ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2012, том 12, № 4 (46)

Институт математики и математического
моделирования МОН РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №4 (46), 2012

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),

факс: 8 (727) 2 72 70 24,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12 **№ 4 (46)** **2012**

CONTENTS

Volume 12 **No. 4 (46)** **2012**

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.946

Б. Абилкасымулы, Р. Наметкулова, А.У. Серикбаев
Алматинский индустриальный колледж
050008, Алматы, ул. Толе би, 62, e-mail: bake.1987@mail.ru
Казахский национальный аграрный университет
050010, Алматы, пр. Абая, 8, e-mail: aserikbayev@rambler.ru

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСТАНЦИОННОЙ ОПТИКИ

В работе рассмотрена обратная задача потенциала Кеплера с постоянной плотностью для областей, близких к данным, т.е. отыскивается область, мало отличающаяся от сферы.
Ключевые слова: *обратная задача потенциала Кеплера, постоянная плотность, интегральный оператор обращения.*

Введение

Для потенциала "обратных квадратов расстояний" впервые были исследованы прямые и обратные задачи в работе В.Р. Кирейтова [1], где рассмотрены некоторые вопросы, связанные с обобщением этого потенциала на случай многомерного, геометрически неоднородного пространства. Потенциал "обратных квадратов расстояний", в соответствии с историей его возникновения именуется в настоящей работе потенциалом Кеплера. В работе А.У. Серикбаева [2, 3] были исследованы вопросы единственности и устойчивости решений обратных задач определения плотности; при этом вопросы определения области при заданных значениях потенциала и плотности до сих пор не были исследованы. Эта задача относится к классу

Keywords: *inverse Kepler potential problem, constant density, integral inversion operator*
2010 Mathematics Subject Classification: 60H10

некорректных задач; кроме того, интегральный оператор обращения является нелинейным. Поэтому в данной работе вначале исследованы аналитические свойства потенциала Кеплера и в классе аналитических функций построено решение обратных задач "в малом".

Рассмотрим сферу радиуса A, центр которой лежит на оси OZ под плоскостью $z = 0$ на расстоянии h. Обозначим через $A\xi$ неизвестное нам уклонение некоторой точки искомого тела от рассматриваемой сферы. При этом уравнение искомой поверхности в полярных координатах, имеющих полюс в центре шара, запишется так:

$$r = A(1+\xi), \tag{1}$$

где ξ есть некоторая функция долготы ψ и дополнения широты θ. Найдем потенциал Кеплера для искомого тела в какой-нибудь внешней точке x, выразив его через функцию ξ. С этой целью введем в рассмотрение семейство подобных поверхностей

$$r = a(1+\xi), \tag{2}$$

получающихся при изменении параметра a от 0 до A. Этими поверхностями внутренность всего искомого тела разделяется на тонкие пленки.

Подсчитаем элемент объема $d\tau$. Обозначая через $d\sigma$ элемент поверхности сферы S радиуса единица, имеем

$$d\tau = a^2(1+\xi)^2 d\sigma \frac{dr}{da} da,$$

но $\dfrac{dr}{da} = 1+\xi$, следовательно,

$$d\tau = a^2(1+\xi)^3 d\sigma da.$$

Найдем теперь выражение потенциала Кеплера [2]

$$W(x) = \int\limits_{D_\xi} \frac{\mu(y)}{r_{xy}^2}\, d\tau,$$

где r_{xy} – расстояние от точки M до произвольной точки N рассматриваемой области D_ξ,

$$r_{xy} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrcos\varphi}.$$

Если считать плотность $\mu = 1$, то

$$W(x) = \int\limits_0^A \int\limits_{(S)} \frac{a^2(1+\xi)^3}{R^2 + r^2 - 2Rrcos\varphi} dad\sigma, \tag{3}$$

где

$$\frac{a^2(1+\xi)^3}{R^2\left(1 - 2\frac{r}{R}cos\varphi + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} = \frac{1}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n, \tag{4}$$

$U_n(x) = \dfrac{2^n(n+1)!}{(2n+1)!}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]$ – полином Чебышева второго рода (полином Гегенбауэра при $\sigma = 1$).

Ряд (4) сходится, если $\left|\dfrac{r}{R}\right| < 1$. Сходимость ряда будет иметь место для тех точек пространства, для которых

$$R > A(1 + \xi_{max}).$$

В частности, рассматриваемый ряд будет сходиться во всех точках взятой нами плоскости, если

$$\xi_{max} < \frac{h - A}{A}. \tag{5}$$

Будем считать в дальнейшем, что это условие соблюдается. Подставим выражение (4) в формулу (3), получим

$$W(x) = \int_0^A \int_{(S)} \frac{a^2(1+\xi)^3}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n sin\theta\, d\theta\, d\psi\, da =$$

$$= \int_0^A \int_{(S)} \frac{a^2(1+\xi)^3}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^n(1+\xi)^n}{R^n} sin\theta\, d\theta\, d\psi\, da =$$

$$= \int_0^A \int_{(S)} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}(1+\xi)^{n+3}}{R^{n+2}} sin\theta\, d\theta\, d\psi\, da. \qquad (6)$$

Здесь выражение $(1+\xi)^{n+3}$ разложим в ряд по степеням ξ. Имеем

$$(1+\xi)^{n+3} = 1 + (n+3)\xi + \frac{(n+3)(n+2)}{2!}\xi^2 + \ldots +$$

$$+\frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!}\xi^m + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!}\xi^m.$$

Подставим это разложение в формулу (6). Получим для потенциала Кеплера следующую формулу

$$W(x) = \int_0^A \int_{(S)} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}}{R^{n+2}}\Big\{1+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!}\xi^m\Big\} sin\theta d\theta d\psi da =$$

$$= \int_0^A \int_{(S)} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}}{R^{n+2}} sin\theta d\theta d\psi.$$

Но $\int\limits_0^A \int\limits_{(S)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\dfrac{a^{n+2}}{R^{n+2}} \sin\theta \; d\theta d\psi da$ есть потенциал Кеплера для сферы радиуса A,

$$\int\limits_0^A \int\limits_{(S)} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}}{R^{n+2}} sin\theta d\theta d\psi da = \frac{4}{3}\pi A^3 \frac{1}{R^2},$$

поэтому в той части пространства, где $R > A(1+\xi_{max})$, имеет место следующее сходящееся разложение потенциала:

$$W(x) = \frac{4}{3}\pi A^3 \frac{1}{R^2} + \int\limits_0^A da \int\limits_{(S)} \sum_{m=1}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}}{R^{n+2}} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!} \xi^m sin\theta d\theta d\psi.$$

Это разложение может быть несколько упрощено. Интегрирование по поверхности сферы и интегрирование по переменной можно поменять местами. Интегрирование общего члена разложения по переменной выполняется. Тогда мы можем записать потенциал W(x) в виде следующего ряда:

$$W(x) = \frac{4}{3}\pi A^3 \frac{1}{R^2} + \int\limits_0^A \; da \int\limits_{(S)} \sum_{m=1}^{\infty} U_n(cos\varphi)\frac{a^{n+2}}{R^{n+2}} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!} \xi^m sin\theta \; d\theta d\psi. \qquad (7)$$

Учитывая, что $\cos\varphi = cos\theta' cos\theta + sin\theta' sin\theta cos(\psi-\psi') = \chi'\chi + \sqrt{1-\chi'^2}\sqrt{1-\chi^2}\cos(\psi-\psi')$, где $\chi = cos\theta, \chi' = cos\theta'$, имеем

$$U_n(cos\varphi) = U_n(x)U_n(\chi') +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-\chi^2)^{\frac{k}{2}}(1-\chi'^2)^{\frac{k}{2}}}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n+k)} cosk(\psi-\psi')\frac{d^k U_n(\chi)}{d\chi^k}\frac{d^k U_n(\chi')}{d\chi'^k}.$$

Если рассматриваемое тело симметрично относительно вертикали центра сферы, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cos\varphi)\frac{A^{n+3}}{(n+3)R^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n+3}}{(n+3)R^{n+2}}U_n(\chi)\ U_n(\chi').$$

Формула (7) в предположении указанной симметрии имеет вид

$$W(x) = \frac{4}{3}\pi A^3\frac{1}{R^2} + 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n+3}}{(n+3)R^{n+2}}U_n(\chi)U_n(\chi')\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n+3)(n+2)\ldots(n+3-(m-1))}{m!}\xi^m d\chi'. \tag{8}$$

Допустим, что на плоскости XOY известны значения потенциала $W|_{z=0}$ искомого тела. Мы предполагаем, что эти значения симметричны относительно начала координат и мало отличаются от значений потенциала Кеплера для сферы радиуса A с центром в точке $(0,0,-h)$. Обозначая через ρ расстояние точки плоскости от начала координат, мы задаем $W|_{z=0}$ в следующем виде:

$$W|_{z=0} = \left[\frac{4}{3}\pi\ A^3\frac{1}{R^2}\right]_{z=0} + \alpha\ f(\rho), \tag{9}$$

где $f(\rho)$ есть заданная функция переменной ρ, α – малый параметр.

Переменную ρ можно выразить через косинус дополнения широты точки, лежащей на плоскости

$$\rho = h\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi}. \tag{10}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{R} = \frac{\chi}{h}. \tag{11}$$

Соотношение (10) позволяет нам записать формулу (9) в виде

$$W|_{z=0} = \frac{4}{3}\pi A^3\Big(\frac{\chi}{h}\Big)^2 + \alpha\ F(\chi). \tag{12}$$

На основании формулы (8) составим левую часть этого уравнения. После простых преобразований найдем уравнение для определения функции ξ:

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(n+3)R^n} U_n(\chi) U_n(\chi') \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\dots(n+3-(m-1))}{m!} \xi^m d\chi' =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi A^3} R^2 F(\chi).$$

Введем обозначения: $\dfrac{\alpha}{2\pi A^3} = \lambda, R^2 F(\chi) = \dfrac{h^2}{\chi^2} F(\chi) = \Phi(\chi)$. Получим

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(n+3)R^n} U_n(\chi)\ U_n(\chi') \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)\dots(n+3-(m-1))}{m!} \xi^m\ d\chi' = \lambda\Phi(\chi). \qquad (13)$$

Аналитические свойства потенциала Кеплера для тела вращения

Напишем выражение потенциала Кеплера однородного тела, плотность которого – единица:

$$W = \int \frac{d\tau}{r_{MN}^2}$$

и выведем из него ряд свойств функции, изображающей значения на плоскости этого потенциала.

Потенциал W тела, симметричного относительно оси OZ, может быть представлен следующим рядом:

$$W = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n} U_n(\chi), \qquad (14)$$

где

$$a_n = \frac{2\pi}{n+3} A^{n+3} \int_{-1}^{+1} (1+\xi)^{n+3} U_n(\chi') d\chi'.$$

Ряд (14) будет сходиться во всех точках плоскости $z = 0$, если будет соблюдаться условие (5).

Напишем выражение функции W в точках на плоскости $z = 0$:

$$W = \frac{\chi^2}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{h^n} \chi^n U_n(\chi). \tag{15}$$

Рассмотрим свойства функций, определяемых разложениями вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi^n U_n(\chi), \tag{16}$$

где χ – комплексная переменная.

Для ряда (15) коэффициенты b_n удовлетворяют неравенству

$$|b_n| = \left| \frac{a_n}{h^n} \right| \leqslant \frac{4\pi h^3}{n+3} \frac{A^{n+3}}{h^{n+3}} (1+\gamma)^{n+3}.$$

Так как $\xi_{max} = \gamma < \dfrac{h-A}{A}$, то можно найти такое число $q < 1$, которое позволило бы вместо предыдущего неравенства выбрать следующее:

$$|b_n| < N q^n, \tag{17}$$

где N – некоторое постоянное число. Будем в дальнейшем рассматривать ряды (16) с коэффициентами, подчиняющимися неравенству (17). Такие ряды будем называть регулярными.

Найдем теперь область сходимости регулярных рядов. Между тремя последовательными полиномами Чебышева второго рода существует следующее рекуррентное соотношение:

$$U_{n+1} - 2\chi U_n + U_{n-1} = 0.$$

Отсюда следует, что многочлены $Y_n = \chi^n U_n(\chi)$ будут удовлетворять соотношению $Y_{n+1} - 2\chi^2 Y_n + \chi^2 Y_{n-1} = 0$. Найдем $\lim \dfrac{Y_{n+1}}{Y_n}$. Пуанкаре указал правило для определения предела отношения двух последовательных полиномов, связанных тройным рекуррентным соотношением. Согласно этому правилу искомый предел будет равен корню квадратного уравнения

$$\alpha^2 - 2\chi^2\alpha + \chi^2 = 0, \tag{18}$$

модуль которого наибольший. Отсюда $\alpha = \chi^2 \pm \sqrt{\chi^4 - \chi^2}$. Для исследования введем новую переменную

$$\chi = \frac{1}{2}\Big(\xi + \frac{1}{\xi}\Big). \tag{19}$$

В новой переменной ξ корни α_1 и α_2 уравнения (18) запишутся

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1+\xi^2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\frac{1+\xi^2}{\xi^2}.$$

Преобразование (19) ставит в соответствие плоскости комплексной переменной χ, разрезанной вдоль прямой $-1, +1$, внешнюю часть круга $|\xi| = 1$ плоскости комплексной переменной ξ или внутренность того же круга.

Выберем в качестве области плоскости переменной ξ, конформно отображаемой на плоскость переменной χ, внешнюю часть круга $|\xi| = 1$. Тогда $\lim \dfrac{Y_{n+1}}{Y_n}$ должен быть равен $\dfrac{1}{2}(1+\xi^2)$. Повторяя общие рассуждения Пуанкаре, относящиеся к сходимости рядов многочленов, связанных рекуррентными соотношениями, мы приходим к тому заключению, что область абсолютной и равномерной сходимости ряда (16) ограничена кривой

$$\frac{1}{2}|1+\xi^2| = R, \quad |\xi| \geqslant 1,$$

R есть радиус круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\chi^n$.

Так как ряд (16) – регулярный, то имеет место неравенство (17), откуда $R \geqslant \dfrac{1}{q} > 1$. Таким образом, ряд (16) сходится, во всяком случае, внутри области

$$\frac{1}{2}|1+\xi^2| < \frac{1}{q}, |\xi| \geqslant 1.$$

Кривая линия $\frac{1}{2}\left|1+\xi^2\right| = R$, представляющая собой овал Кассини, переходит на плоскости χ в некоторую замкнутую кривую, симметричную относительно двух координатных осей и содержащую внутри себя отрезок $[-1,+1]$. Внутри всей этой кривой ряд (16) сходится и изображает некоторую голоморфную функцию переменной χ. Горизонтальный диаметр этой кривой больше вертикального. Величины горизонтального и вертикального диаметров $\frac{2R}{\sqrt{2R-1}}\frac{2R}{\sqrt{2R+1}}$ соответственно. С увеличением R от единицы, длины этих диаметров увеличиваются. При $R=1$ горизонтальный диаметр равен 2, а вертикальный $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Число R в нашем исследовании больше 1, следовательно, область сходимости ряда (16) охватывает кривую с диаметрами 2 и $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Отсюда следует, что ряд (16) в нашем случае не может изображать произвольную аналитическую функцию. Область голоморфизма функции, изображаемой рядом (16), содержит всегда внутри себя кривую, полученную из кривой $\frac{1}{2}|1+\xi^2| = 1$ преобразованием (19).

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь область сходимости ряда (16) в переменной ρ,

$$\rho = h\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi}.$$

Имеем: $\xi = \chi \pm \sqrt{\chi^2-1}, \quad 1+\xi^2 = \frac{2h}{h\mp\rho i}$. Следовательно, область сходимости ряда (16) в переменной ρ будет определяться неравенством $|\rho+hi| > \frac{h}{R}$. Таким образом, значения потенциала Кеплера тела вращения в точках плоскости, перпендикулярной оси вращения, представляют собой значения некоторой аналитической функции, голоморфной вне двух кругов

$$|\rho+hi| = \frac{h}{R}, \quad |\rho-hi| = \frac{h}{R}.$$

Рассмотрим новую комплексную переменную τ, связанную с переменной χ соотношением $\chi^2 = \frac{1}{\tau}\frac{1}{2-\tau}$. Области плоскости переменной χ, находящейся вне кривой сходимости ряда (16), отвечает внутренность круга $\tau = \dfrac{1}{R}$ плоскости комплексной переменной τ. На основании этого факта мы можем утверждать, что всякая функция, голоморфная внутри кривой сходимости ряда вида (16), может быть представлена внутри области, ограниченной этой кривой, равномерно сходящимся рядом (16).

Решение основного уравнения

Вернемся теперь к уравнению (13), определяющему неизвестную функцию ξ. Функция $\Phi(\chi)$ связана со значениями потенциала $F(\chi)$ соотношением $\Phi = \dfrac{h^2}{\chi^2}F(\chi)$. Функция $\Phi(\chi)$ может быть изображена регулярным рядом вида (16):

$$\Phi(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi^n U_n(\chi), \quad |b_n| < Nq^n. \tag{20}$$

Подставив это разложение в правую часть уравнения (13) и отыскав решение (13) в виде степенного ряда по малому параметру λ:

$$\xi = \sqrt{1-\chi'^2}\big(\xi_1\lambda + \xi_2\lambda^2 + \ldots + \xi n\lambda^n + \ldots\big), \tag{21}$$

придем к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ Запишем уравнение (12) в виде

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(n+3)h^n} \chi^n U_n(\chi) U_n(\chi') \Big[(n+3)\xi +$$
$$+ \frac{(n+3)(n+2)}{2!}\xi^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{3!}\xi^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{(n+3)(n+2)(n+1)(n+2-(m-1))\xi^m}{m!} + \ldots \Big] d\chi' = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi^n P_n(\chi).$$

После ряда преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(n+3)h^n} \chi^n \sqrt{1-\chi'^2} U_n(\chi) U_n(\chi')(n+3)\xi_1 d\chi' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi^n U_n(\chi),$$

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi)U_n(\chi')\xi_2(\chi' d\chi')=$$

$$=-\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n U_n(\chi)U_n(\chi')\frac{(n+2)}{2!}(1-\chi'^2)\xi_1^2\,d\chi',$$

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi)U_n(\chi')\xi_3(\chi' d\chi')=-\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n U_n(\chi)U_n(\chi'),$$

$$\times\Big\{\frac{n+2}{2!}(1-\chi'^2)2\xi_1\xi_2+\frac{(n+2)(n+1)}{3!}(1-\chi'^2)^{\frac{3}{2}}\xi_1^3\Big\}\,d\chi',$$

....

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi)U_n(\chi')\xi_r(\chi')d\chi'=-\frac{1}{r!}\frac{d^r}{d\lambda^r}\Big\{\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{(n+3)h^n}\chi^n\times$$

$$\times U_n(\chi)U_n(\chi')\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(n+3)(n+2)\dots(n-m+4)}{m!}\xi^m d\chi'\Big\}_{\lambda=0} \tag{22}$$

....

Таким образом, определение неизвестной функции ξ привело к решению серии интегральных уравнений первого рода. Рассмотрим первое уравнение системы

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi)U_n(\chi')\xi_1(\chi')d\chi'=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\chi^n U_n(\chi).$$

Имеем

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{A}{h}\Big)^n\chi^n\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi')\xi_1(\chi')d\chi'=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\chi^n.$$

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-\chi'^2} U_0(\chi')\xi_1(\chi')\, d\chi' = 0, \ \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-\chi'^2} U_n(\chi')\xi_1(\chi') d\chi' = \Big(\frac{h}{A}\Big)^n b_n.$$

Норма полинома $U_n(\chi)$ равна

$$\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-\chi'^2} \big[U_n(\chi)\big]^2 d\chi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\xi_1(\chi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{h}{A})^n b_n U_n(\chi), \tag{23}$$

где $|b_n| < Nq^n$, q – некоторое число, меньше единицы. Будем теперь предполагать, что

$$q < \frac{h}{A}. \tag{24}$$

Если число q удовлетворяет неравенству (24), то ряд (23) будет сходиться и изображать некоторую непрерывную функцию χ. В силу неравенства (24) ряд (23) есть регулярный ряд с показателем регулярности q', определяемым неравенством

$$\frac{h}{A} q < q' < 1.$$

Значит, $\left|\dfrac{2}{\pi}\Big(\dfrac{h}{A}\Big)^n \ b_n\right| < N' q'^n$ и $|\xi_1| < \dfrac{N'q'}{1-q'}$.

Рассмотрим теперь уравнение для определения $\xi_2(\chi)$:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{h^n} \chi^n \sqrt{1-\chi'^2} U_n(\chi) U_n(\chi')\xi_2(\chi') d\chi' =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{h^n}\chi^n U_n(\chi)U_n(\chi')\frac{(n+2)}{2!}(1-\chi'^2)\xi_1^2\ d\chi'.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi')\xi_2(\chi')d\chi' = -\frac{n+2}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\xi_1^2 U_n(\chi')(1-\chi'^2)\ d\chi'.$$

Тогда

$$\xi_2(\chi) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\pi}U_n(\chi)\int\limits_{-1}^{+1}\xi_1^2(\chi')(1-\chi'^2)U_n(\chi')\ d\chi'. \tag{25}$$

Теперь точно так же определим $\xi_3(\chi)$:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{1-\chi'^2}U_n(\chi')\xi_3(\chi')\ d\chi' =$$

$$= -\frac{2(n+2)}{2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-\chi'^2)\xi_1(\chi')\xi_2(\chi')\ U_n(\chi')\ d\chi' -$$

$$-\frac{(n+2)(n+1)}{3!}\int\limits_{-1}^{+1}\left(1-\chi'^2\right)^{\frac{3}{2}}\xi_1^3(\chi')U_n(\chi')d\chi',$$

$$\xi_3(\chi) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+2)}{\pi}U_n(\chi)\int\limits_{-1}^{+1}\xi_1(\chi')\xi_2(\chi')U_n(\chi')(1-\chi'^2)d\chi' -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+2)(n+1)}{3!\pi}U_n(\chi)\int\limits_{-1}^{+1}\xi_1^3(\chi')U_n(\chi')\sqrt{(1-\chi'^2)^3}\ d\chi'. \tag{26}$$

Не останавливаясь пока на вопросе о сходимости этого ряда, перейдем к последующим уравнениям системы (22). Определив функцию $\xi_2(\chi)$, мы можем найти функцию $\xi_3(\chi)$ и т. д. Определение всех функций $\xi_3(\chi)$, $\xi_4(\chi), \ldots$ происходит по одному и тому же способу: находятся коэффициенты разложения этих функций в ряды полиномов Чебышева второго рода, а затем составляются и сами ряды. Определив таким образом способ вычисления коэффициентов ряда (21), мы должны теперь доказать сходимость этого ряда, установив сначала сходимость рядов, определяющих коэффициенты.

Рассмотрим регулярный ряд

$$f(x) = \alpha_0 U_0 + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n + \ldots, \ \ |\alpha_n| < Mq^n, \ \ q < 1, \quad (27)$$

и оценим коэффициенты разложения n - ой степени функции $f(x)$ в ряд по функциям Чебышева второго рода. Коэффициент при $U_m(\chi)$ в рассматриваемом разложении определяется формулой

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} [f(x)]^n U_m(\chi) d\chi.$$

Для вычисления коэффициента b_m при возведении $f(x)$ в степень n достаточно учесть лишь те слагаемые, которые содержат многочлены по χ степени не ниже m. Каждый из таких многочленов, состоящий из произведения функций $U_m(\chi)$, будет иметь коэффициент разложения в виде произведения чисел α_k и сумма индексов этих чисел будет равна степени p многочлена. В силу регулярности ряда (27) это произведение будет меньше, чем $M^m q^p$. При возведении $f(x)$ в степень n мы будем иметь столько отдельных многочленов степени p, состоящих из произведения функций $U_m(\chi)$, каков коэффициент при q^p в разложении $\big(1+q+q^2+\ldots+q^m+\ldots\big)^n$ по степеням q. Обозначим этот коэффициент через γ_p так, что

$$\big(1 + q + q^2 + \ldots + q^m + \ldots\big)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p q^p.$$

В силу этих соображений и приняв в расчет, что $|U_n| < 1$, мы получаем следующую оценку коэффициента b_m:

$$|b_m| < \frac{1}{\pi} M^n \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p q^p. \tag{28}$$

Сумма $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \gamma_p q^p$, входящая в эту оценку, может быть, в свою очередь, оценена с помощью весьма простого выражения. Совершенно ясно, что эта сумма есть остаточный член R_{m-1} разложения $\dfrac{1}{(1-q)^n}$ в ряд Маклорена. Возьмем выражение в форме, данной Коши:

$$R_{m-1} = \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)} q^m \left(\frac{1-\theta}{1-\theta\ q}\right)^{m-1} \frac{1}{\left(1-\theta\ q\right)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда

$$|b_m| < \frac{1}{\pi} M^n \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)} q^m \left(\frac{1-\theta}{1-\theta\ q}\right)^{m-1} \frac{1}{(1-\theta q)^{n+1}}. \tag{29}$$

Доказательство сходимости ряда, изображающего искомую функцию ξ. Рассмотрим последнее уравнение системы (22). Решая его относительно функции ξ_r, получаем

$$\xi_r = -\frac{1}{r!}\frac{d^r}{d\lambda^r}\left\{ \sum_{m=0}^{\infty}\ U_m(\chi) \sum_{n=2}^{m+3} \frac{(m+2)\dots(m-n+4)}{n!} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \xi^n U_m(\chi')d\chi' \right\}. \tag{30}$$

Используем эту формулу для доказательства сходимости ряда (21). Каждый коэффициент этого ряда получается в результате умножения регулярных рядов, изображающих предыдущие коэффициенты, и поэтому является регулярным рядом. Из теоремы Ляпунова об умножении регулярных рядов следует, что такой показатель действительно может быть найден и может произвольно мало отличаться от ранее введенного числа, как показателя регулярности ряда (20). Таким образом,

$$\xi_r = a_0^r U_0 + a_1^r U_1 + a_2^r U_2 + \dots + a_n^r U_n + \dots,\ |a_n^r| < M_r q^n$$

и, следовательно, каждый коэффициент разложения функции ξ_r в ряд полиномов Чебышева второго рода будет меньше соответствующего коэффициента разложения функции

$$\frac{M_r}{1-2q\chi+q^2}.$$

Отсюда следует, что если мы докажем сходимость ряда

$$\frac{M_1\lambda+M_2\lambda^2+M_3\lambda^3+\ldots+M_n\lambda^n+\ldots}{1-2q\chi+q^2},$$

то вместе с тем докажем и сходимость ряда (21).

Введем обозначение

$$M(\lambda)=M_1\lambda+M_2\lambda^2+M_3\lambda^3+\ldots+M_n\lambda^n+\ldots.$$

Интеграл $\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\xi U_m(\chi')d\chi'$ по своей абсолютной величине не превосходит $M(\lambda)q^m$, следовательно,

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\xi^n U_m(\chi')d\chi'\right|<$$

$$<\frac{1}{\pi}M^n(\lambda)\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}.$$

Рассмотрим теперь двойную сумму формулы (30):

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}U_m(\chi)\sum_{n=2}^{m+3}\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\xi^n U_m(\chi')d\chi'\right|<$$

$$<\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{m+3}\frac{1}{\pi}\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\times$$

$$\times\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}M^n(\lambda)\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M^n(\lambda)}{n!\pi}\frac{(1-\theta q)^{-n}}{1-\theta}\sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)\ldots(m-n+4)\times$$

$$\times \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}^{m}\right)q^m. \tag{31}$$

Оценим в зависимости от индекса внутреннюю сумму

$$S = \sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)\dots(m-n+4)\frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!}y^m, \tag{32}$$

где $y = \dfrac{1-\theta}{1-\theta q}q$.

Необходимо установить сходимость ряда (31), поэтому мы можем оценить сумму S для больших значений n. Рассмотрим дробь

$$\frac{U_{m+1}}{U_m} = \frac{\dfrac{n(n+1)\dots(n+m-1)(n+m)}{m!}}{\dfrac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)}} = \frac{n+m}{m} = 1 + \frac{n}{m}.$$

Это отношение остается для всех значений m ограниченным по своей величине некоторым числом a. Отсюда

$$U_m < a^{m-n+1}U_{n-3} = \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{(n-4)!}.$$

Поэтому

$$S < \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{a^{n-1}(n-4)!}\sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)\dots(m-n+4)(ay)^m.$$

Введем обозначение

$$S_1 = \sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)\dots(m-n+4)(ay)^m.$$

Следовательно, $S < \dfrac{n(n+1)\dots(2n-4)}{a^{n-1}(n-4)!}S_1$. Обозначая $ay = z$, получим

$$S_1 = \sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)\dots(m-n+4)z^m = z^{n-3}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{(n-1)!z^{n-3}}{(1-z)^n}.$$

Итак,

$$S < \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{a^{n-1}(n-4)!}\frac{(n-1)!a^{n-3}y^{n-3}}{(1-ay)^n}$$

или $S < n(n+1)\dots(2n-4)(n-1)(n-2)(n-3)\dfrac{y^{n-3}}{a^2(1-ay)^n}$. Вернемся теперь к ряду (31). Применяя к общему его члену найденные выше оценки, получаем

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}U_m(\chi)\sum_{n=2}^{m+3}\frac{(m+2)\dots(m-n+4)}{n!}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\xi^n U_m(\chi')d\chi'\Big| <$$

$$< \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M^n(\lambda)}{n!}\frac{(1-\theta q)^{-n}}{1-\theta}n(n+1)\dots(2n-4)(n-1)(n-2)(n-3)\frac{y^{n-3}}{(1-ay)^n}$$

или

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\dots\Big| < \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(2n-4)(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\times$$

$$\times\frac{1}{y^2(1-\theta)}\left[\frac{yM(\lambda)}{(1-\theta q)(1-ay)}\right]^n =$$

$$= \frac{1}{\pi a^2 y^3(1-\theta)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(2n-4)(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\left[\frac{yM(\lambda)}{(1-\theta q)(1-ay)}\right]^n.$$

Проверим сходимость этого ряда. Рассмотрим суммы по отдельности. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n(n+1)\dots(2n-4)(2n-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)!}\left[\dfrac{(1-\theta)M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}q\right]^{n+1}}{\dfrac{n(n+1)\dots(2n-4)(2n-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\left[\dfrac{(1-\theta)M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}q\right]^{n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-2}{n+1}\left[\frac{(1-\theta)M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}q\right]\right| = 2\left|\frac{(1-\theta)M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}q\right| < 1.$$

Отсюда $\left|\dfrac{(1-\theta)M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}q\right| < \dfrac{1}{2}$, следовательно, этот ряд сходится для достаточно малых значений $M(\lambda)$. Этот результат подтверждает тот факт, что при замене интеграла

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\xi^n U_m(\chi')d\chi'$$

величиной, большей его, мы получаем для малых $M(\lambda)$ сходящийся ряд. Ряд, входящий в формулу (28), запишется следующим образом:

$$\sum_{p=m}^{\infty}\gamma_p q^p = \sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!}q^p.$$

И, следовательно,

$$\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\xi^n U_m(\chi')d\chi'\right| < \frac{2}{\pi}M^n(\lambda)\sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!}q^p.$$

Если мы поставим правую часть этого неравенства вместо соответствующего множителя формулы (30) и заменим $U_m(\chi)$ единицей, то получим некоторое число, ограничивающее сверху модуль функции $\xi_r(\chi)$. Это число мы можем приравнять числу $\dfrac{M_r}{1-q}$, которое, согласно предыдущему, ограничивает сверху функцию ξ_r. Итак,

$$\frac{M_r}{1-q} = \frac{1}{r!}\frac{d^r}{d\lambda^r}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(m+1)\dots(m-n+4)}{n!}\frac{2M^n(\lambda)}{\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!}q^n\right\}_{\lambda=0}. \qquad (33)$$

Для функции $\xi_1(\chi)$ ограничение можно получить, если исходить из формулы (23) через ограничение для заданной функции $\Phi(\chi)$. Это неравенство для функции $\xi_1(\chi)$ мы запишем в виде следующего тождества:

$$\frac{M_1}{1-q} = \frac{M_1}{1-q}, \qquad (34)$$

где M_1 определяется по заданной функции $\Phi(\chi)$. Умножим равенство (33) на λ^r, а равенство (34) – на λ и сложим результаты умножения, придав числу r все целые значения от 2 до ∞, получим

$$\frac{M_1}{1-q} = \frac{M_1\lambda}{1-q} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{m+3}\frac{2}{\pi}M^n(\lambda)\frac{(m+2)\dots(m-n+4)}{n!}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!}q^n,$$

здесь

$$M(\lambda) = M_1\lambda + M_2\lambda^2 + M_3\lambda^3 + \dots + M_n\lambda^n + \dots .$$

Таким образом, для определения функции $M(\lambda)$ мы получили трансцендентное уравнение. Полагая в этом уравнении $\lambda = 0$, мы видим, что оно обращается в тождество при $M = 0$. Следовательно, уравнение, которое имеет лишь один член с первой степенью M, обладает единственным голоморфным решением, изображаемым степенным рядом по переменной λ, сходящимся вблизи нулевого значения этого параметра. Все коэффициенты степенного ряда $M(\lambda)$ положительны. Итак, мажоранта ряда, изображающего искомую функцию ξ, построена и мы можем утверждать, что ряд (21) сходится и представляет решение исходной задачи для достаточно малых значений параметра λ или $\alpha = 2\pi A^3\lambda$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если изменение сферы малое, функция ξ – аналитическая и справедливо неравенство*

$$\xi_{max} < \frac{h-A}{A}, \alpha = 2\pi A^3\lambda,$$

то обратная задача о нахождении тела, близкого к сфере, имеет решение.

Литература

1 Кирейтов В.Р. Прямая и обратная задачи Дирихле для потенциала Кеплера. – Н-ск: изд. дом Манускрипт, 2002. – 240 с.

2 Серикбаев А.У. Обратные задачи дистанционной оптики. Докторская диссертация. – Алматы, 1997.

3 Serikbaev A. About one inverse problem of potential of simple puff for the break surface // Тезисы межд. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Алматы, 2001. – С. 98.

Статья поступила в редакцию 23.10.12

Әбілқасымұлы Б., Наметқұлова Р., Серікбаев А.У. ДИСТАНЦИЯЛЫҚ ОПТИКАНЫҢ БІР КЕРІ ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Жұмыста берілген аймаққа жақын аймақтарда тұрақты тығыздығы бар Кеплер потенциалына кері есеп, яғни сферадан айырмашылығы аз аймақ қарастырылған.

Abilkasymuly B., Nametkulova R., Serikbaev A.U. ABOUT ONE INVERSE PROBLEM OF REMOTE OPTICAL

Inverse Kepler potential problem with constant density for the regions close to the given one is under consideration, i.e. we seek a region different a little from a sphere.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.518

А.М. Абылаева, А.О. Байарыстанов

Евразийский Национальный университет им Л.Н. Гумилева
010008, г. Астана, ул. Мунайтпасова 5, e-mail: abylayeva_b@mail.ru

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается неравенство вида

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu}\right|^q u(x)w(s)dxds\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $0 < \mu < 1$, при некоторых предположениях относительно весовых функций u и w; даются необходимые и достаточные условия выполнения этого неравенства.

Ключевые слова: *весовые неравенства Харди, весовые функции, оператор дробного порядка.*

1 Введение

Весовое неравенство Харди в дифференциальной форме имеет вид

$$\left(\int_0^\infty u(x)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

Keywords: *weighted Hardy's inequalities, weighted functions, operator of fractional order*
2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 39B62

где u и v – весовые, т.е. неотрицательные локально суммируемые на $I = (0, \infty)$ функции, а g – локально абсолютно непрерывные на I функции, имеющие предельные значения $g(0) = 0$ $(g(\infty) = 0)$.

В настоящее время для всех значений параметров $0 < p, q \leq \infty$ получены необходимые и достаточные условия на весовые функции u и v, при которых выполнено неравенство (1). История вопроса, основные результаты и методы исследования даны в книгах [1-3].

В книге [2, глава 5] рассмотрены неравенства вида

$$\left(\int_0^\infty u(x)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu}\right|^p \rho(x,s)dxds\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

и

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu}\right|^q \rho(x,s)dxds\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (3)$$

которых называют "неравенством Харди дробного порядка".

Неравенства (2) и (3) исследованы достаточно мало, обзор результатов по неравенствам дан в книгах [2, 3]. В книге [3, с. 83] эти задачи поставлены, как открытая проблема. Так, например, в "проблеме 3" поставлена задача: найти необходимые и достаточные условия на весовые функции $\varphi(\cdot,\cdot)$ и $v(\cdot)$, при которых справедливо неравенство

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty |g(x)-g(s)|^q \varphi(x,s)dxds\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех локально абсолютно непрерывных на I функциях g.

Мы рассматриваем неравенство (3), когда весовая функция ρ имеет вид $\rho(x,s) = u(x)w(s)$, т.е. неравенство

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu}\right|^q u(x)w(s)dsdx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4)$$

В работе принято следующее соглашение: неравенство вида $A \leq cB$, где постоянная $c > 0$ не зависит от функции g и от весовых функций u, w и v, но может зависеть от параметров p, q и μ, пишем $A \ll B$, а соглашение $A \approx B$ означает, что $A \ll B \ll A$.

2 Предварительные сведения

Левую часть (4) представляем в виде

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu} \right|^q u(x)w(s)dsdx = \int_0^\infty u(x) \int_0^x \frac{|g(x)-g(s)|^q}{|x-s|^{q\mu}} w(s)dsdx +$$

$$+ \int_0^\infty u(x) \int_x^\infty \frac{|g(x)-g(s)|^q}{|x-s|^{q\mu}} w(s)dsdx =$$

$$= \int_0^\infty u(x) \int_0^x \left(\frac{1}{(x-s)^\mu} \left| \int_s^x g'(t)dt \right| \right)^q w(s)dsdx +$$

$$+ \int_0^\infty u(x) \int_x^\infty \left(\frac{1}{(s-x)^\mu} \left| \int_x^s g'(t)dt \right| \right)^q w(s)dsdx.$$

Тогда выполнение неравенства (4) эквивалентно выполнению неравенств

$$\left(\int_0^\infty u(x) \int_0^x \left(\frac{1}{(x-s)^\mu} \int_s^x f(t)dt \right)^q w(s)dsdx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C^- \left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

$$\left(\int_0^\infty u(x) \int_x^\infty \left(\frac{1}{(s-x)^\mu} \int_x^s f(t)dt \right)^q w(s)dsdx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C^+ \left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

причем $f \geq 0$, $C \approx \max\{C^-, C^+\}$, где C, C^-, C^+ – наилучшие постоянные соответственно в (4), (5) и (6). В левой части (5) и (6), меняя местами интегралы, получаем, что неравенства (5) и (6), в свою очередь, соответственно эквивалентны выполнению неравенств

$$\left(\int_0^\infty w(s)\int_s^\infty\left(\frac{1}{(x-s)^\mu}\int_s^x f(t)dt\right)^q u(x)dxds\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C^-\left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

$$\left(\int_0^\infty w(s)\int_0^s\left(\frac{1}{(s-x)^\mu}\int_x^s f(t)dt\right)^q u(x)dxds\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq C^+\left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geq 0. \tag{8}$$

Таким образом, для исследования неравенства (4) достаточно исследовать неравенства вида (5) или (6).

При $\mu = 0$ неравенства (5) и (6) соответственно имеют вид

$$\left(\int_0^\infty u(x)\int_0^x\left(\int_s^x f(t)dt\right)^q w(s)dsdx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

$$\left(\int_0^\infty u(x)\int_x^\infty\left(\int_x^s f(t)dt\right)^q w(s)dsdx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Из результатов работы [4] имеем

Теорема A^-. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда неравенство (9) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$E^- = \sup_{z>0}\left[\left(\int_z^\infty u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{0<y<z}\left(\int_0^y w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_y^z v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right] < \infty,$$

при этом $E^- \approx C$, *где* C *– наилучшая постоянная в (9),* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Теорема A^+. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда неравенство (10) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$E^+ = \sup_{z>0}\left[\left(\int_0^z u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{z<y}\left(\int_y^\infty w(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_z^y v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right] < \infty,$$

при этом $E^+ \approx C$, *где* C *– наилучшая постоянная в (10).*

Введем некоторые классы весовых функций.

Определение 1. *Будем говорить, что весовая функция* w *принадлежит классу* $\triangle_\lambda^-$ $(\triangle_\lambda^+)$, *если* $0 < \lambda < 1$ *и существует постоянная* $\delta^- > 0$ $(\delta^+ > 0)$, *независящая от* $x \in I$, *и выполняется неравенство*

$$\int_{\frac{1}{4}x}^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds \le \delta^- \frac{1}{x^\lambda}\int_0^{\frac{1}{4}x} w(s)ds \ \ \forall x \in I,$$

$$\left(\int_x^{4x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds \le \delta^+ \int_{4x}^\infty \frac{w(s)}{s^\lambda}ds \ \ \forall x \in I\right).$$

Нетрудно видеть, что функция $w(s) = s^\gamma$ при $\gamma > -1$ принадлежит классу $\triangle_\lambda^-$, а при $\gamma < \lambda - 1$ принадлежит классу $\triangle_\lambda^+$.

Ниже мы даем некоторые условия на весовую функцию w, когда она принадлежит классу $\triangle_\lambda^\pm$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \lambda < 1$ *и весовая функция* w *удовлетворяет условию* $\int\limits_0^x \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds < \infty$ $\forall x > 0$. *Пусть функция* $\tau^-(x)$ *такова, что*

$$\int\limits_{\tau^-(x)}^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds = \int\limits_0^{\tau^-(x)} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds, \ \ \forall x \in I. \tag{11}$$

Если $0 < \tau^-(x) \leq \frac{1}{4}x$ $\forall x \in I$, *то весовая функция* w *принадлежит классу* $\triangle_\lambda^-$.

Действительно, из условия $\tau^-(x) \leq \frac{1}{4}x$ $\forall x \in I$ и из соотношения (11) имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{4}x}^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds \leq \int\limits_{\tau^-(x)}^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds = \int\limits_0^{\tau^-(x)} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} \frac{w(s)}{(x-s)^\lambda}ds \leq \left(\frac{4}{3}\right)^\lambda \frac{1}{x^\lambda} \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} w(s)ds \ \ \forall x \in I.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < \lambda < 1$ *и весовая функция* w *удовлетворяет условию* $\int\limits_x^\infty \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda}ds < \infty$ $\forall x \in I$. *Пусть функция* $\tau^+(x)$ *такова, что*

$$\int\limits_x^{\tau^+(x)} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda}ds = \int\limits_{\tau^+(x)}^{\infty} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda}ds \ \ \forall x \in I. \tag{12}$$

Если $4x \leq \tau^+(x) < \infty$ $\forall x \in I$, *то весовая функция* w *принадлежит классу* $\triangle_\lambda^+$.

Доказательство леммы 2. Из условия $4x \leq \tau^+(x)$ $\forall x \in I$ и из соотношения (12) имеем

$$\int\limits_x^{4x} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda}ds \leq \int\limits_x^{\tau^+(x)} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda}ds =$$

$$= \int\limits_{\tau^+(x)}^{\infty} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda} ds \leq \int\limits_{4x}^{\infty} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda} ds. \tag{13}$$

Так как $\frac{1}{(s-x)^\lambda} \leq (\frac{4}{3})^\lambda \frac{1}{s^\lambda}$ для $0 < 4x \leq s$, то из (13) имеем

$$\int\limits_{x}^{4x} \frac{w(s)}{(s-x)^\lambda} ds \leq \left(\frac{4}{3}\right)^\lambda \int\limits_{4x}^{\infty} \frac{w(s)}{s^\lambda} ds \ \ \forall x \in I,$$

т.е. весовая функция w принадлежит классу $\triangle_\lambda^+$.

Замечание 1. *Легко показать, что функции $\tau^-(x)$, $\tau^+(x)$, указанные соответственно в леммах 1 и 2, существуют, а в работе ([5], с.299) такие функции названы "фарватер-функции".*

3 Основные результаты

Положим

$$E_1^- = \sup_{z>0} \left[\left(\int\limits_z^\infty \frac{u(x)}{x^{q\mu}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{0<y<z} \left(\int\limits_0^y w(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_y^z v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right],$$

$$E_1^+ = \sup_{z>0} \left[\left(\int\limits_0^z u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{z<y} \left(\int\limits_y^\infty \frac{w(s)}{s^{q\mu}} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_z^y v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right],$$

$$E_2^- = \sup_{z>0} \left[\left(\int\limits_z^\infty \frac{w(s)}{s^{q\mu}} ds \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{0<y<z} \left(\int\limits_0^y u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_y^z v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right],$$

$$E_2^+ = \sup_{z>0} \left[\left(\int\limits_0^z w(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{z<y} \left(\int\limits_y^\infty \frac{u(x)}{x^{q\mu}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_z^y v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right].$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Если весовые функции* u, w *удовлетворяют одному из условий: 1)* $u, w \in \triangle_{q\mu}^{-}$, *2)* $u, w \in \triangle_{q\mu}^{+}$, *3)* $w \in \triangle_{q\mu}^{-} \bigcap \triangle_{q\mu}^{+}$, *4)* $u \in \triangle_{q\mu}^{-} \bigcap \triangle_{q\mu}^{+}$, *то для выполнения неравенства (4) необходимо и достаточно соответственно выполнение одного из условий: 1)* $E = \max\{E_1^-, E_2^-\} < \infty$, *2)* $E = \max\{E_1^+, E_2^+\} < \infty$, *3)* $E = \max\{E_1^-, E_1^+\} < \infty$, *4)* $E = \max\{E_2^-, E_2^+\} < \infty$, *при этом* $E \approx C$, *где* C *– наилучшая постоянная в (4).*

Мы сначала докажем следующее. утверждение

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Если весовая функция* w (u) *удовлетворяет условию* $w \in \triangle_{q\mu}^{-}$ $(u \in \triangle_{q\mu}^{+})$, *то неравенства (5) и (7) выполнены тогда и только тогда, когда* $E_1^- < \infty$ $(E_2^+ < \infty)$, *при этом* $E_1^- \approx C^-$ $(E_2^+ \approx C^-)$, *где* C^- *– наилучшая постоянная в (5) и (7).*

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть неравенство (5) выполнено, тогда выполнено и неравенство (7). В левой части (5) и (7), применяя неравенство $\frac{1}{(x-s)^{\mu}} \ge \frac{1}{x^{\mu}}$ при $0 < s < x$, получим неравенства соответственно вида (9) и (10). Поэтому на основании теорем $A^{\mp}$ $E_1^- < \infty$ $(E_2^+ < \infty)$ и имеет место оценка $\max\{E_1^-, E_2^+\} \ll C^-$, где C^- – наилучшая постоянная в (5) и (7).

Достаточность. Пусть $w \in \triangle_{q\mu}^{-}$, $E_1^- < \infty$ и Z – множество целых чисел. Для $f \ge 0$ имеем

$$\int_0^{\infty} u(x) \int_0^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int_s^x f(t)dt \right)^q dsdx =$$

$$= \sum_{k\in Z} \int_{2^k}^{2^{k+1}} u(x) \int_0^{2^{k-1}} \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int_s^x f(t)dt \right)^q dsdx +$$

$$+ \sum_{k\in Z} \int_{2^k}^{2^{k+1}} u(x) \int_{2^{k-1}}^{x} \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int_s^x f(t)dt \right)^q dsdx = J_1^- + J_2^-. \qquad (14)$$

Далее оценим J_1^- и J_2^- по отдельности:

$$J_1^- \leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} u(x) \int\limits_0^{2^{k-1}} \frac{w(s)}{(2^k-2^{k-1})^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dsdx \leq$$

$$\leq 2^{2q\mu} \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{(2^{k+1})^{q\mu}} \int\limits_0^x w(s) \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dsdx \ll$$

$$\ll \int\limits_0^\infty \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \int\limits_0^x w(s) \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dsdx.$$

Откуда на основании теоремы A^- имеем

$$J_1^- \ll \left(E_1^-\right)^q \left(\int\limits_0^\infty v(t) f^p(t)dt \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{15}$$

Теперь оценим J_2^-. Так как $w \in \triangle_{q\mu}^-$, то для $2^k \leq x \leq 2^{k+1}$ имеем

$$\int\limits_{2^{k-1}}^x \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} ds \leq \int\limits_{\frac{1}{4}x}^x \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} ds \leq \frac{\delta^-}{x^{q\mu}} \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} w(s)ds \leq \frac{\delta^-}{x^{q\mu}} \int\limits_0^{2^{k-1}} w(s)ds.$$

Тогда

$$J_2^- \leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} u(x) \int\limits_{2^{k-1}}^x \frac{w(s)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int\limits_{2^{k-1}}^x f(t)dt \right)^q dx \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \int\limits_0^{2^{k-1}} w(s)ds \left(\int\limits_{2^{k-1}}^x f(t)dt \right)^q dx \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \int\limits_0^x w(s)ds \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \int\limits_0^x w(s)ds \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dx.$$

Следовательно, в силу теоремы A^- получим оценку

$$J_2^- \ll \left(E_1^-\right)^q \left(\int\limits_0^\infty v(t) f^p(t)dt \right)^{\frac{q}{p}},$$

которая вместе с (14) и (15) дает выполнение неравенства (5) с оценкой $C^- \ll E_1^-$ для наилучшей постоянной C^- в (5). Эта оценка вместе с оценкой $C^- \gg E_1^-$, полученной в необходимой части, дает $C^- \approx E^-$.

Пусть теперь $u \in \triangle_{q\mu}^+$ и $E_2^+ < \infty$. Покажем выполнение неравенства (7), что равносильно выполнению (5).

Для $f \geq 0$ имеем

$$\int\limits_0^\infty w(s) \int\limits_s^\infty \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dsdx =$$

$$= \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \int\limits_{2^{k+1}}^\infty \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds +$$

$$+ \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \int\limits_s^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds = J_1^+ + J_2^+. \qquad (16)$$

Оценим J_1^+:

$$J_1^+ \leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \int\limits_{2^{k+1}}^\infty \frac{u(x)}{(x-2^k)^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds \leq$$

$$\leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} \int\limits_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{u(x)}{(2^i-2^k)^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds.$$

Так как $2^i - 2^k \geq 2^{i-1}$ при $i \geq k+1$, то

$$J_1^+ \leq 2^{2q\mu} \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} \int\limits_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{u(x)}{(2^{i+1})^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \sum_{i=k+1}^{\infty} \int\limits_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\infty} w(s) \int\limits_s^{\infty} \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt \right)^q dxds.$$

Поэтому на основании теоремы A^+

$$J_1^+ \ll \left(E_2^+\right)^q \left(\int\limits_0^{\infty} v(t) f^p(t)dt \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{17}$$

Прежде, чем начинать оценивать J_2^+, заметим, что из условия $u \in \triangle_{q\mu}^+$ для $2^{k-1} \leq s \leq 2^k$ имеем

$$\int\limits_s^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}}dx \leq \int\limits_s^{4s} \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}}dx \leq \delta^+ \int\limits_{4s}^{\infty} \frac{u(x)}{x^{q\mu}}dx \leq \delta^+ \int\limits_{2^{k+1}}^{\infty} \frac{u(x)}{x^{q\mu}}dx.$$

Применяя полученное соотношение и теорему A^+, получим

$$J_2^+ \leq \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \int\limits_s^{2^{k+1}} \frac{u(x)}{(x-s)^{q\mu}}dx \left(\int\limits_s^{2^{k+1}} f(t)dt \right)^q ds \ll$$

$$\ll \sum_{k\in Z} \int\limits_{2^{k-1}}^{2^k} w(s) \int\limits_{2^{k+1}}^{\infty} \frac{u(x)}{x^{q\mu}}dx \left(\int\limits_s^{2^{k+1}} f(t)dt\right)^q ds \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty w(s) \int\limits_s^\infty \frac{u(x)}{x^{q\mu}} \left(\int\limits_s^x f(t)dt\right)^q dxds \leq \left(E_2^+\right)^q \left(\int\limits_0^\infty v(t) f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Из (18), (17) и (16) следует, что неравенство (7) выполнено с оценкой $C^- \ll E_2^+$ для наилучшей постоянной C^- в (7), которая вместе с соотношением $C^- \gg E_2^+$, полученным в необходимой части, дает $C^- \approx E_2^+$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 следует, что если одна из величин E_1^- и E_2^+ конечна, то конечна и вторая. А в случае $w \in \triangle_{q\mu}^-$ и $u \in \triangle_{q\mu}^+$ имеем $E_1^- \approx E_2^+ \approx C^-$.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть выполняется неравенство (4), что равносильно одновременно выполнению следующих пар неравенств: (5) и (6), (5) и (8), (6) и (7), (7) и (8). Тогда на основании теоремы 2 и из $C \approx \max\{C^-, C^+\}$ имеем $C \gg E$, где величина E определена по любому из соотношений 1) – 4), указанных в теореме 1.

Достаточность. Пусть весовые функции u и w удовлетворяют одному из условии 1) – 4), указанных в теореме 1, и соответствующему условию $E < \infty$.

В соответствии каждому условию 1) – 4) для функции u и w рассмотрим пару неравенств: 1) (5) и (8), 2) (6) и (8), 3) (5) и (6), 4) (7) и (8). Как выше сказано, выполнение этих пар неравенств эквивалентно выполнению неравенства (4). Применяя для этих пар неравенств теорему 2, заключаем, что из соответствующего условия $E < \infty$ вытекает одновременно выполнение этих пар неравенств, а, следовательно, выполнение неравенства (4); с учетом того, что $C \approx \max\{C^-, C^+\}$, получим $C \ll E$, которое вместе с условием $C \gg E$, полученным в необходимой части, дает $C \approx E$. Теорема

1 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки МОН РК, Грант 1529/ГФ по приоритетному направлению "Интеллектуальный потенциал страны".

Литература

1 Opic B. and Kufner A. // Hardy type inequalities // Pitman Research Notes in Math. Series, Longman Scientific and Technical. – Harlow, 1990. – V. 211. – P. 98-110.

2 Kufner A. and Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type. World Scientific. – New Jersey, London, Singapure, Hong Kong, 2003. – 357 p.

3 Kufner A., Maligranda L. and Persson L-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results. – Pilsen, Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007. – 161 p.

4 Oinarov R. and Kalybay A. Three-parameter weighted Hardy type inequalities // Banach J.Math. Anal. – 2008. – V. 2, № 2. – P. 85-93.

5 Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Труды МИ РАН. – 2001. – Т. 232. – С. 298-317.

Статья поступила в редакцию 07.05.12

Абылаева А.М., Байарыстанов А.О. БӨЛШЕК РЕТТІ ХАРДИ ТЕҢСІЗДІГІН БАҒАЛАУ

u және w салмақты функциялары әр түрлі болған кездегі, келесі теңсіздіктің

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu} \right|^q u(x)w(s)dxds \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

мұндағы $0 < \mu < 1$, орындалатындығының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Abylayeva A.M., Baiarystanov A.O. WEIGHTED HARDY'S INEQUALITIES OF FRACTIONAL ORDER TYPE

Inequality of the form

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{|x-s|^\mu}\right|^q u(x)w(s)dxds\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty v(t)|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

is considered, where $0<\mu<1$. Under some assumptions on the weight functions u and w we get necessary and sufficient conditions for the inequality.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.51

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28, e-mail: akishev@ksu.kz

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

В данной статье рассматривается пространство Лоренца с анизотропной нормой периодических функций многих переменных. Установлены точные оценки тригонометрических поперечников классов Никольского-Бесова-Аманова в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.
Ключевые слова: *пространство Лоренца, класс Бесова, тригонометрический поперечник*

Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных [1].

Keywords: *Lorentz spase, Besov class, trigonometric width*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

В случае $q_1 = ... = q_m = \theta_1 = ... = \theta_m = q$ пространство $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(I^m)$ с нормой (см. [2], гл. I, п. 1.1)

$$\|f\|_q = \left[\int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} |f(x_1, ..., x_m)|^q dx_1...dx_m\right]^{\frac{1}{q}}.$$

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\bar{x})\, dx_j = 0 \ \ \forall j = 1, ..., m.$$

Функция $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ разлагается в ряд Фурье $\sum\limits_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\bar{n}}(f)\, e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}$, где $a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ – пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами.

Положим $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum\limits_{\bar{n}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f)\, e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}$, где $\langle\bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $s_j = 1, 2, ...,$ $\rho(\bar{s}) = \left\{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m,} \in l_{\bar{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\bar{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

$S^{\bar{r}}_p H$, $S^{\bar{r}}_{p,\theta} B$ – пространства функций с доминирующей смешанной производной соответственно определены С. М. Никольским [3] и Т.И. Амановым ([4], гл.I, п.17).

П.И. Лизоркиным и С.М. Никольским [5] исследовано декомпозиционное разложение элементов пространства $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta} B$.

В анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ рассмотрим аналогичный класс

$$\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m) : \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}} B} = \left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} \le 1\right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 \leq \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\quad \gamma_j > 0$, $j = 1, ..., m$. Положим

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \left\{\overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{x}, \bar{\gamma} \rangle \geq n\right\}.$$

Определение 1. *Пусть дан некоторый функциональный класс* $F \subset L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$. *Тригонометрическим поперечником класса* F *в пространстве* $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ *называется величина*

$$d_M^T(F, L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}) = \inf_{\Omega_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Omega_M)} \|f - t(\Omega_M)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}},$$

где $t(\Omega_M, \bar{x}) = \sum\limits_{j=1}^{M} c_j e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, \bar{x}\rangle}$, $\Omega_M = \{\bar{k}^{(1)}, ..., \bar{k}^{(M)}\}$ *– набор векторов* $\bar{k}^{(j)} = (k_1^{(j)}, ..., k_m^{(j)}), j = 1, ..., M$, *из целочисленной решетки* $\mathbb{Z}^m$, c_j *– произвольные числа.*

Понятие тригонометрического поперечника в одномерном случае впервые введено Р.С. Исмагиловым [6] и им установлены его оценки для некоторых классов в пространстве непрерывных функций. Для функции многих переменных точные порядки тригонометриических поперечников класса Соболева $W_p^{\bar{r}}$, Никольского $H_p^{\bar{r}}$ в пространстве L_q установлены Э.С. Белинским [7], В.Е. Майоровым [8], Ю. Маковозом [9], Г.Г. Магарил-Ильяевым [10], В.Н. Темляковым [11]. Эта задача для класса Бесова исследована А.С. Романюком [12], Д.Б. Базархановым [13].

Для класса Бесова $B^r_{p,\theta}$ А.С. Романюк [12] доказал следующую теорему

Теорема 1. [12] *Пусть* $1 \leq p < 2 \leq q < \frac{p}{p-1}$, $\quad 1 \leq \theta \leq \infty$, $\quad r > m$. *Тогда*

$$d_n^T(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} (\log n)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right) + (\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Здесь и в дальнейшем $\log M$ – логарифм с основанием 2 от числа $M > 0$.

Цель настоящей статьи: найти точный порядок тригонометрического поперечника определенного выше класса $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ в пространстве $L^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$.

Вспомогательные утверждения

Сначала приведем некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.

Пусть X – нормированные пространства 2π-периодических функций многих переменных. Для функции $f \in X$ наилучшим M-членным приближением называется величина [6-8]

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \|f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \bar{k}^j, \bar{x}\rangle}\|_X,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^{M}$ – система векторов $\bar{k}^j = (k_1^j, ..., k_m^j)$ с целочисленными координатами, b_j – произвольные коэффициенты. Если F – некоторый функциональный класс, то положим $e_M(F)_X = \sup_{f\in F} e_M(f)_X$.

Через $C(p,q,r,y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что

$$C_1 \cdot A(y) \le B(y) \le C_2 \cdot A(y).$$

Лемма 1. [14] *Пусть даны число* $\alpha \in (0, +\infty)$ *и* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = \left(\gamma_1', ..., \gamma_m'\right)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$, $1 = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le ... \le \gamma_m$, $1 = \gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1, ..., \nu$ *и* $1 = \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu + 1, ..., m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha\langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle} \right\}_{\overline{s}\in Y^m\left(\overline{\gamma}', n\right)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Теорема А. [15] *Пусть* $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \le p_j < 2 < q_j$, $j = 1, ..., m$, $1 \le \theta_j, \tau_j < +\infty$, $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \le ... \le$

$\leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$. *Тогда, если* $r_j > \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., m,\ \ (r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu + 1, ..., m,$ *то*

$$e_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} \asymp M^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}\right) + \sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Основные результаты

Пусть Ω_M – множество, содержащее не более, чем M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами.

Лемма 2. [16] *Пусть* $2 \leq q < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, \bar{x}\rangle}$$

и любого натурального числа $N \leq M$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_N, \bar{x})$, *содержащий не более* N *гармоник, и такой, что*

$$\|P(\Omega_M) - P(\Omega_N)\|_q \leq CMN^{-\frac{1}{2}},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, *все коэффициенты* $P(\Omega_N, \bar{x})$ *одинаковы и не превышают* MN^{-1}.

Следствие 1. *Пусть* $\bar{q} = (q_1, ..., q_m), \quad 2 < q_j < \infty, \ \ j = 1, ..., m.$ *Тогда для любого тригонометрического полинома*

$$P(\Omega, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, \bar{x}\rangle}$$

и любого натурального числа $N \leq M$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_N, \bar{x})$, *содержащий не более* N *гармоник, и такой, что*

$$\|P(\Omega_M) - P(\Omega_N)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \leq CMN^{-\frac{1}{2}},$$

причем $\Omega_N \subset \Omega_M$, *все коэффициенты* $P(\Omega_N, \bar{x})$ *одинаковы и не превышают* MN^{-1}.

Доказательство. Пусть q – произвольное число такое, что $q_j < q, \ \ j = 1,...m$. Тогда

$$\|P(\Omega_M) - P(\Omega_N)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \leq C\|P(\Omega_M) - P(\Omega_N)\|_q.$$

Теперь из этого неравенства и леммы 2 получится утверждение следствия.

Для каждого элемента $\bar{s} \in S_l \setminus D_l$ рассмотрим линейный оператор

$$(T_{\bar{s}}f)(\bar{x}) = f(\bar{x})\Big(\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle} - t(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})\Big). \tag{1}$$

Для этого оператора справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Пусть* $1 < p_j < 2 < q_j < \frac{p_j}{p_j-1} = p_j^{'}, \ \ j = 1,...,m$. *Тогда норма оператора* $T_{\bar{s}}$, *действующего из* $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}$ *в* $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$, *удовлетворяет неравенству*

$$\|T_{\bar{s}}\|_{L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\to L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}} = \sup_{\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\leq 1}\|T_{\bar{s}}f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}N_{\bar{s}}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1^{'}})}.$$

Доказательство. По аналогу теоремы Рисса-Торина в пространстве Лоренца $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}$ [1]

$$\|T_{\bar{s}}\|_{L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\to L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}} \leq \|T_{\bar{s}}\|^{1-\lambda}_{L_2\to L_2}\|T_{\bar{s}}\|_{L_1\to L^*_{\bar{q}^*,\bar{\theta}^{(2)}}}, \tag{2}$$

где $0 < \lambda < 1$ и координаты $\bar{q}^* = (q_1^*,...,q_m^*)$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{q_j^*}, \ \ j = 1,...,m.$$

Выберем $\lambda = \frac{2}{p_1} - 1$. Коэффициенты полинома $t_{\bar{s}}(\bar{x}) - t(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})$ равны и их абсолютные значения не превышают $2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}N_{\bar{s}}^{-1}$. Поэтому в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|T_{\bar{s}}\|_{L_2\to L_2} \leq 2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}N_{\bar{s}}^{-1}. \tag{3}$$

Далее, используя обобщенное неравенство Минковского и следствие 1, будем иметь

$$\|T_{\bar{s}}f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq \|f\|_1\,\|t_{\bar{s}} - t(\Omega_{N_{\bar{s}}})\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\|f\|_1 2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}N_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\|T_{\bar{s}}\|_{L_1\to L^*_{\bar{q}^*,\bar{\theta}^{(2)}}} \leq C2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} N_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Теперь, (3) и (4) подставляя в (2), получим

$$\|T_{\bar{s}}\|_{L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\to L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}} \leq C\left(2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} N_{\bar{s}}^{-1}\right)^{1-\lambda}\left(2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} N_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lambda} = C2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} N_{\bar{s}}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1'})}.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j < q_j < \frac{p_j}{p_j-1}$, $\quad 1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}$, $\quad 1 \leq \tau_j \leq \infty$, $j = 1, ...m$ *и* $\max\limits_j q_j < \min\limits_j \frac{p_j}{p_j-1}$.

1. Если $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j = 1, ..., m$ *или* $\theta_j^{(2)} < \tau_j$, $\quad 2 < \tau_j$, $\ j = 1, ..., m$, *то*

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}.$$

2. Если $\theta_j^{(2)} < \tau_j$, $\quad 1 \leq \tau_j \leq 2, j = 1, ..., m$, *то*

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \leq CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})_+}.$$

Доказательство. Так как

$$e_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B\right)_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}),$$

то нижняя оценка величины $d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}})$ в первом пункте утверждения следует из теоремы А об оценке M -членного наилучшего приближения.

Докажем оценку сверху. Для этого по заданному M выберем натуральное число l такое , что $M \asymp 2^l l^{\nu-1}$ и $2^l l^{\nu-1} \geq 2M$. Введем обозначения:

$$B_l = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{N}^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l\},$$

$$S_l = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{N}^m : l \le \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha l\}.$$

Каждому элементу $\bar{s} \in S_l$ поставим в соответствие число

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{lr_1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (1-r_1)}\right], \tag{5}$$

где $[a]$ – целая часть числа a. Тогда, пользуясь известным соотношением (см. лемму 1 в случае $\theta_j = 1, j = 1, ..., m$)

$$\sum_{\langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle \ge n} 2^{-\beta \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu - 1}, \ \ \beta > 0, \tag{6}$$

имеем

$$\sum_{\bar{s} \in S_l} N_{\bar{s}} \le 2^{lr_1} \sum_{l \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha l} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (r_1 - 1)} \le C 2^{lr_1} 2^{-l(r_1-1)} l^{\nu-1} = C 2^l l^{\nu - 1} \asymp M.$$

Если $\bar{s} \in S_l$ и $\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \ge l,$ то $2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle} \ge 2^{lr_1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (1-r_1)}$.

Если $\bar{s} \in S_l$ и $\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle < l,$ то подмножество тех элементов $\bar{s},$ для которых $2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle} < 2^{lr_1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (1-r_1)},$ обозначим D_l. Пусть $t(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})$ – тригонометрический полином, которым приближается "блок" $t_{\bar{s}}(\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$ согласно лемме 2, т.е.

$$\|t_{\bar{s}} - t(\Omega_{N_{\bar{s}}})\|_{\bar{q_0}} \le C 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle} N_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}}$$

при некотором $q_0 \in (2, \infty)$. Положим $q_0 = \max\limits_{j=1,...,m} \{q_j\}$. Тогда

$$\|t_{\bar{s}} - t(\Omega_{N_{\bar{s}}})\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \le \|t_{\bar{s}} - t(\Omega_{N_{\bar{s}}})\|_{\bar{q_0}} \le C 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle} N_{\bar{s}}^{-\frac{1}{2}},$$

при этом $\Omega_{N_{\bar{s}}} \subset \rho(\bar{s})$ и все коэффициенты полинома $t(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})$ одинаковы.

Теперь докажем, что подпространство тригонометрических полиномов с номерами гармоник из объединения множеств

$$Q_l^{\gamma'} = \cup_{\bar{s} \in B_l \cup D_l} \rho(\bar{s}), \ \ P_l^{\gamma'} = \cup_{\bar{s} \in S_l \setminus D_l} \Omega_{N_{\bar{s}}}$$

реализует порядок поперечника $d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}} B, L^*_{\bar{p}, \bar{\theta}}).$

Пусть $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. Рассмотрим полином

$$t(\bar{x}) = \sum_{\bar{s}\in B_l \cup D_l} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) + \sum_{\bar{s}\in S_l \setminus D_l} t(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x}) * \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) \tag{7}$$

и докажем, что он реализует требуемую оценку приближения для f.

По свойству квазинормы имеем

$$\|f-t\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le$$

$$\le \Big\| \sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l} (\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) - t(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x}) * \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})) \Big\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} + \Big\| \sum_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle \ge \alpha l} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) \Big\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} =$$

$$= J_1 + J_2. \tag{8}$$

Оценим J_2. Пользуясь теоремой 1 [17], получим

$$J_2 \le C(p,q,m) \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \Big\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \ge \alpha l} \Big\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} = C(p,q) J_3(f), \tag{9}$$

Оценим J_3. Пусть $1 \le \tau_j \le \theta_j^{(2)}, \;\; j=1,...,m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена (см. [2], гл. III, п. 3.3.3 и [15]), будем иметь

$$J_3 \le C(p,q,m) \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \Big\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \ge \alpha l} \Big\|_{l_{\bar{\tau}}} \le C 2^{-\alpha l (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \tag{10}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, \quad 1 \le \tau_j \le \theta_j^{(2)}, \;\; j=1,...,m$.

Пусть $\theta_j^{(2)} < \tau_j, \;\; j=1,...,m$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{\tau_j}{\theta_j} > 1, \;\; j=1,...,m,$ лемму 1, будем иметь

$$J_3 \le C(p,q,m) \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}} \Big\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \ge \alpha l} \Big\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \Big\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle \ge \alpha l} \Big\|_{l_{\bar{\varepsilon}}} \le$$

$$\leq C2^{-\alpha l\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})}, \tag{11}$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m)$, $\frac{1}{\varepsilon_j}=\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}$ $j=1,...,m$.

Следовательно, в силу (10) и (11) из оценки (9) получим

$$J_2 \leq C2^{-\alpha l\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})_+}, \tag{12}$$

где $(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})_+=\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}$, если $\theta_j^{(2)}<\tau_j$, и $(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})_+=0$, если $\tau_j\leq\theta_j^{(2)}$.

Если $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}}\leq\frac{\nu-1}{2}$, то из неравенства (12) в случае $\theta_j^{(2)}<\tau_j$, $j=1,...,m$, следует, что

$$J_2 \leq C2^{-\alpha l\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}. \tag{13}$$

Оценим J_1. По условию теоремы $\max\limits_j q_j<\min\limits_j\frac{p_j}{p_j-1}$. Поэтому существует число $q^{(0)}$ такое, что $\max\limits_j q_j\leq q^{(0)}<\min\limits_j\frac{p_j}{p_j-1}$. Тогда $L_{q^{(0)}}\subset L^*_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}$ и

$$\|g\|^*_{\bar p,\bar\theta^{(2)}}\leq C\,\|g\|_{q^{(0)}}, \quad g\in L_{q^{(0)}}.$$

Функция

$$g_l(\bar x)=\sum_{\bar s\in S_l\setminus D_l}\left(\delta_{\bar s}\left(f,\bar x\right)-t(\Omega_{N_{\bar s}},\bar x)*\delta_{\bar s}\left(f,\bar x\right)\right)$$

непрерывна, следовательно, $g_l\in L_{q^{(0)}}$. Поэтому

$$J_1=\Big\|\sum_{\bar s\in S_l\setminus D_l}(\delta_{\bar s}(f,\bar x)-t(\Omega_{N_{\bar s}},\bar x)*\delta_{\bar s}(f,\bar x))\Big\|^*_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}\leq$$

$$\leq C\Big\|\sum_{\bar s\in S_l\setminus D_l}(\delta_{\bar s}(f,\bar x)-t(\Omega_{N_{\bar s}},\bar x)*\delta_{\bar s}(f,\bar x))\Big\|_{q^{(0)}}.$$

Пользуясь теоремой Литтльвуда-Пэли (см. [2], гл. I, п.1.5.2), отсюда получим

$$J_1\leq C\Big\|\Big(\sum_{\bar s\in S_l\setminus D_l}|\delta_{\bar s}(f,\bar x)-t(\Omega_{N_{\bar s}},\bar x)*\delta_{\bar s}(f,\bar x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\bar q^{(0)}}\leq$$

$$\leq C\Big(\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}\|\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})-t(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})*\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})\|^2_{q^{(0)}}\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (14)$$

Пользуясь леммой 3, при $q_j=\theta_j^{(2)}=q^{(0)}$ из неравенства (14) получим

$$J_1\leq C\Big\{\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}\big(\|T_{\bar{s}}\|_{L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\to L_{q^{(0)}}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\leq \qquad (15)$$

$$\leq C\Big\{\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}\big(2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}N_{\bar{s}}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1'})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя значения $N_{\bar{s}}$ (см. (5)) в правую часть (15), будем иметь

$$J_1\leq C\Big\{\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}2^{2\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}\big(2^{lr_1}2^{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle(1-r_1)}\big)^{-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1'})}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C\Big\{\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}2^{2\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\big(2^{lr_1}2^{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle(1-r_1)}\big)^{-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{p_1'})}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=C2^{-\frac{l}{2}r_1(1+\frac{2}{p_1'})}\Big\{\sum_{\bar{s}\in S_l\setminus D_l}2^{2\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle((r_1-1)(1+\frac{2}{p_1'})+2-2r_1)}2^{2\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (16)$$

Рассмотрим отдельно случаи $\tau_j\in[1,2]$ и $\tau_j\in(2,+\infty]$, $j=1,...,m$.

Пусть $\tau_j\in[1,2]$, $j=1,...,m$. Тогда, учитывая условие $2(r_1-1)\frac{1}{p_1'}+1-r_1<0$ и пользуясь неравенством Йенсена, из (16) получим

$$J_1\leq C2^{-\frac{l}{2}r_1(1+\frac{2}{p_1'})}2^{\frac{l}{2}(2(r_1-1)\frac{1}{p_1'}+1-r_1)}\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\Big\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\bar{\tau}}}\leq$$

$$\leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}.$$

Таким образом,

$$J_1\leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} \qquad (17)$$

для любой функции $f\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ при $\tau_j\in[1,2]$, $j=1,...,m$.

Пусть $2 < \tau_j < +\infty, \quad j = 1, ..., m$. Тогда к правой части неравенства (16) применяя неравенство Гельдера со степенями $\varepsilon_j = \frac{\tau_j}{2}, \quad j = 1, ..., m$, будем иметь

$$J_1 \leq C2^{-\frac{l}{2} r_1 (1 + \frac{2}{p_1'})} \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|^{*}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \Big\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \Big\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times \Big\| \Big\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle (2(r_1 - 1)\frac{1}{p_1'} + 1 - r_1)} \Big\}_{\bar{s} \in S_l \setminus D_l} \Big\|^{\frac{1}{2}}_{l_{\bar{\varepsilon}'}}, \tag{18}$$

где $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon_1', ..., \varepsilon_m'), \qquad \varepsilon_j' = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_j - 1}, \ \ j = 1, ..., m$.

Далее, пользуясь леммой 1 и учитывая, что $2(r_1 - 1)\frac{1}{p_1'} + 1 - r_1 < 0$, из (18) получим

$$J_1 \leq C2^{-\frac{l}{2} r_1 (1 + \frac{2}{p_1'})} 2^{\frac{l}{2}(2(r_1 - 1)\frac{1}{p_1'} + 1 - r_1)} l^{\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\varepsilon_j'}} = C2^{-l(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1})} l^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})}.$$

Таким образом,

$$J_1 \leq C2^{-l(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1})} l^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})} \tag{19}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}} B$ при $2 < \tau_j < +\infty, \quad j = 1, ..., m$. Неравенства (17) и (19) можно записать в следующем виде:

$$J_1 \leq C2^{-l(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1})} l^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})_+} \tag{20}$$

для любой функции $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}} B$, где $a_+ = a$, если $a > 0$, и $a_+ = 0$, если $a \leq 0$.

В случае $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j = 1, ..., m$, неравенство (8) имеет вид (см. (10))

$$J_2 \leq C2^{-\alpha l (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})}. \tag{21}$$

Если же $\theta_j^{(2)} < \tau_j, j = 1, ..., m$, то (12) имеет вид

$$J_2 \leq C2^{-\alpha l (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} l^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j})}. \tag{22}$$

В этих неравенствах положим $\alpha = \frac{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}$. Тогда

$$J_2 \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} \tag{23}$$

в случае $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j=1,...,m$ и

$$J_2 \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{24}$$

в случае $\theta_j^{(2)} < \tau_j, j=1,...,m.$

Если $1 \leq \tau_j \leq 2$ и $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j=1,...,m,$ то в силу неравенств (20) (см. (17) и (23)) из неравенства (8) следует, что

$$\|f-t\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}. \tag{25}$$

Если $2 < \tau_j < +\infty$ и $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j=1,...,m,$ то в силу (20) (см. (19)) и (24) из (8) получим

$$\|f-t\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}. \tag{26}$$

Оценки (25) и (26) можно записать в следующем виде:

$$\|f-t\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}, \tag{27}$$

если $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j=1,...,m.$

Пусть $\theta_j^{(2)} < \tau_j, j=1,...,m.$ Тогда, если $1 \leq \tau_j \leq 2,\ \ j=1,...,m,$ то в силу неравенств (20) (см. (17) и (24)) из (8) получим

$$\|f-t\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})} l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})}. \tag{28}$$

Если же $2 < \tau_j < +\infty,\ \ j=1,...,m,$ то в силу неравенств (20) (см. (17)) и (24) из (8) будем иметь

$$\|f-t\|^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}\{l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}+l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})}\}. \quad (29)$$

Кроме этого, если $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}} \leq \frac{\nu-1}{2}$, то из (29) получим

$$\|f-t\|^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \quad (30)$$

в случае $\theta_j^{(2)} < \tau_j$ и $2<\tau_j<+\infty, \ \ j=1,...,m.$

Если же $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}} > \frac{\nu-1}{2}$, то в неравенстве (22) положим

$$\alpha=\frac{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{2})\frac{\log l}{l}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}.$$

Тогда

$$J_2 \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}, \quad (31)$$

если $\theta_j^{(2)} < \tau_j$ и $2<\tau_j<+\infty, \ \ j=1,...,m$ и $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}} > \frac{\nu-1}{2}$.

Теперь в силу неравенств (20) и (31) из (8) будем иметь

$$\|f-t\|^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}, \quad (32)$$

если $\theta_j^{(2)} < \tau_j$ и $2<\tau_j<+\infty, \ \ j=1,...,m$ и $\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)}} > \frac{\nu-1}{2}$.

В силу произвольности функции $f \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ из неравенства (27) получим

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \leq C2^{-l(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+} \asymp \quad (33)$$

$$\asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+},$$

если $\tau_j \leq \theta_j^{(2)}, \ \ j = 1, ..., m.$

Из неравенства (28) следует, что

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \leq M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})}, \tag{34}$$

если $\theta_j^{(2)} < \tau_j, \ \ 1 \leq \tau_j \leq 2, \ \ j = 1, ..., m.$

Если же $\theta_j^{(2)} < \tau_j < +\infty, \quad 2 < \tau_j \leq \infty, \quad j = 1, ..., m$, то из неравенств (30) и (32) следует, что

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \leq\leq M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log M)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}. \tag{35}$$

Соотношения (33) и (35) дают оценку сверху в первом пункте теоремы. Неравенство (34) – это оценка во втором пункте теоремы. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_j < q_j \leq 2, \ \ 1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \quad 1 \leq \tau_j \leq \infty,$ $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ...m$ *и* $r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq$ $\leq ... \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}, \quad r_1(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}) < r_j(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}), \ \ j = \nu+1, ..., m.$ *Тогда*

$$d_M^T(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}) \leq$$

$$\leq CM^{-\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Доказательство следует из теоремы 2 в [17].

Замечание. *Отметим, что при* $p_j = \theta_j^{(1)} = p, \quad q_j = \theta_j^{(2)} = q, \quad \tau_j = \tau, \ \ j = 1, ..., m$ *из теорем 2 и 3 получим результаты А.С. Романюка [12].*

Литература

1 Blozinski A.P., Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms Transactions American mathematical society. – 1981. – V. 263, №1. – P. 146-167.

2 Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977. – 456 с.

3 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. матем. журн. – 1963. – Т. 4, №6. – С. 1342-1364.

4 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-ата, 1976. – 224 с.

5 Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. – 1989. – Т. 187. – С. 143-161.

6 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи матем. наук. – 1974. – Т. 29, №3. – С. 161-173.

7 Белинский Э.С. Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль, 1984. – С. 10-24.

8 Майоров В.Е. Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40, №2. – С. 161-173.

9 Makovoz Y. On trigonometric n-widths and their generalization // J. approx. theory. – 1984. – V. 41, №4. – P. 361-366.

10 Магарил-Ильяев Г.Г. Тригонометрические поперечники соболевских классов функций в R^n // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. – 1988. – Т. 181. – С. 147-155.

11 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. – 1986. – Т. 178. – С. 1-112.

12 Романюк А. С. Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных // Матем. сб. – 2006. – Т. 197, №1. – С. 71-96.

13 Базарханов Д. Б., Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского – Бесова обобщенной смешанной гладкости // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, №1. – С. 11-14.

14 Акишев Г. О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81, №1. – С. 3-16.

15 Акишев Г. О порядках M-членного приближения классов периодических функций // Математический журнал. – Алматы, 2011. – Т. 11, №1. – С. 5-29.

16 Белинский Э.С., Галеев Э.М. О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. универ. Серия матем. мех. – 1991. – №2. – С. 3-7.

17 Акишев Г. О порядках M-членного приближения классов периодических функций // Математический журнал. – Алматы, 2006. – Т. 6, №4. – С. 5-11.

Статья поступила в редакцию 07.09.12

Ақышев Ғ. ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІГІНДЕ КЛАСТАРДЫҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚИМАЛАРЫНЫҢ БАҒАЛАРЫ

Мақалада көп айнымалылы периодты функциялардың анизотропты нормасы бар Лоренц кеңістігі қарастырылады. Анизотропты нормасы бар Лоренц кеңістігіндегі Никольский-Бесов-Аманов кластарының тригонометриялық қималарының дәл бағалары тағайындалған.

Akishev G. ESTIMATES OF TRIGONOMETRIC WIDTHS OF CLASSES IN THE LORENTZ SPACE

In this article the Lorentz space with anisotropic norm of periodic functions of many variables is under consideration. Rigorous estimates of trigonometric widths of Nikol'skii-Besov's-Amanov's classes in Lorentz space with anisotropic norm are established.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.91(61)+512

К. Б. Бапаев
Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v _ gulmira@mail.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ РДС

Исследуются асимптотические свойства РДС. Получены условия, при которых решения РДС будут ограничены, и доказана теорема, являющаяся дискретным аналогом теоремы Боля для дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: *разностно-динамические системы, ограниченные решения.*

Целью данной работы является распространение некоторых методов исследования асимптотических свойств дифференциальных уравнений [1] на разностно-динамические системы (РДС), с помощью которых получена аналогичная теорема Боля для РДС. Сначала докажем следующую лемму, являющуюся дискретным аналогом результата в [2].

Лемма 1. *Пусть*

$$y_{n+1} = Ay_n + f(n), \tag{1}$$

где $A-m\times m$ *постоянная матрица,* $y_n, f(n) \in R^m$ *и* $f_j(n) \in C, j = \overline{1,m}$. *Причем среди собственных чисел матрицы* A *нет по модулю равных единице. Тогда существует матрица* $G(n) \in C^\infty(|n| \in N)$, *имеющая следующие свойства:*

1) $G(0) = E_m$, *где* E_m- *единичная* $m \times m$ *- матрица,*

2) $\|G(n)\| \le ce^{-\alpha|n|}$ $(n \neq 0)$, c *и* α *– положительные постоянные,*

3) $G(n+1) = AG(n)$ *при* $n \neq 0$,

Keywords: *difference dynamical system, limited solution*
2010 Mathematics Subject Classification:

4)

$$\eta_n = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) f(\tau) \tag{2}$$

представляет собой единственное ограниченное на Z *решение РДС* (1).

Доказательство. С помощью неособенной $(m \times m)$ - матрицы B матрицу A можно привести к следующему виду:

$$BAB^{-1} = diag\,(P, Q)\,,$$

где P имеет характеристические числа $\lambda_j(P) : \|\lambda_j(P)\| > 1,\ j = \overline{1,k}$; Q имеет характеристические числа $\lambda_1(Q) : \|\lambda_l(Q)\| < 1,\ l = \overline{m-k,m}$.

Положим

$$G(t) = -S^{-1} diag\left(P^t, 0\right) S \text{ при } t \in Z_-, \tag{3}$$

$$G(t) = S^{-1} diag\left(0, Q^t\right) S \text{ при } t \in Z_+, \tag{4}$$

очевидно, имеем $G(|n| \in Z_+)$; кроме того, $G(+0) - G(-0) = E_n$ и, таким образом, свойство 1) выполнено.

Далее, полагая $1 < \alpha_1 < \min\limits_j \lambda_j(P)$, $1 < \alpha_2 < \min\limits_l \frac{1}{\lambda_l(Q)}$, получим

$$\|P^n\| = \left\|e^{n \ln|P|}\right\| \le c_1 e^{\alpha_1 n} \text{ при } n \in Z_-$$

и

$$\|Q^n\| = \left\|e^{k \ln|Q|}\right\| \le c_2 e^{-n\alpha_2} \text{ при } n \in Z_+,$$

где c_1 и c_2 – некоторые положительные постоянные; отсюда следует свойство

2)

$$\|G(n)\| \le c e^{-\alpha|n|} \quad (|n| \ne 0)\,, \tag{5}$$

где $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$;

$$G(n+1) = -S^{-1} diag\left(P^{n+1}, 0\right) S =$$

$$= -S^{-1} diag\,(P, Q)\, S S^{-1} diag\,(P^n, 0)\, S = AG(n)$$

при $n < 0$. Аналогично из формулы (4) получим

$$G(n+1) = AG(n) \text{ при } n > 0.$$

Следовательно, имеет место свойство 3). Наконец, из (5) выводим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|G\,(n)\| \leq 2c\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha n} = \frac{2c}{1-e^{-\alpha}}. \tag{6}$$

Поэтому ряд (2) сходится для любого $n \in Z$ из

$$\eta\,(n) = \sum_{\tau=-\infty}^{n} G\,(n-\tau)\,f\,(\tau) + \sum_{\tau=n+1}^{\infty} G\,(n-\tau)\,.$$

Формально варьируя по переменной n, будем иметь

$$\eta_{n+1} = G\,(0)\,f\,(n+1) + A\sum_{\tau=-\infty}^{n} G\,(n-\tau)\,f\,(\tau) +$$

$$+A\sum_{\tau=n}^{\infty} G\,(n-\tau)\,f\,(\tau) = f\,(n+1) + A\eta\,(n) \quad \forall n \in Z.$$

Итак, $\eta\,(n)$ является решением РДС (1). Оценивая $\eta\,(n)$ по норме и на основании (6) будем иметь

$$\|\eta\,(n)\| \leq \sup_n \|f\,(n)\| \cdot \sum_{-\infty}^{\infty}\|G\,(n-\tau)\| \leq \Gamma \cdot \frac{2c}{1-e^{\alpha}} = \Gamma_1 < \infty. \tag{7}$$

Следовательно, решение $\eta\,(n)$ ограничено на множестве $n \in Z$. То, что ограниченное решение $\eta\,(n)$ единственно, следует из того, что для двух ограниченных на Z решений $\eta\,(n)$, $\eta_1\,(n)$ решением линейной однородной РДС $x_{n+1} = Ax_n$ единственным, ограниченным на Z является тривиальное решение $x_n \equiv 0$. Таким образом, свойство 4) также выполнено, тем самым лемма доказана.

Следствие 1. *Для ограниченного решения* $\eta\,(n)$ *РДС* (1) *справедлива оценка*

$$\sup_n \|\eta_n\| \leq T \cdot \sup_n \|f\,(n)\|\,,$$

где постоянная T *зависит только от матрицы* A.

Замечание 1. *Если свободный член РДС* (1) *есть периодическая вектор-функция*

$$f(n+N) = f(n)\,(N>0),$$

то ограниченное решение также N *– периодично. Действительно, на основании формулы* (2) *имеем*

$$\eta(n+N) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n+N-\tau)\, f(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-k)\, f(\tau+N) = \eta(n).$$

Теперь рассмотрим нелинейную РДС

$$x_{n+1} = Ax_n + f(n, x_n), \tag{8}$$

где $y_n \in R^m; A-(m\times m)$ - матрица, $f(n,y_n) \in C_{n,y_n}, (Z\times \|x_n\| < \infty)$.

Теорема 1. *Если*

1) $|\lambda_j(A)| \neq 1$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$, *причем* $|\lambda_j(A)| > 1$ *при* $j=\overline{1,k}$, $|\lambda_l(A)| < 1$ *при* $l=\overline{m-k,m}$,

2) $\sup\limits_{n} \|f(n,0)\| = \Gamma < \infty$,

3) выполнено условие Липшица

$$\left\|f\left(n,x'\right) - f\left(n,x''\right)\right\| \le L\left\|x'-x''\right\|,$$

то при достаточно малой константе Липшица

1. *существует решение* $\eta=\eta(n)$ *РДС* (8), *определенное и ограниченное на* Z *;*
2. *в пространстве* R^n *имеются многообразия* S_k^+ *и* S_{m-k}^- *соответственно измерений* k *и* $m-k$ *такие, что решения* $x_n(x_0)$ *РДС* (8) *обладают свойствами:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[x_n(x_0) - \eta(n)\right] = 0, \;\; \text{если } x_0 \in S_k^+, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[x_n(x_0) - \eta(n)\right] = 0, \;\; \text{если } x_0 \in S_{n-m}^-. \tag{10}$$

Доказательство. 1) Принимая $f(n, x_n)$ за свободный член, по аналогии с формулой (2) рассмотрим суммарное уравнение

$$x_n = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\, f(\tau, x_\tau), \tag{11}$$

где $G(n)$ – функция, определенная в лемме; в силу 1), 2), 3), 4) непрерывное и ограниченное решение x_n суммарного уравнения (11) является так же решением РДС (8). Пусть $c_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G(n)\|$ $(c_1 < \infty)$ и $x_n^{(0)} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\, f(n, 0)$. На основании условия (2) имеем

$$\left\| x_n^{(0)} \right\| \leq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \|G(n-\tau)\| \cdot \|\varphi(\tau, 0)\| \leq$$

$$\leq \sup_n \|\varphi(k, 0)\| \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \|G(n, \tau)\| = \Gamma c_1 = \Gamma_1.$$

Выберем число H такое, что

$$H > 2\Gamma_1. \tag{12}$$

В пространстве R^n непрерывных и ограниченных на Z вектор-функций x_n, где $\sup\limits_n \|x_n\| < H$, рассмотрим оператор T, определяемый правой частью суммарного уравнения (11),

$$Tx_n = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\, \varphi(\tau, x_\tau). \tag{13}$$

Так как при $\|x_n\| < H$ имеем

$$\sup_{n, x_n} \|\varphi(n, x_n)\| \leq \sup_n \|\varphi(n, 0)\| + L \sup_{x_n} \|x_n\| < \Gamma + MH,$$

то при $x_n \in R^m$ ряд (13) сходится, причем равномерно. Отсюда легко убедиться, что если $x_n \in R^m$, то Tx_n имеет смысл для любого $n \in Z$ и $Tx_n \in C(Z)$.

Далее при $x_n \in R^m$ будем иметь

$$Tx_n = x_n^{(0)} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\left[f(\tau, x_\tau) - f(\tau, 0)\right],$$

отсюда

$$\|Tx_n\| \leq \left\|x_n^{(0)}\right\| + M\sup_n \left\|\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(\tau)\right\| \leq \Gamma_1 + LHA_1. \qquad (14)$$

Если выбрать константу Липшица $\Im$ столь малой, чтобы

$$L < \frac{1}{2A_1}, \qquad (15)$$

то из неравенства (14), учитывая, что $\Gamma_1 < \frac{H}{2}$, получим

$$\sup_n \|Tx_n\| \leq \Gamma_1 + \frac{H}{2} < H.$$

Таким образом, при L, удовлетворяющем неравенству (15), получаем, что если $x_n \in C$, то $Tx_n \in C$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (15) выполнено. Для функций $y_n, z_n \in C$ введем расстояние, полагая

$$\rho(y_n, z_n) = \sup_n \|y_n - z_n\|.$$

Тогда C будет являться метрическим пространством, причем это пространство полное.

Убедимся теперь, что при условии (15) отображение Tx_n будет сжатием. Действительно, если $y_n, z_n \in C$, то из формул

$$Ty_n = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) f(\tau, y_\tau)$$

и

$$Tz_n = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) f(\tau, z_\tau),$$

используя условие Липшица 3), получим

$$\|Ty_n - Tz_n\| \leq L \sup_n \|y_n - z_n\| \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \|G(n-\tau)\| = Lc_1 \rho(y_n, z_n).$$

Отсюда $\rho(Ty_n, Tz_n) \leq q \cdot \rho(y_n, z_n)$, где $q = Nc_1 < \frac{1}{2}$ в силу неравенства (15).

Таким образом, выполнены все условия принципа сжатых отображений и, следовательно, существует непрерывное, ограниченное на Z решение суммарного уравнения (2), а значит, и разностного уравнения (8), причем

$$\sup \|\eta_n\| < H,$$

решение $\eta(n)$ может быть найдено методом последовательных приближений:

$$x_n^{(0)} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\, \varphi(\tau, 0),$$

$$x_n^{(p)} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau)\, f\left(\tau, x_n^{(p)}\right), \quad p = 1, 2...;$$

2) в РДС (8) положим

$$x_n = \eta_n + y_n.$$

Тогда будем иметь

$$y_{n+1} = Ay_n + F(n, y_n), \tag{16}$$

где $F(n, y_n) = f(n, \eta(n) + y_n) - f(n, \eta(n))$. Очевидно, имеем

$$F_1(n, 0) = 0$$

и $\|F(n, y_n') - F(n, y_n)\| \leq L\|y_n' - y_n\|$ $(y_n', y_n \in R^m)$, причем $F(n, y_n) \underset{y_n \to 0}{\to} 0$. Отсюда, на основании теоремы об условной устойчивости, заключаем о существовании многообразий S_m^+ и S_m^-, обладающих соответственно (9) и (10).

Следствие 2. *Если* $f(n, x_n)$ *периодична по* n, *то ограниченное решение* $\eta(n)$ *также периодично.*

Действительно, в этом случае из равенства

$$\eta(n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) f(\tau, \eta(\tau))$$

получаем

$$\eta(n+N) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n+N-\tau) f(\tau, x_\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) f(\tau+N),$$

$$\eta(\tau+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n-\tau) \varphi(\tau, \eta(\tau+n)),$$

отсюда

$$\|\eta(n+N) - \eta(n)\| \leq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \|G(n-\tau)\| \|F(\tau, \eta(\tau+N)) - F(\tau, \eta(\tau))\| \leq$$

$$\leq \Im \sup_n \|\eta(n+N) - \eta(n)\| c_1,$$

где $c = \sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} G(\tau)$, следовательно, $\sup\limits_n \|\eta(n+\omega) - \eta(n)\| \leq c_1 \Im \sup\limits_n \|\eta(n+\omega) - \eta(n)\|$, а так как $c_1 N < 1$, то $\sup\limits_n \|\eta(n+\omega) - \eta(n)\| \leq 0$, т.е. $\eta(n+\omega) = \eta(n)$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема является дискретным аналогом некоторого результата П. Боля [3].

Литература

1 Бопаев К.Б. К вопросу о периодических решениях системы линейных неоднородных разностных уравнений // Труды семинара по теорий устойчивости движения. – Алматы, 1974. – Вып. 5. – С. 27-34.

2 Демидович В.П. Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. – 1956. – Т. 40(82), вып. 1. – С. 73-94.

3 Халанай А., Векслер Д. Качественная теория нелинейных импульсных систем. – М: Мир, 1971. – 310 с.

Статья поступила в редакцию 31.05.12

Бапаев Қ.Б. АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ШЕКТЕЛГЕН ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

АДЖ-дің шешімдері шектелген болуының шарттары алынған және дифференциалдық теңдеулерге арналған Боль теоремасының дискретті баламасы болатын теорема дәлелденген.

Bapaev K.B. ABOUT LIMITED SOLUTIONS OF DIFFERENCE DYNAMICAL SYSTEMS

Conditions of limited solutions of difference dynamical systems are received as well as a discrete analogue of Boll theorem for differential equations is proved.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.956.45

Д.А. Искендерова, С.Т. Тажикбаева

КГУСТА им. Н.Исанова
Киргизия, 720020, г. Бишкек, ул. Малдыбаева 34 б, e-mail: iskenja_2005@mail.ru
Ошский Государственный Университет
Киргизия, 714000, г. Ош, ул. Ленина, 331 e-mail: soni7676@bk.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В работе исследуется задача Коши для одномерных уравнений магнитной газовой динамики. В начальный момент времени все искомые функции стремятся к разным постоянным на бесконечности, а начальная плотность вырождается. Исследуются лагранжевы переменные. Методом априорных оценок доказано существование обобщенного решения "в целом" по времени.
Ключевые слова: *плотность, удельный объем, скорость, абсолютная температура, магнитное поле, интенсивность, давление, обобщенное решение, глобальные априорные оценки, существование.*

Введение

Актуальность теоретического исследования моделей механики сплошной среды, в частности, гидродинамики и газодинамики обусловлена их широким применением в решении важных практических задач. Уравнения в таких задачах нелинейные. Поэтому наиболее приемлемым способом их решения в настоящее время являются численные методы. Построение

Keywords: *density, specific volume, velocity, absolute temperature, magnetic field intensity, pressure, global a priori estimates, generalized solution, existence*
2010 Mathematics Subject Classification: 35D05; 35B45; 35G30; 35Q30

же эффективных численных алгоритмов невозможно без проведения достаточно подробных теоретических исследований. Поэтому, прежде всего, возникает необходимость провести строгий математический анализ корректности краевых задач. Кроме того, решение математических задач, возникающих при изучении проблем механики, представляет и самостоятельный научный интерес, который стимулируется дальнейшим развитием теории дифференциальных уравнений.

Математическая особенность всех изучаемых систем уравнений, помимо их нелинейности, связана с тем, что это системы составного типа. Данное обстоятельство диктует необходимость разрабатывать для каждой конкретной системы соответствующую методику исследования, так как общая теория уравнений составного типа, даже линейных, развита еще недостаточно полно. Своеобразие отдельных моделей проявляется, например, при получении априорных оценок для решения краевых задач.

В случае, когда начальные данные стремятся на бесконечности к фиксированной постоянной, теоремы существования "в целом" по времени для задачи Коши с вырождающейся плотностью получены в [1]. Однако, в случае, когда пределы начальных данных на бесконечности разные, проблема существования решения задачи Коши "в целом" для вырождающихся уравнений магнитной газовой динамики до сих пор не была решена. Изучению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Следует отметить, что задача Коши для уравнений магнитной газовой динамики со строго положительной начальной плотностью с разными пределами на бесконечности была исследована в [2]. Однако, задачи с вырождающейся начальной плотностью не являются следствием задач со строго положительной начальной плотностью. Так, если при $t = 0$ на границе плотность $\rho = 0$, то, очевидно, и при $t > 0$ на границе $\rho = 0$, что приводит к вырождению исследуемых уравнений.

В настоящей работе исследуется задача Коши для одномерных уравнений магнитной газовой динамики, когда в начальный момент времени все искомые функции стремятся к разным постоянным на бесконечности, а начальная плотность вырождается.

1 Постановка задачи

Уравнения магнитной газовой динамики в лагранжевых координатах имеют вид [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ v = \frac{\rho^0}{\rho}, \qquad (1_a)$$

$$\rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_l H \frac{\partial H}{\partial x},\ p = k\rho^0 \frac{\theta}{v}, \qquad (1_b)$$

$$\rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu_l \mu_H}{v}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2, \qquad (1_c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vH) = \mu_H \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial x}\right). \qquad (1_d)$$

Здесь $\rho(x,t), v(x,t), u(x,t), \theta(x,t), H(x,t), p(x,t)$ – соответственно плотность, удельный объем, скорость, температура, напряженность магнитного поля, давление – искомые функции; $\mu, \lambda, k, \mu_i, \mu_H$ – физические постоянные – положительные числа; переменные $x \in R = (-\infty, \infty)$; $t \in [0;T]$.

В начальный момент времени $t = 0$ все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \theta|_{t=0} = \theta^0(x), H|_{t=0} = H^0(x), v|_{t=0} = 1,\ |x| < \infty, \qquad (2)$$

причем $(\rho^0, u^0, \theta^0, H^0)$ – непрерывные, (ρ^0, θ^0) – ограниченные функции,

$$0 < m_0 \le \theta^0(x) \le M_0 < \infty,\ 0 < \rho^0(x) \le C_0,$$

имеющие конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to-\infty} \rho^0(x) = \rho_1^0,\ \lim_{x\to+\infty} \rho^0(x) = 0,\\
\lim_{x\to-\infty} u^0(x) = u_1^0,\ \lim_{x\to+\infty} u^0(x) = u_2^0,\ u_1^0 < u_2^0,\\
\lim_{x\to-\infty} \theta^0(x) = \theta_1^0,\ \lim_{x\to+\infty} \theta^0(x) = \theta_2^0,\ \theta_1^0 \ne \theta_2^0, \qquad (3)\\
\lim_{x\to-\infty} H^0(x) = H_1^0,\ \lim_{x\to+\infty} H^0(x) = H_2^0,\ H_1^0 \ne H_2^0.
\end{gathered}$$

Введем вспомогательные функции $f(x), \eta(x), \varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$|f(x)| < C_1 < \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = u_0^1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = u_0^2,$$

$$f'(x) \in W_2^1(R) \cap L_1(R),\ 0 < f'(x) \le C_3\sqrt{\rho^0(x)},\ \frac{f''(x)}{\sqrt{\rho^0(x)}} \in L_2(R),$$

$$0 < C_4^{-1} < \varphi(x) < C_4,\ \lim_{x\to\infty} \theta_0(x)\varphi(x) = 1,\ \varphi'(x) \in W_2^1(R), \tag{4}$$

$$1 \le \eta(x) < C_5 < \infty, \lim_{x\to-\infty} \eta(x) = H_0^1,\ \lim_{x\to+\infty} \eta(x) = H_0^2,\ \eta'(x) \in W_2^1(R).$$

Функции $f(x), \eta(x), \varphi(x)$ связаны неравенствами

$$(\varphi'(x))^2 < \delta(f'(x))^3,\ \eta'(x))^2 < \delta(f'(x))^3,\ 0 < \delta < 1.$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

Теорема 1. *Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и*

$$(u^0 - f, \theta^0\varphi - 1, H^0 - \eta) \in W_2^1(R),\ \left(\theta_x^0, H_x^0\right) \in L_2(R),$$

$$\rho^0(x) \in L_1(0;\infty),\ \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R),\ \left(\rho_x^0\right)^2 \le C(\rho^0)^3 \text{ при } x \in (0;\infty).$$

Тогда на любом конечном интервале времени $[0;T]$, $0 < T < \infty$, существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), которое удовлетворяет уравнениям и начальным данным почти всюду, причем

$$\left(\sqrt{\rho^0}(u-f), \sqrt{\rho^0}(\varphi\theta - 1), H - \eta, u_x, H_x, v_x, \rho^0\theta_x\right) \in L_\infty(0,T;L_2(R)),$$

$$\left(\sqrt{\rho^0}u_t, (\rho^0)^{3/2}\theta_t, H_t, u_{xx}, H_{xx}, v_x, \sqrt{\rho^0}\theta_x, \sqrt{\rho^0}\theta_{xx}\right) \in L_2(\Pi),\ \Pi = R\times(0,T),$$

$\theta(x,t), v(x,t)$ – строго положительные функции, $\rho^0(x), \theta(x,t)v(x,t)$ – ограниченные функции.

Доказательство существования обобщенного решения "в целом" по времени основывается на получении глобальных априорных оценок, положительные постоянные в которых C, C_i, K_i зависят от начальных данных и условий теоремы, но не зависят от промежутка существования локального решения. Глобальные априорное оценки позволяют продолжить локальное решение на весь промежуток времени [4].

2 Априорные оценки

Не нарушая общности, для простоты изложения положим все физические постоянные равными единице.

Сделаем замену, полагая $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,\ v = \frac{\rho^0}{\rho}, \tag{5_a}$$

$$\rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi v}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{\varphi}\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{\varphi}H\frac{\partial H}{\partial \xi},\ p = \rho^0\frac{\theta}{v}, \tag{5_b}$$

$$\rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi v}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) - p\frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2 v}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{\varphi^2 v}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)^2, \tag{5_c}$$

$$v\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\varphi}H\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi v}\frac{\partial H}{\partial \xi}\right). \tag{5_d}$$

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы имеет место оценка*

$$U(t) + \int_0^t W(\tau)d\tau \le E = const > 0,\ t \in [0,T], \tag{6}$$

где

$$U(t) = \int \{\frac{1}{2}\rho^0(u-f)^2 +$$

$$+\rho^0(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + \rho^0(v - \ln v - 1) + \frac{1}{2}v(H-\eta)^2\}dx,$$

$$W(t) = \int \{\frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} +$$

$$+\rho^0\frac{\theta}{v}f'(x) + H^2 f'(x)\}dx.$$

Все интегралы по x берутся от $-\infty$ до $+\infty$.

Доказательство. Умножим (5a) на $\rho^0\left(1-\frac{1}{v}\right)$, (5b) – на $\varphi(u-f)$, (5c) – на $\left(\varphi-\frac{1}{\theta}\right)$, (5d) – на $\varphi(H-\eta)$, сложим и проинтегрируем по R:

$$\frac{d}{dt}\int\{\frac{1}{2}\rho^0\varphi(u-f)^2+\rho^0(\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1)+$$

$$+\rho^0(v-\ln v-1)+\frac{1}{2}v\varphi(H-\eta)^2\}d\xi+$$

$$+\int\left\{\frac{\theta_\xi^2}{\varphi^2 v\theta^2}+\frac{u_\xi^2}{\varphi^2 v\theta}+\frac{H_\xi^2}{\varphi^2 v\theta}+\rho^0\frac{\theta}{v}f'(\xi)+H^2 f'(\xi)\right\}d\xi= \tag{7}$$

$$=\int\left\{\frac{\rho^0}{\varphi}u_\xi+\frac{1}{\varphi v}u_\xi f'-\frac{\theta_\xi\varphi'}{v\varphi^3\theta}+\frac{1}{2}\eta^2u_\xi+\frac{1}{\varphi v}H_\xi\eta'\right\}d\xi=\sum_{k=1}^{5}I_k.$$

Оценим каждый интеграл I_k в правой части (7), используя интегрирование по частям, неравенства вложения, Юнга, Гельдера, Коши, условия теоремы и свойства вспомогательных функций (4):

$$I_1=\int\frac{\rho^0}{\varphi}(u-f)_\xi d\xi+\int\frac{\rho^0}{\varphi}f'd\xi\le\tilde{N}_6\left(\|\sqrt{\rho^0}\varphi(u-f)\|^2+1\right),$$

$$I_2=\int f'\frac{\partial\ln v}{\partial t}d\xi=-\frac{d}{dt}\int f'(v-\ln v-1)d\xi+\int\frac{f'}{\varphi}u_\xi d\xi\le$$

$$\le-\frac{d}{dt}\int f'(v-\ln v-1)d\xi+C_7\left(\|\sqrt{\rho^0}\varphi(u-f)\|^2+1\right),$$

$$I_3=-\int\frac{\theta_\xi\varphi'}{v^{1/2}\theta\varphi^3}d\xi+\int\frac{\theta_\xi\varphi'(v^{1/2}-1)}{v^{1/2}\theta\varphi^3v^{1/2}\sqrt{v-\ln v-1}}\sqrt{v-\ln v-1d\xi}.$$

Заметим, что

$$\frac{|v^{1/2}-1|}{v^{1/2}\sqrt{v-\ln v-1}}\le C_8\quad\forall(x,t)\in\Pi.$$

Тогда

$$I_3\le\left(\int\frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\frac{\varphi'^2}{\varphi^4}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+C_8\left(\int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int \frac{\varphi'^2}{\varphi^4}(v-\ln v-1)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \varepsilon\int \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2\varphi^2}d\xi + C_\varepsilon\left(\int \rho^0(v-\ln v-1)d\xi+1\right),$$

$$I_4=\frac{1}{2}\int \eta^2(u-f)_\xi d\xi+\frac{1}{2}\int \eta^2 f'd\xi \le \tilde{N}_9\left(\|\sqrt{\rho^0}\varphi(u-f)\|^2+1\right),$$

$$I_5 \le \frac{1}{2}\int \frac{H_\xi^2}{v\theta\varphi^2}d\xi+\frac{C_3^2\delta}{2}\int \rho^0\frac{\theta}{v}f'd\xi.$$

Выбираем здесь $\varepsilon<1,\ \delta<1/C_3^2$. Проинтегрируем по времени полученное из (7) неравенство. Применяя лемму Гронуолла и переходя к исходным переменным x, выводим оценку (6). Лемма доказана.

Из (1a) и (1b) получим вспомогательное соотношение между искомыми функциями [5, 6]:

$$v(x,t)=I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)[1+$$
$$+\int_0^t\left(\rho^0(x)\theta(x,\tau)+\frac{1}{2}v(x,\tau)H^2(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)\right)d\tau], \tag{8}$$

где

$$I(t)=\frac{1}{v(x_0,t)}\exp\left\{\int_0^t\left[\rho^0\frac{\theta}{v}+\frac{1}{2}H^2\right](x_0,\tau)d\tau\right\},$$

$$B(x,t)=\exp\left\{\int_{x_0}^x \rho^0(\xi)\left((u^0(\xi)-u(\xi,t)\right)d\xi\right\},$$

$x_0=x_0(t),\ x$ – произвольно выбранные точки на числовой прямой.

Следуя [5], разобьем числовую ось R и соответственно полосу Π на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\bar{\Omega}_N,\ \Pi=\bigcup_{N=-\infty}^{\infty}\bar{Q}_N,$$

$$\Omega_N=\{x|N<x<N+1\},\ Q_N=\Omega_N\times(0,T),\ N=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы имеют место оценки*

$$0<K_1^{-1}\le B(x,t)\le K_1,\ 0<K_2^{-1}\le I(t)\le K_2 \quad \forall(x,t)\in\Pi.$$

Доказательство проводится аналогично [4, 5]. Из (6) вытекают оценки [5]:

$$\int_N^{N+1} \rho^0(x)v(x,t)dx \le K_3, \ \int_N^{N+1} \rho^0(x)\theta(x,t)dx \le K_4 \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (9)$$

Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t), \ m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t).$$

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы имеют место оценки*

$$m_v(t) \ge K_5, \ m_\theta(t) \ge K_6 \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство следует из представления (8) с учетом оценок леммы 2.

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы имеет место оценка*

$$\int_0^T \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{H_x^2}{v\theta^{1/2}} \right\} dxdt \le K_7.$$

Доказательство. Уравнение теплопроводности (1c) умножим на $\left(\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\theta} \right)$ и проинтегрируем по R:

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\varphi^{1/2}\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} + \frac{\varphi^{1/2}u_x^2}{v\theta^{1/2}} + \frac{\varphi^{1/2}H_x^2}{v\theta^{1/2}} \right\} dx =$$

$$= 2\frac{d}{dt} \int \rho^0 \left((\varphi\theta)^{1/2} - \ln(\varphi\theta)^{1/2} - 1 \right) dx +$$

$$+ \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{H_x^2}{v\theta} \right\} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\theta_x \varphi'}{v\varphi^{1/2}\theta^{1/2}} dx + \int \rho^0 \frac{(\varphi\theta)^{1/2} - 1}{v} u_x dx. \qquad (10)$$

Оценим предпоследний интеграл, используя неравенство Коши и свойства (4) функций $f(x), \varphi(x)$:

$$\left| \int \frac{\theta_x \varphi'}{v\varphi^{1/2}\theta^{1/2}} dx \right| \le \left(\int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \left(\int \frac{\theta}{v\varphi} \varphi'^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2}dx + C_{10}\int \rho^0\frac{\theta}{v}f'dx.$$

Справедливо неравенство

$$\frac{|(\varphi\theta)^{1/2}-1|}{\sqrt{\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1}} \leq K_8 \ \forall (x,t)\in \Pi.$$

Оценим последний интеграл в правой части (10). Для этого разобьем числовую прямую на две области: $R=\sigma_1(t)\cup\sigma_2(t)$, где $\sigma_1(t)=\{x\in R: v(x,t)\geq K_8^2K_3C_4E\}$, $\sigma_2(t)=\{x\in R: K_5\leq v(x,t)\leq K_8^2K_3C_4E\}$. Заметим, что если $K_8^2K_3C_4E\leq K_5$, то числовая прямая совпадает с областью $\sigma_1(t)$. Имеем

$$\int \rho^0\frac{(\varphi\theta)^{1/2}-1}{v}u_xdx=$$

$$=\int_{\sigma_1(t)}\rho^0\frac{(\varphi\theta)^{1/2}-1}{v}u_xdx+\int_{\sigma_2(t)}\rho^0\frac{(\varphi\theta)^{1/2}-1}{v}u_xdx=I_1+I_2.$$

Оценим $I_k,\ k=1,2$, используя неравенства Юнга и Коши, с учетом условий теоремы и полученных выше оценок. Имеем

$$I_1=\int_{\sigma_1(t)}\rho^0\frac{(\varphi\theta)^{1/2}-1}{\sqrt{\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1}}\sqrt{\varphi\theta-\ln\varphi\theta-1}\frac{u_x}{v}dx\leq$$

$$\leq C_4^{1/4}K_8E^{1/2}\frac{M^{1/4}_{(\rho^0)^2 0}}{C_4^{1/2}K_8E^{1/2}K_3^{1/2}}\left(\int\frac{\varphi^{1/2}u_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{M^{1/4}_{(\rho^0)^2 0}}{C_4^{1/2}K_3^{1/2}}\left(\int\frac{\varphi^{1/2}u_x^2}{v\theta^{1/2}}dx\right)^{1/2}.$$

Оценим $M^{1/4}_{(\rho^0)^2 0}$, используя условия теоремы и (9). Рассмотрим отрезок $\bar\Omega_N=[N,N+1]$. Возьмем точки $a(t), x\in\bar\Omega_N$. Тогда

$$\max_{x\in\bar\Omega_N}\left((\rho^0)^2\theta\right)^{1/4}=$$

$$=\left((\rho^0)^2\theta\right)^{1/4}(a(t),t)+\int_{a(t)}^x\left\{\frac{1}{4}(\rho^0)^{1/2}\frac{\theta_x}{\theta^{3/4}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_x^0}{(\rho^0)^{1/2}}\theta^{1/4}\right\}dx\leq$$

$$\leq C_{11} + \frac{1}{4} C_4^{1/4} K_3^{1/2} \left(\int \frac{\varphi^{1/2}\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx \right)^{1/2}.$$

Возвращаясь к I_1, получим

$$I_1 \leq \varepsilon_1 \int \frac{\varphi^{1/2} u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + \frac{1}{8} \int \frac{\varphi^{1/2}\theta_x^2}{v\theta^{3/2}} dx + C, \ \varepsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

Теперь рассмотрим область $\sigma_2(t)$. Имеем

$$I_2 = \int_{\sigma_1(t)} \rho^0 \frac{(\varphi\theta)^{1/2} - 1}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1} \frac{u_x}{v} dx \leq$$

$$\leq \frac{C_4^{1/4} K_8 E^{1/2}}{K_5^{1/2}} \left(\int \frac{\varphi^{1/2} u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx \right)^{1/2} \max_{x\in\sigma_2(t)} \left((\rho^0)^2\theta \right)^{1/4}.$$

Используя оценку

$$\max_{x\in\bar{\Omega}_N\cap\sigma_2(t)} \left((\rho^0)^2\theta \right)^{1/4} \leq C_{12} \left\{ 1 + \left(\int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right)^{1/2} \right\},$$

находим

$$I_2 \leq \varepsilon_2 \int \frac{\varphi^{1/2} u_x^2}{v\theta^{1/2}} dx + C_{13} \left(1 + \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx \right), \ \varepsilon_2 < \frac{1}{2}.$$

Справедливо неравенство

$$\int \rho^0 \left((\varphi\theta)^{1/2} - \ln(\varphi\theta)^{1/2} - 1 \right) dx \leq C_{14} \int \rho^0 (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) dx.$$

С учетом полученных неравенств проинтегрируем (10) по t. Используя (6), получим утверждение леммы.

Лемма 5. *При выполнении условий теоремы имеет место оценка*

$$\int_0^t M_H^2(\tau) d\tau \leq K_9 \quad \forall t \in [0, T].$$

Доказательство. Из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $a = const > 0$, что при $x > a$ выполняется $|\theta(x,t) - \theta_2^0| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что при малом ε

$$C_{15} \le \theta_2^0 - \varepsilon < \theta(x,t) < \theta_2^0 + \varepsilon \le C_{16} \quad \forall t \in [0,T].$$

Далее разобьем ось R на две полуоси $R = R_1 \cup R_2$ и соответственно $\Pi = Q_1 \cup Q_2$, где $R_1 = (-\infty, a]$, $R_2 = (a, \infty)$, $Q_i = R_i \times (0,T)$, $i = 1,2$. Будем выводить нужную оценку на каждой полуоси. После некоторых преобразований получим утверждение леммы.

Лемма 6. *При выполнении условий теоремы имеет место оценка*

$$M_v(t) \le K_{10} \quad \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Из соотношения (8) и оценок леммы 2 вытекает неравенство

$$M_v(t) \le C_{17} \left[1 + \int_0^t \left(M_{\rho^0\theta}(\tau) + M_H^2(\tau) M_v(\tau) \right) d\tau \right]. \tag{11}$$

Имеет место оценка [6, 7]: $M_{\rho^0\theta}(t) \le C_\varepsilon A(t) M_v(t) + C$, где

$$A(t) = \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx. \tag{12}$$

С учетом (12), из (11) находим

$$M_v(t) \le C_{18} \left[1 + \int_0^t \left(A(\tau) + M_H^2(\tau) \right) M_v(\tau) d\tau \right]. \tag{13}$$

Применяя к (13) лемму Гроноулла, с учетом (6) и леммы 5 выводим ограниченность удельного объема сверху.

Из (12) и леммы 6 вытекает оценка

$$\int_0^t M_{\rho^0\theta}(\tau) d\tau \le K_{11} \quad \forall t \in [0,T].$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить все априорные оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность решения доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений [6, 7]. Теорема доказана.

Литература

1 Искендерова Д.А. Движение вязкого газа с вырождающейся плотностью в магнитном поле // Вестник Мин. науки и высш. образ. НАН РК. – 1999. – № 2. – С. 61-67.

2 Искендерова Д.А., Мусатаева Г.Т. Движение вязкого газа с учетом магнитного поля в неограниченной области // Исслед. по интегро-дифференц. уравн. – Бишкек, 2002. – Вып. 31. – С. 233-239.

3 Бай Ши-и Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – Москва: Мир, 1964. – 301 с.

4 Искендерова Д.А. Локальная разрешимость вырождающихся уравнений магнитной газовой динамики // Известия НАН КР. – 2001. – № 1-2. – С. 62-67.

5 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.

6 Искендерова Д. А. Начально-краевая задача для уравнений магнитной газовой динамики с вырождающейся плотностью // Дифференц. уравн. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 765-773.

7 Искендерова Д.А., Смагулов Ш.С. Задача Коши для уравнений вязкого теплопроводного газа с вырождающейся плотностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. – 1993. – Т. 33, № 8. – С. 1251-1259.

Статья поступила в редакцию 14.04.11

Искендерова Д.А., Тажикбаева С. МАГНИТТІ ГАЗДЫҚ ДИНАМИКАНЫҢ АЗЫНҒАН ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН КОШИ ЕСЕБІ

Жұмыста магнитті газдық динамиканың бір өлшемді теңдеулері үшін Коши есебі зерттеледі. Бастапқы сәтте барлық ізделінетін функциялар шексіздіктегі әр түрлі тұрақтыларға ұмтылады, ал бастапқы тығыздық азынады. Лагранж айнымалылары зерттеледі. Априорлық бағалау әдісімен уақыт бойынша "толықтай" алынған жалпылама шешімнің бар екені дәлелденген.

Iskenderova D.A., Tajikbaeva S. CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATE EQUATIONS OF MAGNETIC GAS DYNAMICS

Cauchy problem for one-dimensional equations of magnetic gas dynamics is considered. At initial time unknown functions tend to different constants at infinity and initial density is degenerate. We consider Lagrangean coordinates. By the method of priori estimates "overall" existence of generalized solution with respect to time is proved.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.956.3

С.С. Кабдрахова

Институт математики и математического моделирования МОН РК
050010, г. Алматы, ул. Пушкина 125, e-mail: anar@math.kz

СХОДИМОСТЬ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА РЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Установлены оценки сходимости модификации метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для одного уравнения третьего порядка.
Ключевые слова: *полупериодическая краевая задача, линейное гиперболическое уравнение.*

Математическое моделирование различных процессов физики, химии, биологии приводит к исследованию периодических краевых задач для гиперболических уравнений и построению приближенных методов нахождения их решений. В [1] предложена модификация метода ломаных Эйлера для решения полупериодической краевой задачи гиперболического уравнения со смешанной производной. Установлены условия существования единственного решения рассматриваемой задачи и сходимости к нему предлагаемого метода.

В настоящей статье модификация метода ломаных Эйлера применяется к нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения третьего порядка. На основе специального преобразования неизвестной функции уравнение третьего порядка сводится к системе двух гиперболических уравнений со смешанными производными. Получены оценки

Keywords: *semiperiodic boundary value problem, linear hyperbolic equation*
2010 Mathematics Subject Classification: 35L20,35L70, 35B10

сходимости модификации метода ломаных Эйлера к решению рассматриваемой краевой задачи.

В области $\overline{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + a_3(x,t)u + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t),\ t \in [0,T], \varphi(0) = \varphi(T),\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial t},\ x \in [0,\omega], \tag{4}$$

где $f(x,t), a_i(x,t),\ i = \overline{0,3},$ – непрерывные на $\overline{\Omega}$, $\varphi(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые на $[0,T]$ функции.

Для вектор-функции $u(x,t) = \big(u_1(x,t), u_2(x,t)\big)$ и матрицы $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))(i,j = 1,2)$ положим

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=1,2} |u_i(x,t)|,\ \ \|A(x,t)\| = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}(x,t)|.$$

Через $C(\overline{\Omega}, R^2)$, $C([0,T], R^2)$ обозначим соответственно пространство непрерывных функций $u : \overline{\Omega} \to R^2$ и $\psi(t) : [0,T] \to R^2$. Положим $\|u(x,\cdot)\|_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(x,t)\|$, $\|\psi\|_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|$, $\|A(x,\cdot)\|_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(x,t)\|$.

Решением задачи (1)–(4) называется функция $u(x,t)$, имеющая непрерывные на $\overline{\Omega}$ частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$, $\dfrac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2}$ и удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(4).

Модификация метода ломаных Эйлера [1, 2] применяется к нелокальной краевой задаче (1)–(4). С этой целью уравнение третьего порядка (1) сводится к системе двух гиперболических уравнений со смешанными производными.

Пусть $\alpha_0 = \max\Big(\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\{|a_0(x,t)| + |a_1(x,t)|\}, 1\Big)$. В задаче (1)–(4) произведем замену: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha_0[u_1(x,t) - u_2(x,t)]$ и введем обозначения

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix},\ V(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x},\ \psi(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varphi(t) + \dfrac{\dot\varphi(t)}{\alpha_0} \\ \varphi(t) - \dfrac{\dot\varphi(t)}{\alpha_0} \end{pmatrix},$$

$$A(x,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left[\alpha_0 + a_0(x,t) + \dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[\alpha_0 + a_0(x,t) - \dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] \\ \left[\alpha_0 - a_0(x,t) - \dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[\alpha_0 - a_0(x,t) + \dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right] \end{pmatrix},$$

$$B(x,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left[a_2(x,t) + \dfrac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] & -\left[a_2(x,t) - \dfrac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] \\ -\left[a_2(x,t) + \dfrac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] & \left[a_2(x,t) - \dfrac{a_3(x,t)}{\alpha_0}\right] \end{pmatrix},$$

$$F(x,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{f(x,t)}{2\alpha_0} \\ -\dfrac{f(x,t)}{2\alpha_0} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда задачу (1)–(4) можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x,t)V + B(x,t)U(x,t) + F(x,t), \quad V \in R^2, \tag{6}$$

$$V(x,0) = V(x,T), \tag{7}$$

$$U(x,t) = \psi(t) + \int\limits_0^x V(\xi,t)d\xi. \tag{8}$$

Для нахождения решения задачи (6)-(8) разобьем отрезок $[0,\omega]$ с шагом $h>0$ на N частей, $Nh=\omega$. Функции $v^{(0)}(t)$, $\dot{v}^{(0)}(t)$ определим равенствами: $v^{(0)}(t)=0$, $\dot{v}^{(0)}(t)=0$.

Решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(1)}}{dt}=A(0,t)v^{(1)}+B(0,t)\psi(t)+F(0,t),\ v^{(1)}(0)=v^{(1)}(T), \tag{9}$$

находим вектор-функцию $v^{(1)}(t)$.

Вектор-функцию $v^{(2)}(t)$ найдем, решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(2)}}{dt}=A(h,t)v^{(2)}+B(h,t)\big(\psi(t)+v^{(1)}(t)h\big)+F(h,t),$$

$$v^{(2)}(0)=v^{(2)}(T). \tag{10}$$

Считая известными $v^{(i)}(t), i=\overline{1,N}$, вектор-функцию $v^{(i+1)}(t)$ находим, решая периодическую краевую задачу

$$\frac{dv^{(i+1)}}{dt}=A(ih,t)v^{(i+1)}+B(ih,t)\big(\psi(t)+h\sum_{j=0}^{i}v^{(j)}(t)\big)+F(ih,t), \tag{11}$$

$$v^{(i+1)}(0)=v^{(i+1)}(T),\ i=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Пусть $\alpha_1=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|A(x,t)\|, \alpha_2=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|B(x,t)\|,\ \|F\|_0=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|F(x,t)\|,$

$$K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)=\max\Big(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\Big).$$

Теорема 1. *Пусть выполняется неравенство $a_1(x,t)\geq\sigma>0$ для всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Тогда для любого $h>0: Nh=\omega$ периодическая краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12) имеет единственное решение $\{v^{(i+1)}(t),\ i=\overline{1,N}\}$ и справедливы оценки:*

$$\max_{i=\overline{1,N}}\max\left(\|v^{(i+1)}\|_0,\|\dot{v}^{(i+1)}\|_0\right)\leq$$

$$\leq K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\left\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right\}.$$

Доказательство. Согласно выбору числа $\alpha_0 > 0$ выполняется неравенство
$$\alpha_0 - |a_0(x,t)| - \frac{|a_1(x,t)|}{\alpha_0} \geq 0,$$
поэтому
$$\left|\frac{1}{2}\left[\alpha_0 + a_0(x,t) + \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\right| - \left|\frac{1}{2}\left[\alpha_0 - a_0(x,t) - \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\right| = \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} \geq \frac{\sigma}{\alpha_0},$$
$$\left|\frac{1}{2}\left[\alpha_0 - a_0(x,t) - \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\right| - \left|\frac{1}{2}\left[\alpha_0 - a_0(x,t) + \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0}\right]\right| = \frac{a_1(x,t)}{\alpha_0} \geq \frac{\sigma}{\alpha_0}.$$
Это означает, что в матрице $A(x,t)$ имеет место условие диагонального преобладания по строкам с функцией $\theta(x,t) = \dfrac{a_1(x,t)}{\alpha_0}$.

Рассмотрим задачу (11), (12). По теореме 4 из [3, с.392] существует единственное решение задачи и выполняется оценка
$$\|v^{(i+1)}\|_0 \leq \frac{\alpha_0}{\sigma}\|B(ih,\cdot)\|_0\left(\|\psi\|_0 + h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0\right) + \frac{\alpha_0}{\sigma}\|F(ih,\cdot)\|_0 \leq$$
$$\leq \frac{\alpha_0}{\sigma}\left(\alpha_2\|\psi\|_0 + \alpha_2 h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0 + \|F\|_0\right).$$
Так как $v^{(i+1)}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (11), то для ее производной будет справедлива оценка
$$\|\dot{v}^{(i+1)}\|_1 \leq \|A(ih,\cdot)\|_0\|v^{(i+1)}\|_0 + \|B(ih,\cdot)\|_0\Big(\|\psi\|_0 + h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0 + \|F\|_0\Big) \leq$$
$$\leq \alpha_1\|v^{(i+1)}\|_0 + \alpha_2\Big(\|\psi\|_0 + h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0\Big) + \|F\|_0. \qquad (13)$$
Подставляя в правую часть (13) оценку $\|v^{(i+1)}\|_1$, получим
$$\|\dot{v}^{(i+1)}\|_1 \leq \alpha_2\Big(\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1\Big)\Big(\|\psi\|_0 + h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0\Big) + \Big(\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma} + 1\Big)\|F\|_0 \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(\alpha_2\|\psi(\cdot)\|_0+\alpha_2 h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0+\|F\|_0\right).$$

Из последней оценки и оценки (13) получим

$$\max\left(\|v^{(i+1)}\|_0,\|\dot{v}^{(i+1)}\|_0\right)\leq$$

$$\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(\alpha_2\|\psi\|_0+\alpha_2 h\sum_{j=0}^{i}\|v^{(j)}\|_0+\|F\|_0\right). \qquad (14)$$

Из неравенства (14) при $i=0$ получим

$$\max\left(\|v^{(1)}\|_0,\|\dot{v}^{(1)}\|_0\right)\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right).$$

При $i=1$ из неравенств (14), с учетом оценки для функций $v^{(1)}(t)$, $\dot{v}^{(1)}(t)$, получим

$$\max\left(\|v^{(2)}\|_0,\|\dot{v}^{(2)}\|_0\right)\leq$$

$$\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(\alpha_2\|\psi\|_0+\alpha_2 h\max\left(\|v^{(1)}\|_0,\|\dot{v}^{(1)}\|_0\right)+\|F\|_0\right)\leq$$

$$\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(1+\alpha_2 h\max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\right)\left\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right\}.$$

Аналогично, для $v^{(3)}(t),\dot{v}^{(3)}(t)$ из (14) имеем оценку

$$\max\left(\|v^{(3)}\|_0,\|\dot{v}^{(3)}\|_0\right)\leq$$

$$\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(1+\alpha_2 h\max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\right)^2\left\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right\}.$$

Продолжая, для любого $i=\overline{1,N}$ установим оценку

$$\max\left(\|v^{(i+1)}\|_0,\|\dot{v}^{(i+1)}\|_0\right)\leq$$

$$\leq \max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\left(1+\alpha_2 h\max\left(\frac{\alpha_0}{\sigma},\frac{\alpha_0\alpha_1}{\sigma}+1\right)\right)^i\left\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right\}\leq$$

$$\leq K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\left\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\right\}. \qquad (15)$$

Докажем единственность решения краевой задачи (11), (12). Пусть существуют два решения $\widetilde{v}^{(i+1)}(t)$ и $\overline{v}^{(i+1)}(t)$. Их разность обозначим через $\Delta v^{(i+1)}(t)$, т.е. $\Delta v^{(i+1)}(t) = \widetilde{v}^{(i+1)}(t) - \overline{v}^{(i+1)}(t)$. Для $\Delta v^{(i+1)}(t)$ имеем краевую задачу

$$\frac{d\Delta v^{(i+1)}}{dt} = A(ih,t)\Delta v^{(i+1)} + B(ih,t)h\sum_{j=0}^{i}\Delta v^{(j)}, \quad \Delta v^{(i+1)}(0) = \Delta v^{(i+1)}(T),$$

и справедлива оценка

$$\|\Delta v^{(i+1)}\|_0 \leq \frac{\alpha_0}{\sigma}\alpha_2 h\sum_{j=0}^{i}\|\Delta v^{(j)}\|_0. \tag{16}$$

Так как по предположению $v^{(0)}(t) = 0$, то из (16) при $i = 1$ получим

$$\|\Delta v^{(1)}(\cdot)\|_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \widetilde{v}^{(1)}(t) = \overline{v}^{(1)}(t).$$

Из (16) видно, что все оценки $\Delta v^{(i+1)}(t)$, $i = \overline{1,N}$, получаются через предыдущие. Поэтому для всех $i = \overline{1,N}$ $\widetilde{v}^{(i)}(t) = \overline{v}^{(i+1)}(t)$, $t \in [0,T]$. Значит, задача (11), (12) имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

По найденным функциям $v^{(i+1)}(t)$, $i = \overline{1,N}$, на $\overline{\Omega}$ строятся функции

$$U_h(x,t) = \psi(t) + h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t) + v^{(i)}(t)(x-(i-1)h), \quad x \in [(i-1)h, ih), \tag{17}$$

$$V_h(x,t) = v^{(i+1)}(t)\frac{x-(i-1)h}{h} + v^{(i)}(t)\frac{ih-x}{h}, \quad x \in [(i-1)h, ih), \quad i = \overline{1,N}. \tag{18}$$

Введем обозначения

$$D_h(x) = \left[K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\{\alpha_2\|\psi\|_0 + \|F\|_0\} + \|\psi\|_0\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\max\left(\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{f(x,\cdot)-f(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\right),$$

$$E_h(x) = \int_0^x D_h(\xi)d\xi + 3hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\left[1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\right]^{\frac{\omega}{h}}\Big\{\alpha_2\|\psi\|_0 + \|F\|_0\Big\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда на $\overline{\Omega}$ существует единственное решение $\{U^*(x,t), V^*(x,t)\}$ краевой задачи (6)–(8) и справедливы оценки*

$$\|V^*(x,\cdot) - V_h(x,\cdot)\|_0 \le D_h(x) + E_h(x)\exp\Big(\int_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\Big),$$

$$\|U^*(x,\cdot) - U_h(x,\cdot)\|_0 \le E_h(x)\exp\Big(\int_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\Big).$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы покажем, что существует решение краевой задачи (6)-(8). Решение $V^*(x,t), U^*(x,t)$ задачи (6)–(8) найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение по $U(x,t)$ возьмем $U_h(x,t)$, а $V^{(1)}(x,t)$ найдем, как решение периодической краевой задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x,t)V + B(x,t)U_h(x,t) + F(x,t), \tag{19}$$

$$V(x,0) = V(x,T), \tag{20}$$

Так как условие теоремы обеспечивает выполнение условий теоремы из [2, с. 104], то существует единственное решение $V^{(1)}(x,t)$ задачи (19), (20).

Оценим разность функций $v^{(1)}(x,t)$ и $V_h(x,t)$ с учетом представления (18):

$$\Big\|V^{(1)}(x,\cdot) - V_h(x,\cdot)\Big\|_0 \le$$

$$\le \Big\|V^{(1)}(x,\cdot)\Big(\frac{x-(i-1)h}{h} + \frac{ih-x}{h}\Big) - v^{(i+1)}\frac{x-(i-1)h}{h} - v^{(i)}\frac{ih-x}{h}\Big\|_0 \le$$

$$\le \|V^{(1)}(x,\cdot) - v^{(i+1)}\|_0 \frac{x-(i-1)h}{h} + \|V^{(1)}(x,\cdot) - v^{(i)}\|_0 \frac{ih-x}{h} \le$$

$$\le \max\Big(\|V^{(1)}(x,\cdot) - v^{(i+1)}\|_0, \|V^{(1)}(x,\cdot) - v^{(i)}\|_0\Big). \tag{21}$$

Обозначим через $\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,t)$ разность $V^{(1)}(x,t) - v^{(i+1)}(t), i = = \overline{1,N}$. Учитывая, что $v^{(i+1)}(t)$, $i = \overline{1,N}$, и $V^{(1)}(x,t)$ соответственно решения задач (11),(12) и (19),(20), $\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,t)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial \triangle\widetilde{V}^{(1)}}{\partial t} = A(x,t)\triangle\widetilde{V}^{(1)} + [A(x,t) - A(ih,t)]v^{(i+1)}(t) + [B(x,t) - B(ih,t)]\times$$

$$\times\Big(\psi(t)+h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t)\Big)++B(x,t)v^{(i)}(t)(x-ih)+F(x,t)-F(ih,t), \quad (22)$$

$$\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,0)=\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,T),\ x\in[0,\omega]. \quad (23)$$

Для $\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,t)$ по теореме из [4, с. 104] справедлива оценка

$$\|\triangle\widetilde{V}^{(1)}(x,\cdot)\|_0=\|V^{(1)}(x,\cdot)-v^{(i+1)}\|_0\le$$

$$\le\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\Big(\|\psi\|_0+$$

$$+h\sum_{j=0}^{i-1}\|v^{(j)}\|_0\Big)+\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\|v^{(i)}\|_0|x-(i-1)h|+\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f(ih,\cdot)}{2a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\le$$

$$\le\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f(ih,\cdot)}{2a_1(x,\cdot)}\Big\|_0+\Bigg[\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\times$$

$$\times\omega+\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0|x-(i-1)h|\Bigg]K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\Big\{\alpha_2\|\psi\|_0+$$

$$+\|F\|_0\Big\}+\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\|\psi\|_0. \quad (24)$$

Аналогично получим оценку

$$\|\triangle\overline{V}^{(1)}(x,\cdot)\|_0=\|V^{(1)}(x,\cdot)-v^{(i)}\|_0\le\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0+$$

$$+\Bigg[\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\omega+$$

$$+\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0|x-ih|\Bigg]K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\Big\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|\hat{F}\|_0\Big\}+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\|\psi\|_0. \quad (25)$$

Из оценок (24),(25) получим

$$\|\triangle V^{(1)}(x,\cdot)\|_0 = \max\Big(\|V^{(1)}(x,\cdot)-v^{(i+1)}\|_0, \|V^{(1)}(x,\cdot)-v^{(i)}\|_0\Big) \leq$$

$$\leq \Bigg[\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\omega+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_3(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\omega+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)|x-(i-1)h|\Bigg]\times$$

$$\times K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\}+$$

$$+\Bigg[\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\Bigg]\times$$

$$\times\omega\|\psi\|_0+\max\Big(\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f((i-1)h,\cdot)}{2a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{f(x,\cdot)-f(ih,\cdot)}{2a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big). \qquad (26)$$

Подставляя оценку (26) в правую часть (21), имеем

$$\Big\|V^{(1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\Big\|_0 \leq$$

$$\leq \Bigg[\max\Big(\Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_1(x,\cdot)-a_1(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\omega+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)\omega+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0, \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)-a_3(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)|x-(i-1)h|\Bigg]\times$$

$$\times\Big[K(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\Big)^{\frac{\omega}{h}}\{\alpha_2\|\psi\|_0+\|F\|_0\}+\|\psi\|_0\Big]+$$

$$+\max\Big(\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f((i-1)h,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0,\Big\|\frac{f(x,\cdot)-f(ih,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0\Big)=A_h(x). \qquad (27)$$

$V^{(1)}(x,t)$ подставляем в функциональное соотношение (8), получим

$$U^{(1)}(x,t)-U_h(x,t)=\int\limits_0^x\Big(V^{(1)}(\xi,t)-V_h(\xi,t)\Big)d\xi+\int_0^x V_h(\xi,t)d\xi-$$

$$-h\sum_{j=0}^{i-1}v^{(j)}(t)-v^{(i)}(t)[x-(i-1)h]. \qquad (28)$$

Из соотношения (18) имеем

$$\int_0^x V_h(\xi,t)d\xi=\int_0^h\Big[v^{(1)}(t)\frac{h-\xi}{h}+v^{(2)}(t)\frac{\xi}{h}\Big]d\xi+$$

$$+\int_h^{2h}\Big[v^{(2)}(t)\frac{2h-\xi}{h}+v^{(3)}(t)\frac{\xi-h}{h}\Big]d\xi+\ldots+\int_{(i-2)h}^{(i-1)h}\Big[v^{(i-1)}(t)\frac{ih-\xi}{h}+$$

$$+v^{(i)}(t)\frac{\xi-(i-1)h}{h}\Big]d\xi+\int_{(i-1)h}^x\Big[v^{(i)}(t)\frac{ih-\xi}{h}+v^{(i+1)}(t)\frac{\xi-(i-1)h}{h}\Big]d\xi=$$

$$=\Big[v^{(1)}(t)+v^{(i)}(t)\Big]\frac{h}{2}+h\Big[v^{(2)}(t)+v^{(2)}(t)+\ldots+v^{(i-1)}(t)\Big]+$$

$$+\int_{(i-1)h}^x\Big[v^{(i)}(t)\frac{ih-\xi}{h}+v^{(i+1)}(t)\frac{\xi-(i-1)h}{h}\Big]d\xi. \qquad (29)$$

В правую часть (28) подставляя выражения (29) и учитывая оценки (27), (15), получим

$$\|u^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1\le\int_0^x D_h(\xi)d\xi+\max\big(\|v^{(i)}\|_1,\|v^{(i+1)}\|_1\big)|x-(i-1)h|+$$

$$+\max\big(\|v^{(i)}\|_1,\|v^{(1)}\|_1\big)h+\|v^{(i)}(\cdot)\|_1|x-(i-1)h|\le\int_0^x D_h(\xi)d\xi+$$

$$+3h \max_{i=\overline{1,N}} \|v^{(i+1)}\|_1 \leq 3hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\left(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\right)^{\frac{\omega}{h}} \times$$

$$\times \{\alpha_2\|\psi\|_0 + \|F\|_0\} \cdot \int_0^x D_h(\xi)d\xi = E_h(x). \tag{30}$$

При $U = U^{(1)}(x,t)$ решая задачу (6),(7) найдем функцию $V^{(2)}(x,t)$. Обозначим через $\triangle V^{(2)}(x,t)$ разность $V^{(2)}(x,t) - V^{(1)}(x,t)$. Для $\triangle V^{(2)}(x,t)$ имеем

$$\frac{\partial \triangle \widetilde{V}^{(2)}}{\partial t} = A(x,t)\triangle \widetilde{V}^{(2)} + B(x,t)\left[U^{(1)}(x,t) - U_h(x,t)\right], \tag{31}$$

$$\triangle \widetilde{V}^{(2)}(x,0) = \triangle \widetilde{V}^{(2)}(x,T), \ x \in [0,\omega]. \tag{32}$$

Учитывая оценку (30), для $\triangle \widetilde{V}^{(2)}(x,t)$ получим оценку

$$\|\triangle \widetilde{V}^{(2)}(x,\cdot)\|_0 \leq \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 \|U^{(1)}(x,\cdot) - U_h(x,\cdot)\|_0 \leq$$

$$\leq \Big[\int_0^x D_h(\xi)d\xi + 3hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\left(1+\alpha_2 hK(\alpha_0,\alpha_1,\sigma)\right)^{\frac{\omega}{h}}\Big\{\alpha_2\|\psi\|_0 +$$

$$+\|F\|_0\Big\}\Big]\Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 = \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 \cdot E_h(x). \tag{33}$$

При $V = V^{(2)}(x,t)$ из интегрального соотношения (8) имеем $U^{(2)}(x,t) = = \psi(t) + \int\limits_0^x V^{(2)}(\xi,t)d\xi$. Тогда для разности $U^{(2)}(x,t) - U^{(1)}(x,t)$, учитывая оценку (33), имеем

$$\|U^{(2)}(x,\cdot) - U^{(1)}(x,\cdot)\|_0 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x \|V^{(2)}(\xi,\cdot) - V^{(1)}(\xi,\cdot)\|_0 d\xi \leq \int\limits_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 \cdot E_h(\xi)d\xi. \tag{34}$$

Далее краевую задачу (6),(7) решаем при $U = U^{(2)}(x,t)$, находим $V^{(3)}(x,t)$. Аналогично (30),(34) получим оценки

$$\|\triangle \widetilde{V}^{(3)}(x,\cdot)\|_0 = \|V^{(3)}(x,\cdot) - V^{(2)}(x,\cdot)\|_0 \leq \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\times$$

$$\times\Big\|_0 \|U^{(2)}(x,\cdot)-U^{(1)}(x,\cdot)\|_0 \le \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 \int\limits_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 \cdot E_h(\xi)d\xi, \qquad (35)$$

$$\|U^{(3)}(x,\cdot)-U^{(2)}(x,\cdot)\|_0 \le \int\limits_0^x \|V^{(3)}(\xi,\cdot)-V^{(2)}(\xi,\cdot)\|_0 d\xi \le \int\limits_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 \times$$

$$\times \int\limits_0^\xi \Big\|\frac{a_3(\xi_1,\cdot)}{a_1(\xi_1,\cdot)}\Big\|_0 \cdot E_h(\xi_1)d\xi_1 d\xi = \frac{1}{2!}\left(\int\limits_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\right)^2 E_h(x). \qquad (36)$$

Предполагая, что $V^{(k)}(x,t)$, $U^{(k)}(x,t)$, $k=2,3,\ldots$, известны и установлена оценка

$$\|V^{(k)}(x,\cdot)-V^{(k-1)}(x,\cdot)\|_0 \le$$

$$\le \Big\|\frac{B(x,\cdot)}{\theta(x,\cdot)}\Big\|_0 \int_0^x \|V^{(k-1)}(\xi,\cdot)-V^{(k-2)}(\xi,\cdot)\|_0 d\xi, \qquad (37)$$

следующее приближение по V найдем, решая семейство периодических краевых задач

$$\frac{\partial V^{(k+1)}}{\partial t} = A(x,t)V^{(k+1)} + B(x,t)U^{(k)}(x,t) + F(x,t), \qquad (38)$$

$$V^{(k+1)}(x,0) = V^{(k+1)}(x,T). \qquad (39)$$

Функция $U^{(k+1)}(x,t)$ определяется из функционального соотношения

$$U^{(k+1)}(x,t) \;=\; \psi(t) + \int_0^x V^{(k+1)}(\xi,t)d\xi, \quad k=1,2,\ldots.$$

Отсюда, оценивая разности $U^{(k+1)}(x,t)-U^{(k)}(x,t)$, получим

$$\|U^{(k+1)}(x,\cdot)-U^{(k)}(x,\cdot)\|_0 \le$$

$$\le \int_0^x \max(\|V^{(k+1)}(\xi,\cdot)-V(k)(\xi,\cdot)\|_0 d\xi,\ k=1,2,3,\ldots, \qquad (40)$$

и аналогично (33)–(36) имеем

$$\|V^{(k+1)}(x,\cdot)-V^{(k)}(x,\cdot)\|_0 \le$$

$$\leq \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 \int_0^x \max(\|V^{(k)}(\xi,\cdot)-V^{(k-1)}(\xi,\cdot)\|_0 d\xi \leq$$

$$\leq \Big\|\frac{a_3(x,\cdot)}{a_1(x,\cdot)}\Big\|_0 \frac{1}{(k-2)!}\Bigg(\int\limits_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\Bigg)^{k-2} E_h(x),\ k=1,2,3,\ldots, \qquad (41)$$

$$\big(\|V^{(k+1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_0 \leq$$

$$\leq \|V^{(k+1)}(x,\cdot)-V^{(k)}(x,\cdot)\|_0+\ldots+\|V^{(2)}(x,\cdot)-V^{(1)}(x,\cdot)\|_0+$$

$$+\|V^{(1)}(x,\cdot)-V_h(x,\cdot)\|_0 \leq D_h(x)+E_h(x)\exp\Big(\int_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\Big), \qquad (42)$$

$$\|U^{(k+1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_0 \leq \|U^{(k+1)}(x,\cdot)-U^{(k)}(x,\cdot)\|_0+$$

$$+\ldots+\|U^{(2)}(x,\cdot)-U^{(1)}(x,\cdot)\|_0+\|U^{(1)}(x,\cdot)-U_h(x,\cdot)\|_1 \leq$$

$$\leq E_h(x)\exp\Big(\int_0^x \Big\|\frac{a_3(\xi,\cdot)}{a_1(\xi,\cdot)}\Big\|_0 d\xi\Big). \qquad (43)$$

Учитывая равномерную непрерывность функции $F(x,t)$ на $\overline{\Omega}$ и структуру функций $A_h(x)$, $B_h(x)$, при $h\to 0$ из оценок (40)-(43) получим, что последовательность функций $\{U^{(k)}(x,t),V^{(k)}(x,t)\}$, $k=1,2,\ldots$, на $\overline{\Omega}$ равномерно сходится к $\{U^*(x,t),V^*(x,t)\}$ – решению задачи (6)-(8). Следовательно, система функций $\{U_h(x,t),V_h(x,t)\}$ является приближенным решением задачи (6)-(8), построенным при помощи модификации метода ломаных Эйлера. Отсюда вытекает, что полупериодическая краевая задача (1)-(4) имеет решение $U^*(x,t)$. Единственность решения краевой задачи (1)-(4) доказывается методом от противного. Теорема 2 доказана.

Литература

1 Джумабаев Д.С., Кабдрахова С.С. Метод ломаных применительно к полупериодической краевой задаче для нелинейного гиперболич. урав. со смешанной производной // Тез. межд. конф. "Проблемы современной матем. и мех-и"Ин-т матем. МОН РК. – Алматы, 20-22 сентября 2005. – С. 76-77.

2 Кабдрахова С.С. Модификация метода ломаных Эйлера к решению полупериодической краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, №2(28). – С. 55-62.

3 Джумабаев Д.С. Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30, №3. – С. 388-400.

4 Оспанов М.Н. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2004. №3. – С. 103-107.

Статья поступила в редакцию 12.11.12

Кабдрахова С.С. ЖАҚСАРТЫЛҒАН ЭЙЛЕР СЫНЫҚТАРЫ ӘДІСІНІҢ ҮШІНШІ РЕТТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАРТЫЛАЙ ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНЕ ЖИНАҚТАЛУЫ.

Жақсартылған Эйлер сынықтары әдісінің үшінші ретті теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің шешіміне жинақталуының бағалаулары тағайындалған.

Kabdrakhova S.S. CONVERGENCE OF MODIFIED EULER POLYGONAL METHOD FOR SOLVING SEMIPERIODICAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE THIRD ORDER EQUATION

Estimates of convergence of modified Euler polygonal method for solving semiperiodical boundary value problem for the third order equation are established.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.95

Н.П. Процах, Б.И. Пташник

ИППММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины

79060, г. Львов, ул. Наукова, 3-б, e-mail: protsakh@ukr.net, ptashnyk@lms.lviv.ua

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Исследуется разрешимость смешанных задач в ограниченной и неограниченной по пространственным переменным областях для ультрапараболических уравнений со степенными нелинейностями и линейным интегро-дифференциальным оператором памяти. Получены условия существования и единственности решения рассматриваемых задач, а также некоторые оценки решения в случае ограниченной по пространственным переменным области.

Ключевые слова: *ультрапараболическое уравнение, интегральный член, неограниченная область, слабое решение.*

Введение

Впервые ультрапараболические уравнения были введены для моделирования процессов диффузии с инерцией [1]. Позже они нашли применение в физике, экономике, биологии [2, 3]. В связи с этим появились работы, посвященные исследованию разрешимости краевых и смешанных задач для линейных ультрапараболических уравнений в ограниченных областях [4-7] и в неограниченной области [8]. Для доказательства разрешимости краевых задач в пространствах Гельдера применялись методы продолжения

Keywords: *Ultraparabolic equation, integral term, unbounded region, weak solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35D30, 35K55

по параметру [7], потенциалов [4, 8], интегральных представлений [5]. Впоследствии рассматривались обобщения модельных ультрапараболических уравнений — ультрапараболические уравнения с интегральными слагаемыми [2, 9, 10, 11], а также нелинейные ультрапараболические уравнения со степенными нелинейностями [12-16]. С помощью метода Фаэдо–Галеркина в работах [10, 12-16] доказаны существование и единственность решений в пространствах Соболева смешанных задач для таких уравнений в ограниченных областях, а в [13, 15, 16] – в случае неограниченной области и степенных нелинейностей. Кроме того, в работах [10, 11, 13, 16] установлены некоторые оценки решений смешанных задач для ультрапараболических уравнений.

В статье исследуются смешанные задачи для ультрапараболических уравнений со степенными нелинейностями, которые содержат интегральное слагаемое типа оператора памяти, в ограниченных и неограниченных по пространсвенным переменным областях. Установлены условия существования и единственности решений. При дополнительных условиях на поведение ядра интегрального оператора (которое зависит от временной переменной) в случае ограниченной по пространственным координатам области получены оценки решения задачи, на основании которых можно предусматривать ассимптотическое поведение решения при возрастании времени. Для неограниченной по пространственным координатам области показано, что разрешимость рассматриваемой задачи не зависит от поведения решения на бесконечности (то есть не надо налагать дополнительных условий по пространственным переменным на бесконечности на искомое решение задачи). Отметим, что подобные результаты для эллиптических и параболических уравнений со степенными нелинейностями в неограниченных областях раньше были получены в работах [17, 18].

1 Ограниченная область по пространственным переменным

Пусть Ω и D – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно, их границы $\partial\Omega \in C^1$ и $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega$; $y \in D$; $t \in (0,\infty)$; T – фиксированное число из интервала $(0,\infty)$; $Q_\tau = \Omega\times D\times(0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$; $G = \Omega\times D$; $\Pi_T = D\times(0,T)$; $\Sigma_T = \partial\Omega\times D\times(0,T)$; $S_T = \Omega\times\partial D\times(0,T)$; ν – внешняя нормаль к S_T; $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i) < 0\}$; $S_T^2 = \{(x,y,t) \in$

$S_T : \sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i) \geq 0\}$. Пусть для S^1_T выполняется условие **(S):** существует такая гиперповерхность $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$, что $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$ и $S^1_T = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$.

Введем пространства: $L^\infty(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R}|$ w-измерима и существует постоянная C такая, что $|w(x,y,t)| \leq C$ п.в. на $Q_T\}$, $L^r(G) := \{w : G \to \mathbb{R}| \int\limits_G |w|^r\,dxdy < \infty\}$, $L^r(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R}| \int\limits_{Q_T} |w|^r\,dxdydt < \infty\}$ $(1 \leq r < \infty)$, $H^1(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R}|\, w, w_{x_i}, w_{y_j}, w_t \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,l\}$, $H^1(G) := \{w : G \to \mathbb{R}|\ w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(G),\ i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,l\}$, $C^k_0(O)$ – пространство всех финитных k-раз непрерывно дифференцируемых функций на O, $V_1(Q_T) = \{v : v \in H^1(Q_T)\cap L^p(Q_T), v|_{S^1_T} = 0, v|_{\Sigma_T} = 0\}$, $V_2(Q_T) = \{v : v \in L^p(Q_T), v_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n, v|_{\Sigma_T} = 0\}$, $V_2(G) = \{v : v \in L^p(G), v_{x_i} \in L^2(G), i = 1,\dots,n, v|_{\partial\Omega\times D} = 0\}$, $V_3(G) = \{v : v \in H^1(G)\cap L^{2p-2}(G), v_{x_ix_i} \in L^2(G), i = 1,\dots,n, v|_{\partial\Omega\times D} = 0, v|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0\}$, $V_4(G) = \{v :\ v \in H^1(G), v_{x_ix_i} \in L^2(G), v_{x_iy_j} \in L^2(G), v_{x_ix_iy_j} \in L^2(G), v|_{\partial\Omega\times D} = 0; v|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,l\}$, $H^2_0(\Omega) := \{w : \Omega \to \mathbb{R}|w, w_{x_i}, w_{x_ix_j} \in L^2(\Omega), w|_{\partial\Omega} = 0, i,j = 1,\dots,n\}$.

В области Q_T рассмотрим задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u+$$
$$+b(x)|u|^{p-2}u + \int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}(x,y,s)\,ds = f(x,y,t); \tag{1}$$
$$u|_{\Sigma_T} = 0; \qquad u|_{S^1_T} = 0; \tag{2}$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{G}. \tag{3}$$

Определение 1. *Функцию $u \in V_1(Q_T)$ назовем слабым решением смешанной задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и для всех функций $v \in V_2(Q_T)$ выполняется тождество*

$$\int\limits_{Q_T}\Big[u_tv+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+c(x,y,t)uv+b(x)|u|^{p-2}uv-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_0^t g(t-s)u_{x_i}(x,y,s)\,ds\Big)v_{x_i} - f(x,y,t)v\Big]\,dxdydt = 0. \tag{4}$$

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{ll}
\textbf{(A):} & a_{ij} \in C(\overline{Q}_T), a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,\dots,n), \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2 \\
 & \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ и для почти всех } (x,y,t)\in Q_T,\ a_0>0; \\
\textbf{(B):} & b \in L^\infty(\Omega),\ b(x)\geq b_0 \text{ для почти всех } x\in\Omega,\ b_0>0; \\
\textbf{(C):} & c\in L^\infty(Q_T),\ c(x,y,t)\geq c_0 \text{ для почти всех } (x,y,t)\in Q_T, c_0\in\mathbb{R}; \\
\textbf{(G):} & g\in C([0,T])\cap L^2(0,\infty),\quad g(t)>0,\ t\in[0;\infty); \\
\textbf{(K):} & a_0-\int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi>0;
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

(L): $\lambda_i \in L^\infty(0,T;C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ $(i=1,\dots,l)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (5), (L), (S) и а)* $\lambda_{kt}, c_{y_j}, c_t, a_{ijy_k}$, $a_{ijt}\in L^\infty(Q_T)$, $f, f_t, f_{y_k}\in L^2(Q_T)\,(i,j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,l), u_0\in V_3(G)$, *б)* $f\big|_{S_T^1}=0$; *в)* $g'\in C([0,T])$, *г)* $2<p<\infty$, *если* $n=l=1$, *или* $2<p<\frac{2(n+l)}{n+l-2}$, *если* $n+l>2$. *Тогда существует слабое решение задачи (1)–(3).*

Доказательство. Используем метод Фаэдо-Галеркина. Пусть $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональный базис пространства $H_0^2(\Omega)$, ортонормированный в $L^2(\Omega)$, где φ^k – собственные функции задачи $\Delta_x u=\nu u$, $u\big|_{\partial\Omega}=0$; $\{\psi^m\}_{m=1}^\infty$ – ортогональный базис в пространстве $\{v : v\in H^1(D), v|_{\Gamma_1}=0\}$, ортонормированный в $L^2(D)$, где ψ^m – собственные функции задачи

$$\Delta_y u=\mu u,\quad u|_{\Gamma_1}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{\Gamma_2}=0, \qquad (6)$$

где $\Delta_x=\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Delta_y=\sum\limits_{j=1}^l \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$, $\Gamma_2=\partial D\backslash\Gamma_1$. Тогда $\{\varphi^k\psi^m\}_{k,m=1}^\infty$ – базис в $V_4(G)$. Пусть $u_0^N(x,y)=\sum\limits_{k,m=1}^N u_{0,k,m}^N\varphi^k(x)\psi^m(y)$, $\lim\limits_{N\to\infty}\|u_0^N-u_0\|_{V_3(G)}=0$. Введем обозначение $\varphi^{k,m}:=\varphi^{k,m}(x,y)=\varphi^k(x)\psi^m(y)$ $(k,m=1,\dots,N)$. Рассмотрим функции

$$u^N(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^N c_{k,m}^N(t)\varphi^k(x)\psi^m(y),\ N\in\mathbb{N}, \qquad (7)$$

где совокупность функций $\{c^N_{k,m} := c^N_{k,m}(t),\ k,m = 1,\dots,N\}$ определяется, как решение задачи Коши с условиями

$$c^N_{k,m}(0) = u^N_{0,k,m}, \qquad k,m = 1,\dots,N, \tag{8}$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\int\limits_G L(u^N,\varphi^{k,m})\,dxdy := \int\limits_G \Big[u^N_t\varphi^{k,m} + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u^N_{y_i}\varphi^{k,m} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u^N_{x_i}\varphi^{k,m}_{x_j} + c(x,y,t)u^N\varphi^{k,m} + b(x)|u^N|^{p-2}u^N\varphi^{k,m} -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_0^t g(t-s)u^N_{x_i}(x,y,s)\,ds\Bigg)\varphi^{k,m}_{x_i} - f(x,y,t)\varphi^{k,m}\Big]\,dxdy = 0. \tag{9}$$

Докажем, что при условиях теоремы решение задачи (8)–(9) существует. Введем обозначения: $\vec{c}_N(t) := (c^N_{1,1},\dots,c^N_{N,1},c^N_{1,2},\dots,c^N_{N,2},\dots,c^N_{1,N},\dots,c^N_{N,N})$, $\vec{\varphi} := (\varphi^{1,1},\dots,\varphi^{N,1},\varphi^{1,2},\dots,\varphi^{N,2},\dots,\varphi^{1,N},\dots,\varphi^{N,N})$. Тогда система уравнений (9) принимает вид

$$\vec{c}_N{}'(t)\int\limits_G \vec{\varphi}\varphi^{k,m}\,dx\,dy = F_{N,k,m}(t,\vec{c}_N(t)), \qquad k,m = 1,\dots,N, \tag{10}$$

где $F_{N,k,m}(t,\vec{c}_N(t)) := \int\limits_G f(x,y,t)\varphi^{k,m}\,dx\,dy - \vec{c}_N(t)\int\limits_G\big[\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\vec{\varphi}_y\varphi^{k,m} + $ $+\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\vec{\varphi}_{x_i}\varphi^{k,m}_{x_j} + c(x,y,t)\vec{\varphi}\varphi^{k,m}\big]\,dx\,dy\ - \int\limits_G b(x)|\vec{c}_N(t)\vec{\varphi}|^{p-2}\vec{c}_N(t)\vec{\varphi}\times$ $\times\varphi^{k,m}\,dx\,dy + \int\limits_G\sum\limits_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_0^t g(t-s)\vec{c}_N(s)\vec{\varphi}\,ds\Bigg)\varphi^{k,m}_{x_i}\,dx\,dy.$

Поскольку $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\psi^m\}_{m=1}^\infty$ являются ортонормированными в $L^2(\Omega)$, то матрица, составленная из коэффициентов при $(c^N_{k,m})'$ в левой части (10), является единичной матрицей. Поэтому систему (10) можно записать:

$$\vec{c}_N{}'(t) = \vec{F}_N(t,\vec{c}_N(t)), \tag{11}$$

где $\vec{F}_N(t,\vec{c}_N(t)) := \big(F_{N,1,1}(t,\vec{c}_N(t)),\dots,F_{N,N,1}(t,\vec{c}_N(t)),F_{N,1,2}(t,\vec{c}_N(t)),\dots,$ $F_{N,N,2}(t,\vec{c}_N(t)),\dots,\ F_{N,1,N}(t,\vec{c}_N(t)),\dots,F_{N,N,N}(t,\vec{c}_N(t))\big)$.

Из условий теоремы 1 следует, что функция $F_{N,k,m}(t,\vec{z})$ непрерывна по $\vec{z}$ в пространстве $\mathbb{R}^{N^2}$ для почти всех $t \in (0,T)$, измерима по t при каждом фиксированном $\vec{z}$, кроме того, $|F_{N,k,m}(t,\vec{z})| \le \mu(t)$ для всех $\vec{z}$, $|\vec{z}| \le r_0$ и для всех $t \in (0,T)$, где $\mu \in L^1(0,T)$. По теореме Каратеодори [19, с. 54] существует абсолютно непрерывное решение задачи (8), (11) (т.е. задачи (8), (9)) на $[0,t_N]$, $t_N \in (0,T]$. Из оценки (14), установленной ниже, следует, что это решение можно продолжить на весь промежуток $[0,T]$.

Пусть $a_1 = \max\limits_{i,j,k} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |a_{ijy_k}|^2$, $a_2 = \max\limits_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |a_{ijt}|^2$, $c_1 = \max\limits_{i} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |c_{y_i}|^2$, $c_2 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |c_t|^2$, $\lambda^1 = \max\limits_{i} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\lambda_{iy_i}|$, $\lambda^2 = \max\limits_{i} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\lambda_{it}|$,

$$\chi_1 = 2\big(a_0 - \int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi\big). \tag{12}$$

Установим априорные оценки для функций (7). Умножим (9) на $c^N_{k,m}(t)e^{-\nu t}, \nu \ge 0$, суммируем по k и m от 1 до N и интегрируем по t от 0 до τ :

$$\int\limits_{Q_\tau} L(u^N, u^N)e^{-\nu t}\,dxdydt = 0. \tag{13}$$

Применив к слагаемым из (13) формулу нтегрирования по частям, неравенство $|ab| \le \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$, учитывая условия (A), (B), (C), (L) и оценку

$$-\int\limits_{Q_\tau}\left(\int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n u^N_{x_i}(x,y,s)\,ds\right)u^N_{x_i}(x,y,t)e^{-\nu t}\,dxdydt \ge$$
$$\ge -\left(\int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 e^{-\nu t}\,dxdydt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\tau} g\Box\nabla_x u^N e^{-\nu t}\,dydt,$$ где $\nu \ge 0$,

$g\Box\nabla_x u := \int\limits_0^t\int\limits_\Omega g(t-s)\sum\limits_{i=1}^n |u_{x_i}(x,y,t) - u_{x_i}(x,y,s)|^2\,dxds$, получаем оценку

$$\int\limits_G |u^N|^2 e^{-\nu\tau}\,dxdy + \int\limits_{S^2_\tau}\sum_{i=1}^l \lambda_i |u^N|^2\cos(\nu, y_i)e^{-\nu t}\,d\sigma +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\chi_1\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 + \big(\nu - \lambda^1 l + 2c_0 - 1\big)\,|u^N|^2 + 2b_0|u^N|^p\right]e^{-\nu t}\,dxdydt +$$
$$+\int\limits_{\Pi_\tau} g\Box\nabla_x u^N e^{-\nu t}\,dydt \le \int\limits_{Q_\tau} f^2 e^{-\nu t}\,dxdydt + \int\limits_{G_0} |u^N_0|^2\,dxdy, \tag{14}$$

где $S^2_\tau = \Omega \times \Gamma_2 \times (0,\tau)$. Найдем априорные оценки для производных от функций (7). Умножаем (9) на $(-\mu_m c^N_{k,m}(t) e^{-\nu t})$, где $\nu \geq 0$, μ_m — собственное значение задачи (6), суммируем по k и m от 1 до N, интегрируем по t от 0 до τ и, учитывая (6), приходим к равенству $\int\limits_{Q_\tau} L(u^N, \Delta_y u^N) \times$ $e^{-\nu t}\, dxdydt = 0$. Каждое слагаемое полученного равенства оценим, как $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_6$ в [13], $\mathcal{I}_7$ в [11]. Тогда получаем оценку (где $\delta_1 > 0$, $\chi_1 - \delta_1 > 0$)

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 e^{-\nu\tau}\, dxdy - \int\limits_{S^1_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i |u^N_{y_i}|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\nu t} d\sigma + \int\limits_{\Pi_\tau} \sum_{i=1}^{l} g \Box \nabla_x u^N_{y_i} \times$$

$$\times e^{-\nu t}\, dydt + \int\limits_{Q_\tau} \Big[(\chi_1 - \delta_1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_i y_j}|^2 + (\nu - \lambda^1 l + 2c_0 - 1) \sum_{j=1}^{l} |u^N_{y_j}|^2 +$$

$$+2b_0(p-1) \sum_{j=1}^{l} |u^N|^{p-2} (u^N_{y_j})^2 \Big] e^{-\nu t}\, dxdydt \leq \int\limits_G \sum_{i=1}^{l} |u^N_{0 y_i}|^2\, dxdy +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[2 \sum_{i=1}^{l} (f_{y_i})^2 + 2c_1 l |u^N|^2 + \frac{a_1 n}{\delta_1} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{x_i}|^2 \right] e^{-\nu t}\, dxdydt. \qquad (15)$$

Установим априорные оценки для производных по t от функций (7). Дифференцируем равенство (9) по t и результат умножаем на $c^N_{k,mt}(t) e^{-\nu t}$, $\nu \geq 0$, суммируем по k и m от 1 до N и интегрируем по t от 0 до τ :

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u^N_{tt} u^N_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_{it}(x,y,t) u^N_{y_i} u^N_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u^N_{y_i t} u^N_t +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^N_{x_i t} u^N_{x_j t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}(x,y,t) u^N_{x_i} u^N_{x_j t} - g(0) \sum_{i=1}^{n} u^N_{x_i} u^N_{x_i t} -$$

$$-\Big(\int\limits_0^t g'(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{x_i}(x,y,s) ds \Big) u^N_{x_i t} + c_t(x,y,t) u^N u^N_t + c(x,y,t) (u^N_t)^2 +$$

$$+(p-1) b(x) |u^N|^{p-2} (u^N_t)^2 - f_t(x,y,t) u^N_t \Big] e^{-\nu t}\, dxdydt = 0. \qquad (16)$$

Оценив слагаемые из (16), подобно $\mathcal{I}_9, \ldots, \mathcal{I}_{15}$ в [11], получаем

$$\int\limits_{G}|u_t^N|^2e^{-\nu\tau}\,dxdy+\int\limits_{\Pi_\tau}g\Box\nabla_x u_t^N e^{-\nu t}\,dydt+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i|u_t^N|^2\cos(\nu,y_i)e^{-\nu t}d\sigma+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\big[(\chi_1-\delta-\delta_1)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}^N|^2+\big(\nu-\lambda^2\sqrt{l}-\lambda^1 l+2c_0-1\big)|u_t^N|^2+2b_0(p-1)|u^N|^{p-2}\times$$
$$\times(u_t^N)^2\big]e^{-\nu t}\,dxdydt\le\int\limits_{Q_\tau}\big[2(f_t)^2+\frac{1}{\delta}(g(t))^2\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^N(x,y)|^2+\lambda^2\sqrt{l}\sum_{i=1}^{l}|u_{y_i}^N|^2+$$
$$+2c_2|u^N|^2+\frac{a_2n}{\delta_1}\sum_{i=1}^{l}|u_{x_i}^N|^2\big]e^{-\nu t}\,dxdydt+\int\limits_{G}|u_t^N|^2|_{t=0}\,dxdy,\ \delta>0.\qquad(17)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (17). Для этого положим в (9) $t=0$, умножаем на $c_{k,mt}^N(0)$ и суммируем по k и m от 1 до N; получим оценку: $\int\limits_G(u_t^N(x,y,0))^2\,dxdy\le M_1\|u_0;V_3(G)\|^2$, где постоянная M_1 не зависит от u^N и N. Выберем $\nu>\lambda^1 l-2c_0+2+\lambda^2\sqrt{l}+2c_1 l+2c_2$, а δ,δ_1 так, чтобы $\chi_1-\delta-\delta_1>0$. Тогда из (14), (15), (17) следует: $\|u^N;H^1(Q_T)\|^2+\|u^N;L^p(Q_T)\|^p\le M_2,$ где постоянная M_2 не зависит от N. Из последней оценки следует существование такой подпоследовательности последовательности $\{u^N\}_{N=1}^\infty$(сохраним за ней такое же обозначение), что $u^N\to u$ при $N\to\infty$ 1) слабо в $H^1(Q_T)\cap L^p(Q_T)$, 2) сильно в $L^2(Q_T)$ и 3) почти всюду в Q_T; кроме того, $\int\limits_{Q_\tau}(b(x)|u^N|^{p-2}u^N)^{p'}\,dxdydt\le M_3$, где постоянная M_3 не зависит от N. По лемме 1.3 [12, с. 25] $b(x)|u^N|^{p-2}u^N\to b(x)|u|^{p-2}u$ слабо в $L^{p'}(Q_T)$. Следуя [20] и учитывая, что при условии *г)* теоремы $V_4(G)$ плотно в $V_2(G)$, показываем, что функция u есть решением задачи (1) – (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (5), (L), (S) и $p>2$. Тогда задача (1)–(3) не может иметь более одного слабого решения.*

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два слабых решения задачи (1)–(3). Тогда для $u=u_1-u_2$ имеем

$$\int\limits_{Q_T}\big[u_tu+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}u+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}u_{x_j}+$$

$$+c(x,y,t)|u|^2+b(x)(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)u-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^t g(t-s)u_{x_i}(x,y,s)\,ds\right)u_{x_i}]e^{-\nu t}\,dxdydt=0.$$

Учитывая, что

$$\int_{Q_T} b(x)(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)ue^{-\nu t}\,dxdydt\geq 2^{2-p}b_0\int_{Q_T}|u|^pe^{-\nu t}\,dxdydt,$$

подобно (14) получим

$$\int_G |u|^2e^{-\nu\tau}\,dxdy+\int_{S_T^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i|u|^2\cos(\nu,y_i)e^{-\nu t}\,d\sigma+\int_{\Pi_T} g\Box\nabla_x ue^{-\nu t}\,dydt+$$
$$+\int_{Q_T}\left[\chi_1\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2+\left(\nu-\lambda^1 l+2c_0\right)|u|^2+2^{3-p}b_0|u|^p\right]e^{-\nu t}\,dxdydt\leq 0,$$

где $\nu=\max\{0;\lambda^1 l-2c_0+1\}$. Отсюда следует, что $u\equiv 0$, т.е. $u_1=u_2$. Теорема доказана.

Пусть $\chi_2=\lambda^1 l-2c_0+1+\max\{\lambda^2\sqrt{l};2c_1 l+2c_2\}$, а C_1 – наибольшая из постоянных, для которых выполняется неравенство Фридрихса $\int_\Omega|\zeta|^2\,dx\leq C_1{}^{-1}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|\zeta_{x_i}|^2\,dx$; $\mu:=C_1(\chi_1-\delta)-\chi_2$, где χ_1 определено в (12), а $\delta>0-$ достаточно малое число.

Установим некоторые оценки решения задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть $\mu>0$, выполняются все условия теоремы 1, в уравнении (1) функции $f\equiv 0$, $a_{ij}(x,y,t)\equiv a_{ij}(x)$, $u_0\not\equiv 0$ и для всех $t>0$*

$$g(t)\leq C_2(t+1)^{-m},\quad m\geq 1, C_2>0. \tag{18}$$

Тогда существует постоянная $C>0$, что для слабого решения задачи (1)–(3) выполняется оценка

$$\int_G[|u|^2+\sum_{j=1}^{l}|u_{y_j}|^2+|u_t|^2]\,dxdy\leq C(1+t)^{-2m+1},$$

а если $\lambda^1 l - 2c_0 + 1 \le 0$, *то*

$$\int\limits_G |u|^2\,dxdy \le C(1+t)^{-q},\ q = \max\{2m-1; \frac{2}{p-2}\}.$$

Доказательство. На основании неравенств (14), (15), (17) получаем оценку

$$\int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_G [|u^N|^2 + \sum_{i=1}^l |u^N_{y_i}|^2 + |u^N_t|^2]\,dxdy\Big)_t\,dt + (\chi_1-\delta)\int\limits_{Q_\tau}\big[\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^l |u^N_{x_i y_j}|^2 + \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i t}|^2\big]\,dxdy - \chi_2\int\limits_{Q_\tau}\big[|u^N|^2 + |u^N_t|^2 + \sum_{j=1}^l |u^N_{y_j}|^2\big]\,dxdydt+$$

$$+2b_0\int\limits_{Q_\tau}\big[|u^N|^p + (p-1)|u^N|^{p-2}\big(|u^N_t|^2 + \sum_{j=1}^l |u^N_{y_j}|^2\big)\big]\,dxdydt \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau}(g(t))^2\sum_{i=1}^n |u^N_{0x_i}(x,y)|^2\,dxdydt. \tag{19}$$

Обозначим $s(t,N) := \int\limits_G [|u^N|^2 + \sum\limits_{i=1}^l |u^N_{y_i}|^2 + |u^N_t|^2]\,dxdy$. Применив ко второму слагаемому из (19) неравенство Фридрихса, получим оценку

$$s_t(t,N) \le -\mu s(t,N) + \frac{1}{\delta}\int\limits_G (g(t))^2\sum_{i=1}^n |u^N_{0x_i}(x,y)|^2\,dxdy. \tag{20}$$

Согласно сходимости $u^N_0 \to u$ в $V_3(G)$ и априорным оценкам, полученным при доказательстве теоремы 1, существует постоянная M, независящая от N, что $s(0,N) < M$ и $\int\limits_G \sum\limits_{i=1}^n |u^N_{0x_i}(x,y)|^2\,dxdy < M$. Из (20) следует, что $(s(t,N))^{1/r} < C_3{}^{-1}$, где $r = 2m-1 > 1$, $C_3 = \big(M\max\{\frac{C_2^2}{\mu\delta}; 1\}\big)^{-1/r}$, тогда

$\mu s(t,N) > \mu C_3(s(t,N))^{1/r+1}$. Учитывая (20) и последнее неравенство, получаем

$$s_t(t,N) \le -\mu C_3(s(t,N))^{1/r+1} + k_1(1+t)^{-1-r},$$

где $k_1 = C_2^2\delta^{-1}M$.

Для решения последнего неравенства используем схему доказательства леммы 4.3 [21, с. 16]. Введем обозначение $F(t,N) = s(t,N) + 2k_1/(r(1+t)^r)$. Тогда

$$F_t(t,N) \le -C_4\,(F(t,N))^{\frac{1}{r}+1},$$

где $C_4 = \mu C_3 \min\{1; \left(\frac{r}{2}\right)^{1+1/r}/(\mu C_3 k_1^{1/r})\}$. Поэтому

$$F(t,N) \le C_5(t+1)^{-2m+1}, t \in [0,T], N \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где $C_5 = \begin{cases} F(0,N), & \text{если } r < C_4(F(0,N))^{\frac{1}{r}}; \\ (r/C_4)^r, & \text{если } r \ge C_4(F(0,N))^{\frac{1}{r}}. \end{cases}$

Учитывая, что

$$F(0,N) < M + 2k_1/r, \ \|v; L^\infty(0,T;L^2(G))\|^2 \le \varliminf_{N\to\infty} \|v^N; L^\infty(0,T;L^2(G))\|^2,$$

и переходя к пределу в (21) при $N \to \infty$, получаем $\int\limits_G [|u|^2 + \sum\limits_{i=1}^{l} |u_{y_i}|^2 + |u_t|^2]\,dxdy \le C_5(t+1)^{-2m+1}$.

При условии: $\lambda^1 l - 2c_0 + 1 \le 0$ из (14) для $\nu = 0$ следует оценка $\int\limits_G |u^N|^p\,dxdy \le -(2b_0)^{-1}s_{1t}(t,N)$, где $s_1(t,N) = \int\limits_G (u^N)^2\,dxdy$. Из последней оценки и неравенства Гельдера получаем $s_1(t,N) \le \left(\int\limits_G |u^N|^p\,dxdy\right)^{\frac{2}{p}} \times \left(\int\limits_G dxdy\right)^{1-\frac{2}{p}} \le C_6|s_{1t}(t,N)|^{2/p}$, где $C_6 = (\operatorname{mes} G)^{1-2/p}/(2b_0)$. Учитывая, что $s_{1t}(t,N) < 0$, приходим к неравенству $C_6^{-1}[s_1(t,N)]^{p/2} \le -s_{1t}(t,N)$. Проинтегрировав последнее неравенство, аналогично как в [13], получаем оценку

$$s_1(t,N) \le s_1(0,N)\left[\frac{p-2}{2C_6}t(s_1(0,N))^{\frac{p}{2}-1}+1\right]^{-\frac{2}{p-2}} \le C_7(t+1)^{-\frac{2}{p-2}}. \tag{22}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в (22), получаем оценку

$$\int\limits_G |u|^2\,dxdy \le C_7(t+1)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $T > 0$ – произвольное конечное число. Поэтому можно считать, что оценки в теореме 3 выполняются для всех $t > 0$.

2 Неограниченная область по пространственным переменным

Пусть теперь $l = 1$, $D = (0, y_0)$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область, удовлетворяющая таким условиям: 1) $\Omega = \bigcup\limits_{m\in\mathrm{N}} \Omega^m$, где $\Omega^m = \Omega \cap B_m$ — область ($B_m \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный шар радиуса m с центром в начале координат); 2) $\partial\Omega^m = \Gamma_1^m \cup \Gamma_2^m$, где Γ_1^m, $\Gamma_2^m \subset C^1$; $\mathrm{mes}\{\Gamma_1^m \cap \Gamma_2^m\} = 0$, $\Gamma_1^m \neq \oslash$ $\forall m \in \mathbb{N}$; $\partial\Omega = \bigcup\limits_{m\in\mathrm{N}} \Gamma_1^m$.

Обозначим: $G^m = \Omega^m \times (0, y_0)$, $Q_\tau^m = G^m \times (0, \tau)$, $\tau \in (0, T]$. Остальные обозначения §1 сохраним и в настоящем параграфе. Заметим, что теперь $Q_\tau = \Omega \times (0, y_0) \times (0, \tau)$, $\Pi_\tau = (0, y_0) \times (0, \tau)$, $S_\tau^1 = \{(x, y_0, t) : x \in \Omega, t \in (0, \tau)\}$, $S_\tau^2 = \{(x, 0, t) : x \in \Omega, t \in (0, \tau)\}$, $\tau \in (0, T]$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, y_0) \times (0, T)$, $G = \Omega \times (0, y_0)$. В области Q_T рассмотрим задачу

$$L_1[u] := u_t - \lambda(y,t)u_y - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + b(x)|u|^{p-2}u +$$

$$+c(x,y,t)u + \int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y,s)\, ds = f(x,y,t); \tag{23}$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0; \qquad u|_{y=y_0} = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]; \tag{24}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{G}. \tag{25}$$

Введем пространство $V_5(Q_T^m)$ как замыкание множества функций $C^\infty([0,T]; C_0^\infty(G^m))$ по норме $\|\nabla u; L^2(Q_T^m)\| + \|u; L^p(Q_T^m)\|$, и пространства $V_{5\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ ($V_{3\mathrm{loc}}(\overline{G})$) функций, которые принадлежат $V_5(Q_T^m)$ ($V_3(G^m)$) для каждого $m \in \mathbb{N}$. Через $L_{\mathrm{loc}}^r(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций, которые принадлежат $L^r(\Omega^m)$, $1 < r \leq +\infty$, для всех $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что коэффициенты уравнения (23) в области Q_T удовлетворяют условиям (5) и условию

(L 1) : $(y_0 - y)^{-1}\lambda$, $\lambda_y \in C([0,T] \times [0,y_0])$, $\lambda(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,y_0) \times [0,T]$.

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (23)–(25) назовем функцию* $u \in V_{5\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, *которая удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-uv_t + \lambda(y,t)uv_y + \lambda_y(y,t)uv + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j} + b(x)|u|^{p-2}uv +$$
$$+ c(x,y,t)uv - \int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,y,s)\,ds v_{x_i}\Big]\,dx\,dy\,dt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{G} u_0(x,y)v|_{t=0}\,dx\,dy$$

для произвольной функции $v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(G))$, $v(x,y,T) = 0$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (5), (L1) и а)* λ_{jt}, c_{y_j}, c_t, a_{ijy_k}, $a_{ijt} \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T)$, $f, f_t, f_{y_j} \in L^2_{loc}(\overline{Q}_T)$, $j = 1,\ldots,l$, $u_0 \in V_{3loc}(\overline{G})$, *б)* $f\big|_{S^1_T} = 0$; *в)* $g' \in C([0,T])$, *г)* $2 < p < \infty$, *если* $n = 1$, *или* $2 < p < \frac{2n+2}{n-1}$, *если* $n \geq 2$. *Тогда существует обобщенное решение задачи (23)–(25).*

Доказательство. Рассмотрим последовательность областей $\Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \Omega^3 \subset \cdots \subset \Omega$, описаных перед постановкой задачи (23)–(25). При условиях теоремы 1 в каждой области Q_T^k существует единственное решение $u^k \in V_1(Q_T^k)$ задачи

$$L_1[u] = f^k(x,y,t),\ u|_{\partial\Omega^k \times (0,y_0)\times(0,T)} = 0;$$

$$u|_{y=y_0} = 0;\ u(x,y,0) = u_0^k(x,y),\quad (x,y) \in \overline{G},$$

где $f^k(x,y,t) = f(x,y,t)$, если $(x,y,t) \in Q_T^k$, и $f^k(x,y,t) = 0$, если $(x,y,t) \in Q_T \setminus Q_T^k$; $u_0^k = u_0(x,y)\xi^k(|x|)$, $\xi^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\xi^k(|x|) = 1$, если $|x| \leq k-\delta$, $\xi^k(|x|) = 0$, если $|x| \geq k$, $0 < \xi^k(|x|) < 1$, если $k-\delta < |x| < k$.

Пусть $R < s_0 < k < m$. Заметим, что в области $Q_T^{s_0}$ имеем $f^m - f^k \equiv 0$, $u_0^m - u_0^k \equiv 0$. Обозначим: $u^{k,m} = u^m - u^k$, $\varphi(x) = [\psi(x)]^\beta$, $\beta \geq \frac{2p}{p-2} + 1$,

$$\psi(x) = \begin{cases} (R^2 - |x|^2)/R, & \text{если } 0 \leq |x| \leq R, \\ 0, & \text{если } |x| > R. \end{cases} \tag{26}$$

На основании определения 1 получим для $u^{k,m}$ равенство

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \big[u_t^{k,m} u^{k,m}\varphi(x) - \lambda(y,t) u_y^{k,m} u^{k,m}\varphi(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^{k,m}(u^{k,m}\varphi(x))_{x_j} +$$

$$+c(x,y,t)(u^{k,m})^2\varphi(x) + b(x)(|u^m|^{p-2}u^m - |u^k|^{p-2}u^k)u^{k,m}\varphi(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\int\limits_0^t g(t-s)u_{x_i}^{k,m}\,ds\Bigg)(u^{k,m}\varphi(x))_{x_i}\big]e^{-\nu t}\,dxdydt = 0. \qquad (27)$$

В первом и во втором слагаемых из (27) интегрируем по частям. Остальные слагаемые оцениваем следующим образом:

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^{k,m}(u^{k,m}\varphi(x))_{x_j} e^{-\nu t}\,dxdydt \geq \int\limits_{Q_\tau^R} [(a_0 - \frac{n\delta(a_3)^2}{2})\times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,m}|^2 - \frac{\delta n}{p}|u^{k,m}|^p]\varphi(x)e^{-\nu t}\,dxdydt - \frac{(p-2)\delta^{-\frac{p+2}{p-2}}}{2p}\Psi_1(x),$$

где $a_3 = \max\limits_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |a_{ij}|$, $\Psi_1(x) := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum\limits_{i=1}^{n} (\varphi_{x_i}(x))^{\frac{2p}{p-2}}(\varphi(x))^{-\frac{2+p}{p-2}} e^{-\nu t}\,dxdydt$,

$$\int\limits_{Q_\tau^R} b(x)(|u^m|^{p-2}u^m - |u^k|^{p-2}u^k)u^{k,m}\varphi(x)e^{-\nu t}\,dxdydt \geq$$

$$\geq 2^{2-p} b_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u^{k,m}|^p \varphi(x) e^{-\nu t}\,dxdydt,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\tau^R} \big(\int\limits_0^t g(t-s)u_{x_i}^{k,m}(x,y,s)\,ds\big)u^{k,m}(x,y,t)\varphi_{x_i}(x)e^{-\nu t}\,dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{\delta T}{2}\big(\int\limits_0^\infty g^2(\xi)\,d\xi\big) \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,m}|^2 \varphi(x)e^{-\nu t}\,dxdydt +$$

$$+\frac{\delta n}{p}\int\limits_{Q_\tau^R}|u^{k,m}|^p\varphi(x)e^{-\nu t}\,dxdydt+\frac{(p-2)\delta^{-\frac{p+2}{p-2}}}{2p}\Psi_1(x).$$

Тогда из (27) следует оценка

$$\int\limits_{G^R}|u^{k,m}|^2\varphi(x)e^{-\nu\tau}\,dxdy+\int\limits_{\Pi_\tau}g\Box\nabla_x u^{k,m}\varphi(x)e^{-\nu t}\,dydt+\int\limits_{S_\tau^2}\lambda(0,t)|u^{k,m}|^2\times$$

$$\times\varphi(x)e^{-\nu t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau^R}[|u^{k,m}|^2(\nu-\lambda^1+2c_0)+(2a_0-2\int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi-n\delta(a_3)^2-$$

$$-\delta T\int\limits_0^\infty g^2(\xi)\,d\xi)\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^{k,m}|^2+(-\frac{4\delta n}{p}+2^{3-p}b_0)|u^{k,m}|^p]\varphi(x)e^{-\nu t}\,dxdydt\le$$

$$\le 2(p-2)\delta^{-\frac{p+2}{p-2}}\Psi_1(x)/p. \tag{28}$$

Поскольку $|\psi|\leqslant R,\quad |\psi_{x_i}|\leqslant 2,\ i=1,\ldots,n$, то

$$\Psi_1(x)=\int\limits_{Q_\tau^R}[\psi(x)]^{-\beta\frac{p+2}{p-2}}[\beta[\psi(x)]^{\beta-1}\psi_{x_i}(x)]^{\frac{2p}{p-2}}e^{-\nu t}\,dxdydt\le M_4R^{n+\beta-\frac{2p}{p-2}},$$

где $M_4=2^{\frac{2p}{p-2}}\beta^{\frac{2p}{p-2}}P_nTy_0$, а P_n — коэффициент в равенстве $\int\limits_{B_R}dx=P_nR^n=\begin{cases}\pi^kR^{2k}/(k!), & n=2k,\\ 2(2\pi)^kR^{2k+1}/((2k+1)!!), & n=2k+1.\end{cases}$

Далее, выберем в (28) $\nu\ge\lambda^1-2c_0+1$, а δ таким, чтобы $2a_0-2\int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi-n\delta(a_3)^2-\delta T\int\limits_0^\infty g^2(\xi)\,d\xi>0,\ -\frac{4\delta n}{p}+2^{3-p}b_0>0$. Пусть $0<R_0<R$. Поскольку $\psi(x)\ge R-R_0$ в G^{R_0}, то из (28) получаем

$$\int\limits_{G^{R_0}}|u^{k,m}|^2(R-R_0)^\beta\,dxdy+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} [|u^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,m}|^2 + |u^{k,m}|^p](R-R_0)^\beta \, dxdydt \le M_5 R^{n+\beta-\frac{2p}{p-2}},$$

где $M_5 = \frac{2(p-2)\delta^{-\frac{p+2}{p-2}}}{p} M_4 M$, а $M^{-1} = \min\{\nu - \lambda^1 + 2c_0; 2a_0 - 2\int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi - n\delta(a_3)^2 - \delta T\int\limits_0^\infty g^2(\xi)\,d\xi; -\frac{4\delta n}{p} + 2^{3-p}b_0\}e^{\nu T}$. Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} [|u^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k,m}|^2 + |u^{k,m}|^p] \, dxdydt \le M_5 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\beta R^{n-\frac{2p}{p-2}}. \quad (29)$$

При достаточно больших R правая часть в (29) стремится к нулю, если $n < \frac{2p}{p-2}$. Учитывая условие г) теоремы 1, получаем, что при условии г) теоремы 4 последовательность $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ фундаментальная в $V_5(Q_T^{R_0})$ и сходится к u при $m \to \infty$ в $V_5(Q_T^{R_0})$. Поскольку $|u^m|^{p-2}u^m$ непрерывна по u^m и ограничена в $L^{p'}(Q_T)$, то $|u^m|^{p-2}u^m \to |u|^{p-2}u$ слабо в $L^{p'}(Q_T)$. Из полученных сходимостей следует, что u является обобщенным решением задачи (23)–(25). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $2 < p < \frac{2n}{n-2}$, если $n > 2$, и $p > 2$, если $n \le 2$. Если выполняются условия (5) и (L1), то задача (23)–(25) не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Предположим, что u_1, u_2 – два обобщенных решения задачи (23) – (25). Тогда функция $\tilde{u} = u_1 - u_2$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-\tilde{u}v_t + \lambda(y,t)\tilde{u}v_y + \lambda_y(y,t)\tilde{u}v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\tilde{u}_{x_i}v_{x_j} + b(x)(|u_1|^{p-2}u_1 -$$

$$-|u_2|^{p-2}u_2)v + c(x,y,t)\tilde{u}v - \int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{x_i}(x,y,s)\,ds v_{x_i}\Big]\,dx\,dy\,dt = 0 \quad (30)$$

для произвольной функции $v \in H^1(Q_T) \cap L^p(Q_T)$ такой, что $v(x,y,T){=}0$, $v(x,y_0,t){=}0$, $v(x,y,t)\big|_{\partial G\times(0,T)}{=}0$, $\operatorname{supp} v$ ограниченный.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\mu\big(u_{\mu t}-\lambda(y,t)u_{\mu y}\big)+u_\mu=\tilde u(x,y,t), \tag{31}$$

$$u_\mu(x,y,T)=0,\quad u_\mu(x,0,t)=0,\quad \mu>0. \tag{32}$$

Заметим, что $u_\mu\to\tilde u$ слабо в пространстве $V_{5\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, когда $\mu\to 0$. Запишем формулу (30) для $v=u_\mu\psi^\beta(x)(y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}$, где ψ из (26), $\beta>\frac{2p}{p-2}+1$, $\alpha\geq 1$. Тогда $v_t=(u_{\mu t}-\nu u_\mu)(y_0-y)^\alpha\psi^\beta(x)e^{-\nu t}$, $v_y=(u_{\mu y}(y_0-y)-\alpha u_\mu)(y_0-y)^{\alpha-1}\psi^\beta(x)e^{-\nu t}$, $\int\limits_{Q_T}\mu(u_{\mu t}-\lambda u_{\mu y})^2(y_0-y)^\alpha\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\geqslant 0$. Из равенства (30) получаем

$$\int\limits_{G_0}\left(1+\mu\nu-\frac{\mu\alpha\lambda}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha|u_\mu|^2\psi^\beta(x)\,dx\,dy+\int\limits_{Q_T}\left(\nu-\mu\nu^2+\frac{\nu\mu\alpha\lambda}{y_0-y}-\frac{\mu\alpha\lambda_t}{y_0-y}-\right.$$

$$\left.-\lambda_y-\lambda_y\mu\nu+\frac{2\lambda\lambda_y\mu\alpha}{y_0-y}+\frac{\mu\alpha\lambda^2}{(y_0-y)^2}-\frac{\lambda\alpha}{y_0-y}+\frac{\mu\nu\alpha\lambda}{y_0-y}-\frac{\mu\alpha^2\lambda^2}{(y_0-y)^2}\right)(y_0-y)^\alpha|u_\mu|^2\times$$

$$\times\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt+2\int\limits_{Q_T}\Big[\big(\lambda_y(y,t)\tilde u u_\mu+b(x)(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)u_\mu+$$

$$+c(x,y,t)\tilde u u_\mu\big)\psi^\beta(x)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}(u_\mu\psi^\beta(x))_{x_j}-$$

$$-\int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n\tilde u_{x_i}(x,y,s)\,ds(u_\mu\psi^\beta(x))_{x_i}\Big](y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\leq 0, \tag{33}$$

где $G_0=\{(x,y):(x,y)\in G,\ t=0\}$. Выбирая в (33) ν так, чтобы $1+\mu\nu-\mu\alpha(y_0-y)^{-1}\lambda(y,0)\geqslant 0, y\in(0,y_0)$ и $\nu\geqslant\max\{\sup\limits_{(0,y_0)\times(0,T)}[\lambda_y(y,t)+\lambda(y,t)\alpha(y_0-y)^{-1}];\ \sup\limits_{(0,y_0)\times(0,T)}[-2c_0-\lambda_y(y,t)+\lambda(y,t)\alpha(y_0-y)^{-1}]\}$, перейдем к пределу при $\mu\to 0$:

$$\int\limits_{Q_T}\big(\nu-\lambda_y-\frac{\lambda\alpha}{y_0-y}\big)(y_0-y)^\alpha|\tilde u|^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt+2\int\limits_{Q_T}\Big[\big(\lambda_y(y,t)|\tilde u|^2+b(x)\times$$

$$\times(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2)\tilde u+c(x,y,t)|\tilde u|^2\big)\psi^\beta(x)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}(\tilde u\psi^\beta(x))_{x_j}-$$

$$-\int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n}\tilde u_{x_i}(x,y,s)\,ds(\tilde u\psi^{\beta}(x))_{x_i}\big](y_0-y)^{\alpha}e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\leqslant 0. \qquad (34)$$

Оценив слагаемые в неравенстве (34), как и в (27), получаем оценку

$$\int\limits_{Q_T^{R_0}}\Big[|\tilde u|^2+\sum_{i=1}^{n}|\tilde u_{x_i}|^2+|\tilde u|^p\Big](y_0-y)^{\alpha}\,dxdydt\le M_6R^{n-\frac{2p}{p-2}}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\beta}, \quad (35)$$

где $M_6=M_4M_7,\ M_7^{-1}=\min\big\{\inf\limits_{\Pi_T}\big(2c_0+\nu+\lambda_y(y,t)-\lambda(y,t)\alpha(y_0-y)^{-1}\big),M\big\}$. Для достаточно больших R правая часть неравенства (35) достаточно мала при $n<\frac{2p}{p-2}$. Поэтому $\tilde u=0$ почти всюду в $Q_T^{R_0}$. Поскольку R_0 – произвольное положительное число, то теорема доказана.

Замечание 1. *Случай $l\ge 2$ требует дополнительного изучения.*

Литература

1 Kolmogorov A.N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – V. 35. – P. 116-117.

2 Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных ультрапараболических уравнений некоторых математических моделей динамики биологических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, №4. – С. 64-78.

3 Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – Birkhäuser, Basel, 2004. – V. 152. – P. 85-97.

4 Орынбасаров М.О. Задача Дирихле для одного класса ультрапараболического уравнения в области с негладкой границей // Изв. АН КазССР. Серия физ.-матем. – 1990. – №5. – С. 34-40.

5 Орлова С.А. О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, №6. – С. 211-215.

6 Пятков С.Г. Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения. Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосиб., 1990. – С. 182-197.

7 Терсенов С.А. Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 2001. –Т. 42, №6. –С. 1413-1430.

8 Орынбасаров М.О. О смешанных краевых задачах для одного вырождающегося ультрапараболического уравнения в угловой области // Доклады НАН РК. – 1993. – №3. – С. 24-30.

9 Лаврентьев М.М., Спиглер Р., Ахметов Д.Р. Регуляризация нелинейного интегропараболического уравнения Фоккера-Планка с пространственно-периодическими решениями. Существование сильных решений // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №4. – С. 825-848.

10 Процах Н.П. Смешанная задача для ультрапараболического уравнения с оператором памяти в нецилиндрической области // Прикл. проблемы мех. и мат. – 2010. – Т. 8.– С. 60-70.(укр.)

11 Protsakh N.P. Properties of solution for mixed problem for ultraparabolic equation with the memory term // Ukrainian Math. Bull. – 2012. – V. 9, № 1. – P. 98-113.

12 Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

13 Lavrenyuk S., Protsakh N. Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – V. 38. – P. 131-146.

14 Lavrenyuk S.P., Protsakh N.P. Mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation that generalizes the diffusion equation with inertia // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – V. 58, №9. – P. 1347-1368.

15 Lavrenyuk S.P., Protsakh N.P. Mixed problem for an ultraparabolic equation in an unbounded domain // Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – V. 54, №8. – P. 1053-1066.

16 Protsakh N.P. Properties of solutions of a mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation // Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – V. 61, № 6. – P. 945-963.

17 Bernis F. Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration Mech. and Anal. – 1989. – V. 106. – P. 217-241.

18 Brezis H. Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. and Optim. – 1984. – V. 12, №3. – P. 271-282.

19 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во Иностранная литература, 1958. – 475 с.

20 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

21 Santos M. L. On the wave equations with memory in noncylindrical domains // Electronic Journal of Differential Equations. – 2007. – V. 12, № 128. – P. 1-18.

Статья поступила в редакцию 12.11.12

Процах Н.П., Пташник Б.И. ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚОСЫЛҒЫШЫ БАР СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС УЛЬТРАПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН АРАЛАС ЕСЕП

Аралас есептердің шенелген және шенелмеген кеңістіктік айнымалы аймақта жадының дәрежелік сызықтык емес және сызықтық интегралдық-дифференциалдық операторлы ультрапараболалық теңдеулер үшін шешімділігі зерттеледі. Қаралған есептердің бар және жалғыз болу шарттары, және де шенелген кеңістіктік айнымалы аймақтағы жағдайдағы шешімнің кейбір бағалаулары алынды.

Protsakh N.P., Ptashnyk B.Yo. MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL TERM

Solvability of mixed problems for ultraparabolic equations with power nonlinearities and linear integro-differential memory operator in bounded or unbounded to the space variables regions is investigated. Conditions of existence and uniqueness of the solution of the given problems as well as some estimates of solutions in the case of bounded to the space variables region are obtained.

УДК 517.51

Zh. Taspaganbetova

The L.N. Gumilyov Eurasian National University
010008, Astana, Munaitpasov st., 5, e-mail: zhanara.t.a@gmail.com

WEIGHTED HARDY TYPE INEQUALITIES ON THE CONE OF MONOTONE SEQUENCES

Weighted estimate for a class of non-negative lower triangular matrices has been established on the cone of monotone sequences.
Keywords: *inequalities, discrete Hardy-type inequalities, weights, monotone sequences.*

Introduction

Let $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be positive sequences of real numbers. Let $l_{p,v}$ be the space of sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ of real numbers such that

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i |f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 < p < \infty.$$

Let $K_{p,v}^{-}$ be a cone of non-negative and non-increasing sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ from the $l_{p,v}$ space, briefly

$$K_{p,v}^{-} = \{0 \le f \downarrow: \quad f \in l_{p,v}\}.$$

We consider inequality of the following form

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i f_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in K_{p,v}^{-}, \tag{1}$$

Keywords: *неравенства, дискретные неравенства типа Харди, вес, монотонные последовательности*
2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47B37

where C is a positive constant independent of f and $(a_{i,j})$ is a non-negative triangular matrix with entries $a_{i,j} \geq 0$ for $i \geq j \geq 1$ and $a_{i,j} = 0$ for $i < j$.

For $a_{i,j} \equiv 1$, $i \geq j \geq 1$ inequality (1) has been studied in [1] for $1 < p, q < \infty$.

In [2] necessary and sufficient conditions for the validity of (1) have been obtained for $1 < p \leq q < \infty$ under the assumption that there exists $d \geq 1$ such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + a_{k,j}) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + a_{k,j}), \qquad i \geq k \geq j \geq 1, \tag{2}$$

hold.

A sequence $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ is called almost non-decreasing (non-increasing), if there exists $c > 0$ such that $ca_i \geq a_k$ $(a_k \leq ca_j)$ for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

In [3], [4] estimate (1) for all $f \in l_{p,v}$ has been studied under the assumption that there exist $d \geq 1$ and a sequence of positive numbers $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, and a non-negative matrix $(b_{i,j})$, where $b_{i,j}$ is almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j, such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}) \leq a_{i,j} \leq d(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}) \tag{3}$$

hold for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

In [5], [6] inequality (1) for all $f \in l_{p,v}$ has been considered under the assumption that there exist $d \geq 1$, a sequence of positive numbers $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, and a non-negative matrix $(b_{i,j})$, whose entries $b_{i,j}$ are almost non-decreasing in i and almost non-increasing in j such that the inequalities

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \tag{4}$$

hold for all $i \geq k \geq j \geq 1$.

Conditions (3) and (4) include condition (2), and complement each other.

Notation. If M and K are real valued functionals of sequences, then the symbol $M \ll K$ means that there exists $c > 0$ such that $M \leq cK$, where c is a constant which does not depend on the arguments of M and K. If $M \ll K \ll M$, then we write $M \approx K$.

In [1] there was established a statement which allows to reduce inequality (1) on the cone of monotone sequences to inequality (1) on the cone of nonnegative sequences from $l_{p,v}$.

Theorem A [1]. *Let $1 < p,\ q < \infty$. Let $V_k = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$. Then inequality (1) is equivalent to the following inequalities*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \overline{C}_1\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (5)$$

$\forall g \ge 0,\ if \quad V_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty,$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + \qquad (6)$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k\right)^{-\frac{1}{p}} \le \overline{C}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$\forall g \ge 0,\ if \quad V_\infty < \infty.$

For the proof of our main theorem we will need the following results for the discrete weighted Hardy inequality.

Theorem B ([7], [8]). *Let $1 < p \le q < \infty$. Let $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ be a non-negative sequence of real numbers. Then the inequality*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}\alpha_j f_j\right)^{q}u_i\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^p v_i\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 \le f \in l_{p,v}, \qquad (7)$$

holds if and only if

$$H := \sup_{n\ge 1}\left(\sum_{j=n}^{\infty}u_j\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{p'}v_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Moreover $H \approx C$, *where* C *is the best constant in (7).*

THEOREM C [3]. *Let* $1 < p \leq q < \infty$ *and the entries of the matrix* $(a_{i,j})$ *satisfy assumption (3). Inequality (1) holds for* $f \in l_{p,v}$ *if and only if* $B = \max\{B_1,\ B_2\} < \infty$, *where*

$$B_1 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n}^q u_i\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{p'} v_j^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

and

$$B_2 = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}^{p'} v_j^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Moreover $B \approx C$, *where* C *is the best constant in (1).*

THEOREM D ([7], [8]). *Let* $1 < q < p < \infty$. *Then the inequality (7) holds if and only if*

$$H_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^{p'} v_j^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\alpha_k^{p'} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Moreover $H_1 \approx C$, *where* C *is the best constant in (7).*

THEOREM E [6]. *Let* $1 < q < p < \infty$. *Let the entries of the matrix* $(a_{i,j})$ *satisfy assumption (3). Then inequality (1) holds for* $f \in l_{p,v}$ *if and only if* $E = \max\{E_1,\ E_2\} < \infty$, *where*

$$E_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^{p'} v_i^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\omega_k^{p'} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$E_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{1-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Moreover $E \approx C$, *where* C *is the best constant in (1).*

2 Main results

We define

$$W_k = \sum_{i=1}^{k} \omega_i, \quad A_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}, \quad C_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} V_n^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ii}^q u_i\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$C_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n}^q u_i\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} W_k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$C_3 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$F_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} W_i^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times\right.$$
$$\left. \times\, W_k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$F_3 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ki}^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Theorem 1. *Let $1 < p \le q < \infty$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy assumption (3). Then inequality (1) holds if and only if $C_0 = \max\{C_1, C_2, C_3\} < \infty$. Moreover $C_0 \approx C$, where C is the best constant in (1).*

Theorem 2. *Let $1 < q < p < \infty$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j})$ satisfy assumption (3). Then inequality (1) holds if and only if $F_0 = \max\{F_1, F_2, F_3\} < \infty$. Moreover $F_0 \approx C$, where C is the best constant in (1).*

Proof of Theorem 1. We consider two cases separately: $V_\infty = +\infty$ and $V_\infty < +\infty$.

1. Let $V_\infty = +\infty$. Then by Theorem A inequality (1) holds if and only if the following inequality holds

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \widetilde{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g\ge 0. \quad (8)$$

Moreover $\widetilde{C}\approx C$, where C is the best constant in (1).

Since $a_{i,j}$, g_i are non-negative we have

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}a_{i,j}g_i + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{\infty}a_{i,j}g_i \approx \sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i + \sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i. \quad (9)$$

Therefore

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'} \approx \left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'} + \left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}.$$

Substituting the last inequality in the left hand side of inequality (8) we have

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'} + \left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}\right]\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \widetilde{C}_0\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g\ge 0, \quad (10)$$

which is equivalent to the inequality (8). Moreover $\widetilde{C}\approx\widetilde{C}_0$.

Inequality (10) holds if and only if the following inequalities hold simultaneously

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \le \widetilde{C}_1\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g\ge 0, \quad (11)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leq \widetilde{C}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\quad \forall g\geq 0. \tag{12}$$

Moreover

$$\widetilde{C}\approx \max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2\}. \tag{13}$$

Inequality (11) is the Hardy type inequality. Hence by Theorem B inequality (11) holds if and only if the following condition holds

$$\sup_{s\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=s}^{\infty}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{s}A_{ii}^{q}u_i\right)^{\frac{1}{q}}= \tag{14}$$

$$=\sup_{s\in\mathbb{N}}V_s^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{s}A_{ii}^{q}u_i\right)^{\frac{1}{q}}=C_1<\infty.$$

Moreover

$$C_1\approx \widetilde{C}_1. \tag{15}$$

In (12) by passing to the dual inequality we obtain

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ki}\varphi_i\right)^{q}u_i\right)^{\frac{1}{q}}\leq \widetilde{C}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{p}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}\quad \forall\varphi\geq 0. \tag{16}$$

The entries of the matrix (A_{ki}) for $k\geq s\geq i$ satisfy the following condition

$$A_{ki}=\sum_{j=1}^{i}a_{k,j}\approx\sum_{j=1}^{i}(b_{k,s}\omega_j+a_{s,j})=b_{k,s}W_i+\sum_{j=1}^{i}a_{s,j}=b_{k,s}W_i+A_{si}, \tag{17}$$

which asserts that the entries of the matrix (A_{ki}) satisfy assumption (3).

Then by Theorem C inequality (16) holds if and only if the following conditions hold

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}b_{i,n}^{q}u_i\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}W_k^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}=C_2<\infty, \tag{18}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}u_i\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{nk}^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}=C_3<\infty \tag{19}$$

and

$$\widetilde{C}_2\approx\max\{C_2,\ C_3\}. \tag{20}$$

By (14) and (18), (19) we obtain that inequalities (11) and (16) hold if and only if $C_0=\max\{C_1,\ C_2,\ C_3\}<\infty$. Moreover $C_0\approx\max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2\}$, which implies that $C_0\approx\widetilde{C}$. Since $\widetilde{C}\approx C$ we get $C_0\approx C$. The last equivalence gives the statement of Theorem 1 in the case $V_\infty=\infty$.

2. Let $V_\infty<+\infty$. By Theorem A inequality (1) holds if and only if along with inequality (8) the following inequality holds

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}a_{i,k}g_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i\right)^{-\frac{1}{p}}\le\widehat{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\quad\forall g\ge 0. \tag{21}$$

Moreover $C\approx\max\{\widetilde{C},\widehat{C}\}$.

Since $a_{i,j}$, g_i are non-negative, changing the order of summation in the left hand side of (21) we obtain

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_iA_{ii}\right)\le\widehat{C}V_\infty^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\quad\forall g\ge 0$$

By the reverse Hölder's inequality we have

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^q u_i\right)^{\frac{1}{q}}=\widehat{C}V_\infty^{\frac{1}{p}},$$

consequently

$$V_\infty^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^q u_i\right)^{\frac{1}{q}}=\widehat{C}. \tag{22}$$

Hence,
$$\widehat{C} \le C_1.$$

Now we see that $\max\{\widetilde{C},\ \widehat{C}\} \approx C_0 = \max\{C_1,\ C_2,\ C_3\}$ regardless of whether V_∞ is finite or infinite. Since $\max\{\widetilde{C},\ \widehat{C}\} \approx C$, we have $C \approx C_0$. Thus the proof is complete.

Proof of Theorem 2. We consider two cases separately: $V_\infty = +\infty$ and $V_\infty < +\infty$.

1. Let $V_\infty = +\infty$. Then in the same way using Theorem A as in the proof of Theorem 1 we obtain inequalities (11), (16).

By Theorem D inequality (11) holds if and only if the following condition holds

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k\right)^{\frac{p-q}{pq}} = F_1 < \infty. \tag{23}$$

Moreover

$$F_1 \approx \widetilde{C}_1. \tag{24}$$

The entries of the matrix (A_{ki}) satisfy inequality (17) for $k \ge s \ge i$, which asserts that the entries of the matrix (A_{ki}) satisfy assumption (3).

Therefore by Theorem E inequality (16) holds if and only if the following conditions hold

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} W_i^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times\right.$$

$$\left.\times W_k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} = F_2 < \infty, \tag{25}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ki}^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k\right)^{\frac{p-q}{pq}} = F_3 < \infty \tag{26}$$

and

$$\widetilde{C}_2 \approx \max\{F_2,\ F_3\}. \qquad (27)$$

By (23) and (25), (26) we obtain that inequalities (11) and (16) hold if and only if $F_0 = \max\{F_1,\ F_2,\ F_3\} < \infty$. Moreover $F_0 \approx \max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2\}$, which implies that $F_0 \approx \widetilde{C}$. Since $\widetilde{C} \approx C$ we get $F_0 \approx C$. The last equivalence gives the statement of Theorem 2 in the case $V_\infty = \infty$.

2. Let $V_\infty < +\infty$. By Theorem A inequality (1) holds if and only if along with inequality (8) inequality (21) holds. Moreover $C \approx \max\{\widetilde{C}, \widehat{C}\}$.

As in the proof of Theorem 1 from inequality (21) we obtain inequality (22).

It is easy to prove that

$$F_1 \geq V_\infty^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k \right)^{\frac{p-q}{pq}} \gg \widehat{C}.$$

Therefore $C \approx F_0 = \max\{F_1,\ F_2,\ F_3\}$ regardless of whether V_∞ is finite or infinite. The proof is complete.

Acknowledgement. *The author expresses her gratitude to Professor Ryskul Oinarov for providing support and valuable assistance.*

The paper was done under financial support by the Scientific Committee of RK MES, Grant No.1529/GF on priority area "Intellectual potential of the country".

Литература

1 Oinarov R., Shalgynbaeva S.KH. Weighted Hardy inequalities on the cone of monotone sequences // Izvestiya NAN RK. – 1998. – V. 1. – P. 33-42.

2 Shalgynbaeva S.KH. Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences // Izvestiya NAN RK. – 1998. – V. 5. – P. 76-80.

3 Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leq q$ // Math. Inequal. Appl. – 2009. – V. 12. – P. 891-903.

4 Temirkhanova A.M. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $1 < q < p < \infty$ // Eurasian Math. J. – 2008. – V. 2. – P. 117-127.

5 Temirkhanova A.M., Taspaganbetova Zh.A. Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators // Math. J. – Almaty, 2011. – V. 11, №2(40). – P. 73-85.

6 Temirkhanova A.M., Taspaganbetova Zh.A. Criteria on Boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of Functional Analysis. – 2011. – V. 2, №1(40). – P. 114-127.

7 Kufner A., Maligranda L., Persson L-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results. – Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007. – 162 p.

8 Okpoti C.A., Persson L-E., Wedestig A. Scales of weight characterizations for the discrete Hardy and Carleman type inequalities // In: Proc. FSDONA 2004, Math. Inst. Acad. Sci. – Chech Republic, 2005. – P. 236-258.

Статья поступила в редакцию 08.05.12

Таспаганбетова Ж.А. МОНОТОНДЫ ТIЗБЕКТЕР КОНУСЫНДА САЛМАҚТЫ ХАРДИ ТЕКТЕС ТЕҢСIЗДIКТЕР

Монотонды тiзбектер конусындағы терiс емес төменгi үшбұрышты матрицаның бiр классы үшiн салмақты бағалау орнатылған.

Таспаганбетова Ж.А. ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Установлена весовая оценка для одного класса неотрицательных нижних треугольных матриц на конусе монотонных последовательностей.

УДК 517.956

С.Е. Темирболат

КазНУ им. аль-Фараби
050012, г. Алматы, ул. Тимирязева, 46, ГУК 13

НЕКОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Путем анализа граничных данных выясняется: задача однозначно разрешима или нет, во втором варианте указываются условия некорректности и разрешимости. Решены примеры «прямой» некорректной (для системы Мойсила-Теодереску) и «обратной» некорректной (для системы из двух уравнений двумерного Лапласа) задач.
Ключевые слова: *спектральная задача, собственная функция, спектр*

1 Объект исследования

Обычно эллиптические системы рассматриваются с комплексными переменными. Мы исследуем их с вещественными матрицами и ставим задачи в классическом стиле.

В полупространстве $R_3^+ = (x > 0,\ y \in R,\ z \in R)$ дана система дифференциальных уравнений первого порядка

$$U_x + BU_y + CU_z = 0 \qquad (1)$$

с вещественными кососимметричными матрицами $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$, в общем случае возможно, что диагональные элементы $b_{ij} = b$ и $\mathrm{c_{ij}} = c$, $i = \overline{1;4}$ могут быть ненулевые.

Keywords: *Spectral problem, eigenfunction, spectrum*
2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 49J20, 49K20

Как известно, система эллиптична, когда форма $\det \|\alpha(\omega) + cI\|$ знакоопределена, где матрица

$$\alpha(\omega) = \|B\omega\|, \quad \omega \in R^n,\ c \in R.$$

Требованию отвечает следующий вид матрицы:

$$\alpha(\omega) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix},$$

в этом можно убедиться непосредственно. Ее мы назовем канонической формой матрицы, определяющей эллиптическую систему.

Задача. Найти вектор $U \in U_\phi \subseteq C^1(x \geq 0,\ y \in R,\ z \in R)$, удовлетворяющий системе (1) и граничным данным

$$M(\partial)U \equiv M_1U_x + M_2U_y + M_3U_z + M_4U = \varphi,\ \ \varphi \in \Phi_\phi \subseteq C(R_2), \qquad (2)$$

где $\operatorname{rang} M(1) = 2$, U_ϕ и Φ_ϕ — множества вектор–функций, к которым применимы интегральные преобразования Фурье по переменным y и z соответственно.

2 Цель исследования

Путем анализа граничных данных (2) выяснить: будет ли задача однозначно разрешимой или нет, во втором варианте указать условия некорректности и разрешимости задачи.

Некорректные задачи разделим на два типа:

- если укажем граничную матрицу M, составляющую с данной системой дифференциальных уравнений некорректную задачу, то такую задачу назовем "прямой" некорректной;

- если при данной граничной матрице M следует определить дифференциальные уравнения, составляющие с M некорректную задачу, то задачу назовем "обратной" некорректной.

Исследование проведем по методу редукции [1]. Прямой ход: исходная задача (1) – (2) после применения Фурье–преобразования переходит в краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а последняя сводится к изучению однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.).

В итоге выясняется: корректны задачи или нет. Обратный ход: решение перечисленных задач в обратном порядке: с.л.а.у. $\Rightarrow$ краевая задача для ОДУ $\Rightarrow$ исходная.

Основные результаты. I.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_2 \neq 0$, *тогда*

а) *если* $\alpha_3 \neq 0$ (*или* $\alpha_4 \neq 0$), *то задача Дирихле* ($M_1 \equiv M_2 \equiv M_3 \equiv 0$) *с любой вещественной матрицей* M_4, $rang\, M_4 = 2$, *однозначно разрешима. Для ее некорректности необходимо, чтобы* M_4 *имела комплекснозначные элементы;*

б) *если* $\alpha_3 = 0$ *и* $\alpha_4 = 0$, *то существуют системы уравнений, для которых у задачи Дирихле нарушается однозначная разрешимость;*

в) *пусть* $\alpha_2 = 0$, *тогда утверждение б) имеет место и тогда, когда* $\alpha_4 = 0$.

II. Решение перечисленных в теореме 1 задач для конкретных систем и граничных данных.

Доказательство теоремы 1. Применив к (1) и (2) преобразование Фурье по y и z, придем к краевой задаче для системы ОДУ:

$$V'(x,\omega) + i\alpha(\omega)\, V(x,\omega) = 0,\ x > 0, \quad V(x,\omega) = \Phi^{+}_{y,z}(\omega)\, U(x,y,z)\,, \tag{3}$$

$$M_4 V(0,\omega) = \tilde{\varphi}(\omega)\,, \tag{4}$$

где

$$M_4 = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1;4} \quad (\det M_4 \neq 0)\,.$$

Используя собственные числа и векторы матрицы $\alpha(\omega)$, напишем общее решение системы (3):

$$V(x,\omega) = \Big[\big(t, r^2, 0, s\big)\, \tilde{C}_1 + \big(-s, 0, r^2, t\big)\, \tilde{C}_2\Big]\ \ell^{-(R-i\alpha_1)x} R > 0, \tag{5}$$

где $r^2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $\quad t = \alpha_3\alpha_4 + i\alpha_2 R$, $\ s = \alpha_2\alpha_4 - i\alpha_3 R$, $\ R^2 = r^2 + \alpha_4^2$.

Подставив (5) в граничные равенства (4), имеем с.л.а.у.

$$MV\,(0,\omega)\,\tilde{C} = \tilde{\varphi}. \tag{6}$$

Вычислим детерминант последней:

$$\Delta = (d_{12} - d_{34})\,s + (d_{13} + d_{24})\,t + (d_{14} - d_{23})\,r^2,$$

здесь введено обозначение

$$d_{kj} = a_k b_j - a_j b_k, \quad k \neq j.$$

Если $\Delta \neq 0$, то ясно, что задачи однозначно разрешимы; если $\Delta = 0$, то задачи некорректны. Поэтому изучаем нули детерминанта $\Delta = 0$.

Когда $\alpha_2 \cdot \alpha_3 \neq 0\,(\alpha_2 \cdot \alpha_4 \neq 0)$, то $d_{12} = d_{34}$, $d_{13} = -d_{24}$, $d_{14} = d_{23}$, но это противоречат требованию о ранге матрицы M_4, тем самым доказано утверждение а).

Переписав: $\Delta = iR\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, продолжим изучение нулей. Простой анализ показывает, что $\Delta = 0$, в частности, когда

$$\alpha_4 = 0 \quad \text{и} \quad d_{14} = d_{23},$$

кроме следующих случаев:

i) $\alpha_3 = 0$ и $d_{13} + d_{24} = 0$ или

ii) $\alpha_2 = 0$ и $d_{12} = d_{34}$.

Приведем некоторые модельные системы, вкладывающиеся в указанные ограничения:

$$i) \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad B = C = diag\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]; \tag{7}$$

$$ii) \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0, B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Равенства из ограничений формулируют граничные матрицы. Из равенств (7): $a_3b_1 + a_4b_2 = a_1b_3 + a_2b_4$, $a_4b_1 - a_3b_2 = a_1b_4 - a_2b_3$, считая элементы a_k $(k = \overline{1;4})$ заданными, определим вторую строку матрицы M_4:

$$\vec{b} = \left(\frac{a_2a_3 - a_1a_4}{\delta}, \frac{a_1a_4 + a_2a_3}{\delta}, 1, 0\right), \quad \delta = a_3^2 + a_4^2, \tag{9}$$

а равенства (8) и

$$a_1b_2 - a_3b_4 = a_2b_1 - a_4b_3, \quad a_3b_2 + a_1b_4 = a_4b_1 + a_2b_3$$

определяют вектор–строку

$$\vec{b} = \left(1, \frac{a_1a_2 + a_3a_4}{\delta_1}, 0, \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{\delta_1}\right), \quad \delta_1 = a_1^2 + a_3^2. \tag{10}$$

Таким образом, для задач (7), (9) и (8), (10) нарушена однозначная разрешимость. Теорема 1 полностью доказана.

3 Краевые задачи

Теперь переходим к реализации основного результата II.

3.1. Система Мойсила-Теодереску задается матрицами [2]:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

и является трехмерным аналогом системы Коши-Римана.

«Прямая» некорректная задача (прямой ход метода редукции).

Вопрос: можно ли найти такое граничное условие, которое с системой (11) составляют некорректную задачу?

Граничное условие ищем в виде:

$$M(\partial)U \equiv M_1 \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x + M_2 \begin{pmatrix} u \\ \chi \end{pmatrix}_y + M_3 \begin{pmatrix} u \\ \chi \end{pmatrix}_z + M_4 \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \varphi, \tag{2'}$$

здесь и далее $U = (u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = w,\ u_4 = \chi)$.

Утверждение 1. Среди $(2')$ существуют искомые условия.
Доказательство. Для некорректности задачи необходимо, чтобы $\operatorname{rang} M_i \leq 1$ при всех $i \geq 1$. Например, их можно представить в виде

$$M^0 = \begin{pmatrix} a_1\, a_2 & c_1\, c_2 & 0\ \ 0 & 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0 & 0\ \ 0 & d_1\, d_2 & b_1\, b_2. \end{pmatrix}.$$

Напишем общее решение ОДУ, соответствующих системе (11) $(\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \omega_1,\ \alpha_3 = \omega_2,\ \alpha_4 = 0)$, в виде:

$$V\left(x, \omega\right) = (i\omega_1 \tilde{C}_1 + i\omega_2 \tilde{C}_2;\ \ r\tilde{C}_1;\ \ r\tilde{C}_2;\ \ -i\omega_2 \tilde{C}_1 + i\omega_1 \tilde{C}_2)e^{-rx}, \quad r^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \tag{5'}$$

тогда из условии $(2')$ имеем

$$(-rM_1^0 + M_4^0)\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} + (i\omega_1 M_2^0 + i\omega_2 M_3^0)\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}.$$

Далее, анализируя с.л.а.у., находим такие граничные условия:

$$1^\circ\ a_1 v_x + a_2 w_x = \varphi_1, \quad b_1 v + b_2 w = \varphi_2 \quad \left(M_2^0 \equiv M_3^0 \equiv 0\right) \tag{12}$$

с равенством коэффициентов $H:\ a_1 b_2 = a_2 b_1$;

$$2^\circ\ v_x + \lambda_z = \varphi_1, \quad u_y = \varphi_2, \quad \left(M_4^0 \equiv 0\right), \tag{13}$$

составляющие с системой (11) некорректные задачи. Утверждение 1 доказано.

Обратный ход метода редукции

Утверждение 2. Задача (11), (12) имеет единственное решение на множестве $U_\phi \subseteq C^1\left(x \geq 0, R_2\right)$ для вектора $\varphi \in \Phi_\phi \subseteq C\left(R_2\right)$, удовлетворяющего условию разрешимости

$$b_1 \varphi_1\left(y, z\right) = -a_1 \Delta^{1/2} \varphi_2\left(y, z\right),$$

где $\Delta^{1/2}$ – оператор Лапласа порядка 1/2.

Такое решение назовем «нормальным» или «условно точным».

Напишем систему алгебраических уравнений:

$$r^2(a_1\tilde{C}_1 + a_2\tilde{C}_2) = -\tilde{\varphi}_1(\omega), \qquad r(b_1\tilde{C}_1 + b_2\tilde{C}_2) = \tilde{\varphi}_2(\omega),$$

которая имеет нормальное решение

$$\tilde{C}_1^H = \frac{b_1}{r\delta}\tilde{\varphi}_2, \quad \tilde{C}_2^H = \frac{b_2}{r\delta}\tilde{\varphi}_2, \quad \delta = b_1^2 + b_2^2$$

при

$$\tilde{\varphi}_1(\omega) = -\frac{a_1}{b_1} r\tilde{\varphi}_2(\omega).$$

Значит, формула $(5')$ принимает вид

$$V_H(x,\omega) = \left(\frac{i\omega_1 b_1 + i\omega_2 b_2}{r};\ \ b_1;\ \ b_2;\ \ \frac{i\omega_1 b_2 - i\omega_2 b_1}{r}\right)\tilde{\varphi}_2(\omega)\,\frac{\ell^{-rx}}{\delta}.$$

Последнее удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\tilde{u}_x + i\omega_1\tilde{v} + i\omega_2\tilde{w} = 0, \quad \tilde{v}_x - i\omega_1\tilde{u} + i\omega_2\tilde{\chi} = 0,$$

$$\tilde{w}_x - i\omega_2\tilde{u} - i\omega_1\tilde{\chi} = 0, \quad \tilde{\chi}_x - i\omega_2\tilde{v} + i\omega_1\tilde{w} = 0, \quad x > 0, \tag{14}$$

и граничным условиям

$$a_1\tilde{v}_x + a_2\tilde{w}_x = \tilde{\varphi}_1(x), \quad b_1\tilde{v} + b_2\tilde{w} = \tilde{\varphi}_2(\omega) \ \text{ при } \ x = 0.$$

Вычислим оригиналы условий разрешимости и решения:

$$-\frac{b_1}{a_1}\varphi_1(y,z) = \Delta^{1/2}\varphi_2(y,z), \tag{15}$$

$$\ell^{-rx} \Rightarrow \frac{x\omega_2}{\sqrt{x^2+y^2}} K_1\left(\omega_2\sqrt{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = G_3(x,y,z).$$

Таким образом, находим «условно точное» решение задачи (11), (12):

$$u_H(x,y,z) = -\partial_x\left(b_1\partial_y + b_2\partial_z\right)Q, \quad v_H = b_1 Q, \quad w_H = b_2 Q,$$

$$\chi_H = \partial_x\left(b_1\partial_z - b_2\partial_y\right)Q;$$

здесь

$$Q \equiv Q\,(x,y,z) = \iint\limits_{0}^{\infty} \varphi_2\,(\xi,\eta)\,G_3\,(x,y-\xi,z-\eta)\,\frac{d\xi d\eta}{b_1^2+b_2^2}.$$

Поскольку система Мойсила-Теодереску – суть трехмерный аналог системы Коши-Римана, то каждая компонента вектора U_H должна быть гармонической функцией, в этом легко убедиться непосредственно. Граничное равенство $b_1 v_H + b_2 w_H = \varphi_2$ справедливо, так как $G_3\,(x,y,z)$ – функция Грина задачи Дирихле в полупространстве $x>0$ для трехмерного уравнения Лапласа; первое граничное равенство также имеет место, если учесть условия разрешимости (15) и условия некорректности H.

В самом деле,

$$a_1 v_x + a_2 w_x = (a_1 b_1 + a_2 b_2)\,\partial_x Q = \frac{a_1}{b_1}\partial_x^2 Z_3 = -\frac{a_1}{b_1}(\partial_y^2+\partial_z^2) Z_3.$$

Значит,

$$a_1 v_x + a_2 w_x = -\frac{a_1}{b_1}\left(\partial_y^2+\partial_z^2\right)\iint \varphi_2\,(\xi,\eta)\,Z_3\,(x,\ y-\xi,\ z-\eta)\,d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{a_1}{b_1}\Delta^{1/2}\varphi_2\,(y,z) = \varphi_1\,(y,z)\,.$$

Покажем, что интегро-дифференциальное выражение действительно определяет дробный оператор Лапласа:

$$\Delta^{1/2}\varphi_2(y,\ z) = (\partial_y^2+\partial_z^2)\iint \varphi_2(\xi,\ \eta) Z_3(x,\ y-\xi,\ z-\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint \varphi_2(\xi,\ \eta)(\partial_\xi^2+\partial_\eta^2) Z_3(x,\ y-\xi,\ z-\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint \Delta\varphi_2(\xi,\ \eta) Z_3(x,\ y-\xi,\ z-\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \iint \varphi_1(\xi,\ \eta) Z_3\,(x,\ y-\xi,\ z-\eta)\big|_{x=0}\, d\xi d\eta = \varphi_1(y,\ z).$$

Утверждение 3. Задача (11), (13) имеет единственное решение на множестве $U_\phi \subseteq C^1\,(x\geq 0, R_2)$ для вектора $\varphi \in \Phi_\phi \subseteq C\,(R_2)$ с совпадающими компонентами.

Доказательство. В этом случае с.л.а.у.

$$\omega_1 \tilde{C}_1 + \omega_2 \tilde{C}_2 = -\tilde{\varphi}_1/\omega_1, \quad \omega_1 \tilde{C}_1 + \omega_2 \tilde{C}_2 = -\tilde{\varphi}_2/\omega_1$$

имеет решение

$$\tilde{C}_1^H = -\tilde{\varphi}_1 (\omega)/r^2, \quad \tilde{C}_2^H = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\tilde{\varphi}_1 (\omega)/r^2,$$

когда

$$\tilde{\varphi}_1 (\omega) = \tilde{\varphi}_2 (\omega) .$$

Следовательно,

$$V_H (x, \omega) = -\left(\frac{i}{\omega_1}; \quad \frac{1}{r}; \quad \frac{\omega_2}{r\omega_1}; \quad 0\right) \ell^{-rx} \tilde{\varphi}_1 (\omega)$$

будет нормальным решением для дифференциальных уравнений (14) с граничными условиями

$$\tilde{v}_x + i\omega_2 \tilde{\chi} = \tilde{\varphi}_1 (\omega) , \qquad i\omega_1 \tilde{u} = \tilde{\varphi}_2 (\omega) .$$

Так как

$$\Phi^-_{\omega_1} \left(\frac{1}{\omega_1}\right) = 2i \int_0^\infty \frac{\sin \omega_1 y}{\omega_1} d\omega_1 = i\pi,$$

то имеем оригинал

$$\frac{-i}{\omega_1}\tilde{\varphi}_1 (\omega) \Rightarrow \pi \int_0^\infty \varphi_1 (y - \xi, z) \, d\xi = \psi_1 (y, z) .$$

Таким образом, решение задачи (11), (13) имеет вид

$$u_H (x, y, z) = Q_1 (x, y, z) , \quad v_H = \partial_x Q, \quad w = \partial^2_{xz} Q_1, \quad \chi = 0,$$

где теперь

$$Q = \iint \varphi_1 (\xi, \eta) \, G_3 (x, y - \xi, z - \eta) \, d\xi d\eta,$$

$$Q_1 = \iint \psi_1 (\xi, \eta) \, G_3 (x, y - \xi, z - \eta) \, d\xi d\eta.$$

Доказательство утверждения 3 завершается аналогичным рассуждением, как в предыдущей задаче.

3.2. Обратные некорректные задачи.

б) Найти решение задачи Дирихле для системы (7), которая эквивалентна двум двумерным уравнениям Лапласа, т.е. $U(x, y, z) \equiv U(x, y)$.

Фактически решаем задачу

$$U_x + BU_y = 0, \quad x > 0, \quad MU(0, y) = \varphi(y) \tag{16}$$

с матрицами

$$B = diag\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Утверждение 4. Задача (16) имеет единственное нормальное решение $U_H \in U_\phi \subseteq C^1\left(R_2^+\right) \Lambda C(0, R)$, если для компонент вектора $\varphi(y) \in \Phi_\phi \subseteq C(R)$ справедливо соотношение

$$\varphi_2(y) = J_y^{1/2} \varphi_1(y),$$

где $J_y^{1/2}$ – оператор интегрирования по y порядка 1/2.

Для данной задачи имеем

$$\alpha(\omega) = \|\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = \omega, \ \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0\|,$$

$$V(x, \omega) = \left(i\tilde{C}_1, \tilde{C}_1, -i\tilde{C}_2, \tilde{C}_2\right) \ell^{-\omega x}. \tag{17}$$

Тогда из алгебраических уравнений

$$(i+1)\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \tilde{\varphi}_1, \quad (1-i)\tilde{C}_1 - i\tilde{C}_2 = \tilde{\varphi}_2$$

при

$$\tilde{\varphi}_1 = i\tilde{\varphi}_2$$

находим

$$\tilde{C}_1^H = \frac{1}{5}(3\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2), \quad \tilde{C}_2^H = \frac{1}{5}(\tilde{\varphi}_1 + 2\tilde{\varphi}_2).$$

Вычислим по таблице интегральных преобразований Фурье:

$$i\tilde{\varphi}(\omega) = i\sqrt{\omega}\tilde{\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega}} \Rightarrow$$

$$\partial_y^{1/2}\varphi(y) * \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\partial^{1/2}\int_0^y \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{y-\xi}} = \partial^{1/2}\left(\partial^{1/2}\varphi\right) = \partial_y J_y^{1/2}(\varphi).$$

Следовательно, условие разрешимости в оригинале имеет вид

$$\varphi_2(y) = J^{1/2}\varphi_1(y).$$

Восстановив решение (17):

$$V_H(x,\omega) = (\tilde{\varphi}_1 - 3\tilde{\varphi}_2;\ \ 3\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2;\ \ \tilde{\varphi}_2 - 2\tilde{\varphi}_1;\ \ \tilde{\varphi}_1 + 2\tilde{\varphi}_2)\,\frac{\ell^{-\omega x}}{5}, \qquad (17')$$

определим решение исходной задачи (16):

$$u_1 = Q_1 - 3Q_2,\ \ u_2 = 3Q_1 + Q_2,\ \ \ u_3 = Q_2 - 2Q_1,\ \ \ u_4 = Q_1 + 2Q_2; \quad (18)$$

здесь величины

$$Q_i \equiv Q_i(x,y) = \frac{1}{5}\int_R \varphi_i(\xi)\ \, G(x, y-\xi)\,d\xi, \quad i = 1,2,$$

определены с помощью функции Грина

$$G(x,y) = \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}.$$

То, что (17′) и (18) являются решением соответствующей задачи, можно убедиться непосредственным вычислением и с учетом свойств функции Грина.

в) Ищется решение задачи с матрицами

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае также $U(x,y,z) \equiv U(x,y)$.
Теперь

$$\alpha(\omega) = (\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = \omega, \quad \alpha_4 = 0)$$

$$V(x,\omega) = \left(i\tilde{C}_2, \ \tilde{C}_1, \ \tilde{C}_2 - i\tilde{C}_1\right)\ell^{-(1-i)\omega x}.$$

Алгебраические уравнения

$$-(1+i)\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \tilde{\varphi}_1, \quad (1-i)\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2 = \tilde{\varphi}_2$$

при связи

$$\tilde{\varphi}_2 = i\tilde{\varphi}_1$$

имеют решение

$$\tilde{C}_1^H = \frac{1}{5}(i-3)\,\tilde{\varphi}_1(\omega), \quad \tilde{C}_2^H = \frac{1}{5}(1-2i)\,\tilde{\varphi}_1(\omega).$$

Далее находим

$$V_H(x,\omega) = (2\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2; \ \tilde{\varphi}_2 - 3\tilde{\varphi}_1; \quad \tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2; \ \tilde{\varphi}_1 + 3\tilde{\varphi}_2)\,\ell^{-(1-i)\omega x}/5,$$

$$U_H = (2Q_1 + Q_2; \ \ -3Q_1 + Q_2; \quad Q_1 - 2Q_2; \quad Q_1 + 3Q_2); \tag{19}$$

здесь

$$Q_i(x,y) = \frac{1}{5}\int\limits_R \varphi_i(\xi)\ G(x, y-x-\xi)\,d\xi.$$

Замечание. *При проверке того факта, что решение* (19) *удовлетворяет уравнению Лапласа, необходимо воспользоваться подстановкой*

$$G(x, y-x) = \left. G(x,z)\right|_{z=y-x},$$

а при проверке граничных данных нужно пользоваться представлением

$$Q_i(x,y) = \frac{1}{5}\int\limits_R \varphi_i(\eta - x)\ G(x, y-\eta)\,d\eta.$$

Тем самым, имеет место аналогичное утверждение, как в задаче б).

Литература

1 Темирболат С.Е. Новая методика исследования (решения) некорректных краевых задач. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 62 с.

2 Тоқыбетов Ж.Ә. Эллипстік теңдеулер үшін шекаралық есептер. – Алматы: Қазақ университеті, 2007. – 102 б.

Статья поступила в редакцию 28.05.12

Темірболат С. НАҚТЫ АЙНЫМАЛЫЛЫ ЭЛЛИПСТІК ЖҮЙЕЛЕРГЕ ҚОЙЫЛҒАН ҚИСЫНСЫЗ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Шекаралық шарттарды талдау арқылы есептің жалғыз шешімі бар не жоғы анықталады, соңғы жағдайда қосымша қисынсыздық шарты мен шешім шарттары көрсетіледі. "Тура" қисынсыз (Мойсил-Теодереску жүйесіне) және "кері" қисынсыз (екі өлшемді екі Лапластық теңдеулерге) қойылған есептер шешілген.

Temirbolat S. ILL-POSED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC SYSTEMS WITH REAL VARIABLES

By analyzing boundary data a unique solvability of one problem is under consideration. If it is not solvability then conditions of incorrectness and solvability are pointed out. Variants of "direct" ill-posed (for Moisil-Teodoresku system) and "inverse" ill-posed (for the system of two two-dimentional Laplace equations) problems are solved.

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2012. Том 12. № 4 (46).*

УДК 517.95

Б.Т. Торебек, Б.Х. Турметов

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А. Яссауи
161200, г. Туркестан, пр. Б.Саттарханова, корпус № 1, e-mail: turmetovbh@mail.ru

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона с граничнымы операторами дробного порядка.
Ключевые слова: *уравнение Пуассона, дробный дифференциальный оператор, оператор Капуто, оператор Римана-Лиувилля, граничная задача.*

Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар в R^n, $n \geq 3$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера.

Пусть далее $u(x)$ – гладкая функция в области Ω, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$ и $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим следующие операторы:

$$D^{\alpha}\left[u\right](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u\left(\tau\theta\right) d\tau, D_*^{\alpha}\left[u\right](x) =$$

Keywords: *Poisson equation, fractional differential operator, Caputo operator, Riemann-Liouville operator, boundary value problem*

2010 Mathematics Subject Classification: 35J67, 31A30, 31A10

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \frac{du}{d\tau} (\tau\theta)\, d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция Эйлера. Здесь под оператором $\frac{d}{dr}$ понимается дифференциальный оператор вида

$$\frac{df}{dr}(x) = \frac{1}{|x|} \Lambda_0 [f](x) \equiv \frac{1}{|x|} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Оператор D^α называется оператором дифференцирования порядка $\alpha \in (0,1)$ в смысле Римана-Лиувилля, а D_*^α — оператором дифференцирования порядка $\alpha \in (0,1)$ в смысле Капуто (см. [1]).

Введем обозначения:

$$B^\alpha [u](x) = r^\alpha D^\alpha [u](x), B_*^\alpha [u](x) = r^\alpha D_*^\alpha [u](x),$$

$$B^{-\alpha} [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} u(\tau x)\, d\tau.$$

Аналогичные операторы для гармонических в шаре функций рассматривались в работах [2-4].

2 Свойства операторов B^α и B_*^α

В дальнейшем всюду будем считать, что $u(x)$ является гладкой функцией в области $\overline{\Omega}$. Следующее утверждение устанавливает связь между операторами B^α и B_*^α.

Лемма 1. *Для любого $x \in \Omega$ имеет место соотношение*

$$B_*^\alpha [u](x) = B^\alpha [u](x) - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1}$$

Доказательство. Используя определение оператора B_*^α, получаем

$$B_*^\alpha [u](x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \frac{du}{d\tau} (\tau\theta)\, d\tau =$$

$$= \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ \int\limits_0^r \frac{(r-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{du}{d\tau} (\tau\theta)\, d\tau \right\} =$$

$$= \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha} u\,(0) + \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u\,(\tau\theta)\, d\tau \right\} = B^{\alpha}\,[u]\,(x) - \frac{u\,(0)}{\Gamma\,(1-\alpha)}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$B_*^{\alpha}\,[u]\,(0) = 0.$$

Лемма 2. *Для любого $x \in \Omega$ имеет место равенство*

$$u\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^{\alpha}\,[u]\,(\tau x)\, d\tau. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$ и $t \in (0,1]$. Рассмотрим функцию

$$\Im_t\,[u]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^{\alpha}\,[u]\,(\tau x)\, d\tau.$$

Представим $\Im_t\,[u]\,(x)$ в виде

$$\Im_t\,[u]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \tau^{-\alpha} B^{\alpha}\,[u]\,(\tau x)\, d\tau \right\}.$$

Далее, используя определение оператора B^{α}, получаем

$$\Im_t\,[u]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \tau^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^{\tau} (\tau-\xi)^{-\alpha} u\,(\xi x)\, d\xi d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int\limits_0^\tau (\tau-\xi)^{-\alpha} u\,(\xi x)\, d\xi d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_0^t u\,(\xi x) \int\limits_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\xi)^{-\alpha} d\tau d\xi \right\}.$$

Легко показать, что

$$\int\limits_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\xi)^{-\alpha} d\tau = \Gamma\,(\alpha)\,\Gamma\,(1-\alpha)\,.$$

Тогда

$$\Im_t\,[u]\,(x) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t u\,(\xi x)\, d\xi = u\,(tx).$$

Если теперь положим $t = 1$, то

$$u\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, d\tau.$$

Лемма доказана.

Используя связь между операторами B^α и B_*^α, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого $x \in \Omega$ справедливо представление*

$$u\,(x) = u\,(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B_*^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, d\tau. \qquad (3)$$

Доказательство. Используя равенство (2), с учетом (1) получаем

$$u\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau^{-\alpha} \left[\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + B_*^{\alpha}[u](\tau x) \right] d\tau =$$

$$= u(0) + \int\limits_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau^{-\alpha} B_*^{\alpha}[u](\tau x)\, d\tau.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства*

$$B^{-\alpha}[B^{\alpha}[u]](x) = B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[u]\right](x) = u(x). \tag{4}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Применим к функции $B^{\alpha}[u]$ оператор $B^{-\alpha}$. По определению оператора $B^{-\alpha}$ имеем

$$B^{-\alpha}[B^{\alpha}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^{\alpha}[u](\tau x)\, d\tau.$$

Но последний интеграл в силу равенства (4) равен $u(x)$, т.е. $B^{-\alpha}[B^{\alpha}[u]](x) = u(x)$.

Докажем второе равенство. Для этого применим оператор B^{α} к функции $B^{-\alpha}[u](x)$. Получаем

$$B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[u]\right](x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} B^{-\alpha}[u](\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(s\tau\theta)\, ds d\tau \right\}.$$

Далее нетрудно убедится в следующих равенствах:

$$\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} u(s\tau\theta)\, d\tau \underset{s\tau=\xi}{=} \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^{rs} \left(r - \frac{\xi}{s}\right)^{-\alpha} u(\xi\theta) \frac{d\xi}{s} =$$

$$= \frac{r^{\alpha} s^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^{rs} (sr-\xi)^{-\alpha} u(\xi\theta)\, d\xi =$$

$$= \frac{(sr)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d(sr)} \int\limits_0^{rs} (sr-\xi)^{-\alpha} u(\xi\theta)\, d\xi = B^{\alpha}[u](sx),$$

где учтено $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{sx}{|sx|}$.
Поэтому

$$B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^{\alpha}[u](sx)\, ds.$$

Следовательно, используя равенство (2), получаем

$$B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[u]\right](x) = u(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\Delta u(x) = g(x)$, $x \in \Omega$. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\Delta B^{\alpha}[u](x) = |x|^{-2} B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x). \qquad (5)$$

Доказательство. После замены переменных функцию $B^{\alpha}[u](x)$ можно представить в виде

$$B^{\alpha}[u](x) = \frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u(\xi x) d\xi + r\frac{d}{dr} \int\limits_0^1 \frac{(1-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(\xi x) d\xi =$$

$$= I_1(x) + I_2(x).$$

Так как $\Delta u(x) = g(x)$, то легко показать, что

$$\Delta I_1(x) = \frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^2 g(\xi x)\, d\xi.$$

Далее, если $v(x)$ – гладкая функция, то, очевидно, что

$$\Delta\left[r\frac{\partial}{\partial r}v(x)\right]=r\frac{\partial}{\partial r}\Delta v(x)+2\Delta v(x).$$

Поэтому

$$\Delta I_2(x)=r\frac{d}{dr}\int\limits_0^1\frac{(1-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\xi^2 g(\xi x)\,d\xi+2\int\limits_0^1\frac{(1-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\xi^2 g(\xi x)\,d\xi.$$

Изучим интеграл $\int\limits_0^1(1-\xi)^{-\alpha}\xi^2 g(\xi x)\,d\xi$.

После замены $\xi r=\tau$, $\xi=r^{-1}\tau$, его можно преобразовать к следующему виду:

$$\int\limits_0^1(1-\xi)^{-\alpha}\xi^2 g(\xi x)\,d\xi=r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau.$$

Тогда

$$r\frac{d}{dr}\int\limits_0^1\frac{(1-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\xi^2 g(\xi x)\,d\xi=r\frac{d}{dr}\left[r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau\right]=$$

$$=(\alpha-3)\,r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau+r^{\alpha-2}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\Delta I_1(x)+\Delta I_2(x)=\frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau+$$

$$+\frac{(\alpha-3)}{\Gamma(1-\alpha)}r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau+\frac{r^{\alpha-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}r^{\alpha-3}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau=\frac{r^{\alpha-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau=$$

$$=r^{-2}\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau=r^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\Delta u(x)=g(x)$, $x\in\Omega$. *Тогда для любого* $x\in\Omega$ *имеет место равенство*

$$\Delta B_*^{\alpha}[u](x)=|x|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x). \tag{6}$$

Доказательство. Так как $B_*^{\alpha}[u](x)-\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)}$, то в силу равенства (5)

$$\Delta B_*^{\alpha}[u](x)=\Delta B^{\alpha}[u](x)=|x|^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x).$$

Преобразуем выражение для функции $B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)$ следующим образом:

$$B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{-\alpha}\tau^2 g(\tau\theta)\,d\tau=$$

$$=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\left\{\int\limits_0^r\tau^2 g(\tau\theta)\frac{d\left[(r-\tau)^{1-\alpha}\right]}{-(1-\alpha)}\right\}=$$

$$=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\left\{-\tau^2 g(\tau\theta)\frac{(r-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=r}+\int\limits_0^r\frac{(r-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{d}{d\tau}\left[\tau^2 g(\tau\theta)\right]d\tau\right\}=$$

$$=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\left\{\int\limits_0^r\frac{(r-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{d}{d\tau}\left[\tau^2 g(\tau\theta)\right]d\tau\right\}=$$

$$= \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \left[\tau^2 g(\tau\theta)\right] d\tau \stackrel{def}{=} B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x).$$

Таким образом,

$$\Delta\left[B_*^{\alpha}[u]\right](x) = |x|^{-2} B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x).$$

Лемма доказана.

3 Постановка и решение основных задач

Рассмотрим в области Ω для уравнения

$$\Delta u(x) = g(x) \tag{7}$$

следующие краевые задачи.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, *для которой* $B^{\alpha}[u](x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, *удовлетворяющую уравнению (7) и условию*

$$B^{\alpha}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Задача 2. *Найти функцию* $u(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, *для которой* $B_*^{\alpha}[u](x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, *удовлетворяющую уравнению (7) и условию*

$$B_*^{\alpha}[u](x) = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Отметим, что аналогичные задачи с граничными операторами целого порядка исследовались в работах [5-7].

Для исследования разрешимости задач 1 и 2 нам необходимо изучить некоторые свойтсва решения задачи Дирихле для уравнения (7). Пусть $v(x)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v(x) = g_1(x),\ x \in \Omega, \\ v(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Известно (см.[8]), что, если функции $f(x)$ и $g_1(x)$ являются достаточно гладкими, то решение задачи (10) существует и представляется в виде

$$v(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega} G(x,y)\, g_1(y)\, dy + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\, f(y)\, ds_y\,, \qquad (11)$$

где ω_n — площадь единичной сферы, $G(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, а $P(x,y)$ — ядро Пуассона. Причем имеют место представления

$$G(x,y) = \frac{1}{n-2}\left[|x-y|^{2-n} - \left||y|\,x - \frac{y}{|y|}\right|^{2-n}\right], P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

Лемма 7. *Пусть $v(x)$ – решение задачи (10). Тогда*

1) если $v(0) = 0$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\, ds_y = \int\limits_{\Omega} \frac{|y|^{2-n}-1}{n-2} g_1(y)\, dy\,, \qquad (12)$$

2) если выполняется равенство (12), то для решения задачи (10) выполняется условие (12).

Доказательство. Пусть решение задачи (10) существует. Представим его в виде (11). Из представления функции $G(x,y)$ имеем

$$G(0,y) = \frac{1}{n-2}\left[|y|^{2-n} - 1\right] \qquad \text{и} \qquad P(0,y) = 1.$$

Тогда

$$0 = v(0) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega} G(0,y)\, g_1(y)\, dy + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega} P(0,y)\, f(y)\, ds_y.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\, ds_y = \int\limits_{\Omega} \frac{|y|^{2-n}-1}{n-2} g_1(y)\, dy.$$

Равенство (12) доказано. Второе утверждение леммы доказывается в обратном порядке. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если в условиях леммы 7 функция $g_1(x)$ представляется в виде*

$$g_1(y) = \Lambda_2[g](y) \equiv \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2\right) g(y)\ ,$$

то условие (12) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\, ds_y = \int\limits_{\Omega} g(y)\, dy. \tag{13}$$

Доказательство. Используя представление функции $g_1(y)$ для объемного интеграла, из (12) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|y|^{2-n} - 1}{n-2} g_1(y)\, dy = \int\limits_0^1 \rho^{n-1} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\rho^{2-n} - 1}{n-2} \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2\right) g(\rho\xi)\, d\xi d\rho.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \rho^{n-1} \frac{\rho^{2-n} - 1}{n-2} \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 2\right) g(\rho\xi)\, d\rho = \frac{1}{n-2} \int\limits_0^1 \left[\rho^2 - \rho^n\right] \frac{\partial}{\partial\rho} [g](\rho\xi)\, d\rho +$$

$$+ \frac{2}{n-2} \int\limits_0^1 \left[\rho - \rho^{n-1}\right] g(\rho\xi)\, d\rho = I_1 + I_2.$$

Исследуем I_1. После интегрирования по частям получаем

$$I_1 = \frac{1}{n-2} \int\limits_0^1 \left[n\rho^{n-1} - 2\rho\right] g(\rho\xi)\, d\rho.$$

Тогда

$$I_1 + I_2 = \int\limits_0^1 \rho^{n-1} g(\rho\xi)\, d\rho.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|y|^{2-n}-1}{n-2} g_1(y)\,dy = \int\limits_0^1 \rho^{n-1} \int\limits_{|\xi|=1} g(\rho\xi)\,d\xi d\rho = \int\limits_{\Omega} g(y)\,dy.$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $0<\lambda<1,\ f(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega),\ g(x)\in C^{\lambda+1}\left(\overline{\Omega}\right)$. *Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x) = B^{-\alpha}[v](x), \tag{14}$$

где $v(x)$ *— решение задачи (10) с* $g_1(x) = |x|^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)$.

Теорема 2. *Пусть* $0<\lambda<1,\ f(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega),\ g(x)\in C^{\lambda+1}\left(\overline{\Omega}\right)$. *Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\,ds_x = \int\limits_{\Omega} \frac{|x|^{2-n}-1}{n-2}|x|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)\,dx. \tag{15}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде (14), где $v(x)$ *— решение задачи (10) с* $g_1(x) = |x|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x)$ — решение задачи 1. Применим к функции $u(x)$ оператор B^{α} и обозначим $v(x) = B^{\alpha}[u](x)$. Тогда, используя равенство (5), из леммы 5 получаем

$$\Delta v(x) = \Delta B^{\alpha}[u](x) = |x|^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x) \equiv g_1(x).$$

Очевидно, что $v(x)|_{\partial\Omega} = B^{\alpha}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x)$. Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи 1, то для функции $v(x) = B^{\alpha}[u](x)$ получаем задачу (13) с $g_1(x) = |x|^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)$.

Далее, так как

$$g_1(x) = |x|^{-2}B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x) = \left[r\frac{d}{dr} + 3 - \alpha\right] \int\limits_0^1 \frac{(1-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \xi^2 g(\xi x)\,d\xi,$$

то при $g(x) \in C^{\lambda+1}\left(\overline{\Omega}\right)$ имеем $g_1(x) \in C^{\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда при $g_1(x) \in C^{\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$, $f(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ решение задачи (10) существует и принадлежит классу $C^{\lambda+2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Далее, применяя к равенству $v(x) = B^{\alpha}[u](x)$ оператор $B^{-\alpha}$, в силу равенства (4) получаем

$$u(x) = B^{-\alpha}[v](x),$$

которое удовлетворяет всем условиям задачи 1. Действительно,

$$\Delta u(x) = \Delta B^{-\alpha}[v](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{2-\alpha} \Delta v(\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{2-\alpha} g_1(\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{2-\alpha} \tau^2 |x|^{-2} B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} |x|^{-2} B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](\tau x)\, d\tau =$$

$$= \frac{|x|^{-2}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} B^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](\tau x)\, d\tau \underset{(2)}{=} |x|^{-2}|x|^2 g(x) = g(x).$$

Далее, используя (4), получаем

$$B^{\alpha}[u](x)\left.\right|_{\partial\Omega} = B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[v]\right](x)\left.\right|_{\partial\Omega} = v(x)\left.\right|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Итак, функция $u(x) = B^{-\alpha}[v](x)$ удовлетворяет уравнению (10) и граничному условию (11). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть решение задачи 2 $u(x)$ существует. Применим к функции $u(x)$ оператор B_*^{α} и обозначим $v(x) = B_*^{\alpha}[u](x)$. В этом случае для функции $v(x)$ получаем задачу (10) с функцией $g_1(x) =$

$|x|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)$. Так как $B_*^{\alpha}[u](0)=0$, то функция $v(x)$ дополнительно должна удовлетворять условию $v(0)=0$. Любое решение задачи (10) при гладких $f(x)$ и $g(x)$ представляется в виде (11). А для того, чтобы это решение удовлетворяло и условию $v(0)=0$, по лемме 7 необходимо и достаточно выполнения условия (12).

В нашем случае условие (12) имеет вид

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(y)\,ds_y = \int\limits_{\Omega} \frac{|y|^{2-n}-1}{n-2}|y|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|y|^2 g\right](y)\,dy.$$

Таким образом, необходимость условия (15) доказана. Это условие является и достаточным для существования решения задачи 2.

Действительно, если выполняется условие (15), то $v(0)=0$ и функция

$$u(x)=B^{-\alpha}[v](x)+C$$

удовлетворяет всем условиям задачи 2. Проверим эти условия. Выполнение условия $\Delta u(x)=g(x)$ проверяется аналогично, как в случае доказательства теоремы 1. Далее, используя равенство (4) и связь между операторами B^{α} и B_*^{α}, получаем

$$B_*^{\alpha}[u](x)=B_*^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[v]\right](x)+B_*^{\alpha}[C]=B^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[v]\right](x)+\frac{B^{-\alpha}[v](0)}{\Gamma(1-\alpha)}=v(x),$$

следовательно,

$$B_*^{\alpha}[u](x)\left.\right|_{\partial\Omega}=v(x)\left.\right|_{\partial\Omega}=f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. *Если при* $\alpha=1$ *считаем, что* $D_*^{\alpha}=\frac{d}{dr}$, *то* $B_*^{\alpha}=r\frac{d}{dr}$. *В этом случае*

$$|x|^{-2}B_*^{\alpha}\left[|x|^2 g\right](x)=|x|^{-2}r\frac{d}{dr}\left[r^2 g(x)\right]=r\frac{d}{dr}g(x)+2g(x)=\left(r\frac{d}{dr}+2\right)g(x).$$

Тогда в силу леммы 8 условие разрешимости задачи 2 можно переписать в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\,ds_x=\int\limits_{\Omega} g(x)\,dx.$$

Это является условием разрешимости задачи Неймана [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований МОН РК (проект 0830/ГФ2).

Литература

1 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

2 Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении // Математические труды. – Новосибирск, 2011. – Т. 14, № 1. – С. 99-125.

3 Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. Некоторые интегродифференциальные операторы в классе гармонических функций и их применение // Известия ЧНЦ РАН Челябинск. Серия математика. –2010. – № 1(47). – С. 1-9.

4 Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых задач для уравнения Лапласа // Математический журнал. – Алматы, 2010. – Т. 10, № 1(35). – С. 93-103.

5 Карачик В.В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными на границе // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1996. – Т. 32, № 3. – С. 416-418.

6 Карачик В.В. О разрешимости одной задачи для уравнения Пуассона в шаре // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1993. – Т. 95. – С. 77-95.

7 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский математический журнал. – Уфа, 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41-52.

8 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 29.11.11

Төребек Б.Т., Турметов Б.Х. БӨЛШЕК РЕТТІ ШЕКАРАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛЫ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІЛІМДІГІНІҢ МӘСЕЛЕЛЕРІ

Бұл жұмыста Пуассон теңдеуі үшін шекаралық шартында Риман-Лиувилль және Капуто мағынасындағы бөлшек ретті операторлар қатысқан кейбір шеттік есептердің шешілімдігінің мәселелері зерттелген.

Torebek B.T., Turmetov B.Kh. SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POISSON EQUATION WITH FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATORS

Two problems for Poisson equation with boundary fractional operators in the Riemann-Liouville and Caputo are under investigation.

ХРОНИКА

7 декабря 2012 года состоялось учредительное собрание Казахстанского математического общества. Принято решение о создании Общественного объединения "Казахстанское математическое общество". Общество продолжает традиции и является правопреемником математического общества, основанного в 1988 году и воссозданного в 1998 году, как Национальный комитет математики Казахстана. Целью общества является всемерное содействие развитию математики и математического образования в Казахстане, а также содействие развитию и укреплению научных связей математиков Казахстана с математиками других стран. Проект Устава Общества был заранее разослан казахстанским математикам. С учетом их предложений и замечаний Устав Общества был утвержден.

Президентом Казахстанского математического общества единогласно был избран академик Жумагулов Б.Т. Утвержден состав Президиума Казахстанского математического общества: Жумагулов Б.Т. – президент Общества, Кальменов Т.Ш. – вице-президент Общества, Данаев Н.Т. – вице-президент Общества, Отелбаев М. – член президиума, Джумадильдаев А.С. – член президиума, Нурсултанов Е.Д. – член президиума, Садыбеков М.А. – член президиума, ответственный секретарь.

8 декабря 2012 года состоялась очередная ежегодная встреча министра образования и науки РК академика Жумагулова Б.Т. с казахстанскими математиками. В рамках этой встречи состоялось награждение казахстанских математиков за лучшие публикации в журналах, имеющих импакт-фактор по базе данных Thomson Reuters (ISI) Web of Knowledge. Дипломом Казахстанского математического общества I степени награждены профессор М.А. Садыбеков и магистр Д. Сураган (за 3 публикации в 2012 году). Дипломом Казахстанского математического общества II степени награждены профессора Айсагалиев С.А., Муратбеков М.Б., Оспа-

нов К.Н., Темиргалиев Н.Т. (за 2 публикации в 2012 году). Дипломом Казахстанского математического общества III степени награждены молодые ученые, имеющие по одной публикации в 2012 году: Абдыкалыков А.К., Бакибаев Т., Джумабаева А., Кунгожин А., Мажитова А.Д., Манат М., Темирханова А.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении нужно отразить актуальность, новизну, имеющиеся результаты по теме представленной работы. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1 Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2 В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.
3 Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Литература

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1988. – 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. (или №) 4. – С. 107-159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №4 (46), 2012

Адрес редакции:
Институт математики и математического моделирования МОН РК,
ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 21.12.2012 г.
Тираж 300 экз. Объем 159 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

г. Алматы
пр. Достык, 85а, офис 309б
Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88
e-mail: la_creation@inbox.ru,
web-site: http://www.lacreation.kz