ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

2012, том 12, № 2 (44)

Институт математики МОН РК
Алматы

ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2012, том 12, № 2 (44)

Институт математики МОН РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, № 2 (44), 2012

Периодичность — 4 номера в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 12 **№ 2 (44)** **2012**

CONTENTS

Volume 12 **No. 2 (44)** **2012**

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 5 – 22*

УДК 517.938

ПРИНЦИП ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Айсагалиев, Ж.Х. Жунусова, М.Н. Калимолдаев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: mnk@ipic.kz

Предлагается метод решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями при наличии фазовых ограничений. Основой метода является принцип погружения, основанный на общем решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода, который позволяет свести исходную краевую задачу к специальной задаче оптимального управления.

Введение

Построение решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений с локальными и нелокальными связями, а также фазовыми ограничениями относится к одной из малоисследованных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. Известные методы исследования краевых задач относятся к случаю с локальными связями без фазовых ограничений [1]. Во многих задачах на практике исследуемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

Keywords: *Integral equation, immersion principle, optimal control, gradient of functional, convex functional, minimizing sequences*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15

в заданной области фазового пространства системы. Вне указанной области процесс описывается совершенно другими уравнениями, либо исследуемый процесс не существует. В частности, такие явления имеют место в исследованиях динамики ядерных и химических реакторов (вне заданной области реакторы не существуют). Поэтому исследования краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми ограничениями являются актуальными.

Данная работа является продолжением исследования по управляемости и оптимальному управлению процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, на основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого порядка, изложенного в [2]. Принцип погружения для решения задачи управляемости процессов приведен в работе [3]. В работе [4] на основе принципа погружения решена задача оптимального быстродействия. Решения задач управляемости и оптимального быстродействия для процессов, описываемых параболическим уравнением, изложены в [5]. Оптимальное управление процессов с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений изложено в [6]. Более полную информацию о работах по теории управляемости нелинейных дифференциальных уравнений можно найти в [3-5].

Суть предлагаемого метода состоит в том, что на первом этапе исследования путем введения фиктивного управления исходная задача погружается в задачу управляемости. Далее, существование решения исходной задачи и построение ее решения осуществляется путем решения задачи оптимального управления специального вида. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решения исходной краевой задачи являются предельными точками минимизирующих последовательностей. Методы решения задачи управляемости динамических систем можно найти в [7].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1) \in S \subset R^{2n} \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t): \quad G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \le F(x,t) \le \delta(t), \;\; t \in I\}. \tag{3}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ — заданные матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n \times n$, $n \times m$ соответственно, $\mu(t)$, $t \in I$, — заданная n-мерная вектор-функция с кусочно-непрерывными элементами, m-мерная вектор-функция $f(x,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $(x,t) \in R^n \times I$ и удовлетворяет условиям

$$|f(x,t) - f(y,t)| \le l\,|x-y|\,, \;\; \forall (x,t),(y,t) \in R^n \times I, \;\; l = const > 0,$$

$$|f(x,t)| \le c_0\,|x| + c_1(t), \;\; c_0 = const \ge 0, \;\; c_1(t) \in L_1(I, R^1),$$

S — заданное выпуклое замкнутое множество. Функция $F(x,t) = (F_1(x,t), ..., F_r(x,t))$, $t \in I, -r$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности аргументов, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_r(t)), \delta(t) = (\delta_1(t), ..., \delta_r(t))$, $t \in I$, — заданные непрерывные функции.

Заметим, что

1) если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, т.е. уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x,t) + \mu(t) = \overline{f}(x,t), \;\; t \in I. \tag{4}$$

Поэтому ниже полученные результаты остаются верными для уравнения вида (4) при условиях (2), (3);

2) если $f(x,t) = x + \mu_1(t)$ (либо $f(x,t) = C(t)x + \mu_1(t)$), то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)x + \overline{\mu}(t) = \overline{A}(t)x + \overline{\mu}(t), \;\; t \in I, \tag{5}$$

где $\overline{A}(t) = A(t) + B(t)$, $\overline{\mu}(t) = B(t)\mu_1(t) + \mu(t)$. Отсюда следует, что уравнение (5) является частным случаем уравнения (1).

Ставятся следующие задачи.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1)-(3).

Задача 2. Построить решение краевой задачи (1)-(3).

Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0, x_1) \in S$ такой, что решение системы (1), исходящее из точки

x_0 в момент времени t_0, проходит через точку x_1 в момент времени t_1, при этом вдоль решения системы (1) для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (13). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / H_j(x_0, x_1) \leq 0,\ j = \overline{1, p}\,;$$

$$< a_j, x_0 > + < b_j, x_1 > - d_j = 0,\ \ j = p + \overline{1, s}\},$$

где $H_j(x_0, x_1)$, $j = \overline{1, p}$, — выпуклые функции относительно переменных (x_0, x_1), $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$; $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $d_j \in R^1$, $j = \overline{p+1, s}$, — заданные векторы и числа, $< .,. >$ — скалярное произведение.

Интегральное уравнение. Основой предлагаемого метода решения задач (1), (2) являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$K_u = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) u(t) dt = a, \tag{6}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, — известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированном t_0, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ — искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $a \in R^n$ — заданный n-мерный вектор.

Теорема 1. *Интегральное уравнение* (6) *при любом фиксированном* $a \in R^n$ *имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) dt \tag{7}$$

порядка $n \times n$ *является положительно определенной, где* * *— знак транспонирования.*

Теорема 2. *Пусть матрица* $C(t_0, t_1)$ *— положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения* (6) *имеет вид*

$$u(t) = K^*(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) a + v(t) -$$

$$- K^*(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) v(t) dt,\ \ t \in I, \tag{8}$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *— произвольная функция,* $a \in R^n$ *— любой вектор.*

Доказательства теорем 1, 2 приведены в работе [2]. Приложение теорем 1, 2 для решения задачи управляемости и оптимального управления изложены в [3-6].

Принцип погружения. Наряду с дифференциальным уравнением (1) с краевыми условиями (2) рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in I, \tag{9}$$

$$y(t_0) = x_0, \quad y(t_1) = x_1, \quad (x_0, x_1) \in S, \tag{10}$$

$$u(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{11}$$

Легко убедиться в том, что управление $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, которое переводит траекторию системы (9) из любого начального состояния x_0 в любое желаемое состояние x_1, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)u(t)dt = a, \tag{12}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A(t)\eta$,

$$a = a(x_0, x_1) = \Phi(t_0, t_1)[x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0] - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt.$$

Как следует из (6) и (12), $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t)$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_1(t, x_0, x_1) = C(t)a, \quad C(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1),$$

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt,$$

$$W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t),$$

$$\lambda_2(t,x_0,x_1) = C_1(t)x_0 + C_2(t)x_1 + \mu_1(t),$$

$$C_1(t) = \Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1),$$

$$C_2(t) = \Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\mu_1(t) = \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\mu(\tau)d\tau - C_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)\mu(t)dt,$$

$$N_1(t) = -C(t)\Phi(t_0,t_1),\ \ N_2(t) = -C_2(t),\ \ t\in I.$$

Теорема 3. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$*. Управление* $u(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ *переводит траекторию системы* (9) *из любой начальной точки* $x_0\in R^n$ *в любое конечное состояние* $x_1\in R^n$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &u(t)\in U = \{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)/u(t) = v(t) + \lambda_1(t,x_0,x_1)+\\ &+N_1(t)z(t_1,v),\ \ t\in I,\ \ \forall v(\cdot)\in L_2(I,R^m)\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где функция $z(t) = z(t,v),\ \ t\in I$*, является решением дифференциального уравнения*

$$\dot z = A(t)z + B(t)v(t),\ \ \mathrm{z}(t_0) = 0,\ \ \nu(\cdot)\in L_2(I,R^m). \tag{14}$$

Решение дифференциального уравнения (9)*, соответствующее управлению* $u(t)\in U$*, определяется по формуле*

$$y(t) = z(T) + \lambda_2(t,x_0,x_1) + N_2(t)z(t_1,v),\ \ t\in I. \tag{15}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, для существования решения интегрального уравнения (12) необходимо и достаточно, чтобы $W(t_0,t_1) = C(t_0,t_1) > 0$, где $K(t_0,t) = \Phi(t_0,t)B(t)$.

Теперь соотношение (8) запишется в виде (13). Решение системы (9), соответствующее управлению (13), определяется по формуле (15), где $z(t) = z(t,v),\ \ t\in I,$ — решение дифференциального уравнения (14). Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть матрица* $W(t_0, t_1) > 0$. *Тогда краевая задача* (1)-(3) *равносильна следующей задаче:*

$$u(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v) = f(y(t), t), \ \ t \in I, \tag{16}$$

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{17}$$

$$y(t) \in G(t), \ \ (x_0, x_1) \in S, \tag{18}$$

где $y(t), \ \ t \in I$, *определяется по формуле* (15), $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ *— произвольная функция.*

Доказательство. Доказательство леммы следует из (1)-(3) и равенств (13)-(15). При выполнении соотношений (16)-(18) $y(t) = x(t), \ \ t \in I$, следовательно, $x(t) \in G(t), \ \ t \in I$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J(v, w, x_0, x_1) = \textstyle\int_{t_0}^{t_1} [|u(t) - f(y(t), t)|^2 + |w(t) - F(y(t), t)|^2] dt = \\ = \textstyle\int_{t_0}^{t_1} F_0(t, v(t), w(t), x_0, x_1, z(t), z(t_1)) dt \to \inf \end{aligned} \tag{19}$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ t \in I, \tag{20}$$

$$v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ (x_0, x_1) \in S, \tag{21}$$

$$w(t) \in W(t) = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^r) / \gamma(t) \le w(t) \le \delta(t), \ \ t \in I\}, \tag{22}$$

где $y(t), \ \ t \in I$, определяется по формуле (15).

Обозначим

$$X = L_2(I, R^m) \times W \times S \subset H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^r) \times R^n \times R^n,$$

$$J_* = \inf_{\xi \in X} J(\xi), \ \xi = (v, w, x_0, x_1) \in X, \ \ X_* = \{\xi_* \in X / J(\xi_*) = 0\}.$$

Теорема 4. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная, $X_* \neq \emptyset$. Для того, чтобы краевая задача* (1)-(3) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $J(\xi_*) = 0$, где $\xi_* = (v_*, w_*, x_0^*, x_1^*) \in X$ — оптимальное управление для задачи* (19)-(22).

Если $J_* = J(\xi_*) = 0$, то функция

$$x_*(t) = z(t, v_*) + \lambda_2(t, x_0^*, x_1^*) + N_2(t)z(t_1, v_*), \quad t \in I, \tag{23}$$

— решение краевой задачи (1)-(3). *Если $J_* > 0$, то краевая задача* (1)-(3) *не имеет решения.*

Доказательство. Необходимость. Пусть краевая задача (1)-(3) имеет решение. Тогда, как следует из леммы 1, значение $u(t) = f(y(t), t), \quad t \in I$, где $u(t)$, $t \in I$, определяется по формуле (16). Включение $y(t) \in G(t)$, $t \in I$, равносильно тому, что $w(t) = F(y(t), t)$, где $\gamma(t) \leq w(t) = F(y(t), t) \leq \delta(t)$. Следовательно, $J(\xi_*) = 0$. Заметим, что значение $J(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in X$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $J(\xi_*) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $u(t) = f(y(t), t), \quad w(t) = F(y(t), t), \quad t \in I$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Переход от краевой задачи (1)-(3) к задаче оптимального управления (19)-(22) называется принципом погружения.

Отметим, что 1) задача (19)-(22) является задачей оптимального управления со свободным правым концом траектории в расширенном пространстве управлений; 2) в отличие от стандартных функционалов (Лагранжа, Майера, Больца) подынтегральная функция F_0 зависит от вектора $z(t_1)$; 3) независимо от того, что исходная краевая задача будет линейной или нелинейной, дифференциальное уравнение в задаче (19)-(22) является линейным; 4) функционал $J(\xi)$, $\xi \in X$, ограничен снизу, т.е. $J(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in X$; 5) поскольку заранее невозможно угадать: какое будет значение J_*, то положительный ответ на существование решения краевой задачи (1)-(3) может быть получен после решения задачи оптимального управления (19)-(22).

<u>Оптимизационная задача</u>. Рассмотрим решение задачи оптимального управления (19)-(22), где

$$F_0(t, v, w, x_0, x_1, z, z(t_1)) = |u(t) - f(y(t), t)|^2 + |w(t) - F(y(t), t)|^2 =$$
$$= F_0(t, q), \quad q = (\xi, z, z(t_1)).$$

Теорема 5. *Пусть матрица* $W(t_0,t_1) > 0$, *функция* $F_0(t,q)$ *определена и непрерывно дифференцируема по* $q = (\xi, z, z(t_1))$ *и выполнены следующие условия:*

$$|F_{0z}(t,\xi+\Delta\xi, z+\Delta z, z(t_1)+\Delta z(t_1)) - F_{0z}(t,\xi,z,z(t_1))| \le$$
$$\le L(|\Delta z| + |\Delta z(t_1)| + |\Delta\xi|),$$
$$\left|F_{0\overline{z}}(t,\xi+\Delta\xi, z+\Delta z, z(t_1)+\Delta z(t_1)) - F_{0z(t_1)}(t,\xi,z,z(t_1))\right| \le$$
$$\le L(|\Delta z| + |\Delta z(t_1)| + |\Delta\xi|),$$
$$|F_{0\xi}(t,\xi+\Delta\xi, z+\Delta z, z(t_1)+\Delta z(t_1)) - F_{0\xi}(t,\xi,z,z(t_1))| \le$$
$$\le L(|\Delta z| + |\Delta z(t_1)| + |\Delta\xi|)$$
$$\forall \xi \in R^{m+r+2n}, \ \ \forall z \in R^n, \ \ \forall z(t_1) \in R^n.$$

Тогда функционал (19) *при условиях* (20)-(22) *непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке* $\xi \in X$, *причем*

$$J'(\xi) = (J_1'(\xi), J_2'(\xi), J_3'(\xi), J_4'(\xi)) \in H,$$

где

$$J_1'(\xi) = \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v} - B^*\Psi(t), J_2'(\xi) = \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v}, \tag{24}$$

$$J_3'(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial x_0} dt, J_4'(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial x_1} dt,$$

$t \in I$, $\ q = q(t) = (v(t), w(t), x_0, x_1, z(t), z(t_1))$, $\ z(t)$ *— решение дифференциального уравнения* (20), *а функция* $\Psi(t)$ *— решение сопряженной системы*

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z} - A^*(t)\Psi(t), \quad \Psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z(t_1)} dt. \tag{25}$$

Кроме того, градиент $J'(\xi)$, $\xi \in X$, *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|J'(\xi_1) - J'(\xi_2)\right\| \le K \left\|\xi_1 - \xi_2\right\|, \ \ \forall \xi_1, \xi_2 \in X, \tag{26}$$

где $K > 0$ — постоянная Липшица.

Доказательство. Пусть $\xi, \xi+\Delta\xi \in X$, где $\Delta\xi = (\Delta v, \Delta w, \Delta x_0, \Delta x_1)$. Можно показать, что $\Delta\dot{z} = A(t)\Delta z + B(t)\Delta v, \Delta z(t_0) = 0, \ \ t \in I$, а приращение функционала

$$\Delta J = J(\xi + \Delta\xi) - J(\xi) =< J_1'(\xi), \Delta v >_{L_2} + < J_2'(\xi), \Delta w >_{L_2} +$$

$$+ < J_3'(\xi), \Delta x_0 >_{R^{nR}} + < J_4'(\xi), \Delta x_1 >_{R^{nn}} + R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

где $|R_1 + R_2 + R_3 + R_4| = |R| \le C_* \left\|\Delta\xi\right\|^2, \ \ C_* = const > 0, \ \ \frac{|R|}{\|\Delta\xi\|_X} \to 0$ при $\|\Delta\xi\| \to 0$. Отсюда следует утверждение теоремы 5. Теорема доказана.

На основе формул (24)-(26) строим последовательность

$$\{\xi_n\} = \{v_n(t), w_n(t), x_0^n, x_1^n\} \subset X$$

по алгоритму:

$$v_{n+1} = v_n - x_n J_1'(\xi_n), w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n J_2'(\xi_n)], \tag{27}$$

$$x_0^{n+1} = P_S[x_0^n - \alpha_n J_3'(\xi_n)], x_1^{n+1} = P_S[x_1^n - \alpha_n J_4'(\xi_n)],,$$

где $0 < x_n \le \frac{2}{K+2\varepsilon}, \ \ \varepsilon > 0, \ \ P_v[\cdot]$ — проекция точки на множестве V.

Введем следующие множества:

$$\Lambda_0 = \{\xi \in X / J(\xi) \le J(\xi_0)\}, X_{**} = \{\xi_{**} \in X / J(\xi_{**}) = \inf_{\xi \in X} J(\xi) = J_*.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5, последовательность $\{\xi_n\} \subset X$ определяется по формуле (27). Тогда*

$$1) J(\xi_n) - J(\xi_{n+1}) \ge \varepsilon \left\|\xi_n - \xi_{n+1}\right\|^2, \ \ n = 0, 1, 2, ..., \tag{28}$$

$$2) \lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi_{n+1}\| = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Так как ξ_{n+1} является проекцией точки $\xi_n - \alpha_n J'(\xi_n)$, то $< \xi_{n+1} - \xi_n + \alpha_n J'(\xi_n), \ \ \xi_n - \xi_{n+1} >_H \ge 0 \ \ \forall \xi \in X$. Отсюда, с учетом того, что $J(\xi) \in C^{1,1}(X)$, получим $J(\xi_n) - J(\xi_{n+1}) \ge (\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2}) \left\|\xi_n - \xi_{n+1}\right\|^2 \ge$

$\varepsilon \|\xi_n - \xi_{n+1}\|^2$. Следовательно, числовая последовательность $\{J(\xi_n)\}$ строго убывает и верно неравенство (28). Равенство (29) следует из ограниченности снизу функционала $J(\xi),\ \ \xi \in X$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5, множество Λ_0 ограничено, функция $F_0(t,q)$ выпуклая по переменной $q \in R^{n+r+4n}$. Тогда*

1. *множество Λ_0 слабо бикомпактно, $X_{**} \neq \emptyset$;*

2. *последовательность $\{\xi_n\}$ является минимизирующей, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} J(\xi_n) = J_* = \inf_{\xi\in X} J(\xi);$$

3. *последовательность $\{\xi_n\} \subset \Lambda_0$ слабо сходится к точке $\xi_{**} \in X_{**}$;*

4. *справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$0 \leq J(\xi_n) - J_* \leq \frac{C_1}{n},\ \ C_1 = const > 0,\ \ n = 1,2,...,;$$

5. *краевая задача* (1)-(3) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} J(\xi_n) = J_* = \inf_{\xi\in X} J(\xi) = J(\xi_{**}) = 0.$$

Доказательство. Так как $F_0(t,q)$ выпукла по q, то функционал $J(\xi),\ \ \xi \in X$, является выпуклым. Первое утверждение следует из того, что Λ_0 — ограниченное, выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахова пространства H. Множество X_{**} непусто из-за слабой полунепрерывности снизу функционала $J(\xi)$ на слабо бикомпактном множестве Λ_0. Второе утверждение следует из оценки $J(\xi_n) - J(\xi_{n+1}) \geq \varepsilon \|\xi_n - \xi_{n+1}\|^2,\ \ n = 0,1,2,...$, и выпуклости функционала $J(\xi)$ на Λ_0. Третье утверждение следует из слабой бикомпактности множества Λ_0, где $\{\xi_n\} \subset \Lambda_0$. Оценка скорости сходимости следует из неравенств $J(\xi_n) - J(\xi_{n+1}) \geq \varepsilon \|\xi_n - \xi_{n+1}\|^2$, $J(\xi_n) - J(\xi_{**}) \leq C_2 \|\xi_n - \xi_{n+1}\|^2,\quad C_2 = const > 0$. Последнее утверждение следует из теоремы 4. Теорема доказана.

Покажем на одном примере полученные выше результаты.

Пример. Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{\xi} + \xi = cost, \ \ 0 < t < \pi, \ \ \xi(0) = 0, \ \ \xi(\pi) = 0, \tag{30}$$

где фазовое ограничение задается следующим образом:

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le \xi(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \ \ t \in I = [0, \pi]. \tag{31}$$

Обозначая $\xi = x_1, \ \dot{\xi} = \dot{x}_1 = x_2$, уравнение (30) запишем в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + \overline{B}x + \mu(t), \ \ x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} \in S_0,$$

$$x(\pi) = \overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \in S_1 \tag{32}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \mu(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix},$

$$x_0 \in S_0 = \{(x_1(0), x_2(0) \in R^2 / x_1(0) = 0, \ \ x_2(0) = \delta \in R^1\},$$

$$\overline{x}_1 \in S_1 = \{(x_1(\pi), x_2(\pi) \in R^2 / x_1(\pi) = 0, \ \ x_2(\pi) = \beta \in R^1\}.$$

Фазовое ограничение (31) имеет вид

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \le x_1(t) \le \frac{0,44t}{\pi}, \ \ t \in I. \tag{33}$$

Принцип погружения. Линейно управляемая система (см. (9), (10)) запишется так:

$$\dot{y} = Ay + Bw(t) + \mu(t), \ \ y(0) = x_0, \ \ y(\pi) = \overline{x}_1, t \in I = [0, \pi], \tag{34}$$

$$(\delta, \beta) \in R^2, w(\cdot) \in L_2(I, R'),$$

где B и линейная однородная система $\dot{\eta} = A_1\eta$ имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \ \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \ \ \dot{\eta}_1 = \eta_2, \ \ \dot{\eta}_2 = 0.$$

Фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\eta} = A\eta$ определяется по формуле:

$$\theta(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta^{-1}(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau).$$

Вектор

$$a = \Phi(0,\pi)\overline{x}_1, \quad -x_0 - \int_0^\pi \Phi(0,t)\mu(t)dt = \begin{pmatrix} -\pi\beta & -2 \\ \beta & -\delta \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$W(0,\pi) = \int_0^\pi \Phi(0,t)BB^*\Phi^*(0,t)dt = \begin{pmatrix} \pi^3/3 & -\pi^2/2 \\ -\pi^2/2 & \pi \end{pmatrix} > 0,$$

$$W^{-1}(0,\pi) = \begin{pmatrix} 12/\pi^3 & 6/\pi^2 \\ 6/\pi^2 & 4/\pi \end{pmatrix},$$

$$W(0,t) = \begin{pmatrix} t^3/3 & -t^2/2 \\ -t^2/2 & t \end{pmatrix}, \quad W(t,\pi) = \begin{pmatrix} \pi^3/3 - t^3/3 & -\pi^2/2 + t^2/2 \\ -\pi^2/2 + t^2/2 & \pi - t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$d_1(t,x_0,\overline{x}_1) = B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,\pi)a = (\frac{12t-6\pi}{\pi^3}(-\pi\beta-2), \frac{6t-4\pi}{\pi^2}(\beta-\delta)),$$

$$N_1(t) = -B^*\Phi^*(0,t)W^{-1}(0,\pi)\Phi(0,\pi) = (\frac{-12t+6\pi}{\pi^3}, \frac{6t-2\pi}{\pi^2}),$$

$$C_1(t)x_0 = \Phi(t,0)W(t,\pi)W^{-1}(0,\pi)x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6\delta}{\pi^2}(\frac{\pi^3}{3} + \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^{2t}}{2}) + \frac{4\delta}{\pi}(-\frac{\pi^2}{2} - \frac{t^2}{2} + \pi t) \\ \frac{6\delta}{\pi^2}(-\frac{\pi^2}{2} - \frac{t^2}{2} + \pi t) + \frac{4\delta}{\pi}(\pi - t) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \Phi(t,0)W(0,t)W^{-1}(0,\pi)\Phi(0,\pi) = \begin{pmatrix} -\frac{2t^3}{\pi^3} + \frac{3\pi^2}{\pi^2} & \frac{t^3}{\pi^2} - \frac{t^2}{\pi} \\ -\frac{6t^2}{\pi^3} + \frac{6t}{\pi^2} & \frac{3t^2}{\pi^2} - \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix},$$

$$C_2(t)\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} \beta(\frac{t^3}{\pi^2} - \frac{t^2}{\pi}) \\ \beta(\frac{3t^2}{\pi^2} - \frac{2t}{\pi}) \end{pmatrix}, \quad \Phi(t,0)\int_0^t \Phi(0,\tau)\mu(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$-C_2(t)\int_0^\pi \Phi(\pi,t)\mu(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{4t^3}{\pi^3} - \frac{6t^2}{\pi^2} \\ \frac{12t^2}{\pi^3} - \frac{12t}{\pi^2} \end{pmatrix}, \quad \mu_2(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t + \frac{4t^3}{\pi^3} - \frac{6t^2}{\pi^2} \\ \sin t + \frac{12t^2}{\pi^3} - \frac{12t}{\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Как следует из теоремы 3, уравнение

$$\begin{gathered} w(t) = v(t) + (-\pi\beta - 2)\tfrac{(12t-6\pi)}{\pi^3} + \tfrac{(6t-4\pi)}{\pi^2}(\beta-\delta) + \\ + \tfrac{(-12t+6\pi)}{\pi^3} z_1(\pi,v) + \tfrac{(6t-4\pi)}{\pi^2} z_2(\pi,v), \quad t \in I = [0,\pi], \end{gathered} \tag{35}$$

где $z(t,v), \ \ t \in I = [0,\pi]$, — решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = Az + Bv(t), \ \ z(0) = 0, \ \ v(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{36}$$

Решение дифференциального уравнения (34), соответствующее управлению (35), равно

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = z(t,v) + \lambda_2(t, x_0, \overline{x}_1) + N_2(t)z(\pi,v) = z(t,v) +$$

$$+C_1(t)x_0 + C_2(t)\overline{x}_1 + \mu_2(t), \ \ t \in I = [0,\pi],$$

где

$$\begin{gathered} y_1(t) = z_1(t,v) + \tfrac{6\delta}{\pi^2}(\tfrac{\pi^3}{3} + \tfrac{t^3}{6} - \tfrac{\pi^2 t}{2}) + \\ + \tfrac{4\delta}{\pi}(-\tfrac{\pi^2}{2} - \tfrac{t^2}{2} + \pi t) + \beta(\tfrac{t^3}{\pi^2} - \tfrac{t^2}{\pi}) + \\ +1 - \cos t + (\tfrac{4t^3}{\pi^3} - \tfrac{6t^2}{\pi^2}) + (\tfrac{2t^3}{\pi^3} - \tfrac{3t^2}{\pi^2})z_1(\pi) + (\tfrac{-t^3}{\pi^2} + \tfrac{t^2}{\pi})z_2(\pi), \end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered} y_2(t) = z_2(t,v) + \tfrac{6\delta}{\pi^2}(-\tfrac{\pi^2}{2} - \tfrac{t^2}{2} + \pi t) + \tfrac{4\delta}{\pi}(\pi - t) + \beta(\tfrac{3t^2}{\pi^2} - \tfrac{2t}{\pi}) - \\ -\sin t + (\tfrac{12t^2}{\pi^3} - \tfrac{12t}{\pi^2}) + (\tfrac{6t^2}{\pi^3} - \tfrac{6t}{\pi^2})z_1(\pi) + (\tfrac{-3t^2}{\pi^2} + \tfrac{2t}{\pi})z_2(\pi), \ \ t \in I. \end{gathered} \tag{38}$$

Заметим, что $y_1(0) = 0,\ \ y_2(0) = \delta,\ \ y_1(\pi) = 0,\ \ y_2(\pi) = \beta$.

<u>Оптимизационная задача</u>. Поскольку для данного примера $f = y_1$, то оптимизационная задача (22)-(25) запишется в виде: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J(v,p,\delta,\beta) &= \textstyle\int_0^\pi [(w't) - y_1(t)^2 + \left|p(t - y_1(t)^2\right| dt = \\ &= \textstyle\int_0^\pi F_0(t, v(t), p(t)), \delta, \beta, z(t), z(\pi)))dt \to \inf \end{aligned} \tag{39}$$

при условиях (36), где

$$\begin{gathered} v(\cdot) \in L_2(I, R^1), p(t) \in V(t) = \\ = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^1)/\tfrac{0{,}37t}{\pi} - 0{,}37 \le p(t) \le \tfrac{0{,}44t}{\pi},\ \ t \in I\}, \end{gathered} \tag{40}$$

$$\delta \in R^1,\ \ \beta \in R^1.$$

Частные производные

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial v} = 2[w(t) - y_1(t)],\ \ \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial p} = 2[p(t) - y_1(t)],$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial \delta} = 2[w(t) - y_1(t)]\ \ [\frac{-6t+4\pi}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^2}(\frac{\pi^3}{3} + \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{2}) - \frac{4}{\pi}(-\frac{\pi^2}{2} - \frac{t^2}{2} + \pi t)];$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial \beta} = 2[w(t) - y_1(t)]\ \ [\frac{-\pi(12t - 6\pi)}{\pi^3} + \frac{6t - 4\pi}{\pi^2} - (\frac{t^3}{\pi^2} - \frac{t^2}{\pi})];$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_1} = -2[w(t) - y_1(t)] - 2[p(t) - y_1(t)],\ \ \frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_2} = 0;$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_1(\pi)} = 2[w(t) - y_1(t)]\ [\frac{-12t + 6\pi}{\pi^3} - (\frac{2t^3}{\pi^3} - \frac{3t^2}{\pi^2})] + 2[p(t) - y_1(t)][-(\frac{2t^3}{\pi^3} - \frac{3t^2}{\pi^2})],$$

$$\frac{\partial F_0(t,q)}{\partial z_2(\pi)} = 2[w(t) - y_1(t)]\ [\frac{6t - 2\pi}{\pi^2} - (\frac{-t^3}{\pi^2} + \frac{t^2}{\pi})] + 2[p(t) - y_1(t)][-(\frac{t^3}{\pi^2} + \frac{t^2}{\pi})].$$

Легко убедиться в том, что функционал (39) при условиях (36), (40) является выпуклым.

Минимизирующие последовательности. Для данной задачи управление $\theta = (v, p, \delta, \beta) \in X$. Выбираем начальное управление $\theta_0 = (v_0(t), p_0(t), \delta_0, \beta_0) \in X$, где $v(\cdot) \in L_2(I, R^1)$, $p_0(t) \in V(t)$, $\delta_0 \in R^1$, $\beta_0 \in R^1$. В частности, $v_0(t) \equiv 1$, $p_0(t) = \frac{0{,}405t}{\pi} - 0{,}185 \in V(t)$, $\delta_0 = -\frac{\pi}{8}$, $\beta_0 = -\frac{\pi}{8}$. Находим решение дифференциального уравнения $\dot{z} = Az + Bv(t)$ при $v = v_0(t)$, т. е. $\dot{z}_{10} = z_{20}$, $\dot{z}_{20} = v_0(t)$, $z_{10}(0) = 0$, $z_{20}(0) = 0$. Итак, известны $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $t \in I$. Тогда $q_0 = (v_0, p_0, \delta_0, \beta_0, z_0(t), z_0(\pi))$, $z_0(t) = (z_{10}(t), z_{20}(t))$.

Вычислим частные производные $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial v}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial p}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \delta}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial \beta}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{10}(\pi)}$, $\frac{\partial F_0(t,q_0)}{\partial z_{20}(\pi)}$. Следующие приближения:

$$v_1 = v_0 - \alpha_0 J_1'(\theta_0), p_1 = P_V[p_0 - \alpha_0 J_2'(\theta_0)], \delta_1 = \delta_0 - \alpha_0 J_3'(\theta_0), \beta_1 = \beta_0 - \alpha_0 J_4'(\theta_0),$$

где

$$J_1'(\theta_0) = \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial v} - B * \Psi_0(t), J_2'(\theta_0) = \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial p},$$

$$J_3'(\theta_0) = \int_0^\pi \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial \delta} dt, J_4'(\theta_0) = \int_0^\pi \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial \beta} dt,$$

$$\alpha_n = const = \frac{1}{K} > 0, n = 0, 1, 2, ...$$

Здесь $\Psi_0(t) = (\Psi_{10}(t), \Psi_{20}(t))$, $t \in I$, — решение сопряженной системы

$$\dot{\Psi}_{10} = \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial z_{10}} + \Psi_{20}, \dot{\Psi}_{20} = \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial z_{20}} =$$

$$= 0, \Psi_{10}(\pi) = -\int_0^\pi \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial z_{10}(\pi)} dt, \Psi_{20}(\pi) = -\int_0^\pi \frac{\partial F_0(t, q_0)}{\partial z_{20}(\pi)} dt.$$

В результате находим $\theta_1 = (v_1, p_1, \delta_1, \beta_1)$. Далее повторяется процесс построения $\{\theta_n\}$ с начальной точкой θ_1.

Так как функционал (39) при условиях (36), (40) является выпуклым, то последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей. Можно показать, что $v_n \to v_*$, $p_n \to p_*$, $\delta_n \to \delta_*$, $\beta_n \to \beta_*$ при $n \to \infty$, значение $J(v_*, p_*, \delta_*, \beta_*) = 0$, где $v_*(t) = \frac{t}{2} \sin t - \frac{\pi}{4} \sin t$, $p_*(t) = \frac{t}{2} \sin t - \frac{\pi}{4} \sin t$, $t \in I$, $\delta_* = -\frac{\pi}{4}$, $\beta_* = -\frac{\pi}{4}$. Функции

$$z_1(v_*) = \cos t - 1 + \frac{1}{2} t \sin t - \frac{\pi}{4} \sin t + \frac{\pi}{4} t, \ \ t \in I,$$

$$z_2(v_*) = -\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) - \frac{\pi}{4} \cos t + \frac{\pi}{4}, \ \ t \in I.$$

Значения $z_1(\pi, v_*) = \frac{\pi^2}{4} - 2, \ \ z_2(\pi, v_*) = 0$. Решение исходной задачи

$$x_{1*}(t) = y_{1*}(t) = \frac{1}{2} t \sin t - \frac{\pi}{4} \sin t,$$

$$x_{2*}(t) = y_{2*}(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \cos t - \frac{\pi}{4} \cos t + \frac{\pi}{4}, \ \ t \in I,$$

$$\frac{0,37t}{\pi} - 0,37 \leq x_{1*}(t) \leq \frac{0,44t}{\pi}, \ \ t \in I = [0, \pi],$$

$$x_0 = (0; -\frac{\pi}{4}), \ \ \overline{x}_0 = (0; -\frac{\pi}{4}), \ \ \xi(t) = x_{1*}(t), \ \ t \in I.$$

Цитированная литература

[1]. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г., *Дифференциальные уравнения*, М.: Наука, 1980.

[2]. Айсагалиев С.А., *Общее решение одного класса интегральных уравнений*, Математический журнал, Институт математики МОН РК, 2005, Т. 5, № 4, С. 7 – 13.

[3]. Айсагалиев С.А., *Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения, 1991, Т. 27, № 9, С. 1476 – 1486.

[4]. Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., *Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями*, Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2010, № 1, С. 30 – 55.

[5]. Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., *Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением*, Сибирский математический журнал, 2012, Т. 53, № 1, С. 20 – 36.

[6]. Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., *Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями*, Дифференциальные уравнения, 2012, Т. 48, № 6, С. 826 – 838.

[7]. Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С., *Методы решения краевых задач*, 2002, 348 с.

Статья поступила в редакцию 12.03.2012 г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 23 – 42*

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ СБОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ТРЕЩИНЕ

Л. А. Алексеева, Б. Т. Сарсенов

Институт математики МОН РК
050010, Алматы, ул.Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz, sarsenov@imail.ru

В настоящей работе рассматривается контактная нестационарная краевая задача: упругое полупространство, на границе которого находится упругое тело с условиями жесткого контакта на границе раздела сред. Исследуется процесс дифракции и преломления волн, порождаемых сбросом напряжений на трещине в упругом полупространстве.

Исследование процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре и их воздействия на наземные сооружения относится к актуальным проблемам геофизики, сейсмологии и сейсмостойкого строительства. Характерным для землетрясений является возникновение в земной коре под действием тектонических напряжений глубинных трещин. При этом происходит скачкообразный сброс напряжений на трещине, порождающий нестационарные упругие волны, которые, дифрагируя на земной поверхности, порождают поверхностные волны, разрушительные для

Keywords: *Elastic medium, crack, dynamics, speed propagation, stress propagation.*
2010 Mathematics Subject Classification: 74B05, 74H15

наземных сооружений. Здесь разработана математическая модель для изучения таких явлений.

Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т. Тарабриным [1]. В настоящей работе этот метод развит для решения контактных задач взаимодействия упругих тел с угловыми точками в условиях плоской деформации [2,3]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [4].

Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности и упругого тела и дифракционные картины полей скоростей и напряжений при отражении и преломлении ударных волн. Исследовано влияние параметров массива, глубины трещины и характера возникающих ударных волн на напряженно-деформированное состояние среды и упругого тела. Также изучено напряженно-деформированное состояние упругого тела (сооружения) в зависимости от расстояния до эпицентра.

1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим составную неоднородную упругую среду в условиях плоской деформации: полупространство $x_1 \geq 0$ однородной изотропной упругой среды (среда D_1) с плотностью ρ_1 и коэффициентами Ламе λ_1 и μ_1 и поверхностное включение (среда D_2 — изотропное упругое тело с высотой d_1 и шириной $2d_2$) с плотностью ρ_2 и коэффициентами Ламе λ_2, μ_2, (рис.1).

Предполагается, что до начального момента времени среда находится в состоянии покоя:

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0, \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2), \tag{1}$$

а при $t \geq 0$ происходит сброс напряжений на горизонтальной трещине S, которая расположена на глубине L $(x_1 = L,\ |x_2| \leq d)$.

Границы полупространства и включения свободны от внешних нагрузок:

$$\sigma_{1j}^{(1)} = 0\ (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0,\ |x_2 - d_3| > d_2, \tag{2}$$

$$\sigma_{1j}^{(2)} = 0\ (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = -d_1,\ |x_2 - d_3| \leq d_2, \tag{3}$$

$$\sigma_{2j}^{(2)} = 0\ (j = 1, 2) \quad \text{при } |x_2 - d_3| = d_2,\ -d_1 \leq x_1 \leq 0, \tag{4}$$

где d_3 – горизонтальная координата центра масс упругого включения (см. рис.1).

Условия на контактной границе пространства и включения отвечают требованиям полного сцепления (жесткий контакт):

$$v_j^{(1)} = v_j^{(2)},\ \sigma_{1j}^{(1)} = \sigma_{1j}^{(2)}\ (j = 1, 2) \quad \text{при } x_1 = 0, |x_2 - d_3| \leq d_2. \tag{5}$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}(x,t)$ — компоненты тензора напряжений k-ой среды в точке $x = (x_1, x_2)$ в момент времени t, $v_j^{(k)}(x,t)$ — компоненты скоростей перемещений этих сред.

Так как на бесконечности отсутствуют источники возмущений, то очевидным является требование:

$$u_j \to 0, \quad \sigma_{ij} \to 0\ (i, j = 1, 2) \quad \text{при } \ ||x|| \to \infty.$$

Для описания движения упругой среды используются две системы дифференциальных уравнений:

$$\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)} = \rho_k \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} \quad (i, k = 1, 2) \tag{6}$$

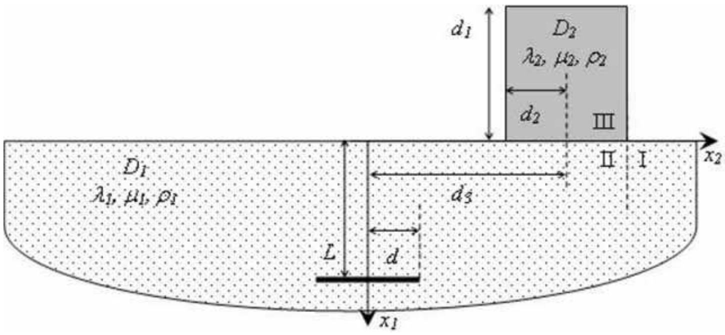


Рис. 1: Упругое полупространство D_1 с поверхностным включением D_2

и соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda_k u_{\beta,\beta}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_k (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (i,j,k = 1,2). \tag{7}$$

Здесь по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 2 (тензорная свертка), $u_i^{(k)} = \frac{\partial u_i{}^{(k)}}{\partial x_k}$, $F_i^{(k)}$ — компоненты объемной силы в k-ой среде, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для моделирования сброса напряжений на трещине в полупространстве введена объемная сила $\mathbf{F}^{(1)}$, компоненты $F_i^{(1)}$ которой определяются сингулярной обобщенной функцией — простым слоем на горизонтальной трещине S [4]. В данном случае они имеют следующий вид:

$$F_i^{(1)} = n_\beta \left[\sigma_{i\beta}\right]_S \delta_S(x) = n_\beta \left[\sigma_{i\beta}\right]_S \delta(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1,2, \tag{8}$$

где выражение в квадратных скобках — скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к ее поверхности, здесь $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1,\ 0)$, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(x_1)$ — дельта-функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_\beta \left[\sigma_{i\beta}(x)\right]_S = P_i(x,t), \quad x \in S,\ t > 0. \tag{9}$$

Здесь в расчетах он имеет импульсный вид:

$$P_i(x,t) = Pte^{-at} H(t)\ (a > 0), \tag{10}$$

характерный для землетрясений. При описанных условиях необходимо определить напряженно-деформированное состояние среды и поверхностного включения $D_1 \cup D_2$ при $t > 0$.

2. Определяющие уравнения

Решение задачи удобно отыскивать в безразмерном пространстве переменных и искомых функций, которые получаются после введения обозначений [5]:

$$c_1^{(k)} = \frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad c_2^{(k)} = \frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad x_i = \frac{x_i^*}{L^*}; \quad t = \frac{t^* c_1^{(m)*}}{L^*};$$

$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_m^*}; \quad v_i^{(k)} = \frac{\dot{u}_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho_m^* \left(c_1^{(m)*}\right)^2}; \quad F_i^{(k)} = \frac{F_i^{(k)*} L^*}{\rho_m^* \left(c_1^{(m)*}\right)^2};$$

$$\gamma_{11}^{(k)} = \gamma_{22}^{(k)} = \rho_k \left(c_1^{(k)}\right)^2; \quad \gamma_{12}^{(k)} = \gamma_{21}^{(k)} = \rho_k \left(c_2^{(k)}\right)^2; \quad \gamma_{33}^{(k)} = \gamma_{11}^{(k)} - 2\gamma_{12}^{(k)}.$$

Здесь индекс * придается размерным величинам; индекс m относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей; L^* – характерный линейный размер; $c_1^{(k)*} = \sqrt{\frac{\lambda_k^* + 2\mu_k^*}{\rho_k^*}}$, $c_2^{(k)*} = \sqrt{\frac{\mu_k^*}{\rho_k^*}}$ — скорости распространения продольных (сжатия-расширения) и поперечных (сдвиговых) волн в k-ой среде.

После введения безразмерных величин, из уравнений (6), (7) после простых преобразований получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} &\rho_k \dot{v}_i^{(k)} = \sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)} \qquad (i,j,k = 1,2), \\ &\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k)} (v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)}) \frac{1}{(1+\delta_{ij})} + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) имеет два семейства характеристических конусов. Образующие этих конусов совпадают с бихарактеристиками уравнений (11). Вдоль характеристик, лежащих в плоскости $x_\alpha = \mathrm{const}$, уравнения (11) являются функциями только двух переменных $(x_j;t)$ $(j \neq \alpha)$. Это дает возможность записать условия на бихарактеристиках, как условия на характеристиках в соответствующей одномерной задаче. Соответствующие преобразования можно выполнить, если в системе уравнений (11) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. При этом система уравнений (11) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие направлениям j=1 и j =2 (i=1, 2):

$$\begin{aligned} &\dot{v}_i^{(k)} - \rho_k^{-1}\sigma_{ij,j}^{(k)} = a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ &\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} = b_{ij}^{(k)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &a_{ij}^{(k)} = \rho_k^{-1}(\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)}), \\ &b_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k)} v_{j,i}^{(k)}(1-\delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)}(v_{\beta,\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)})\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{13}$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$dx_i = \pm\lambda_{ij}^{(k)} dt, \tag{14}$$

а условиями на бихарактеристиках являются соотношения

$$d\sigma_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} dv_i^{(k)} = \left(b_{ij}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}\right]\right) dt, \tag{15}$$

здесь $\lambda_{ij}^{(k)} = \sqrt{\rho_k^{-1}\gamma_{ij}^{(k)}} = c_1^{(k)}\delta_{ij} + c_2^{(k)}(1-\delta_{ij})$. Из (14) видно, что на каждой из двух гиперплоскостей имеются две пары семейств характеристик, определяющие продольные $\lambda_{ii}^{(k)}$ и сдвиговые $\lambda_{ij}^{(k)}$ $(i \neq j,\ i,j = 1,2)$ скорости распространения волн. В каждой из двух плоскостей $(x_j;t)$ имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направлений. Верхний знак соответствует характеристикам положительного, а нижний — отрицательного направлений. Уравнения (14) и (15) соответствуют друг другу при одинаковой паре индексов и при одинаковом расположении знаков. Уравнения (12) и условия (15) используются для отыскания решения сформулированной задачи (1) —(7).

3. Выбор точечной схемы шаблона

Пусть тело $D_1 \cup D_2$ разбивается на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей $x_i = const$ $(i = 1, 2)$. Линейные размеры этих ячеек в направлении осей x_1 и x_2 считаются равномерными и равными h. Пересечения линий $x_i = const$ $(i = 1, 2)$ образуют узлы. В этих узловых точках отыскиваются значения искомых функций $v_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)} (i, j = 1, 2)$ в различные моменты времени $t_n - \tau, t_n, t_n + \tau (n = 1, 2, ..., N)$ с шагом по времени τ. Получившаяся сетка является трехмерной. Точечная сетка, на основе которой строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек содержит точки, образованные пересечениями бихарактеристик с гиперплоскостями $t = const$. Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек $E_{ij}^{\pm(k)}$, лежащих на координатных линиях $x_j = const$ и отстоящих от точки O на расстояния $\lambda_{ij}^{(k)} \tau$. В дальнейшем значениям функций в точке O приписывается верхний знак "0"; в точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ – нижний "ij" и верхний знак $\pm$(например, $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$), а в точке A дополнительный индекс не приписывается. Точки O и A представляют собой одну и ту же точку тела в моменты времени, отстоящие друг от друга на один шаг τ по времени (рис.2).

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости частиц $v_i^{(k)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в точке A на слое по времен t_n, если известны их значения на предыдущем слое t_{n-1} $(n = 1, 2, ..., N)$ в точке O и в прилегающих к ней точках $E_{ij}^{\pm(k)}$.

4. Разрешающие разностные уравнения во внутренних точках

Интегрирование системы уравнений (12) от точки O до точки A и соотношений (15) от точки $E_{ij}^{\pm(k)}$ до точки A методом трапеции позволяет получить выражения следующего типа:

$$\begin{aligned} v_i^{(k)} &= v_i^{0(k)} + \frac{\tau}{2}\left(\rho_k^{-1}\sigma_{ii,i}^{0(k)} + a_{ii}^{0(k)} + F_i^0 + \rho_k^{-1}\sigma_{ii,i}^{(k)} + a_{ii}^{(k)} + F_i^{(k)}\right), \\ \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} + \frac{\tau}{2}\left(\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{0(k)} + b_{ij}^{0(k)} + \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} + b_{ij}^{(k)}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} (v_i^{(k)} - v_i^{\pm(k)}) =$$
$$= \frac{\tau}{2} \left(b_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left[a_{ij}^{(k)} + a_{ij}^{\pm(k)} + F_i^{(k)} + F_i^{\pm(k)} \right] \right), \tag{17}$$

где система уравнений (16) и (17), состоящая из 13 уравнений, разрешается относительно 13 неизвестных для каждой среды (k=1, 2): 5 функций $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$, $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{12}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$) и их 8 производных $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$ ($v_{1,1}^{(k)}$, $v_{1,2}^{(k)}$, $v_{2,1}^{(k)}$, $v_{2,2}^{(k)}$, $\sigma_{11,1}^{(k)}$, $\sigma_{12,2}^{(k)}$, $\sigma_{21,1}^{(k)}$, $\sigma_{22,2}^{(k)}$).

Значения функций в неузловых точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ заменяются величинами, вычисленными по формуле Тейлора с точностью до первого порядка для производных $a_{ij}^{\pm(k)}$ и $b_{ij}^{\pm(k)}$ и с точностью до второго порядка для функций $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ через их значения в узловых точках (x_1^0, x_2^0, t_0):

$$a_{ij}^{\pm(k)} = a_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial a_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j},$$
$$b_{ij}^{\pm(k)} = b_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial b_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \tag{18}$$

$$\sigma_{ij}^{\pm(k)} = \sigma_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j^2},$$
$$v_i^{\pm(k)} = v_i^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial v_i^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial x_j^2}. \tag{19}$$

Подставив соотношения (18), (19) в (17), затем, исключив при помощи (16) переменные $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ и учитывая (18), можно получить восемь уравнений относительно производных $v_{i,j}^{(k)}$ и $\sigma_{ij,j}^{(k)}$ в расчетном слое времени

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} \mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} = \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau \left[\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)} \right] \mp$$
$$\mp \rho_k \lambda_{ij}^{(k)} \left(v_{i,j}^{0(k)} + \tau \left[\rho_k^{-1} \sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)} \right] \right) + F_i^{\pm} - F_i^0. \tag{20}$$

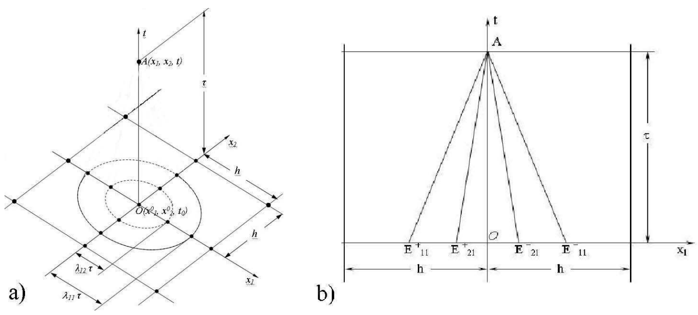


Рис. 2: Точечная схема шаблона: a) трехмерная b) на $x_2 = const$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений (20), можно найти неизвестные производные

$$
\begin{aligned}
v_{i,j}^{(k)} &= v_{i,j}^{0(k)} + \tau\left(\rho_k^{-1}\sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)}\right) + \frac{1}{2\rho_k\lambda_{ij}}\left(F_i^- - F_i^+\right), \\
\sigma_{ij,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau\left(\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)}\right) + \frac{1}{2}\left(F_i^- + F_i^+ - 2F_i^0\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Систему уравнений (21) можно использовать для определения неизвестных производных как во внутренних, так и граничных узловых точках исследуемой области. Однако, важно иметь промежуточные соотношения (20), которые используются при решении систем уравнений, где заданы граничные функции. Подстановка равенств (21) в (16) позволяет получить неизвестные функции $v_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$ во внутренних узловых точках неоднородного тела в момент времени $t_n + \tau$ $(n = 1, 2, ..., N)$.

5. Разностные уравнения в граничных точках

На граничных линиях $x_j = const$ заданы два компонента напряжения (см. (2)-(4)). В расчетах не могут быть использованы два условия из (20), условия на двух характеристиках, не принадлежащих исследуемой области. Тем самым, по сравнению с внутренними точками число уравнений (20) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (20), (16) и двух граничных условий из (2)-(4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий также рассматриваются, как граничные точки только для отдельных областей $D_1 \cup D_2$. В каждой из этих точек сопряжения число уравнений (20), (16) равно 22, а неизвестных — 26. Замкнутая система уравнений получается, если использовать наряду с уравнениями (16), (20) четыре условия жесткого сцепления полосы и полуплоскости (5).

6. Разностные уравнения в свободных угловых точках

На угловых точках, образовавшихся пересечением двух границ, все условия, заданные на двух границах, должны выполняться. Поэтому в угловых точках задаются четыре условия, которые, взамен четырем условиям на четырех бихарактеристиках, не принадлежащих области $D_1 \cup D_2$, замыкают систему линейных уравнений относительно тринадцати неизвестных.

В верхних угловых точках тела D_2 (рис.1) заданы четыре компоненты тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно-независимыми. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием (3), (4); получается, что $\sigma_{21,1}^{(k)} = 0$ и $\sigma_{12,1}^{(k)} = 0$. Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (20) и (16).

7. Разностные уравнения в контактных угловых точках

Нижние угловые точки тела D_2 являются контактными точками неоднородной среды $D_1 \cup D_2$, которые имеют особенности. Развивая идеи, впервые описанные в [6], вычисляются разностные уравнения в контактных угловых точках исследуемого тела. В этих особых точках из физических соображений принимается, что компоненты напряжений $\sigma_{22}^{(2)} = 0$ и $\sigma_{12}^{(2)} = 0$, и используются условия контакта (5).

В этих особых точках производные могут терпеть разрывы. Поэтому предполагается, что область D_1 по линии продолжения боковых сторон тела D_2 мысленно разделяется на подобласти (I), (II). Тем самым, около особых точек рассматриваются три подобласти (I), (II), (III) (рис.1). Для подобластей (I) и (II) принимаются условия непрерывности функций:

$$v_i^{(I)} = v_i^{(II)}, \quad \sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} \quad (i, j = 1, 2) \tag{22}$$

и их производных

$$v_{i,1}^{(I)} = v_{i,1}^{(II)}, \quad \sigma_{i1,1}^{(I)} = \sigma_{i1,1}^{(II)} \quad (i = 1, 2). \tag{23}$$

Двенадцать производных для первой среды и восемь производных для второй среды вычисляются по формуле (21). Подставляя в уравнение (16) производные, найденные таким образом для каждой подобласти, и выполняя условия (5), (22) и (23), вычисляются неизвестные функции в этих точках, как многосвязных узлах совокупности подобластей (I), (II), (III).

Значения производных в узловых точках исследуемой области на нижнем слое по времени вычисляются с использованием центральной разности во внутренних узловых точках, а в граничных точках — соответствующими аппроксимациями "вперед"и "назад".

8. Точность и устойчивость численного решения

Необходимое условие устойчивости сеточно-характеристического метода, вытекающего из условия Неймана (спектральный радиус расширенной матрицы не превосходит единицы), отыскивается в виде [7]:

$$max\left|\frac{\tau\lambda_{ij}^{(k)}}{h}\right| \leq 1\,, \tag{24}$$

где $\lambda_{ij}^{(k)}$ являются коэффициентами гиперболической системы. Физически такое ограничение означает, что решение в вершине гиперконуса выражается через начальное значение внутри области, ограниченной поверхностью гиперконуса, т.е. решение в искомой точке определяется через область влияния. В дальнейшем, при проведении расчетов шаги пространственно - временной сетки выбираются согласно условию устойчивости (24), которое выражает условие Куранта - Фридрихса - Леви. Многочисленными расчетами экспериментально проверено, что условие $|\frac{\tau}{h}| \leq \frac{1}{2}$ обеспечивает устойчивость счета для большого момента времени, а также выбор шагов по времени $\tau = 0.025$ и пространства $h = 0.05$ обеспечивает сходимость по сетке (средняя относительная погрешность $0,1\%$) [2].

9. Дифракция отраженных и преломленных волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине

Расчет был произведен для грунта (D_1) и (D_2) бетона при следующих безразмерных значениях исходных данных: $\rho_1 = 1$; $c_1^{(1)} = 0.964$; $c_2^{(1)} = 0.557$; $\rho_2 = 1$; $c_1^{(2)} = 1$; $c_2^{(2)} = 0.612$; $\tau = 0.025$; $h = 0.05$; $d_1 = 1$; $d_2 = 0.5$, $L = 4.8$; $d = 0.45$; d_3 варьируется: $d_3 = 0$ и $d_3 = 5$.

Скачок напряжений на трещине задается в виде импульса

$$P_1(x,t) = 20te^{-10t}H(t),\ P_2(x,t) = 0,$$

для представления δ - функции Дирака используются дельтаобразные последовательности $\delta_\varepsilon(x)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon,\varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon,\varepsilon] \end{array} \right\},$$

$$F_i = F_i^\varepsilon = n_\beta \left[\sigma_{i\beta}\right]_S \delta_\varepsilon(x_1 - L)H(d - |x_2|), \quad i = 1,2,$$

и параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h = 0.05$.

На рисунке 3 представлены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности $x_1 = 0$ в точках с координатой $x_2 = 0,1,2,3$ при дифракции ударных волн В начале координат $v_2 = 0$, т.к. сброс напряжении происходит симметрично и параллельно оси Ox_1. Запаздывание появления колебаний на графиках осциллограмм связано с движением ударной волны от трещины до точки наблюдения, для которого требуется определенное время, связанное со скоростью распространения упругих волн в среде. В данном случае скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1 = 1$ и $c_2 = 0.577$ соответственно. На рисунке 4 представлено поле скоростей в упругом полупространстве со свободной дневной поверхностью. Здесь расчеты приведены для моментов времени, когда ударная волна только дошла до дневной поверхности (а) и отразилась от нее (б).

Сброс вертикальных напряжений на трещине порождает продольные ударные волны, а края трещины работают, как источники сдвиговых цилиндрических волн (рис.4а). При дифракции волн на свободной поверхности начинает формироваться поверхностная волна, а наложение падающих

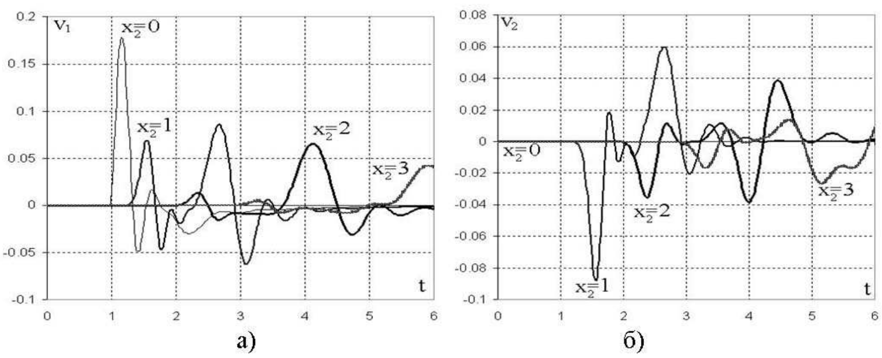


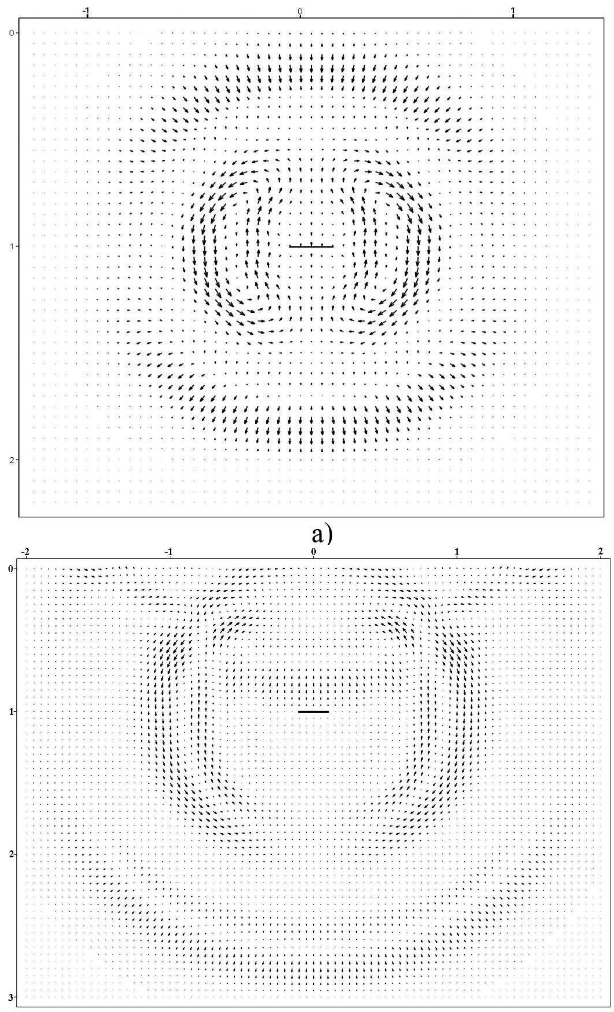
Рис. 3: Осциллограммы скоростей v_1 (а) и скоростей v_2 (б) дневной поверхности при $x_1 = 0, x_2 = 0; 1; 2; 3$

и отраженных волн формирует в среде сложную дифракционную картину (рис.4б).

Подробно дифракция упругих волн в упругой полуплоскости при сбросе напряжений на трещинах в отсутствии поверхностных включений рассмотрена в [5]. Здесь дадим анализ результатов преломления упругих волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине (трещина разрыва) на поверхностном включении при разном расстоянии включения от эпицентра для $d_3 = 0$ (включение в эпицентре) и для $d_3 = 5$ (включение на расстоянии 5L от эпицентра). Скорости распространения продольных волн в безразмерных величинах составляют $c_1^{(1)} = 0.964$ и $c_1^{(2)} = 1$ соответственно.

На рисунках 5,6,7 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2, находящегося в эпицентре (а) $d_3 = 0$) и на удалении от него (б) $d_3 = 5$), в разные моменты времени: когда преломленные ударные волны распространились до середины включения и верхняя часть тела еще покоится (рис. 5), дошли до его верхней поверхности (рис.6) и отраженные от нее волны дошли до основания (рис.7).

Когда тело находится в эпицентре, в нем вначале преобладают вертикальные перемещения, порожденные продольной волной расширения-сжатия. С течением времени дифракционная картина усложняется с появлением вихревых зон в окрестности угловых точек вблизи свободной



а)

б)

Рис. 4: Векторное поле скоростей упругого полупространства до и после отражения ударных волн: $t = 1$ (а); $t = 2$ (б)

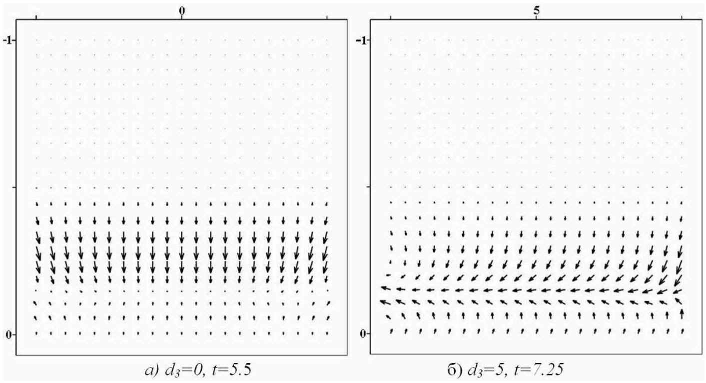


Рис. 5: Векторное поле скоростей в D_2

поверхности. Возрастают сдвиговые деформации вблизи боковых стенок, формируются поверхностные волны на границе тела.

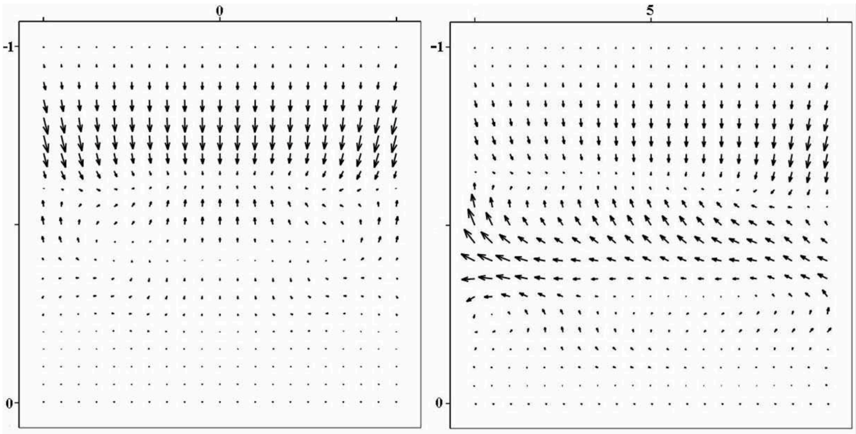
При удалении тела от эпицентра при подходе ударной волны и ее преломлении в начале движения тела наблюдается резкое горизонтальное смещение нижней части, прилежащей к основанию, при сохранении вертикального положения его верхней части, которое распространяется в его верхнюю часть. Т.е. в теле формируется ударная сдвиговая волна, которая во взаимодействии с продольными и отраженными волнами порождает сложную вихревую дифракционную картину в теле.

На рисунках 8 - 11 представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжении в разные моменты времени:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};\ I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{33}\sigma_{22},$$

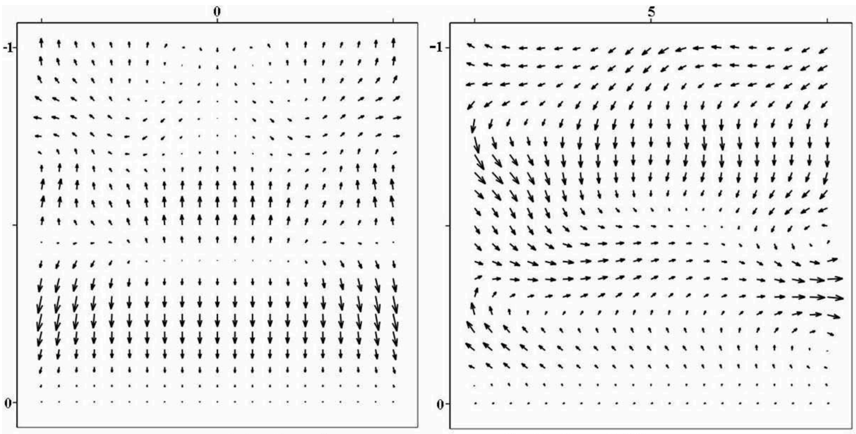
где $\sigma_{33} = \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{2(c_1^2 - c_2^2)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Они характеризуют распределение давления и интенсивность касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют соответственно объемные и сдвиговые деформации, распространяющиеся в упругом теле D_2.

Сравнивая рисунки 8 и 9, видим, что тело в эпицентре подвергается обоим изменениям схожего характера, причем они симметричны относительно оси x_1 и для тела, смещенного от эпицентра, характер объемных и сдвиговых изменений схожи, но здесь дифракционная картинка несим-



а) d_3=0, t=6 б) d_3=5, t=7.75

Рис. 6: Векторное поле скоростей в D_2



а) d_3=0, t=7 б) d_3=5, t=8.75

Рис. 7: Векторное поле скоростей в D_2

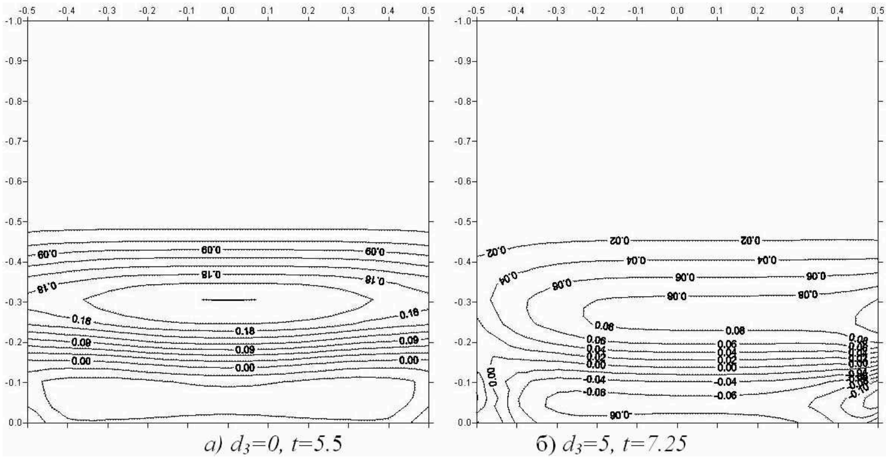


Рис. 8: Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2

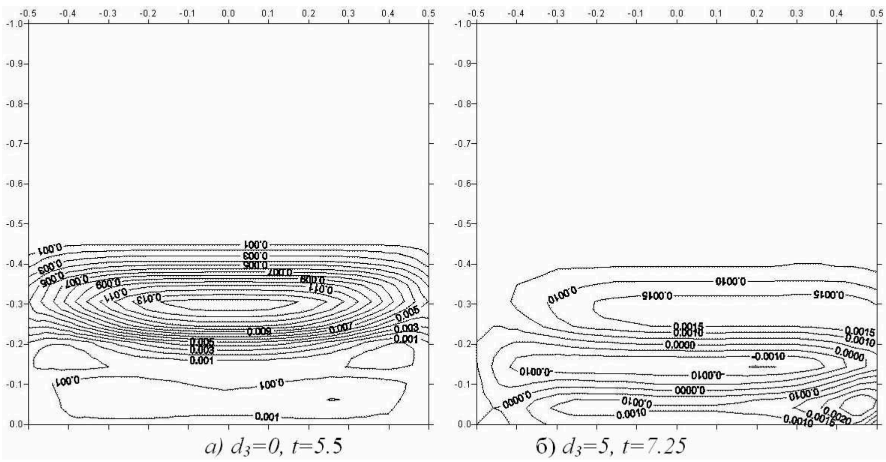


Рис. 9: Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2

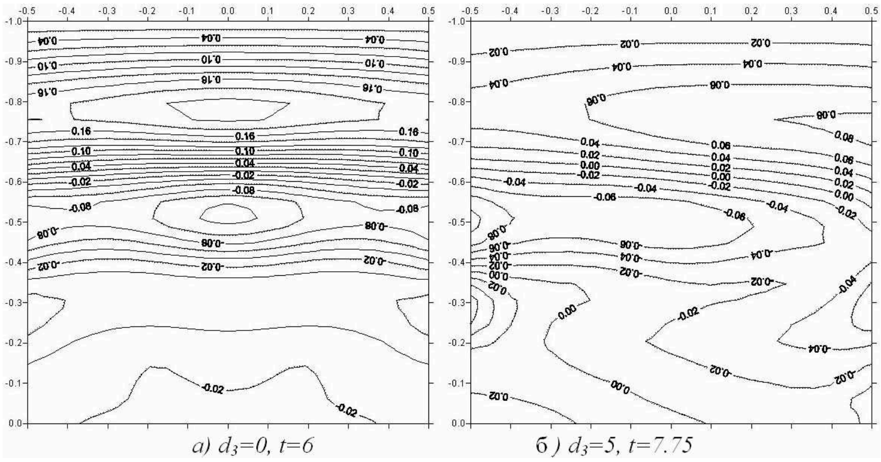


Рис. 10: Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2

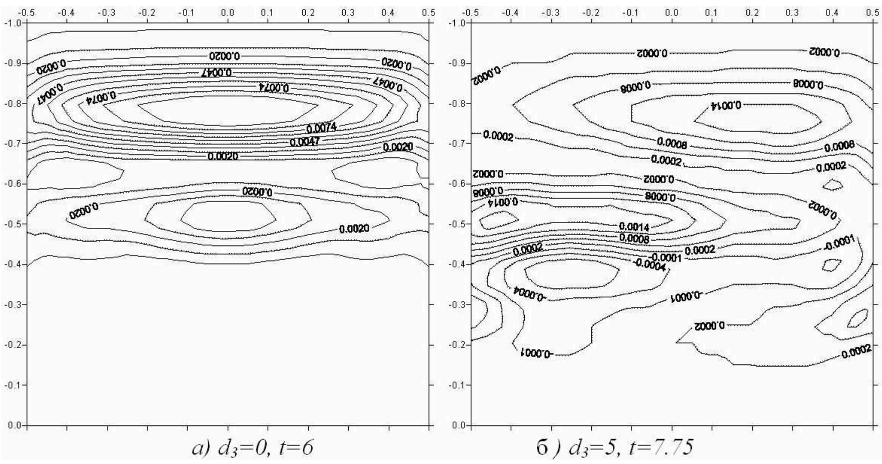


Рис. 11: Изолинии второго инварианта напряжения тела D_2

метрична. С течением времени происходит переотражение волн как от верхних и нижних граней включения, так и от его боковых поверхностей. Ударные волны теряют энергию с расстоянием и временем, поэтому давление и интенсивность касательных напряжений в первом теле сравнительно больше, чем во втором.

Заключение

При сильных землетрясениях ударные сейсмические волны, воздействуя на наземные сооружения, порождают ударные волны в конструкциях сооружений, которые их деформируют, приводя сооружение к разрушению. На рисунках 4-6 перемещения по контуру сооружения показывают, как меняется форма сооружения при проходе ударных сейсмических волн. Для зданий в эпицентре сооружение испытывает деформацию расширения-сжатия в вертикальном направлении. Для отдаленных от эпицентра зданий преобладающими являются горизонтальные сдвиговые деформации, которые наиболее разрушительны для сооружений. Поэтому в сейсмоопасных регионах при строительстве наземных сооружений следует использовать материалы с большим запасом прочности по деформациям сдвига, а в блочных конструкциях использовать соединения, обеспечивающие подвижность блоков при относительных сдвиговых деформациях, при сохранности конструкции в целом.

Цитированная литература

[1]. Тарабрин Г. Т., *Строительная механика и расчет сооружений*, М., 1981, № 4, С. 38 – 43.

[2]. Джузбаев С. С., *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*, Туркестан, 1997, 134 с.

[3]. Джузбаев С. С., Сарсенов Б. Т., Математический журнал, Алматы, 2003, Т. 3, № 1(7), С. 55 – 62.

[4]. Алексеева Л.А., Дильдабаева И. Ш., Математический журнал, 2007, Т. 7, № 2(25), С. 19 – 31.

[5]. Алексеева Л. А., Сарсенов Б. Т., Сб. научн. трудов НИА РК, Методы эксперимен-тальной физики, Алматы, 2010, С. 63 – 73.

[6]. Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Масанов Ж. К., *Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном породном мас-*

сиве, Алма-Ата: Наука, 1980.

[7]. Годунов С.К. и др., *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, М.: Наука, 1976.

Статья поступила в редакцию 11.03.2011 г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 43 – 55*

УДК 517.956

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А.Т.Асанова

Посвящается памяти
Даулета Умбетжановича Умбетжанова

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: anar@math.kz, anarasanova@list.ru

Исследуется периодическая задача для системы уравнений в частных производных гиперболического типа на полосе. Установлены новые условия существования единственного периодического решения рассматриваемой задачи в терминах исходных данных.

Введение

В качественной теории уравнений в частных производных важное место занимает теория периодических решений. Периодические решения гиперболических уравнений со смешанными производными интенсивно изучаются с 60-х годов прошлого столетия, начиная с работ L. Cesari [1-5]. Теория периодических задач для гиперболических уравнений получила

Keywords: *System of hyperbolic equations, periodic solution, unique solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 35R12, 35L20, 34B37

дальнейшее развитие в работах [6-21], где также содержатся обзор и библиография. Условия существования и единственности периодических решений гиперболических уравнений со смешанной производной на полосе и плоскости были получены в различных терминах с помощью методов интегральных уравнений, функционального анализа и теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений [1-21].

В настоящей работе исследуется периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений со смешанными производными в постановке L. Cesari [1]. Даются новые условия существования и единственности периодического решения на полосе системы гиперболических уравнений со смешанной производной в терминах исходных данных. В основе применяемого метода лежит введение новых неизвестных функций [22-27] и сведение рассматриваемой задачи к эквивалентной периодической краевой задаче с функциональным параметром. При доказательстве основного утверждения использованы результаты работы [24].

Основной результат

На полосе $\Omega = (-\infty, +\infty) \times [0, \omega]$ рассматривается система гиперболических уравнений со смешанной производной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) \tag{1}$$

с условиями

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

$$u(0,x) = \psi(0) + \nu(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$u(t+T,x) = u(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega, \tag{4}$$

где $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ — неизвестная функция, $\nu(x)$ — неизвестная вектор-функция, имеющая непрерывную производную относительно x на $[0,\omega]$ и удовлетворяющая условию $\nu(0) = 0$, $T > 0$.

Предположим, что: i) $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω и периодичны относительно переменной t с периодом T; ii) n - вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и периодична с периодом T вместе с производной.

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in$ $\in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется *периодическим решением* задачи (1) - (4), если она удовлетворяет системе уравнений (1) и условиям (2), (3), (4) при найденной функции $\nu(x)$.

Для решения задачи (1)-(4) предлагается следующая замена функции $u(t,x)$: $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \nu(x)$. Тогда от задачи (1)-(4) переходим к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u} + A(t,x)\dot{\nu}(x) + C(t,x)\nu(x) + f(t,x), \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(t,0) = \psi(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty), \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = \psi(0), \qquad x \in [0,\omega], \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(t+T,x) = \widetilde{u}(t,x), \qquad (t,x) \in \bar{\Omega}. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу (5)-(8) в прямоугольной области $\bar{\Omega}_T = [0,T] \times [0,\omega]$. Задача (5)-(7) является задачей Гурса относительно функции $\widetilde{u}(t,x)$ при фиксированной $\nu(x)$.

Введем новые неизвестные функции $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ и запишем ее решение в виде системы трех интегральных уравнений:

$$\widetilde{v}(t,x) = \int\limits_0^t \Big\{ A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x) + B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x) + C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) +$$

$$+ A(\tau,x)\dot{\nu}(x) + C(\tau,x)\nu(x) + f(\tau,x)\Big\} d\tau, \tag{9}$$

$$\widetilde{w}(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \Big\{ A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi) +$$

$$+ A(t,\xi)\dot{\nu}(\xi) + C(t,\xi)\nu(\xi) + f(t,\xi)\Big\} d\xi, \tag{10}$$

$$\widetilde{u}(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^x \Big\{ A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi) + C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi) +$$

$$+A(\tau,\xi)\dot{\nu}(\xi)+C(\tau,\xi)\nu(\xi)+f(\tau,\xi)\Big\}d\xi d\tau, \qquad (11)$$

В этом случае из условия периодичности (8) следуют условия типа Пуанкаре $\widetilde{u}(0,x)=\widetilde{u}(T,x)$, $\widetilde{v}(0,x)=\widetilde{v}(T,x)$, $\widetilde{w}(0,x)=\widetilde{w}(T,x)$, $x\in[0,\omega]$. Отсюда, учитывая условия (7), получим

$$\widetilde{v}(T,x)=0, \qquad x\in[0,\omega]. \qquad (12)$$

В интегральном соотношении (9), подставляя вместо $\widetilde{v}(\tau,x)$ соответствующую правую часть при $t=\tau$ p - раз, получим следующее выражение:

$$\widetilde{v}(t,x)=D_p(t,x)\dot{\nu}(x)+E_p(t,x)\nu(x)+G_p(t,x,\widetilde{v})+$$

$$+H_p(t,x,\widetilde{u},\widetilde{w})+F(t,x), \qquad (13)$$

где

$$D_p(t,x)=\int\limits_0^t A(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\int\limits_0^{\tau_1} A(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}} A(\tau_{p-1},x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}} d\tau_p d\tau_{p-1}...d\tau_1,$$

$$E_p(t,x)=\int\limits_0^t C(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\int\limits_0^{\tau_1} C(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}} C(\tau_{p-1},x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}} d\tau_p d\tau_{p-1}...d\tau_1,$$

$$G_p(t,x,\widetilde{v})=\int\limits_0^t A(\tau_1,x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}} A(\tau_{p-1},x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}} A(\tau_p,x)\widetilde{v}(\tau_p,x)d\tau_p d\tau_{p-1}...d\tau_1,$$

$$H_p(t,x,\widetilde{u},\widetilde{w})=\int\limits_0^t [B(\tau_1,x)\widetilde{w}(\tau_1,x)+C(\tau_1,x)\widetilde{u}(\tau_1,x)]d\tau_1+$$

$$+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\int\limits_0^{\tau_1}[B(\tau_2,x)\widetilde{w}(\tau_2,x)+C(\tau_2,x)\widetilde{u}(\tau_2,x)]d\tau_2 d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}} A(\tau_{p-1},x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}}[B(\tau_p,x)\widetilde{w}(\tau_p,x)+C(\tau_p,x)\widetilde{u}(\tau_p,x)]d\tau_p...d\tau_1,$$

$$F_p(t,x)=\int\limits_0^t f(\tau_1,x)d\tau_1+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}} A(\tau_{p-1},x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}} F(\tau_p,x)d\tau_p d\tau_{p-1}...d\tau_1.$$

Из выражения (13) находим значение функции $\widetilde{v}(t,x)$ при $t=T$ и, подставляя его в соотношение (12), придем к системе дифференциальных уравнений относительно функции $\nu(x)$:

$$D_p(T,x)\dot{\nu}(x)=-E_p(T,x)\nu(x)-G_p(T,x,\widetilde{v})-H_p(T,x,\widetilde{u},\widetilde{w})-F(T,x), \quad (14)$$

$x\in[0,\omega]$.

По нашим предположениям функция $\nu(x)$ удовлетворяет условию

$$\nu(0)=0. \quad (15)$$

Таким образом, для определения функции $\nu(x)$ при фиксированных $\widetilde{v}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$ имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (14) с условием (15).

Если известна $\nu(x)$, то из (9)-(11) находим функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$. Обратно, если известны функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, то из системы уравнений (14) с условием (15) можем найти $\nu(x)$. Так как неизвестными являются как $\widetilde{v}(t,x),\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, так и $\nu(x)$, для нахождения решения задачи (5)- (8) используем итерационный метод. Пару $(\nu^*(x)$, $\widetilde{u}^*(t,x))$ — решение задачи (5)-(8), определяем, как предел последовательности $(\nu^{(k)}(x),\widetilde{u}^{(k)}(t,x))$, $k=0,1,2,...$, по следующему алгоритму.

Шаг-0. а) Предполагая, что при выбранном $p\in\mathbb{N}$ матрица $D_p(T,x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, и полагая в правой части системы (14)

$\nu(x) = 0$, $\widetilde{v}(t,x) = 0$, $\widetilde{u}(t,x) = \psi(t)$, $\widetilde{w}(t,x) = \dot{\psi}(t)$, находим начальное приближение $\dot{\nu}^{(0)}(x)$, тогда, учитывая условие (15), находим $\nu^{(0)}(x)$: $\nu^{(0)}(x) = \int\limits_0^x \dot{\nu}^{(0)}(\xi)d\xi$; b) из системы интегральных уравнений (9)-(11) при $\dot{\nu}(x) = \dot{\nu}^{(0)}(x)$, $\nu(x) = \nu^{(0)}(x)$ находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x), \widetilde{u}^{(0)}(t,x), \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Шаг-1. a) Предполагая в правой части системы (14) $\nu(x) = \nu^{(0)}(x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, находим $\dot{\nu}^{(1)}(x)$, снова, используя условие (15), находим $\nu^{(1)}(x)$: $\nu^{(1)}(x) = \int\limits_0^x \dot{\nu}^{(1)}(\xi)d\xi$; b) из системы интегральных уравнений (9)-(11) при $\dot{\nu}(x) = \dot{\nu}^{(1)}(x)$, $\nu(x) = \nu^{(1)}(x)$ находим $\widetilde{v}^{(1)}(t,x), \widetilde{u}^{(1)}(t,x), \widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, и так далее.

На **k**-шаге находим функции $\dot{\nu}^{(k)}(x)$, $\nu^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Условия следующего утверждения позволяют установить сходимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1)- (4).

Теорема. *Пусть относительно данных задачи (1)-(4) выполняются условия i)-ii). Предположим, что при некотором p, $p \in \mathbb{N}$, матрица $D_p(T,x)$: $R^n \to R^n$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и справедливы следующие неравенства:*

a) $||[D_p(T,x)]^{-1}|| \le \gamma_p(T,x)$;

b) $q_p(T,x) = \gamma_p(T,x) \cdot \Big[e^{\alpha(x)T} - \sum\limits_{j=0}^{p} \frac{\alpha(x)T]^j}{j!}\Big] \le \chi < 1$, *где*

$\gamma_p(T,x)$ *— положительная непрерывная функция по* $x \in [0,\omega]$, $\chi - const$.

Тогда задача (1) – (4) имеет единственное периодическое решение.

Доказательство. При предположениях i)-ii) относительно данных задачи имеем следующие неравенства:

$$||E_p(T,x)|| \le T \max_{t\in[0,T]} ||C(t,x)|| \sum_{j=0}^{p-1} \frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},$$

$$||F_p(T,x)|| \le T \max_{t\in[0,T]} ||f(t,x)|| \sum_{j=0}^{p-1} \frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},$$

$$||H_p(T,x,\widetilde{u},\widetilde{w})|| \le b_0(x) \max_{t\in[0,T]} \Big[||\widetilde{w}(t,x)|| + ||\widetilde{u}(t,x)||\Big], \qquad (16)$$

где $b_0(x) = T\sum\limits_{j=0}^{p-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!}\max\{\max\limits_{t\in[0,T]}||B(t,x)||, \max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\}$.

По условию а) при фиксированных $\nu(x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$ функция $\dot{\nu}(x)$ определяется единственным образом из уравнения (14) и

$$\dot{\nu}(x) = -[D_p(T,x)]^{-1}E_p(T,x)\nu(x) - [D_p(T,x)]^{-1}G_p(T,x,\widetilde{v}) -$$

$$-[D_p(T,x)]^{-1}H_p(T,x,\widetilde{u},\widetilde{w}) - [D_p(T,x)]^{-1}F(T,x), \qquad x\in[0,\omega]. \tag{17}$$

При фиксированных $\dot{\nu}(x)$, $\nu(x)$ система интегральных уравнений (9)-(11) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}(t,x),\widetilde{w}(t,x),\widetilde{v}(t,x)\}$ и справедливы неравенства:

$$\max_{t\in[0,T]}||\widetilde{v}(t,x)|| \le \Big[e^{\alpha(x)T}-1\Big]||\dot{\nu}(x)|| + Te^{\alpha(x)T}\max_{t\in[0,T]}||f(t,x)||+$$

$$+Te^{\alpha(x)T}\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\cdot||\nu(x)|| + Te^{\alpha(x)T}\times$$

$$\times\max\Big\{\max_{t\in[0,T]}||B(t,x)||, \max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\Big\}\max_{t\in[0,T]}\Big[||\widetilde{u}(t,x)|| + ||\widetilde{w}(t,x)||\Big], \tag{18}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\Big[||\widetilde{u}(t,x)|| + ||\widetilde{w}(t,x)||\Big] \le \Big\{\max_{t\in[0,T]}||\psi(t)|| + \max_{t\in[0,T]}||\dot{\psi}(t)||+$$

$$+(1+T)\Big[\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}\Big]\max_{t\in[0,T]}||f(t,\xi)||d\xi + \int\limits_0^x\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}||\dot{\nu}(\xi)||d\xi+$$

$$+\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}\Big]\max_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||\cdot||\nu(\xi)||d\xi\Big]\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{\int\limits_0^x(1+\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T})\max\{\max_{t\in[0,T]}||B(t,\xi)||, \max_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||\}d\xi\Big\}. \tag{19}$$

Используя неравенство Гронуолла - Беллмана в интегральном уравнении (9), для разности $\widetilde{v}^{(k)}(t,x) - \widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)$ получим оценку

$$||\widetilde{v}^{(k)}(t,x) - \widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)|| \le \Big[e^{\alpha(x)t}-1\Big]||\dot{\nu}^{(k)}(x) - \dot{\nu}^{(k-1)}(x)||+$$

$$+Te^{\alpha(x)t}\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\cdot||\nu^{(k)}(x)-\nu^{(k-1)}(x)||+$$

$$+Te^{\alpha(x)t}\max\Big\{\max_{t\in[0,T]}||B(t,x)||,\max_{t\in[0,T]}||C(t,x)||\Big\}\times$$

$$\times\max_{t\in[0,T]}\Big[||\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||\Big].\qquad(20)$$

Для разностей $\nu^{(k)}(x)-\nu^{(k-1)}(x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$, $k=0,1,2,...$, учитывая неравенства (18) – (20), получим

$$||\nu^{(k)}(x)-\nu^{(k-1)}(x)||\leq\int\limits_0^x||\dot{\nu}^{(k)}(\xi)-\dot{\nu}^{(k-1)}(\xi)||d\xi,\qquad(21)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\Big[||\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||\Big]\leq$$

$$\leq\int\limits_0^x a_0(\xi,x)||\dot{\nu}^{(k)}(\xi)-\dot{\nu}^{(k-1)}(\xi)||d\xi,\qquad(22)$$

где $a_0(\xi,x)=e^{a_1(x)}(1+T)\Big[\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}+a_2(x)\Big]$,
$a_2(x)=\int\limits_0^x\Big[1+\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}\Big]\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||d\xi$,
$a_1(x)=\int\limits_0^x(1+\alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T})\max\Big[\max\limits_{t\in[0,T]}||B(t,\xi)||,\max\limits_{t\in[0,T]}||C(t,\xi)||\Big]d\xi$.

Тогда для разности $\dot{\nu}^{(k+1)}(x)-\dot{\nu}^{(k)}(x)$, используя оценку (17), имеем

$$||\dot{\nu}^{(k+1)}(x)-\dot{\nu}^{(k)}(x)||\leq\gamma_p(T,x)\Bigg[||E_p(T,x)||\cdot||\nu^{(k)}(x)-\nu^{(k-1)}(x)||+$$

$$+b_0(x)\max_{t\in[0,T]}\Big[||\widetilde{w}^{(k)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)||+||\widetilde{u}^{(k)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)||\Big]+$$

$$+\int\limits_0^T\alpha(x)...\int\limits_0^{\tau_{p-2}}\alpha(x)\int\limits_0^{\tau_{p-1}}\alpha(x)||\widetilde{v}^{(k)}(\tau_p,x)-\widetilde{v}^{(k-1)}(\tau_p,x)||d\tau_pd\tau_{p-1}...d\tau_1\Bigg].$$

Подставляя (20) в это выражение и вычисляя повторные интегралы, также учитывая оценки (21), (22), получим

$$||\dot{\nu}^{(k+1)}(x) - \dot{\nu}^{(k)}(x)|| \le \chi||\dot{\nu}^{(k)}(x) - \dot{\nu}^{(k-1)}(x)|| +$$

$$+ \int\limits_0^x b_1(\xi, x)||\dot{\nu}^{(k)}(\xi) - \dot{\nu}^{(k-1)}(\xi)||d\xi, \tag{23}$$

где $b_1(\xi, x) = \gamma_p(t, x) \cdot T\Big[Te^{\alpha(x)T} \max\limits_{t\in[0,T]} ||C(t, x)|| + a_0(\xi, x)b_2(x)\Big]$,

$b_2(x) = Te^{\alpha(x)T} b_0(x) \max\Big(\max\limits_{t\in[0,T]} ||B(t, x)||, \max\limits_{t\in[0,T]} ||C(t, x)||\Big)$.

Из нулевого и первого шагов алгоритма следует

$$||\dot{\nu}^{(0)}(x)|| \le \gamma_p(T, x)\Big(||F_p(T, x)|| + b_0(x) \max_{t\in[0,T]}\Big[||\dot{\psi}(t)|| + ||\psi(t)||\Big]\Big) = d_1(x),$$

$$||\nu^{(0)}(x)|| \le$$

$$\le \int\limits_0^x \gamma_p(T, \xi)\Big\{||F_p(T, \xi)|| + b_0(\xi) \max_{t\in[0,T]}\Big[||\dot{\psi}(t)|| + ||\psi(t)||\Big]\Big\}d\xi = d_2(x),$$

$$||\dot{\nu}^{(1)}(x) - \dot{\nu}^{(0)}(x)|| \le \gamma_p(T, x)||E_p(T, x)|| \cdot d_2(x) + \chi \cdot d_1(x) +$$

$$+\gamma_p(T, x)\Big[e^{a_1(x)}b_0(x) + b_3(x)\Big] \max_{t\in[0,T]}\Big[||\dot{\psi}(t)|| + ||\psi(t)||\Big] +$$

$$+\gamma_p(T, x)\Big[b_2(x)e^{a_1(x)}(1 + T) \int\limits_0^x \Big(1 + \alpha(\xi)Te^{\alpha(\xi)T}\Big) \max_{t\in[0,T]} ||f(t, \xi)||d\xi +$$

$$+b_3(x) \max_{t\in[0,T]} ||f(t, x)||\Big] + \gamma_p(T, x)e^{a_1(x)} \times$$

$$\times\Big[(1 + T)b_2(x)a_2(x) + b_3(x) \max_{t\in[0,T]} ||C(t, x)||\Big] \int\limits_0^x ||d_1(\xi)||d\xi\Big) = d(x), \tag{24}$$

$b_3(x) = T\Big[e^{\alpha(x)T} - 1 - ... - \frac{(\alpha(x)T)^{p-1}}{(p-1)!}\Big]$.

Для функции $\Theta_k(x) = ||\dot{\nu}^{(k+1)}(x) - \dot{\nu}^{(k)}(x)||$ на базе (23) установим следующее неравенство:

$$\Theta_k(x) \le \chi^k \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)! \cdot j!} \cdot \frac{1}{j!} \left(\frac{\tilde{b}_1}{\chi}\right)^j \cdot \tilde{d},$$

где $\tilde{b}_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \int\limits_0^\omega b_1(\xi,x)d\xi$, $\tilde{d} = \max\limits_{x\in[0,\omega]} d(x)$.
Сходимость последовательности $\{\Theta_k(x)\}$ доказывается аналогично теореме 1 из [24]. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k(x)$ при $x \in [0,\omega]$, доказывающая равномерную сходимость последовательности $\{\dot{\nu}^{(k)}(x)\}$ к непрерывной по $x \in [0,\omega]$ функции $\dot{\nu}^*(x)$.

Из неравенства (21) вытекает равномерная непрерывность последовательности $\nu^{(k)}(x)$ к функции $\nu^*(x)$. На основе оценок (22), (20) установим равномерную сходимость последовательностей $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$ относительно $(t,x) \in \Omega_T$ к функциям $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$ соответственно. Очевидно, что функция $\widetilde{u}^*(t,x)$ является непрерывной на Ω_T и удовлетворяет условию периодичности. Используя периодичность матриц $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, вектор-функций $f(t,x)$, $\psi(t)$ на полосе Ω, получаем, что найденная функция $\widetilde{u}^*(t,x)$ будет периодической по переменной t с периодом T на полосе Ω. Таким образом, пара функций $(\nu^*(x), \widetilde{u}^*(t,x))$ является решением задачи (5)-(8).

Единственность решения задачи (5)-(8) доказывается от противного. Из эквивалентности задач (1)-(4) и (5)-(8) следует существование единственного периодического решения задачи (1)-(4) — пары функций $\{u^*(t,x), \nu^*(x)\}$. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1) – (4) в терминах матрицы $A(t,x)$, T и количества повторных интегралов m. Эти результаты дополняют установленные ранее признаки существования, единственности решения задачи (1) – (4) и расширяют класс разрешимых периодических краевых задач на полосе для системы гиперболических уравнений со смешанной производной.

Цитированная литература

[1]. Cesari L., *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*, Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations (Kiev 1961), Izd. Akad. Nauk Ukrain. SSR., Kiev, 1963, V. 2, P. 440 – 457.

[2]. Cesari L., *A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*, Rend. Circ. Mat. Palermo., 1965, V. 14, №2, P. 95 – 118.

[3]. Cesari L., *Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 1965, V. 20, №2, P. 170 – 190.

[4]. Cesari L., *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in Shauder's canonic form*, Ann. Scuola norm. super. Pisa., 1974, V. 1, №3-4, P. 311 – 358.

[5]. Cesari L., *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Shauder*, Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sc. fis. mat. e natur., 1974, V. 57, №5, P. 303 – 307.

[6]. Hale J.K., *Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter*, Arch. Rational Mech. Anal., 1967, V. 23, №5, P. 380 – 398.

[7]. Aziz A.K., *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1966, V. 17, №3, P. 557 – 566.

[8]. Aziz A.K. and Meyers A.M., *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip*, Trans. Amer. Math. Soc., 1969, V. 146, P. 167 – 178.

[9]. Aziz A.K. and Horak M.G., *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large*, SIAM J. Math. Anal., 1972, V. 3, №1, P. 176 – 182.

[10]. Aziz A.K. and Brodsky S.L., *Periodic solutions of a class of weakly nonlinear hyperbolic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal., 1972, V. 3, №2, P. 300 – 313.

[11]. Lakshmikantham V. and Pandit S.G., *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations* Comput. and Math., 1985, V. 11, №1-3, P. 249 – 259.

[12]. Zhestkov S.V., *Double periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, Ukrainian Mathematical Journal, 1987, V. 39, №4, P. 423 – 426.

[13]. Ptashnyck B.I., *Ill-posed boundary value problems for partial differential equations*, (Russian), Kiev: Naukova Dumka, 1984.

[14]. Samoilenko A.M., Tkach B.P., *Numerical-analytical methods in the theory periodical solutions of equations with partial derivatives*, (Russian), Kiev: Naukova Dumka, 1992.

[15]. Kiguradze T.I., *On the periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. I*, (Russian), Differentsial'nye Uravnenia, 1993, V. 29, №2, P. 281 – 297.

[16]. Kiguradze T.I., *On the periodic boundary value problems for linear hyperbolic equations. II*, (Russian), Differentsial'nye Uravnenia, 1993, V. 29, №4, P. 637 – 645.

[17]. Kiguradze T., *On periodic in the plane solutions of second order hyperbolic systems*, Archivum mathematicum, 1997, Tomus 33, №4, P. 253 – 272.

[18]. Kiguradze T., *On doubly periodic solutions of a class of nonlinear hyperbolic equations*, Differential equations, 1998, T. 34, №2. C. 242 – 249.

[19]. Kolesov A. Ju., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., *Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations*, Proc. Steklov Inst. of Math., 1998, V. 222, P. 3 – 188.

[20]. Kiguradze T., *On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations*, Nonlinear Analysis, 2000, V. 39, №1, P. 173 – 185.

[21]. Kiguradze T., Lakshmikantham V., *On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations*, Nonlinear Analysis, 2002, V. 49, №1, P. 87 – 112.

[22]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Unique Solvability of the Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations with Data on the Characteristics*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2002, V. 42, №11, P. 1609 – 1621.

[23]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Criteria of well-posed solvability of boundary value problem for system of hyperbolic equations*, (Russian), Izvestia NAN RKazakhstan. Ser. phyz.-mathem., 2002, №3, P. 20 – 26.

[24]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Unique Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations*, Differential Equations, 2003, V. 39, №10, P. 1414 – 1427.

[25]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Correct Solvability of a Nonlocal*

Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations, Doklady Mathematics, 2003, V. 68, №1, P. 46 – 49.

[26]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane*, Ukrainian Mathematical Journal, 2004, V. 56, №4, P. 682 – 694.

[27]. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S., *Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations*, Differential Equations, 2005, V. 41, №3, P. 352 – 363.

Статья поступила в редакцию 21.07.2012 г

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 56 – 69*

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д. Б. Базарханов

Институт математики, информатики и механики МОН РК

050010 Алматы ул.Пушкина, e-mail: 125 dauren.mirza@gmail.com

В работе строится линейный метод приближенного восстановления псевдодифференциальных операторов с символами из специальных классов. Даются оценки погрешности на единичных шарах подходящих функциональных пространств типа Никольского – Бесова и типа Лизоркина – Трибеля для некоторых соотношений между параметрами классов символов и функциональных пространств.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; для $m \in \mathbb{N}$

Keywords: *Pseudo-differential operator, approximate recovery, linear method, function space, mixed smoothness*

2010 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

$\mathrm{z}_m = \{1, 2, ..., m\}$; $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m–мерный тор. Для $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + ... + x_my_m, \|x\| = \sqrt{xx}, |x| = |x_1| + ... + |x_m|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| : \kappa \in \mathrm{z}_m\}$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений на $\mathbb{R}^m$ соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_m^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее, пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1–периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \lambda)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\lambda \in \mathbb{Z}^m$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\mathrm{supp}\, \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим гладкий символ $\psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ (т.е. $\psi(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$) и гладкий периодический символ $\widetilde{\psi} : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ (т.е. $\widetilde{\psi}(\cdot\,, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ для каждого $\xi \in \mathbb{Z}^m$) и соответствующие им формальные псевдодифференциальные операторы (ПДО)

$$\psi(x, D) : f(x) \to \psi(x, D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(\xi)\psi(x, \xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi,$$

$$\widetilde{\psi}(x, D) : f(x) \to \widetilde{\psi}(x, D)f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\xi)\widetilde{\psi}(x, \xi)e^{2\pi i\xi x}.$$

Введем следующие классы символов ("типа произведения" при $n \geq 2$). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, и вектор $\mathfrak{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|\mathfrak{m}| = m$ ($\mathfrak{m} = m$, если $n = 1$, $\mathfrak{m} = \mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^m$, если $n = m$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, ..., x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + ... + m_\nu$; $\mathrm{к}_\nu \equiv \{\kappa_{\nu-1} + 1, \ldots, \kappa_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^m$ положим

$$\partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial_{x_1}^{\lambda_1} ... \partial_{x_n}^{\lambda_n}}, \quad \Delta^\lambda = \Delta_1^{\lambda_1} \circ ... \circ \Delta_m^{\lambda_m},$$

здесь $\Delta_\kappa^{\lambda_\kappa}$ — конечная разность порядка λ_κ (с шагом 1) по κ–й переменной, $\kappa \in \mathrm{z}_m$.

Определение 1. *Пусть* $\mathtt{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, ..., K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда* `i)` *символ* $\psi(x,\xi)$ *принадлежит классу* $\Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathtt{m}} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathtt{m}}(\mathbb{R}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu} > 0$ *такая, что*

$$|\partial_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x,\xi)| \le c_{\lambda\,\mu} \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} (1 + \|\xi\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^m;$$

`ii)` *периодический символ* $\widetilde{\psi}(x,\xi)$ *принадлежит классу* $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathtt{m}} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathtt{m}}(\mathbb{T}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \le K_\nu$, $\kappa \in \mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, *и* $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu} > 0$ *такая, что*

$$|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \widetilde{\psi}(x,\xi)| \le c_{\lambda\,\mu} \prod_{\nu \in \mathrm{z}_n} (1 + \|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu|}, \quad x \in \mathbb{T}^m, \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Замечание 1. *При* $n = 1$ *класс символов* $\Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathtt{m}}$ *есть известный класс* $S^{\mathtt{t}}$ *Л. Хермандера, который играет важную роль в теории дифференциальных операторов с переменными коэффициентами; см., например, [1]. При* $n = m \ge 2$ *эти классы содержат символы ПДО смешанного типа. В несколько более общем случае* $1 \le n \le m$ *такие ПДО естественным образом возникают в связи с функциональными пространствами "типа произведения"; см., например, [2], [3], [4], [5], [6], [7, ch. II, §5.20-5.23, ch.III, §5.27].*

В настоящей работе строится линейный метод приближенного восстановления ПДО, который дает хорошую погрешность приближения для каждого ПДО с символом из класса $\Psi_{\varepsilon\,\vartheta}^{\mathtt{t}\,v\,\mathfrak{K}\mathtt{m}}(\mathbb{I}^m)$ (см. Определение 3 ниже) на элементах подходящих функциональных пространств типа Никольского – Бесова $B_{p\,q}^{\mathtt{s}\,\mathtt{m}}(\mathbb{I}^m)$ и типа Лизоркина – Трибеля $L_{p\,q}^{\mathtt{s}\,\mathtt{m}}(\mathbb{I}^m)$.

2. Функциональные пространства

Пусть $L_p(\mathbb{I}^m)(1 \le p \le \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной нормой $\|f \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|$; здесь $\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$; $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^m)$, $\widetilde{L}_p \equiv L_p(\mathbb{T}^m)$. Ясно, что для $f \in L_1$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ и $g \in \widetilde{L}_1$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m))$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \xi \in \mathbb{R}^m, \ \widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^m} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Далее, $\ell_q = \ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(1 \le q \le \infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha) = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой

$$\|(a_\alpha) \,|\, \ell_q\| = \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |a_\alpha|^q \Big)^{1/q} \ (1 \le q < \infty), \|(a_\alpha) \,|\, \ell_\infty\| = \sup(|a_\alpha| \, : \alpha \in \mathbb{N}_0^n);$$

$\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))$ (соответственно, $L_p(\mathbb{I}^m; \ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$, $x \in \mathbb{I}^m$, с конечной нормой

$$\|(g_\alpha) \,|\, \ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\| = \|(\|g_\alpha \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|) \,|\, \ell_q\|$$

(соответственно,

$$\|(g_\alpha) \,|\, L_p(\mathbb{I}^m; \ell_q\| = \|\|(g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_q\| \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|).$$

Теперь определим ($\mathfrak{m}$–кратное) разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Выберем функции $\eta_0^\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_\nu})\,(\nu \in \mathrm{z}_n)$ такие, что $0 \le \widehat{\eta_0^\nu}\,(\xi^\nu) \le 1$, $\xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\widehat{\eta_0^\nu}\,(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \le 1$; $\widehat{\eta_0^\nu}\,(\xi^\nu) = 0$, если $|\xi^\nu|_\infty \ge 3/2$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$. Положим $\widehat{\eta^\nu}\,(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta_0^\nu}\,(2^{-1}\xi^\nu) - \widehat{\eta_0^\nu}\,(\xi^\nu)$; $\widehat{\eta_j^\nu}\,(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta^\nu}\,(2^{-j+1}\xi^\nu), j \in \mathbb{N}$; тогда

$$\{\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu), \ j \in \mathbb{N}_0\}$$

— гладкое разбиение единицы (по "коридорам") на $\mathbb{R}^{m_\nu}$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$, а

$$\{\widehat{\eta}_\alpha(\xi) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} \widehat{\eta_{\alpha_\nu}^\nu}(\xi^\nu), \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$$

— ($\mathfrak{m}$ – кратное) гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$.

Наконец, введем операторы $\Delta^\eta_\alpha \equiv \Delta^{\eta,\mathbb{R}}_\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\widetilde{\Delta}^\eta_\alpha \equiv \Delta^{\eta,\mathbb{T}}_\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ следующим образом :

$$\Delta^\eta_\alpha(f,x) \equiv \Delta^{\eta,\mathbb{R}}_\alpha(f,x) = \mathcal{F}^{-1}_m(\,\widehat{\eta}_\alpha \widehat{f}\,)(x) = \eta_\alpha * f(x)$$

(свертка понимается в смысле теории распределений),

$$\widetilde{\Delta}^\eta_\alpha(f,x) \equiv \Delta^{\eta,\mathbb{T}}_\alpha(f,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_\alpha(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

Определение 2. *Пусть* $\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $1 \le p, q \le \infty$; $\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$.

I. *Пространство типа Никольского–Бесова* $B^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, B^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)\,\| \;=\; \|(2^{\alpha\mathfrak{s}}\Delta^{\eta,\mathbb{I}}_\alpha(f,x))\,|\,\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\|.$$

II. *Пространство типа Лизоркина–Трибеля* $L^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, L^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)\,\| \;=\; \|(2^{\alpha\mathfrak{s}}\Delta^{\eta,\mathbb{I}}_\alpha(f,x))\,|\,L_p(\mathbb{I}^m;\ell_q)\|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ *и* $\mathrm{L}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля соответственно; положим ради краткости* $A^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q} = A^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{R}^m)$, $\widetilde{A}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q} = A^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, *где* $A \in \{B, \mathrm{B}, L, \mathrm{L}\}$.

Из класса $\Psi^{\mathfrak{t}\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}(\mathbb{I}^m)$ с помощью дополнительных условий гладкости выделим класс $\Psi^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{I}^m)$.

Определение 3. *Пусть* $1 \le \vartheta \le \infty$; $\mathfrak{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\upsilon = (\upsilon_1, ..., \upsilon_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = (K_1, ..., K_n) \in \mathbb{N}^n$. *Тогда* `i)` *символ* $\psi(x,\xi) \in \Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathfrak{m}}$ *принадлежит классу* $\Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{R}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \leq K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \neq \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что* ($\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{z}_n \setminus \mathrm{z}$)

$$\|\partial_\xi^\lambda \partial_x^\mu \psi(x,\xi) \,|\, B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,\mathfrak{m}_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \leq c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu \in \mathrm{z}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu \varepsilon_\nu} \times$$

$$\times \prod_{\nu \in \dot{\mathrm{z}}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{t_\nu - \rho_\nu |\lambda^\nu| + \delta_\nu |\mu^\nu|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^m;$$

`ii)` *периодический символ* $\widetilde{\psi}(x,\xi) \in \Psi^{\mathtt{t}\mathfrak{K}\mathfrak{m}}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta} \equiv \Psi^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}(\mathbb{T}^m)$, *если для любых* $\lambda \in \mathbb{N}_0^m$ *с* $\lambda_\kappa \leq K_\nu$, $\kappa \in \mathrm{K}_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n$, $\mu \in \mathbb{N}_0^m$ *и любого* $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \neq \varnothing)$ *найдется постоянная* $c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) > 0$ *такая, что*

$$\|\Delta_\xi^\lambda \partial_x^\mu \widetilde{\psi}(x,\xi) \,|\, \widetilde{B}^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,\mathfrak{m}_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}\| \leq c_{\lambda\,\mu}(\mathrm{z}) \prod_{\nu \in \mathrm{z}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\lambda^\nu| + \upsilon_\nu \varepsilon_\nu} \times$$

$$\times \prod_{\nu \in \dot{\mathrm{z}}} (1 + \|\xi^\nu\|)^{t_\nu - |\mu^\nu|}, \qquad x \in \mathbb{T}^m, \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

(Здесь норма $\| \cdot \,|\, B^{\upsilon_{\mathrm{z}}\,\mathfrak{m}_{\mathrm{z}}}_{\infty\,\vartheta}(\prod_{\nu \in \mathrm{z}} \mathbb{I}^{m_\nu})\|$ применяется по "переменной" $x^{\mathrm{z}} \equiv (x^\nu : \nu \in \mathrm{z})$).

3. Конструкция линейного метода восстановления ПДО

Положим

$$\mathrm{E}^m \equiv \mathrm{E}^m(0) = \{\mathit{0}, \mathit{1}\}^m, \quad \mathrm{E}^m(1) = \mathrm{E}^m \setminus \{(\mathit{0}, \ldots, \mathit{0})\};$$

$$\Lambda^{\mathbb{R}}(m,j) = \mathbb{Z}^m, \quad \Lambda^{\mathbb{T}}(m,j) \equiv \Lambda(m,j) = \mathbb{Z}^m \cap [0, 2^j - 1]^m, \; j \in \mathbb{N}_0.$$

Обозначим через $\mathcal{W}_m^{\mathbb{R}}$ (соответственно, $\mathcal{W}_m^{\mathbb{T}}$) m–мерную систему (соответственно, периодизированных) всплесков Мейера :

$$\mathcal{W}_m^{\mathbb{I}} \equiv \{\, w_{j\lambda}^{\iota,\mathbb{I}} \;\mid\; \lambda \in \Lambda^{\mathbb{I}}(m,j), \, \iota \in \mathrm{E}^m(\mathrm{sign} j), \, j \in \mathbb{N}_0 \}(x \in \mathbb{I}^m; \mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\});$$

для вектора $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{z} \subset \mathrm{z}_n (\mathrm{z} \neq \varnothing)$ через a_{z} обозначаем вектор $(a_\nu : \nu \in \mathrm{z})$.

хорошо известно, что $\mathcal{W}_m^{\mathbb{I}}$ образует ортонормированный базис $L_2(\mathbb{I}^m)$ и безусловный базис $L_p(\mathbb{I}^m)(1 < p < \infty)$ (определение и свойства $\mathcal{W}_m^{\mathbb{I}}$ см. [8, Ch.3]; см. еще [9, §2]). Введем теперь ($\mathfrak{m}$– кратную) систему

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{\mathbb{I}} \equiv \mathcal{W}_{m_1}^{\mathbb{I}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}_{m_n}^{\mathbb{I}} \equiv$$

$$\equiv \{w_{\alpha\lambda}^{\iota,\mathbb{I}}(x) = w_{\alpha_1\,\lambda^1}^{\iota^1,\mathbb{I}}(x^1)\times\cdots\times w_{\alpha_n\,\lambda^n}^{\iota^n,\mathbb{I}}(x^n) \mid \lambda \in \Lambda^{\mathbb{I}}(\mathfrak{m},\alpha),\ \iota \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\};$$

здесь $\mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha) = \{\iota \in \mathrm{E}^m : \iota^\nu \in \mathrm{E}^{m_\nu}(\operatorname{sign}\alpha_\nu),\ \nu \in \mathrm{z}_n\}$, $\Lambda^{\mathbb{I}}(\mathfrak{m},\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{Z}^m \mid \lambda^\nu \in \Lambda^{\mathbb{I}}(m_\nu,\alpha_\nu),\ \nu \in \mathrm{z}_n\}$ $(x \in \mathbb{I}^m)$; положим $\tilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}(x) = w_{\alpha\lambda}^{\iota,\mathbb{T}}(x)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{m}}^{\mathbb{T}}$.

Для определенности дальнейшие рассмотрения проведем в периодическом случае $\mathbb{I} = \mathbb{T}$; они справедливы (с очевидными изменениями) и в случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Запишем $f \in S'(\mathbb{T}^m)$ и $g(x) \equiv \psi(x,D)f(x)$ формально в виде ряда Фурье по системе $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathfrak{m}}$:

$$f(x) = \sum_{\alpha}\sum_{\iota}\sum_{\lambda} f_{\alpha\lambda}^{\iota}\widetilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}(x), \quad f_{\alpha\lambda}^{\iota} = \langle f, \widetilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}\rangle,$$

$$g(x) = \sum_{\alpha}\sum_{\iota}\sum_{\lambda} g_{\alpha\lambda}^{\iota}\widetilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}(x), \quad g_{\alpha\lambda}^{\iota} = \langle g, \widetilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}\rangle,$$

при этом

$$g_{\alpha\lambda}^{\iota} = \sum_{\beta}\sum_{\jmath}\sum_{\xi} a_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}^{\iota,\jmath} f_{\beta\mu}^{\iota},$$

где бесконечная (числовая) матрица $(a_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}^{\iota,\jmath} : \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \lambda \in \Lambda(\mathfrak{m},\alpha),\ \mu \in \Lambda(\mathfrak{m},\beta),\ \iota \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha), \jmath \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\beta))$ однозначно определяется по ПДО $\psi(x,D)$. Для $u > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}_+^n$ положим

$$g_{\alpha\lambda}^{\iota}(u;\gamma) = \sum_{\beta\gamma<u}\sum_{\jmath}\sum_{\mu} a_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}^{\iota,\jmath} f_{\beta\mu}^{\iota},$$

$$\mathcal{I}_{u,\gamma}^{lin}(f) = (f_{\alpha\lambda}^{\iota} \mid \alpha\gamma < u, \iota \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha), \lambda \in \Lambda(\mathfrak{m}, \alpha)),$$

$$\mathcal{J}_{u,\gamma}^{lin}(\psi) = (a_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}^{\iota,\jmath} \mid \alpha\gamma < u, \beta\gamma < u;$$

$$\iota \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha), \jmath \in \mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\beta); \lambda \in \Lambda(\mathfrak{m}, \alpha), \mu \in \Lambda(\mathfrak{m}, \beta)),$$

определим теперь метод приближенного восстановления значений ПДО $\psi(x, D)f(x)$, использующий информацию $\mathcal{J}_{u,\gamma}^{lin}(\psi)$ об операторе и информацию $\mathcal{I}_{u,\gamma}^{lin}(f)$ о функции, по формуле

$$s^{lin}(\mathcal{I}_{u,\gamma}^{lin}(f), \mathcal{J}_{u,\gamma}^{lin}(\psi); x) = \sum_{\alpha\gamma<u} \sum_{\iota} \sum_{\lambda} g_{\alpha\lambda}^{\iota}(u;\gamma) \widetilde{w}_{\alpha\lambda}^{\iota}(x). \qquad (\clubsuit)$$

Легко видеть (следует применить лемму 5.1 из [9]), что при $\gamma \geq \mathfrak{m}$ верны оценки

$$N = \sum_{\alpha\gamma<u} \sum_{\iota\in\mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha)} \sum_{\lambda\in\Lambda(\mathfrak{m},\alpha)} 1 \asymp 2^u u^{\omega-1};$$

$$M = \sum_{\alpha\gamma<u} \sum_{\beta\gamma<u} \sum_{\iota\in\mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\alpha)} \sum_{\jmath\in\mathrm{E}^{\mathfrak{m}}(\beta)} \sum_{\lambda\in\Lambda(\mathfrak{m},\alpha)} \sum_{\xi\in\Lambda(\mathfrak{m},\beta)} 1 = N^2,$$

где $\omega = |\{\nu \in \mathrm{z}_n : \gamma_\nu = m_\nu\}|$ ($|A|$ — число элементов конечного множества A). Таким образом, всего "единиц информации— $N + M \asymp M \asymp 2^{2u} u^{\omega-1}$.

4. Основной результат

Прежде всего выберем вектор $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Положим $\sigma_\nu = \frac{\upsilon_\nu - 1}{m_\nu} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+, \nu \in \mathrm{z}_n$; $\sigma \equiv \min\{\sigma_\nu : \nu \in \mathrm{z}_n\}$, $\omega = |\{\nu \in \mathrm{z}_n : \sigma_\nu = \sigma\}|$. Не ограничивая общности, считаем, что $\sigma = \sigma_1 = ... = \sigma_\omega < \sigma_\nu$, $\nu \in \mathrm{z}_n \backslash \mathrm{z}_\omega$. Выберем числа $\sigma_\nu^{'}, \nu \in \mathrm{z}_n$, из условий: $\sigma = \sigma_1^{'} = ... = \sigma_\omega^{'}, \sigma < \sigma_\nu^{'} < \sigma_\nu$ при $\nu \in \mathrm{z}_n \backslash \mathrm{z}_\omega$. Наконец, полагаем $\gamma_\nu = \sigma_\nu^{'} m_\nu / \sigma, \nu \in \mathrm{z}_n$.

Будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая константа $C = C(F, H) > 0$, что верно неравенство

$F(u) \leq CH(u)$ для $u \geq u_0 > 0$; $F(u) \asymp H(u)$, если одновременно $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$. Ниже $p_* = \min\{p, 2\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{s}, \upsilon \in \mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t} \in \mathbb{R}^n$; $1 \leq p, q, r, \vartheta \leq \infty$ *такие, что* $\mathfrak{s} - \mathfrak{t} = \upsilon - \mathbf{1}, \sigma > 0$; $\varepsilon \in [0,1]^n$; $\mathfrak{K} = \mathfrak{m} + \mathbf{1}(\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^n)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Пусть* $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x, D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \ \ | \ \ f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q})_+};$$

если, кроме того, $1 < p < \infty$, *то для любого* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x, D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \ \ | \ \ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})_+};$$

более того, найдутся символы $\widetilde{\psi}^{\star}, \widetilde{\psi}^{*} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{\star}(x, D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{\star}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \ \ | \ \ f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{q})_+};$$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{*}(x, D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{*}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \ \ | \ \ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{*}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{*}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})_+};$$

Здесь и ниже обозначения $\ll_{\widetilde{\psi}}$ и $\asymp_{\widetilde{\psi}}$ подчеркивают, что константы в определении $\ll$ и $\asymp$ зависят от $\widetilde{\psi}$.

для любого $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_1\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{1\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}};$$

более того, найдется символ $\widetilde{\psi}^{\star} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такой, что*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{\star}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{\star}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_1\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{1\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}}.$$

II. *Пусть* $1 \leq p < r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. *Тогда для любого символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma};$$

более того, найдутся символы $\widetilde{\psi}^{\star}, \widetilde{\psi}^{*} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{\star}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{\star}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})_+},$$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{*}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{*}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_r\| \;\;|\;\; f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{*}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{*}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma}.$$

III. *Пусть* $1 \le p, q \le r = \infty$. *Тогда для любого символа* $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верны оценки*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_\infty\| \ \mid\ f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}}$$

и (если, кроме того, $p < \infty$*)*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_\infty\| \ \mid\ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{p}};$$

более того, найдутся символы $\widetilde{\psi}^{\star}, \widetilde{\psi}^{*} \in \widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такие, что*

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{\star}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{\star}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_\infty\| \ \mid\ f \in \widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{q}},$$

$$\sup\{\|\widetilde{\psi}^{*}(x,D)f - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{*}), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f), \cdot\,) \,|\, \widetilde{L}_\infty\| \ \mid\ f \in \widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{*}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{*}} \left(\frac{\log^{\omega-1} N}{N}\right)^{\sigma} (\log^{\omega-1} N)^{1-\frac{1}{p}}.$$

5. Схема доказательства теоремы 1

Ключевыми ингредиентами доказательства теоремы 1 являются приводимые ниже теоремы 2 и 3, а также установленные ранее автором оценки поперечников Фурье классов $\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ и $\widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в метрике $\widetilde{L}_r$ [10].

Шаг 1. На этом шаге устанавливается , что ПДО $\psi(x,D)$ с символом из $\Psi^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ (соответственно, ПДО $\widetilde{\psi}(x,D)$ с символом из $\widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$) действует непрерывно из $\mathrm{A}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в $\mathrm{A}^{\mathfrak{s}-\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ (соответственно, из $\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в $\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}-\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$), здесь $\mathrm{A} = \{\mathrm{B}, \mathrm{L}\}$ в более общем контексте, нежели требуется для доказательства Теоремы 1. Именно, верна

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{s}\in\mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t}\in\mathbb{R}^n_+$ *такие, что* $\mathfrak{t}<\mathfrak{s},\ \upsilon\in\mathbb{R}^n_+,\ 1\le p,q,\vartheta\le\infty$, $\varepsilon\in[0,1]^n$; $\mathfrak{K}\in\mathbb{N}^n$ *такой, что* $\mathfrak{K}>\mathfrak{m}$. *Пусть далее символ* $\psi\in\Psi^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *(периодический символ* $\widetilde{\psi}\in\widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$*). Тогда ПДО* $\psi(x,D)$ *(соответственно, периодический ПДО* $\widetilde{\psi}(x,D)$*) является непрерывным из* $B^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $B^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *(соответственно, из* $\widetilde{B}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $\widetilde{B}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$*) и при* $p<\infty$ *из* $L^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $L^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *(соответственно, из* $\widetilde{L}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ *в* $\widetilde{L}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$*), если для каждого* $\nu\in\mathrm{z}_n$ *выполнено одно из следующих условий:*

i) $s_\nu-t_\nu<\upsilon_\nu$;

ii) $s_\nu-t_\nu=\upsilon_\nu,\ \ \varepsilon_\nu<1,\ \vartheta\le q\le\infty$;

iii) $s_\nu-t_\nu=\upsilon_\nu,\ \ \varepsilon_\nu=\vartheta=q=1$.

Отметим, что в непериодическом случае с $\mathfrak{K}=(\infty,...,\infty)$, $\mathfrak{t}=0$ эта теорема получена в [5].

Шаг 2. Здесь устанавливается связь между погрешностью метода восстановления ПДО (♣) с символом из $\widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ на классе $\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}$ и соответствующим поперечником Фурье. Напомним, что поперечником Фурье порядка N множества $\widetilde{\mathrm{F}}\subset\widetilde{L}_q$ называется величина

$$\varphi_N(\widetilde{\mathrm{F}},\widetilde{L}_q)=\inf_{\{g_j\}_{j=1}^N}\sup_{f\in\widetilde{\mathrm{F}}}\|f-\sum_{j=1}^N\langle f,g_j\rangle g_j\,\|_q,$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — скалярное произведение функций и нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{g_j\}_{j=1}^N\subset\widetilde{L}_\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{s},\upsilon\in\mathbb{R}^n_+, \mathfrak{t}\in\mathbb{R}^n,\ 1\le p,q,r,\vartheta\le\infty$ *такие, что* $\mathfrak{s}-\mathfrak{t}=\upsilon-\mathbf{1},\sigma>0$; $\varepsilon\in[0,1]^n$; $\mathfrak{K}=\mathfrak{m}+\mathbf{1}(\mathbf{1}=(1,...,1)\in\mathbb{N}^n)$. *Тогда для любого периодического символа* $\widetilde{\psi}\in\widetilde{\Psi}^{\mathfrak{t}\,\upsilon\,\mathfrak{K}\mathfrak{m}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *верна оценка*

$$\sup\{\|g-s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}),\mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,\widetilde{L}_r\|\ \ |\ \ f\in\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\}\ll_{\widetilde{\psi}}$$

$$\ll_{\widetilde{\psi}}\varphi_N(\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q},\widetilde{L}_r)=\varphi_{\sqrt{M}}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}-\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}}_{p\,q},\widetilde{L}_r).$$

Кроме того, найдется символ $\widetilde{\psi}^{\star} \in \widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{Km}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ *такой, что*

$$\sup\big\{\|g^{\star} - s^{lin}(\mathcal{J}^{lin}_{u,\gamma}(\widetilde{\psi}^{\star}(\cdot,\cdot)), \mathcal{I}^{lin}_{u,\gamma}(f))\,|\,\widetilde{L}_r\| \quad |f \in \widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}\,\mathfrak{m}}_{p\,q}\big\} \asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}}$$

$$\asymp_{\widetilde{\psi}^{\star}} \varphi_N(\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\mathfrak{m}}_{p\,q}, \widetilde{L}_r) = \varphi_{\sqrt{M}}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\mathfrak{m}}_{p\,q}, \widetilde{L}_r).$$

Здесь $g^{\star}(x) = \widetilde{\psi}^{\star}(x, D)f(x)$*;* A *— это* B *или* L .

Шаг 3. Теперь (ввиду теоремы 3) для получения требуемых оценок погрешности восстановления ПДО с символом из класса $\widetilde{\Psi}^{\mathtt{t}\,\upsilon\,\mathfrak{Km}}_{\varepsilon\,\vartheta}$ остается применить оценки поперечников Фурье классов $\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\mathfrak{m}}_{p\,q}$ и $\widetilde{\mathrm{L}}^{\mathfrak{s}-\mathtt{t}\mathfrak{m}}_{p\,q}$ в метрике $\widetilde{L}_r$ из работы [10]. Отметим, что эти оценки поперечников Фурье ранее частично анонсированы в заметке [11] (там использованы несколько иные обозначения). Пользуясь случаем, отметим, что в случае A теоремы 1 из [11] для классов Лизоркина – Трибеля вместо условия $p < \infty$ должно быть $1 < p < \infty$.

Цитированная литература

[1]. Хёрмандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Псевдодифференциальные операторы, М., "Мир" , 1987, Т. 3.

[2]. Fefferman R., Stein E.M., *Singular integrals on product spaces*, Adv. Math., 1982, V.45, P. 117 – 143.

[3]. Chang S.-Y.A., Fefferman R., *Some recent developments in Fourier analysis and H^p–theory on product domains*, Bull. Amer Math. Soc., 1985, V. 12, P. 1 – 43.

[4]. Fefferman R., *Harmonic analysis on product spaces*, Ann. Math., 1987, V.126, P. 109 – 130.

[5]. Yamazaki M., *Boundedness of product type pseudodifferential operators on spaces of Besov type*, Math. Nachr., 1987, V. 188, P. 297 – 315.

[6]. Carbery A., Seeger A., *H^p and L^p variants of multiparameter Calderon–Zygmund theory*, Trans. Amer Math. Soc., 1992, V. 334, P. 719 – 747.

[7]. Stein E.M., *Harmonic analysis: Real–Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton, "Princeton Univ. Press" , 1993.

[8]. Meyer Y., *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 37. "Cambridge Univ. Press" , 1992.

[9]. Базарханов Д.Б., *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I*, Тр. МИ РАН, 2010, Т. 269, С. 8 – 30.

[10]. Базарханов Д.Б., *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II*, Analysis math., 2011, 45 с. (принята в печать).

[11]. Базарханов Д.Б., *Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля периодических функций многих переменных*, Матем. заметки, 2010, Т. 87, № 2, С. 305 – 308.

Статья поступила в редакцию 11.07.2012 г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 70 – 86*

УДК 517.95

ON THE SOLUTIONS OF THE LINEAR FREE BOUNDARY PROBLEMS OF STEFAN TYPE WITH A SMALL PARAMETER. II

G. I. Bizhanova

Dedicated to the memory of
Daulet Umbetzhanovich Umbetzhanov

Institute of Mathematics of MES of KR
Pushkin str. 125, Almaty 050010, Kazakhstan, e-mail: galina_math@mail.ru

The linear one-phase Stefan type problem for the heat equation with a small parameter at the principle term in the boundary condition is studied. In the Hölder spaces there are obtained the estimates of the solution of a perturbed problem with the constants independent on the small parameter.

1. Statement of the problems, main results

Let $D := \mathbb{R}^n_+ = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $n \geq 2$, $R := \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n = 0\}$, $D_T := D \times (0, T)$, $R_T := R \times [0, T]$, $\varepsilon > 0$ be a small parameter, $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

By C_1, $C_2, \dots$ we shall denote the positive constants.

Keywords: *Parabolic equation, small parameter in the boundary condition, singular perturbation, coercive estimates, Hölder space*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B25, 35C05

Consider the following problem.

It is required to find the function $u(x,t)$ satisfying the heat equation

$$\partial_t u - a\,\Delta u = 0 \text{ in } D_T, \tag{1.1}$$

initial and boundary conditions

$$u|_{t=0} = 0 \text{ in } D, \tag{1.2}$$

$$(\varepsilon\,\partial_t u - b\nabla^T u)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ on } R_T, \tag{1.3}$$

where all coefficients are constant, $a > 0 \quad b = (b', b_n)$, $b' = (b_1, \dots, b_{n-1})$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\nabla^T = \text{colon}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\nabla'^T = \text{colon}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-1}})$ — column-vectors, $b\,\nabla^T = b_1\,\partial_{x_1} + \dots, +b_n\,\partial_{x_n}$ - scalar product, $\Delta = \partial^2_{x_1} + \dots + \partial^2_{x_n}$.

The problem (1.1) – (1.3) describes the heat transfer in a body. Moreover, it is a linearized one - phase free boundary problem of a Stefan type. In the Höder spaces this problem with $\varepsilon = 1$ was studied by B.V.Bazalyi [1], E.V.Radkevich [2], G.I.Bizhanova and V.A.Solonnikov [3] and others. In [4] J.F. Rodrigues, V.A.Solonnikov, F. Yi have investigated one-phase linear and nonlinear free boundary problems for the second order parabolic equations with a small parameter $\varepsilon > 0$ at the time derivative in the boundary condition. They have established the uniform with respect to ε estimates of the solution in the Hölder space $C_x^{2+\alpha,}{}_t^{1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, from which the existence of the solutions to the considered problems with $\varepsilon = 0$ follows.

To study the convergence of the solution of the perturbed problem as $\varepsilon \to 0$, its asymptotics with respect to a small parameter we have to fined the estimates of the solution in the Hölder space $C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(D_T)$, l – positive non-integer, $[l] = 0, 1, \dots$, with a constant independent on ε. Moreover, we should know the behavior of a time derivative $\varepsilon\partial_t u|_{x_n=0}$ as a small parameter ε goes to zero.

In a Chapter 2 we derive the estimates of a solution in a Hölder space $C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(D_T)$, l – positive non-integer, with a constant, which is not depend on ε. In a Chapter 3 there is obtained an estimate of a time derivative of the solution $\varepsilon\partial_t u|_{x_n=0}$ in a space $C_{x'}^{1+\beta,}{}_t^{\frac{1+\beta}{2}}(R_T)$, $\beta \in (0, \alpha/2)$.

We shall study the problem in the Hölder space $C_x^{2+l,}{}_t^{1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, l - positive non-integer, of the functions $u(x,t)$ with the norm [5]:

$$|u|_{\Omega_T}^{(2+l)}=\sum_{2m_0+|m|\le 2+[l]}|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{\Omega_T}+\sum_{2m_0+|m|=2+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{\Omega_T}^{(\alpha)}$$

$$+\sum_{2m_0+|m|=1+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ \alpha=l-[l]\in(0,1), \tag{1.4}$$

where $\Omega_T:=\Omega\times(0,T)$, Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, m_i are the nonnegative integers, $|m|=m_1+\ldots+m_n$,

$$|v|_{\Omega_T}=\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|\,v|,\ [v]_{\Omega_T}^{(\alpha)}=[v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}+[v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)},$$

$$[v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}=\max_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T}\frac{\bigl|v(x,t)-v(z,t)\bigr|}{|x-z|^\alpha},$$

$$[v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)}=\max_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T}\frac{\bigl|v(x,t)-v(x,t_1)\bigr|}{|t-t_1|^\alpha},\ \alpha\in(0,1).$$

By $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$ we designate the subset of the functions $u(x,t)\in C_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, such that $\partial_t^k u\big|_{t=0}=0$, $k=0,\dots,1+[l/2]$.

The following lemma is valid.

Lemma 1.1 [6]. *In* $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,\,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$ *the norm* $|u|_{\Omega_T}^{(2+l)}$ *defined by formula* (1.4) *is equivalent to the norm*

$$||u||_{\Omega_T}^{(2+l)}=\sup_{(x,t)\in\Omega_T}t^{-(1+l/2)}|u(x,t)|+\sum_{2m_0+|m|=2+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{\Omega_T}^{(\alpha)}$$

$$+\sum_{2m_0+|m|=1+[l]}[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ \alpha=l-[l]\in(0,1). \tag{1.5}$$

We formulate the main results for the problem (1.1)–(1.3).

Theorem 1.1. *Let* $b_n>0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $l-$ *positive non-integer,* $[l]=0,1,\dots$.

For every function $\Phi(x',t)\in\overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(R_T)$ *the problem (1.1)-(1.3) has a unique solution* $u(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{D}_T)$, $\varepsilon\,\partial_t u(x,t)|_{x_n=0}\in\overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{1+l,\frac{1+l}{2}}(R_T)$, *and it satisfies an estimate*

$$|u|_{D_T}^{(2+l)} + |\varepsilon \partial_t u|_{R_T}^{(1+l)} \le C_1 |\Phi|_{R_T}^{(1+l)}, \tag{1.6}$$

where a constant C_1 does not depend on ε.

Theorem 1.2. *Let $b_n > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ \Phi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+\alpha,}{}_{t}^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$.*

The time derivative $\varepsilon \partial_t u(x, t)|_{x_n=0}$ in the condition (1.3) *of the problem* (1.1) – (1.3) *satisfies an estimate*

$$|\varepsilon \partial_t u|_{C_{x'}^{1+\beta,}{}_{t}^{\frac{1+\beta}{2}}(R_T)} \le C_2 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |\Phi|_{R_T}^{(1+\alpha)},\ \beta \in (0,\, \alpha/2), \tag{1.7}$$

where a constant C_2 is independent on ε.

Consider the problem with the two unknown functions $u(x, t)$ and $\psi(x' t)$

$$\partial_t u - a\, \Delta u = 0 \text{ in } D_T, \tag{1.8}$$

$$u|_{t=0} = 0 \text{ in } D, \tag{1.9}$$

$$u|_{x_n=0} - \mu \psi = 0 \text{ on } R_T, \tag{1.10}$$

$$(\varepsilon\, \partial_t \psi - b \nabla u + h' \nabla' \psi)|_{x_n=0} = \Phi(x', t) \text{ on } R_T, \tag{1.11}$$

where $h' = (h_1, \dots, h_{n-1})$, all coefficients are constant.

Excluding the function $\psi(x', t)$ we obtain for the function $u(x, t)$ the problem (1.1) – (1.3) and the following theorems:

Theorem 1.3. *Let $b_n > 0,\ \mu > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ l-$ positive non-integer, $[l] = 0, 1, \dots,$.*

For every function $\Phi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+l,}{}_{t}^{\frac{1+l}{2}}(R_T)$ the problem (1.8)-(1.11) has a unique solution $u(x, t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+l,}{}_{t}^{1+l/2}(\overline{D}_T)$, $\psi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{2+l,}{}_{t}^{1+l/2}(R_T)$, $\varepsilon\, \partial_t \psi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+l,}{}_{t}^{\frac{1+l}{2}}(R_T)$, and it satisfies the estimate

$$|u_j|_{D_T}^{(2+l)} + |\psi|_{R_T}^{(2+l)} + |\varepsilon \partial_t \psi|_{R_T}^{(1+l)} \le C_3 |\Phi|_{R_T}^{(1+l)},$$

where a constant C_3 does not depend on ε.

Theorem 1.4. *Let $b_n > 0,\ \mu > 0,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ \Phi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+\alpha,}{}_{t}^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$.*

The time derivative $\varepsilon\partial_t\psi(x',t)$ in the condition (1.11) *of the problem* (1.8) – (1.11) *satisfies an estimate*

$$|\varepsilon\partial_t u|_{C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)} \le C_4\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_T},\ \beta\in(0,\alpha/2),$$

where a constant C_4 is independent on ε.

2. Proof of Theorem 1.1

Consider the problem (1.1)–(1.3).

Lemma 2.1. *Let $b_n>0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $l-$ positive non-integer, $[l]=0,1,\dots$.*

For every function $\Phi(x',t)\in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$ the solution of the problem (1.1)–(1.3) has a form

$$u(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Phi(y',\tau)G_\varepsilon(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy' := \frac{1}{\varepsilon}\big(\Phi*G_\varepsilon\big), \quad (2.1)$$

where

$$G_\varepsilon(x'-y',x_n,t-\tau)=-2a\int_0^{t-\tau}\Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma,x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma,t-\tau-\sigma)\,d\sigma$$

$$\equiv\int_0^t\frac{x_n+b_n\,\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau-\sigma)})^n(t-\tau-\sigma)}e^{-\frac{(x'-y'+b'\sigma/\varepsilon)^2+(x_n+b_n\sigma/\varepsilon)^2}{4a_2(t-\tau-\sigma)}}\,d\,\sigma. \quad (2.2)$$

We remind that

$$\Gamma(x,t)=\frac{1}{(2\sqrt{a\pi t})^n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4at}}$$

is a fundamental solution to the heat equation (1.1), which satisfies an estimate

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\Gamma(x,t)|\le C_5\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\,e^{-\frac{x^2}{8at}}. \quad (2.3)$$

Proof. We apply Laplace (L) with respect to t and Fourier (F) with respect to x' transforms to the problem (1.1)–(1.3)

$$F\,L\,[u(x,t)] := \tilde u(s',x_n,p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{-ix's'}dx',$$

where $s' = (s_1, \dots, s'_{n-1})$, $x's' = x_1 s_1 + \dots + x_{n-1}s_{n-1}$, then we find

$$\tilde{u} = \frac{1}{\varepsilon\zeta}\tilde{\Phi}e^{-rx_n},\ \zeta = p + \frac{\beta b_n}{\varepsilon}r - \frac{is'b'}{\varepsilon},\ r^2 = \frac{p + as'^2}{a}.$$

Here $\operatorname{Re}\zeta \geq c_0 > 0$, so we can represent the fraction $1/\zeta$ as follows

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^\infty e^{-\zeta\sigma}d\sigma$$

and obtain

$$\tilde{u} = \frac{1}{\varepsilon}\,\tilde{\Phi}\int_0^\infty e^{-(p+(\frac{b_n}{\varepsilon}+x_n)r-\frac{is'b'}{\varepsilon})\sigma}d\sigma.$$

Applying the inverse Laplace and Fourier transforms [7] and convolution formula we find the solution to the problem (1.1)–(1.3) in the explicit form (2.1).

We see that a parameter ε is contained in the form $\frac{1}{\varepsilon}$ in the formula (2.1) and in the exponents in (2.2) of a Green function $G_\varepsilon(x,t)$, i.e. the function $u(x,t)$ has indefiniteness of $\frac{0}{0}$ order as $\varepsilon \to 0$. □

Proof of Theorem 1.1. Consider the function $u(x',0,t) = \frac{1}{\varepsilon}\big(\Phi * G_\varepsilon\big)|_{x_n=0}$. To prove that $u(x',0,t)$ belongs to the space $\overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, l – noninteger, $[l] = 0, 1, \dots$, we should estimate due to (1.5) the Hölder constants

$$[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}u(x',0,t)]^{(\alpha)}_{R_T},\quad 2m_0 + |m'| = 2 + [l], \tag{2.4}$$

$$[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}u(x',0,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T},\quad 2m_0 + |m'| = 1 + [l] \tag{2.5}$$

and modulo $u(x',0,t)$, where $\alpha = l - [l] \in (0,1)$, $m' = (m_1, \dots, m_{n-1})$.

Considering $[l] = 2k$ and $[l] = 2k+1$, $k = 0, 1, \dots$, as in [8] we verify that to estimate the Hölder constants (2.4, (2.5) we have to estimate the following ones

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon}[(\varphi_1 * \partial_t G_\varepsilon)|_{x_n=0}]^{(\alpha)}_{R_T},\\ \frac{1}{\varepsilon}[(\varphi_2 * \partial_{x_\mu}G_\varepsilon)|_{x_n=0}]^{(\alpha)}_{R_T},\ \mu = 1, \dots, n-1,\\ \frac{1}{\varepsilon}[(\varphi_2 * G_\varepsilon)|_{x_n=0}]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T},\end{gathered} \tag{2.6}$$

where $\varphi_1(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, $\varphi_2(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x'\ \ t}(R_T)$.

After the change of a variable τ we represent the potentials in (2.6) in the form

$$v_j(x',t) := -\frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_j(y',\tau) G_\varepsilon(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy'|_{x_n=0}$$

$$= -\frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau \varphi_j(y',\tau-\sigma)\Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)\,d\sigma|_{x_n=0},$$

$j=1,2$, compose the differences with respect to t

$$\triangle_1 := \partial_t v_1(x',t) - \partial_{t_1} v_1(x',t_1),\ \triangle_2 := \partial_{x'} v_1(x',t) - \partial_{x'} v_1(x',t_1),$$

$$\triangle_3 := v_2(x',t) - v_2(x',t_1),\ t_1 < t,\ t_1,\, t \in (0,T],$$

and with respect to spatial variables x'

$$\triangle_4 := \partial_t v_1(x',t) - \partial_t v_1(z',t),\quad \triangle_5 := \partial_{x'} v_2(x',t) - \partial_{x'} v_2(z',t),\ x',z' \in D.$$

Estimating them we obtain the same integrals with respect to τ and σ as in [9].

Thus, for the Hölder constants (2.6) and consequently for (2.4), (2.5) we have

$$\sum_{2m_0+|m'|=2+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} u(x',0,t)]^{(\alpha)}_{R_T} + \sum_{2m_0+|m'|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'} u(x',0,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}$$

$$\le C_6\Big(\sum_{2m_0+|m'|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\Phi]^{(\alpha)}_{R_T} + \sum_{2m_0+|m'|=[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\Phi]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}\Big) \tag{2.7}$$

where a constant C_6 does not depend on ε

We estimate the modulo of $u(x',0,t)$. For this we apply the inequality (2.3) for $\Gamma(x,t)$ and $|\Phi(x',t)| \le M\, t^{\frac{1+l}{2}}$, $M = [\partial_t^{[\frac{1+l}{2}]}\Phi]^{(\frac{1+l}{2}-[\frac{1+l}{2}])}_{t,R_T}$, then after integrating with respect to y' we obtain

$$|u(x',0,t)| \le C_7 M \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+l}{2}}}{t-\tau} d\tau \int_0^{t-\tau} e^{-\frac{b_n^2\sigma^2}{8a\varepsilon^2(t-\tau)}}\,d\sigma$$

$$\leq C_8 M t^{\frac{1+l}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = C_9 M t^{1+l/2}, \tag{2.8}$$

here C_9 is independent on ε.

Gathering the estimates (2.7), (2.8) we shall have by the Lemma 1.1

$$|u|_{R_T}^{(2+l)} \leq C_{10} ||u||_{R_T}^{(2+l)} \leq C_{11} |\Phi|_{R_T}^{(1+l)}. \tag{2.9}$$

Thus, we have proved that the trace $u(x,t)|_{x_n=0}$ on the boundary $x_n = 0$ of a domain D belongs to the space $\overset{\circ}{C}{}_{x'\ \ t}^{2+l,1+l/2}(R_T)$ and satisfies an estimate (2.9), but then the function $u(x,t)$ as a solution of the first boundary value problem for the heat equation (1.1) belongs to $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(D_T)$ and satisfies an estimate [5]

$$|u|_{D_T}^{(2+l)} \leq C_{12} |u|_{R_T}^{(2+l)} \leq C_{13} |\Phi|_{R_T}^{(1+l)}, \tag{2.10}$$

where the constant C_{13} is independent on ε.

From the boundary condition (1.3) we find

$$|\varepsilon \partial_t u|_{R_T}^{(2+l)} \leq C_{14} |\Phi|_{R_T}^{(1+l)}, \tag{2.11}$$

where a constant C_{14} does not depend on ε. The inequalities (2.10), (2.11) lead to the estimate (1.6) and Theorem 1.1. □

3. Proof of Theorem 1.2

Consider the problem (1.1) – (1.3). We represent the solution in the form

$$u(x,t) = -\frac{2a}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau \Phi(y', \tau - \sigma)$$

$$\times \Gamma_{x_n}(x' - y' + \frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n + \frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t - \tau)\, d\sigma.$$

From the boundary condition (1.3) we find

$$\varepsilon \partial_t u|_{x_n=0} = b\, \nabla_x^T u|_{x_n=0} + \Phi(x' t). \tag{3.1}$$

We calculate $b\, \nabla_x^T u|_{x_n=0}$:

$$b\, \nabla_x^T u(x,t)|_{x_n=0} = -\frac{2a}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y', \tau) dy'$$

$$\times \int_0^\tau b\,\nabla_x^T \Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)\,d\sigma|_{x_n=0} - w_1(x',t), \qquad (3.2)$$

where

$$w_1(x',t) = \frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^\tau \big(\Phi(y',\tau-\sigma)-\Phi(y',\tau)\big)$$

$$\times\, b\,\nabla_x^T \Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)\,d\sigma|_{x_n=0}$$

$$\equiv \frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t-\tau} \big(\Phi(y',t-\tau-\sigma)-\Phi(y',t-\tau)\big)$$

$$\times\, b\,\nabla_x^T \Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, \tau)\,d\sigma|_{x_n=0}. \qquad (3.3)$$

We can see that an integral with respect to σ in (3.2) may be written in the form

$$\int_0^\tau \frac{b}{\varepsilon}\,\nabla_x^T \Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)\,d\sigma|_{x_n=0} = \int_0^\tau \frac{d}{d\sigma}\Gamma_{x_n}(\cdot)\,d\sigma$$

$$= -\Gamma_{x_n}(x'-y', x_n, t-\tau) + \Gamma_{x_n}(x'+\frac{b'}{\varepsilon}\tau, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\tau, t-\tau).$$

Substituting this expression into (3.2) and applying the jump formula for the double layer potential

$$-2a\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',\tau)\Gamma_{x_n}(x'-y', x_n, t-\tau)dy' \ \to \Phi(x',t) \ \text{ as } \ x_n \to 0,$$

we obtain

$$b\,\nabla_x^T u(x,t)|_{x_n=0} = -\Phi(x',t) - w_1(x',t) - w_2(x',t), \qquad (3.4)$$

where

$$w_2(x',t) = 2a\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',\tau)\Gamma_{x_n}(x'+\frac{b'}{\varepsilon}\tau, x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\tau, t-\tau)dy'|_{x_n=0}$$

$$\equiv 2a\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y',t-\tau)\Gamma_{x_n}(x'+\frac{b'}{\varepsilon}(t-\tau), x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}(t-\tau), \tau)dy'|_{x_n=0}, \qquad (3.5)$$

and substituting an expression (3.4) into the formula (3.1) we find

$$\varepsilon\partial_t u|_{x_n=0} = -w_1(x',t) - w_2(x',t). \tag{3.6}$$

Consider the functions $w_1(x',t)$, $w_2(x',t)$. We should estimate their norms in $C_x^{2+\beta,}{}_t^{1+\beta/2}(\overline{\Omega}_T)$, $\beta \in (0,\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$:

$$|w_j|_{C_{x'}^{1+\beta,}{}_t^{\frac{1+\beta}{2}}(R_T)} := |w_j|_{R_T} + \sum_{\mu=1}^{n-1} |\partial_{x_\mu} w_j|_{R_T} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \Big([\partial_{x_\mu} w_j]^{(\beta)}_{x',R_T} + [\partial_{x_\mu} w_j]^{(\beta/2)}_{t,R_T} \Big)$$

$$+ [w_j]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T},\ j = 1,2. \tag{3.7}$$

We evaluate all terms of this norm.

We shall make use of the estimates of the function $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+\alpha,}{}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_T)$:

$$|\partial^k_{x_\mu} \Phi(x',t)| \le M_k t^{\frac{1+\alpha-k}{2}},\ \ M_k = [\Phi]^{(\frac{1+\alpha-k}{2})}_{t,R_T},\ \mu = 1,\dots,n-1,\ \ k = 0,1, \tag{3.8}$$

$$|\partial^k_{x_\nu} \Phi(x',t) - \partial^k_{x_\nu} \Phi(x',t_1)| \le M_k (t-t_1)^{\frac{1+\alpha-k}{2}},\ t_1 < t,\ k = 0,1, \tag{3.9}$$

an inequality

$$|\xi|^\gamma e^{-\xi^2} \le C_\gamma e^{-\xi^2/2},\ \gamma \ge 0, \tag{3.10}$$

and also Lemma 3.1.

Lemma 3.1. *The following estimate is valid*

$$e^{-\frac{(x'+b'\sigma/\varepsilon)^2 + b_n^2\sigma^2/\varepsilon^2}{8a(t-\tau)}} \le e^{-\frac{\gamma_1^2 x^2}{t-\tau} - \frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}, \tag{3.11}$$

where $b' = (b_1,\dots,b_{n-1})$,

$$\gamma_1^2 = \frac{b_n^2}{16a(b'^2 + b_n^2)},\quad \gamma_2^2 = \frac{b_n^2}{16a}.$$

Proof. We apply the Hölder and Young inequalities to the expression $2\sigma\big|x'b'/\varepsilon\big|$

$$2\sigma\big|x'b'/\varepsilon\big| \le 2(|x'|\sqrt{\delta})\,(\frac{|b'|\sigma}{\varepsilon\sqrt{\delta}}) \le \delta x'^2 + \frac{b'^2\sigma^2}{\delta\varepsilon^2},\ \delta > 0.$$

Letting $\delta = (b'^2 + b_n^2/2)/(b'^2 + b_n^2)$, we shall have

$$(x'^2 + b'\sigma/\varepsilon)^2 + b_n^2\sigma^2/\varepsilon^2 \geq x'^2 + \frac{b'^2 + b_n^2}{\varepsilon^2}\sigma^2 - 2|x'b'|\sigma/\varepsilon$$

$$\geq (1-\delta)x'^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\big(b^2 - \frac{b'^2}{\delta}\big)\sigma^2 = \frac{b_n^2 x'^2}{2(b'^2 + b_n^2)} + \frac{(b'2 + b_n^2)b_n^2}{2\varepsilon^2(b'^2 + b_n^2/2)}\sigma^2$$

$$\geq \frac{b_n^2}{2(b'^2 + b_n^2)}x'^2 + \frac{b_n^2}{2\varepsilon^2}\sigma^2.$$

This estimate leads to (3.11) □

Continuation of a proof of Theorem 1.1. Consider the potential $w_1(x',t)$ defined by formula (3.3). We apply an estimate (2.3) for $\Gamma(x,t)$, (3.9), (3.11) and integrate with respect to y'

$$|\partial^k_{x_\mu} w_1(x',t)| \leq C_{15}M_k \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{\sigma^{\frac{1+\alpha-k}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\sigma,$$

then we apply the inequalities $\sigma^{\frac{1+\beta-k}{2}} \leq t^{\frac{1+\beta-k}{2}}$ and (3.10) and integrate with respect to σ

$$|\partial^k_{x_\mu} w_1(x',t)| \leq C_{16}M_k\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+\beta-k}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} = C_{17}M_k\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta-k}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

and from here we find

$$|\partial^k_{x_\mu} w_1(x',t)|_{R_t} \leq C_{17}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta-k}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} [\Phi]^{(\frac{1+\alpha-k}{2})}_{t,R_t}, \tag{3.12}$$

$k = 0,1,\ \beta \in (0,\alpha),\ t \in (0,T]$.

An integral $w_2(x',t)$ determined by (3.5) is evaluated as above

$$|\partial^k_{x_\mu} w_2(x',t)| \leq C_{18}M_k \int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\alpha-k}{2}}}{t-\tau} e^{-\frac{\gamma_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\tau \leq C_{19}M_k\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta-k}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}},$$

and

$$|\partial^k_{x_\mu} w_2(x',t)|_{R_t} \leq C_{19}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta-k}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} [\Phi]^{(\frac{1+\alpha-k}{2})}_{t,R_T}, \tag{3.13}$$

$k = 0,1,\quad t \in (0,T],\ \beta \in (0,\alpha)$.

Now we estimate the Hölder constants with respect to t. We compose the differences $\triangle_{j,k} := \partial^k_{x_\mu} w_j(x',t) - \partial^k_{x_\mu} w_j(x',t),\ j=1,2$:

$$\triangle_{1,k} = -\frac{2a}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t-\tau} \big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau-\sigma) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)\big)$$

$$\times b\,\nabla^T_x \Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, x_n + \frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, \tau)\,|_{x_n=0} d\sigma \tag{3.14}$$

$$-\frac{2a}{\varepsilon}\int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{t_1-\tau}^{t-\tau} \big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau-\sigma) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)\big) b\,\nabla^T_x \Gamma_{x_n}(\cdot)\,|_{x_n=0} d\sigma$$

$$-\frac{2a}{\varepsilon}\int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{t_1-\tau} \widetilde{\triangle}_{1,k}(y',t,t_1,\tau,\sigma) b\,\nabla^T_x \Gamma_{x_n}(\cdot)\,|_{x_n=0} d\sigma,$$

where

$$\widetilde{\triangle}_{1,k} = \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau-\sigma) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)$$
$$-\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau-\sigma) + \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau);$$

$$\triangle_{2,k}$$

$$= 2a\int_{t_1}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)\Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}(t-\tau), x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}(t-\tau),\tau)\,|_{x_n=0} dy'$$

$$+2a\int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{\triangle}_{2,k}(y',t,t_1,\tau)\Gamma_{x_n}(\cdot)|_{x_n=0} dy' + 2a\int_0^{t_1} d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tag{3.15}$$

$$\times\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau)dy' \int_{t_1}^{t} \frac{b}{\varepsilon}\nabla^T_x\Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}(t_2-\tau), x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}(t_2-\tau),\tau)\,|_{x_n=0}\, dt_2,$$

here $\partial_{t_2}\Gamma_{x_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}(t_2-\tau), x_n+\frac{b_n}{\varepsilon}(t_2-\tau),\tau) = \frac{b}{\varepsilon}\nabla^T_x\Gamma_{x_n}(\cdot)$,

$$\widetilde{\triangle}_{2,k} = \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau). \tag{3.16}$$

We evaluate $|\widetilde{\triangle}_{1,k}| = |\widetilde{\triangle}_{1,k}|^{\theta}|\widetilde{\triangle}_{1,k}|^{1-\theta}$. Letting $\theta = \frac{1+\beta-k}{1+\alpha-k},\ \beta\in(0,\alpha),\ k = 0,1$, and applying an inequality (3.9) for Φ we shall have

$$|\widetilde{\triangle}_{1,k}| = |\big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau-\sigma) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau-\sigma)\big)$$
$$+\big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau) - \partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)\big)|^{\theta}\times$$

$$|\big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau-\sigma)-\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)\big)+\big(\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau)-\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau-\sigma)\big)\big)|^{1-\theta}$$

$$\leq C_{20}\big(M_k(t-t_1)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}\big)^\theta\big(M_k\sigma^{\frac{1+\alpha-k}{2}}\big)^{1-\theta}=C_{20}M_k(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}},\ (3.17)$$

here $t_1<t,\ \sigma\geq 0$.

Consider the difference (3.14). We make use of the inequalities (2.3) for Γ, (3.9) for Φ, (3.11) and (3.17) and integrate with respect to y', then we obtain

$$|\triangle_{1,k}|\leq C_{21}M_k\frac{1}{\varepsilon}\Big(\Big(\int_{t_1}^t d\tau\int_0^{t-\tau}+\int_0^{t_1}d\tau\int_{t_1-\tau}^{t-\tau}\Big)\frac{\sigma^{\frac{1+\alpha-k}{2}}}{\tau^{3/2}}e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}}\,d\sigma$$

$$+(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}\int_0^{t_1}d\tau\int_0^{t_1-\tau}\frac{\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau^{3/2}}e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}}\,d\sigma\Big).$$

In the first integral we apply the inequalities $\sigma^{\frac{1+\beta-k}{2}}\leq(t-\tau)^{\frac{1+\beta-k}{2}}\leq(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}$ and (3.10) and integrate with respect to σ letting $\frac{\gamma_2\sigma}{\varepsilon\sqrt{\tau}}=\zeta$, then we shall have

$$|\triangle_{1,k}|\leq C_{22}M_k\frac{1}{\varepsilon}(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}\varepsilon^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}}$$

and

$$|\triangle_{1,k}|:=|\partial^k_{x_\mu}w_j(x',t)-\partial^k_{x_\mu}w_j(x',t)|\leq C_{23}M_k\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}},$$

$$[\partial^k_{x_\mu}w_1]^{(\frac{1+\beta-k}{2})}_{t,R_t}\leq C_{23}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-\beta}{4}}(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}\,[\partial^k_{x_\mu}\Phi]^{\frac{1+\alpha-k}{2}}_{t,R_t},\qquad(3.18)$$

here $\beta\in(0,\alpha),k=0,1,\ t_1<t,\ t_1,t\in(0,T]$.

Now with the help of the estimates (3.8), (3.9) we evaluate $\widetilde{\triangle}_{2,k}=\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t-\tau)-\partial^k_{y_\mu}\Phi(y',t_1-\tau)$ determined by (3.16)

$$\widetilde{\triangle}_{2,k}\leq\big(M_k(t-t_1)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}\big)^\theta\big(M_k\big((t-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}+(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}\big)\big)^{1-\theta}$$

$$\leq C_{24}M_k(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}},\ \theta=\frac{1+\beta-k}{1+\alpha-k},\qquad(3.19)$$

$\beta\in(0,\alpha),\ t_1<t,\ k=0,1.$

Consider the difference $\triangle_{2,k}$ determined by the formula (3.15). After integrating with respect to y' and applying the inequalities (3.8) and (3.19)we derive

$$|\triangle_{2,k}| \leq C_{25} M_k \Big(\int_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}}{\tau} e^{-\frac{\gamma_2^2 (t-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}} \, d\tau$$

$$+(t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}} \int_{0}^{t_1} \frac{(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau} e^{-\frac{\gamma_2^2 (t-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}} \, d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t} dt_2 \int_{0}^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}}}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\gamma_2^2 (t_2-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}} \, d\tau \Big).$$

In the first and last integrals we make use of the estimates

$$(t-\tau)^{\frac{1+\beta-k}{2}} \leq (t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}}, \ \tau \in (t_1, t),$$

and

$$(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}} \leq (t_2-\tau)^{\frac{1+\alpha-k}{2}} \leq \frac{(t_2-\tau)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(t_2-t_1)^{\frac{1-\beta+k}{2}}}, \ t_2 \in (t_1, t),$$

respectively, then applying an inequality (3.10) in all integrals we obtain

$$|\triangle_{2,k}| \leq C_{26} M_k \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \Big((t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} + \int_{t_1}^{t} \frac{dt_2}{(t_2-t_1)^{\frac{1-\beta-k}{2}}} \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \Big),$$

and

$$|\triangle_{2,k}| := |\partial_{x_\mu}^k w_2(x',t) - \partial_{x_\mu}^k w_2(x',t)| \leq C_{27}\, M_k \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} (t-t_1)^{\frac{1+\beta-k}{2}},$$

from here we find

$$[\partial_{x_\mu}^k w_2]_{t,R_t}^{(\frac{1+\beta-k}{2})} \leq C_{27} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{\alpha-\beta}{4}} \, [\partial_{x_\mu}^k \Phi]_{t,R_t}^{\frac{1+\alpha-k}{2}}, \tag{3.20}$$

where $\beta \in (0, \alpha), k = 0, 1, \ t \in (0, T]$.

We compose the differences of the derivatives $\partial_{x_\mu} w_j(x',t), \ j = 1, 2, \ \mu = 1, \ldots, n-1$, with respect to the spatial variables x':

$$\triangle_3 := \partial_{x_\mu} w_1(x',t)(x',t) - \partial_{x_\mu} w_1(z',t)$$

$$= \frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{|y'-z'|\le 2r} \big(\Phi_{y_\mu}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{y_\mu}(y',\tau)\big)dy' \int_0^\tau \big(b'\nabla_{y'}'^T - b_n\partial_{y_n}\big)$$

$$\times\Big(\Gamma_{y_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)-\Gamma_{y_n}(z'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma, y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)\Big)|_{y_n=0}d\sigma$$

$$-\frac{2a}{\varepsilon}\int_0^t d\tau \int_{|y'-z'|\ge 2r} \big(\Phi_{y_\mu}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{y_\mu}(y',\tau)\big)dy' \int_0^\tau \sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu - z_\nu) \quad (3.21)$$

$$\times \int_0^1 \partial_{y_\nu}\big(b'\nabla_{y'}'^T - b_n\partial_{y_n}\big)\Gamma_{y_n}(z'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma+\lambda(x'-z'), y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)|_{y_n=0}d\lambda,$$

here $b\nabla_x^T = b'\nabla_{y'}'^T - b_n\partial_{y_n}$,

$$\triangle_4 := \partial_{x_\mu}w_2(x',t)-\partial_{x_\mu}w_2(z',t)$$

$$= 2a\int_0^t d\tau \int_{|y'-z'|\le 2r}\Phi_{y_\mu}(y',\tau)$$

$$\times\Big(\Gamma_{y_n}(x'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\tau, y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\tau, t-\tau)-\Gamma_{y_n}(z'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\tau, y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\tau, t-\tau)\Big)|_{y_n=0}\, dy'$$

$$-2a\int_0^t d\tau \int_{|y'-z'|\le 2r}\Phi_{y_\mu}(y',\tau)\sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu - z_\nu) \quad (3.22)$$

$$\times \int_0^1 \partial_{y_\nu}\Gamma_{y_n}(z'-y'+\frac{b'}{\varepsilon}\sigma+\lambda(x'-z'), y_n+\frac{b_n}{\varepsilon}\sigma, t-\tau)|_{y_n=0}d\lambda dy',$$

where $r=|x'-z'|$.

Consider the difference $\triangle_3$ (see (3.21)). We apply the inequalities (3.11) to the exponent in Γ, (3.9) for Φ, pass to the spherical coordinates letting $\rho=|x'-y'|$, $\rho=|z'-y'|$ and $\rho=|z'-y'+\lambda(x'-z')|$ in the first, second and third integrals respectively, then we obtain

$$|\triangle_3| \le C_{28}M_1\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^t d\tau\Big(\int_0^{3r}+\int_0^{2r}\Big)\rho^{n-2}d\rho\int_0^\tau \frac{\sigma^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{\gamma_1^2\rho^2}{t-\tau}-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\,d\sigma$$

$$+r\int_0^t d\tau\int_r^\infty \rho^{n-2}\,d\rho\int_0^\tau \frac{\sigma^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+3}{2}}}e^{-\frac{\gamma_1^2\rho^2}{t-\tau}-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}d\sigma.$$

Using the estimates

$$\frac{\rho^{n-p-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{n-p-\beta}{2}}}e^{-\frac{\gamma_1^2\rho^2}{t-\tau}} \le C_{29},\ p=1,0, \quad \frac{\sigma^{\alpha/2}}{\varepsilon^{\alpha/2}(t-\tau)^{\alpha/4}}e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}} \le C_{30}e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{2\varepsilon^2(t-\tau)}}$$

in the two first integrals with $p=1$ and last one with $p=0$ and integrating with respect to σ we shall have

$$|\triangle_3| \le C_{31}M_1\frac{\varepsilon^{1+\alpha/2}}{\varepsilon}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-2\beta}{2}}2}\Big(\big(\int_0^{3r}+\int_0^{2r}\big)\frac{d\rho}{\rho^{1-\beta}}+r\int_r^\infty\frac{d\rho}{\rho^{2-\beta}}\Big),$$

$\beta\in(0,\alpha/2)$,

$$|\triangle_3| := |\partial_{x_\mu}w_1(x',t)(x',t)-\partial_{x_\mu}w_1(z',t)| \le C_{32}M_1\varepsilon^{\alpha/2}t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}}|x'-z'|^\beta,$$

and from here we obtain

$$[\partial_{x_\mu}w_1]^{(\beta)}_{x',R_t} \le C_{32}\varepsilon^{\alpha/2}t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}}[\Phi]^{(\frac{\alpha}{2})}_{t,R_t},\ \beta\in(0,\alpha/2). \tag{3.23}$$

The difference $\triangle_4 := \partial_{x_\mu}w_2(x',t)-\partial_{x_\mu}w_2(z',t)$ determined by the formula (3.22) is estimated as above

$$|\triangle_4| \le C_{33}M_1\Big(\int_0^t\frac{\tau^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}}d\tau\big(\int_0^{3r}+\int_0^{2r}\big)\rho^{n-2}e^{-\frac{\gamma_1^2\rho^2}{t-\tau}-\frac{\gamma_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\,d\rho$$

$$+r\int_0^t\frac{\tau^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}}d\tau\int_r^\infty\rho^{n-2}\,e^{-\frac{\gamma_1^2\rho^2}{t-\tau}-\frac{\gamma_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}d\rho \le C_{34}M_1\varepsilon^{\alpha/2}t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}}|x'-z'|^\beta,$$

and

$$[\partial_{x_\mu}w_1]^{(\beta)}_{x',R_t} \le C_{34}\varepsilon^{\alpha/2}\,t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}}[\Phi]^{(\frac{\alpha}{2})}_{t,R_t},\ \beta\in(0,\alpha/2). \tag{3.24}$$

Gathering the estimates (3.12), (3.13), (3.18), (3.20), (3.23), (3.24) we shall have the estimates of the norms (3.7) of the functions $w_1(x',t)$, $w_2(x',t)$ and from the formula (3.6) we obtain an estimate (1.7) of a derivative $\varepsilon\partial_t u|_{x_n=0} = -w_1(x',t)-w_2(x',t)$

$$|\varepsilon\partial_t u|_{C^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}_{x'\ \ t}R_t} \le C_{35}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}}|\Phi|^{(1+\alpha)}_{R_t},\ \beta\in(0,\alpha/2),\ t\in(0,T],$$

where the constant C_{35} is independent on ε.

Theorem 1.2 is proved completely. $\square$

References

[1]. Bazaliy B.V. *Stefan problem*, Doklady AN USSR. Ser.A., 1986, №11, P.3-7.

[2]. Radkevich E.V. *On the solvability of the general nonstationary free boundary problems*, Some applications of functional analysis to the problems of mathematical physics, Novosibirsk, 1986, P. 85-111.

[3]. Bizhanova G.I., Solonnikov, V.A. *On the solvability of the initial - boundary value problem with a time derivative in the boundary condition for the parabolic equation in the weighted Hölder space of functions*, Algebra i Analiz, 1993, №1, P.99–134 (in Russian) (English translation in St. Petersburg Math. J., 1994, Vol.5, №1, P.97 – 124).

[4]. Rodrigues J.F., Solonnikov V.A., Yi. F. *On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems*, Math.Ann., 1999, №315, P. 61–95.

[5]. Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'çeva N.N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, M., "Nauka", 1967 (translation by S. Smith, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967).

[6]. Solonnikov, V.A. *On an estimate of the maximum of a derivative modulus for a solution of a uniform parabolic initial-boundary value problem*, 1977, LOMI Preprint, No. P-2-77.

[7]. Bateman H., Erdelyi A. *Tables of integral transforms. Vol.I*, 1954.

[8]. Bizhanova G.I. *On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. I*, Matem. zhurnal, 2012, №1, P. 19 - 28.

[9]. Bizhanova G.I. *Uniform estimates of the solution to the linear two – phase Stefan problem with a small parameter*, Matem. zhurnal, 2005, №1, P. 19 - 28.

This work was supported by the Ministry of Education and Sciences of Republic of Kazakhstan, grant № 0763/ГФ.

Received 31.08.2012

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 87 – 101*

УДК 517.968

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ж.А. Зулпукаров

Ошский технологический университет им. М.Адышева
Кыргызстан, 723503, г.Ош, ул.Исанова 81а

В данной работе для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,x,y,s,u(s,x,y))ds + \int_0^t \int_0^x N(t,x,y,s,z,u(s,z,y))dzds+$$

$$+\int_0^t \int_0^x \int_0^y M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w))dwdzds = f(t,x,y), \qquad (1)$$

где $(t,x,y) \in G$, $K(t,x,y,s,u)$, $N(t,x,y,s,z,u)$, $M(t,x,y,s,z,w,u)$ и $f(t,x,y)$ — известные функции, а $u(t,x,y)$ — неизвестная функция в области $G = \{(t,x,y) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le X, 0 \le y \le Y\}$, $f(0,x,y) = 0$ при $x \in [0,X], y \in [0,Y]$.

Keywords: *Volterra first order nonlinear integral equation, regularization operator, uniqueness of solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 45G10, 45D05

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода исследовались в [1-5]. В частности, в [4] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [5] изучены вопросы регуляризации и единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Здесь при выборе параметра регуляризации допускается, что функции $K(t,x,y,s,u)$, $N(t,x,y,s,z,u)$, $M(t,x,y,s,z,w,u)$ могут быть негладкими. Всюду, в дальнейшем, предполагается, что $K(t,x,y,s,u) = K_0(t,x,y,s)u + K_1(t,x,y,s,u)$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) при любом фиксированном $(t,x,y) \in G = \{(t,x,y) : 0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$ функция $K_0(t,x,y,s) \in L_1(0,t)$, функции $K_1(t,x,y,s,u)$, $M(t,x,y,s,z,w,u)$ и $M(t,x,y,s,z,w,u)$ непрерывны соответственно в областях $G_1 \times R,\ G_2 \times R$ и $G_3 \times R$,

$$G_1 = \{(t,x,y,s) : 0 \leq s \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\},$$

$$G_2 = \{(t,x,y,s,z) : 0 \leq s \leq t \leq T,\ 0 \leq z \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\},$$

$$G_3 = \{(t,x,y,s,z,w) : 0 \leq s \leq t \leq Y,\ 0 \leq z \leq x \leq X, 0 \leq w \leq y \leq Y\},$$

$K_0(t,x,y,s) \geq 0$ при $(t,x,y) \in G$ и $\varphi(t,x,y) = \int_0^t K_0(s,x,y,s)ds$ непрерывны в области G;

б) при $t > \tau$ для любых $(t,x,y,s), (\tau,x,y,s) \in G_1$ справедливо

$$|K_0(t,x,y,s) - K_0(\tau,x,y,s)| \leq C \int_\tau^t K_0(s,x,y,s)ds,$$

где $0 < C$ – известная постоянная;

в) при $t > \tau$ для любых (t,x,y,s,u_1), (τ,x,y,s,u_1), (t,x,y,s,u_2), $(\tau,x,y,s,u_2) \in G_1 \times R$ справедливо

$$|K_1(t,x,y,s,u_1) - K_1(\tau,x,y,s,u_1) - K_1(t,x,y,s,u_2) + K_1(\tau,x,y,s,u_2)| \leq$$

$$\leq C_1 \int_\tau^t K_0(s,x,y,s)ds\, |u_1 - u_2|,$$

где *0*$<C_1$ – некоторая постоянная;

г) при $t > \tau$ для любых (t, x, y, s, z, u_1), (τ, x, y, s, z, u_1), (t, x, y, s, z, u_2), $(\tau, x, y, s, z, u_2) \in G_2 \times R$ справедливо

$$|N(t, x, y, s, z, u_1) - N(\tau, x, y, s, z, u_1) - N(t, x, y, s, z, u_2) + N(\tau, x, y, s, u_2)| \leq$$

$$\leq C_2 \int_\tau^t K(s, x, y, s) ds \, |u_2 - u_1| \, ,$$

где $0 < C_2$ – некоторая постоянная и $N(t, x, y, t, z, u) \equiv 0$ при $(t, x, y, s, z, u) \in G_4 \times R$, $G_4 = \{(t, x, y, z) : 0 \leq t \leq T; 0 \leq z \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$;

д) при $t > \tau$ для любых (t, x, y, s, z, w, u_1), $(\tau, x, y, s, z, w, u_1)$, (t, x, y, s, z, w, u_2), $(\tau, x, y, s, z, w, u_2) \in G_3 \times R$ справедливо

$$|M(t, x, y, s, z, w, u_1) - M(\tau, x, y, s, z, w, u_1) - M(t, x, y, s, z, u_2) +$$

$$+ M(\tau, x, y, s, z, w, u_2)| \leq C_3 \int_\tau^t K(s, x, y, s) ds \, |u_2 - u_1| \, ,$$

где $0 < C$ – некоторая постоянная и $M(t, x, y, t, z, w, u) \equiv 0$ при $(t, x, y, z, w, u) \in G_5 \times R$,

$$G_5 = \{(t, x, y, z, w) : 0 \leq t \leq T; 0 \leq z \leq x \leq X; 0 \leq w \leq y \leq Y\}.$$

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать следующее уравнение:

$$\varepsilon u(t, x, y, \varepsilon) + \int_0^t K_0(t, x, y, s) u(s, x, y, \varepsilon) ds +$$

$$+ \int_0^t K_1(t, x, y, s, u(s, x, y, \varepsilon)) ds + \int_0^t \int_0^x N(t, x, y, s, z, u(s, z, y, \varepsilon)) dz ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x \int_0^y M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w, \varepsilon)) dw dz ds =$$

$$= f(t, x, y) + \epsilon u(0, x, y), \qquad (t, x, y) \in G, \tag{2}$$

где $0 < \epsilon$ — малый параметр и $u(t, x, y)$ — решение уравнения (1).

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$u(t, x, y, \epsilon) = u(t, x, y) + \xi(t, x, y, \epsilon). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), учитывая, что $u(t,x,y)$ – решение уравнение (1) и преобразуя, получим

$$\xi(t,x,y,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(s,x,y,s)\xi(s,x,y,\varepsilon)ds=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K_0(t,x,y,s)-K_0(s,x,y,s)]\xi(s,x,y,\varepsilon)ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon))-K_1(t,x,y,s,u(s,x,y))ds]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x [N(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon))-N(t,x,y,s,z,u(s,z,y))]dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y [M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon))-$$

$$-M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,y))]dwdzds-[u(t,x,y)-u(0,x,y)].$$

Применим резольвенту ядра $\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,x,y,s)$ и, используя формулу Дирихле, учитывая, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}ds=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds},$$

и заменив τ на s, имеем

$$\xi(t,x,y,\varepsilon)=F(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t H(t,x,y,s,\varepsilon)\xi(s,x,y,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_0^t L(t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon),u(s,x,y),\varepsilon)ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon),u(s,z,y),\varepsilon)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M_1(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon),u(s,z,y),\varepsilon)dwdzds, \tag{4}$$

где

$$H(t,x,y,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K_0(t,x,y,s) - K_0(s,x,y,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau} -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau}[K_0(t,x,y,s) - K_0(\tau,x,y,s)]d\tau, \quad (5)$$

$$L(t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon),u(s,x,y),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)+$$

$$+\xi(s,x,y,\varepsilon)) - K_1(t,x,y,s,u(s,x,y))]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau} -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon)) - K_1(\tau,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon)) -$$

$$-K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)) + K_1(\tau,x,y,s,u(s,x,y))]d\tau, \quad (6)$$

$$N_1(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon),u(s,z,y),\varepsilon) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}[N(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon)) - N(t,x,y,s,z,u(s,z,y))]\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau}[N(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+$$

$$+\xi(s,z,y,\varepsilon)) - N(\tau,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon)) -$$

$$-N(t,x,y,s,z,u(s,z,y)) + N(\tau,x,y,s,z,u(s,z,y))]d\tau, \quad (7)$$

$$M_1(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon),u(s,z,w),\varepsilon) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}[M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,y)+\xi(s,z,w,\varepsilon)) - M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w))]\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon)) -$$

$$-M(\tau, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon))-$$

$$-M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w)) + M(\tau, x, y, s, z, w, u(s, z, w))]d\tau, \qquad (8)$$

$$F(t, x, y, \varepsilon) = [u(t, x, y) - u(0, x, y)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(\tau, x, y, \tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau)d\tau}[u(t, x, y) - u(s, x, y)]ds. \qquad (9)$$

Предварительно докажем следующие леммы.
Лемма 1. *Пусть*

$$F(t, x, y, \varepsilon) = -u(t, x, y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau, x, y, \tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t K_0(s, x, y, s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau)d\tau}[u(t, x, y) - u(s, x, y)]ds,$$

где $u(t, x, y) \in C(G)$, $u(0, x, y) = 0$ *при* $x \in [0, X], y \in [0, Y]$, $K_0(t, x, y, t) \in L_1(G)$, $K_0(t, x, y, t) > 0$ *при почти всех* $(t, x, y) \in G$, *функция* $\varphi(t, x, y) = \int_0^t K_0(s, x, y, s)ds$ *непрерывна по совокупности* $(t, x, y) \in G$. *В этом случае справедлива оценка*

$$\|F(t, x, y, \varepsilon)\| \le 3\,\|u(t, x, y)\|_C\, e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) = C_0(\varepsilon),$$

где $\beta \in (0, 1)$ *и* $\omega_{\bar{u}}(\delta) = \sup\limits_{\substack{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta\\ x\in[0;X]\\ y\in[0;Y]}} \left|u(\varphi^{-1}(\upsilon, x, y), x, y) - u(\varphi^{-1}(\upsilon_0, x, y), x, y)\right|$,

$\varphi^{-1}(\upsilon, x, y)$ — *обратная функция функции* $\upsilon = \varphi(t, x, y)$.
Доказательство. 1) Если $0 \le t \le \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta, x, y), x \in [0, X], y \in [0, Y]$, то из (9) имеем

$$|F(t, x, y, \varepsilon)| = \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t, x, y)}+$$

$$+\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)\int_o^t \frac{1}{\varepsilon}K(s, x, y, s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau, x, y, \tau)d\tau}ds = \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta). \qquad (10)$$

2) Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta, x, y) \le t \le T, x \in [0, X], y \in [0, Y]$, то

$$|u(t, x, y)|\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t, x, y)} \le \|u(t, x, y)\|_C\, e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}; \qquad (11)$$

$$|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t,x,y)-\varepsilon^\beta,x,y)} K(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(t,x,y)-\varepsilon^\beta,x,y)}^t K(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds\big| \le$$

$$\le 2\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta). \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) следует справедливость леммы 1.

Лемма 2. *Пусть функция $H(t,x,y,s,\epsilon)$ определена в формуле (5) и выполняются условия а) и б). Тогда справедлива следующая оценка:*

$$|H(t,x,y,s,\varepsilon)| \le C_4,$$

где $C_4 = C(1+e^{-1})$.

Доказательство. С учетом условий *а)* и *б)*, из (5) получим неравенство

$$|H(t,x,y,s,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}C\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}d\tau C\int_s^t K(\tau,x,y\tau)d\tau.$$

В этом случае для первого слагаемого имеем

$$Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau\right) =$$

$$= \left|\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau\right| = C\eta e^{-\eta} \le Ce^{-1}.$$

А для второго уже справедливо более строгое соотношение:

$$C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\upsilon,x,y,\upsilon)d\upsilon\right)d\tau =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \eta = -\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau \le \eta \le 0 \end{array}\right| =$$

$$= C\int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}^{0} \eta e^{-\eta} d\eta \le C\int_0^{\infty} \eta e^{-\eta} d\eta \le C.$$

Следовательно, отсюда вытекает справедливость леммы 2.
Лемма 3. *Пусть выполняются условия а) и в) и функция*

$$L(t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon),u(s,x,y),\varepsilon)$$

определена формулой (6), $K_0(t,x,y,t) > 0$ *почти при всех* $(t,x,y) \in G$. *Тогда для этой функции справедлива следующая оценка:*

$$|L\ (t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon),u(s,x,y),\varepsilon\ )| \le C_5\, |\xi\ (s,x,y,\varepsilon\ )|\,,$$

где $C_5 = C(1+e^{-1})$.
Доказательство. С учетом условий *а)* и *в)*, из (6) получим

$$|L\ (t,x,y,s,u(s,x,y)+\xi(s,x,y,\varepsilon),u(s,x,y),\varepsilon\ )| \le$$

$$\le C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau}\,|\xi\ (s,x,y,\varepsilon\ )| +$$

$$+\ C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,x,y,s)ds}\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,x,y,s)ds\,|\xi(s,x,y,\varepsilon)|\,d\tau.$$

Обозначив $\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau$ и учитывая, что $\underset{\eta>0}{sup}(\eta e^{-\eta}) = e^{-1}$, для первого слагаемого получим

$$C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_0(\tau,x,y,\tau)d\tau}\,|\xi\ (s,x,y,\varepsilon\ )| \le C\,|\xi(s,x,y,\varepsilon)|\,e^{-1},$$

для второго —

$$C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,x,y,\tau)\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(s,x,y,s)\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau} ds d\tau\,|\xi\ (s,x,y,\varepsilon\ )| \le$$

$$\le C\int_0^{\infty} \eta e^{-\eta} d\eta = C\,|\xi(s,x,y,\varepsilon)|\,.$$

Отсюда вытекает справедливость леммы 3.
Лемма 4. *Пусть выполняются условия а) и г) и функция*

$$N_1(t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon),u(s,z,y),\varepsilon)$$

определена формулой (7), $K_0(t,x,y,t)>0$ *почти при всех* $(t,x,y)\in G$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left|N_1\ (t,x,y,s,z,u(s,z,y)+\xi(s,z,y,\varepsilon),u(s,z,y),\varepsilon\ )\right|\le C_6\left|\xi\ (s,x,y,\varepsilon\ )\right|,$$

где $C_6=C(1+e^{-1})$.
Доказательство. Принимая во внимание условия *а)* и *г)*, из (7) получаем требуемую оценку.
Лемма 5. *Пусть выполняются условия а) и д) и функция*

$$M(t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon),u(s,z,w),\varepsilon)$$

определена формулой (8); $K_0(t,x,y,t)>0$ *почти при всех* $(t,x,y)\in G$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left|M\ (t,x,y,s,z,w,u(s,z,w)+\xi(s,z,w,\varepsilon),u(s,z,w),\varepsilon\ )\right|\le C_7\left|\xi\ (s,z,w,\varepsilon\ )\right|,$$

где $C_7=C(1+e^{-1})$.
Доказательство аналогично доказательству предыдущих лемм.

Далее, учитывая леммы 1-5, из (4) имеем

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le C_0(\varepsilon)+C_8\int_0^t|\xi(s,x,y,\varepsilon)|\,ds+\int_0^t\int_0^x C_6\,|\xi(s,z,y,\varepsilon)|\,dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7\,|\xi(s,z,w,\varepsilon)|\,dwdzds, \tag{13}$$

где $C_8=(C+C_1)(1+e^{-1})$; $C_0(\varepsilon)=4\left\|u(t,x,y)\right\|e^{\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta)$, $\beta\in$*(0;1)*,

$$\omega_{\bar u}(\delta)=\sup_{\substack{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta\\ x\in[0,X]\\ y\in[0,Y]}}\left|u(\varphi^{-1}(\upsilon,x,y),x,y)-u(\varphi^{-1}(\upsilon_0,x,y),x,y)\right|,$$

$\varphi^{-1}(v,x,y)$ — обратная функция функции $\varphi(t,x,y)=\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds$. Обозначим

$$a(t,x,y,\varepsilon)=C_0(\varepsilon)+\int_0^t\int_0^x C_6\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds. \tag{14}$$

Тогда неравенство (13) имеет вид:

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le a(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t C_8\left|\xi(s,x,y,\varepsilon)\right|ds. \tag{15}$$

Применим неравенство Гронулла-Беллмана к неравенству (15) и, используя резольвенту $R(t,s)=C_8e^{C_8(t-s)}$, получим

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le a(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t C_8e^{C_8(t-s)}a(s,x,y,\varepsilon)ds.$$

Вместо $a(t,x,y,\varepsilon)$ поставим (14) и после элементарных преобразований последнее неравенство примет вид:

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le C_0(\varepsilon)e^{C_8T}+\int_0^t\int_0^x C_6e^{C_8T}\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7e^{C_8T}\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds. \tag{16}$$

В дальнейшем используем леммы.

Лемма 6. *Пусть $\xi(t,x),b(t,x)\in C([0,T]\times[0,X])$, $b(t,x)\ge 0$ при $(t,x)\in[0,T]\times[0,X]$ и $|\xi(t,x)|\le b(t,x)+\int_0^t\int_0^x K\left|\xi(s,z)\right|dzds$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,X]$, где $0<K$ — постоянная. Тогда справедливо неравенство*

$$|\xi(t,x)|\le b(t,x)+\int_0^t\int_0^t R(t,x,s,z)b(s,z)dzds,(t,x)\in[0,T]\times[0,X], \tag{17}$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=0}^\infty K_1^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$.

Доказательство. Пусть $|\xi(t,x)| \le \vartheta(t,x)$, $b(t,x) \ge 0$. Применим метод последовательных приближений, имеем

$$\begin{cases} \vartheta_0(t,x) = b(t,x), \\ \vartheta_n(t,x) \le b(t,x) + \int_0^t \int_0^x C_7 \vartheta_{n-1}(s,z)dzds, \qquad n \in N, \end{cases}$$

$$\vartheta(t,x) = b(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_n(t,x) - \vartheta_{n-1}(t,x,)], \tag{18}$$

$$\vartheta_2(t,x) - \vartheta_1(t,x,) = \int_0^t \int_0^x C_9[\vartheta_1(t,x) - \vartheta_0(t,x,)]dzds =$$

$$= \int_0^t \int_0^x C_9 \left(\int_0^t \int_0^x C_9 b(s_1,z_1)dz_1 ds_1 \right) dzds,$$

отсюда, применяя формулу Дирихле, получим

$$\vartheta_2(t,x) - \vartheta_1(t,x,) = C_9^2 \int_0^t \int_0^x b(s,z)(t-s)(x-z)dzds.$$

Методом математической индукции получим

$$\vartheta_n(t,x) - \vartheta_{n-1}(t,x,) = C_9^n \int_0^t \int_0^x b(s,z) \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} dzds.$$

Тогда из (18) имеем

$$\vartheta_n(t,x) - \vartheta_{n-1}(t,x,) = b(t,x) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x b(s,z)[C_9 + \sum_{n=2}^{\infty} C_9^n \frac{(t-s)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{((n-1)!)^2}]dzds =$$

$$= b(t,x) + \int_0^t \int_0^x R(t,x,s,z)b(s,z)dzds,$$

где $R(t,x,s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_9^{n+1} \frac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $\xi(t,x,y), g(t,x,y) \in C(G)$, $g(t,x,y) \ge 0$ *при* $(t,x,y) \in G$ *и*

$$\xi(t,x,y) \le g(t,x,y) + C_{10} \int_0^t \int_0^x \int_0^y |\xi(s,z,w)|\, dwdzds, \quad (t,x,y) \in C(G),$$

где $0 < C_{10}$ *— некоторая постоянная. Для трех переменных также справедливо неравенство*

$$|\xi(t,x,y)| \leq g(t,x,y) + \int_0^t \int_0^x \int_0^y R_1(t,x,y,s,z,w) g(s,z,w) dwdzds,$$
$$(t,x,y) \in C(G), \tag{19}$$

где $G = \{(t,x,y): \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y\}$ *и*

$$R_1(t,x,y,s,z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{10}^{n+1} \frac{(t-s)^n (x-z)^n (y-w)^n}{(n!)^3}.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Из (16), применяя лемму 6 и формулу Дирихле, получим

$$|\xi(t,x,\varepsilon)| \leq C_0(\varepsilon) e^{C_8 T} + \int_0^t \int_0^x C_0(\varepsilon) e^{C_8 T} R(t,x,s,z) dzds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x \int_0^y [C_7 e^{C_8 T} + \int_0^s \int_0^x R(t,x,s_1,z_1) C_7 e^{C_8 T} dz_1 ds_1] \, |\xi(s_1,z,y,\varepsilon| \, dwdzds, \tag{20}$$

где $R(t,x,s,z) = C_7 e^{C_8 T} \sum_{n=0}^{\infty} (C_7 e^{C_8 T})^n \frac{(t-s)^n (x-z)^n}{(n!)^2}$.

Из (20) получим неравенство

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)| \leq C_{11} + \int_0^t \int_0^x \int_0^y C_{11} \, |\xi(s,z,w,\varepsilon)| \, dwdzds, \tag{21}$$

где $C_{11} = C_0(\varepsilon) e^{C_8 T} [1 + R(T,X,0,0) TX]$.

Из (21), применяя неравенство (19) и формулу Дирихле, получим

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)| \leq C_{11} + \int_0^t \int_0^x \int_0^y R(t,x,y,s,z,w) C_{11} dwdzds, \tag{22}$$

где $R(t,x,y,s,z,w) = C_{12} \sum_{n=0}^{\infty} C_{12}^n \frac{(t-s)^n (x-z)^n (y-w)^n}{(n!)^3}$.

Из неравенства (22) получим

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)| \leq C_{11} [1 + R(T,X,Y,0,0,0) TXY] \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Получили следующую оценку:

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)| \le C_0(\varepsilon)e^{C_8 T}, \tag{23}$$

где $C_0(\varepsilon) = 3\,\|u(t,x,y)\|_C\, e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta})$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия а)-д) и уравнение (1) имеет непрерывное решение $u(t,x,y)$ на G, кроме того, пусть $K_0(t,x,y,t) > 0$ при почти всех (t,x,y)$\in G$. Тогда решение уравнения (2) представимо в виде (3), причем это решение при $\epsilon \to 0$ сходится по норме $C(G)$ к непрерывному решению уравнения (1) в области G и справедливо (23).*

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C(G)$.*

Доказательство. Пусть уравнение (1) при фиксированной $f(t,x,y)$ имеет два решения $u_1(t,x,y)$ и $u_2(t,x,y)$. Сначала покажем, что $u_1(0,x,y)=u_2(0,x,y)$, $x\in[0;X]$, $y\in[0;Y]$. В самом деле, из (1) имеем

$$\int_0^t K_0(t,x,y,s)[u_1(s,x,y)) - u_2(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t [K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)) - K_1(t,x,y,s,u(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x [N(t,x,y,s,z,u_1(s,z,y)) - N(t,x,y,s,z,u_2(s,z,y))]dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y [M(t,x,y,s,z,w,u_1(s,z,w))-$$

$$-M(t,x,y,s,z,w,u_2(s,z,w))]dwdzds = 0.$$

Последнее уравнение преобразуем к следующему виду:

$$[u_1(0,x,y) - u_2(0,x,y)]\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds =$$

$$= -\int_0^t K_0(s,x,y,s)[u_1(s,x,y) - u_1(0,x,y) - u_2(s,x,y) - u_2(0,x,y)]ds-$$

$$-\int_0^t [K_0(t,x,y,s)-K_0(s,x,y,s)](u_1(s,x,y)-u_2(s,x,y))ds-$$

$$-\int_0^t [K_1(t,x,y,s,u_1(s,x,y))-K_1(s,x,y,s,u_1(s,x,y))-$$

$$-K_1(t,x,y,s,u_2(s,x,y))-K_1(s,x,y,s,u_2(s,x,y))]ds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x [N(t,x,y,s,z,u_1(s,z,y))+N(s,x,y,s,z,u_1(s,z,y))-$$

$$-N(t,x,y,s,z,u_2(s,z,y))+N(s,x,y,s,z,u_2(s,z,y))]dzds-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^y [M(t,x,y,s,z,w,u_1(s,z,w))-M(s,x,y,s,z,w,u_1(s,z,w))-$$

$$-M(t,x,y,s,z,w,u_2(s,z,w))+M(s,x,y,s,z,w,u_2(s,z,w))]dwdzds.$$

В силу условий *а)-д)* отсюда, применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s, по теореме о среднем получим

$$|u_1(0,x,y)-u_2(0,x,y)|\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds \le [\sup_{(s,x,y)\in G}|u_1(s,x,y)-u_1(0,x,y)|+$$

$$+\sup_{(s,x,y)\in G}|u_2(s,x,y)-u_2(0,x,y)|]\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds+$$

$$+[\|u_1(t,x,y)\|_C+\|u_2(t,x,y)\|_C]Ct\times$$

$$\times\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds+[\|u_1(t,x,y)\|_C+\|u_2(t,x,y)\|_C]Ctx\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds+$$

$$+[\|u_1(t,x,y)\|_C+\|u_2(t,x,y)\|_C]Ctxy\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds.$$

По условию $\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds>0$ при $(t,x,y)\in G$. Тогда, деля обе части последнего неравенства на $\int_0^t K_0(s,x,y,s)ds$ и переходя к пределу при $t\to 0$, получим $\|u_1(0,x,y)-u_2(0,x,y)\|=0$ при $x\in[0;X], y\in[0;Y]$.

Далее, уравнение (2), которое является уравнением второго рода, имеет единственное решение $u(t,x,y,\epsilon)$ в пространстве непрерывных функций на G и, в силу теоремы, его можно представить в виде (3). Положим $u(t,x,y,\epsilon)=u_1(t,x,y)+\xi_1(t,x,y,\epsilon)$ и $u(t,x,y,\epsilon)=u_2(t,x,y)+\xi_2(t,x,y,\epsilon)$, где $u_1(t,x,y), u_2(t,x,y)$ — два решения уравнения (1) при фиксированной $f(t,x,y)$; $\|\xi_1(t,x,y,\varepsilon)\| \to 0$, $\|\xi_2(t,x,y,\varepsilon)\| \to 0$; при $\epsilon \to 0$

$$|u_1(t,x,y) - u_2(t,x,y)| \leq \|\xi_1(t,x,y,\varepsilon)\|_C + \|\xi_2(t,x,y,\varepsilon)\|_C .$$

Отсюда, переходя к пределу при $\epsilon \to 0$, имеем $u_1(t,x,y) = u_2(t,x,y)$. Следствие доказано.

Цитированная литература

[1]. Магницкий Н. А. *Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода*, Вычисл. матем. и матем. физики, 1979, Т. 19, № 4, С. 970 – 988.

[2]. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Р. *Некорректные задачи математической физики и анализ*, М: Наука, 1980.

[3]. Денисов А. М. *О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности*, Вестн. Моск. унив-та, Сер.15. Вычисл. матем. и киберн., 1980, № 3, С.49 – 52.

[4]. Иманалиев М. И., Асанов А. *О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода*, Докл. АН СССР, 1989, Т. 309, № 5, С. 1052 – 1055.

[5]. Иманалиев М. И., Асанов А. *О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода*, Докл. АН СССР, 1991, Т. 317, № 1, С. 22 – 35.

Статья поступила в редакцию 21.12.2011 г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 102 – 108*

УДК 517.956

ON THE SOLVABILITY OF ONE NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR IN A HALF-DISK

N. S. Imanbaev, M. A. Sadybekov

Institute of Mathematics, Informatics and Mechanics of MES of KR
Shevchenko 28, 050010 Almaty, Kazakhstan, e-mail: makhmud-s@mail.ru

The nonlocal boundary problem for the Laplace equation in a half-disk is considered. The difference of this problem is the impossibility of direct applying of the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. Based on these eigenfunctions there is constructed a special system of functions that already forms the basis. This is used for solving of the nonlocal boundary equation. The existence and the uniqueness of the classical solution of the problem are proved.

1. Statement of the problem

Our goal is to find a function $u(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ satisfying in D the equation

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$u(1,\theta) = f(\theta),\ 0 \le \theta \le \pi, \tag{2}$$

Keywords: *Laplace equation, basis, eigenfunctions, nonlocal boundary value problem*
2010 Mathematics Subject Classification: 33C10, 34B30, 35J, 35P10

$$u(r,0) = 0, \ r \in [0,1], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha u(r,\pi), \quad r \in (0,1), \tag{4}$$

where $D = \{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, $\alpha > 0$, $f(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(\pi) + \alpha f(\pi)$.

The problem (1)–(4) with $\alpha = 0$ was considered in the paper [1] for the Laplace equation and in the papers [2, 3] for the Helmholtz equation. The existence and the uniqueness of the solution of the problem are proved by applying the method of separation of variables and proving the basis of the special function systems of the Samarskii-Ionkin type in L_p. In contrast to these papers in case of $\alpha \neq 0$ it is impossible to use directly the Fourier method of separation of variables. Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis.

2. The uniqueness of the solution

Theorem 1. *The solution of the problem (1)–(4) is unique.*

Proof. Suppose that there exist two functions $u_1(r,\theta)$ and $u_2(r,\theta)$ satisfying the conditions of the problem (1)–(4). We show that the function $u(r,\theta) = u_1(r,\theta) - u_2(r,\theta)$ is equal to 0.

Consider the function $U(r,\theta) = u(r,\theta) + u(r,\pi-\theta)$ in the domain $D_1 = \{(r,\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$. It is easy to see that

$$\Delta U = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(r,\pi/2) = 0, \ \frac{\partial U}{\partial \theta}(r,0) = \alpha U(r,0) \text{ at } 0 < r < 1;$$

$$U(1,\theta) = 0 \text{ at } 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Since $\alpha > 0$, then $U = 0$ in the domain $\bar{D}_1$ by the maximum principle and the Zaremba-Giraud principle [4, p. 26] for the Laplace equation. This means that $u(r,\theta) = -u(r,\pi-\theta)$, in particular $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$ at $r \in [0,1]$. The equality $u(r,\theta) = 0$ in $\bar{D}$ follows from the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation. The proof of the theorem is complete.

3. Forming the basis

If solutions of equation (1) satisfying the conditions (3), (4) will be sought in the form of $u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$, then $R(r) = r^{\sqrt{\lambda}}$, $Re\sqrt{\lambda} \geq 0$ and for the function $\varphi(\theta)$ we get a spectral problem

$$-\varphi''(\theta) = \lambda\varphi(\theta),\ 0 < \theta < \pi;\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) + \alpha\varphi(\pi). \qquad (5)$$

This problem has two series of eigenvalues. All the eigenvalues are simple and the corresponding system of eigenfunctions does not form the basis in the domain $L_2(0,\pi)$ [5]. But in the paper [6] a special system of functions is built based of these eigenfunctions which does form the basis. And this fact was applied for the solution of nonlocal initial-boundary problem for the heat equation. In the papers [7, 8] one family of problems simulating the determination of the temperature and density of heat sources from given values of the initial and final temperature is similarly considered.

Let us present the necessary facts from the paper [6]. The problem (5) has two series of eigenvalues $\lambda_k^{(1)} = (2k)^2,\ k = 1,2,...,\ \lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2,\ k = 0,1,2,....$ Herein β_k are the roots of the equation $tg\beta = \alpha/2\beta,\ \beta > 0$, they satisfy the inequalities $k < \beta_k < k+1/2,\ k = 0,1,2,...$, and two-side estimates are carried out for $\delta_k = \beta_k - k$ where k is large enough,

$$\frac{\alpha}{2k}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2k}\left(1 + \frac{1}{2k}\right). \qquad (6)$$

The eigenfunctions of the problem (5) have the form

$$\varphi_k^{(1)}(\theta) = \sin(2k\theta),\ k = 1,2,...;\ \varphi_k^{(2)}(x) = \sin 2\beta_k\theta,\ k = 0,1,2,....$$

This system is almost normal but does not form even an ordinary basis in the domain $L_2(0,\pi)$. The additional system constructed from the previous one

$$\varphi_0(\theta) = (2\beta_0)^{-1}\varphi_0^{(2)}(\theta),\ \varphi_{2k}(\theta) = \varphi_k^{(1)}(\theta),$$

$$\varphi_{2k-1}(\theta) = (\varphi_k^{(2)}(\theta) - \varphi_k^{(1)}(\theta))(2\delta_k)^{-1},\ k = 1,2,...$$

is a Riesz basis in the domain $L_2(0,\pi)$. Biorthogonal to it is the system

$$\psi_0(\theta) = 2\beta_0\psi_0^{(2)}(\theta),\ \psi_{2k}(\theta) = \psi_k^{(2)}(\theta) + \psi_k^{(1)}(\theta),$$

$$\psi_{2k-1}(\theta) = 2\delta_k \psi_k^{(2)}(\theta),\ k = 1, 2, ...$$

This system is constructed from the eigenfunctions

$$\psi_k^{(1)}(\theta) = C_k^{(1)} \cos(2k\theta + \gamma_k),\ k = 1, 2, ...,$$

$$\psi_k^{(2)}(\theta) = C_k^{(2)} \cos(\beta_k(1 - 2\theta)),\ k = 0, 1, 2, ...,$$

of the problem conjugated to (5). The constants $C_k^{(j)}$ are taken from the biorthogonal relations $\left(\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}\right) = 1,\ j = 1, 2.$

If the function $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$ and satisfies the boundary conditions of the problem (5), then its Fourier series by the system $\varphi_k(\theta)$ converges uniformly. We can calculate that

$$\begin{aligned} &\varphi_0''(\theta) = -\lambda_0^{(2)}(\theta),\ \varphi_{2k}''(\theta) = -\lambda_k^{(1)}\varphi_{2k}(\theta), \\ &\varphi_{2k-1}''(\theta) = -\lambda_k^{(2)}\varphi_{2k-1}(\theta) - \tfrac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}\varphi_{2k}(\theta). \end{aligned} \tag{7}$$

4. Construction of the formal solution of the problem

Considering the section 3, we can write any solution of the problem (1) - (4) in the form of a biorthogonal series

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\varphi_k(\theta), \tag{8}$$

where $R_k(r) = (u(r, \cdot), \psi_k(\cdot)) \equiv \int_0^\pi u(r, \theta)\psi_k(\theta)d\theta$. The functions (8) satisfy the boundary conditions (3) and (4).

Substituting (8) into equation (1) and the boundary conditions (2), taking into account (7), for finding unknown functions $R_k(r)$ we obtain the following problems:

$$\begin{aligned} &r^2 R_0''(r) + rR_0'(r) - \lambda_0^{(2)} R_0(r) = 0, \\ &r^2 R_{2k-1}''(r) + rR_{2k-1}'(r) - \lambda_k^{(2)} R_{2k-1}(r) = 0, \\ &r^2 R_{2k}''(r) + rR_{2k}'(r) - \lambda_k^{(1)} R_{2k}(r) = \tfrac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} R_{2k-1}(r), \end{aligned} \tag{9}$$

with the boundary conditions $R_k(1) = f_k$, where f_k are the Fourier coefficients of the expansion of the function $f(\theta)$ into the biorthogonal series by $\varphi_k(\theta)$.

The regular solution of (9) exists, is unique and can be written in the explicit form:

$$\begin{aligned} &R_0(r) = f_0 r^{\sqrt{\lambda_0^{(2)}}},\ R_{2k-1}(r) = f_{2k-1} r^{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}}, \\ &R_{2k}(r) = f_{2k} r^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}} + f_{2k-1} \frac{r^{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}} - r^{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}}{2\delta_k}. \end{aligned} \tag{10}$$

Substituting (10) into (8), we obtain a formal solution of the problem

$$u(r,\theta) = f_0 \frac{r^{2\beta_0}}{2\beta_0} \sin(2\beta_0\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \frac{r^{2k}}{2\delta_k} [r^{2\delta_k} \sin(2(k+\delta_k)\theta) - \sin(2k\theta)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} r^{2k} \sin(2k\theta). \tag{11}$$

5. Main Theorem

Here we state our main result.

Theorem 2. *If $f(\theta) \in C^2[0,\pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(\pi) + \alpha f(\pi)$, then there exists a unique classical solution $u(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ of the problem (1) - (4).*

Proof. The uniqueness of the classical solution of the problem follows from Theorem 1. The formal solution of the problem is shown in the form of (11). In order to make sure that these functions are really the desired solutions we need to verify the applicability of the superposition principle. For it we need to show the convergence of the series, the possibility of termwise differentiation, and to prove the continuity of these functions on the boundary of the half-disk.

The possibility of differentiating the series (11) any number of times at $r < 1$ is an obvious consequence of the convergence of power series and two-sided estimates (6) for δ_k. Let us justify the uniform convergence of the series (8) at $r \leq 1$. For this we use the sign of the uniform convergence of Weierstrass. By direct calculation it is easy to see that the series (11) is majorized by the series $C_1(|f_0|+|f_1|+|f_2|+...)$. This series converges [6] due to the requirements of the theorem imposed on $f(\theta)$. Since all the terms of the series (11) are continuous functions, then the function $u(r,\theta)$ is continuous in the boundary domain $\bar{D}$. The proof of the theorem is complete.

6. The conjugated problem: the uniqueness and the existence of the solution

Let us now formulate a problem conjugated to (1)-(4). We look for a function $v(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ satisfying the equation

$$\Delta v = 0 \tag{12}$$

in D with the boundary conditions

$$v(1,\theta) = g(\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{13}$$

$$v(r,0) = v(r,\pi),\ r \in [0,1], \tag{14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\pi) + \alpha v(r,\pi) = 0,\ r \in (0,1), \tag{15}$$

where $g(\theta) \in C^2[0,\pi],\ g(0) = g(\pi),\ g'(\pi) + \alpha g(\pi) = 0.$

We can easily verify the conjugacy of the problems (1)-(4) and (12)-(15) by direct calculation. The uniqueness of the solution of the problem (12)-(15) follows from the maximum principle and the Zaremba-Giraud principle [4, p. 26] for the Laplace equation. The existence of the solution and its representation in the form of a biorthogonal series can be proved similar to Theorem 2. Let us show this result without the proof.

Theorem 3. *If $g(\theta) \in C^2[0,\pi],\ g(0) = g(\pi),\ g'(\pi) + \alpha g(\pi) = 0$, then there exists a unique classical solution $v(r,\theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ of the problem (12) - (15).*

References

[1]. E. I. Moiseev and V. E. Ambartsumyan, *On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem*, Differ. Equ., 2010, V. 46, № 5, P. 718 – 725.

[2]. E. I. Moiseev and V. E. Ambartsumyan, *Solvability of some nonlocal boundary value problems for the Helmholtz equation in a half-disk*, Doklady Mathematics, 2010, V. 82, № 1, P. 621 – 624.

[3]. E. I. Moiseev and V. E. Ambartsumyan, *On the solvability of nonlocal boundary value problem for the Helmholtz equation with the equality of flows at the part of the boundary and its conjugated problem*, Integral Transforms and Special Functions, 2010, V. 21, № 12, P. 897 – 906.

[4]. A. V. Bitsadze, *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh*, Moscow, Nauka, 1981.

[5]. P. Lang and J. Locker, *Spectral theory of two-point differential operators determined by* D^2 *II. Analysis of cases*, J. Math. Anal. Appl., 1990, V. 146, № 1, P. 148 – 191.

[6]. A. Yu. Mokin, *On a family of initial-boundary value problems for the heat equation*, Differ. Equ., 2009, V. 45, № 1, P. 126 – 141.

[7]. I. Orazov, M. A. Sadybekov, *One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2012, № 2, P. 70 – 75.

[8]. I. Orazov, M. A. Sadybekov, *On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature*, Siberian Mathematical Journal, 2012, V. 53, № 1, P. 146 – 151.

This work was carried out under the grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Received 08.06.2012

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 109 – 120*

УДК 517.51

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СУММ ФУРЬЕ

Л. П. Фалалеев

К 80-летию профессора С.А.Теляковского

Институт математики МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: v_gulmira@mail.ru

Исследованы аппроксимативные свойства операторов, составленных на базе суммирования Пуассона $(A, 1)$ подпоследовательностей сумм Фурье степенного и экспоненциального типов.

В заметке приведено доказательство результатов, анонсированных в [6].

Для матричных операторов

$$u_n(f, \Lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} (a_\nu \, cos \, \nu x + b_\nu \, sin \, \nu x)$$

Keywords: *Fourier series, common Poison methods, linear methods of summation, trigonometric system, asymptotic behavior*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

(a_ν, b_ν – коэффициенты Фурье функции $f(x) \in C_{2\pi}$), образованных ограниченными в совокупности множителями $\lambda_\nu^{(n)}$, в [1] приведена оценка

$$\|u_n(\cdot)\|_{C_{2\pi}} \leq C\{ln\, n \sum_{k=0}^{n} (\Delta\, \lambda_k)^2 \left[ln\,(k+1) + \sum_{l=0, l\neq k}^{n} ln \left| \frac{k+l+1}{k-l} \right| \right] \}^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$\Delta\, \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1} \neq 0,\ k = 1, 2, ..., N,\ C > 0,\ C = const.$

Оценка (1) является более тонкой по сравнению с аналогичными оценками, приведенными Я.С. Бугровым в [2, 3]. Для частных сумм Фурье, имеющих экспоненциальный порядок роста

$$S_{[2^{1^\varepsilon}]}, S_{[2^{2^\varepsilon}]}, ..., S_{[2^{N^\varepsilon}]}, ..., \ [y] - \text{целая часть } y,$$

из (1) можно получить легко проверяемые условия ограниченности норм операторов

$$\|u_n(\cdot)\|_{C_{2\pi}} \leq C\{ln\, n \sum_{k=0}^{n} (\Delta\, \lambda_k)^2 \left(k^\varepsilon + N^{1-\varepsilon}\right)\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где $\Delta\, \lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., N$, $\Delta\, \lambda_N = \lambda_N$, $0 < \varepsilon < 1$, $\lambda_0 = 1$, $n = 2^{N^\varepsilon}$ — степень полинома, $\Delta\, \lambda_k = \lambda_{n_k} - \lambda_{n_k+1}$, $n_k = \left[2^{k^\varepsilon}\right]$. Оценка (2) может быть получена из оценки (1), исходя из

а) свойств интегралов Фруллани,

б) асимптотических свойств интегрального косинуса ($x \to \infty$):

$$ci\, x = -\int_x^\infty \frac{cos\, t}{t} dt = \frac{sin\, x}{x} - \frac{cos\, x}{x^2} - \frac{2sin\, x}{x^3} + \frac{6cos\, x}{x^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{x^5}\right),$$

в) использования свойств вспомогательной функции

$$\varphi(x) = \frac{2^{x^\varepsilon} + 2^{k^\varepsilon} + 1}{2^{k^\varepsilon} - 2^{x^\varepsilon}},\ x \geq 1,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть

$$u_N(f, \Lambda, x) = \sum_{k=0}^{N} \Delta\, \lambda_k\, S_{n_k}(f, x),\ \ n_k = \left[2^{k^\varepsilon}\right],$$

$$k = 0, 1, ..., N, \ \ \Delta\,\lambda_k = \lambda_{n_k} - \lambda_{n_k+1},$$

$S_{n_k}(\cdot)$ – суммы Фурье с экспоненциальным порядком роста.

D.J. Newman установил, что если $n_k = 2^k$, то существуют $f(x) \in C_{2\pi}$, для которых любой регулярный по Теплицу метод не обеспечивает равномерной сходимости. Т. Ковальски обобщил результат Д. Ньюмана, доказав, что для произвольной лакунарной по Адамару, т.е.

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1,$$

последовательности $\{n_k\}$ существует $f(x) \in C_{2\pi}$ такая, что $f(0) = 0$, но $S_{n_k}(f, 0) = 1, \ k = 1, 2, \ldots$. Это означает существование таких $f(x) \in C_{2\pi}$, для которых никакой метод не обеспечивает восстановления по подпоследовательностям частных сумм с лакунарными номерами.

Из (2) следует (см. [1]), что (C, α) – средние Чезаро будут регулярны при $\alpha > \frac{1}{2}, \ 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, что сравнимо с результатом Т. Ковальского ($0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}, \ \alpha > \varepsilon$), полученным специально. Установлена регулярность средних Зигмунда, Рисса, Фавара, Валле Пуссена и др., к которым не применимы достаточные условия ограниченности норм $u_n(\cdot)$ многих авторов.

Используя некоторые идеи работы [4] о связи непрерывных и дискретных методов суммирования, применим установленные нами результаты и построения для методов Чезаро, Рисса к методу Пуассона $(A, l), \ l > 0$.

Пусть $\lambda_k(r) = r^k, \ k = 0, 1, 2, ..., \ 0 < r < 1$. (метод $(A, 1)$).

Так как $\lambda_k(r) \to 1$ при $r \to 1$, то по теореме Банаха-Штейнгауза для равномерной сходимости оператора $u_n(\cdot)$ к $f(x)$ необходима и достаточна ограниченность $\|u_N(\cdot)\|_{C_{2\pi}}$.

Построим матричный оператор для множителей $\lambda_k(r) = r^k, \ 0 < r < 1, \ k = 0, 1, \ldots,$

$$\lambda_0 = r^0 = 1,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\left[2^{1\varepsilon}\right]} = r^1,$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\left[2^{1\varepsilon}\right]+1} = ... = \lambda_{\left[2^{2\varepsilon}\right]} = r^2,$$

$$\lambda_3 = \lambda_{\left[2^{2\varepsilon}\right]+1} = ... = \lambda_{\left[2^{3\varepsilon}\right]} = r^3,$$

$$\lambda_N = \lambda_{\left[2^{(N-1)^\varepsilon}\right]+1} = ... = \lambda_{\left[2^{N^\varepsilon}\right]} = r^N.$$

Пусть

$$\Delta\lambda_i = \begin{cases} r^k(1-r),\ i = \left[2^{k^\varepsilon}\right],\ k = 0, 1, ..., N, ..., \\ 0,\ i \neq \left[2^{k^\varepsilon}\right],\ i \leq n = \left[2^{N^\varepsilon}\right], \end{cases}$$

тогда

$$(\Delta\lambda_i)^2 = \begin{cases} r^{2k}(1-r)^2,\ i = \left[2^{k^\varepsilon}\right],\ k = 0, 1, ..., N, ..., \\ 0,\ i \neq \left[2^{k^\varepsilon}\right],\ i \leq n = \left[2^{N^\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

Проверим ограниченность $\|u_N(\cdot)\|$, используя неравенство (2).

Пусть $N = \left[\frac{1}{1-r}\right]$ (см. [4]), тогда

$$\|u_N\| \leq C\{ln\, 2^{N^\varepsilon} \sum_{k=0}^{N} (1-r)^2 \cdot r^{2k}(k^\varepsilon + N^{1-\varepsilon})\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C\{(1-r)^2 \sum_{k=0}^{N} N^\varepsilon \cdot (r^2)^k \cdot k^\varepsilon + (1-r)^2 N \sum_{k=0}^{N} r^{2k}\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C(1-r)\{\frac{1}{(1-r)^\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1-r)^{\varepsilon+1}} + \frac{1}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1-r}\}^{\frac{1}{2}} = C(1-r)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \leq C$$

при $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $C > 0$, $C = const$.

При этом числа k^ε заменены на числа Чезаро A_k^ε, суммы $\sum_{k=0}^{N}$ оценены сверху бесконечной суммой, использованы формулы

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x^\nu,\ \ 0 < x < 1,\ \ A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^\alpha A_\nu^\beta,\ \ \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta > -1. \tag{3}$$

С помощью метода $(A, 1)$ построим оператор $u_N(f, \Lambda, x)$ по подпоследовательностям S_{n_k} сумм Фурье, имеющим степенной порядок роста:

$$u_n(f, \Lambda, x) = \sum_{k=0}^{N} \Delta\lambda_k S_{n_k}(f, x),\ \ n_k = [k^\gamma],\ \ k = 0, 1, ...,\ \ \gamma \geq 1,$$

$[y]$ – целая часть y.

В этом случае

$\lambda_0 = r^0 = 1,$

$\lambda_1 = r^1,$

$\lambda_2 = ... = \lambda_{[2\gamma]} = r^2,$

$\lambda_3 = \lambda_{[2\gamma]+1} = \lambda_{[2\gamma]+2} = ... = \lambda_{[3\gamma]} = r^3,$

$\lambda_4 = \lambda_{[3\gamma]+1} = \lambda_{[3\gamma]+2} = ... = \lambda_{[4\gamma]} = r^4,$

$\lambda_N = \lambda_{[(N-1)\gamma]+1} = \lambda_{[(N-1)\gamma]+2} = ... = \lambda_{[N\gamma]} = r^N.$

Пусть

$$\Delta^1\lambda_i = \begin{cases} r^k(1-r),\ i = [k^\gamma],\ k = 0,1,...,N,...,\ \gamma \geq 1, \\ 0,\ i \neq [k^\gamma],\ i \leq n = [N^\gamma] - \text{степень полинома.} \end{cases}$$

В [5] приведено достаточное условие ограниченности норм матричных операторов, построенных по суммам Фурье со степенным порядком роста:

$$\|u_N(\cdot)\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \leq C\{n^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{k=0}^{N}(\Delta\lambda_k)^2\left(1+(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)\}^{\frac{1}{2}},\ \gamma \geq 1,\ n = [N^\gamma]. \tag{4}$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{1-r}\right]$ (см. [4]), $n^{\frac{1}{\gamma}} = \left[\frac{1}{1-r}\right]$.

Из [4] следует

$$\|u_N\| \leq C\{\frac{1}{1-r}\sum_{k=0}^{N}(1-r)^2\cdot r^{2k}\left(1+(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)\} =$$

$$= C(1-r)\sum_{k=1}^{N}r^{2k}\left(1+(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1}\right). \tag{5}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{N}r^{2k} < C\sum_{k=0}^{\infty}r^{2k} = \frac{C}{1-r} \quad (r \to 1-),$$

то после применения одного преобразования Абеля в (5) получим

$$C(1-r)\sum_{k=1}^{N} r^{2k}\,(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1}=$$

$$=C(1-r)\sum_{k=1}^{N}(r^{2k}-r^{2k+1})\sum_{\nu=1}^{k}(N-\nu)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot \nu^{\frac{1}{\gamma}-1}=$$

$$=C(1-r)^2\sum_{k=1}^{N} r^{2k}\sum_{\nu=1}^{k} N^0\le C(1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot r^{2k}\le C,$$

т.к.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot r^k=\frac{C}{(1-r)^2},\ C>0 \text{ при } r\to 1-.$$

При этом мы воспользовались формулами (3) для $\alpha=1-\frac{1}{\gamma}$, $\beta=\frac{1}{\gamma}-1$, $\alpha+\beta=0$, $A_n^0=A_0^\alpha=1$.

Таким образом, исходя из достаточных условий (2) и (4), показано, что нормы операторов, построенных при Пуассоновском суммировании подпоследовательностей сумм Фурье со степенным и экспоненциальным порядками роста, ограничены, что вместе с $r^k\to 1$, $k=0,1,2,...$, при $r\to 1-$ гарантирует их равномерную сходимость в пространстве $C_{2\pi}$. Покажем, что эти условия обеспечивают определенную скорость сходимости на простейших классах функций.

Обозначим через $u_r(f,x)$ оператор, построенный по подпоследовательности сумм Фурье со степенным порядком роста посредством суммирования методом $(A,1)$ Пуассона.

Теорема 1. *При $r\to 1-$ справедливы следующие оценки* ($\gamma\ge 1$, $0<\alpha\le 1$, $0<r<1$)*:*

$$\sup_{f\in Lip_1\alpha}\|f(x)-u_r(f,x)\|_{C_{2\pi}}=\begin{cases} O((1-r)^\alpha), & 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma},\\ O\left(\sqrt{(1-r)\,ln\,\frac{1}{1-r}}\right), & \alpha=\frac{1}{2\gamma},\\ O(\sqrt{1-r}), & \frac{1}{2\gamma}<\alpha\le 1,\end{cases}\tag{6}$$

причем первая и третья оценки точны по порядку, при $\gamma=1$ все три оценки точны по порядку.

Доказательство. Воспользуемся схемой получения сценки (4), приведенной в [5] (см. также [1]):

$$|u_n(f,\Lambda,x)-f(x)| \le c\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\cdot\left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu \frac{sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{t}{2}}\right| dt \le$$

$$\le c\int_0^{\frac{1}{n}} t^\alpha \left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu \frac{sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t}{t}\right| dt + c\int_{\frac{1}{n}}^\pi \left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu \frac{sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t}{t^{1-\alpha}}\right| dt = I_1+I_2.$$

При этом для ограниченных множителей суммирования $\lambda_\nu^{(n)}$

$$I_1 \le c\sum_{\nu=1}^N |\Delta\lambda_\nu|\,(\nu^\gamma+\frac{1}{2})\int_0^{\frac{1}{n}} t^\alpha dt = \frac{c}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^N |\Delta\lambda_\nu|\,(\nu^\gamma+\frac{1}{2}) \le \frac{c}{n^\alpha}\sum_{\nu=1}^N |\Delta\lambda_\nu| \le$$

$$\frac{c}{n^\alpha}\{N\sum_{\nu=1}^N (\Delta\lambda_\nu)^2\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{c}{n^\alpha}\{n^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{\nu=1}^N (\Delta\lambda_\nu)^2\,(1+(N-\nu)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot\nu^{\frac{1}{\gamma}-1})\} \le \frac{c}{n^\alpha}$$

для любых $0<\alpha\le 1$ в силу (4).

Заметим далее, что

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}} = \begin{cases} O(n^{\frac{1}{\gamma}-2\alpha}), & 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma}, \\ O(ln\,n), & \alpha=\frac{1}{2\gamma}, \\ O(1), & \frac{1}{2\gamma}<\alpha\le 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$I_2 \le c\{\int_{\frac{1}{n}}^\pi \left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu\, sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})\right|^2 \left(\sqrt{t^{\frac{1}{\gamma}-1}}\right)^2 dt \int_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{dt}{t^{1-2\alpha+\frac{1}{\gamma}}}\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{c\sqrt{A_n}}{\sqrt{n^{\frac{1}{\gamma}}}}\{n^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\pi \left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu\, sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t\right|^2\cdot t^{\frac{1}{\gamma}-1}dt\}^{\frac{1}{2}}.$$

В [5] показано, что

$$\{n^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\pi \left|\sum_{\nu=1}^N \Delta\lambda_\nu\, sin(\nu^\gamma+\frac{1}{2})t\right|^2\cdot t^{\frac{1}{\gamma}-1}dt\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq c\{n^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{\nu=1}^{N} (\Delta\lambda_\nu)^2 \left(1 + (N-\nu)^{1-\frac{1}{\gamma}} \cdot \nu^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)\}^{\frac{1}{2}} \leq c \text{ в силу (4).}$$

Объединяя оценки интегралов I_1 и I_2 для операторов, множители суммирования которых образуют ограниченную правую часть оценки (4), получим следующую оценку:

$$\sup_{f\in Lip_1\alpha} \|f(x)-u_n(f,x)\|_{C_{2\pi}} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), \ \ 0<\alpha<\frac{1}{2\gamma}, \\ O\left(\sqrt{\frac{ln\,n}{n^{\frac{1}{\gamma}}}}\right), \ \ \alpha=\frac{1}{2\gamma}, \\ O\left(\sqrt{n^{-\frac{1}{\gamma}}}\right), \ \ \frac{1}{2\gamma}<\alpha\leq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Возвращаясь к обозначениям $n=[N^\gamma]$, $N=\left[\frac{1}{1-r}\right]$, из (7) получим (6). Первая оценка в (7) не может быть улучшена согласно теореме Джексона.

Покажем, что последняя оценка в (7) не может быть улучшена на всем классе матриц Λ_1, элементы которых удовлетворяют условию (4), и на всем классе $Lip_1\alpha$ для всех $\gamma>1$. Рассмотрим матрицу $\left(N=\left[\frac{1}{1-r}\right]\right)$:

$\lambda_0 = 1,$

$\lambda_1 = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)} \cdot r^1,$

$\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{[2\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)} \cdot r^2,$

$\lambda_3 = \lambda_{[2\gamma]+1} = \lambda_{[2\gamma]+2} = ... = \lambda_{[3\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)} \cdot r^3,$

$\lambda_N = \lambda_{[(N-1)\gamma]+1} = \lambda_{[(N-1)\gamma]+2} = ... = \lambda_{[N^\gamma]} = \frac{N-1}{\sqrt{N}(\sqrt{N}+1)} \cdot r^N.$

Для нее

$$\Delta\,\lambda_0 = 1-\lambda_1 = 1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)r = \frac{r}{\sqrt{N}} + 1 - r,$$

$$(\Delta\,\lambda_0)^2 = 1-r+o(1-r) \ \text{ при } \ r\to 1-\,. \tag{8}$$

Легко подсчитать, что

$$\Delta\,\lambda_i = \left(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)(1-r)\cdot r^k,\;\; i=[N^\gamma]\,,\;\; \Delta\,\lambda_i = 0,\;\; i\neq[N^\gamma]\,,\; k=0,1,2,\ldots .$$

Покажем, что построенная матрица принадлежит классу матриц Λ_1, т.е. правая часть неравенства (4) для нее ограничена:

$$N\{(\Delta\,\lambda_0)^2+\sum_{k=1}^{N}(\Delta\,\lambda_k)^2\;(1+(N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1})\}<c.$$

Так как $N=\left[\frac{1}{1-r}\right]$, то из (8) следует, что $N\,(\Delta\,\lambda_0)^2\leq c,\;\; c>0,\; c=const.$

Аналогично устанавливается, что

$$N\sum_{k=1}^{N}(1-r)^2\,r^{2k}\leq c(1-r)\sum_{k=1}^{N}r^{2k}\leq c(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}r^{2k}\leq(1-r)\cdot\frac{c}{1-r^2}\leq c.$$

Покажем ограниченность величины

$$B=N(1-r)^2\sum_{k=1}^{N}r^{2k}\left((N-k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot k^{\frac{1}{\gamma}-1}\right).$$

Переходя к числам Чезаро и совершая преобразование Абеля, получим

$$B=c(1-r)\sum_{k=1}^{N}(r^{2k}-r^{2k+1})\sum_{\nu=0}^{k}A_{N-\nu}^{1-\frac{1}{\gamma}}\cdot A_{\nu}^{\frac{1}{\gamma}-1}=$$

$$=c(1-r)^2\sum_{k=1}^{N}r^{2k}\sum_{\nu=0}^{k}A_k^0=c(1-r)^2\sum_{k=1}^{N}k\cdot r^{2k}\leq c,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N}k\cdot r^{2k}\leq\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot r^{2k}\leq\frac{c}{(1-r^2)^2},\;\; r\to 1-\,.$$

Таким образом, построенная матрица принадлежит классу матриц Λ_1.

Для функции $f(t)=cos\,t$ легко проверить, что

$$u_r(cos\,t,\Lambda_1,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}cos\,(x+t)\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N^\gamma}cos\,kt\}dt=\lambda_1\,cos\,x.$$

Поэтому из (8) следует

$$|u_N(cos\,t,\Lambda_1,x)-f(x)|=|1-\lambda_1|\cdot|cos\,x|=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{N}}+O(1-r)=c\sqrt{n^{-\frac{1}{\gamma}}}=O\left(\sqrt{1-r}\right),\ r\to 1-.$$

При $\gamma=1$, как отмечено в [1, 5], условие (4) превращается в известное условие Стечкина-Фомина и точность всех трех оценок в (7) установлена А.В. Баскаковым.

Пусть $v_r(f,x)$ – оператор, построенный по подпоследовательностям частных сумм Фурье с экспоненциальным порядком роста $n_k=\left[2^{k^\varepsilon}\right],\ 0<\varepsilon\leq\frac{1}{2},\ k=1,2,...,N,...$, посредством суммирования методом Пуассона $(A,1)$. Условие (2), гарантирующее ограниченность норм соответствующих операторов, достаточно точно. С помощью него была установлена регулярность многих дискретных методов суммирования на классе $C_{2\pi}$ без дополнительных требований к структурным свойствам функций.

Теорема 2. *При $r\to 1-$ справедлива следующая оценка* $(0<\varepsilon\leq\frac{1}{2},\ 0<r<1)$*:*

$$\sup_{f\in Lip_1\alpha}\|f(x)-v_r(f,x)\|_{C_{2\pi}}=O\left((1-r)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right),\ 0<\alpha\leq 1.$$

Доказательство теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Для ограниченных в совокупности множителей суммирования $\{\lambda_k\},\ k=1,2,...,$ выполнено неравенство*

$$I=c\{\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta\lambda_k\,sin(k+\frac{1}{2})t\right|\frac{dt}{t}\}\leq c\sqrt{ln\,n}\{\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta\lambda_k\,sin(k+\frac{1}{2})t\right|^2\frac{dt}{t}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2. *Пусть* Λ_2 *– класс матриц* Λ, *для которых правая часть неравенства (2) ограничена и*

$$M_n(\alpha) = \sup_{\Lambda\subset\Lambda_2} \sup_{f\in Lip_1\alpha} \|f(x) - u_r(f, \Lambda, x)\|_{C_{2\pi}}.$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $0 < \alpha \leq 1$ *имеет место оценка*

$$M_n(\alpha) \leq \frac{c}{\sqrt{ln\, n}}.$$

Доказательство обеих лемм использует несложные комбинации простых результатов.

Полагая $N = \left[\frac{1}{1-r}\right]$, $0 < r < 1$, $n = \left[2^{N^{\varepsilon}}\right]$, $N = 1, 2, ...$, учитывая ограниченность множителей $\lambda_k = r^k$, из лемм 1,2 получим утверждение теоремы 2.

Заметим, что обе доказанные теоремы справедливы для $f(x) \in Lip(\alpha, p)$, т.е. $w(f, t)_p \leq \leq c \cdot t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, для ограниченных множителей суммирования $(|\lambda_k| < c)$, $k = 1, 2, \ldots$. Это следует из неравенств

$$\|f - u_n(\cdot)\|_p \leq \frac{1}{n} w(f, \frac{\pi}{n})_p \sum_{\nu=0}^{n} |\lambda_\nu| + c \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k\, sin(k + \frac{1}{2})t \right| \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{c}{n^{\alpha}} + \frac{c\sqrt{ln\, n}}{\sqrt{ln\, n}} \{\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k\, sin(k + \frac{1}{2})t \right|^2 \frac{dt}{t}\}^{\frac{1}{2}} < \frac{c}{\sqrt{ln\, n}}.$$

Результаты, доказанные в теоремах 1,2, анонсированы в [6].

Цитированная литература

[1]. Фалалеев Л. П., *Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье,* Автореферат дисс. на соиск. уч. степени д.ф.-м.наук, Алматы, 1993, С. 33.

[2]. Bugrov Ja. S., *On linear summation methods of Fourier series,* Analysis Math., 1979, T. 5, P. 119 – 133.

[3]. Бугров Я. С., *Линейные средние рядов и интегралов Фурье и скорость их сходимости,* Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1984, Т. 170, С. 77 – 85.

[4]. Ульянов П. Л., *О приближении функций*, Сиб. матем. журнал, 1964, Т. 5, № 2, С. 418 – 437.

[5]. Bliev N. K. and Falaleev L. P., *Rate of convergence of linear mean subsequencies of Fourier sums*, Topics in polynomials of one and several variables and their applications, Singapure, 1993, World Scientific Publ., P. 65 – 79.

[6]. Фалалеев Л. П., *Скорость сходимости линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье*, VI межд. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения", Южный федеральный универ., 25 мая – 1 июня 2010г., Ростов-на Дону, Тез. докл., С. 34 – 35.

Статья поступила в редакцию 09.08.2011 г.

Математический журнал. *Алматы. 2012. Том 12. № 2 (44). С. 121 – 129*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ДАУЛЕТ УМБЕТЖАНОВИЧ УМБЕТЖАНОВ
(к 80-летию со дня рождения)

В июле этого года исполнилось 80 лет со дня рождения Даулета Умбетжановича Умбетжанова – выдающегося казахстанского математика, специалиста в области дифференциальных уравнений, член-корреспондента НАН РК, доктора физико-математических наук, профессора.

Даулет Умбетжанович родился 25 июля 1932 года в ауле № 1 Шалкарского района Актюбинской области.

В 1950 году после окончания Шалкарской казахской средней школы Д.У. Умбетжанов поступил на физико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М. Кирова. Успешно окончив его в 1955 г., Д.У. Умбетжанов поступил в аспирантуру Казахского педагогического института им. Абая, откуда был командирован в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова для продолжения работы по теме кандидатской диссертации под руководством профессора Р.Э. Винограда, ученика профессора В.В. Немыцкого. По окончании аспирантуры Д.У. Умбетжанов работает в КазГУ с 1959 по 1973 год сначала старшим преподавателем, с 1965 года – доцентом кафедры математического анализа, с 1965 по 1967 год – заместителем декана механико-математического факультета КазГУ по научной работе.

В 1964 году защищает кандидатскую диссертацию на тему "О квазипериодических и почти периодических решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр", научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.Х. Харасахал. С 1973 по 1985 год работает в Казахском государственном Женском педагогическом институте заведующим кафедрой математического анализа, а с 1982 года – одновременно деканом физико-математического факультета.

В августе 1985 года Д.У. Умбетжанов переходит на работу в Институт математики и механики АН КазССР на должность заведующего лабораторией сначала прикладных методов анализа, затем с 1987 года – обыкновенных дифференциальных уравнений. С 1966 года, после смерти профессора В.Х. Харасахала его первый ученик Д.У. Умбетжанов возглавляет проводимую в Казахстане научно-исследовательскую работу по проблемам теории периодических и почти периодических решений дифференциальных уравнений. На основе метода малого параметра Пуанкаре им получены явные критерии существования квазипериодических решений неавтономных и автономных систем, которые были развиты и обобщены на счетные системы, интегро-дифференциальные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Разработан аналитический аппарат исследования многопериодических и почти многопериодических решений систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащих различные малые параметры. Эти результаты были опубликованы в монографии "Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных" (изд-во "Наука" КазССР, Алма-Ата, 1979) и легли в основу его докторской диссертации, успешно защищенной им в 1983 году в Институте математики УССР. В 1984 году ему присвоено ученое звание профессора. В последующие годы Д.У. Умбетжанов исследовал почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений переноса, параболических и гиперболических уравнений и краевых задач для них. Полученные им научные результаты положены в основу его монографии "Почти периодические решения эволюционных уравнений", которая вышла в издательстве "Наука" КазССР в 1990 году.

Последние годы жизни Д.У. Умбетжанов изучает почти периодические в смысле Степанова решения дифференциальных уравнений с эллиптическим оператором. Им вводится новое функциональное пространство функций дробной гладкости многих переменных, допускающих интегральное представление в виде свертки с матричным ядром Бесселя-Макдональда и с потенциалами из класса Степанова. Доказаны теоремы вложения для этого пространства и на их основе получены достаточные условия существования и единственности почти периодических решений по Степанову системы с положительно-определенным эллиптическим оператором в дробной степени.

Даулет Умбетжанович опубликовал две монографии и около 130 статей, многие из которых вышли в журналах "Доклады РАН", "Дифференциальные уравнения", "Украинский математический журнал", "Вестник МГУ. Серия матем.", "Доклады НАН РК", "Вестник НАН РК", "Известия НАН РК. Серия физ.-матем." и др. Им написаны статьи и очерки о математике и математиках старшего поколения: Ю.А. Митропольском, О.А. Жаутыкове, Х.И. Ибрашеве, А.К. Бедельбаеве, В.Х. Харасахале, А.А. Ермекове, которые были опубликованы в журналах, газетах, энциклопедических изданиях.

Д.У. Умбетжанов уделял большое внимание подготовке научных и научно-педагогических кадров. Под его непосредственным руководством защищены 1 докторская и 18 кандидатских диссертаций. Среди его учеников - доктора физ.-мат.наук Ж.А. Сартабанов, А.Т. Асанова, А.Б. Бержанов и др. Работая в КазГУ, КазГосЖенПИ, КИМЭПе и Институте математики НАН РК, он показал себя, как трудолюбивый, вдумчивый ученый и педагог, инициативный руководитель, заботливый товарищ и обаятельный человек. Его лекции отличались глубокой содержательностью, простотой и доходчивостью изложения теоретического материала.

В 1994 году Д.У. Умбетжанов был избран член-корреспондентом Национальной академии наук РК. Он был членом Проблемного научного совета по математике при ОФМН НАН РК, специализированных ученых советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, редколлегии по физико-математическим наукам при Главной редакции КСЭ. Он являлся первым Председателем экспертного совета по математике и информатике ВАК РК. За успешную и добросовестную работу он был награжден нагрудными значками "За отличные успехи в работе" МинВУЗа СССР (1982г.), "Отличник народного просвещения КазССР" МинВУЗа КазССР (1985г.), Почетными грамотами. Вместе с супругой, Нарен Косжановной, Даулет Умбетжанович воспитал и вырастил четырех дочерей Жумагуль, Алму, Шолпан и Раушан.

Даулет Умбетжанович Умбетжанов ушел из жизни 30 июля 1996 года после тяжелой продолжительной болезни.

В 1997 году была установлена мемориальная доска на стене Шалкарской казахской средней школы № 1, где он учился, его именем названа улица в г. Шалкар Актюбинской области, где он жил с родителями в детские и юношеские годы. Его портрет с биографическими данными, его монографии можно увидеть в Актюбинском областном краеведческом музее в экспозиции, посвященной деятелям науки и культуры.

В настоящее время научные идеи и направления профессора Д.У. Умбетжанова успешно развиваются его учениками и последователями.

Библиография

1. Умбетжанов Д.У. О применимости метода малого параметра Пуанкаре в теории почти периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Вестник АН КазССР. 1963. №7. С. 85-88.

2. Умбетжанов Д.У. К вопросу о периодических и квазипериодических решениях некоторых квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1965. Вып. 1. С. 54-64.

3. Умбетжанов Д.У. Об одной теореме существования прочти периодических решений дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1967. Вып. 1. С. 36-44.

4. Капишев К.К., Умбетжанов Д.У. О многопериодических решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений с малыми параметрами // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1968. №3. С. 32-38.

5. Умбетжанов Д.У. О голоморфных относительно параметра периодических и почти периодических решениях одного класса уравнений в частных производных // Вестник Московского университета. Сер. матем. и мех. 1969. №3. С. 37-43.

6. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях одного класса уравнений в частных производных с малыми параметрами // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. №5. С. 913-916.

7. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях одной системы уравнений гиперболического типа // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1971. №3. С. 64-68.

8. Сартабанов Ж.А., Умбетжанов Д.У. О построении многопериодиче-

ского решения одной системы счетных уравнений с частными производными // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1971. №5. С. 61-66.

9. Умбетжанов Д.У. Построение многопериодического решения одной системы квазилинейных уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1971. №5. С. 72-77.

10. Таранов Н.А., Умбетжанов Д.У. К вопросу о приводимости некоторой системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1972. №3. С. 76-80.

11. Умбетжанов Д.У. К построению многопериодического решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью параметрами // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. №7. С. 1326-1329.

12. Таранов Н.А., Умбетжанов Д.У. Об одной системе уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1973. №1. С. 67-72.

13. Тулегенова М.Б., Умбетжанов Д.У. О многопериодических решениях одной системы уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1973. №3. С. 57-61.

14. Умбетжанов Д.У. О существовании почти многопериодического решения одной квазилинейной системы уравнений с частными производными // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1974. №5. С. 23-27.

15. Сартабанов Ж.А., Умбетжанов Д.У. О многопериодическом решении одной системы уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1976. №5. С. 48-52.

16. Бержанов А.Б., Умбетжанов Д.У. О голоморфном многопериодическом решении одного счетного интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1977. №5. С. 61-66.

17. Умбетжанов Д.У. О почти многопериодическом решении одной гиперболической системы дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1979. №1. С. 63-67.

18. Елубаев С.Е., Үмбетжанов Д.Ү. Математикалық индукция және оның қолданылуы. Алма-Ата: Знание. 1979. 48 б.

19. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата: Наука КазССР,

1979. 211 с.

20. Умбетжанов Д.У. Исследование почти многопериодических решений гиперболических систем путем приведения к каноническому виду // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1981. №1. С. 46-51.

21. Умбетжанов Д.У. Исследование почти многопериодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дис. ...докт. физ.-мат. наук. Киев. 1982. 35с.

22. Бержанов А.Б., Умбетжанов Д.У. О существовании почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1983. №5. С. 11-15.

23. Бержанов А.Б., Умбетжанов Д.У. О почти многопериодическом решении одной нелинейной системы уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1986. №1. С. 43-47.

24. Умбетжанов Д.У. О непрерывной зависимости почти многопериодического решения одной системы уравнений в частных производных от векторного поля, определяющего дифференциальный оператор // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1986. №1. С. 64-68.

25. Умбетжанов Д.У. Построение почти многопериодического решения от счетного множества переменных одной системы уравнений в частных производных // Вестник АН КазССР. 1987. №1. С. 68-72.

26. Исмагулова Р.С., Умбетжанов Д.У. Построение почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений методом укорочения // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1987. №1. С. 54-59.

27. Юрий Алексеевич Митропольский (к 70-летию со дня рождения) // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1987. №1. С. 88-89.

28. Хасан Ибрашевич Ибрашев (к 70-летию со дня рождения) // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1987. №1. С. 89-90.

29. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1987. №5. С. 68-73.

30. Бержанов А.Б., Жакашбаев Б.Ж., Умбетжанов Д.У. О почти многопериодических по части переменных решениях систем уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1988. №1. С.

55-59.

31. Умбетжанов Д.У. О почти многопериодических решениях неоднородного уравнения теплопроводности // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1988. №5. С. 53-57.

32. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодическое решение одного класса линейных уравнений типа переноса // Вестник АН КазССР. 1988. №8. С. 70-76.

33. Умбетжанов Д.У. О почти периодических по всем временно-пространственным переменным решениях параболических уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1989. №1. С. 55-59.

34. Умбетжанов Д.У. О почти многопериодическом решении одного интегро- дифференциального уравнения типа переноса // Украинский математический журнал. 1989. Т. 41. №1. С. 79-85.

35. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях эллиптических уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1990. №1. С. 61-64.

36. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. Алма-Ата: Наука КазССР, 1990. 184с.

37. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях систем уравнений параболического и эллиптического типов // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1990. №5. С. 56-63.

38. Умбетжанов Д.У., Балханов В.А. Основные этапы математизации науки в социокультурном контексте // В. кн.: "Математизация науки. Социокультурные и методологические проблемы", раздел 2. Гл. 2. Алма-Ата: Ғылым. 1990. С. 114-147.

39. Избасаров Б., Умбетжанов Д.У. О квазипериодических по времени и периодических по пространственным переменным решениях параболических уравнений второго порядка // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1991. №1. С. 34-39.

40. Исмагулова Р.С., Умбетжанов Д.У. Метод укорочения для одной системы интегро-дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1991. №3. С. 27-31.

41. Умбетжанов Д.У. Академик Орымбек Ахметбекович Жаутыков (к 80-летию со дня рождения) // Вестник АН КазССР. 1991. №9. С. 75-77.

42. Умбетжанов Д.У. О почти многопериодических по всем независимым переменным решениях одного класса матричных параболических

уравнений // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1991. №5. С. 68-75.

43. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях полупространственных краевых задач для некоторых параболических по И.Г.петровскому систем // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1992. №3. С. 65-72.

44. Үмбетжанов Д.Ү. Белгілі бір матрицалық дифференциалдық теңдеудің периодты дерлік шешімі туралы // Вестник НАН РКазахстан. 1992. №6. С. 57-62.

45. Умбетжанов Д.У. Жизнь и деятельность первого казаха-профессора математики А.А.Ермекова // Вестник НАН РКазахстан. 1992. №7. С. 34-37.

46. Умбетжанов Д.У. Почти периодическое решение одной параболической системы, расщепленной на прямую и обратную подсистемы // Доклады НАН РКазахстан. 1992. №5. С. 12-16.

47. Умбетжанов Д.У. Построение почти периодических решений бипараболических систем уравнений с постоянными матричными коэффициентами // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1993. №1. С. 49-53.

48. Умбетжанов Д.У. О почти периодических решениях возвратных параболических систем с матричными коэффициентами // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1993. №5. С. 60-64.

49. Умбетжанов Д.У. Об одном пространстве векторных потенциалов с плотностями из класса Степанова // Доклады НАН РКазахстан. 1993. №6. С. 3-9.

50. Умбетжанов Д.У., Каниева Г.С. О почти периодических решениях полипараболических уравнений // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1994. №1. С. 40-45.

51. Умбетжанов Д.У. Почти периодическое решение полупространственной третьей краевой задачи для одной параболической системы // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1994. №3. С. 75-79.

52. Умбетжанов Д.У. Об одном новом функциональном пространстве потенциалов из класса Степанова // Доклады Российской АН. 1995. Т.341. №3. С. 310-312.

53. Умбетжанов Д.У. Интегральные уравнения Абеля-Вольтерра // Доклады НАН РКазахстан. 1995. №4. С. 3-7.

54. Умбетжанов Д.У. Об одном новом функциональном пространстве

потенциалов из класса Степанова // Украинский математический журнал. 1995. Т. 47. №10. С. 83-90.

English translation: D.U.Umbetzhanov On a space of potentials of fractional smoothness with densities from the stepanov class // Ukranian Mathematical journal. 1995. Vol. 47. No 10. pp. 1599-1605.

55. Умбетжанов Д.У. О корректно разрешимых краевых задачах для систем уравнений с эллиптическими операторами высших порядков // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. №12. С. 2056-2062.

56. Умбетжанов Д.У., Асанова А.Т. Ограниченные и почти периодические решения уравнений с операторами в дробной степени // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1996. №3. С. 75-79.

57. Умбетжанов Д.У. К исследованию периодических решений интегральных уравнений Абеля-Вольтерра // Известия НАН РКазахстан. Сер. физ.-матем. 1996. №5. С. 65-68.

Редакционная коллегия

РЕФЕРАТТАР — REVIEWS

УДК: 517.938 2010 MSC: 34B15

Айсағалиев С.А., Жүнісова Ж.Х., Қалимолдаев М.Н. **Жәй дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептері үшін батыру принципі** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 5 – 22.

Шеттік шарттарында фазалық шектеулері бар жәй дифференциалдық теңдеулердің шеттік есебін шешу әдісі ұсынылады. Әдістің негізін берілген шеттік есепті арнайы тиімді басқару есебіне келтіретін бірінші текті Фредгольм интеграл теңдеуінің жалпы шешіміне сүйенген батыру принципі құрайды.

Әдебиеттер тізімі – 7.

Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.H., Kalimoldayev M.N. **Immersion principle for boundary value problem for ordinary differential equations** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44).P. 5 – 22.

A method of solving boundary value problem of ordinary differential equations with boundary conditions in the presence of phase restrictions is proposed. A basis of the method is immersion principle, based on the general solution of the Fredholm first order integral equation, which allows to reduce the initial boundary problem to the special problem of optimal control.

References – 7.

УДК: 539.3 2010 MSC: 74B05, 74H15

Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. **Жарық кернеу таратқандағы беттік қосындысы бар серпінді жартылай жазықтықтағы толқындардың стационар емес дифракциясы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 23 – 42.

Стационар емес шеттік байланысты есеп қарастырылады: серпінді жарты кеңістіктің шекарасында серпінді дене орталарды бөлу шекарасында қатты бекітілген. Серпінді жарты кеңістіктегі жарықта таралған кернеу әсерінен пайда болған толқындар дифракциясымен сынуы үдерісі зерттелген.

Әдебиеттер тізімі – 7.

Alexeyeva L.A., Sarsenov B.T. **Diffraction of nonstationary waves in elastic half-plane with a surface inclusion at relieving the stress on the crack** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44).P. 23 – 42.

Contact boundary problems are considered: elastic half-space on whose boundary there is an elastic body with rigid contact conditions of interaction. The process of diffraction and refraction of elastic waves generated by the discharge of stress on the crack in an elastic half-space are investigated with using numerical method of bicharacteristics.

References – 7.

УДК: 517.956 2010 MSC: 35R12, 35L20, 34B37

Асанова А.Т. **Гиперболалық тектес дербес туындылы теңдеулер жүйесінің периодты шешімдері туралы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 43 – 55.

Гиперболалық тектес дербес туындылы теңдеулер жүйесі үшін периодты есеп зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің жалғыз периодты шешімінің бар болуының жаңа жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған.

Әдебиеттер тізімі – 27.

Asanova A.T. **On periodic solutions of the system of partial differential equations hyperbolic type** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44). P. 43 – 55.

A periodic problem for the system of partial hyperbolic differential equations on the stripe is investigated. New sufficient conditions of the existence of unique periodic solution of a considering problem in the terms of initial data are established.

References – 27.

УДК: 517.5 2010 MSC: 41A45, 26B40

Базарханов Д.Б. **Псевдодифференциалдық операторларды жуықтап қалпына келтіру** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 56 – 69.

Жұмыста символдары арнаулы кластарға жататын псевдодифференциалдық операторларды жуықтап қалпына келтірудің сызықты әдісі құрылған. Никольский–Бесов және Лизоркин–Трибель тектес лайықты функциялар кеңістіктерінің бірлік шарларында символдар кластары және функциялар кеңістіктерінің параметрлері арасындағы кейбір қатынастар үшін қателік бағалары алынған.
Әдебиеттер тізімі – 11.

Bazarkhanov D.B. **Approximate recovery of pseudo–differential operators** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44).P. 56 – 69.

In the paper linear method for approximate recovery of pseudo–differential operator with symbols from special classes is constructed and error bounds on unit balls of appropriate function spaces of Nikol'skii – Besov type and Lizorkin – Triebel type are given for certain relations between parameters of symbol classes and function spaces.
References – 11.

УДК: 517.95 2010 MSC: 35K20, 35B25, 35C05

Бижанова Г.И. **Кіші параметрі бар еркін шекаралы стефандық текті сызықтық есептердің шешімдері туралы. II** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 70 – 86.

Шекаралық шартта аға мүшесінде кіші параметр бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін стефандық тектес бір фазалық сызықтық есеп қарастырылады. Қобалжыған есептің шешімінің Гельдер кеңістігінде тұрақтылары кіші параметрге тәуелсіз бағалары алынды.
Әдебиеттер тізімі – 9.

Бижанова Г.И. **О решениях линейных задач со свободной границей стефановского типа с малым параметром. II** //Математический журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).С. 70 – 86.

Изучается линейная однофазная задача стефановского типа для уравнения теплопроводности с малым параметром при старшем члене в граничном условии. Получены оценки решения возмущенной задачи с константами, не зависящими от малого параметра, в пространствах Гельдера.

Цитированная литература – 9.

УДК: 517.968 2010 MSC: 45G10, 45D05

Зулпукаров Ж.А. **Тәуелсіз үш айнымалысы бар бірінші текті Вольтерраның сызықты емес интегралдық теңдеуі** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 87 – 101.

Бұл жұмыста тәуелсіз үш айнымалысы бар бірінші текті Вольтерраның сызықты емес интегралдық теңдеуі үшін М.М.Лаврентьев бойынша жүйелі операторлары құрылған және жалғыздық теоремасы дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 5.

Zulpukarov J.A. **Volterra first order nonlinear integral equation with three independent variables** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44).P. 87 – 101.

Regularization operators on M.M. Lavrent'ev for Volterra first order nonlinear integral equations with three independent variables are constructed and theorem of uniqueness is proved.

References – 5.

УДК: 517.956 2010 MSC: 33C10, 34B30, 35J, 35P10

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. **Жартылай дөңгелектегі Лаплас операторы үшін локалды емес бір шеттік есептің шешімділігі** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 102 – 108.

Лаплас операторы үшін жартылай дөңгелекте локалды емес шеттік есеп қарастырылған. Ол есептің басты ерекшелігі ретінде Фурье айнымалыларды айыру тәсілін тікелей қолдануға келмейтіндігін айтамыз. Өйткені берілген есепке сәйкес келетін спектралды есептің меншікті функциялары базис құрамайды. Дегенмен сол меншікті функциялар арқылы жаңа бір функциялар жүйесі құрастырылып, осы жаңа жүйенің көмегімен локалды емес шеттік есеп шешілген. Есептің классикалық шешімі бар және оның жалғыз болатындығы көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 8.

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. **О разрешимости одной нелокальной краевой задачи для оператора Лапласа в полукруге** //Математический журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).С. 102 – 108.

Рассматривается нелокальная краевая задача для оператора Лапласа в полукруге. Отличием этой задачи является невозможность прямого применения метода Фурье разделения переменных, так как соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора имеет систему собственных функций, не образующую базис. На основе этих собственных функций построена специальная система функций, которая уже образует базис. С помощью этой вспомогательной системы решена нелокальная краевая задача. Доказаны единственность и существование классического решения.

Цитированная литература – 8.

УДК: 517.51 2010 MSC: 42A10

Фалалеев Л.П. **Фурье қосындыларының сызықты орта тізбекшелерінің жинақталу жылдамдығы** // Математикалық журнал. 2012. Т. 12. № 2 (44).Б. 109 – 120.

Дәрежелік және экспоненциалды түрлердегі Фурье қосындыларының тізбекшелерінің Пуассон $(A, 1)$ қосу негізінде құрылған операторлардың аппроксимациялық қасиеттері тағайындалды.

Әдебиеттер тізімі – 6.

Falaleev L.P. **Rate of convergence of linear mean subsequencies of Fourier sums** // Mathematical journal. 2012. Vol. 12. № 2 (44).P. 109 – 120.

Approximate properties of the operator superposed on basis of Poisson $(A, 1)$ for Fourier sums subsequencies of power and exponential types are established.

References – 6.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении нужно отразить актуальность, новизну, имеющиеся результаты по теме представленной работы. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНИТИ (Россия) и Zentralblatt Math (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 16 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 16 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе LaTeX-2e и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК http://www.math.kz в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О., *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А., *Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем.наук, 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала":

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,
факс: 8 (727) 2 72 70 24, тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, web-site: http://www.math.kz

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 12, №2 (44), 2012

Адрес редакции:
Институт математики МОН РК, ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010,
тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), 8 (727) 2 72 43 93 (комн. 311),
факс: 8 (727) 2 72 70 24,
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru,
web-site: http://www.math.kz

Подписано в печать 15.09.2012г.
Тираж 300 экз. Объем 138 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

г. Алматы
пр. Достык, 85а, офис 309б
Тел./факс: 8 (727) 2 91 55 24, 2 72 03 88
e-mail: la_creation@inbox.ru,
web-site: http://www.lacreation.kz