярно-выпуклым.*

Доказательство. Положим $A = A_{i_1} + \ldots + A_{i_m}$, $B = E - A$. Из леммы 3 следует, что если $M - \Re_k$ – выпукло, то $M - \Re$ – выпуклое множество. Из условия теоремы следует, что $\|A - B\| = \|E - 2A\| < 1$. Применяя теорему 1, получаем скалярную выпуклость M.

Будем обозначать H_k– множество таких единичных векторов $x^* \in E^n$, для которых выполняются условия:

а) $A_i^* x^* = \lambda_i(x^*) x^*$, $i = 1, \ldots, k$; б) числа $\lambda_i(x^*) \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Теорема 7. *Пусть M является $\Re-$выпуклым и скалярно-выпуклым множеством и $intM \neq \varnothing$. Тогда M является H – выпуклым множеством.*

Теорема 8. Пусть M – H_k– выпуклое множество. Тогда M – $\Re$– выпукло.

2. Матричная выпуклость для бесконечного семейства операторов.

Обобщим результаты предыдущего пункта на случай бесконечного числа операторов. Положим $\Re_\infty = \{A(t), t\in[0,1]\}$, где $A(t)$ – линейный оператор, действующий в E^n. Предполагаем, что $\Re_\infty$ – ограниченное и измеримое семейство операторов и $\int\limits_0^1 A(t)dt = E$.

Определение 5. *Множество M называется $\Re_\infty-$выпуклым, если*

$$\int\limits_0^1 A(t)Mdt = M, \tag{8}$$

где

$$\int\limits_0^1 A(t)Mdt = \bigcup_{x(\cdot)} \left\{ \int\limits_0^1 A(t)x(t)dt \right\},$$

причем объединение берется по всем измеримым ограниченным отображениям $x(\cdot)$ таким, что $x(t) \in M$ для всех $t \in [0,1]$.

Пусть $\Omega_i, i = 1, \ldots, k$ – набор измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$ такой, что $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^k \Omega_i = [0,1]$. Положим $A_i = \int\limits_{\Omega_i} A(t)x(t)dt, \Re_k = \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Лемма 4. *Пусть M — $\Re_\infty$– выпуклое множество. Тогда M — $\Re_k$– выпукло.*

Доказательство. Пусть $x_i\in M$– произвольные точки, $i = 1, \ldots k$. Положим $x(t) = x_i, t\in\Omega_i$. Из $\Re_\infty$– выпуклости следует, что

$$\sum_{i=1}^k A_i x_i = \int\limits_0^1 A(t)x(t)dt \in M,$$

что и означает $\Re_k$– выпуклость M. Лемма доказана.

Будем обозначать через H_∞ множество всех таких единичных векторов $x^*\in E^n$, для которых для почти всех $t \in [0,1]$ выполняются условия:

а) $A^*(t)x^* = \lambda(t|x^*)x^*$, б) числа $\lambda(t|x^*) \geq 0$.

Лемма 5. *Пусть M — $\Re_\infty$– выпуклое множество, тогда оно скалярно выпуклое.*

Доказательство. Из [5] следует, что $\int\limits_0^1 A(t)Mdt$– выпуклое множество. Отсюда и из (8) вытекает выпуклость M.

Теорема 9. *Пусть M является $\Re_\infty$ — выпуклым множеством и $intM \neq \varnothing$. Тогда M - H_∞ — выпуклое множество.*

Доказательство. Положим

$$A_{t_1,t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} A(t)dt, \quad B_{t_1,t_2} = E - A_{t_1,t_2}, \quad \Re_{t_1,t_2} = \{A_{t_1,t_2}, B_{t_1,t_2}\},$$

где $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$.

Из леммы 4 следует, что M — $\Re_{t_1,t_2}$– выпуклое множество.

Обозначим

$$H_{t_1,t_2} = \{x^* \in \partial S : A^*(t_1,t_2)x^* = \lambda_{t_1,t_2}(x^*)x^*, \quad \lambda_{t_1,t_2}(x^*) \geq 0\}.$$

Поскольку для $x^* \in H_\infty$

$$\lambda_{t_1,t_2}(x^*) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda(t|x^*)dt,$$

то $H_\infty \subset H_{t_1,t_2}$.

Так как M — $\Re_{t_1,t_2}$– выпуклое множество, то по теореме 4 M — H_{t_1,t_2}– выпукло. Покажем, что

$$H_\infty = \bigcap_{t_1,t_2\in[0,1]} H_{t_1,t_2}.$$

Это и будет обозначать H_∞– выпуклость M.

Пусть $t \in [0,1]$ – произвольное число, $\Delta t > 0$ такое, что $t + \Delta t \in [0,1]$. Предположим, что для любого $\Delta t > 0$ $x^* \in H_{t,t+\Delta t}$, а значит, выполняется равенство

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} A^*(\tau)d\tau x^* = \lambda_{t,t+\Delta t}(x^*)x^*,$$

где $\lambda_{t,t+\Delta t}(x^*) \geq 0$.

Предел при $\Delta t \to 0$ в левой части существует для почти всех $t \in [0,1]$. Поэтому, переходя к пределу, получаем, что для почти всех t

$$A^*(t)x^* = \lambda(t|x^*)x^*, \quad \lambda(t|x^*) \geq 0.$$

Отсюда следует, что $x^* \in H_\infty$. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть M — H_∞– выпуклое множество. Тогда M — $\Re_\infty$– выпукло.*

Таким образом, описан аппарат матричной выпуклости для конечного и бесконечного семейства операторов, который используется для конструктивного описания стратегии игроков в дифференциальных играх и их приложениях.

Цитированная литература

1. **Остапенко В.В.** // Украинский математический журнал. 1995. Т.47, №11.

2. **Остапенко В.В.** // Обозрение прикл. и промышл. математики. 1995. №1. С. 43-48

3. **Солтан В.П.** Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев, 1984.

4. **Остапенко В.В., Остапенко Е.В., Амиргалиева С.Н.** // Наукові вісті/ 2003. №4. С. 140-144.

5. **Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.** Выпуклый анализ и дифференциальные игры, Алматы, 2005.

6. **Роккафеллар Т.** Выпуклый анализ, М., 1973.

Поступила в редакцию 22.09.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 54 –60*

УДК 517.929

О РАЗДЕЛИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.А. Ахметжанов

Таразский государственный педагогический институт
484000 Тараз, ул.Толеби, 62 madiktz@mail.ru

При некоторых ограничениях на коэффициенты доказаны теоремы о существовании резольвенты и разделимости одного класса дифференциальных операторов гиперболического типа.

1. Формулировка основных результатов

Известно, что для дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае неограниченной области задачи о гладкости, оценка решений в различных нормах хорошо изучены и выяснены типичные трудности [1 – 4].

Обзор литературы показывает, что вышеуказанные вопросы для дифференциальных уравнений гиперболического типа в некомпактной области еще недостаточно изучены.

Рассмотрим дифференциальный оператор гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u \tag{1}$$

на множестве $C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$, где $\Omega = \{(x,y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$.

$C^{\infty}_{0,\pi}(\Omega)$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y),\ u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y).$$

и финитных по переменной y.

Предположим, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ удовлетворяют условиям:

i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, $c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $R = (-\infty, \infty)$;

ii) $\mu = \sup\limits_{|y-t|\leq 1} \dfrac{a(y)}{a(t)} < \infty$, $\mu_1 = \sup\limits_{|y-t|\leq 1} \dfrac{c(y)}{c(t)} < \infty$;

iii) $c(y) \leq c_0 a^2(y)$ при $y \in R$, c_0 – постоянное число.

Справедливы следующие теоремы

Keywords: *division, hyperbolic operator, resolvent*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J20

Теорема 1. *Пусть выполнены условия i). Тогда оператор $L+\lambda E$ при достаточно больших $\lambda>0$ непрерывно обратим.*

Определение 1. *Будем говорить, что оператор L разделим, если для всех функций $u\in D(y)$ имеет место оценка*

$$||u_{xx}-u_{yy}||_2+||a(y)u_x||_2+||c(y)u||_2\le c\left(||Lu||_2+||u||_2\right),$$

где c не зависит от $u(x,y)$, $\|\cdot\|_2$ – норма $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия i) - iii). Тогда оператор L разделим.*

2. Вспомогательные леммы и весовые оценки

В этом пункте доказывается существование резольвенты дифференциального оператора

$$l_n^-u=-u^{''}+(-n^2+ina(y)+c(y))u$$

в $L_2(R)$.

Рассмотрим оператор

$$(l_{n,j}^-+\lambda E)=-u^{''}+(-n^2+ina(y)+c(y)+\lambda)u,\quad (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

определенный на множестве функций u, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$u\in C_0^2(\overline{\triangle}_j),\quad u(\triangle_j^-)=u(\triangle_j^+)=0.$$

Здесь $\triangle_j^-$ и $\triangle_j^+$ – правые и левые концы интервалов $\triangle_j$, $\quad\triangle_j=(j-1,j+1)$.

Лемма 1. *. Пусть выполнено условие i). Тогда при $\lambda>0$ существует непрерывный обратный $(l_{n,j}^-+\lambda E)^{-1}$, определенный в $L_2(\triangle_j)$, где $(l_{n,j}^-+\lambda E)^{-1}$– обратный оператор к замкнутому оператору $l_{n,j}^-+\lambda E$.*

Эта лемма доказывается точно так же, как лемма 1 [5].

Лемма 2. *Пусть выполнено условие i). Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\left\|(l_{n,j}^-+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{c}{\lambda^{1/2}};\tag{2}$$

$$\left\|\frac{d}{dy}(l_{n,j}^-+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{c}{\lambda^{1/4}},\tag{3}$$

где $c>0$ – постоянное число, $\lambda>0$.

Доказательство. Составим скалярное произведение

$$\left|<(l_{n,j}^-+\lambda E)u,u>\right|=\left|\int\limits_{\triangle_j}|u^{'}|^2dy+\int\limits_{\triangle_j}\left(-n^2+ina(y)+c(y)+\lambda\right)|u|^2\,dy\right|.\tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что $a(y)$ не меняет знак, имеем

$$\left\|(l_{n,j}^-+\lambda E)u\right\|_2^2\ge n^2\left[\min_{y\in\triangle_j}|a(y)|\right]^2||u||_2^2.\tag{5}$$

Из (4), используя неравенство Коши и учитывая условие i), находим

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|(l^-_{n,j}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\triangle_j}\left[|u^{'}|^2+(c(y)+\lambda)\,|u|^2\right]dy-\int\limits_{\triangle_j}n^2|u|^2dy. \tag{6}$$

Объединяя неравенства (5) и (6), получаем, что

$$c(\varepsilon)\left\|(l^-_{n,j}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \lambda\,\|u\|_2^2\,. \tag{7}$$

Неравенство (2) доказано.

В силу (7) из (4) следует, что

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\left\|(l^-_{n,j}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq \int\limits_{\triangle_j}\left[|u^{'}|^2+(c(y)+\lambda)\,|u|^2\right]dy-\int\limits_{\triangle_j}n^2|u|^2dy. \tag{8}$$

Далее, обе части неравенства (5) умножая на $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ и полученное неравенство объединяя с (8), находим

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda}}\left\|(l^-_{n,j}+\lambda E)u\right\|_2^2 \geq ||u^{'}||_2^2,$$

где $c{>}0$ – постоянное число.

Последнее неравенство доказывает лемму 2.

Л е м м а 3. *Пусть выполнено условие i). Тогда*
а) $\|l^-_n u\|_2 \geq |n|\delta_0\,\|u\|_2,\quad u\in D(l^-_n),\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,...,$
при $n=0\qquad \|l^-_n\|_2\geq\delta\,\|u\|_2;$
б) $c\,\|l^-_n u\|_2 \geq \left(\|u^{'}\|_2+\|\sqrt{c(y)}u\|_2+\|\sqrt{|n||a(y)|}u\|_2\right),\quad u\in D(l^-_n),\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,...,$
где $c>0$ *– постоянное число, независящее от* u *и* n.

Доказательство. Для всех $u\in C_0^\infty(R)$ имеем

$$\left|<l^-_n u, inu>\right| = \left|-in\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[|u^{'}|^2+(-n^2+c(y))|u|^2\right]\,dy+\int\limits_{-\infty}^{\infty}n^2a(y)|u|^2\,dy\right|.$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем неравенство

$$\left\|l^-_n u\right\|_2^2 \geq n^2\delta_0^2\,\|u\|_2^2\,.$$

Пункт a) леммы 3 доказан.

Далее составим квадратичную форму и, интегрируя равенство, находим

$$\left|<l^-_n u, u>\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[|u^{'}|^2+(-n^2+ina(y)+c(y))\right]|u|^2\,dy\right|.$$

Пользуясь свойством комплексных чисел, неравенством Коши с $\varepsilon>0$, имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|l^-_n u\right\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[|u^{'}|^2+c(y)|u|^2\right]\,dy-n^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^2\,dy. \tag{9}$$

Объединяя неравенства a) и (9), получим неравенство

$$c\left\|l_n^- u\right\|_2 \geq \left(\|u'\|_2 + \|\sqrt{c(y)}u\|_2\right). \tag{10}$$

Нетрудно получить, что для всех $u \in C_0^\infty(R)$

$$\left|< l_n^- u, u >\right| \geq \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} ina(y)|u|^2\, dy\right|.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$c(\varepsilon)\left\|l_n^- u\right\|_2 \geq \left(\|u'\|_2 + \|\sqrt{c(y)}\, u\|_2 + \|\sqrt{|n||a(y)|}\, u\|_2\right).$$

Лемма 3 доказана полностью.

Возьмем набор $\{\varphi_j\}$ неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что

$$\sum_j \varphi_j^2 \equiv 1, \quad supp\ \varphi_j \in \triangle_j, \quad \mathop{\cup}_j \triangle_j \equiv R.$$

Через K обозначим оператор, определенный равенством

$$Kf = \sum_j \varphi_j \left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f, \quad f \in L_2(R).$$

Л е м м а 4. *Пусть выполнено условие i). Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(R)$ справедливо следующее равенство:*

$$(l_n^- + \lambda E)Kf = f + B\lambda f, \tag{11}$$

где $B_\lambda f = Kf = \sum\limits_j \varphi_j'' \left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + 2\sum\limits_j \varphi_j' \dfrac{d}{dy}\left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f$ *(суммы без указания пределов берутся по всем целым j).*

Доказательство. Пусть $f \in C_0^\infty(R)$ и рассмотрим действия оператора K на f:

$$Kf = \sum_j \varphi_j \left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f. \tag{12}$$

Так как $f \in C_0^\infty(R)$, то сумма (12) конечна. Поэтому следующие вычисления законны:

$$\left(l_n^- + \lambda E\right) Kf = f + \sum_j \varphi_j'' \left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_j \varphi_j' \frac{d}{dy}\left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f.$$

Здесь учитывалось, что $\sum\limits_j \varphi_j^2 \equiv 1$. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Пусть выполнено условие i). Тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $\|B_\lambda\| <1$.*

Доказательство. Проведем оценку нормы оператора B_λ:

$$\|B_\lambda f\|_2^2 = \sum_j \int\limits_{j-1}^{j+1} \left|\sum_{j-1}^{j+1} \varphi_j'' \left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + 2\varphi_j' \frac{d}{dy}\left(l_{n,j}^- + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right|^2 dy.$$

Мы воспользовались тем, что на $\overline{\triangle}_j = [j-1, j+1]$ только $\varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1} \neq 0$, и в силу неравенства Гёльдера получаем, что

$$\|B_\lambda f\|_2^2 \leq 24 \cdot c_0 \cdot c \left(\frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{1}{\lambda^{1/4}} \right) \|f\|_2^2, \tag{13}$$

где $c_0 = max\{|\varphi_j^{''}|, \varphi_j^{'}\}$.
Последнее неравенство при достаточно больших положительных λ доказывает лемму.

Л е м м а 6. *Пусть выполнено условие i). Тогда оператор $(l_n^- + \lambda E)$ при достаточно больших $\lambda > 0$ непрерывно обратим и справедливо равенство*

$$(l_n^- + \lambda E)^{-1} = K(E - B\lambda)^{-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Оператор $(E - B\lambda)$ ограничен со своим обратным. Поэтому множество $M = \{\varphi = (E - B\lambda)f : f \in C_0^\infty(R)\}$ плотно в $L_2(R)$. Из равенства (11) при $\varphi = (E - B\lambda)f$, $f \in C_0^\infty(R)$, получаем, что $K(E - B\lambda)^{-1}\varphi \in D(l_n^-)$ и $(l_n^- + \lambda E)K(E - B\lambda)^{-1}\varphi = \varphi$. Отсюда имеем, что $y = K(E - B\lambda)^{-1}f$ является решением уравнения $(l_n^- + \lambda E)y = f$. Единственность следует из леммы 3. Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Пусть выполнены условия i)−iii). Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\|(l_{n,j}^- + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{1}{|n||a(\widetilde{y}_j)|}, \quad n = \pm 1, \pm 2, , ...; \tag{15}$$

$$\|(l_{n,j}^- + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{2}{c(y_j) + \lambda}, \tag{16}$$

где $c(y_j) = \min\limits_{y \in \overline{\triangle}_j} c(y)$, $|a(\widetilde{y}_j)| = \min\limits_{y \in \overline{\triangle}_j} |a(y_j)|$.

Доказательство. Для любого $u \in C_0^\infty(\triangle_j)$ имеем

$$< (l_{n,j}^- + \lambda E)u, u >= \left| \int\limits_{\triangle_j} \left[|u^{'}|^2 + (-n^2 + c(y) + \lambda)|u|^2 \right] dy + in \int\limits_{\triangle_j} a(y)|u|^2 dy \right|. \tag{17}$$

Отсюда, учитывая условие i), пользуясь неравенством Коши-Буняковского и определением нормы оператора, получаем, что

$$\|(l_{n,j}^- + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \leq \frac{1}{|n||a(\widetilde{y}_j)|}, \quad n = \pm 1, \pm 2, ...$$

Неравенство (15) доказано.

Из неравенства (17) в силу неравенства Коши с $\varepsilon{>}0$ получаем, что

$$\frac{1}{c(y_j) + \lambda} \|(l_{n,j}^- + \lambda E)u\|_2^2 \geq \|u^{'}\|_2^2 + \frac{c(y_j) + \lambda}{2} \|u\|_2^2 + n^2 \int\limits_{\triangle_j} \left[\frac{a(\widetilde{y}_j)^2}{2(c(y_j) + \lambda)} - 1 \right] |u|^2 dy. \tag{18}$$

Если учесть условия ii)-iii), то из последнего неравенства следует

$$2\|(l_{n,j}^- + \lambda E)u\|_2^2 \geq (c(y_j) + \lambda)^2 \|u\|_2^2.$$

Последнее неравенство доказывает лемму 7.

Л е м м а 8. *Пусть выполнены условия леммы 7 и пусть $\lambda > 0$ такое, что $\|B_\lambda\| < 1$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\rho(y)|n|^\alpha(l_n^- + \lambda E)^{-1}\|_2^2 \le c(\lambda)\sup_j \|\rho(y)|n|^\alpha\varphi_j(l_{n,j}^- + \lambda E)^{-1}\|_2^2, \tag{19}$$

где α=0,1, $\rho(y)$ – непрерывная функция в R.

Доказательство. Из представления (14) видно, что оператор $\rho(y)|n|^\alpha(l_n^- + \lambda E)^{-1}$ ограничен (или неограничен) вместе с оператором $\rho(y)|n|^\alpha K(E - B\lambda)^{-1}$. Поэтому будем заниматься оценкой нормы последнего оператора $\rho(y)|n|^\alpha K(E - B\lambda)^{-1}$. Из (14), пользуясь определением нормы, имеем

$$\|\rho(y)|n|^\alpha(l_n^- + \lambda E)^{-1}\|_{2\to2}^2 \le 12\cdot c(\lambda)\sup_j \|\rho(y)|n|^\alpha\varphi_j(l_{n,j}^- + \lambda E)^{-1}\|_2^2.$$

Лемма 8 доказана.

Л е м м а 9. *Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда справедливы следующие оценки:*

а) $\left\|c(y)(l_n^- + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \le c_1 < \infty;$

б) $\left\|ina(y)(l_n^- + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \le c_2 < \infty;$

в) $\left\|\dfrac{d}{dy}(l_n^- + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \le c_3 < \infty.$

Доказательство. Согласно леммы 7 и леммы 8 получаем, что

$$\left\|c(y)(l_n^- + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2} \le c(\lambda)\sup_{|y-t|\le1}\frac{c(y)}{c(t)} < c_1 < \infty.$$

Точно также доказываются пункты б) и в) леммы 9. Лемма 9 доказана.

Л е м м а 10. *Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|u'\|_2 + \|ina(y)u\|_2 + \|c(y)u\|_2 \le c(\|l_n^- u\|_2 + \|u\|_2), \tag{20}$$

где $c > 0$ – постоянное число.

Доказательство следует из леммы 9.

3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Из леммы 6 получаем, что

$$u_k = \sum_{n=-k}^{k}(l_n^- + \lambda E)^{-1}f_n(y)e^{inx} \tag{21}$$

является решением уравнения

$$(L + \lambda E)u_k = f_k \in L_2(\Omega), \tag{22}$$

где $f_k \xrightarrow{L_2} f, \quad f_k = \sum\limits_{n=-k}^{k} f_n(y)e^{inx}, \qquad (l_n^- + \lambda E)u = -u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right)u.$

В силу неравенства леммы 3 имеем

$$\|u_k\| \le c\|f_k\|, \tag{23}$$

c – постоянное число, независящее от k.

Так как $f_k \xrightarrow{L_2} f$, то из (23) находим, что $\|u_k - u_m\|_2 \le c\|f_k - f_m\|_2 \to 0$ при $k, m \to \infty$.
Отсюда в силу полноты пространства L_2 следует, что существует единственная функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$u_k \to u \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{24}$$

Из (22), (23) следует, что $\|u_k - u\|_2 \to 0$, $\|f_k - f\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$.
Последние неравенства дают, что $u \in L_2(\Omega)$ является решением уравнения $Lu = f$, а из (21) имеем, что

$$u = (L + \lambda E)^{-1} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (l_n^- + \lambda E)^{-1} f_n(y) e^{inx}. \tag{25}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из (25) и из ортонормированности системы $\{e_{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в $L_2(-\pi, \pi)$ убедимся, что

$$\|\rho(y) D_x^{\alpha} (L + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} = \sup_{\{n\}} \|\rho(y)|n|^{\alpha} (l_n^- + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2}, \tag{26}$$

где $D_x^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$, $\alpha = 0, 1$, $\rho(y)$ – непрерывная функция в R.

Из равенства (26) при $\rho(y) = c(y)$ в силу леммы 8 находим

$$\|c(y)(l_n^- + \lambda E)^{-1}\| \le c_1 < \infty.$$

Точно также

$$\|a(y) D_x (l_n^- + \lambda E)^{-1} f\|_{2\to 2} \le c_2 < \infty$$

или для любого $u \in D(L)$

$$\|c(y)u\|_2 \le \|c(y)(L + \lambda E)^{-1}(L + \lambda E)u\|_2 \le c(\lambda) \left(\|(Lu\|_2 + \|u\|_2\right),$$

где $c(\lambda) = c_1 \cdot c_1(\lambda)$;

$$\|a(y)u_x\|_2 \le \|a(y) D_x (L + \lambda E)^{-1}(L + \lambda E)u\|_2 \le c(\lambda) \left(\|(Lu\|_2 + \|u\|_2\right).$$

С помощью этих неравенств выводим следующее неравенство:

$$\|u_{xx} - u_{yy}\|_2 + \|a(y)u_x\|_2 + \|c(y)u\|_2 \le c(\lambda) \left(\|(Lu\|_2 + \|u\|_2\right).$$

Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Everitt W.N., Girtz M.** // Proc. London Math. Soc. 1971. V.23(3). P. 301-324.
2. **Everitt W.N., Girtz M.** // Proc. London Math. Soc. 1972. V.23(3). P.756-768.
3. **Отелбаев М.О.** // Доклад АН СССР. 1977. Т.234, №3. С.540-543.
4. **Бойматов К.Х.** // Доклад АН СССР. 1973. Т. 213, №5. С.1009-1011.
5. **Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.** // Математический журнал, РК. Т.5, №2 (16). С.58-67.
6. **Муратбеков М.Б.** // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №16. С. 2127-2137.
7. **Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б.** Спектральные свойства оператора смешанного типа. Шымкент, 1997.

Поступила в редакцию 17.10.2005 г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 61 – 66*

УДК 517.929.7

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НА ПОЛОСЕ РЕШЕНИЯ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. С. Джумабаев, М. Н. Оспанов

Институт Математики МОиН РК

Установлены достаточные условия ограниченности на полосе смешанной производной решения систем гиперболических уравнений.

На полосе $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times (-\infty, \infty)$ рассматривается система линейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

где $A(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$ непрерывны и, вообще говоря, неограничены на $\bar{\Omega}$.

Через $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$ обозначается пространство ограниченных функций $u : \bar{\Omega} \to R^n$ непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0, \omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0, \omega]$ с нормой $\|u\|_0 = \sup\limits_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \|u(x,t)\|$, $\|u\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i|$. Пространство $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$ является полным.

Исследуются решения системы (1), удовлетворяющие условиям

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in R, \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C_*(\bar{\Omega}, R^n), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная на R вместе со своей производной $\dot{\psi}(t)$.

Решение задачи (1), (2) для более общей системы гиперболических уравнений со смешанной производной, когда столбцы матриц $A(x,t)$, $C(x,t)$ и вектор - функция $f(x,t)$ принадлежат $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$, изучена в [1]. Используя переход к эквивалентной системе функциональных уравнений, получены необходимые и достаточные условия ее корректной разрешимости. Когда элементы $A(x,t)$, $C(x,t)$ и $f(x,t)$ могут быть неограниченными, достаточные условия однозначной разрешимости найдены в [2]. Основная цель настоящей работы - получить условия, при которых $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} \in C_*(\bar{\Omega}, R^n)$, где $u(x,t)$ – решение задачи (1), (2). Здесь нами применяется переход к системе функциональных уравнений, одним из которых является однопараметрическое семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому сначала

Keywords: *system of hyperbolic equations, unbounded coefficient*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K10, 34K13

рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \qquad v(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n). \tag{3}$$

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия существования решения задачи (3) и его оценку по равномерной относительно R норме $\|v(x,\cdot)\|_1 = \sup\limits_{t\in R} \|v(x,t)\|$, $x \in [0,\omega]$.

Т е о р е м а 1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) элементы матрицы $A(x,t)$, функции $a_{ij}(x,t)$, удовлетворяют неравенствам: $|a_{ii}(x,t)| \geq \sum\limits_{i\neq j} |a_{ij}(x,t)| + \theta(x,t)$, $\quad i = \overline{1,n}$, $\quad (x,t) \in \overline{\Omega}$, *где* $\theta(x,t) \geq \theta_0 > 0$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что из* $|x - \overline{x}| < \delta$, $\ x, \overline{x} \in [0,\omega]$, *следует неравенство*

$$\sup_{t\in R} \left| \frac{\theta(x,t) - \theta(\overline{x},t)}{\theta(x,t)} \right| < \varepsilon,$$

3) $|a_{ii}(x,t)| \leq \eta\theta(x,t)$ *для любых* $(x,t) \in \overline{\Omega}$, $\quad i = \overline{1,n}$, $\ \eta - const$,

4) столбцы матриц $\dfrac{A(x,t)}{\theta(x,t)}$ *и вектор - функция* $\dfrac{F(x,t)}{\theta(x,t)}$ *принадлежат* $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$.

Тогда задача (3) имеет единственное решение $v^*(x,t)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|v^*(x,\cdot)\|_1 \leq \left\| \frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)} \right\|_1, \qquad x \in [0,\omega]. \tag{4}$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что в матрице $A(x,t)$ первые n_1 диагональных элементов отрицательны, $a_{ii}(x,t) < 0$, $i = \overline{1,n_1}$, а следующие $n - n_1$ диагональных элементов положительны, $a_{ii}(x,t) > 0$, $i = \overline{n_1+1,n}$. Это возможно, так как любую систему уравнений с диагональными преобладаниями перестановкой ее уравнений можно привести к такому виду.

На $[-T,T]$ рассмотрим семейство двухточечных краевых задач

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \qquad x \in [0,\omega], \qquad v \in R^n, \tag{5}$$

$$P_{(1)}v(x,-T) = 0, \qquad P_{(2)}v(x,T) = 0, \tag{6}$$

где $P_{(1)} = (I_{n_1}, 0)$, $P_{(2)} = (0, I_{n_2})$ – проектирующие матрицы размерностей $n_1 \times n$, $n_2 \times n$, соответственно. Следуя схеме доказательства теоремы 4 из [3] устанавливается существование, единственность решения задачи (5), (6) и его оценка

$$\max_{t\in[-T,T]} \|v_T(x,t)\| \leq \max_{t\in[-T,T]} \left\| \frac{F(x,t)}{\theta(x,t)} \right\|.$$

Отсюда получим равномерную относительно T оценку

$$\max_{t\in[-T,T]} \|v_T(x,t)\| \leq \left\| \frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)} \right\|_1. \tag{7}$$

Используя (7), стандартным диагональным методом из последовательности $\{v_T(x,t)\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{v_{T'}(x,t)\}$, $\lim\limits_{T'\to\infty} v_{T'}(x,t) = v^*(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$, причем на любом компакте $\bar{\Omega}_T = [0,\omega] \times [-T,T]$ сходимость будет равномерной. Функция $v^*(x,t)$ будет решением дифференциального уравнения (5) при всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и для нее справедлива оценка

$$\|v^*(x,\cdot)\|_1 \leq \left\| \frac{F(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)} \right\|_1.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\|v^*(\bar{x},\cdot)-v^*(\bar{\bar{x}},\cdot)\|_1 \le \left\|\frac{F(\bar{x},\cdot)}{\theta(\bar{x},\cdot)}-\frac{F(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}\right\|_1+\left\|\frac{F(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}\right\|_1\cdot\left\|\frac{\theta(\bar{x},\cdot)-\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{x},\cdot)}\right\|_1+$$

$$+\left\|\frac{A(\bar{x},\cdot)}{\theta(\bar{x},\cdot)}-\frac{A(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}\right\|_1\cdot\|v^*(\bar{\bar{x}},t)\|_1+\left\|\frac{A(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}\right\|_1\cdot\left\|\frac{\theta(\bar{x},\cdot)-\theta(\bar{\bar{x}},\cdot)}{\theta(\bar{x},\cdot)}\right\|_1\cdot\|v^*(\bar{\bar{x}},\cdot)\|_1. \qquad (8)$$

Откуда в силу условий 2), 4) следует принадлежность $v^*(x,t)$ пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$. Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливает условия на данные задачи (3), при которых пространству $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ принадлежит также и производная по t от функции $v^*(x,t)$ – решения задачи (3).

Теорема 2 *Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы 1 и следующие предположения:*
а) $\dfrac{\theta(x,t)}{\theta(x,\bar{t})}<C,\ \ C-const,$ *где* $(x,t),(x,\bar{t})\in\bar{\Omega},\ \ |t-\bar{t}|<d,\ \ d-const;$
б) столбцы матрицы $\dfrac{A(x,t)}{\theta(x,t)}$ *и вектор-функция* $F(x,t)$ *принадлежат* $C_*(\bar{\Omega},R^n)$.

Тогда вектор-функция $v^*(x,t)$ *– решение задачи (3) имеет производную по* t*, принадлежащую* $C_*(\bar{\Omega},R^n)$.

Доказательство. Возьмем функцию $w_T(x,t)=\tilde{\theta}(x,t)v_T(x,t)$, где $\tilde{\theta}(x,t)=\dfrac{1}{d}\displaystyle\int_t^{t+d}\theta(x,\tau)d\tau$, $v_T(x,t)$ – решение краевой задачи (5), (6). Так как

$$\frac{\partial v_T(x,t)}{\partial t}=A(x,t)v_T(x,t)+F(x,t), \qquad (x,t)\in[0,\omega]\times[-T,T],$$

то

$$\frac{\partial w_T(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{d}[\theta(x,t+d)-\theta(x,t)]v_T(x,t)+\tilde{\theta}(x,t)\frac{\partial v_T(x,t)}{\partial t}=$$

$$=\frac{1}{d}[\theta(x,t+d)-\theta(x,t)]v_T(x,t)+\tilde{\theta}(x,t)A(x,t)v_T(x,t)+\tilde{\theta}(x,t)F(x,t),$$

и функция $w_T(x,t)$ является решением двухточечной краевой задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t}=A(x,t)w+\tilde{F}(x,t), \qquad (9)$$

$$P_{(1)}w(x,-T)=0, \qquad P_{(2)}w(x,T)=0, \qquad x\in[0,\omega], \qquad (10)$$

где

$$\tilde{F}(x,t)=\frac{1}{d}[\theta(x,t+d)-\theta(x,t)]v_T(x,t)+\tilde{\theta}(x,t)F(x,t).$$

Эта краевая задача имеет единственное решение $w_T(x,t)=\tilde{\theta}(x,t)v_T(x,t)$ и для него справедливо неравенство

$$\max_{t\in[-T,T]}\|w_T(x,t)\|\le\max_{t\in[-T,T]}\left\|\frac{\tilde{F}(x,t)}{\theta(x,t)}\right\|\le\left\|\frac{\tilde{F}(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\right\|_1. \qquad (11)$$

Используя равномерно относительно T оценку и неравенства

$$\frac{\theta(x,t+d)}{\theta(x,t)}<C, \qquad \frac{\tilde{\theta}(x,t)}{\theta(x,t)}<C$$

для всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$, из (11) получим равномерную относительно T оценку для функции $w_T(x,t)$:

$$\max_{t\in[-T,T]} \|w_T(x,t)\| \le M, \tag{12}$$

M – постоянная, определяемая (11). Учитывая, что $\lim\limits_{T'\to\infty} w_{T'}(x,t) = \tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)$, для всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и то, что на любом компакте $[0,\omega]\times[-T,T]$ сходимость будет равномерной, переходя к пределу при $T^{'} \to \infty$ в неравенстве (12), получим оценку $\max\limits_{t\in[-T,T]} \|\tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)\| \le M$, $x \in [0,\omega]$, откуда $\sup\limits_{t\in R} \|\tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)\| \le M$, $x \in [0,\omega]$.

Так как $\dfrac{\tilde{\theta}(x,t)}{\theta(x,t)} < C$, то $\|\theta(x,t)v^*(x,t)\| = \left\|\left[\dfrac{\theta(x,t)}{\tilde{\theta}(x,t)}\right]\tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)\right\| \le MC$. Отсюда легко получить оценку $\|A(x,t)v^*(x,t)\| \le M_1$, M_1 – const, для всех $(x,t) \in \bar{\Omega}$ и принадлежность $A(x,t)v^*(x,t)$ пространству $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. Функция $v^*(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v^*(x,t)}{\partial t} = A(x,t)v^*(x,t) + F(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

где слагаемые правой части принадлежат $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$, вследствие которого $\dfrac{\partial v^*(x,t)}{\partial t} \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. Теорема доказана.

Теперь перейдем к исследованию свойств решений задачи (1), (2).

Теорема 3 *Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы 1, условие а) теоремы 2, столбцы матрицы* $\dfrac{A(x,t)}{\theta(x,t)}, \dfrac{C(x,t)}{\theta(x,t)}$ *и вектор-функции* $f(x,t)$, $\psi(t)\theta(x,t)$ *принадлежат пространству* $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$. *Тогда смешанная производная* $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}$ *решения задачи (1), (2) также принадлежит пространству* $C_*(\bar{\Omega}, R^n)$.

Доказательство. Введя неизвестную функцию $v(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, задачу (1), (2) сведем к следующей эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + C(x,t)u(x,t) + f(x,t), \qquad v(x,t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^n), \tag{13}$$

$$u(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi. \tag{14}$$

В задаче (13), (14) условие $u(0,t) = \psi(t)$ учтено в соотношении (14). Пара непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x,t), u(x,t)\}$ называется решением задачи (13), (14), если функция $v(x,t) \in C_*(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству систем обыкновенных дифференциальных уравнений (13), где функция $u(x,t)$ связана с $v(x,t)$ функциональным соотношением (14).

Для нахождения решения задачи (13), (14) применим метод последовательных приближений. В (13) положим $u = \psi(t)$ и нулевое приближение $v^{(0)}(x,t)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + C(x,t)\psi(t) + f(x,t), \qquad v(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n). \tag{15}$$

Из условий теоремы следует, что $C(x,t)\psi(t) + f(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. Тогда, согласно теоремам 1, 2, задача (15) имеет единственное $v^{(0)}(x,t)$ и $\tilde{\theta}(x,t)v^{(0)}(x,t) = \tilde{v}^{(0)}(x,t) \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. С другой стороны, функция $\tilde{v}^{(0)}(x,t)$ удовлетворяет семейству систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = A(x,t)\tilde{v} + \tilde{\theta}(x,t)C(x,t)\psi(t) + \tilde{\theta}(x,t)f(x,t) + \frac{\partial\tilde{\theta}(x,t)}{\partial t}v^{(0)}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Поэтому для $\tilde{v}^{(0)}(x,t)$ по теореме 1 имеет место оценка

$$\|\tilde{v}^{(0)}(x,\cdot)\|_1 \le \left\|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\right\|_1 \cdot \|\tilde{\theta}(x,\cdot)\psi(\cdot)\|_1 + \hat{C}\|f(x,\cdot)\|_1 + \frac{\hat{C}+1}{d}\|v^{(0)}(x,\cdot)\|_1.$$

Тогда из (14), используя условие 2) теоремы 1, имеем

$$\|\tilde{u}^{(0)}(x,\cdot)\|_1 = \|\tilde{\theta}(x,\cdot)u^{(0)}(x,\cdot)\|_1 \le \|\tilde{\theta}(x,\cdot)\psi(\cdot)\|_1 +$$

$$+\sup_{t\in R}\left\|\tilde{\theta}(x,t)\int\limits_0^x \frac{\tilde{v}^{(0)}(\xi,t)}{\tilde{\theta}(\xi,t)}d\xi\right\| \le \|\tilde{\theta}(x,\cdot)\psi(\cdot)\|_1 + C_0\omega\|\tilde{v}^{(0)}(x,\cdot)\|_1, \qquad C_0 - const,$$

отсюда аналогично (8) устанавливается, что $\tilde{u}^{(0)}(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n)$.

Приближение $v^{(k)}(x,t)$ $(k=1,2,\,\dots)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + C(x,t)u^{(k-1)}(x,t) + f(x,t), \qquad v(x,t)\in C_*(\overline{\Omega},R^n), \tag{16}$$

где $u^{(k-1)}(x,t)$ определяется равенством

$$u^{(k-1)}(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x v^{(k-1)}(\xi,t)d\xi, \qquad (x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{17}$$

Предполагая, что $\tilde{v}^{(k-1)}(x,t)$ и $\tilde{u}^{(k-1)}(x,t)$, $k=1,2,\,\dots$, принадлежат $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ и используя теорему 2 получим, что функции $\tilde{v}^{(k)}(x,t)=\tilde{\theta}(x,t)v^{(k)}(x,t)$, $\tilde{u}^{(k)}(x,t)=\tilde{\theta}(x,t)u^{(k)}(x,t)$ $(k=1,2,\,\dots)$ также принадлежат $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ и имеют место оценки

$$\|\tilde{v}^{(k)}(x,\cdot)\|_1 \le \left\|\frac{C(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\right\|_1 \cdot \|\tilde{u}^{(k-1)}(x,\cdot)\|_1 + \hat{C}\|f(x,\cdot)\|_1 + \frac{\hat{C}+1}{d}\|v^{(k)}(x,\cdot)\|_1, \tag{18}$$

$$\|\tilde{u}^{(k)}(x,\cdot)\|_1 \le \|\tilde{\theta}(x,\cdot)\psi(\cdot)\|_1 + \tilde{C}\int_0^x \|\tilde{v}^{(k)}(\xi,\cdot)\|_1 d\xi. \tag{19}$$

В [2] показана сходимость последовательностей $u^{(k)}(x,t)$, $v^{(k)}(x,t)$ в норме пространства $C_*(\overline{\Omega},R^n)$ к $u^*(x,t)$, $v^*(x,t)$ соответственно, где $u^*(x,t)$ – решение задачи (1), (2).

Из (18), (19) нетрудно установить оценку

$$\max_{t\in[-T;T]}\|\tilde{\theta}(x,t)v^{(k)}(x,t)\| \le M_1, \tag{20}$$

$$\max_{t\in[-T;T]}\|\tilde{\theta}(x,t)u^{(k)}(x,t)\| \le M_2, \tag{21}$$

где M_1, M_2 – const, не зависящие от k и T. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (20), (21) имеем

$$\max_{t\in[-T;T]}\|\tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)\| \le M_1,$$

$$\max_{t\in[-T;T]} \|\tilde{\theta}(x,t)u^*(x,t)\| \le M_2.$$

В силу произвольности $T > 0$, условий теорем на $\theta(x,t)$ и принадлежности функций $v^*(x,t)$, $u^*(x,t)$ пространству $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$ получим, что функции $\tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t)$, $\tilde{\theta}(x,t)u^*(x,t)$ являются элементами пространства $C_*(\overline{\Omega}, R^n)$. Тогда из равенства

$$\frac{\partial v^*(x,t)}{\partial t} = \frac{A(x,t)}{\tilde{\theta}(x,t)} \cdot \tilde{\theta}(x,t)v^*(x,t) + \frac{C(x,t)}{\tilde{\theta}(x,t)} \cdot \tilde{\theta}(x,t)u^*(x,t) + f(x,t)$$

следует, что $\dfrac{\partial v^*(x,t)}{\partial t} \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$ и $\dfrac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial t \partial x} \in C_*(\overline{\Omega}, R^n)$.

Справедлива также оценка

$$\left\|\frac{\partial v^*(x,\cdot)}{\partial t}\right\|_1 \le \left\|\frac{A(x,\cdot)}{\tilde{\theta}(x,\cdot)}\right\|_1 \cdot ||\tilde{\theta}(x,\cdot)v^*(x,\cdot)||_1 + \left\|\frac{C(x,\cdot)}{\tilde{\theta}(x,\cdot)}\right\|_1 \cdot ||\tilde{\theta}(x,\cdot)u^*(x,\cdot)||_1 + \|f(x,\cdot)\|_1.$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д. С.** // Доклады РАН. 2004. Т. 395, № 2. С. 157 – 159.
2. **Оспанов М.Н.** // Математический журнал РК. 2005. Т. 5, № 3(17). С. 61 – 67.
3. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388 – 404.

Поступила в редакцию 01.03.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 67 –73*

УДК 622.02+532.5

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ СОЛЯНЫХ ДИАПИРОВ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

Н. И. Мартынов, А. Г. Танирбергенов

Институт механики и машиноведения МОН РК им. У.А. Джолдасбекова
050060 Алматы Академгородок, 60

Введение.

Изучение формирования солянокупольных структур и мантийных диапиров имеет большое научное и практическое значение [1], поскольку с последними связано распределение месторождений нефти и газа, а также полезных ископаемых в земной коре. Кроме того, соляные структуры используются в качестве подземных хранилищ нефти и газа, а также "хранилищ - консерваторов" термоядерных отходов.

В условиях гравитационной неустойчивости количественные оценки нестационарных полей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, формирующих подобные структуры в земной коре, как правило, проводятся на основе модельных уравнений геодинамики: ползущих течений Стокса неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле сил тяжести.

Линейная стадия гравитационной неустойчивости ползущего движения вязкой несжимаемой жидкости достаточно подробно исследована аналитическими методами. Подробный анализ этих исследований дан в [2].

Нелинейная стадия гравитационной неустойчивости ползущих течений Стокса мало изучена. Результаты, относящиеся к некоторым задачам тектоники, преимущественно соляной тектоники, получены лабораторным и численным моделированием. В результате экспериментов [3 – 7], проводившихся на моделях, состоящих из двух слоев аномально-вязких несжимаемых жидкостей различной плотности, было установлено, что область движения разбивается на ячейки Бенара, подобные ячейкам при тепловой стационарной конвекции. Было показано, что развитие неустойчивости приводит к образованию диапиров, установлены качественные и количественные характеристики развития гравитационной неустойчивости. Однако следует заметить, что экспериментальное исследование не обеспечивает достаточного подобия реальным тектоническим процессам [8].

Численному моделированию формирования и развития соляно-купольных структур посвящено не более трех десятков работ. Первые работы в этом направлении посвящены плоским и осесимметричным задачам и выполнены, в основном, в восьмидесятых и в начале девяностых годов прошлого столетия [9 – 15]. Расчеты проводились консервативно- разностными методами с использованием монотонных разностных схем, либо методом конечных элементов. Не

Keywords: *numerical modulation, salt dome tectonics, diapirs, Stock's flow*
2000 Mathematics Subject Classification: 86A60

обсуждая достоинства тех или иных методов, заметим, что численное моделирование позволяет детализировано оценить кинематические и силовые характеристики течения, что экспериментальными методами затруднительно.

С появлением быстродействующих процессоров, позволяющих распараллеливать вычисления, появилась возможность рассчитывать трехмерные течения. Подобные исследования выполнены в работах [16 – 21]. В результате этих исследований было установлено, что процесс формирования соляных куполов в трехмерном случае происходит гораздо медленней, чем в плоском случае, общие закономерности развития гравитационной неустойчивости сохраняются, но имеют свою специфику. Заметим, что в настоящее время наблюдается тенденция по совершенствованию технических компьютерных средств, что позволяет достаточно "простым методом"провести численное моделирование сложных задач.

В Казахстане многие задачи солянокупольной тектоники были поставлены академиком Ж.С.Ержановым, и под его руководством решены его учениками. В ИМ и Маш. МОН РК продолжают исследования этого направления его ученики – авторы настоящей статьи. Ими были разработаны и обоснованы несколько численных методов, позволяющих корректно прослеживать эволюцию поверхности раздела слоев вплоть до образования соляных линз. На разработку этих методов оказал огромное влияние академик Ш.С. Смагулов. Численное моделирование позволило провести детальный анализ механизма и особенности течения при гравитационной неустойчивости, описать её фазы развития и вид основных характеристик в зависимости от различных параметров среды.

В настоящей работе подводится итог многолетних исследований численного моделирования соляного диапиризма в земной коре.

Постановка задачи.

В области Ω, представляющей собой параллелепипед, требуется определить вектор скорости $\vec{V} = (U,\ V, W)$, давление P, плотность ρ, динамическую вязкость μ в момент времени $t \in [0, T]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \gamma\Big[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial x}\right)\Big] = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \gamma\Big[2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial y}\right)\Big] = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \gamma\Big[2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial y}\right)\Big] - \rho = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial y} + W\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + U\frac{\partial \mu}{\partial x} + V\frac{\partial \mu}{\partial y} + W\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

начальным и граничным условиям на границе $\partial\Omega$

$$\rho(x, y, z, 0) = \rho_0(x, y, z), \quad 0 < \rho_2 \le \rho_0(x, y, z) \le \rho_1, \tag{7}$$

$$\mu(x, y, z, 0) = \mu_0(x, y, z), \quad 0 < \mu_2 \le \mu_0(x, y, z) \le \mu_1, \tag{8}$$

$$U|_{\partial\Omega} = V|_{\partial\Omega} = W|_{\partial\Omega} = 0. \tag{9}$$

Кроме условий (9) можно рассматривать граничные условия скольжения, а также условия симметрии на боковых стенках параллелепипеда.

Система уравнений (1) – (9) записана в безразмерном виде. Коэффициент γ в уравнениях представляет собой отношение числа Фруда к числу Рейнольдса, $\gamma = \nu_* U_*/(L_*^2 g)$. Здесь ν_* , U_*, L_* – характерные параметры среды соответственно: кинематическая вязкость, скорость и геометрический размер области. В задачах гравитационной неустойчивости отсутствует характерный масштаб скорости, поэтому в качестве последнего в работе принимается вязкая скорость $U_* = g^{\frac{1+n}{2}} L_*^{\frac{1+3n}{n}} \nu_*^{-n}$, где n – произвольное число. Выбирая n определенным образом, получим необходимый масштаб скорости рассматриваемой модели.

Численный метод и алгоритм решения.

Для численного решения систем (1) – (9) используется итерационный процесс, основанный на схеме расщепления по физическим процессам [22].

Пусть исследуемая область течения Ω покрыта равномерной по x,y и z сеткой ячеек

$$\Omega = \begin{cases} x_{i+\frac{1}{2}} = i * h_x, \quad h_x > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, M, \\ y_{j+\frac{1}{2}} = j * h_y, \; h_y > 0, \quad j = 0, 1, ..., N, \\ z_{k+\frac{1}{2}} = k * h_z, \; h_z > 0, \quad k = 0, 1, ..., L, \end{cases}$$

где $h_x, \; h_y, h_z$ – размеры шагов сетки. M, N и L – число ячеек сетки соответственно в направлении x,y и z.

На первом этапе схемы расщепления рассчитывается предварительное значение вектора скорости, где используется неявная схема:

$$\frac{U^{n+\frac{1}{2}} - U^n}{\omega} = \gamma \left[2\left(\mu^m U_x^{n+\frac{1}{2}}\right)_x + \left(\mu^m U_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_y + \left(\mu^m V_x^{n+\frac{1}{2}}\right)_y + \right. \\ \left. + \left(\mu^m U_z^{n+\frac{1}{2}}\right)_z + \left(\mu^m W_x^{n+\frac{1}{2}}\right)_z \right] - P_x^n, \tag{10}$$

$$\frac{V^{n+\frac{1}{2}} - V^n}{\omega} = \gamma \left[2\left(\mu^m V_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_y + \left(\mu^m V_x^{n+\frac{1}{2}}\right)_x + \left(\mu^m V_z^{n+\frac{1}{2}}\right)_z + \right. \\ \left. + \left(\mu^m U_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_z + \left(\mu^m W_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_z \right] - P_y^n, \tag{11}$$

$$\frac{W^{n+\frac{1}{2}} - W^n}{\omega} = \gamma \left[2\left(\mu^m W_z^{n+\frac{1}{2}}\right)_z + \left(mu^m U_z^{n+\frac{1}{2}}\right)_x + \left(\mu^m W_x^{n+\frac{1}{2}}\right)_x + \right. \\ \left. + \left(\mu^m V_z^{n+\frac{1}{2}}\right)_y + \left(\mu^m W_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_y \right] - P_y^n - \rho^m. \tag{12}$$

Уравнение (10) рассматривается в точках сетки $(i+\frac{1}{2}, \; j \; , k)$, уравнение (11) – в точках $(i, \; j+\frac{1}{2} \; , k)$ и уравнение (12) – в точках $(i, \; j \; , k+\frac{1}{2})$. Для ясности, например, член $\left(\mu^m U_y^{n+\frac{1}{2}}\right)_y$ расписывается в точках $(i+\frac{1}{2}, \; j \; , k)$ следующим образом:

$$\left[\mu^m_{i+\frac{1}{2},\; j+\frac{1}{2},\; k}\left(U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},\; j+1,\; k} - U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},\; j,\; k}\right) - \mu^m_{i+\frac{1}{2},\; j-\frac{1}{2},\; k}\left(U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},\; j,\; k} - U^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},\; j,\; k}\right)\right] * \frac{1}{h_y^2}.$$

Здесь в уравнениях верхний индекс m обозначает временной слой, а n – номер итераций.

На втором этапе по найденному промежуточному полю скорости $\vec{V}^{\,n+\frac{1}{2}} \simeq (U^{n+\frac{1}{2}}, V^{n+\frac{1}{2}}, W^{n+\frac{1}{2}})$ с учетом условия соленоидальности вектора скорости $\vec{V}^{\,n+1}$ определяется поле давления $P_{i\,,j\,,\,k}^{n+1}$ из уравнения

$$P_{xx}^{\,n+1} + P_{yy}^{\,n+1} + P_{zz}^{\,n+1} = \frac{1}{\omega}\left(U_x^{\,n+\frac{1}{2}} + V_y^{\,n+\frac{1}{2}} + W_z^{\,n+\frac{1}{2}}\right) + P_{xx}^{\,n} + P_{yy}^{\,n} + P_{zz}^{\,n} \quad . \tag{13}$$

Уравнение (13) рассчитывается в точках $(i,\ j,\ k\ )$.

На третьем этапе находим $\vec{V}^{\,n+1} \simeq \left(U^{\,n+1},\ V^{\,n+1},\ W^{\,n+1}\right)$ из уравнений

$$\frac{U^{\,n+1} - U^{\,n+\frac{1}{2}}}{\omega} = -\left(P_x^{\,n+1} - P_x^n\right)\ , \tag{14}$$

$$\frac{V^{\,n+1} - V^{\,n+\frac{1}{2}}}{\omega} = -\left(P_y^{\,n+1} - P_y^n\right)\ , \tag{15}$$

$$\frac{W^{\,n+1} - W^{\,n+\frac{1}{2}}}{\omega} = -\left(P_z^{\,n+1} - P_z^n\right)\ . \tag{16}$$

Уравнения (14), (15) и (16) рассматриваются соответственно в тех же точках, что и уравнения (10), (11) и (12).

Для численного расчета уравнений (5), (6) используется консервативная схема донорной ячейки [23], причем шаг по времени выбирается с учетом устойчивости и монотонности схемы:

$$\tau \le \frac{|\ h\ |^{\ 2}}{\max\limits_{\Omega}\left|\ \vec{V}\ \right|^2}.$$

Для решения уравнений (10)–(13) используется метод верхней релаксации. Разностная схема (10)–(16) абсолютно устойчива.

Итак, предлагаемый алгоритм для численного решения исходной задачи выглядит следующим образом.

Пусть $\mu^m,\quad \rho^m$ известны (при $m = 0$ для μ, ρ это будут начальные данные). Тогда неизвестны $U^m,\quad V^m,\quad W^m,\quad P^m$ определяются итерационным процессом с повторением вышеуказанных трех этапов. При выполнении условия

$$\max_{\Omega}\left(\left|\ U^{n+1} - U^n\right| + \left|V^{n+1} - V^n\right| + \left|W^{n+1} - W^n\right|\right) \le \varepsilon \cdot \omega$$

итерационный процесс заканчивается. Это и означает, что на m – шаге по времени определены значения величин $U^m,\quad V^m,\quad W^m,\quad P^m$. Далее, по явной схеме разности против потока вычисляются неизвестные $\rho^{m+1},\quad \mu^{m+1}$ на $(m+1)$ – шаге по времени. Для нахождения U^{m+1} $V^{m+1},\quad W^{m+1},\quad P^{m+1}$ опять применяется итерационный процесс. Продолжая этот процесс, определяем все величины $U^s,\ \ V^s,\ W^s,\ P^s,\ \mu^s, \rho^s \quad (s = 0, 1, 2, ..., L)$ вплоть до необходимого слоя по времени.

Рассмотренный численный метод пригоден при любых распределениях вязкости и плотности, характерных для осадочного чехла в природных условиях. На рис. 1 показано формирование во времени двух соляных диапиров, где $h_1, h_2;\ \rho_1, \rho_2;\ \mu_1, \mu_2$ – мощности, плотности, динамические вязкости надсолевых пород и каменной соли (галита), соответственно.

Основные закономерности и особенности формирования солянокупольных структур в земной коре.

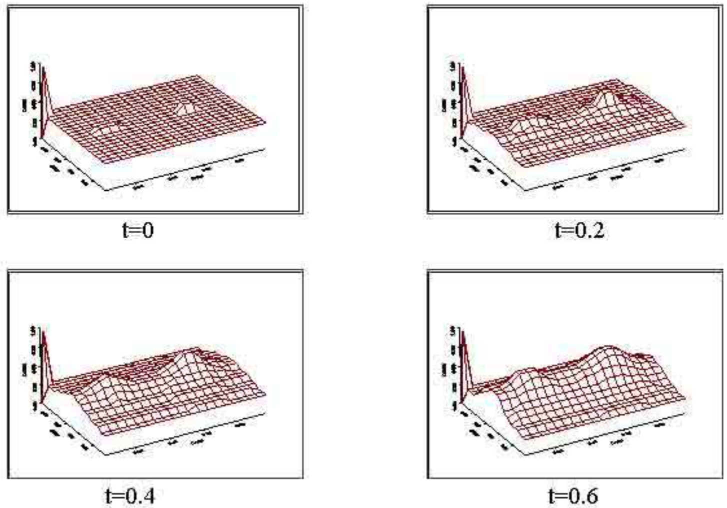

Рис. 1: Эволюция поверхности раздела слоев Параметры модели: $\mu_1 = 5 \cdot 10^{17}$ кг/(м $\cdot$ с), $\rho_1 = 2,\ 5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h_1 = 6$ км, $\mu_2 = 2,\ 5 \cdot 10^{17}$ кг/(м $\cdot$ с), $\rho_2 = 2,\ 2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h_2 = 3$ км.

Численное моделирование (плоской, осесимметричной и пространственной моделей) и последующий анализ гравитационной неустойчивости позволили установить, что движение легкой и тяжелой жидкостей происходит в ячейках, напоминающих бенаровские при тепловой стационарной конвекции, но имеет прерывистый режим. Легкая жидкость, поднимаясь вверх, там и остается, а тяжелая, опускаясь, замыкает ячейку снизу. Движение жидкости заканчивается, как только легкая жидкость поднимается наверх, и инверсия плотностей исчезнет.

Результаты расчетов позволили выделить три характерные фазы развития гравитационной неустойчивости. Первая - линейная фаза, когда на границе раздела сред появляются малые хаотические возмущения разной длины волн, среди которых довольно скоро определяются доминирующие. На второй фазе развития гравитационной неустойчивости, когда явно выделилась доминантная мода спектра возмущения границы раздела, происходит относительно быстрое внедрение легкой жидкости в тяжелую. При этом граница раздела слоев имеет профиль, напоминающий нормальное (гауссово) распределение, либо вид уединенной волны (солитона), а затем происходит ее перестройка. В результате образуется выступ округлой формы, который со временем вытягивается, приобретая ствол, связывающий его с питающим слоем легкой жидкости. В верхней части выступа налицо либо округлая, либо приплюснутая, либо вытянутая капля (или купол). Внедрение тяжелой жидкости в легкую происходит с образованием краевого прогиба возрастающей глубины. На третьей фазе развития неустойчивости увеличение краевого прогиба способствует перекрытию движения частиц легкой жидкости в нижнем слое из периферии в центральную часть ячейки, а всплывающая под действием архимедовых сил масса легкой жидкости вытягивает ствол, нижняя часть которого быстро сужается. В результате образуется шейка. Наличие шейки говорит о том, что всплывающая в центральной части ячейки масса легкой жидкости готовится к отрыву. Затем происходит отрыв от основного питающего слоя, что и объясняет механизм образования соляных линз в земной коре.

В процессе оттока легкой жидкости в основной купол вокруг последнего со временем образуются компенсационные прогибы, которые способствуют зарождению вторичных куполов. Т.е. развитие одних куполов становится причиной возникновения и роста других (вторичных), а те, в свою очередь, третьих и т.д.. Все эти купола находятся на разной стадии развития, а по происхождению их следует отнести к одному семейству. Подобная картина наблюдается при лабораторном моделировании и в натурных наблюдениях [1 – 7].

При исследовании влияния мощностей слоев на характер перемещения установлены следующие зависимости. Если увеличивать мощность соли, оставляя при этом мощность надсолевых пород неизменной, то поперечные размеры соляных куполов увеличиваются, а расстояния между куполами уменьшаются. Если увеличивать мощность надсолевых пород, оставляя при этом мощность соли неизменной, то поперечные размеры куполов уменьшаются, расстояния между куполами увеличиваются. Соляной купол растет быстрее в той среде, где имеются большие мощности соли и надсолевых пород.

Пусть M — отношение вязкости надсолевых пород к вязкости соли. Как показывает серия расчетов, с увеличением M купола приобретают шарообразную форму, с уменьшением M — столбообразную; с ростом M процесс гравитационной неустойчивости замедляется. При M=1 решение носит "автомодельный характер". Это означает, что для двух разных вариантов независимо от величины порядка вязкостей слоев можно подобрать такие моменты времени, что картины течения будут идентичными.

Влияние граничных условий на боковых стенках области на развитие неустойчивости проявляется в следующем. В случае идеального скольжения основная масса соли перетекает вверх через центральный купол. Условия прилипания способствуют тому, что соль перемещается вверх не только через центральный купол, но и через зародившиеся на краю прогибов периферийные купола.

Установлено, что при уменьшении отношения плотностей слоев процесс развития неустойчивости замедляется, и наоборот, а отношение плотностей слоев не влияет на форму куполов.

Сравнительный анализ развития плоской гравитационной неустойчивости с пространственной при одинаковых механико-геометрических параметрах показывает: характеристики роста соляного купола (скорость роста, форма купола) в осесимметричной модели отличаются от характеристик роста соляного купола в плоской модели. В осесимметричном случае купол вплоть до достижения верхней стенки принимает столбообразную форму, при этом поперечный размер его ствола широкий и примерно равен первоначальной мощности соли. В плоском случае в те же моменты времени свод купола, не достигая верхней стенки, растекается в горизонтальные стороны, а ствол сильно отжимается тяжелой жидкостью, т.е. купол приобретает грибообразную форму. Процесс гравитационной неустойчивости протекает быстрее в плоской модели, чем в пространственной.

С целью выяснения влияния подсолевого ложа на рост соляных куполов была проведена серия расчетов для трехслойной среды, в которой соль расположена между двумя более плотными породами. Было установлено, что характер перемещения соли в трехслойной среде сильно отличается от двухслойной, поскольку подошва соли сцеплена с деформированным основанием, которая в процессе неустойчивости вовлекается в движение вверх по тем же каналам, что и соль, хотя плотность соли меньше плотности подсолевого слоя. Это объясняется тем, что соляной купол, двигаясь вверх, вытесняет тяжелый надсолевой слой вниз, вследствие чего под куполом создается область пониженного давления, куда и перетекает часть подсолевого слоя. Следует отметить, что когда вязкость подсолевого слоя намного больше вязкости соли и надсолевых пород, то процесс развития неустойчивости будет происходить также, как и в двухслойной модели, т.е. подсолевой слой не деформируется.

Авторами изучено влияние наклона поверхности раздела для двухслойной модели. Показано, что на фоне гравитационной неустойчивости возникает дополнительный момент (образованный за счет наклона поверхности раздела), способствующий повороту всплывающей соли в сторону уменьшения толщины соляного массива. Подобная особенность характерна для солянокупольной тектоники Прикаспийской впадины [1].

Сопоставление численных расчетов с результатами лабораторного моделирования геологическими данными образования соляных структур позволило установить, что формы соляных куполов, их развитие в природной обстановке и в численных моделях определяются одинаковыми факторами.

Цитированная литература

1. **Косыгин Ю.А.** Основы тектоники нефтеносных областей. М, 1952.

2. **Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А., Искакбаев А., Коксалов К.** Теория складкообразования в земной коре. М, 1975.

3. **Лебедева Н.Б.** Сов. Геология. 1956., № 54, С.163-175.

4. **Паркер Т.Д., Мак-Доуэлл А.Н.** Вопросы экспериментальной тектоники. М, 1957. С. 9-13.

5. **Сычева - Михайлова А.М.** Механизм тектонических процессов в обстановке инверсии плотности горных пород. М, 1973.

6. **Ramberg H.** Phys. Earth Planet Interiors. 1968. V.1, № 7. P. 427-447.

7. **Talbot C.J.** Mar. Petrol. Geol. 1992. V. 9, P.412 -432.

8. **Гуревич Г.И.** Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М. 1959. С. 75-144

9. **Howard J.C. Kansas.** Geol. Surv. Computer. Contrib. 1968. № 22. P. 22-34.

10. **Nasir N.E., Dubboysy O.B.** Tectonophysics. 1978. V.47, № 1. P. 85-107.

11. **Мясников В.П., Новиков В.Л., Сазонов Ю.В.** ДАН СССР. 1980. Т.254, № 3. С. 1105-1108.

12. **Новиков В.Л., Сазонов Ю.В.** Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 6. С.15-20.

13. **Woid W.D., Neugebauer H.J.** Phys. Earth Planet. Inter. 1980. V. 21. P. 369 - 386.

14. **Ержанов Ж.С., Мартынов Н.И.** Изв. АН КазССР. Сер. ф-мат. 1985. № 5. С. 79 - 84.

15. **Орунханов М.К., Танирбергенов А.Г.** Нефть и газ. 2000. № 2. С. 72 - 76.

16. **Орунханов М.К., Танирбергенов А.Г.** Вычислительные технологии. Т.7. Новосибирск-Алматы, 2002. С. 29 - 33.

17. **Мартынов Н.И., Танирбергенов А.Г.** Вопросы прикладной физики и математики. Алматы, 2003. С. 123 - 127.

18. **Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М. и др.** ЖВМ и МФ. 1998. Т.38, № 7. С. 1190 - 1203.

19. **Исмаил-заде А.Т. Наймарк Б.М и др.** ЖВМ и МФ. 2001. Т.41, № 9. С. 1399 - 1415.

20. **Исмаил-заде А.Т., Цепелев И.А., Талбот К. и др.** Вычислительная сейсмология. М. ГЕОС, 2000. Вып. 31. С. 62 - 76.

21. **Romer M.M. J. Geophis.** Res. 2000. V.196. P. 5489 - 5496.

22. **Белоцерковский О.М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М. 1984.

23. **Роуч Х.** Вычислительная гидродинамика. М. 1980.

Поступила в редакцию 08.08.2005

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 74 –79*

УДК 519.624

О ПРИЗНАКЕ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

К. Ж.Назарова

Международный Казахско-Турецкий университет
487010 Туркестан, ул. Казыбек-би , 45, anar@math.kz

Получены рекуррентные формулы поблочного нахождения элементов матрицы, обратной к матрице $[Q_\nu(2h)]$. Установлена взаимосвязь между константой корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи и числом $\gamma_\nu(h)$, ограничивающим сверху норму матрицы $[Q_\nu(2h)]^{-1}$.

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0,T], \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где матрица $A(t)$, вектор - функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, B, C – постоянные матрицы $(n\times n)$, $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, $||A(t)|| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha$, $\alpha - const$, $i = \overline{1,N}$. Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|$.

В работе [1] задача (1), (2) исследована методом параметризации. Рассматриваемый промежуток $[0,T]$ разбивается на части с шагом $h > 0 : Nh = T$ и дополнительные параметры вводятся как значение искомой функций в начальных точках интервалов. В работе [2] применяется другой вариант метода параметризации, отличающийся тем, что дополнительные параметры вводятся в центрах интервалов длины $2h > 0 : 2Nh = T$. Предложен алгоритм нахождения решения, основанный на сведении задачи (1),(2) к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: а) решение линейных систем алгебраических уравнений относительно введенных параметров; б) решение задачи Коши при найденных значениях параметров на интервалах длины $2h > 0$. Осуществимость алгоритма зависит от обратимости $nN\times nN$ матрицы $Q_\nu(2h)$, составляемой по $A(t), B, C$ и имеющей специальную структуру:

Keywords: *ordinary differential equation, two-point boundary-value problem, impulse influence, parametrization's method*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

$Q_\nu(2h) =$

$$= \begin{vmatrix} B[I+D_{\nu 1}(0)]2h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C[I+D_{\nu N}(2Nh)]2h \\ I+D_{\nu 1}(2h) & -I-D_{\nu 2}(2h) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(4h) & -I-D_{\nu 2}(4h) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I+D_{\nu N-1}(2(N-1)h) & -I-D_{\nu N}(2(N-1)h) \end{vmatrix}.$$

Доказана следующая

Т е о р е м а 1 . *Пусть при некоторых* $h > 0 : 2Nh = T$ *и* ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ *матрица* $Q_\nu(2h) : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима и выполняются неравенства:*

а) $\|[Q_\nu(2h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(h)$,

б) $q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \cdot 2\max(1, 2h\max(\|B\|, \|C\|))[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - ... - \dfrac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}] < 1.$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|x^*\|_1 \le M_\nu(h)\max(\|d\|, \|f\|_1), \tag{3}$$

где

$$M_\nu(h) = \left\{\gamma_\nu(h)(e^{\alpha h}-1) \times 2\max\left[1 + 2h\max(\|B\|,\|C\|)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right] + e^{\alpha h}\right\} h \times$$

$$\times \frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)} \times 2\max(1, 2h\max(\|B\|,\|C\|)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}(e^{\alpha h}+1) +$$

$$+\gamma_\nu(h) \times 2\max\left[1 + 2h\max(\|B\|,\|C\|)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}; \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right] h.$$

Установлено, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости задачи (1), (2).

В настоящей статье исследуется взаимосвязь между константой корректной разрешимости задачи (1), (2) и числом $\gamma_\nu(h)$, ограничивающим сверху норму матрицы $[Q_\nu(2h)]^{-1}$, устанавливаются рекуррентные формулы, позволяющие поблочно определить элементы $[Q_\nu(2h)]^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$Q_\nu(2h) \cdot \lambda = b, \quad \lambda, b \in R^{nN}, \tag{4}$$

которое поблочно записывается в виде

$$2hB[I + D_{\nu,1}(0)]\lambda_1 + 2hC[I + D_{\nu,N}(2Nh)]\lambda_N = b_1, \tag{5}$$

$$[I + D_{\nu,j}(2jh)]\lambda_j - [I + D_{\nu,j+1}(2(j+1)h)]\lambda_{j+1} = b_{j+1}, \quad j = 1, 2, ..., N-1. \tag{6}$$

Предполагая, что матрица $[I + D_{\nu,s}(2sh)]$ обратима при любом s, $s = \overline{2, N}$, из равенства (6) выразим λ_{r+1}, $\quad r = \overline{1, N-1}$, через $\lambda_1, b_j, j = \overline{2, r}$,

$$\lambda_{r+1} = \prod_{s=r}^{1}[I + D_{\nu,s+1}(2(s+1)h)]^{-1}[I + D_{\nu,s}(2sh)]\lambda_1 -$$

$$-[I + D_{\nu,r+1}(2(r+1)h)]^{-1} \times \sum_{j=2}^{r}\prod_{s=r}^{j}[I + D_{\nu,s}(2sh)] \times$$

$$\times[I + D_{\nu,s}(2sh)]^{-1}b_j - [I + D_{\nu,r+1}(2(r+1)h)]^{-1}b_{r+1}. \tag{7}$$

Отсюда при $r = N-1$ имеем

$$\lambda_N = \prod_{s=N-1}^{1}[I+D_{\nu,s+1}(2(s+1)h)]^{-1}[I+D_{\nu,s}(2sh)]\lambda_1 -$$

$$-[I+D_{\nu,N}(2Nh)]^{-1}\times\sum_{j=2}^{N-1}\prod_{s=N-1}^{j}[I+D_{\nu,s}(2sh)]\times$$

$$\times[I+D_{\nu,s}(2sh)]^{-1}b_j - [I+D_{\nu,N}(2Nh)]^{-1}b_N. \tag{8}$$

В (5) вместо λ_N подставив правую часть (8), получим уравнение

$$2hM\lambda_1 = b_1 + 2hC\sum_{j=2}^{N}\prod_{s=N}^{j}[I+D_{\nu,s}(2sh)][I+D_{\nu,s}(2sh)]^{-1}b_j \tag{9}$$

с матрицей

$$M = B[I+D_{\nu,1}(0)] + C[I+D_{\nu,N}(2Nh)]\prod_{s=N}^{2}[I+D_{\nu,s}(2sh)]^{-1}[I+D_{\nu,s-1}(2sh)].$$

Л е м м а 1. *Если матрица $[I+D_{\nu,s}(2sh)]$ обратима для любого s, $s=\overline{2,N}$, то $Q_\nu(2h)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $M: R^n \to R^n$.*

Доказательство. Пусть матрица $Q_\nu(2h)$ обратима. Покажем обратимость матрицы M. Предположим, что матрица M необратима. Тогда существует ненулевой вектор $\widetilde{\lambda}_1 \in R^n$, удовлетворяющий однородному уравнению

$$M\widetilde{\lambda}_1 = 0, \quad \widetilde{\lambda}_1 \in R^n. \tag{10}$$

Используя обратимость матрицы $[I+D_{\nu,s}(2sh)]$, $s=\overline{2,N}$, по условию леммы найдем $\widetilde{\lambda}_{r+1}, r=\overline{1,N-1}$, по формуле

$$\widetilde{\lambda}_{r+1} = \prod_{s=r}^{1}[I+D_{\nu,s+1}(2sh)]^{-1}[I+D_{\nu,s}(2sh)]\widetilde{\lambda}_1, \quad r=1,2,...,N-1. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что для ненулевого вектора $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ справедливо

$$Q_\nu(2h)\widetilde{\lambda} = 0, \quad \widetilde{\lambda} \in R^{nN}. \tag{12}$$

Это противоречит обратимости матрицы $Q_\nu(2h)$ и, следовательно, матрица M обратима.

Пусть теперь обратима матрица M. Покажем обратимость $Q_\nu(2h)$. Из предположения, что матрица $Q_\nu(2h)$ необратима, следует существование ненулевого вектора $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ и справедливость равенств

$$2hB[I+D_{\nu,1}(0)]\widetilde{\lambda}_1 + 2hC[I+D_{\nu,N}(2Nh)]\widetilde{\lambda}_N = 0, \tag{13}$$

$$[I+D_{\nu,s}(2sh)]\widetilde{\lambda}_s - [I+D_{\nu,s+1}(2(s+1)h)]\widetilde{\lambda}_{s+1} = 0, \ \ s=\overline{1,N-1}, \tag{14}$$

т.е. $Q_\nu(2h)\widetilde{\lambda} = 0$. Учитывая обратимость матрицы $[I+D_{\nu,s}(2sh)]$, $s=\overline{2,N}$, определим $\widetilde{\lambda}_{j+1}$, $j=\overline{1,N-1}$, через $\widetilde{\lambda}_1$ по формуле

$$\widetilde{\lambda}_{j+1} = \prod_{s=j}^{1}[I+D_{\nu,s+1}(2(s+1)h)]^{-1}[I+D_{\nu,s}(2sh)]\widetilde{\lambda}_1, \quad j=1,2,...,N-1. \tag{15}$$

Найденное значение λ_N подставляя в уравнение (13), получаем, что $2hM\widetilde{\lambda}_1 = 0, \quad \widetilde{\lambda}_1 \in R^n$. Из (15) следует, что все $\widetilde{\lambda}_{j+1} = 0, j = \overline{1, N-1}$, если $\|\widetilde{\lambda}_1\| = 0$. Поэтому $\|\widetilde{\lambda}\| \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\|\widetilde{\lambda}_1\| \neq 0$. Отсюда и из $\|\widetilde{\lambda}\| \neq 0$ вытекает $M\widetilde{\lambda}_1 = 0, \quad \|\widetilde{\lambda}_1\| \neq 0$, что противоречит обратимости M. Следовательно, матрица $Q_\nu(2h)$ обратима. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть матрица $[I + D_{\nu,s+1}(2sh)]$обратима для любого $s, \quad s = \overline{1, N-1}$, и матрица M имеет обратную M^{-1}. Тогда блочные элементы $[Q_\nu(2h)]^{-1} = \{l_{r,j}\}, \quad r, j = \overline{1, N}$, можно определить рекуррентными формулами:*

$$l_{11} = \frac{1}{2h} M^{-1}, \tag{16}$$

$$l_{1,r} = M^{-1} C \prod_{s=N}^{r} [I + D_{\nu,s}(2sh)][I + D_{\nu,s}(2sh)]^{-1}, \quad 1 < r \leq N, \tag{17}$$

$$l_{rr} = [I + D_{\nu,r}(2rh)]^{-1}[I + D_{\nu,r-1}(2rh)] l_{r-1,r} - [I + D_{\nu,r}(2rh)]^{-1}, \quad r = 2, 3, ..., N, \tag{18}$$

$$l_{rj} = [I + D_{\nu,r}(2rh)]^{-1}[I + D_{\nu,r-1}(2rh)] l_{r-1,j}, \quad j \neq r, \quad r = \overline{2, N}. \tag{19}$$

Доказательство. Из обратимости матрицы M следует обратимость матрицы $Q_\nu(2h)$ и

$$\lambda = [Q_\nu(2h)]^{-1} b, \ \ \lambda, b \in R^{nN}. \tag{20}$$

Пусть $[Q_\nu(2h)]^{-1} = \{l_{r,j}\}, \quad r, j = \overline{1, N}$, где $l_{r,j} - (n \times n)$ – матрица. Тогда (20) можно записать в виде

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{N} l_{r,j} b_j, \ \ r = \overline{1, N}. \tag{21}$$

Ввиду обратимости матриц M и $[I + D_{\nu,s}(2sh)], \ s = \overline{2, N}$, из (9) найдем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2h} M^{-1} b_1 + M^{-1} C \sum_{j=2}^{N} \prod_{s=N}^{j} [I + D_{\nu,s}(2sh)][I + D_{\nu,s}(2sh)]^{-1} b_j. \tag{22}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых $b_j, \quad j = \overline{1, N}$ в (22) и (21), когда $r = 1$, получим (16), (17). Последующие блочные строки найдем, используя равенства (6):

$$\lambda_{r+1} = [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1}[I + D_{\nu,r}(2rh)]\lambda_r - [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1} b_{r+1}, \quad r = \overline{1, n-1}.$$

Учитывая (20), получим

$$\lambda_{r+1} = [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1}[I + D_{\nu,r}(2rh)] \times \sum_{j=1}^{N} l_{r,j} b_j - [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1} b_{r+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1}[I + D_{\nu,r}(2rh)] l_{r,j} b_j - [I + D_{\nu,r+1}(2rh)]^{-1} b_{r+1}. \tag{23}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты равенств (23) и $\lambda_{r+1} = \sum\limits_{j=1}^{N} l_{r+1,j} b_j, \quad r = \overline{1, N-1}$, получим (18), (19). Лемма доказана.

Утверждения лемм 1, 2 имеют место при обратимости матрицы $[I + D_{\nu,s}(2sh)]$ для любого s, $s = \overline{2,N}$. Учитывая, что для нормы матрицы $D_{\nu,s}(2sh)$ справедлива оценка

$$\|D_{\nu,s}(2sh)\| \leq \alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2!} + ... + \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \leq \alpha h \cdot e^{\alpha h}$$

и выбирая $\overline{h} > 0$, удовлетворяющим неравенству $\alpha h \cdot e^{\alpha h} < 1$, по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [3, с.140] получим, что для любого $h \in (0, \overline{h}]$ матрица $[I + D_{\nu,s}(2sh)]$ обратима при всех s, $s = \overline{2,N}$.

Определение. *Задача (1), (2) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t)$, d она имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедливо неравенство*

$$\|x^*\|_1 \leq K \max(\|d\|, \|f\|_1),$$

где K– const, независящая от d, $f(t)$. Число K называется константой корректной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 2 . *Если краевая задача (1), (2) корректно разрешима, то для любого $\nu \in N$ существует $h_0 = h_0(\nu) > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$ матрица $Q_\nu(2h) : R^{nN} \to R^{nN}$ будет обратимой и*

$$\|[Q_\nu(2h)]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{2h}, \tag{24}$$

где γ – константа, независящая от h. Если при этом известна K – константа корректной разрешимости задачи (1), (2), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\overline{h} = \overline{h}(\varepsilon, \nu)$ и оценка (24) будет выполняться с константой $\gamma = (1 + \varepsilon)K$ при всех $h \in (0, \overline{h}] : 2Nh = T$.

Доказательство. Пусть задача (1), (2) корректно разрешима и $K-$ константа корректной разрешимости. Тогда в доказательстве теоремы 3 из [2, с.65] установлено, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 = h_0(\varepsilon)$ и при всех $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$

$$\|[Q_*(2h)]^{-1}\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})\frac{K}{2h},$$

где $Q_*(2h) = \lim\limits_{\nu\to\infty} Q_\nu(2h)$. Учитывая, что

$$\|Q_*(2h) - Q_\nu(2h)\| \leq 2max\{1, 2hmax(\|B\|, \|C\|)\}[exp(\alpha h) - 1 - (\alpha h) - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}]$$

и выбирая $\overline{h} = \overline{h}(\varepsilon, \nu)$, удовлетворяющим неравенству

$$(1 + \frac{\varepsilon}{2})\frac{K}{2h} \times 2max\{1, 2hmax(\|B\|, \|C\|)\}[exp(\alpha h) - 1 - (\alpha h) - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}] \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы $Q_\nu(2h)$ при всех $h \in (0, \overline{h}] : 2Nh = T$ и справедливость оценки (24) с $\gamma = (1 + \varepsilon)K$. Теорема доказана.

Теорема 3 . *Пусть для некоторого $\nu \in N$ существует $h_0 = h_0(\nu)$ такое, что при всех $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$ матрица $Q_\nu(2h)$ обратима и ее обратная удовлетворяет оценке (24). Тогда задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = \gamma$.*

Доказательство. Пусть выполняется условие теоремы. Тогда учитывая, что

$$q_\nu(h) = \frac{\gamma}{h} \times 2max\{1, 2hmax(\|B\|, \|C\|)\}[exp(\alpha h) - 1 - (\alpha h) - ... - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}] = O(h^\nu)$$

и выбирая $\widetilde{h} \in (0, h_0] : 2Nh = T$, удовлетворяющим неравенству $q_\nu(h) < 1$, согласно теореме 1 получим однозначную разрешимость задачи (1), (2) и оценку (3). Заменяя $\gamma_\nu(h)$ на $\frac{\gamma}{2h}$ в $M_\nu(h)$, имеем

$$M_\nu(h) = \left\{ \gamma(e^{\alpha h} - 1) \times \max\left[1 + 2h\max(\|B\|, \|C\|) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] + \alpha h e^{\alpha h} \right\} \times$$

$$\times \frac{\gamma}{1 - q_\nu(h)} \times \max(1, 2h\max(\|B\|, \|C\|)) \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \times h^{\nu-1}(e^{\alpha h} + 1) +$$

$$+\gamma \times \max\left[1 + 2h\max(\|B\|, \|C\|) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}; \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right].$$

Так как при $h \to 0$ значения $e^{\alpha h} - 1$, $\alpha h e^{\alpha h}$, $\frac{(\alpha h)^{\nu-1}}{\nu!}$ стремятся к нулю, то получим $K = \lim\limits_{h\to 0} M_\nu(h) = \gamma$. Тогда из оценки

$$\|x^*\|_1 \leq \gamma \max(\|d\|, \|f\|_1)$$

следует корректная разрешимость задачи (1), (2) с константой $K = \gamma$. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
2. **Назарова К. Ж.** // Математический журнал. 2004.Т. 4, № 43. С. 58 – 67.
3. **Треногин В. В.** // Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 27.02.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 80 –83*

УДК 517.9

ОДНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Панкратова И.Н.

Институт Математики МОиН РК.
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, irina@math.kz

Получены необходимые и достаточные условия одномерного представления отображения последования произвольного многомерного отображения в симплексе.

Одним из эффективных методов исследования динамических систем является построение *сечения Пуанкаре* фазового пространства системы и изучение *отображения последования* на нем [1]. Это отображение, которое также называется *отображением Пуанкаре*, возникает в результате отображения секущей поверхности в себя при рассмотрении последовательных точек трансверсального пересечения траекторий точек, расположенных на сечении, с секущей поверхностью. При этом под трансверсальным пересечением траектории и многообразия для дискретной динамической системы будем понимать их пересечение в обычном смысле, соединив непрерывным образом последовательные точки траектории. Одним из достоинств метода является то, что выбор сечения в виде гиперповерхности позволяет понижать размерность вектора состояния рассматриваемой системы. Однако ввиду того, что выбор секущей поверхности в значительной мере произволен, понижение размерности даже на 1 может приводить к потере существенной информации о самой системе, в частности, о топологии фазовых траекторий вне этого сечения (например, когда система имеет разные типы динамики или несколько аттракторов (репеллеров) в разных частях фазового пространства). Поэтому приходится специальным образом подбирать расположение сечений и строить их одновременно в нескольких частях фазового пространства. Кроме того, найти отображение Пуанкаре в явном виде для конкретной динамической системы удается крайне редко и приходится прибегать к его численному аналогу. Подобного рода трудности не возникают в системах, где сечения Пуанкаре появляются естественным образом. Примером такой системы является динамическая система, порожденная многомерным логистическим отображением [2, 3] с фазовым пространством в виде единичного симплекса. ω-предельные множества такого отображения расположены на одномерных инвариантных относительно данного отображения множествах, состоящих из конечного числа отрезков лучей – *естественных сечений Пуанкаре* при рассмотрении отображения на притягивающих инвариантных множествах. На каждом из отрезков лучей многомерное логистическое

Keywords: *dynamical system, first return map, nonlinear dynamics*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C05, 39A05, 65P30

отображение имеет представление в виде суперпозиций одномерных логистических отображений. Эти суперпозиции являются *отображениями последования* многомерного отображения. При этом размерность вектора состояния понижается на $n-1$, число параметров сокращается с n^2 до некоторого числа p, $1 \leq p \leq n$, где n – размерность системы, и потери информации о самой системе и характере ее динамики не происходит.

Возникает задача определения общего вида многомерного отображения, имеющего *естественные одномерные сечения Пуанкаре с одномерными отображениями последования на них*, полностью сохраняющими информацию об исходной системе.

Многомерное логистическое отображение имеет вид [2]:

$$f : L^n \to L^n, \quad f(x) = (1 - \sum_1^n x_i)Ax,$$

где A – матрица параметров, L^n – n-мерное линейное нормированное пространство с нормой $|x| = \sum_1^n |x_i|$. Для изучения асимптотических свойств отображения f в пространстве L^n выделяется симплекс единичной длины $K^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \sum\limits_1^n x_i \leq 1\}$ в качестве фазового пространства. Инвариантность множества K^n (в положительном направлении) обеспечивается выбором матрицы A: A – неотрицательная матрица, т.е. $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j = \overline{1,n}$ и $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$.

Отображение f является многомерным аналогом логистического отображения χ_λ ($n = 1$, $A = \lambda$, $K^n = I = [0,1]$) [4, 5]:

$$\chi_\lambda : L^1 \to L^1, \quad \chi_\lambda x = \lambda(1-x)x.$$

Согласно [6, 7] для любого x из K^n существует число $p \leq n$, $p \in N$, и инвариантное относительно f множество $J_p \subseteq K^n$, состоящее из p отрезков лучей $J_{p,1}, \ldots, J_{p,p}$, инвариантных относительно отображения f^p, которому принадлежит ω-предельное множество $\omega_f(x)$, т.е. $\omega_f(x) \subseteq J_p$. На каждом $J_{p,i}$ отображение f^p имеет одномерное представление вида

$$f^p_{|J_{p,i}} = \chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}, \tag{$*$}$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$ – некоторые числа.

Отображения f^p вида (*), $p \in N$, являются *отображениями последования* отображения f.

Согласно теореме о расщеплении пространства L^n на конечное число инвариантных циклических относительно линейного оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей A, подпространств L^p [10, с.166], $p \leq n$, множество $J_p \subset K^n$ содержится в некотором множестве $M_p \subset K^n$, где $M_p = L^p \bigcap K^n$. На множестве M_p отображение f^p также имеет одномерный вид (*), но $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ являются уже параметрами. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ удовлетворяют соотношениям: $0 < \lambda_i \leq 4$, $i = \overline{1,p}$, $\prod\limits_1^p \lambda_i = \widetilde{\lambda}^p$, где $\widetilde{\lambda} \geq 0$ – собственное значение, соответствующее одному из неотрицательных собственных векторов матрицы A, включая максимальное собственное значение $\lambda \geq 0$ (заметим, что в случае $\widetilde{\lambda} = 0$ ($\lambda = 0$) динамика отображения f на соответствующем инвариантном множестве (во всем фазовом пространстве K^n) сводится к тривиальной).

Обобщение многомерного логистического отображения имеет вид:

$$F : L^n \to L^n, \quad Fx = \Phi(\sum_1^n x_i)Ax.$$

Отображение F получено из f заменой скалярного множителя $(1-\sum\limits_1^n x_i)$ произвольной непрерывной на отрезке I функцией $\Phi(x)\geq 0$. Для любого $x\in K^n$ положим $x=ye_1$, где $y\in I$ и e_1 – единичный вектор, направленный вдоль x, $|e_1|=\sum_1^n e_1^i=1$. Тогда $|x|=\sum_1^n x_i=y$.

Поскольку функция $\Phi(x)$ непрерывна на I, то она ограничена на этом отрезке и, значит, существует константа C такая, что $0\leq\Phi(x)\leq C$. Инвариантность множества K^n относительно отображения F обеспечивается выбором условий на матрицу A, при которых $0\leq\sum_1^n(Fx)_i\leq 1$, т.е.

$$0\leq\sum_1^n(Fx)_i=\Phi(\sum_1^n x_i)\sum_1^n a_{ij}x_j=\Phi(y)y|A|\leq 1,\ \ y\in I.$$

Откуда $|A|\leq 1/\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – ограничивающая сверху константа функции $\Phi(x)x$, $x\in I$.

Используя метод доказательства при получении одномерных отображений последования отображения f на естественных одномерных сечениях Пуанкаре [7], получим, что F^p также является отображением последования на каждом $J_{p,i}$, $i=\overline{1,p}$, и имеет следующий вид:

$$F^p_{|J_{p,i}}=\varphi_{\lambda_p}\circ\ldots\circ\varphi_{\lambda_1}, \tag{**}$$

где $\varphi_\lambda x=\lambda\Phi(x)x$, $x\in I$, и $\lambda_1>0,\ldots,\lambda_p>0$ – те же числа.

Получили *достаточные условия* одномерного представления отображения последования отображения F в симплексе K^n. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *n-мерные отображения F вида $Fx=\Phi(\sum\limits_1^n x_i)Ax$, $x\in K^n$, с непрерывной на I функцией $\Phi(x)\geq 0$ имеют на естественных одномерных сечениях Пуанкаре в K^n одномерные отображения последования вида (**).*

Покажем, что и, наоборот, вид n-мерного отображения, имеющего на естественных одномерных сечениях Пуанкаре в K^n одномерные отображения последования (**), определяется однозначным образом.

Теорема 2. *Отображения F вида $Fx=\Phi(\sum\limits_1^n x_i)Ax$ с непрерывной на I функцией $\Phi(y)\geq 0$ и только они имеют в K^n одномерные отображения последования вида (**).*

Доказательство необходимости. Для любого $x\in K^n$ положим $x=y_1e_1$, $|x|=\sum_1^n x_i==y_1$, $y_1\in I$. Равенство (**) на множестве $J_{p,i}$, можно переписать следующим образом:

$$F^p_{|J_{p,i}}x=\varphi_{\lambda_p}\circ\ldots\circ\varphi_{\lambda_1}y_1\cdot e_1.$$

Множество $J_{p,i}$, $i=\overline{1,p}$, является циклическим инвариантным множеством относительно отображения F^p. Это означает, что вектор $Fx=y_2e_2$, $|e_2|=1$, $y_2\in I$, неколлинеарен вектору $x=y_1e_1$, а векторы $x,Fx,\ldots,F^{p-1}x$ линейно независимы. Тогда единичные векторы $e_1,\ldots,e_p$ образуют базис подпространства L^p, а векторы $x,Fx,\ldots,F^{p-1}x$ принадлежат множеству M^p. Возьмем некоторый другой вектор $x'\in M^p$, неколлинеарный векторам $x,Fx,\ldots,F^{p-1}x$, $x'=y_1'e_1'$, $|e_1'|=1$, $y_1'\in I$. Тогда система единичных векторов $e_1',\ldots,e_p'$ также образует базис в L^p. Дополним системы $e_1,\ldots,e_p$ и $e_1',\ldots,e_p'$ до базисов в L^n, включая базисы других инвариантных циклических подпространств (при всех существующих для данного отображения F $p\in N$ и $\widetilde{\lambda}\geq 0$). Переход от одного базиса векторов к другому в L^n осуществляется с помощью линейного оператора, задаваемого классом подобных матриц. Обозначим матрицу перехода от базиса $e_1,\ldots,e_n$ к базису $e_1',\ldots,e_n'$ через A. Векторы базиса $e_1,\ldots,e_p$ определяются следующим образом: вектор e_1 не совпадает с единичным собственным вектором матрицы A, $e^i=|Ae^{i-1}|^{-1}Ae^{i-1}$, $i=2,\ldots,p$. Обозначим $\lambda_i=|Ae^i|$. Тогда $Ax=Ay_1e_1=y_1Ae_1=\lambda_1y_1e_2$.

Согласно (**) $y_2 = \lambda_1 \Phi(y_1) y_1$. Следовательно, $Fx = y_2 e_2 = \lambda_1 \Phi(y_1) y_1 e_2 = \Phi(y_1) A y_1 e_1 = = \Phi(\sum\limits_1^n x_i) Ax$.

Покажем, что вид отображения F, имеющего одномерные отображения последования (**), определяется единственным образом, т.е. что матрица A единственна. Последнее утверждение очевидно, т.к. если предположить противное, то для любого $x \in K^n$ существуют два представления $Fx = \Phi(\sum\limits_1^n x_i)Ax$ и $Fx = \Phi(\sum\limits_1^n x_i)Bx$. Тогда $0 \equiv \Phi(\sum\limits_1^n x_i)(A - B)x$ и для всех $x \in K^n$ таких, что $\Phi(\sum\limits_1^n x_i) \neq 0$, $Cx = 0$, где $C = A - B$. Отсюда следует, что C – вырожденная матрица и существует не более n линейно независимых векторов $x \neq 0$ матрицы C, удовлетворяющих системе с нулевой правой частью. Однако равенство $Cx = 0$ выполняется для любого $x \in K^n$ тождественно и, значит, $C \equiv 0$, т.е. $A = B$. Достаточность установлена в теореме 1.

Следствие. *Теорема 2 остается справедливой, если единичный симплекс K^n заменить симплексом K_a^n конечного размера $a > 0$, $K_a^n = \{x \in L^n | x \geq 0, \ \sum\limits_1^n x_i \leq a\}$, и потребовать непрерывность функции $\Phi(y) \geq 0$ на отрезке $[0, a]$.*

Цитированная литература

1. **Пуанквре** О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., 1947.
2. **Панкратова И.Н.** // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995-997.
3. **Панкратова И.Н.** // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1514-1515.
4. **Шарковский А.Н., Коляда С.Ф. и др.** Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.
5. **Фейгенбаум М.** // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343-374.
6. **Панкратова И.Н., Рахимбердиев М.И.** // Математический журнал. Алматы, 2003. Т. 3, № 1. С. 75-79.
7. **Панкратова И.Н.** // Математический журнал. Алматы, 2004. Т. 4, № 1(11). С. 62-65.
8. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М., 1988.
9. **Leslie P.H.** // Biometrika. 1945. V. 33. P. 183-212.
10. **Логофет Д.О.** // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077-1081.
11. **Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических популяций. М., 1978.
12. **Панкратова И.Н.** // Проблемы эволюции открытых систем. Алматы, 2003. Т. 1, вып. 5. С. 215-218.

Поступила в редакцию 04.03.2006

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 84 — 90*

УДК 517.925

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ОСНОВАНИЯМИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ж.А.Сартабанов

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
030000 г.Актобе ул.братьев Жубановых, 263 zhubanov@mail.ru

Изложена идея метода степенных рядов с тригонометрическими основаниями для установления условия отсутствия ненулевых периодических решений однородных линейных систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \tag{1}$$

с $\theta = 2\pi$- периодической гладкой по $t \in R = (-\infty, +\infty)$ правой частью:

$$P(t+\theta) = P(t) \in C^1(R), \tag{2}$$

$$f(t+\theta) = f(t) \in C^1(R). \tag{3}$$

Известно, что при условиях (2) – (3) система (1) допускает единственное θ-периодическое решение только в случае отсутствия θ-периодического решения, кроме нулевого, системы

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y. \tag{4}$$

Известно [1], что установление последнего связано с построением матриканта и нахождением мультипликаторов, что практически не всегда возможно.

В связи с этим поставим задачу об установлении условий на коэффициенты, при которых система (4) не имеет θ-периодических решений, кроме тривиального.

2. Метод степенных рядов с тригонометрическими основаниями. Введем в рассмотрение двойной степенной ряд

$$x(t) = x_{00} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = x_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta=j} x_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \tag{5}$$

Keywords: *linear system of differential equations, power series method with trigonometric bases, periodic solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

с тригонометрическими основаниями $u = \cos t$, $v = \sin t$ и постоянными коэффициентами $x_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)$.

Для того, чтобы разложить периодическую с периодом $\theta = 2\pi$ функцию $x(t)$ в ряд вида (5), достаточно разложить ее в ряд Фурье, затем следует переходить от базиса $\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \ldots\}$ к базису $\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \ldots,\ \cos^n t, \sin^n t,\ \ldots\}$ по формулам [2]:

$$\begin{gathered} \cos nt = \sum_{k=0}^{n_*} (-1)^k C_n^{2k} u^{n-2k} v^{2k}, \quad n_* = [n/2], \\ \sin nt = \sum_{k=1}^{n^*} (-1)^{k-1} C_n^{2k-1} u^{n-2k+1} v^{2k-1}, \quad n^* = \begin{cases} 1 + [n/2], & n = 2m-1, \\ [n/2], & n = 2m, \end{cases} \end{gathered} \tag{6}$$

где C_n^k – биномиальный коэффициент, [ ] – означает целую часть числа.

Обратный переход реализуется соотношениями:

$$\begin{gathered} \cos^n t = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k)t \quad \text{при} \quad n = 2m+1, \\ \cos^n t = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k)t + \frac{1}{2^n} C_n^m \quad \text{при} \quad n = 2m, \\ \sin^n t = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_n^k \cos(n-2k)t + \frac{1}{2^n} C_n^m \quad \text{при} \quad n = 2m, \\ \sin^n t = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k \sin(n-2k)t \quad \text{при} \quad n = 2m+1. \end{gathered} \tag{7}$$

Если система (1) допускает периодическое решение, то в силу гладкости его можно представить в виде равномерно сходящегося ряда Фурье. В случае условий (2) и (3) решение системы (1) дважды дифференцируемо, следовательно, ряд Фурье решения допускает почленное дифференцирование.

Пользуясь этим обстоятельством, $\theta = 2\pi$-периодическое решение системы (4) будем представлять в виде степенного ряда

$$y = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z_j(u, v), \tag{8}$$

где $z_0 = y_{00}$, $z_j(u,\ v) = \sum\limits_{\alpha+\beta=j} y_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$ – формы степени j с постоянными коэффициентами $y_{\alpha\beta}$.

Очевидно, что производные форм $z_m(u, v)$ по t определяются соотношениями:

$$u' = -v,\ v' = u,\ z_1'(u,v) = -y_{10}v + y_{01}u, \quad z_2'(u,v) = -2y_{20}uv - y_{11}v^2 + y_{11}u^2 + 2y_{02}uv,$$

$$z_m'(u,v) = -my_{m0}u^{m-1}v + \sum_{\substack{\alpha+\beta=2 \\ \alpha\neq 0,\, \beta\neq 0}}^{m} y_{\alpha\beta}(-\alpha\, u^{\alpha-1}v^{\beta+1} + \beta u^{\alpha+1}v^{\beta-1}) + my_{0m}uv^{m-1}, \quad m \geq 2. \tag{9}$$

Заметим, что степень формы $z_m(u,\ v)$ при дифференцировании остается без изменения.

Таким образом, суть метода степенных рядов с тригонометрическими основаниями заключается в представлении решений систем дифференциальных уравнений в виде степенных рядов описанного вида. Преимущество этого метода перед методом рядов Фурье наблюдается при приведении подобных членов в произведении рядов, благодаря чему удается получить некоторые новые результаты.

3. Коэффициентое условие отсутствия 2π-периодических решений однородной линейной системы, отличных от нуля. При условии (2) матрицу $P(t)$ в силу (6) можно

представить в виде ряда
$$P(t) = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(u,\ v), \tag{10}$$

где $Q_0 = P_{00} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(t)dt = A, \quad Q_j(u,\ v) = \sum\limits_{\alpha+\beta=j} P_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta$ – форма степени j относительно $u,\ v$ с постоянными матричными коэффициентами $P_{\alpha\beta}$, которая получена из соответствующего члена ряда Фурье $P(t)$ на основе связывающих их формул (6) и (7).

Очевидно, что при условии (2) любое 2π-периодическое решение системы (4) можно представить в виде разложения Фурье, а следовательно, в виде степенного ряда (8) с тригонометрическими основаниями $u,\ v$ и векторными коэффициентами $y_{\alpha\beta}$.

Теперь выясним условия, при которых все коэффициенты $y_{\alpha\beta}$ разложения, определяющего решения (8), обращаются в нуль. С этой целью, подставив (8) в систему (4), с учетом (10) имеем соотношение
$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j'(u,\ v) = Q_0 z_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\alpha+\beta=j} Q_\alpha(u,\ v) z_\beta(u,\ v),$$

из которого, приравнивая формы с одинаковыми степенями получим,
$$Q_0 z_0 = 0, \quad z_m'(u,\ v) = \sum_{\alpha+\beta=m} Q_\alpha(u,\ v) z_\beta(u,\ v) \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

Первое из соотношений (11) запишем в виде уравнения
$$B_0 b_0 = 0, \tag{12_0}$$

где $B_0 = Q_0 = A, \quad b_0 = z_0 = y_{00}$, которое имеет только нулевое решение $b_0 = 0$, если только $\Delta_0 = \det B_0 = \det A \neq 0$, что равносильно тому, что все собственные значения $\lambda(A)$ матрицы A отличны от нуля:
$$\lambda(A) \neq 0. \tag{13_0}$$

Таким образом, при условии (13_0) имеем $z_0 = y_{00} = b_0 = 0$.

Далее, из соотношения (11) при $m = 1$ получим $z_1'(u,\ v) = Q_0 z_1(u,\ v) + Q_1(u,\ v) z_0$. Отсюда с учетом (13_0) и (9) имеем уравнение $\quad -y_{10}v + y_{01}u = Ay_{10}u + Ay_{01}v$, следовательно, систему векторно-матричных уравнений
$$\left.\begin{array}{r} Ay_{10} - Ey_{01} = 0 \\ Ey_{10} + Ay_{01} = 0 \end{array}\right\} \;\Leftrightarrow\; B_1 b_1 = 0, \tag{12_1}$$

где E – единичная $n \times n$-матрица, $b_1 = (y_{10},\ y_{01})$ – $2n$-вектор, B_1 – $2n \times 2n$-матрица вида
$$B_1 = \begin{pmatrix} A & -E \\ E & A \end{pmatrix}, \tag{14_1}$$

и согласно [3, (с.75 и 205-206)] $\det B_1 = \det(A^2 + E^2)$, следовательно, он отличен от нуля, если только
$$\lambda(A) \neq \pm i, \tag{13_1}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. При условии (13_1) уравнение (12_1) имеет только нулевое решение $b_1 = (y_{10},\ y_{01}) = 0$. Следовательно, $z_1(u,\ v) = 0$.

При $m = 2$ из соотношений (11) имеем уравнение $z_2'(u,\ v) = Q_0 z_2(u,\ v) + Q_1(u,\ v) z_1(u,\ v) + $ $+ Q_2(u,\ v) z_0$. Отсюда в силу (9) с учетом условий (13_0) и (13_1) получим уравнение

$$-2y_{20}uv - y_{11}v^2 + y_{11}u^2 + 2y_{02}uv = Ay_{20}u^2 + Ay_{11}uv + Ay_{02}v^2,$$

которое эквивалентно системам

$$\left.\begin{array}{l} Ay_{20} - Ey_{11} = 0, \\ Ay_{02} + Ey_{11} = 0, \\ 2Ey_{20} - 2Ey_{02} + Ay_{11} = 0, \end{array}\right\} \ \Leftrightarrow \ B_2 b_2 = 0 \qquad (12_2)$$

с вектором $b_2 = (y_{20},\ y_{02},\ y_{11})$ и матрицей

$$B_2 = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & A & E \\ 2E & -2E & A \end{pmatrix}, \qquad (14_2)$$

у которой $\det B_2 = \det\left[A(A^2 + 2^2E)\right] = \det A \det(A^2 + 2^2E)$ в силу коммутативности ее клеток и отличен от нуля, если только

$$\lambda(A) \neq \pm 2i. \qquad (13_2)$$

Следовательно, при условиях (13_0) – (13_2) имеем $z_0 = z_1(u,\ v) = z_2(u,\ v) = 0$.

Аналогичным образом, при $m = 3$ из соотношений (11) получим систему

$$B_3 b_3 = 0 \qquad (12_3)$$

с неизвестным вектором $b_3 = (y_{30},\ y_{03},\ y_{21},\ y_{12})$ и матрицей

$$B_3 = \begin{pmatrix} A & 0 & -E & 0 \\ 0 & A & 0 & E \\ 3E & 0 & A & -2E \\ 0 & -3E & 2E & A \end{pmatrix} \qquad (14_3)$$

с $\det B_3 = \det(A^2 + 1^2E)\det(A^2 + 3^2E)$, отличным от нуля при условии

$$\lambda(A) \neq \pm 3i. \qquad (13_3)$$

Продолжив этот процесс, в общем случае из соотношений (11) имеем уравнение $z_m'(u,\ v) =$ $= Az_m(u,\ v)$, которое в силу (9) записывается в виде

$$[-my_{m0}u^{m-1}v - (m-1)y_{m-1,1}u^{m-2}v^2 - \ldots - y_{1,m-1}v^m] + [y_{m-1,1}u^m + 2y_{m-2,2}u^{m-1}v +$$
$$+ 3y_{m-3,3}u^{m-2}v^2 + \ldots + my_{0m}uv^{m-1}] = Ay_{m0}u^m + Ay_{m-1,1}u^{m-1}v + \ldots + Ay_{0m}v^m,$$

которое эквивалентно системе

$$B_m b_m = 0 \qquad (12_m)$$

с неопределенным вектором $b_m = \left(y_{2k,0},\ y_{0,2k},\ y_{2k-1,1},\ y_{1,2k-1},\ \ldots,\ y_{k+1,k-1},\ y_{k-1,k+1},\ y_{k,k}\right)$ в случае $m = 2k$ и $b_m = \left(y_{2k+1,0},\ y_{0,2k+1},\ y_{2k,1},\ y_{1,2k},\ \ldots,\ y_{k+1,k},\ y_{k,k+1}\right)$ в случае $m = 2k+1$ и матрицей при $m = 2k$

$$B_m = \begin{pmatrix} A & 0 & -E & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & A & 0 & E & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2kE & 0 & A & 0 & -2E & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & -2kE & 0 & A & 0 & 2E & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & (k+2)E & 0 & A & 0 & -kE \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -(k+2)E & 0 & A & kE \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & (k+1)E & -(k+1)El & A \end{pmatrix} = B_{2k} \qquad (14_{2k})$$

матрицей

$$B_m = \begin{pmatrix} A & 0 & -E & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A & 0 & E & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2k+1)E & 0 & A & 0 & -2E & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -(2k+1)E & 0 & A & 0 & 2E & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & (k+3)E & 0 & A & 0 & -kE & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -(k+3)E & 0 & A & 0 & kE \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (k+2)E & 0 & A & -(k+1)E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -(k+2)E & (k+1)E & A \end{pmatrix} = B_{2k+1} \qquad (14_{2k+1})$$

при $m = 2k+1$.

Методом математической индукции можно показать, что

$$\det B_m = \det\left[A^2 + m^2 E\right] \det\left[A^2 + (m-2)^2 E\right] \times$$

$$\times \det\left[A^2 + (m-4)^2 E\right] \dots \det\left[A^2 + r^2 E\right], \; m = 2k + r, \; 0 \le r \le 1. \qquad (15)$$

Для этого нужно коммутативность клеток матриц B_m и пользоваться следующими указаниями.

1^0. Сначала необходимо произвести столбцевые преобразования вида $[j] + +[j+4] \Rightarrow [j]$ при $j \le m-4$, т. е. к j-ому столбцу прибавить $(j+4)$-ый столбец и заносить результат в j-ый столбец при $j \le m-4$, а затем к $(m-3)$-ему столбцу прибавить m-ый столбец и записывать $(m-3)$-им столбцом: $[m-3] + [m] \Rightarrow [m-3]$ и к $(m-2)$-ому столбцу прибавить $(m-1)$-ый столбец и результат записывать $(m-2)$-ым столбцом: $[m-2] + [m-1] \Rightarrow [m-2]$.

2^0. Потом произвести строчные преобразования вида
$(i) - (i-4) + (i-b) - (i--12) + \ldots + (-1)^p (i-4p) \Rightarrow (i)$ при $i = 4p+q \ge 5, \quad 0 \le q \le 3$, оставив без изменения первые четыре строки. Затем необходимо подвергнуть преобразованию последние две строки: $(m-1) - (m-2) \Rightarrow (m-1)$ и $(m) - (m-3) \Rightarrow (m)$.

Тогда получим индуктивную формулу $\det B_m = \det\left[A^2 + m^2 E\right] \det B_{m-2}$ при $m \ge 2$, следовательно, формулу (15).

Таким образом, если системы вида (12_s) при $s \le m-1$ имеют только нулевые решения, то система (12_m) также имеет нулевое решение, если только

$$\lambda(A) \neq \pm mi. \qquad (13_m)$$

Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 1 . *Для того, чтобы система вида (12_m) с матрицей (14_m) имела только нулевое решение $b_m = 0$ при любом $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ необходимо и достаточно, чтобы матрица A не имела нулевого и целократных мнимой единице собственных значений вида $\lambda(A) \neq ki$, где $k = \pm m,\ \pm(m-2),\ \pm(m-4),\ \ldots,\ \pm(2+q),\ \pm q$ при $m = 2p+q,\ 0 \le q \le 1,\ p$ – неотрицательное целое.*

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 1 . *Для того, чтобы система (4) при условии (2) не имела 2π-периодического решения, кроме тривиального, необходимо и достаточно, чтобы среднее значение $A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(t)dt$ матрицы $P(t)$ не имело целократных мнимой единице собственных значений $\lambda(A) \neq ki\ \forall\ k \in Z, Z$ – множество целых чисел.*

Действительно, при условии (2) имеем разложение (10) и 2π-периодическое решение $y = y(t)$ уравнения (4) представляется в виде (8), причем для определения коэффициентов форм $z_m(u,\ v)$ имеем систему вида (12_m) с матрицей (14_m). Из условия теоремы следует выполнение условий (13_0) – (13_m) для любого $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда в силу леммы имеем утверждение теоремы.

4. Периодическое решение неоднородной линейной системы. При условии (3) вектор-функцию $f(t)$ представим в виде степенного ряда с тригонометрическими основаниями

$$f(t) = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(u,\ v), \tag{16}$$

где $\varphi_0 = f_{00}, \quad \varphi_j(u,\ v) = \sum\limits_{\alpha+\beta=j} f_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$.

Решение $x(t)$ – периодическое с периодом 2π будем искать в виде степенного ряда с периодическими основаниями

$$x(t) = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z_j(u,\ v), \tag{17}$$

где $z_0 = x_{00}, \quad z_j(u,\ v) = \sum\limits_{\alpha+\beta=j} x_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta$ – форма степени j с неизвестными пока коэффициентами $x_{\alpha\beta}$.

Подставив разложения (10), (16) и (17) в систему (1), для определения форм $z_m(u,\ v)$ имеем систему вида

$$B_m b_m = c_m, \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{18}$$

где матрица B_m определяется соотношением (14_m), а b_m – искомый вектор вида

$$b_{2k} = (x_{2k,0}, x_{0,2k}, x_{2k-1,1}, x_{1,2k-1}, \ldots, x_{k+1,k-1}, x_{k-1,k+1}, x_{k,k})$$

или

$$b_{2k+1} = (x_{2k+1,0}, x_{0,2k+1}, x_{2k,1}, x_{1,2k}, \ldots, x_{k+1,k}, x_{k,k+1})$$

в зависимости от четности и нечетности m. Свободный член c_m определяется соотношениями вида

$$c_{2k} = (q_{2k,0},\ q_{0,2k},\ q_{2k-1,1},\ q_{1,2k-1}, \ldots,\ q_{k+1,k-1},\ q_{k-1,k+1}, q_{k,k})$$

или

$$c_{2k+1} = (q_{2k+1,0},\ q_{0,2k+1},\ q_{2k,1},\ q_{1,2k},\ \ldots,\ q_{k+1,k},\ q_{k,k+1})$$

соответственно при $m = 2k$ или $m = 2k+1$, где $q_{\alpha\beta}$ определяются из рекуррентного соотношения

$$\varphi_0 = q_{00}, \quad Q_1(u,\ v) z_{m-1}(u,\ v) + Q_2(u,\ v) z_{m-2}(u,\ v) + \ldots +$$

$$+ Q_m(u,\ v) z_0 + \varphi_m(u,\ v) = \sum_{\alpha+\beta=m} q_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta, \quad m \geq 1,$$

путем приведения подобных членов левой части.

При условиях теоремы 1 система вида (18) имеет единственное решение, следовательно, однозначно определяется $z_m(u,\ v)$.

Таким образом, периодическое решение (17) построено, причем оно единственное в силу единственности решения системы вида (18). Следовательно, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2 . *Пусть выполнены условия (2), (3) и непредставимы собственные значения $\lambda(A)$ среднего значения $A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(t)dt$ матрицы $P(t)$ в виде целократных мнимой единице: $\lambda(A) \neq ki \forall k \in Z$. Тогда неоднородная линейная система (1) допускает единственное 2π - периодическое решение, представимое в виде степенных рядов с тригонометрическими основаниями.*

В заключение, в качестве примера рассмотрим уравнение

$$x' = Ax + f(t),$$

где $x(x_1, x_2)$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$ – постоянная матрица, $f(t) = (0, \varphi(t))$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Очевидно, что это уравнение при a, неравных целому числу, допускает единственное 2π-периодическое решение, представимое в виде ряда Фурье, что согласуется с утверждением теоремы.

Заметим, что гладкость матрицы $P(t)$ и вектор-функции $f(t)$, приведенная в условиях (2) и (3) можно заменить их непрерывностью и разложимостью в ряды Фурье.

Цитированная литература

1. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М. 1972.

2. **Андронов И.К., Окунев А.К.** Курс тригонометрии. М. 1967.

3. **Фадеев Д.К., Соминский И.С.** Сборник задач по высшей алгебре. М. 1964.

Поступила в редакцию 18.07.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 91 — 95*

УДК 517.938

О ХАРАКТЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ОТ ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.О. Султанбекова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125 sultanbekova@math.kz

Исследуются показатели Ляпунова однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений второго порядка как функции параметра.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = \omega \cdot a(t)y, \quad t \in R^{+}, \tag{1}$$

где $a(t) \in C^{+}$ (C^{+}- пространство непрерывных и ограниченных на $R^{+} = [0, +\infty)$ функций), $\omega = [0, 1]$.

Эквивалентная уравнению (1) линейная дифференциальная система имеет вид

$$\dot{x} = A(t, \omega)x, \text{где} \quad x = (x_1, x_2), \quad x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad A(t, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega a(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Показатели Ляпунова уравнения (1) $\lambda_1(\omega) > \lambda_2(\omega)$ определяются как показатели Ляпунова системы (2). Используемые здесь необходимые сведения из теории показателей содержатся в [1]. Здесь мы изучаем функции $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ с точки зрения их классификации по Бэру (см. [2]).

Строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных систем (размерности не меньше двух) следует из статей [3, 4]. Для приведенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывной зависимостью коэффициента от параметра аналогичный результат установлен в [5]. Здесь изучается этот же вопрос при линейной зависимости от параметра коэффициента уравнения.

Теорема. *Существует такая функция $a(t) \in C^{+}$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.*

Keywords: *differential equations, Lyapunov exponent*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

Доказательство. 1. Если мы покажем, что каждая точка полуинтервала $(0,1]$ является точкой разрыва функций $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$, то в силу теоремы VI на стр. 243 из [6] это будет означать, что эти функции не принадлежат первому классу Бэра. Тогда, учитывая, что они входят во второй класс, мы установим, что они строго второго класса.

Определим сначала кусочно-постоянную функцию $a\,(t)$ следующим образом:

$$a(t) = \begin{cases} \pi^2, & \text{при} \quad t \in [\varsigma(2k), \varsigma(2k+1)), \\ -\pi^2, & \text{при} \quad t \in [\varsigma(2k+1), \varsigma(2k+2)), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\varsigma(0) = 0, \quad \varsigma(k) = \varsigma(k-1) + 3^k$.

При фиксированном значении ω на каждом промежутке $[\varsigma(2k), \varsigma(2k+1)) \quad (k = 0, 1, 2, ...)$ матрица $A\,(t, \omega)$ принимает постоянное значение. При четных k обозначим это значение через $A_1\,(\omega)$, при нечетных k - через $A_2\,(\omega)$.

Пусть $X\,(t, \tau, \omega)$ – матрица Коши системы (2), $\gamma_1 = \sqrt{\omega}\pi, \gamma_2 = -\sqrt{\omega}\pi$ – собственные значения матрицы $A_1\,(\omega)$, а $e_1 = (1, \pi\sqrt{\omega})\,, e_2 = (1, -\pi\sqrt{\omega})$ – соответствующие им собственные векторы.

Тогда при $t, \tau \in [\varsigma(2k), \varsigma(2k+1))\,(k = 0, 1, 2, ...)$ имеем

$$X(t, \tau, \omega) e_i = \exp\left(A_1\,(\omega)\,(t - \tau)\right) e_i = \exp\left(\gamma_i (t - \tau)\right) e_i, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Матрица $A_2\,(\omega)$ имеет чисто мнимые собственные значения $i\sqrt{\omega}\pi, \, -i\sqrt{\omega}\pi$, поэтому для $t, \tau \in [\varsigma(2k+1), \varsigma(2k+2))$ матрица $X\,(t, \tau, \omega)$ запишется в виде:

$$X(t, \tau, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \pi\sqrt{\omega}(t - \tau) & \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} \sin \pi\sqrt{\omega}(t - \tau) \\ -\pi\sqrt{\omega} \sin \pi\sqrt{\omega}(t - \tau) & \cos \pi\sqrt{\omega}(t - \tau) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2. Зададим на отрезке I два множества σ_1 и σ_2. Выберем любое число $\omega \in I$ и запишем значение $\sqrt{\omega}$ в троичной системе $\sqrt{\omega} = \alpha_1 3^{-1} + \alpha_2 3^{-2} + ...$, где $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, \quad j = 1, 2, ...$

Образуем множество σ_1 значений ω, для которых $\sqrt{\omega}$ представимо в виде всевозможных конечных разложений, т.е. $\sqrt{\omega} = \alpha_1 3^{-1} + ... + \alpha_r 3^{-r}$; $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, j = 1, ..., r, r \in N$, а множество σ_2 – из значений ω, для которых $\sqrt{\omega}$ представимо в виде бесконечных разложений $\sqrt{\omega} =$ $= \alpha_1 3^{-1} + ... + \alpha_s 3^{-s} + 3^{-s-1} + 3^{-s-2} + ...$; $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}, j = 1, ..., s, s \in N$, с коэффициентами $\alpha_i = 1$ для всех $j \in N$, кроме, может быть, конечного числа.

Ясно, что так определенные множества σ_1, σ_2 плотны на I.

3. Фиксируем такое значение параметра ω, что $\sqrt{\omega} \in \sigma_1$. Так как в этом случае $\sqrt{\omega} = \alpha_1 3^{-1} + ... + \alpha_r 3^{-r}; \quad \alpha_j \in \{0, 1, 2\}, j = 1, ..., r, r \in N$, то при $2k \geq r$ число $\sqrt{\omega} 3^{2k}$ является целым. Значит, при $2k \geq r$ в силу (4) имеем

$$X(\varsigma(2k+2), \varsigma(2k+1), \omega) = \begin{pmatrix} \cos \pi\sqrt{\omega} 3^{2k+1} & \frac{\sin \pi\sqrt{\omega} 3^{2k+1}}{\pi\sqrt{\omega}} \\ -\pi\sqrt{\omega} \sin \pi\sqrt{\omega} 3^{2k+1} & \cos \pi\sqrt{\omega} 3^{2k+1} \end{pmatrix} = E^*, \tag{5}$$

где E^* есть либо единичная матрица E, либо $-E$.

Пусть k_0 – фиксированное целое число такое, что $2k_0 \geq r$, и пусть $x_i(t)$ – решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(\varsigma(2k_0 - 1)) = e_i$. С учетом (3), (5) для $k > k_0$ получаем

$$x_i(\varsigma(2k+1)) = X(\varsigma(2k+1), \varsigma(2k), \omega) \cdot X(\varsigma(2k), \varsigma(2k-1), \omega) \cdot ...$$

$$... \cdot X(\varsigma(2k_0+1), \varsigma(2k_0), \omega) \cdot X(\varsigma(2k_0), \varsigma(2k_0-1), \omega) \cdot e_i =$$

$$= \exp\left(A_1\,(\omega)\,(\varsigma(2k+1) - \varsigma(2k))\right) E^* \cdot ... \cdot \exp\left(A_1\,(\omega)\,(\varsigma(2k_0+1) - \varsigma(2k_0))\right) E^* e_i =$$

$$= \exp\left(\gamma_i\,(\varsigma(2k+1) - \varsigma(2k))\right) E^* \cdot ... \cdot \exp\left(\gamma_i\,(\varsigma(2k_0+1) - \varsigma(2k_0))\right) E^* e_i =$$

$$= \exp\left(\gamma_i\left(3^{2k+1}+3^{2k-1}+...+3^{2k_0+3}+3^{2k_0+1}\right)\right)E^*e_i =$$

$$= \exp\left(\frac{\gamma_i}{8}\left(3^{2k_0+1}\left(3^{2(k-k_0+1)}-1\right)\right)\right)E^*e_i. \tag{6}$$

Так как для любого $n > n_0$

$$\varsigma(n)-\varsigma(n_0) = 3^n+...+3^{n_0+1} = 3^{n_0+1}\left(3^{n-n_0}-1\right)/2, \tag{7}$$

то в силу (6), (7) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\|x_i\left(\varsigma(2k+1)\right)\|}{\varsigma(2k+1)-\varsigma(2k_0-1)} = \frac{3}{4}\gamma_i. \tag{8}$$

Аналогичным образом устанавливается существование предела

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\|x_i\left(\varsigma(2k)\right)\|}{\varsigma(2k)-\varsigma(2k_0-1)} = \frac{1}{4}\gamma_i. \tag{9}$$

Далее воспользуемся тем, что для вычисления характеристических показателей решений уравнения (1) с кусочно-постоянной функцией $a\,(t)$ можно ограничиться последовательностями значений аргумента, которые принадлежат концам промежутков постоянства функций (см. [1], с. 148 – 149). Отсюда согласно (8), (9) с учетом различия знаков $\gamma_1,\ \gamma_2$ следует, что решения системы (2) с условием $x_i(\varsigma(2k_0-1)) = e_i$ имеют характеристические показатели $\lambda_1\,(\omega) = 3\pi\sqrt{\omega}/4$, $\lambda_2\,(\omega) = -\pi\sqrt{\omega}/4$. Так как они различны, то они являются показателями нормального базиса, то есть показателями Ляпунова.

4. Фиксируем теперь какое-либо значение параметра ω такое, что $\sqrt{\omega}\in\sigma_2$. Это означает, что для некоторого s имеет место равенство $\sqrt{\omega} = \alpha_1 3^{-1}+...+\alpha_s 3^{-s}+3^{-s-1}+3^{-s-2}+...$, где $\alpha_j\in\{0,1,2\}$, $j = 1,...,s$.

В этом случае при любом $r\geq s$ число $\sqrt{\omega}3^r$ можно записать в виде $l_r+\frac{1}{2}$, где l_r – некоторое натуральное число. Поэтому, если $2k-1\geq s$, то

$$X(\varsigma(2k),\varsigma(2k-1),\omega) = \begin{pmatrix} \cos\pi\sqrt{\omega}3^{2k} & \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}}\sin\pi\sqrt{\omega}3^{2k} \\ -\pi\sqrt{\omega}\sin\pi\sqrt{\omega}3^{2k} & \cos\pi\sqrt{\omega}3^{2k} \end{pmatrix} =$$

$$= E^*\cdot\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} \\ -\pi\sqrt{\omega} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства следует, что $X(\varsigma(2k),\varsigma(2k-1),\omega)e_1 = E^*e_2$. Точно также эта матрица преобразует вектор e_2 в e_1. Фиксируем целое число k_0, такое что $4k_0\geq s$, и пусть $x_i(t)$ – решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(\varsigma(4k_0)) = e_i$. Тогда при любом $k > k_0$

$$x_1(\varsigma(4k+4)) = X\left(\varsigma(4k+4),\varsigma(4k_0),\omega\right)e_1 =$$

$$= X\left(\varsigma(4k+4),\varsigma(4k),\omega\right)\cdot...\cdot X\left(\varsigma(4k_0+4),\varsigma(4k_0),\omega\right)e_1 =$$

$$= \exp\left(\gamma_2\left(\varsigma(4k+3)-\varsigma(4k+2)\right)+\gamma_1\left(\varsigma(4k+1)-\varsigma(4k)\right)\right)\cdot...$$

$$...\cdot\exp\left(\gamma_2\left(\varsigma(4k_0+3)-\varsigma(4k_0+2)\right)+\gamma_1\left(\varsigma(4k_0+1)-\varsigma(4k_0)\right)\right)E^*e_1 =$$

$$= \exp\left(\gamma_2 3^{4k+3}+\gamma_1 3^{4k+1}+...+\gamma_2 3^{4k_0+3}+\gamma_1 3^{4k_0+1}\right)\ E^*e_1 =$$

$$= \exp\left(\gamma_2\left(3^{4k+3}-3^{4k+1}+...+3^{4k_0+3}-3^{4k_0+1}\right)\right)E^*e_1 = \exp\left(\frac{9\gamma_2}{10}3^{4k+3}\right)\ E^*e_1.$$

Следовательно,

$$\frac{\ln\|x_1(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4)-\varsigma(4k_0)}=\frac{\gamma_2}{5}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\|x_1(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4)-\varsigma(4k_0)}=\frac{\gamma_2}{5}.$$

Аналогично получаем

$$x_2(\varsigma(4k+4))=X\left(\varsigma(4k+4),\varsigma(4k_0),\omega\right)e_2=$$

$$=X\left(\varsigma(4k+4),\varsigma(4k),\omega\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\varsigma(4k_0+4),\varsigma(4k_0),\omega\right)e_2=$$

$$=\exp\left(\gamma_1\left(\varsigma(4k+3)-\varsigma(4k+2)\right)+\gamma_2\left(\varsigma(4k+1)-\varsigma(4k)\right)\right)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\exp\left(\gamma_1\left(\varsigma(4k_0+3)-\varsigma(4k_0+2)\right)+\gamma_2\left(\varsigma(4k_0+1)-\varsigma(4k_0)\right)\right)E^*e_2=$$

$$=\exp\left(\gamma_1 3^{4k+3}+\gamma_2 3^{4k+1}+\ldots+\gamma_1 3^{4k_0+3}+\gamma_2 3^{4k_0+1}\right)\ E^*e_2=$$

$$=\exp\left(\gamma_1\left(3^{4k+3}-3^{4k+1}+\ldots+3^{4k_0+3}-3^{4k_0+1}\right)\right)E^*e_2=\exp\left(\frac{9\gamma_1}{10}3^{4k+3}\right)\ E^*e_2.$$

Поэтому

$$\frac{\ln\|x_2(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4)-\varsigma(4k_0)}=\frac{\gamma_1}{5}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\|x_2(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4)-\varsigma(4k_0)}=\frac{\gamma_1}{5}.$$

Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, получим, что $\frac{\pi\sqrt{\omega}}{5}$, $-\frac{\pi\sqrt{\omega}}{5}$ есть показатели системы (2) при $\sqrt{\omega}\in\sigma_2$.

В силу теоремы 29.2.1 из [1] для любого $d>0$ существует система

$$\dot{x}=\tilde{A}(t)\cdot x \tag{10}$$

с непрерывно дифференцируемой на R^+ матрицей $\tilde{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \omega\cdot\tilde{a}(t) & 0\end{pmatrix}$, обладающей тем свойством, что всякое решение системы (2) аналогично некоторому решению системы (10), причем их отклонение есть величина $o(e^{-dt})$ при $t\to\infty$. Как следует из доказательства теоремы 29.2.1 такое построение достаточно проделать для каждого коэффициента матрицы $A(t)$, в данном случае для $a(t)$.

Тем самым установлено, что существует система (2) с коэффициентом из C^+ такая, что функции $\bar{\lambda}_1(\omega)$, $\bar{\lambda}_2(\omega)$ разрывны в каждой точке интервала $(0,1]$. Поэтому они принадлежат второму классу Бэра. Теорема доказана.

Заметим, что существует такое $b(t)\in C^+$, что показатели Ляпунова уравнения

$$\ddot{y}=b(t)\,\dot{y}+\omega\cdot a(t)\,y, \tag{11}$$

где ω и $a(t)$ те же, что в теореме, будут непрерывны.

Для доказательства последнего утверждения достаточно подстановкой $y(t)=z(t)\cdot\exp\left(\int\limits_0^t b(\tau)\,d\tau\right)$ привести уравнение (11) к виду

$$\ddot{z}(t)=\varphi(t,\omega)\cdot z(t),$$

где $\varphi(t,\omega) = \omega \cdot a(t) + \frac{b^2(t)}{4} + \frac{\dot{b}(t)}{2}$, и выбрав $b(t) = \mathrm{const} > 2\pi$, воспользоваться теоремой 1 из [7].

Цитированная литература

1. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

2. **Бэр Р.** Теория разрывных функций. М., 1932.

3. **Миллионщиков В. М.** // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408 – 1416.

4. **Рахимбердиев М. И.** // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925 – 931.

5. **Рахимбердиев М. И., Дауылбаев А. М.** // Математический журнал РК. 2002. Т 2, № 2. С. 57 – 60.

6. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М., 1937.

7. **Рахимбердиев М. И.** // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1279 – 1281.

Поступила в редакцию 07.12.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 1 (19) . С. 96 —102*

УДК 517.956.3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О.С.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
700174, Ташкент, ул. Университетская, 2, zikirov@yandex.ru

Изучается вопрос об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса уравнений в частных производных третьего порядка. В работе с помощью функции Римана для линейного уравнения третьего порядка с гиперболическим оператором в главной части доказываются теоремы существования и единственности решения изучаемой задачи.

1^0. **Постановка задачи.** В области $D = \{(x,y): \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < y < h\}$ рассмотрим линейное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где α, β – н заданные постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L – линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c\,(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными действительными функциями в области D.

Заметим, что уравнение (1) соответствует второму и третьему типу уравнений с частными производными третьего порядка, приведенных к каноническим видам [1].

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных физических явлений и процессов. Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [2], распространением акустических волн в слабонеоднородных средах [3] редуцируются к краевым задачам для уравнения (1). Например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{tt} - u_{xx}) + u_{tt} - \rho u_{xx} = 0$$

Keywords: *partial differential equation, Dirichlet problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L25, 35L35

описывает распространение линейных акустических волн в среде с дисперсией [3], где ρ – числовой параметр, принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

Изучением краевых задач для уравнений третьего порядка занимались многие авторы. В частности, из уравнения (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $c(x, y) = 0$ получаем уравнения, исследованные в работах [4-9].

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x, y)$, обладающая в D всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

В настоящей работе для уравнения (1) решается следующая краевая задача Дирихле: *найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(l, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u(x, h) = \psi_2(x), \ 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

здесь $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ – заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(h) = \psi_2(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \quad \varphi_2(h) = \psi_2(l).$$

2^0. **Единственность решение задачи Дирихле.** Справедлива следующая **Теорема 1.** *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D); \tag{4}$$

$$a_1(x, y), b_1(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), \ c_1(x, y) \in C(D) \tag{5}$$

и выполнены следующие неравенства

$$1) \ a(x, y)\xi^2 + 2b(x, y)\xi\eta + c(x, y)\eta^2 \geq 0 \quad \forall \xi, \eta \in D;$$

$$2) \ a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 < 0 \quad \forall (x, y) \in D;$$

тогда регулярное в области D решение $u(x, y)$ задачи Дирихле единственно.

Доказательство. Покажем, что однородная задача Дирихле, т.е.

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi_i(y) = \psi_i(x) = 0, \ i = 1, 2,$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство этого факта проведем на основании интегрального тождества. Умножая уравнение (1) на функцию $u(x, y)$ и интегрируя по частям в области D, имеем

$$\iint\limits_D u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}dxdy + \iint\limits_D uLudxdy = 0. \tag{6}$$

Преобразуем подынтегральные выражения следующим образом:

$$u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha uu_{xy} - \frac{\beta}{2}u_y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta uu_{xy} - \frac{\alpha}{2}u_x^2\right);$$

$$u\left(a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x + buu_y - \frac{1}{2}(a_x + b_y)u^2\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x + cuu_y - \frac{1}{2}(b_x + c_y)u^2\right] - (au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2) + \frac{1}{2}(a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy})u^2;$$

$$u(a_(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1u)^2 + \frac{\partial}{\partial y}(b_1u)^2\right] - \frac{1}{2}(a_{1x} + b_{1y} - 2c_1)u^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (6) и учитывая однородные граничные условия, имеем

$$\iint\limits_D \left(a(x,y)u_x^2 + 2b(x,y)u_xu_y + c(x,y)u_y^2\right)dxdy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_D (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1)u^2dxdy = 0.$$

Отсюда в силу условий теоремы 1 получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$. Тем самым теорема 1 доказана.

3^0. Задача Гурса, построение функции Римана.

В той же области D рассмотрим следующую вспомогательную задачу: *найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0,y) = \varphi(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{8}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(y)$ – пока неизвестные функции такие, что

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(0) = \psi_1'(0), \quad \varphi_1'(0) = \psi(0), \quad \varphi'(0) = \psi'(0).$$

Очевидно, что прямые $x = const$ и $y = const$ являются характеристиками уравнения (1), поэтому задачу (1), (7)–(8) будем называть задачей Гурса.

Имеет место следующая теорема разрешимости задачи Гурса.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (4), (5) теоремы 1 и пусть*

$$f(x,y) \in C^1(\bar{D}), \quad f(0,y) = f(x,0) = 0; \tag{9}$$

$$\varphi_1(y), \varphi(y) \in C^2[0,h], \quad \psi_1(x), \psi(x) \in C^2[0,l]. \tag{10}$$

Тогда задача Гурса разрешима и притом единственным образом.

Согласно работы [10] функция Римана $v = v(x,y;\xi,\eta)$ для уравнения (1) однозначно определяется следующими требованиями:

$$M^*v = 0, \tag{11}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \omega_1(\xi,y), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta) = exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_\eta^y a(\xi,t)dt\right), \tag{12}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta) = \omega_2(x,\eta), \quad v_y(x,\eta;\xi,\eta) = exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_\xi^x c(t,\eta)dt\right), \tag{13}$$

здесь

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{xy} + (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (a_1v)_x - (b_1v)_y + c_1v,$$

а $\omega_1(\xi, y)$ и $\omega_2(x, \eta)$ являются решениями следующих задач Коши, соответственно:

$$\beta\omega_{1yy}(\xi, y) - b(\xi, y)\omega_{1y}(\xi, y) + a_1(\xi, y)\omega_1(\xi, y) = 0,$$

$$\omega_1(\xi, \eta) = 0, \quad \beta\omega_{1y}(\xi, \eta) = 1; \tag{14}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x, \eta) - b(x, \eta)\omega_{2x}(x, \eta) + b_1(x, \eta)\omega_2(x, \eta) = 0,$$

$$\omega_2(\xi, \eta) = 0, \quad \alpha\omega_{2x}(\xi, \eta) = 1. \tag{15}$$

Очевидно, задачи (14) и (15) однозначно разрешимы.

Известно, что (см., например, [5, 9, 10]) $u(x, y),\ v(x, y) \in C^2(\overline{D}) \bigcap C^3(D)$ и для регулярного решения задачи Гурса имеет место интегральное представление

$$u(\xi, \eta) = \alpha v_x(0, \eta; \xi, \eta)\varphi_1(\eta) + \beta v_y(\xi, 0; \xi, \eta)\psi_1(\xi) - \int\limits_0^\xi [\beta v(x, 0; \xi, \eta)\psi'(x) +$$

$$+ c(x, 0)v(x, 0; \xi, \eta)\psi(x) + A(x; \xi, \eta)\psi_1'(x) + B(x; \xi, \eta)\psi_1(x)]dx -$$

$$- \int\limits_0^\eta [\alpha v(0, y; \xi, \eta)\varphi'(y) + a(0, y)v(0, y; \xi, \eta)\varphi(y) + A_1(y; \xi, \eta)\varphi_1'(y) +$$

$$+ B_1(y; \xi, \eta)\varphi_1(y)]dy + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta v(x, y; \xi, \eta)f(x, y)dxdy, \tag{16}$$

где (ξ, η) – произвольная точка области D,

$$A(x, \xi, \eta) = -\alpha v_x(x, 0; \xi, \eta) + b(x, 0)v(x, 0; \xi, \eta);$$

$$B(x; \xi, \eta) = -\beta v_{xy}(x, 0; \xi, \eta) - b(x, 0)v_x(x, 0; \xi, \eta) -$$

$$- c(x, 0)v_y(x, 0; \xi, \eta) - [b_x(x, 0) + c(x, 0) - b_1(x, 0)]v(x, 0; \xi, \eta);$$

$$A_1(y; \xi, \eta) = -\beta v_y(0, y; \xi, \eta) + b(0, y)v(0, y; \xi, \eta);$$

$$B_1(y; \xi, \eta) = -\alpha v_{xy}(0, y; \xi, \eta) - a(0, y)v_x(0, y; \xi, \eta) -$$

$$- b(0, y)v_y(0, y; \xi, \eta) - [a_x(0, y) + b_y(0, y) - a_1(0, y)]v(0, y; \xi, \eta).$$

Таким образом, решение задачи Гурса (1), (7)–(8) представимо в явном виде с помощью формулы (16), если известна функция Римана $v(x, y; \xi, \eta)$.

В работе [10] методом редукции к нагруженным интегральным уравнением Вольтерра доказана следующая теорема существования и единственности функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$, определяемой по формулам (11)–(15).

Теорема 3. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (4) – (5), то функция Римана* $v(x, y) = v(x, y; \xi, \eta)$ *для оператора* M *существует, единственна и справедливо равенство*

$$v(x, y; \xi, \eta) = v^*(\xi, \eta; x, y), \tag{17}$$

где $v^*(x, y; \xi, \eta)$ *– функция Римана для сопряженного уравнения* $M^*v = 0$.

Доказательство теоремы 3 нетрудно провести, преобразуя задачу (10)–(14) к нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(x, y) = \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \int\limits_{\beta x - \alpha y}^{\alpha x + \beta y} K_0 v(\bar{x}(s), \bar{y}(s))ds + \gamma(x, y), \tag{18}$$

здесь

$$K_0v(\bar{x}(s),\bar{y}(s)) = 2b(\bar{x}(s),\bar{y}(s))v(\bar{x}(s),\bar{y}(s)) + \int\limits_{\xi}^{\bar{x}(s)} \left[c_y(t,\bar{y}(s)) - b_1(t,\bar{y}(s))\right] v(t,\bar{y}(s))ds +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{\bar{x}(s)} \left[a_x(\bar{x}(s),\tau) - a_1((\bar{x}(s),\tau)\right] v(\bar{x}(s),\tau)d\tau + \int\limits_{\xi}^{\bar{x}(s)} \int\limits_{\eta}^{\bar{y}(s)} c_1(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt;$$

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta^2 x - \alpha\beta y + \alpha s\right), \quad \bar{y}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta x + \alpha^2 y + \beta s\right);$$

$$\gamma(x,y) = -(\alpha+\beta) + \alpha exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,t)dt\right) + \beta exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x} c(t,\eta)dt\right),$$

решение которого построено методом итерации.

Формула (16) позволяет исследовать различные локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения вида (1).

4^0. **Сведение задачи Дирихле к интегральным уравнениям.** Представление (16) после некоторых преобразований запишем в виде

$$u(\xi,\eta) = F(\xi,\eta) - \alpha v(0,\eta;\xi,\eta)\varphi(\eta) - \beta v(\xi,0;\xi,\eta)\psi(\xi) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\xi} [\beta v_x(x,0;\xi,\eta) - c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)]\psi(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\eta} [\alpha v_y(0,y;\xi,\eta) - a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)]\varphi(y)dy, \tag{19}$$

где

$$F(\xi,\eta) = [\alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta) - A_1(\eta;\xi,\eta)]\varphi_1(\eta) + [\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta) - A(\xi;\xi,\eta)]\psi_1(\xi) +$$

$$+ \alpha v(0,0;\xi,\eta)\psi_1'(0) + \beta v(0,0;\xi,\eta)\varphi_1'(0) + [A_1(0;\xi,\eta) + A(0;\xi,\eta)]\psi_1(0) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\xi} [A_x(x;\xi,\eta) - B(x;\xi,\eta)]\psi_1(x)dx + \int\limits_{0}^{\eta} [A_{1y}(y;\xi,\eta) - B_1(y;\xi,\eta)]\varphi_1(y)dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta} v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy.$$

В силу граничных условий $u(l,y) = \varphi_2(y)$, $u(x,h) = \psi_2(x)$ находим неизвестные функции $\varphi(y)$, $\psi(x)$.

Полагая в представлении (19) $\xi = l$ и учитывая условие $u(l,\eta) = \varphi_2(\eta)$, после ряда преобразований получим

$$\alpha v(0,\eta;l,\eta)\varphi(\eta) + \int\limits_{0}^{\eta} k_1(y,\eta)\varphi(y)dy + \int\limits_{0}^{l} k_2(x,\eta)\psi(x)dx = g_1(\eta), \tag{20}$$

здесь

$$k_1(y,\eta) = a(0,y)v(0,y;l,\eta) - \alpha v_y(0,y;l,\eta), \quad k_2(x,\eta) = c(x,0)v(x,0;l,\eta) - \beta v_x(x,0;l,\eta)$$

и $g_1(\eta)$ – известная непрерывно–дифференцируемая функция.

Подставляя (19) в граничное условие $u(x,h) = \psi_2(x)$, после некоторых преобразований имеем

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi) + \int\limits_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)dx + \int\limits_0^h k_4(y,\xi)\varphi(y)dy = g_2(\xi), \tag{21}$$

где

$$k_3(x,\xi) = c(x,0)v(x,0;\xi,h) - \beta v_x(x,0;\xi,h), \quad k_4(y,\xi) = a(0,y)v(0,y;\xi,h) - \alpha v_x(0,y;\xi,h),$$

а $g_2(\xi)$ –известная непрерывно-дифференцируемая функции.

Таким образом, разрешимость задачи Дирихле редуцирована к разрешимости системы интегральных уравнений (20) – (21).

Функция $v(0,\eta;l,\eta)$ на отрезке $[0,h]$ ни где не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$\alpha v_{xx}(x,\eta;l,\eta) - b(x,\eta)v_x(x,\eta;l,\eta) + b_1(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta) = 0,$$
$$v(0,\eta;l,\eta) = 0, \quad v(l,\eta;l,\eta) = 0. \tag{22}$$

Так будет, когда $b_1(x,y) \le 0$. Действительно, если при некотором $\eta \in [0,h]$ функция $v(0,\eta;l,\eta) = 0$, то задача (22) имеет только тривиальное решение $v(x,\eta;l,\eta) = 0$, значит, $v_x(x,\eta;l,\eta) = 0$. Что противоречит условию $\alpha v_x(l,\eta;l,\eta) = 1$.

Аналогичное рассуждение имеет место и для функции $v(\xi,0;\xi,h)$.

Обращая вольтерровскую часть уравнения (20) относительно $\varphi(\eta)$, имеем

$$\varphi(\eta) = g_3(\eta) - \int\limits_0^l k_5(x,\eta)\psi(x)dx, \tag{23}$$

где

$$g_3(\eta) = \frac{g_1(\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)} - \int\limits_0^\eta R_1(y,\eta)\frac{g_1(y)}{\alpha v(0,y;l,y)}dy,$$

$$k_5(x,\eta) = \frac{k_2(x,\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)} + \int\limits_0^\eta R_1(y,\eta)\frac{k_2(x,y)}{\alpha v(0,y;l,y)}dy,$$

$R_1(y,\eta)$ – резольвента ядра $k_1(y,\eta)/(\alpha v(0,\eta;l,\eta))$.

Подставляя значение $\varphi(\eta)$ в уравнение (21), получим

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi) + \int\limits_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)dx + \int\limits_0^l k_6(x,\xi)\psi(x)dx = g_4(\xi), \tag{24}$$

здесь

$$k_6(x,\xi) = \int\limits_0^h k_4(y,\xi)k_5(x,y)dy, \qquad g_4(\xi) = g_2(\xi) - \int\limits_0^h k_4(y,\xi)g_3(y)dy.$$

Наконец, обращая вольтерровскую часть уравнения (24), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\psi(\xi)$:

$$\psi(\xi)+\int\limits_0^l K(x,\xi)\psi(x)dx=g_5(\xi), \tag{25}$$

где

$$K(x,\xi)=\frac{k_6(x,\xi)}{\beta v(\xi,0;\xi,h)}+\int\limits_0^\xi R_3(x,\xi_1)\frac{k_6(\xi_1,\xi)}{\beta v(\xi_1,0;\xi_1,h)}d\xi_1;$$

$$g_5(\xi)=\frac{g_4(\xi)}{\beta v(\xi,0;\xi,h)}+\int\limits_0^\xi R_3(x,\xi)\frac{g_4(x)}{\beta v(x,0;x,h)}dx,$$

$R_3(x,\xi)$ – резольвента ядра $k_3(x,\xi)/(\beta v(\xi,0;\xi,h))$.

В силу условий теоремы 4 заметим, что $g_5(\xi)\in C^2[0,l]$, а гладкость ядра $K(x,\xi)$ следует из свойств функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$.

Следовательно, разрешимость задачи Дирихле для уравнения (1) эквивалентно сведена к разрешимости интегрального уравнения (25). В силу единственности решения задачи Дирихле и альтернативы Фредгольма уравнение (25) имеет единственное решение.

Нетрудно заметить, что $\psi(\xi)\in C^2[0,l]$ и $\varphi(\eta)\in C^2[0,h]$. Следовательно, функция $\psi(\xi)$ найдена. Тогда другая неизвестная функция $\varphi(\eta)$ определяется по формуле (23). Подставляя значения этих функций в представление (16), полностью определим решение задачи Дирихле для уравнения (1).

Таким образом, резюмируя изложенное выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть*

$$\varphi_i(y)\in C^2[0,h],\quad \psi_i(x)\in C^2[0,l],\ (i=1,2),\quad f(x,y)\in C^1(\overline{D}),$$

кроме того $f(x,0)=f(0,y)=0$. *Тогда регулярное решение задачи Дирихле существует.*

В заключение автор, пользуясь случаем выражает благодарность академику АН РУз Т.Д. Джураеву за постоянное внимание при выполнении работы, за полезные обсуждения результатов и ряд ценных советов.

Цитированная литература

1. **Джураев Т.Д., Попелек Я.** //Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 10. С.1734–1745.
2. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М.; 1995.
3. **Руденко О.В., Солуян С.Н.** Теоретические основы нелинейной акустики. М.; 1975.
4. **Жегалов В.И.,Миронов А.Н.** Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань., 2001.
5. **Шхануков М.Х.** //Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, №4. С.689–699.
6. **Colton D.** //J. Different. Equations. 1972. V.12, № 3. P.559–565.
7. **Randell W.** //J. Differential Equat. 1978. V.27, № 3. P.394–404.
8. **Напсо А.Ф.** // Владикавказский математический журнал. 2001. Т.3, Вып. 4. С.36–39.
9. **Джохадзе О.М.** //Сибирский математический журнал. 2002. Т.43, № 2. С.295–313.
10. **Джураев Т.Д., Зикиров О.С.** //В кн. "Неклассические уравнения математической физики". Новосибирск, 2005. С.98–109.

Поступила в редакцию 17.02.2006г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 519.6:537.12:531.1 2000 MSC: 35L15

Alexeyeva L.A. **Generalized functions method in nonstationary boundary value problems for wave equation.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.16–32.

Multivariate analogue of Dalamber's equation in the space of generalized functions is considered. One method of obtaining conditions on fronts of shock waves is stated. A method of generalized functions for the building of solutions of nonstationary boundary value problems for wave equations in spaces of different dimensionality is elaborated. Dynamic analogues of Green's and Gauss's formulaes for solutions of wave equation in the space of generalized functions are built. Their regular integral representations and singular boundary integral equations for solving the nonstationary problems of mathematical physics, including at presence of shock waves, are constructed.
References -10.

УДК: 519.6:537.12:531.1 2000 MSC: 35L15

Алексеева Л.А. **Шекаралық есептің толқын теңдеуі үшін жалпыланған функция әдісі.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.16–32.

Көп өлшемді Даламбер теңдеуінің аналогі жазық жалпыланған функцияда қарастырылған. Соқпа толқын фронтында құру шартының әдісі көрініс табады. Бастапқы шекаралық есептің шешімін тұрғызумен қатар толқын теңдеуінің жазықтық тағы әр түрлі өлшемі үшін жалпыланған функция теңдеуі жұмыс істейді. Грин және Гаусс формуласының динамикалық аналогиясы толқын теңдеуінің шешімі үшін жазық жалпыланған функцияда құрылған. Олардың регулярлы интегралды көрсеткіштері және сингулярлы шекаралық интегралды теңдеулері бастапқы шекаралық математикалық физика есептері үшін, сонымен қатар соқпа толқын болған кезінде құрылған.
Әдебиеттер тізімі - 10.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 45D05

Amangalieva M.M, Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. **Special Volterra Integral Equation of second Kind. 1. Homogeneous case.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.33–46.

Questions of solvability of special Volterra Integral Equation of second Kind and its adjoint Equation are considered. It is proved that the Equation is Noetherian and its Index is equal 1. The Results are used for Investigation of nonlocal internal-boundary Value Problems in quarter Plane for parabolic Equation.
References —12.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 45D05

Аманғалиева М.М., Жиенәлиев М.Т.,Рамазанов М.И.,Түймебаева А.Е. **Вольтерра типтес екінші текті арнайы интегралдық теңдеу. 1. Біртекті жағдай** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.33–46.

Вольтерра типтес екінші текті арнайы интегралдық және оның түйіндес теңдеулері үшін шешілімділік мәселелері қарастырылады. Зерттелген теңдеудің нетерлі және оның индексі бірге тең екендігі көрсетілген. Алынған нәтижелер ширек жазықтықта параболалық теңдеу үшін локалсыз ішкі-шекаралық есептерді зерттеуде пайдаланған.
Библ. — 12.

УДК: 518.9 2000 MSC: 42A16

Amirgalieva C.H. **Matrix convexity of sets for different family of operators.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.47–53.

In this paper some results of matrix-convex sets for finite and infinite families of operators using in differential games are under consideration.
References — 6

УДК: 518.9 2000 MSC: 42A16

Әмірғалиева С.Н. **Әртүрлі операторлар әулеті үшін жиындардың матрицалық дөңестігі.**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.47–53

Жұмыста шекті әулеті және шексіз операторлар үшін матрицалы-дөңес хақында кейбір нәтижелер қарастырылып, олардың көмегі арқылы дифференцалдық ойындардағы ойыншылардың стратегиясы.
Библ. — 6.

УДК: 517.929 2000 MSC: 35J20

Akhmetzhanov M.A. **On division of one class of differential operators of hyperbolic type.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.54–60.

Under some coefficients limits theorems of resolvent existence and division of one class of differential operators of hyperbolic type are proved.
References — 7.

УДК: 517.929 2000 MSC: 35J20

Ахмеджанов М.А. **Гиперболалық тектес дифференциалдық операторлардың бір класының бөлінімдігі туралы.**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.54–60.

Коэффициенттеріне кейбір шектеулер қойған жағдайда гиперболалық тектес дифференциалдық операторлардың бір класының резольвентасының бар болуы мен бөлінімдігі туралы теоремалар дәлелденген.
Библ. — 7.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

Dzhumabaev D.S. Ospanov M.N. **On boundedness on a strip of solution and its derivatives of system of hyperbolic equations with unbounded coefficients.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.61–66.

Sufficient conditions of boundedness on a strip of mixed derivative of solution of system of hyperbolic equations are obtained.
References — 3.

УДК: 517.929.7 2000 MSC: 34K10, 34K13

Жұмабаев Д.С., Оспанов М.Н. **Коэффициенттері шенелмеген гиперболалық теңдеулер жүйесінің шешімінің және олардың туындыларының жолақтағы шектелулері туралы.**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.61–66.

Гиперболалық теңдеулер жүйесінің шешімінің аралас туындысының жолақтағы шектелуінің жеткілікті шарттары тағайындалған.
Библ. — 3.

УДК: 622.02+532.5 2000 MSC: 86A60

Martynov N.I.,Tanibergenov A.G. **Numerical simulation of generation of salt diapirs in the Earth.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.67–73.

This article generalizes results of numerical modulation of salt dome tectonics.
References — 23.

УДК: 622.02+532.5 2000 MSC: 86A60

Мартынов Н.И., Танибергенов А.Г. **Сандық үлгілеуінің пайда болуының жер қыртысындағы тұз диапирлері.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.67–73.

Жер қыртысындағы тұз диапирлердің (күмбездердің) сандық үлгілеуінің нәтижелері келтірілген.
Библ. — 23.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Nazarova K.J. **On a criterion of correct solvability of two-points boundary value problem.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.74–79.

Recurrent formulas for the block finding elements of matrix which is inverses to $Q_\nu(2h)$ are obtained. Interconnection between constant of correct solvability of linear two-points boundary value problem and a number $\gamma_\nu(h)$ is received.
References — 3.

УДК: 519.624 2000 MSC: 34B37

Назарова К.Ж. **Екі нүктелі шекаралық есептің корректті шешілетіндігінің белгісі туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.74–79.

$Q_\nu(2h)$ матрицасына кері матрицаның элементтерін табудың рекуррентті формулалары алынған. Сызықты екі нүктелі шеттік есептің корректі шешілімділігінің тұрақтысымен $[Q_\nu(2h)]^{-1}$ матрицасының нормасын жоғарыдан шектейтін $\gamma_\nu(h)$ санының арасындағы байланыс тағайындалған.
Библ. — 3.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Pankratova I.N. **One-Dimensional Representations of Nonlinear Many Dimensional Maps.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.80–83.

Necessary and sufficient conditions of one-dimensional representation of first return map of arbitrary many dimensional map in simplex with finite size are obtained.

References — 12.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Панкратова И.Н. **Сызықты емес көпөлшемді бейнелеудің бір өлшемді кейіптелуі.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.80–83.

Ізбасуды еркін көпөлшемді бейнелеудің симплексте бір өлшемді бейнелену кейіптемесінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Библ. —12.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

Sartabanov Zh.A. **On adaption of power series method with trigonometric basis for study of one problem for linear systems of differential equations.**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.84–90.

A concept of power series method with trigonometric bases, that is adopted to homogeneses linear systems is under consideration.

References — 3.

УДК: 517.925 2000 MSC: 34B40

Сартабанов Ж.А. **Сызықты дифференциалдық теңдеулер үшін бір шеттік есепті зерттеуге тригонометриялық негіздері бар дәрежелік қатарлар әдісін қолдану туралы.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.84–90.

Біртектес 2π-периодты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлден өзгеше периодты шешімдерінің болмайтындығының шартын тағайындауда және сәйкес біртектес емес теңдеудің жалғыз периодты шешімін құруда тригонометриялық негіздері бар дәрежелік қатарлар әдісін қолдану идеясы баяндалған.

Библ. — 3.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Sultanbekova A.O. **About character of dependence of Lyapunov exponents on linear parameter of linear second order differential equation.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.91–95.

Lyapunov exponents of one-parametrical family of linear second order differential equations as functions of parameter are investigated.

References — 7.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Сұлтанбекова А.О. **Ляпунов көрсеткіштерінің екінші ретті сызықты дифференциалды теңдеудің сызықты параметрімен тәуелділік мазмұны.**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.91–95.

Ляпунов көрсеткіштерінің бір параметрлі тұқымдастықтары екінші ретті сызықты дифференциалды теңдеуі параметр функциясы ретінде зерттеледі.

Библ. — 7.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L25, 35L35

Zikirov O.S. **On one boundary value problem for partial differential equation of the third order.** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №. 1 (19). P.96–102.

A question of a unique solvability of Dirichlet problem for one class of partial differential equations of the third order is under consideration.
References — 10.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L25, 35L35

Зикиров О.С. **Үшінші ретті дербес туындылы теңдеулер үшін бір шекаралық есеп туралы.**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 1 (19). Б.96–102.

Үшінші ретті дербес туындылы теңдеулер үшін Дирихле есебінің бір мәнді шешімділігінің мәселесі зерттеледі. Басты бөлігінде гиперболалық операторлы үшінші ретті сызықтық теңдеу үшін Риман функциясының көмегімен зерттелінді, есептің шешімінің болуы және жалқылығы туралы теорема дәлелденеді.
Библ. — 10.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.