ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2008 том 8 № 1 (27)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 1 (27) 2008

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Жамбыла, 25, к. 705
Телефон 8-(7272)-91-13-15, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, № 1 (27), 2008

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 5 – 11*

УДК 517.956

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Исследуется нелокальная задача с интегральным смещением для систем гиперболических уравнений второго порядка. На основе метода введения дополнительных параметров установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и предложены способы его нахождения.

Математическое моделирование процессов, происходящих в биологической синергетике, влагопереноса в капиллярно-пористой среде, диффузионных процессов, задач математической биологии приводит к нелокальным задачам с интегральным смещением [1-3].

В настоящей работе изучаются вопросы существования, единственности классического решения нелокальной задачи с интегральным смещением для системы гиперболических уравнений со смешанной производной.

На основе метода введения дополнительных параметров устанавливаются коэффициентные достаточные условия классической разрешимости исследуемой задачи и предлагаются способы отыскания ее решения.

В области $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается нелокальная задача с интегральным смещением системы гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{T_1}^{T_2} P(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

Keywords: *system of hyperbolic equations, non-local problem, integral displacement, method of additional parameter's introduction*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

где $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ являются непрерывными в $\bar{\Omega}$, $(n{\times}n)$ - матрица $P(t,x)$ непрерывно дифференцируема на $\bar{\Omega}$ по переменной x, n - вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, n - вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$, $0 \le T_1 < T_2 \le T$, $||u(t,x)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$, $||A(t,x)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|$.

Пусть $C(J,R^n)$ – множество непрерывных на J $(J \subset R^1$ или $J \subset R^2)$ функций $u : J \to R^n$. Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega,R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Для решения задачи и нахождения классического решения применяется метод введения дополнительных параметров [4-6]. Некоторые типы нелокальных задач с интегральным смещением для нагруженных гиперболических уравнений рассмотрены в работах [1-2], где для установления обобщенной разрешимости исследуемой задачи применяется метод Римана. Метод введения дополнительных параметров позволяет установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1) – (3) и предложить способ нахождения ее решения, не используя матрицу Римана. При этом от коэффициентов системы требуется только непрерывность на $\bar{\Omega}$, что дает возможность расширить класс разрешимых краевых задач для систем гиперболических уравнений.

Схема метода. Возьмем число $l \in \mathbb{N}$ и разобъем каждый из отрезков $[0,T_1]$ $[T_1,T_2]$, $[T_2,T]$ на l частей соответственно с шагами $h_1 > 0 :\ lh_1 = T_1$, $h_2 > 0 :\ lh_2 = T_2 - T_1$, $h_3 > 0 :\ lh_3 = T - T_2$, и произведем разбиение: $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{3l} [t_{r-1},t_r)$, $t_r = (r-1)h_1$, $r = \overline{1,l}$, $t_r = (r-1)h_2$, $r = \overline{l+1,2l}$, $t_r = (r-1)h_3$, $r = \overline{2l+1,3l}$. Через $u_r(t,x)$ обозначим сужение функции $u(t,x)$ на $[t_{r-1},t_r) \times [0,\omega]$, $r = 1,2,...,3l$. От задачи (1)–(3) перейдем к краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u_r}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u_r}{\partial t} + C(t,x)u_r + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r = [t_{r-1},t_r) \times [0,\omega], \tag{4}$$

$$u_r(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [t_{r-1},t_r), \quad r = \overline{1,3l}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=l+1}^{2l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\tau,x)u_i(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{6}$$

$$\lim_{t \to t_s - 0} \frac{\partial u_s(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{s+1}(t_s,x)}{\partial x}, \qquad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1,3l-1}. \tag{7}$$

Здесь соотношения (7) являются условиями склеивания производных по x решений во внутренних линиях разбиения области Ω.

Решением задачи (4)–(7) является система функций $u([t],x) = (u_1(t,x),u_2(t,x),...,\ u_{3l}(t,x))'$, где каждая функция $u_r(t,x)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, смешанного второго порядка и ограничена на своей области определения Ω_r вместе с производными (в начальных отрезках определения $t = t_{r-1}$ функция $u_r(t,x)$ имеет правосторонние частные производные $\dfrac{\partial u_r(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u_r(t,x)}{\partial x \partial t}$ и удовлетворяет системе (4) при всех $(t,x) \in \Omega_r$).

Из непрерывности и ограниченности функции $u_r(t,x)$ вместе с производными на Ω_r, $r = \overline{1,3l}$, следует существование левосторонних пределов: $\lim\limits_{t \to t_r - 0} u_r(t,x)$, $\lim\limits_{t \to t_r - 0} \dfrac{\partial u_r(t,x)}{\partial x}$,

$\lim\limits_{t\to t_r-0}\dfrac{\partial u_r(t,x)}{\partial t}$, значения $\lim\limits_{t\to t_s-0}\dfrac{\partial u_s(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_{s+1}(t_s,x)}{\partial x}$, $s=\overline{1,3l-1}$, удовлетворяют соотношениям (7).

Если $u^*(t,x)$ – решение задачи (1)–(3), то система его сужений $u^*([t],x)=(u_1^*(t,x),u_2^*(t,x),\ldots,u_{3l}^*(t,x))'$ является решением краевой задачи с интегральными условиями (4)–(7). И наоборот, если система вектор - функций $u^*([t],x)=(u_1^*(t,x),u_2^*(t,x),\ldots,u_{3l}^*(t,x))'$ – решение задачи (15)–(18), то функция $u^*(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций, будет решением задачи (1)–(3).

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значения функции $u_r(t,x)$ при $t=t_{r-1}$ и осуществим замену $\widetilde{u}_r(t,x)=u_r(t,x)-\lambda_r(x)$, $r=1,2,\ldots,3l$, в задаче (4)–(7). Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}_r}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}_r}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}_r}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{u}_r+f(t,x)+A(t,x)\lambda_r'(x)+C(t,x)\lambda_r(x),\ (t,x)\in\Omega_r,\quad(8)$$

$$\widetilde{u}_r(t,0)+\lambda_r(0)=\psi(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,3l},\quad(9)$$

$$\widetilde{u}_r(t_{r-1},x)=0,\qquad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,3l},\quad(10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=l+1}^{2l}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\tau,x)[\widetilde{u}_i(\tau,x)+\lambda_i(x)]d\tau=\varphi(x),\quad x\in[0,\omega],\quad(11)$$

$$\lambda_s'(x)+\lim_{t\to t_s-0}\frac{\partial\widetilde{u}_s(t,x)}{\partial x}=\lambda_{s+1}'(x),\qquad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,3l-1}.\quad(12)$$

Задачи (4)–(7) и (8)–(12) эквивалентны в том смысле, что если система функций $u([t],x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_{3l}(t,x))'$ является решением (4)–(7), то система пар $(\lambda(x),\widetilde{u}([t],x))$, где $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_{3l}(x))'$, $\widetilde{u}([t],x)=(\widetilde{u}_1(t,x),\widetilde{u}_2(t,x),\ldots,\widetilde{u}_{3l}(t,x))'$, $\lambda_r(x)=u_r(t_{r-1},x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=u_r(t,x)-u_r(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,3l}$, будет решением (8)–(12), и наоборот, если $(\lambda_r(x),\widetilde{u}_r(t,x))$, $r=\overline{1,3l}$, — решение (8)–(12), то $(\lambda_r(x)+\widetilde{u}_r(t,x))$, $r=\overline{1,3l}$, будет решением (4)–(7).

При фиксированных $\lambda_r(x),\lambda_r'(x)$, $r=\overline{1,3l}$, функции $\{\widetilde{u}_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,3l}$, являются решениями задачи Гурса на $\bar{\Omega}_r$ с условиями (10) и

$$\widetilde{u}_r(t,0)=\psi(t)-\psi(t_{r-1}),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3l},\quad(13)$$

которые вытекают из условий $\lambda_r(0)=u_r(t_{r-1},0)=\psi(t_{r-1})$, $r=\overline{1,3l}$.

Введя обозначения $\widetilde{v}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, из (10), (13) получим $\widetilde{v}_r(t_{r-1},x)=0$, $\widetilde{w}_r(t,0)=\dot{\psi}(t)$ и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x)+B(\tau,x)\widetilde{w}_r(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}_r(\tau,x)+$$

$$+f(\tau,x)+A(\tau,x)\lambda_r'(x)+C(\tau,x)\lambda_r(x)\Big]d\tau,\quad(14)$$

$$\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^x\Big[A(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}_r(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}_r(t,\xi)+$$

$$+f(t,\xi)+A(t,\xi)\lambda_r'(\xi)+C(t,\xi)\lambda_r(\xi)\Big]d\xi,\quad(15)$$

$$\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi(t_{r-1})+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}d\tau\int\limits_0^x\Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}_r(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\widetilde{w}_r(\tau,\xi)+$$

$$+C(\tau,\xi)\widetilde{u}_r(\tau,\xi)+f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)\lambda_r'(\xi)+C(\tau,\xi)\lambda_r(\xi)\Big]d\xi. \qquad (16)$$

Вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ подставив соответствующую правую часть (14) и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,...)$ раз, получим

$$\widetilde{v}_r(t,x)=D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r'(x)+E_{\nu,r}(t,x)\lambda_r(x)+G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r)+H_{\nu,r}(t,x,\widetilde{w}_r,\widetilde{u}_r)+F_{\nu,r}(t,x), \qquad (17)$$

где

$$D_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$H_{\nu,r}(t,x,\widetilde{w}_r,\widetilde{u}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}\Big[B(\tau_1,x)\widetilde{w}_r(\tau_1,x)+C(\tau_1,x)\widetilde{u}_r(\tau_1,x)\Big]d\tau_1+...+$$

$$+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\Big[B(\tau_\nu,x)\widetilde{w}_r(\tau_\nu,x)+C(\tau_\nu,x)\widetilde{u}_r(\tau_\nu,x)\Big]d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$E_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t}C(\tau_1,x)d\tau_1+...+\int\limits_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1,x)...\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}C(\tau_\nu,x)d\tau_\nu...d\tau_1.$$

Определяя соответствующее значение $\widetilde{v}_r(t,x)$ при $t=\tau$ в (17), $r=\overline{1,3l}$, а также переходя в правой части (17) к пределу при $t\to t_r-0$, находим $\lim\limits_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,3l-1}$, $x\in[0,\omega]$, и подставляя их в (11), (12), для неизвестных вектор - функций $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,3l}$, получаем систему N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производных:

$$Q_\nu(l,x)\lambda'(x)=-E_\nu(l,x)\lambda(x)-F_\nu(l,x)-G_\nu(l,x,\widetilde{v})-H_\nu(l,x,\widetilde{w},\widetilde{u}), \qquad (18)$$

где

$$Q_\nu(l,x)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & L_{\nu,l+1}(x) & \dots & L_{\nu,2l}(x) & 0 & \dots & 0 & 0\\ I+D_{\nu,1}(t_1,x) & -I & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & I+D_{\nu,2}(t_2,x) & -I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu,3l-1}(t_{3l-1},x) & -I \end{vmatrix},$$

$$E_\nu(l,x)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & M_{\nu,l+1}(x) & \dots & M_{\nu,2l}(x) & 0 & \dots & 0 & 0\\ E_{\nu,1}(t_1,x) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & E_{\nu,2}(t_2,x) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E_{\nu,3l-1}(t_{3l-1},x) & 0 \end{vmatrix},$$

$$L_{\nu,i}(x)=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\tau,x)[I+D_{\nu,i}(\tau,x)]d\tau\ ,\ M_{\nu,i}(x)=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[P(\tau,x)E_{\nu,i}(\tau,x)+\tfrac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}\Big]d\tau\ ,\ i=\overline{l,2l}\,,$$

I - единичная $(n\times n)$ - матрица, $F_\nu(l,x)=\big(\sum\limits_{i=l}^{2l}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\tau,x)F_{\nu,i}(\tau,x)d\tau-\varphi(x),F_{\nu,1}(t_1,x),\ldots,$

$F_{\nu,3l-1}(t_{3l-1},x)\big)'$, $\quad H_\nu(l,x,\widetilde{w},\widetilde{u})=\big(\sum\limits_{i=l}^{2l}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[P(\tau,x)H_{\nu,i}(\tau,x,\widetilde{w}_i,\widetilde{u}_i)+\tfrac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}\widetilde{u}_i(\tau,x)\Big]d\tau,$

$H_{\nu,1}(t_1,x,\widetilde{w}_1,\widetilde{u}_1),\ldots,H_{\nu,3l-1}(t_{3l-1},x,\widetilde{w}_{3l-1},\widetilde{u}_{3l-1})\big)'$,

$G_\nu(l,x,\widetilde{v})=\big(\sum\limits_{i=l}^{2l}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\tau,x)G_{\nu,i}(\tau,x,\widetilde{v}_i)d\tau,G_{\nu,1}(t_1,x,\widetilde{v}_1),\ldots,G_{\nu,3l-1}(t_{3l-1},x,\widetilde{v}_{3l-1})\big)'$.

Вектор-функции $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,3l}$, удовлетворяют условиям

$$\lambda_r(0)=\psi(t_{r-1}),\qquad r=\overline{1,3l}. \tag{19}$$

Здесь неизвестными являются как функции $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$, так и функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (14) – (16), (18) с условием (19) находится как пределы последовательностей $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{\lambda_r'^{(k)}(x)\}$, $\{\widetilde{u}_r^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}_r^{(k)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x)\}$, определяемых следующим способом.

Шаг 0. Предполагая в правой части (18) $\lambda_r(x)=\psi(t_{r-1})$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi(t_{r-1})$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=0$ и считая, что матрица $Q_\nu(l,x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18) найдем $\{\lambda_r'^{(0)}(x)\}$, $r=\overline{1,3l}$. Используя условия (19), находим функции $\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(0)}(\xi)d\xi$. Из системы интегральных уравнений (14)–(16), где $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\lambda'_r(x)=\lambda_r'^{(0)}(x)$, определим функции $\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,3l}$.

Шаг 1. Из системы (18), где в правой части $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)=\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,3l}$, в силу обратимости $Q_\nu(l,x)$ при $x\in[0,\omega]$ найдем $\{\lambda_r'^{(1)}(x)\}$, $r=\overline{1,l}$. Вновь используя условия (19), находим $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x)=\psi(t_{r-1})+\int\limits_0^x\lambda_r'^{(1)}(\xi)d\xi$. Из систем интегральных уравнений (14)–(16), где $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, $\lambda'_r(x)=\lambda_r'^{(1)}(x)$, определим функции $\widetilde{u}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $r=\overline{1,3l}$. И т.д.

Таким образом, метод введения дополнительных параметров процесс отыскания неизвестных функций делит на два этапа:
1) нахождение параметров $\lambda_r(x)$ $\lambda'_r(x)$ из соотношения (18) с условием (19).
2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$ из системы интегральных уравнений (14) – (16).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1) – (3).

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $l>0$ *,* $l\in\mathbb{N}$, *и* ν, $\nu\in\mathbb{N}$, $(3nl\times3nl)$ *- матрица* $Q_\nu(l,x)$ *обратима при всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства*

a) $||[Q_\nu(l,x)]^{-1}||\le\gamma_\nu(l,x)$, *где* $\gamma_\nu(l,x)$ *– положительная, непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция,*

b) $q_\nu(l,x)=\gamma_\nu(l,x)\cdot\max((T_2-T_1)\beta(x),1)\cdot\left[e^{\alpha(x)T_0/l}-1-\dfrac{\alpha(x)T_0}{l}-...-\dfrac{[\alpha(x)T_0]^j}{l^j j!}\right]\le\delta<1,$

где $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||A(t,x)||$, $\beta(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||P(t,x)||$ *,* $T_0=\max\{T_1,T_2-T_1,T-T_2\}$ *,* $\delta=const$ *.*

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1) – (3).

При отсутствии разбиения области вводится только один дополнительный параметр $\lambda(x)$, который является значением функции $u(t,x)$ при $t=0$. Тогда задача с помощью замены

$\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - \lambda(x)$ переходит к эквивалентной краевой задаче с неизвестной функцией $\lambda(x)$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u} + f(t,x) + A(t,x)\lambda'(x) + C(t,x)\lambda(x), \tag{20}$$

$$\widetilde{u}(t,0) + \lambda(0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\omega], \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{T_1}^{T_2} P(\tau,x)[\widetilde{u}(\tau,x) + \lambda(x)]d\tau = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega]. \tag{23}$$

Условие (13) в этом случае примет вид:

$$\widetilde{u}(t,0) = \psi(t) - \psi(0), \qquad t \in [0,T]. \tag{24}$$

А соотношение (23) с условием

$$\lambda(0) = \psi(0) \tag{25}$$

позволяют определить $\lambda'(x)$, $\lambda(x)$ при фиксированных значениях $\widetilde{u}(t,x)$ и его производных. Как и выше введя обозначения, решение задачи Гурса (20), (22), (24) на $\bar{\Omega}$ будет эквивалентно решению системы трех интегральных уравнений

$$\widetilde{v}(t,x) = \int\limits_0^t \Big[A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x) + B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x) + C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x) +$$
$$+ f(\tau,x) + A(\tau,x)\lambda'(x) + C(\tau,x)\lambda(x)\Big]d\tau, \tag{26}$$

$$\widetilde{w}(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int\limits_0^x \Big[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi) + B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi) + C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi) +$$
$$+ f(t,\xi) + A(t,\xi)\lambda'(\xi) + C(t,\xi)\lambda(\xi)\Big]d\xi, \tag{27}$$

$$\widetilde{u}(t,x) = \psi(t) - \psi(0) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^x \Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi) + B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi) + C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi) +$$
$$+ f(\tau,\xi) + A(\tau,\xi)\lambda'(\xi) + C(\tau,\xi)\lambda(\xi)\Big]d\xi. \tag{28}$$

Снова вместо $\widetilde{v}(\tau,x)$ подставим соответствующую правую часть (26) и, повторив этот процесс ν $(\nu = 1,2,...)$ раз, получим

$$\widetilde{v}(t,x) = D_{\nu,1}(t,x)\lambda'(x) + E_{\nu,1}(t,x)\lambda(x) + G_{\nu,1}(t,x,\widetilde{v}) + H_{\nu,1}(t,x,\widetilde{w},\widetilde{u}) + F_{\nu,1}(t,x), \tag{29}$$

где использованы вышеприведенные обозначения при $r = 1$, $t_0 = 0$.

Подставляя соответствующее значение $\widetilde{v}(t,x)$ из правой части (29) при $t = \tau$ в полученное выражение, с учетом обозначений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной

$$Q_\nu(T_1,T_2,x)\lambda'(x) = -\int\limits_{T_1}^{T_2}\Big[P(\tau,x)E_{\nu,1}(\tau,x) + \frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}\Big]d\tau \cdot \lambda(x) - \int\limits_{T_1}^{T_2} P(\tau,x)F_{\nu,1}(\tau,x)d\tau + \varphi(x) -$$

$$-\int\limits_{T_1}^{T_2} P(\tau,x)G_{\nu,1}(\tau,x,\widetilde{v})d\tau - \int\limits_{T_1}^{T_2}\Big[P(\tau,x)H_{\nu,1}(\tau,x,\widetilde{w},\widetilde{u}) + \frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}\widetilde{u}(\tau,x)\Big]d\tau, \quad x\in[0,\omega], \qquad (30)$$

где $\quad Q_\nu(T_1,T_2,x) = \int\limits_{T_1}^{T_2} P(\tau,x)[D_{\nu,1}(\tau,x)+I]d\tau$.

Соотношения (10) – (12) и (14) с условием (8) позволяют найти решение задачи (1) – (3) в $\bar{\Omega}$.

Снова применяя итерационный процесс, решение функциональных соотношений (26) –(28), (30) с условием (25) находим как пределы последовательностей $\{\lambda^{(k)}(x),\ \lambda^{(k)\prime}(x),\ \widetilde{u}^{(k)}(t,x),$ $\widetilde{v}^{(k)}(t,x), \widetilde{w}^{(k)}(t,x)\}$, определяемых следующим способом.

Шаг 0. Предполагая в правой части (30) , что $\lambda(x)=\psi(0)$, $\widetilde{u}(t,x)=\psi(t)-\psi(0)$, $\widetilde{w}(t,x)=\dot{\psi}(t)$, $\widetilde{v}(t,x)=0$, из уравнения (30) найдем $\lambda^{(0)\prime}(x)$. Используя условия (25), находим функцию $\lambda^{(0)}(x)$: $\lambda^{(0)}(x)=\psi(0)+\int\limits_0^x\lambda^{(0)\prime}(\xi)d\xi$. Из системы интегральных уравнений (26)–(28), где $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\lambda'(x)=\lambda^{(0)\prime}(x)$, определим функции $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$.

Шаг 1. Из уравнения (30), где в правой части $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)=\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, найдем $\lambda^{(1)\prime}(x)$. Вновь используя условия (25), находим $\lambda^{(1)}(x)=\psi(0)+\int\limits_0^x\lambda^{(1)\prime}(\xi)d\xi$ и из систем интегральных уравнений (26)–(28), где $\lambda(x)=\lambda^{(1)}(x)$, $\lambda'(x)=\lambda^{(1)\prime}(x)$, определим функции $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$. И т.д.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть при некотором* ν, $\nu=1,2,...,$ $(n\times n)$ *- матрица* $Q_\nu(T_1,T_2,x)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства*

a) $\quad ||[Q_\nu(T_1,T_2,x)]^{-1}||\le\gamma_\nu(T_1,T_2,x),$

b) $\quad q_\nu(T_1,T_2,x)=\gamma_\nu(T_1,T_2,x)\cdot(T_2-T_1)\beta(x)\cdot\Big[e^{\alpha(x)T}-1-\alpha(x)T-...-\frac{1}{\nu!}[\alpha(x)T]^\nu\Big]\le\delta<1,$

где $\gamma_\nu(T_1,T_2,x)$ *– положительная, непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция.*

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1) – (3).

Доказательство теорем 1 и 2 проводится по схеме, аналогичной доказательству теорем 1 и 2 из [4], соответственно на основе предложенных алгоритмов.

Цитированная литература

1. **Нахушев А.М.** // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008 – 1011.

2. **Нахушев А.М.** // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96 – 105.

3. **Нахушев А.М.** Задачи со смещением для уравнений в частных производных. НИИПМА К-Б: НЦ РАН. М., 2006.

4. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Дифференц. уравнения. 2003. Т.39, № 10. С. 1343 – 1354.

5. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295 – 297.

6. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337 – 346.

Поступила в редакцию 01.02.2008г.

УДК 517.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НИКОЛЬСКОГО - БЕСОВА

Ш. А. Балгимбаева

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 sholpan@math.kz

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления оператора дифференцирования в анизотропных пространствах Никольского - Бесова по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

1. Введение. Постановка задачи.

Введем некоторые обозначения. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^n x_i y_i$ — скалярное произведение. Для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ через $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$ обозначим его длину и $x^\alpha := \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.

Пусть $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор такой, что $s_j > 0 \ \forall\, j = \overline{1, n}$.

Определим число s, как среднее гармоническое чисел $s_1, ..., s_n$, т.е. $\frac{1}{s} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i}$.

Далее $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ — вектор с координатами $a_i := \frac{s}{s_i} \, \forall\, i = \overline{1, n}$.

Пусть $\|x\|_{\mathbf{a}} := \max\limits_i |x_i|^{\frac{1}{a_i}} \sim (\sum\limits_i |x_i|^{\frac{2}{a_i}})^{1/2}$ — анизотропное расстояние, $|\alpha|_a := \sum\limits_i \alpha_i x_i$ — анизотропный порядок мультииндекса.

Обозначим

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

— оператор дифференцирования.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$. В частности, если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx.$$

Keywords: *wavelet, operator, Nikol'skii-Besov's space*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45,26B40

Обратное преобразование Фурье обозначим через $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим сужение $\mathcal{F}(f)$ на множество $\Omega_\sigma := \{\xi : \|\xi\|_{\mathbf{a}} < \sigma\} \subset \mathbb{R}^n$, как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}(\Omega_\sigma)$. Обозначим данное сужение через $\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}$.

Напомним определение анизотропного пространства Никольского - Бесова $B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [1, с.159], [2, с. 57]).

Приведем определение из [2], использующее идею декомпозиции. Обозначим

$$\Pi_j := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\|_{\mathbf{a}} \le \frac{2\pi}{3}2^j\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma_1 := \Pi_2, \quad \Gamma_j := \Pi_{j+1} \setminus \Pi_j, \; j \ge 2.$$

Рассмотрим гладкое анизотропное разбиение единицы, т.е. семейство функций $\{\nu_j(\xi)\}_1^\infty$ таких, что $\nu_j(\xi) \ge 0, \nu_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \; j \in \mathbb{N}$, и выполнены условия

1. $supp\, \nu_j \subset \Gamma_j$;
2. $2^{j|\alpha|_a}|D^\alpha_\xi \nu_j(\xi)| \le C_\alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}^n$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu_j(\xi) = 1$.

Пусть $V_j(x) := (\mathcal{F}^{-1}\nu_j)(x)$.

Определение. *Анизотропное пространство Никольского - Бесова* $B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta} := B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \theta < \infty$, $0 < p < \infty$, *— это (квази)банахово пространство функций* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *такое, что конечна (квази)норма*

$$\|f|\, B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\| = \|\{2^{js}|f * V_j|\}_1^\infty \,|\, l_\theta(L_p)\|.$$

Здесь

$$\|f_j \,|\, l_\theta(L_p)\| = \|\|f_j \,|\, L_p\|\, l_\theta\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_j|^p\, dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Рассмотрим задачу восстановления дифференциального оператора $\mathcal{L} := D^\alpha$ в анизотропном пространстве $B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Будем использовать в качестве информации о функциях $f \in B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$ сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}$. Таким образом, будем предполагать известными значения функционала $\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}$ на любых функциях из $\mathcal{D}(\Omega_\sigma)$.

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора $\mathcal{L}$, использующего информацию $\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}$ о функции $f \in B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)$, будем рассматривать действие оператора дифференцирования на специальную "частную сумму" разложения в ряд по всплескам Мейера-Давида, которое обозначим $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]$ (см. подробнее п.3).

2. Предварительные сведения. Здесь сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе.

1. Верна теорема (см. [1]).

Теорема A. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда* $f \in B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* f *регулярна в смысле* L_p *и ее (сходящийся к ней слабо) ряд*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k,$$

где β_k— *целая функция экспоненциального типа* a^{k/s_j} *по* x_j, *таков, что*

$$\|f|\,B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{k\theta}\|\beta_k\|_p^\theta\right)^{1/\theta} < \infty.$$

В качестве функций $\beta_k(x)$ можно взять функции $Q_k(x)$, определенные на L_p :

$$Q_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x)\ (k > 1),$$

$$Q_1(x) = S_1(x),$$

где S_k — целая функция экспоненциального типа a^{k/s_j} по x_j вида

$$S_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} a^{k/s_j}}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin a^{k/s_j}t_j}{a^{k/s_j}t_j}\right) f(x+t)dt,\ \ s_j > 0.$$

2. Опишем построение системы, использующей всплески Мейера-Давида и являющейся базисом в анизотропном пространстве Никольского - Бесова, следуя работе [3].

Пусть четная функция $\omega(\xi)$ задается равенством

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\xi - \pi h,), & \xi \in \left[\frac{2\pi h^2}{2h+1}, \frac{2\pi h(h+1)}{2h+1}\right], \\ \frac{\pi}{4} - \theta(\xi\frac{h}{h+1} - \pi h,), & \xi \in \left[\frac{2\pi h(h+1)}{2h+1}, \frac{2\pi (h+1)^2}{2h+1}\right], \\ 0, & \xi \notin \left[\frac{2\pi h^2}{2h+1}, \frac{2\pi (h+1)^2}{2h+1}\right], \end{cases}$$

где нечетная функция $\theta(\xi) \in C^\infty$:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \xi \geq \frac{\pi h}{2h+1}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \xi \leq -\frac{\pi h}{2h+1}. \end{cases}$$

Преобразование Фурье масштабной функции Мейера-Давида φ определяется как

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \begin{cases} cos(\omega(\xi)), & |\xi| \leq \frac{2\pi h(h+1)}{2h+1}, \\ 0, & |\xi| > \frac{2\pi h(h+1)}{2h+1}. \end{cases}$$

Тогда всплеск Мейера -Давида определяется из равенства

$$\mathcal{F}(\psi)(\xi) = e^{-i\xi/2} sin(\omega(\xi)).$$

Число h выбирается так, что

$$1 + \frac{1}{h} \leq \min_i 2^{a_i}.$$

Если $j = 2, 3, ...$, числа $l_j^{(i)}$ определим как наименьшие из целых чисел, удовлетворяющие неравенствам

$$\log_b\frac{2\pi}{3} + (j-1)a_i\log_b 2 - \log_b r \leq l_j^{(i)} + 1 < \log_b\frac{2\pi}{3} + ja_i\log_b 2 - \log_b r,$$

где $b := 1 + \frac{1}{h}$, $r := \frac{2\pi h^2}{1+2h}$.

Определим множества

$$\mathcal{N}_1 := \{(l_2^{(1)} + 1, ..., l_2^{(n)} + 1), (0, ..., 0)\},$$

$$\mathcal{N}_j := \{(m, \varepsilon) | m \in \mathbb{Z}^n, \, \varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n), \, \varepsilon_i = 0, 1\},$$

$$\mathcal{M}_j := \{(m, k, \varepsilon) : (m, \varepsilon) \in \mathcal{N}_j, \, k \in \mathbb{Z}^n\}, \; j \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через

$$\Psi^{(\varepsilon_i)}(t) = \begin{cases} \psi(t), & \varepsilon_i = 1, \\ \varphi(t), & \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

С помощью сдвигов и растяжений определим всплески

$$\psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) = \prod_i b^{m_i/2} \Psi^{(\varepsilon_i)}(b^{m_i} x_i - k_i^{(\varepsilon_i)}),$$

где $m, k \in \mathbb{Z}$, $\;k_i^{(\varepsilon_i)} = \begin{cases} k_i, & \varepsilon_i = 1, \\ k_i/h, & \varepsilon_i = 0. \end{cases}$

Множество $\Psi_j := \{\psi_{mk}^{(\varepsilon)}\}_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j}$ называется j-м блоком.

Система $\Psi := \bigcup\limits_1^\infty \Psi_j$ такая, что

$$\bigcup_{\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \in \Psi_j} supp\, \mathcal{F}\psi_{mk}^{(\varepsilon)} \subset \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1}.$$

В работе [3] доказана важная для наших дальнейших построений теорема о базисности системы Ψ в анизотропном пространстве Никольского-Бесова.

Теорема B. *Система всплесков Ψ ортонормирована в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и образует безусловный базис в $B_{p\theta}^{\mathbf{s}}$, т.е. любая функция разлагается в ряд Фурье*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x),$$

причем

$$\|f \mid B_{p\theta}^{\mathbf{s}}\| \sim \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{\pm sj\theta} \sum_{(m,\varepsilon)\in\mathcal{N}_j} |b|^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\theta} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{mk}^{(\varepsilon)}|^p)^{\theta/p} \right)^{1/\theta}.$$

3. Основной результат. В качестве метода приближенного восстановления оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим следующий оператор:

$$\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}] = \mathcal{L}\left(\sum_{j\le j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j} c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x) \right),$$

где

$$c_{mk}^{(\varepsilon)}(f) = (f, \psi_{mk}^{(\varepsilon)}(x))$$

— коэффициенты Фурье f по системе Ψ, а $j_\sigma = \left[\log_2 \frac{3\sigma}{2\pi}\right] - 2$.

Метод $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]$ использует информацию только об $\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ p \le r,\ \varkappa := 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s_i},\ t < \varkappa s,\ \frac{n}{p} - \frac{n}{r} < \varkappa s.$ *Тогда для метода восстановления* $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]$ *справедлива оценка:*

$$\sup_{\|f|\, B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\| \le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]\,|\, B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| \asymp 2^{-j_\sigma(\varkappa s - t)},$$

$$\sup_{\|f|\ B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\| \le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]\|_r \asymp 2^{-j_\sigma(\varkappa s - \frac{n}{p} + \frac{n}{r})}.$$

Доказательство. Введем сокращенное обозначение

$$\mathcal{L}S_\sigma(f) := \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}].$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{L}S_\sigma(f) = \mathcal{L}\left(\sum_{j \le j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in \mathcal{M}_|} c^{(\varepsilon)}_{mk}(f)\psi^{(\varepsilon)}_{mk}(x)\right) =$$

$$= \sum_{j \le j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon) \in \mathcal{M}_|} c^{(\varepsilon)}_{mk}(f)\mathcal{L}(\psi^{(\varepsilon)}_{mk}(x)) = S_\sigma \mathcal{L}(f).$$

Получим оценку сверху разности $\|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X$ в норме банахова пространства X.

По неравенству треугольника и согласно линейности оператора $\mathcal{L}$ и оператора $\mathcal{L}S_\sigma(h)$ имеем

$$\|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X \le \|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X =$$

$$= \|\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f) - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f - f)\|_X =$$

$$= \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}S_\sigma(g_f - f)\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|S_\sigma\mathcal{L}(g_f - f)\|_X \le$$

$$\le \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X + \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X\|S_\sigma\|_X = \|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X(1 + \|S_\sigma\|_X),$$

где $g_f = \sum\limits_{j=0}^{j_\sigma} \beta_j$ — целая функция экспоненциального типа $2^{j_\sigma+1}$. Известно, что g_f дает порядок наилучшего приближения функции f в пространстве X.

Оценим теперь норму $\|\mathcal{L}(f - g_f)\|_X$ отдельно в случае пространств $B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$ и $L_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $X = B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$, функция $f \in B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Согласно теореме А имеет место разложение в (слабо сходящийся) ряд $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j(x)$, поэтому $f - g_f = \sum\limits_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \beta_j(x)$.

Далее (т.к. функция $f - g_f \in B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$) функция

$$\mathcal{L}(f - g_f) = \sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \mathcal{L}(\beta_j(x)) \in B^{\varkappa\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n).$$

Первое вложение справедливо по теореме из [1, раздел 5.6, теорема 5.6.3], второе вложение — по [1, п.6.2].

Оценим норму разности, положив $a = 2^s$ в теореме A,

$$\|\mathcal{L}(f - g_f)|B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \|\sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} \beta_j|B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| = \left(\sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty} 2^{j\theta t}\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p^\theta\right)^{1/\theta}. \quad (1)$$

Используя неравенство Бернштейна для целых функций экспоненциального типа N_j по переменной x_j (см. [1, раздел 3.2.2])

$$\|Q_j^{(\rho)}\|_p \le C\prod_{i=1}^{n} N_j^{\rho_i}\|Q_j\|_p,$$

можно оценить $\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p$ в равенстве (1):

$$\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p \le C_1 2^{sj\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s_i}}\|\beta_j\|_p. \quad (2)$$

Тогда для $\|\mathcal{L}(f - g_f)|B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|$ имеем

$$\|\mathcal{L}(f - g_f)|B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\| \le \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{j\theta t}C_1^\theta 2^{js(1-\varkappa)\theta}\|\beta_j\|_p^\theta\right)^{1/\theta} =$$

$$= C_1\left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j\theta(\varkappa s-t)}\|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta}\right)^{1/\theta} \le 2^{-j_\sigma(\varkappa s-t)}\left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty}\|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta}\right)^{1/\theta} \ll 2^{-j_\sigma(\varkappa s-t)}\|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sup_{\|f|\ B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\|\le 1}\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| \ll 2^{-j_\sigma(\varkappa s-t)}.$$

Получим оценку сверху в пространстве $L_r(\mathbb{R}^n)$. Как и выше, $f - g_f = \sum\limits_{j=j_\sigma+1}^{\infty}\beta_j(x)$ и справедливо вложение $\mathcal{L}(f - g_f) \in B^{\varkappa\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L_r(\mathbb{R}^n), p \le r$.

Оценим норму разности $\|\mathcal{L}(f - g_f)\|_r$.

В силу неравенства Минковского имеем

$$\|\mathcal{L}(f - g_f)\|_r = \left\|\sum_{j=j_\sigma+1}^{\infty}\mathcal{L}(\beta_j(x))\right\|_r \le \sum_{j=j_\sigma}^{\infty}\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_r. \quad (3)$$

Далее по неравенству разных метрик Никольского С.М. для целых функций экспоненциального типа (см. [1, раздел 3.3, теорема 3.3.5])

$$\|g_\nu\|_{p'} \le 2^n\left(\prod_{1}^{n}\nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|g_\nu\|_p,\ 1 \le p \le p' \le \infty,$$

из (3), используя (2) и неравенство Гельдера, получим

$$\|\mathcal{L}(f - g_f)\|_r \le \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^n 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|\mathcal{L}(\beta_j)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{sj(1-\varkappa)} 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|\beta_j\|_p = \sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j(s\varkappa - n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}))} \|\beta_j\|_p 2^{js} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} \|\beta_j\|_p^\theta 2^{js\theta} \right)^{1/\theta} \left(\sum_{j=j_\sigma}^{\infty} 2^{-j(s\varkappa - n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}))\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll 2^{-j_\sigma(s\varkappa - \frac{n}{p}+\frac{n}{r})} \|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sup_{\|f|\ B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\|\leq 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{\Omega_\sigma}]\|_r \ll 2^{-j_\sigma(s\varkappa - \frac{n}{p}+\frac{n}{r})}.$$

Получим теперь оценки снизу в нормах обоих пространств.

Рассмотрим функцию

$$\overline{\Phi}_k(x) = \prod_{j=1}^{n} D_{2^{(k-1)a_j}}(y_j),$$

где $D_n(x) = \frac{\sin xN}{x}$ — ядро Дирихле, $y_j = (\frac{3}{2\pi})^{a_j} x_j$. Тогда

$$\Phi_k(x) = \overline{\Phi}_{k+2}(x) - \overline{\Phi}_k(x). \tag{4}$$

Известно, что

$$supp\mathcal{F}(\Phi_k)(x) = \{x|2^{ka_j}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{a_j} \leq |x_j| \leq 2^{(k+2)a_j}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{a_j},\ j=\overline{1,n}\},$$

и

$$\|\Phi_k\|_p = 2^{nk(1-\frac{1}{p})} C_1.$$

Далее положим

$$Q_k(x) = C_1^{-1} 2^{-k(s+(1-\frac{1}{p})n)} \Phi_k(x),$$

тогда

$$\|Q_k(x)\|_p = 2^{-ks}.$$

Теперь введем функцию

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j\geq j_\sigma+2} Q_j(x) j^{-\beta}. \tag{5}$$

Справедлива

Л е м м а. *Пусть* $1 < p \leq \infty$, $1 < \theta \leq \infty$, $\theta^{-1} < \beta < 1$. *Тогда*

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{j\geq j_\sigma+2} Q_j(x) j^{-\beta}$$

принадлежит пространству $B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим "частную" сумму разложения в ряд по всплескам Мейера–Давида функции $\widetilde{f}(x)$:

$$S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{\Omega_\sigma}] = \sum_{j\leq j_\sigma} \sum_{(m,k,\varepsilon)\in\mathcal{M}_j} c^{(\varepsilon)}_{mk}(\widetilde{f}) \psi^{(\varepsilon)}_{mk}(x).$$

Легко показать, что $S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{\Omega_\sigma}] \equiv 0$. Тогда и $\mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(\widetilde{f})|_{\Omega_\sigma}] \equiv 0$.

Перейдем к получению оценок снизу. Сначала получим оценку в норме пространства $B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup_{\|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma(f)|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| \ge \|\mathcal{L}\widetilde{f} - \mathcal{L}S_\sigma(\widetilde{f})|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| = \|\mathcal{L}\widetilde{f}|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\|. \tag{6}$$

Согласно лемме $\widetilde{f} \in B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{L}\widetilde{f} \in B^{\mathbf{s}\varkappa}_{p\theta}(\mathbb{R}^n) \subset B^{\mathbf{t}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)$. Далее

$$\mathcal{L}\widetilde{f}(x) = \sum_{l\ge j_\sigma} \mathcal{L}Q_l(x) l^{-\beta}.$$

Продолжим неравенство (6):

$$\begin{gathered} \|\mathcal{L}\widetilde{f}|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| = \|\sum_{l\ge j_\sigma} \mathcal{L}Q_l(x) l^{-\beta}|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| = \\ = \|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta} 2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)} C_1^{-1} \mathcal{L}\Phi_l(x)|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| = \\ = \|\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta} 2^{-l(s+(1-\frac{1}{p})n)} C_1^{-n} \frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n}|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| = \\ = \left(\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta\theta} 2^{-l\theta(s+(1-\frac{1}{p})n)} 2^{l\theta t} C_1^{-n} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_l}{\partial^{\alpha_1}x_1 ... \partial^{\alpha_n}x_n} \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} = \\ = \left(\sum_{l\ge j_\sigma} l^{-\beta\theta} 2^{-l\theta(s+(1-\frac{1}{p})n)} 2^{l\theta t} C_1^{-n} C_2 2^{ls(1-\varkappa)\theta} \right)^{1/\theta}. \end{gathered} \tag{7}$$

Окончательно имеем

$$\sup_{\|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma(f)|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| \ge \|\mathcal{L}\tilde{f}|\ B^{\mathbf{t}}_{p\,\theta}\| \gg 2^{-j_\sigma(s\varkappa - t)}.$$

Докажем теперь оценку снизу в норме пространства $L_r(\mathbb{R}^n)$.

В качестве пробной функции возьмем $\widetilde{f}(x) = Q_{j_\sigma}$.

Ясно, что

$$\sup_{\|f|B^{\mathbf{s}}_{p\theta}(\mathbb{R}^n)\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma(f)\|_r \ge \|\mathcal{L}\widetilde{f} - \mathcal{L}S_\sigma(\widetilde{f})\|_r = \|\mathcal{L}\widetilde{f}\|_r.$$

Как и выше, $\mathcal{L}\widetilde{f} \in B^{\mathbf{s}\varkappa}_{p\,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L_r(\mathbb{R}^n),\ p \le r$.

Далее, используя неравенство разных метрик Никольского и значение нормы величины $\|\Phi_k\|_p$ выписанную выше,

$$\|\mathcal{L}\widetilde{f}\|_r = \|\mathcal{L}Q_{j_\sigma}\|_r \gg 2^{-j_\sigma(s\varkappa - (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})n)}. \tag{8}$$

Таким образом, получили окончательно оценку снизу

$$\sup_{\|f|\ B^{\mathbf{s}}_{p\,\theta}\|\le 1} \|\mathcal{L}f - \mathcal{L}S_\sigma[\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma,\sigma]^n}]\|_r \gg 2^{-j_\sigma(s\varkappa - \frac{n}{p} + \frac{n}{r})}.$$

З а м е ч а н и е 1. *В [4] задача восстановления оператора дифференцирования рассматривалась в изотропном случае.*

Цитированная литература

1. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1979.

2. **Трибель Х.** Теория функциональных пространств. М., 1986.

3. **Берколайко М. З., Новиков И. Я.** // Труды МИРАН. 1995. Т.210. С. 5 – 30.

4. **Балгимбаева Ш. А.** // Известия АН РК. Сер. физ.-мат. 2007. №3. С. 25 – 30.

Поступила в редакцию 26.02.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 21 – 26*

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ БЕГУЩЕЙ НАГРУЗКИ НА ТРЕХСЛОЙНУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. Р. Гирнис, В. Н. Украинец

Павлодар Павлодарский НТУ vitnikukr@mail.ru
Институт Математики МОиН РК 050010 Алматы ул. Пушкина, 125

Решена задача о действии произвольной локальной нагрузки, бегущей с постоянной дозвуковой скоростью по внутренней поверхности бесконечно длинной круговой трехслойной упругой оболочки, расположенной в упругом пространстве. Для описания движения внешних (тонких) слоев оболочки используются классические уравнения теории тонких оболочек, а для описания движения внутреннего (толстого) слоя и окружающей среды – динамические уравнения теории упругости в подвижной системе координат, связанной с нагрузкой. Рассмотрены случаи скользящего и жесткого контактов оболочки с массивом. При помощи интегрального преобразования Фурье по осевой координате получено стационарное решение задачи для случая, когда скорость движения нагрузки меньше ее критических скоростей. Данная задача является модельной при исследовании динамики тоннелей глубокого заложения.

Исследование динамики протяжённых подземных сооружений при действии разнообразных возмущений приводит к решению краевых задач в сплошных средах с концентраторами напряжений в виде цилиндрических полостей. Работ в этом направлении очень много, с достаточно подробной библиографией по этому вопросу можно ознакомиться в монографиях Ж.С. Ержанова, Ш.М. Айталиева, Л.А. Алексеевой [1], Н.С.Булычева [2] и обзорной статье Ш.М. Айталиева [3]. Широкое применение в подземных транспортных сооружениях конструкций в виде замкнутых круговых цилиндрических оболочек ставит задачу исследования динамики упругих сред с цилиндрическими полостями круглого сечения, подкрепленных оболочками различного типа.

Проблемы изучения динамики цилиндрических оболочек под действием внутреннего подвижного поля давления встречаются в технике довольно часто. В частности, такие вопросы возникают при расчете магистральных нефте- и газопроводов, в которых в результате действия импульсивных периодических возмущений от работающих компрессоров устанавливается периодическая бегущая волна давления. Аналогичные явления имеют место в трубопроводах химических предприятий, гидро- и газовых системах летательных аппаратов и тепловых энергетических установок, а также при проведении взрывопрострелочных работ в геотехнологических скважинах.

Keywords: *elastic space, streaming load, trilaminar casing*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H05

При исследовании динамики круговых тоннелей и трубопроводов глубокого заложения при действии транспортных нагрузок модельными задачами являются задачи о действии подвижной нагрузки на тонкостенную или толстостенную круговую цилиндрическую оболочки в сплошной среде. Этот класс задач является наиболее изученным. Так, действия подвижных нагрузок в цилиндрических оболочках в упругой среде рассматривались ранее в работах В.М.Львовского, В.И.Онищенко, В.И.Пожуева [4,5] и др. Динамика тонкостенной упругой оболочки при действии транспортных нагрузок в двухкомпонентной среде М.Био, которая позволяет учитывать такую важную характеристику грунтов, как водонасыщенность, исследовалась в работах В.В.Шершнева, А.Ж. Ескалиевой [6].

Однако, практика широкого строительства подземных транспортных сооружений требует разработки новых математических моделей, которые наиболее учитывают свойства конструкции крепи сооружения и окружающего массива. В связи с практической потребностью в последние десятилетия появились публикации, посвященные исследованию динамики двух- и трехслойных оболочек под действием подвижных нагрузок [7-9] и др.

Здесь построено аналитическое решение задачи о действии произвольной локальной нагрузки, бегущей с постоянной дозвуковой скоростью по внутренней поверхности бесконечно длинной круговой трехслойной упругой оболочки, расположенной в упругом пространстве. Рассмотрены случаи скользящего и жесткого контактов оболочки с массивом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую полость радиусом $r = R_1$ в бесконечной линейно-упруго однородной и изотропной среде. Полость подкреплена трехслойной круговой оболочкой, средним слоем которой является толстостенная оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивка) представляют собой тонкостенные оболочки. Контакт между слоями полагаем жестким. В силу малости толщины составляющих обшивку оболочек будем считать, что они контактируют с заполнителем и окружающим массивом вдоль срединных поверхностей. Обозначим толщину внешней оболочки обшивки h_{01} при радиусе кривизны ее срединной поверхности через R_1, а толщину внутренней оболочки обшивки – h_{02} с радиусом кривизны срединной поверхности R_2.

По внутренней поверхности слоистой оболочки в направлении ее оси Z с постоянной скоростью c (меньшей, чем скорости распространения волн сдвига в заполнителе и окружающем массиве) движется нагрузка $\mathbf{P}(r, \theta, z - ct) = (P_r, P_\theta, P_\eta)$. Предполагается, что

$$\mathbf{P} \to \mathbf{0} \quad \text{при } \eta \to \pm\infty \tag{1}$$

и допускает преобразование Фурье по η, $\eta = z - ct$.

Для описания движения оболочек обшивки воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек [10]:

$$\left[1 - \frac{(1-\nu_{0k})\,\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\right]\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_{0k}}{2R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial \eta} =$$
$$= \frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{\eta k} - q_{\eta R_k}\right),$$
$$\frac{1+\nu_{0k}}{2R_k}\frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_{0k})}{2}\left(1 - \frac{\rho_{0k}c^2}{\mu_{0k}}\right)\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0rk}}{\partial \theta} =$$
$$= \frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{\theta k} - q_{\theta R_k}\right),$$
$$\frac{\nu_{0k}}{R_k}\frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12}\nabla^2\nabla^2 u_{0rk} + \frac{(1-\nu_{0k})\,\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}}\frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0rk}}{R_k^2} =$$
$$= -\frac{1-\nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}}\left(q_{rk} - q_{rR_k}\right), \qquad k = 1, 2; \tag{2}$$

где для внешней оболочки обшивки $k = 1$, для внутренней $k = 2$;$u_{0\eta k}$, $u_{0\theta k}$, u_{0rk} – перемещения точек срединных поверхностей оболочек обшивки в направлении осей подвижной цилиндрической системы координат η, θ, r; $\nu_{0k}, \mu_{0k}, \rho_{0k}$ – коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала оболочек обшивки;

$$q_{jR_2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}, \; q_{j1} = \sigma_{rj2}|_{r=R_1}, \; q_{jR_1} = \sigma_{rj1}|_{r=R_1} \quad (j = \eta, \theta, r)$$

– составляющие реакции заполнителя и среды, $\sigma_{\mathrm{rj}2}$,$\sigma_{\mathrm{rj}1}$ – соответственно компоненты тензора напряжений в заполнителе и среде. На внутренней поверхности оболочки

$$q_{j2} = P_j, \; j = r, \eta, \theta. \tag{3}$$

Для описания движения заполнителя и окружающей среды используем динамические уравнения теории упругости, представленные в подвижной цилиндрической системе координат η, θ, r[1]:

$$\left(\frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \frac{1}{M_{sk}^2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к упругой среде, а 2 – к заполнителю; $\mathbf{u}_k$ – векторы смещений точек среды и заполнителя, $M_{pk} = c/c_{pk}, M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения - сжатия и сдвига в среде и в заполнителе, $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k/(1 - 2\nu_k)$, μ_k – модули сдвига, ν_k – коэффициенты Пуассона, ∇^2 – оператор Лапласа.

Требуется построить решение систем (2) и (4), удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности:

$$\mathbf{u}_1 \to \mathbf{0} \quad \text{при } \eta \to \pm\infty \text{ и } \; r \to \infty. \tag{5}$$

$$\mathbf{u}_2 \to \mathbf{0} \quad \text{при } \eta \to \pm\infty. \tag{6}$$

При этом возможны разные условия контакта оболочек и массива.

2. Решение задачи. Потенциалы Ламе. Выразим векторы смещений через потенциалы Ламе [1]:

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{grad} \varphi_{1k} + \operatorname{rot} \left(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta\right) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta\right), \quad k = 1, 2, \tag{7}$$

Подставляя в (2), преобразуем эту систему уравнений к виду

$$\nabla^2 \varphi_{jk} - M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Здесь $M_{1k} = M_{pk}, M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$. Полученные уравнения – эллиптического типа, т.к. $M_{jk} < 1$ в силу нашего предположения, что подвижная нагрузка дозвуковая, что характерно, например, для транспортных нагрузок.

Применив к (8) преобразование Фурье по η, находим

$$\nabla_2^2 \varphi_{jk}^* - m_{jk}^2 \xi^2 \varphi_{jk}^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2,$$

где ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2, \; m_{1k} \equiv m_{Pk}, \; m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{Sk}$,

$$\varphi_{jk}^* (r, \theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{jk} (r, \theta, \eta) \, e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

Выразим компоненты напряжённо-деформированного состояния среды и заполнителя через потенциалы Ламе и, применяя преобразование Фурье по η, получим выражения для трансформант напряжений σ_{ijk}^* и перемещений u_{ik}^* в цилиндрической $(i = r, \theta, \eta)$ системе координат,

как функции от φ^*_{jk}. Так как $M_{sk} < 1$, то $m_{sk} > 0$, поэтому решения (8) можно представить в виде рядов:
- для упругой среды

$$\varphi^*_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n\left(k_{j1} r\right) e^{in\theta}; \qquad (9)$$

- для заполнителя

$$\varphi^*_{j2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj+3} K_n(k_{j2} r) + a_{nj+6} I_n(k_{j2} r)\right) e^{in\theta}, \quad j = 1, 2, 3. \qquad (10)$$

Здесь $I_n(kr)$ – функции Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $K_n(kr)$ – функция Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$, $a_{n1}, ..., a_{n9}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Применив к (2) преобразование Фурье по η и разлагая функции перемещений точек срединных поверхностей оболочек обшивки и нагрузок в ряды Фурье по θ , для n-го члена разложения получим

$$\begin{gathered}
\varepsilon^2_{1k} u_{0n\eta k} + \nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0n\theta k} - 2i\nu_{0k}\xi_{0k} u_{0nrk} = G_{0k}\left(q_{n\eta k} - q_{n\eta R_k}\right), \\
\nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0n\eta k} + \varepsilon^2_{2k} u_{0n\theta k} - 2in u_{0nrk} = G_{0k}\left(q_{n\theta k} - q_{n\theta R_k}\right), \\
2i\nu_{0k}\xi_{0k} u_{0n\eta k} + 2in u_{0n\theta k} + \varepsilon^2_{3k} u_{0nrk} = G_{0k}\left(q_{nrk} - q_{nrR_k}\right), \quad k = 1, 2,
\end{gathered} \qquad (11)$$

где

$$\varepsilon^2_{1k} = \alpha^2_{0k} - \varepsilon^2_{0k},\ \ \varepsilon^2_{2k} = \beta^2_{0k} - \varepsilon^2_{0k},\ \ \varepsilon^2_{3k} = \gamma^2_{0k} - \varepsilon^2_{0k},\ \ \xi_{0k} = \xi R_k,$$

$$\begin{gathered}
\alpha^2_{0k} = 2\xi^2_{0k} + \nu_{01k} n^2,\ \ \beta^2_{0k} = \nu_{01k}\xi^2_{0k} + 2n^2,\ \ \gamma^2_{0k} = \chi^2_k\left(\xi^2_{0k} + n^2\right)^2 + 2,\ \ \varepsilon^2_{0k} = \nu_{01k}\xi^2_{0k} M^2_{s0k}, \\
\nu_{01k} = 1 - \nu_{0k},\ \ \nu_{02k} = 1 + \nu_{0k}, \\
M_{s0k} = c/c_{s0k}, \quad c_{s0k} = \sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}}, \quad \chi^2_k = \frac{h^2_{0k}}{6R^2_k}, \\
G_{0k} = -\frac{\nu_{01k} R^2_k}{\mu_{0k} h_{0k}}, \quad q_{nmR_2} = (\sigma^*_{rm2})_n \quad \text{при } r = R_2; \\
q_{nm1} = q_{nmR_1} = (\sigma^*_{rm1})_n \quad \text{при } r = R_1; \quad q_{nm2} = P_{nm};
\end{gathered}$$

u_{0nm}, P_{nm} – соответственно коэффициенты разложений

$$u^*_{0m}\left(\theta, \xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0m}\left(\theta, \eta\right) e^{-i\xi\eta} d\eta \quad \text{и} \quad P^*_m\left(\theta, \xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m\left(\theta, \eta\right) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

в ряды Фурье по угловой координате $\theta\,(m = \eta, \theta, r)$. Из (11) находим

$$u_{0n\eta k} = \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^{3} \delta_{\eta jk}\left(q_{njk} - q_{njR_k}\right),$$

$$u_{0n\theta k} = \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^{3} \delta_{\theta jk}\left(q_{njk} - q_{njR_k}\right),$$

$$u_{0nrk} = \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^{3} \delta_{rjk}\left(q_{njk} - q_{njR_k}\right).$$

Здесь

$$\delta_{nk} = \delta_{|n|k} = (\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2 - (\varepsilon_{1k}\xi_1)^2 - (\varepsilon_{2k}\xi_{2k})^2 - (\varepsilon_{3k}\xi_{3k})^2 + 2\xi_1\xi_{2k}\xi_{3k},$$

$$\delta_{\eta 1k} = (\varepsilon_{2k}\varepsilon_{3k})^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2k} = \xi_1\xi_{2k} - \xi_{3k}\varepsilon_{3k}^2, \quad \delta_{\eta 3k} = i\left(\varepsilon_{2k}^2\xi_{2k} - \xi_1\xi_{3k}\right),$$

$$\delta_{\theta 1k} = \delta_{\eta 2k}, \delta_{\theta 2k} = (\varepsilon_{1k}\varepsilon_{3k})^2 - \xi_{2k}^2, \quad \delta_{\theta 3k} = i\left(\varepsilon_{1k}^2\xi_1 - \xi_{2k}\xi_{3k}\right),$$

$$\delta_{r1k} = -\delta_{\eta 3k}, \quad \delta_{r2k} = -\delta_{\theta 3k}, \quad \delta_{r3k} = (\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k})^2 - \xi_{3k}^2,$$

$$\xi_1 = 2n, \quad \xi_{2k} = 2\nu_{0k}\xi_{0k}, \quad \xi_{3k} = \nu_{02k}\xi_{0k}n,$$

для q_{njk} и q_{njR_k} индекс j = 1 соответствует индексу η, j = 2 - θ, $j = 3$ - r.

Для определения коэффициентов воспользуемся в зависимости от условия сопряжения внешней оболочки обшивки с окружающей средой следующими граничными условиями:

- для скользящего контакта

$$u_{r1}^* = u_{r2}^*,\ u_{j2}^* = u_{0j1}^*,\ \sigma_{r\eta 1}^* = 0,\ \sigma_{r\theta 1}^* = 0 \quad \text{при } r = R_1, \qquad (12)$$
$$u_{j2}^* = u_{0j2}^* \quad \text{при } r = R_2, \quad j = r, \theta, \eta;$$

- для жёсткого контакта

$$u_{j1}^* = u_{j2}^* \quad u_{j1}^* = u_{0j1}^* \quad \text{при } r = R_1, \qquad (13)$$
$$u_{j2}^* = u_{0j2}^* \quad \text{при } r = R_2 \quad j = r, \theta, \eta.$$

Приравнивания коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального вида для определения коэффициентов, решение которой находим известным методом, если соответствующий для каждого n определитель $\Delta_n(\xi, c)$ отличен от нуля.

После определения коэффициентов $a_{n1}, ..., a_{n9}$, применяя обратное преобразование Фурье, можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния среды и заполнителя. При этом для вычисления интегралов Фурье можно использовать любой численный метод.

3.Критические скорости нагрузки. В общем случае для любых ξ аналитическое исследование $\Delta_n(\xi, c)$ затруднительно. Численные исследования $\Delta_n(\xi, c)$ в задачах о движущейся вдоль цилиндрической полости, подкреплённой однослойной или двухслойной упругой оболочками, в упругом пространстве показали [1,7,9], что в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи для каждой n-моды может существовать дозвуковая критическая скорость $c = c_*$, при которой в двух точках $\pm\xi^*(\xi^* > 0)$

$$\Delta_n(\xi^*, c) = 0, \quad \frac{\partial \Delta_n(\xi^*, c)}{\partial \xi} = 0.$$

В этом случае стационарного решения для данной n-моды не существует.

При $c > c_*$ существуют четыре особые точки $\pm\xi^{(1)}, \pm\xi^{(2)}$, в которых

$$\Delta_n(\pm\xi^{(i)}, c) = 0, \quad \frac{\partial \Delta_n(\pm\xi^{(i)}, c)}{\partial \xi} \neq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

В этих случаях решение существует, если ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы уравнений для данной n-моды. В частности, если для такого n коэффициенты Фурье разложения по θ действующей нагрузки $\mathbf{P}_n(\eta) = \mathbf{0}$, то это решение описывает свободные волны, которые возникают в тоннелях при превышении критической скорости нагрузки. При движении с такими скоростями движущаяся нагрузка генерирует позади себя свободные цилиндрические незатухающие вдоль оси тоннеля волны.

Следует ожидать наличие подобного явления и для данной задачи. Этот случай здесь пока не рассматривается и будет исследован авторами позднее.

Цитированная литература

1. **Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата 1989.

2. **Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах.** М., 1989.

3. **Айталиев Ш.М.** //Прикл. механика. Киев, 2004. Т.40, №10. С.3 – 36.

4. **Пожуев В.И.** // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. №1. С.44 – 48.

5. **Львовский В.М., Онищенко В.И., Пожуев В.И.** // Сб. "Вопросы прочности пластичности". Днепропетровск, 1974. С.98 – 110.

6. **Ескалиева А.Ж., Шершнёв В.В.** //Вестник КазГУ. 1999. №4 (18). С.180 – 186.

7. **Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н.** //Механика подземных сооружений: сб. науч. тр. Тульского политехн. ин-та. Тула, 1988. С.38 – 46.

8. **Пожуев В.И.** //Прикл. механика. Киев, 1980. Т.16, №1. С.32 – 39.

9. **Алексеева Л.А., Украинец В.Н.** // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №4. С.156 – 161.

10. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластин и оболочек. М. 1972.

Поступила в редакцию 10.12.2007 г.

УДК 510.67

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ АТОМНОСТИ СРЕДИ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ В КЛАССЕ E_T^+ ДЛЯ Δ-PJ – ТЕОРИЙ И Δ-PR – ТЕОРИЙ

А. Р. Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
Караганда Университетская, 28 modth1705@mail.ru

В данной статье рассматриваются Δ-PJ-теории и Δ-PR-теории и их некоторые виды счетных моделей. Устанавливается связь между h- Δ-алгебраической простотой и различными видами атомности этих теорий. Рассмотрены свойства h- Δ-алгебраически простых моделей относительно Δ-PJ-теорий и свойства счетных (Σ^+, Σ^+)-атомных моделей Δ-PR-теорий. Также в статье приведены результаты, которые являются Δ-PJ-обобщениями известных результатов Е.А.Палютина, и получен результат, связанный с вопросом о существовании тотально категоричного универсала.

В данной статье рассматриваются Δ-позитивно йонсоновские теории (в дальнейшем сокращенно: Δ-PJ-теории), которые являются позитивным обобщением йонсоновских теорий, если они, вообще говоря, йонсоновские. Даже в случае, когда Δ-PJ-теория не йонсоновская, используется идея обобщения *семантического метода* [1] для йонсоновских теорий. В известной работе [2] Воот определил простую модель полной теории, как модель теории, которая элементарно вкладывается в любую модель данной теории. Простая модель оказалась счетно-атомной. А. Робинсон ввел понятие алгебраически простой модели, обобщающее понятие простой модели. В отличие от простой она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории. В работе [3] Болдуин и Куекер исследовали понятие алгебраически простой модели и соответствующих понятий атомности модели. Ими было показано, что в общем случае понятие алгебраически простой модели не совпадает ни с одним видом счетно-атомной модели, введенным в [3]. В данной работе рассмотрены Δ-PJ и Δ-PR теории и их некоторые виды счетных моделей. Устанавливается связь между h-Δ-алгебраической простотой и различными видами атомности этих теорий. Во всех утверждениях все рассматриваемые модели являются счетными. Рассмотрены свойства h-Δ-алгебраически простых моделей относительно Δ-PJ-теорий, введенных в [4], а также свойства счетных (Σ^+, Σ^+)-атомных моделей Δ-PR-теорий. Основная разница между соответствующими (базисными) понятиями этих теорий и йонсоновскими теориями заключается в том, что в аксиомах, задающих Δ-PJ-теорию, участвуют только позитивные предложения, а также вложения между моделями заменяются на продолжения и погружения, как в [5, 6].

Keywords: *spectral problem, eigenfunction, spectrum*
2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

В конце статьи приведены результаты (Теоремы 8 и 10), которые являются Δ-PJ-обобщениями известных результатов Е.А.Палютина, а также получен результат (Теорема 6), связанный с вопросом о существовании тотально категоричного универсала.

Пусть L – язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ – замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны, $B(L^+)$ – это множество всевозможных булевых комбинаций формул из L^+.

Следуя [5], [6] определим Δ-морфизмы между структурами. Пусть M и N – структуры языка L, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение называется Δ-гомоморфизмом (символически $h : M \to_\Delta N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$. Следуя [5], [6], модель M называется началом в N и мы говорим, что M продолжается в N, при этом $h(M)$ называется продолжением M. Если при этом верно и обратное, т.е. для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(h(\bar{a}))$, то говорят, что отображение h погружает M в N (символически $h : M \leftrightarrow_\Delta N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ-продолжение и Δ-погружение. В рамках этого определения (Δ-гомоморфизма) легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ-погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$ соответственно.

Определение 1(универсальная область) [5],[6]. *Пусть κ – относительно большой кардинал (как минимум, $\kappa > |\Delta|$) и U – структура языка L. Тогда U является κ-универсальной областью, если она удовлетворяет следующим свойствам:*

1) κ-однородность. Пусть $f : U \dashrightarrow U$ – частичный эндоморфизм U и предположим, что $|dom(f)| < \kappa$. Тогда f расширяется до автоморфизма U.

2) κ-компактность. Пусть $\Gamma \subset \Delta$ такое, что $|\Gamma| < \kappa$, и предположим, что каждое конечное подмножество множества Γ реализуемо в U. Тогда Γ реализуемо в U.

Определение 2. *Модель M теории T называется Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $f : M \to_\Delta N$ и каждого $\bar{a} \in M$ и $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$: $N \models \exists \bar{y} \varphi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$.*

Класс всех Δ-позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории T обозначим через E_T^+; под E_T мы понимаем класс экзистенциально замкнутых теорий T.

Определение 3(Δ-JEP – свойство совместного вложения). *Говорим, что теория T допускает Δ-JEP, если для любых двух $A, B \in ModT$ существует $C \in ModT$ и Δ-гомоморфизмы $h_1 : A \to_\Delta C$, $h_2 : B \to_\Delta C$.*

Определение 4(Δ-AP – свойство амальгамы). *Говорим, что теория T допускает Δ-AP, если для любых $A, B, C \in ModT$ таких, что $h_1 : A \to_\Delta C$, $g_1 : A \to_\Delta B$, где h_1, g_1 - Δ-гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2 : C \to_\Delta D$, $g_2 : B \to_\Delta D$, где h_2, g_2 - Δ-гомоморфизмы, такие, что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.*

Определение 5. *а) Теория называется Δ-позитивной йонсоновской (Δ-PJ) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) имеет бесконечную модель;

2) позитивно $\forall\exists$-аксиоматизируема;

3) допускает Δ-JEP;

4) допускает Δ-AP.

б) Теория называется Δ-позитивной робинсоновской (Δ-PR) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) имеет бесконечную модель;

2) позитивно $\forall$-аксиоматизируема;

3) допускает Δ - JEP *;*
4) допускает Δ - AP *.*

В данной статье везде $\Delta = B^{+}(At)$.

Следующий абзац является краеугольным в данной статье. Сейчас мы определим понятие семантической модели для произвольной Δ - PJ -теории. В том случае, если рассматриваемая Δ - PJ -теория T является йонсоновской, то её семантической моделью является ω^{+} -однородная универсальная модель T , как в [7]. В противном случае её семантической моделью является универсальная область U , являющаяся моделью теории T . Соответственно определяется в каждом из этих случаев понятие центра.

Напомним определения основных понятий Δ - PJ -теории для нейонсоновского случая.

Определение 6. *Центром* Δ - PJ *-теории* T *называется теория* $T^{*}_{\Delta} = Th_{\Delta}(U)$ *, где* U *– к -универсальная область данного языка* L *, являющаяся моделью данной теории* T *, которую будем называть семантической моделью* Δ - PJ *-теории* T *.*

Определение 7. Δ - PJ *-теория* T *называется* Δ - PJ *-совершенной, если её семантическая модель* U *насыщенна в своей мощности для всех позитивных* Δ *-типов (* Δ *-тип называется позитивным, если в формулах, входящих в этот тип, бескванторная часть позитивна).*

Определение 8. $\phi \in \Gamma^{+} \Leftrightarrow \phi \in L^{+} \bigcap \Gamma$ *, где* Γ *– вид формулы* ϕ *.* **Определение 9.** *Модель* A Δ - PJ *-теории* T *называется* h - Δ *-алгебраически простой, если для любой модели* B Δ - PJ *-теории* T *существует* h - Δ *-погружение модели* A *в* B *.*

Следующая договоренность является очень важной. Фактически, мы будем говорить о семантическом аспекте Δ - PJ -теории. Если Δ - PJ -теория T является йонсоновской, то с $ModT$ мы работаем, как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же Δ - PJ -теория T не является йонсоновской, то в качестве $ModT$ мы будем рассматривать класс её позитивно экзистенциально замкнутых моделей E^{+}_{T} . Такой подход для класса E_{T} – класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории T был рассмотрен в [8]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно из [7], [9], что если йонсоновская теория T совершенна, то класс её экзистенциально замкнутых моделей E_{T} элементарен и совпадает с $ModT^{*}$, где T^{*} – её центр. В противном случае, т.е. если теория T несовершенна, мы поступаем как в [8], т.е. вместо $ModT$ работаем с классом E^{+}_{T} . Когда рассматривается произвольная Δ - PJ -теория T , то класс E^{+}_{T} рассматривается как расширение класса E_{T} (оба класса всегда существуют) и в зависимости от совершенности и несовершенности теории T теоретико-модельные свойства класса представляют особый интерес. В данной статье рассматриваемые Δ - PJ -теории являются Δ - PJ -совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском случае. В дальнейшем Σ^{+} – есть множество позитивных экзистенциальных формул.

Определение 10 [3]. Δ - PJ *теория* T *называется полной для* Γ *, если* $T = Th_{\Gamma}(A)$ *для некоторой модели* A *теории* T *.*

Определение 11 [3]. *1.* $(A, a_0, ..., a_{n-1}) \Rightarrow_{\Gamma} (B, b_0, ..., b_{n-1})$ *означает, что для каждой формулы* $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ *из* Γ *, если* $A \models \varphi(\bar{a})$ *, то* $B \models \varphi(\bar{b})$ *.*
2. $(A, \bar{a}) \equiv_{\Gamma} (B, \bar{b})$ *означает, что* $(A, \bar{a}) \Rightarrow_{\Gamma} (B, \bar{b})$ *и* $(B, \bar{b}) \Rightarrow_{\Gamma} (A, \bar{a})$ *.*

Определение 12 [3]. *Формула* $\varphi(x_0, ..., x_n)$ *называется полной для* Γ *-формул, если* φ *совместна с* T *и для каждой формулы* $\psi(x_0, ..., x_n)$ *из* Γ *, имеющей не более свободных переменных, чем* φ *, либо* $T \models \forall \bar{x}(\varphi \to \psi)$ *либо* $T \models \forall \bar{x}(\varphi \to \neg\psi)$ *.*

Определение 13 [3]. *Модель* A *называется* (Γ_1, Γ_2) *-атомной моделью* Δ - PJ *-теории* T *, если* A *является моделью* Δ - PJ *-теории* T *и для каждого* n *каждый* n *-кортеж элементов из* A *удовлетворяет в* A *некоторую формулу из* Γ_1 *, полную для* Γ_2 *-формул.*

Определение 14 [3]. *Модель* A *называется* Γ *-nice моделью* Δ - PJ *-теории* T *, если* A *–*

счетная модель и для каждой модели B теории T, каждого $n \in \omega$, и всех $a_0, ..., a_{n-1} \in A$, $b_0, ..., b_{n-1} \in B$, если $(A, a_0, ..., a_{n-1}) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, ..., b_{n-1})$, то для каждого $a_n \in A$ существует $b_n \in B$ такой, что $(A, a_0, ..., a_n) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, ..., b_n)$.

В рамках выше указанных определений получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть T - Δ - PJ -совершенная Δ - PJ -теория, полная для Σ^+ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) T имеет h - Δ -алгебраически простую модель;
2) T^*_Δ имеет (Σ^+, Σ^+) -атомную модель.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) T - йонсоновская теория, 2) T – нейонсоновская теория. В первом случае тривиально, так как мы используем теорему 4.3 из [3]. Второй случай. Пусть T имеет h- Δ -алгебраически простую модель A. Легко понять, что в силу определения модель A будет являться также алгебраически простой в $ModT$, вся разница от алгебраической простоты в том, что $ModT$ замкнут относительно гомоморфизмов. Так как Т – Δ - PJ -совершенна, то A погружается в U и в силу того, что A позитивно экзистенциально замкнута, то A реализует любой Δ -тип, тогда в силу Δ -полноты T^*_Δ $A \in ModT^*_\Delta$. В силу теоремы 4.3 из [3] она является (Σ, Σ) -атомной моделью T, а в силу Δ - PJ - совершенности теория T является позитивно модельно полной и соответственно в силу этого, так как любая формула в T^*_Δ эквивалентна некоторой Σ^+ -формуле, то модель A является (Σ^+, Σ^+) -атомной. Обратно. Пусть T^*_Δ имеет (Σ^+, Σ^+) -атомную модель A. Так как $ModT^*_\Delta \subset ModT$, то $A \in ModT$. Любая (Σ^+, Σ^+) -атомная модель является (Σ, Σ) -атомной моделью, а (Σ, Σ) -атомная модель является слабо (Σ, Σ) -атомной моделью, а слабо (Σ, Σ) -атомная модель является алгебраически простой. Таким образом, модель A является алгебраически простой и, так как теория T замкнута относительно гомоморфизмов, то модель A является h- Δ -алгебраически простой моделью.

Теорема 2. *Пусть T – Δ - PJ -совершенная Δ - PR -теория, полная для $\forall\exists^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) A – счетная и (Σ^+, Σ^+) -атомная модель T^*_Δ;
2) A – счетная и Δ -позитивно экзистенциально замкнутая Σ^+ -nice модель T.

Если Γ – множество формул, то $t^A_\Gamma(\bar{a}) = \{\varphi(\bar{x}) | \varphi \in \Gamma, A \models \varphi(\bar{a})\}$ называется Γ -типом $\bar{a}$ в A.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) T – йонсоновская теория, 2) T – нейонсоновская теория. Случай 1). Пусть T – йонсоновская теория. Пусть A – счетная и (Σ^+, Σ^+) - атомная модель T^*_Δ. Тогда $A \in ModT$, так как $ModT^*_\Delta \subset ModT$. В этом случае мы находимся в рамках пункта b) теоремы 3.2 из [3], и, следовательно, A является экзистенциально замкнутой и Σ -nice моделью теории T. Но $E_T \subset E^+_T$, значит $A \in E^+_T$, т.е. A является Δ - позитивно экзистенциально замкнутой моделью теории T. И в силу Δ - PJ -совершенности теории T любая её Σ -nice модель является Σ^+ -nice моделью. Обратно. Пусть A – счетная и Δ -позитивно экзистенциально замкнутая и Σ^+ -nice модель T. В этом случае мы находимся в рамках пункта b) теоремы 3.2 из [3], и соответственно модель A является (Σ^+, Σ^+) -атомной моделью T. Так как T – йонсоновская теория, то мы берем её семантическую модель C и погружаем модель A в C. Так как A – Δ -позитивно экзистенциально замкнутая модель и $ModT^* = E_T$, то $A \in ModT^*$. Предположим, что A не является (Σ^+, Σ^+) -атомной моделью T^*_Δ. Теория T полна $\forall\exists^+$ -предложений и, в частности, семантическая модель $C \equiv_{\Sigma^+} A$, с другой стороны, A погружается в C и они обе модели – T^*_Δ, при этом противоречие с (Σ^+, Σ^+) -атомностью A записывается с помощью Σ^+ -предложений. Этого быть не может, так как получается противоречие с Σ^+ -элементарной эквивалентностью C и A. Таким образом, A является (Σ^+, Σ^+) -атомной моделью T^*_Δ.

Случай 2). В этом случае, так как все модели Δ -позитивно экзистенциально замкнуты, достаточно доказать утверждение без условия Δ -позитивной экзистенциальной замкнутости.

Пусть A – счетная и (Σ^+,Σ^+)-атомная модель T^*_Δ. Так как $ModT^*_\Delta \subset ModT$, то $A \in ModT$. Любая (Σ^+,Σ^+)-атомная модель является слабо (Σ^+,Σ^+)-атомной моделью. По теореме 3.1 из [3] она является Σ^+-nice моделью теории T. Обратно. Пусть A – Σ^+-nice модель теории T. По теореме 3.2 (b) из [3] она будет (Σ^+,Σ^+)-атомной моделью теории T. Предположим, что A не принадлежит $ModT^*_\Delta$. Тогда существует $\varphi \in ModT^*_\Delta$ такое, что $A \models \neg\varphi$. $\neg\varphi \in \Sigma^+$, так как T – Δ-PJ-совершенная Δ-PR-теория. В силу этого U является насыщенной для Δ-типов моделью. По условию $\Delta = B^+(At)$. A погружается в U. Относительно Δ-типов U насыщенна. И так как A Δ-позитивно экзистенциально замкнута, то из реализации в U любой Δ-формулы должно следовать, что она реализуется в A. Получили противоречие, так как $A \models \neg\varphi$. Таким образом, А – счетная и (Σ^+,Σ^+)-атомная модель T^*_Δ.

Определение 15. *A называется минимальной моделью теории T, если A является моделью теории T и не существует собственной подструктуры A, являющейся моделью теории T.*

Теорема 3. *Пусть T – Δ-PJ-совершенная Δ-PR-теория, полная для Σ^+-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) T имеет минимальную h-Δ-алгебраически простую модель; 2) T^*_Δ имеет только одну h-Δ-алгебраически простую модель, которая (Σ^+,Σ^+)-атомная.*

Доказательство. В случае, когда теория T – йонсоновская, она совершенна в йонсновском смысле. Понятно, что в этом случае мы можем применить соответствующий йонсоновский результат из [3], так как в условии теоремы нет сведений о E_T и E^+_T. Поэтому достаточно доказывать случай, когда T – нейонсоновская. Если T имеет минимальную h-Δ-алгебраически простую модель A, то она единственна, так как в противном случае A не является минимальной. Соответственно она будет единственной и в $ModT^+_\Delta$. Из единственности следует её минимальность в $ModT^+_\Delta$. Из минимальности и алгебраической простоты по теореме 5.5 из [3] следует её (Σ,Σ)-атомность и в силу Δ-PJ -совершенности теории T из (Σ,Σ)-атомности следует (Σ^+,Σ^+)-атомность. Обратно. Пусть T^+_Δ имеет только одну алгебраически простую модель A, которая (Σ^+,Σ^+)-атомная. Так как $ModT^+_\Delta \subset ModT$, то $A \in ModT$. В этом случае мы находимся в рамках теоремы 5.5 из [3], т.е. T имеет минимальную алгебраически простую модель A. В силу того, что T замкнута относительно гомоморфизмов, мы получаем, что T имеет минимальную h-Δ-алгебраически простую модель.

Определение 16. *Пусть $\alpha \le \omega$, $\bar{x}^\alpha = \langle x_i : 1 \le i \le 1+\alpha\rangle$.*
1) ω-типом называется любое совместное с T множество формул, свободные переменные которых встречаются в $\bar{x}^\alpha$, где $\alpha = \omega$.
2) Тип p называется Γ-ω-типом, если $p \subseteq \Gamma$.
3) Γ-ω-тип p называется Γ_1-главным, если существует такая последовательность $\langle \psi_n(\bar{x}^n) : 1 \le n < \omega\rangle$ Γ_1-формул, что
а) $T \bigcup \psi_n(\bar{x}^n)$ совместно, $1 \le n < \omega$,
б) $\psi_n(\bar{x}^n)$ порождает $p \restriction \bar{x}^n$, где $p \restriction \bar{x}^n$ – множество всех формул из p, свободные переменные которых находятся среди $(x_1,...,x_n)$, $1 \le n < \omega$;
в) $T \vdash \psi_n(\bar{x}^n) \leftrightarrow \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(\bar{x}^{n+1})$, $1 \le n < \omega$.

Определение 17. *Модель A Δ-PJ-теории T называется хорошей почти-слабо (Γ_1,Γ_2)-атомной моделью T, если каждая ω-последовательность элементов A реализует Γ_1 – главный Γ_2 – ω-тип. $\phi \in \Gamma^+ \Leftrightarrow \phi \in L^+ \bigcap \Gamma$, где Γ – вид формулы ϕ.*

Лемма 1. *Пусть A – счетная модель Δ-PJ-теории T, $\bar{a}^\omega = \langle a_1,...,a_n,...\rangle$ реализует Σ^+-главный Σ^+-ω-тип. $B \models T$, B Δ-погружается в A. Тогда B является хорошей почти-слабо (Σ^+,Σ^+)-атомной моделью T.*

Доказательство. Пусть $\bar{b}^\omega = \langle b_1,...,b_n,...\rangle$ – произвольная ω-последовательность элементов B. Так как B Δ-погружается в A, то $b_k = a_{i_k}$ для некоторого $1 \le k < \omega$. Пусть $n_k = \{i_j : 1 \le j \le k\}$, $Z_k = \{1,2,3,...,n_k\} \setminus \{i_j : 1 \le j \le k\}$; $\bar{y}^k = \langle y_1,...,y_k\rangle$. Так

как $\bar{a}^{\omega}$ реализует Σ^{+}-главный Σ^{+}-ω-тип, то существует последовательность Σ^{+}-формул $\langle\psi_n(\bar{x}^n) : 1 \leq n < \omega\rangle$, для которых верно следующее:
1) $\psi_n(\bar{x}^n) \cup T$ совместно, $1 \leq n < \omega$;
2) $\psi_n(\bar{x}^n)$ порождает $t^{A}_{\Sigma^{+}}(\bar{a}^n)$, $1 \leq n < \omega$;
3) $T \vdash \psi_n(\bar{x}^n) \leftrightarrow \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(\bar{x}^{n+1})$, $1 \leq n < \omega$.

Обозначим

$S_k(\bar{y}^k) = \psi_{n_k}(\bar{x}^{n_k})\begin{pmatrix} x_{i_1}, & ... & , x_{i_k} \\ y_1, & ... & , y_k \end{pmatrix}$, если $Z_k = \emptyset$,

$S_k(\bar{y}^k) = \exists..x_{s\in Z_k}\psi_{n_k}(\bar{x}^{n_1})\begin{pmatrix} x_{i_1}, & ... & , x_{i_k} \\ y_1, & ... & , y_k \end{pmatrix}$, если $Z_k \neq \emptyset$.

Тогда ясно, что
а) $S_k(\bar{y}^k) \in \Sigma^{+}$, $1 \leq k < \omega$;
б) $S_k(\bar{y}^k)$ совместна с T, $1 \leq k < \omega$;
в) $S_k(\bar{y}^k)$ порождает $t^{A}_{\Sigma^{+}}(\bar{b}^k)$, $1 \leq k < \omega$.
г) $T \vdash S_k(\bar{y}^k) \leftrightarrow \exists y_{k+1}S_{k+1}(\bar{y}^{k+1})$.

Далее, так как B Δ-погружается в A, то $t^{B}_{\Sigma^{+}}(\bar{b}^k) \subseteq t^{A}_{\Sigma^{+}}(\bar{b}^k)$. Следовательно, $S_k(\bar{y}^k)$ порождает $t^{B}_{\Sigma^{+}}(\bar{b}^k)$, $1 \leq k < \omega$. Таким образом, в силу произвольности $\bar{b}^{\omega}$ модель B является хорошей почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомной моделью T.

Лемма 2. *Если Δ-PJ-теория T имеет хорошую почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомную модель, то каждая h-Δ-алгебраически простая модель T является хорошей почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомной моделью T.*

Доказательство. Пусть B – произвольная h-Δ-алгебраически простая модель T, A хорошая почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомная модель T. Тогда существует Δ-погружение $f : B \hookrightarrow_{\Delta} A$. Пусть $A' = f[B]$. Очевидно, что A' Δ-погружается в A и по лемме 1 A', а, следовательно, и B являются хорошими почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомными моделями T.

Лемма 3. *Пусть Δ-PJ-теория T полна для Σ^{+}-предложений. Тогда каждая хорошая почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомная модель T является h-Δ-алгебраически простой моделью T.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}^{\omega} = \langle a_1, ..., a_n, ...\rangle$ – элементы из A. Так как $\bar{a}^{\omega}$ реализует Σ^{+}-главный Σ^{+}-ω-тип, то существует $\langle\psi_n(\bar{x}^n) : 1 \leq n < \omega\rangle$ - последовательность Σ^{+}-формул, для которых верно условие пункта 3 определения 16. Так как T полна для Σ^{+}-предложений, то $B \models \exists\bar{x}^n\psi(\bar{x}^n)$, $1 \leq n < \omega$, где $B \models T$. Далее, так как $T \vdash \psi_n(\bar{x}^n) \leftrightarrow \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(\bar{x}^{n+1})$ для любого $1 \leq n < \omega$, то можно (шаг за шагом) постепенно найти такие $b_1, ..., b_n$ из B, что $B \models \psi_n(\bar{b}^n)$, $1 \leq n < \omega$, где $\bar{b}^n = \langle b_1, ..., b_n\rangle$. Но $\psi_n(\bar{x}^n)$ порождает $t^{A}_{\Sigma^{+}}(\bar{a}^n)$, поэтому $t^{A}_{\Sigma^{+}}(\bar{a}^k) \subseteq t^{B}_{\Sigma^{+}}(\bar{b}^k)$, $1 \leq n < \omega$. Следовательно, отображение $f : A \to B$, где $f(a_n) = b_n$, $1 \leq n < \omega$, является Δ-погружением.

Теорема 4. *Пусть T – Δ-PJ-совершенная Δ-PJ-теория, полная для Σ^{+}-предложений, и пусть T имеет хорошую почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомную модель. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) A – h-Δ-алгебраически простая модель теории T, 2) A – хорошая почти-слабо (Σ^{+}, Σ^{+})-атомная модель теории T^{*}_{Δ}.*

Доказательство. $1) \Rightarrow 2)$ следует из леммы 2, $2) \Rightarrow 1)$ следует из леммы 3.

Известен следующий вопрос Е.А.Палютина: " Существует ли ω-категоричный универсал K, не являющийся ω_1-категоричным " ?

Мы рассмотрим в связи с этим вопросом ω-категоричную Δ-PR-теорию, которая является совершенной йонсоновской теорией.

Если Δ-PJ-теория T является йонсоновской и совершенной, то определение категоричности совпадает с обычным определением категоричности, т.е. теория категорична в некоторой мощности, если любые её две модели этой мощности изоморфны друг другу. В противном случае Δ-PJ-теория T является κ-категоричной, если для любых двух $A, B \in E^{+}_{T}$ мощности κ следует, что они изоморфны между собой.

Мы имеем несколько результатов, когда Δ-PJ-теория T – совершенная йонсоновская теория.

Определение 18. *$\sharp$-компаньоном йонсоновской теории T называется такая теория $T^\sharp$ такая, что*
1) $(T^\sharp)_\forall = T_\forall$;
2) для любой йонсоновской теории T', если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\sharp = (T')^\sharp$,
3) $T \subseteq T^\sharp$.

Существуют следующие естественные примеры: если $\sharp = \{o, *, e, f\}$, то мы имеем соответственно оболочку Кайзера теории T, центр теории T, $Th(E_T)$, где E_T – класс T-экзистенциально замкнутых моделей теории T, форсинг-компаньон T^f теории T.

Известна, следующая

Теорема 5 [7],[9]. *Пусть T – йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) T совершенна;
2) T^* – модельный компаньон теории T;
3) $ModT^* = E_T$;
4) $T^* = T^f$;
5) $T^* = T^o$;
6) $T^\sharp$ – йонсоновская теория.

Замечание. T^o – йонсоновская, даже когда T несовершенна.

Вопрос. Когда $T_\forall$ – йонсоновская?

Лемма 4.*Если Δ-PJ-теория T – йонсоновская и ω-категоричная, то T совершенна.*

Доказательство. T ω-категорична $\Rightarrow$ по теореме Сарацино [10] существует теория T' такая, что T' – модельный компаньон теории T и T' ω-категорична $\Rightarrow$ по теореме Эклофа-Саббаха [11] E_T – элементарный класс. По теореме 5 $Th(E_T) = T^*$ $\Rightarrow$ T совершенна.

Лемма 5. *Если Δ-PJ-теория T – йонсоновская и κ-категорична, то $\sharp$ – компаньон теории T κ-категоричен, где $\kappa \geq \omega$.*

Доказательство. Если $T^\sharp$ не κ-категорична, то существуют $A, B \in Mod(T^\sharp)$: $|A| = |B| = \kappa$, A не изоморфна B. Но $A, B \in ModT$, так как $T \subseteq T^\sharp$, и T κ-категорична. Противоречие.

Следствием вышеуказанных фактов является

Теорема 6. *В случае негативного ответа на вопрос Палютина Е.А. для Δ-PR-теории, являющейся йонсоновской, которая удовлетворяет условиям вопроса Палютина Е.А. её центр не может быть конечно аксиоматизирован.*

Доказательство. Следует из предыдущих лемм и теоремы Зильбера о тотальной категоричности и конечной аксиоматизируемости [12].

Определение 19. *Δ-PJ-теория T, полная для экзистенциальных предложений, называется PJ-недвукардинальной, если для любой экзистенциально замкнутой модели A, для каждой экзистенциальной формулы $\varphi(x, \bar{y})$, $\bar{a} \in A$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, множество $\varphi(A, \bar{a})$ либо конечно, либо его мощность равна $|A|$.*

Следующие результаты принадлежат Е.А.Палютину [13].

Теорема 7.*Если T – ω-категоричная универсальная теория, то полная теория T_∞ недвукардинальна.*

Теорема 8. *Если T – ω-категоричная универсальная теория, то следующие условия эквивалентны:*
1) T ω_1-категорична;
2) T_∞ ω-стабильна;
3) некоторое несущественное расширение T имеет сильно минимальную формулу. И мы можем получить следующие результаты относительно предыдущих утверждений.

Теорема 9.*Если Δ-PR-теория T ω-категорична, то $T^\sharp$ недвукардинальна.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 7, теоремы 5 и лемм 4 и 5.

Определение 20. *Для любой* Δ - PJ *-теории* T *, любой модели* $M \in E_T^+$ *и любого* $\bar{a} \in M$ *,* $T' = Th_\Delta(M, \bar{a})$ *–* PJ *-несущественное расширение теории* T *.*

Определение 21. *Пусть* T *–* Δ - PJ *-теория, йонсоновская и полная для экзистенциальных предложений. Тогда экзистенциальная формула* $\varphi(x, \bar{a})$ *называется* PJ *-сильно минимальной в* T *, если она бесконечна, но для любой экзистенциальной формулы* $\psi(x, \bar{b})$ *одна из следующих формул* $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \psi(x, \bar{b})$ *,* $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\psi(x, \bar{b})$ *конечна в* T *.*

Пусть T – Δ - PJ -теория, $S^{PJ}(X)$ – множество всех позитивно экзистенциальных полных n -типов над X , совместных с T , для каждого конечного n .

Определение 22. *Мы говорим, что* Δ - PJ *-теория* T PJ - λ *-стабильна, если для любой модели* $A \in E_T^+$ *, для любого подмножества* X *множества* A $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^{PJ}(X)| \leq \lambda$ *.* Δ - PJ *-теория* T PJ *-стабильна, если она* PJ λ *-стабильна для некоторого* λ *.*

Теорема 10. *Если* Δ - PR *-теория* T ω *-категоричная, полная для экзистенциальных предложений, то следующие условия эквивалентны:*

1) T ω_1 *-категорична;*

2) $T_\infty^\sharp$ PJ - ω *-стабильна;*

3) некоторое PJ *-несущественное расширение* T *имеет* PJ *-сильно минимальную формулу.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 8, теоремы 5 и лемм 4 и 5.

Цитированная литература

1. **Ешкеев А.Р.** // Сб. научных работ, посв. памяти А.Д.Тайманова. Алматы, 2006. С. 102 – 118.

2. **Vaught R.L.** Denumerable models of complete theories, Infinitistic Methods, PWN, Warsaw, 1961. С. 303 – 321.

3. **Baldwin John T., Kuker David W.** // Annals Math. Logic 1981. №20 С. 289 – 330.

4. **Ешкеев А.Р.** // Материалы российской школы-семинара, посв. 100 летию со дня рождения Курта Геделя. Иркутск, 2006. С. 28 – 32.

5. **Itay Ben-Yaacov.** // Journal of Math. Logic. 2003. V.3. №1. P. 85 – 118.

6. **Itay Ben-Yaacov** // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. V.11. №1. P. 28 – 50.

7. **Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М.** // Материалы 10-ой Межвуз. конф. по математике и механике. Алматы, 2005. Т.1. С.85 – 90.

8. **Pillay A.** Forking in the category of existentially closed structures. - Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A. Macintyre, ed), Quaderni di Matematica, University of Naples, 2000. V.6.

9. **Ешкеев А.Р., Оспанов Р.М.** // Труды V-Казахско-Франц. коллоквиума по теории моделей. Караганда, 2001. С. 65 – 75.

10. **Saracino D.** Model companion for -categorical theories. - Proc. Amer. Math. Soc. 1973, 39, P. 591 – 598

11. **Eclof P., Sabbagh G.** // Ann. Math. Logic. 1971. V.2, P. 251 – 295.

12. **Зильбер Б.И.** // В кн.: Теория моделей и её приложения. Алма-Ата, 1980. С. 47 – 60.

13. **Палютин Е.А.** // Алгебра и логика. 1971. Т.10, №1. С. 23 – 32.

Поступила в редакцию 16.11.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 35 – 39*

УДК 517.5

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЕГУЛЯРНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

М. Р. Исмагулов

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 apc@intelsoft.kz

Получена оценка приближения непрерывных периодических функций регулярными интерполяционными параболическими сплайнами. В частном случае получена известная оценка приближения полиномиальными параболическими сплайнами.

Пусть C^r – класс функций, непрерывных вместе с r-ой производной на отрезке [0,1] ($r = 0,1; \quad C^0 = C$), $\widetilde{C}^r$ – соответствующий класс 1-периодических функций. На отрезке [0,1] зададим разбиение:

$$H_n = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}.$$

Определение 1. *Регулярным параболическим сплайном по разбиению* H_n *назовем функцию* $S_n(x) \in C^1$, *имеющую на каждом промежутке* $[x_i, x_{i+1}]$ *следующий вид:*

$$S_n(x) = A_i + B_i t + C_i u_i(t), \tag{1}$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, A_i, B_i, C_i *– вещественные коэффициенты,* $u_i(t)$ *– заданные функции из* C^1, *удовлетворяющие следующим условиям (регулярности):*
а) производные $u_i'(t)$ *монотонны на* $[0, 1]$,
б) $u_i'(t)$ *тождественно не равны константе.*

Каждой функции $f \in \widetilde{C}$ поставим в соответствие ее интерполяционный регулярный параболический сплайн (ИРПС) $S_n(f, x) \in \widetilde{C}^1$ такой, что

$$S_n(f, z_i) = f(z_i) =: f_i, \tag{2}$$

для $z_i = x_i + \tau_i h_i, \quad \tau_i \in \Gamma_i$ (о множествах Γ_i см. далее), $i = 0, 1, ..., n-1$, и выполнено краевое условие

Keywords: *generalized parabolic spline, interpolation, error estimate*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45,26B40

$$S^{(j)}(0) = S^{(j)}(1), \qquad j = 0, 1. \tag{3}$$

Определим множества $\Gamma_i \subset (0,1)$ следующим образом.

Пусть

$$\Delta_i = u_i'(1) - u_i'(0);$$

$$\varphi_i(t) = u_i(t) - u_i(\tau_i) - u_i'(1)(t - \tau_i); \tag{4}$$

$$\psi_i(t) = u_i(t) - u_i(\tau_i) - u_i'(0)(t - \tau_i); \tag{5}$$

$$F_i(t) = \frac{\varphi_i(t) + \psi_i(t)}{\Delta_i}; \tag{6}$$

$$G_i(t) = \frac{2u_i(t) - (u_i'(1) + u_i'(0))t}{\Delta_i}. \tag{7}$$

Тогда

$$\Gamma_i = \begin{cases} (0,1), & \text{если } G_i(0) = G_i(1); \\ (0,\mu_i), & \text{если } G_i(0) < G_i(1) \text{ и } G_i(\mu_i) = G_i(0); \\ (\nu_i, 1), & \text{если } G_i(0) > G_i(1) \text{ и } G_i(\nu_i) = G_i(1). \end{cases}$$

Нетрудно показать

Свойство 1. *Функции* $\dfrac{\varphi_i(t)}{\Delta_i}$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ *монотонно убывают и выпуклы вниз на* $[0,1]$ *и* $\dfrac{\varphi_i(0)}{\Delta_i} \geq 0$, $\dfrac{\varphi_i(1)}{\Delta_i} \leq 0$.

Свойство 2. *Функции* $\dfrac{\psi_i(t)}{\Delta_i}$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ *монотонно возрастают и выпуклы вниз на* $[0,1]$, *причем* $\dfrac{\psi_i(0)}{\Delta_i} \leq 0$, $\dfrac{\psi_i(1)}{\Delta_i} \geq 0$.

Свойство 3. *Функции* $F_i(t)$, $G_i(t)$ *выпуклы вниз на* $[0,1]$ *и* $F'_i(0) = G'_i(0) = -1$, $F'_i(1) = G'_i(1) = 1$, $F_i(\tau_i) = 0 \quad (i = 0, 1, ..., n-1)$.

В [1] доказана.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in \widetilde{C}$ *существует единственный сплайн вида (1), удовлетворяющий условиям (2) и (3).*

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \widetilde{C}$ *и сплайн* $S_n(f,x)$ *удовлетворяет условиям (2) и (3). Тогда на каждом отрезке* $[x_i, x_{i+1}]$ *справедливо неравенство*

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leq \omega(f, h_i) + L \cdot \chi \cdot h_i, \tag{8}$$

где $\omega(f, h_i)$ *– модуль непрерывности функции* f,

$$L = \max_i \left| \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right|$$

и

$$\chi = \max_i \frac{h_i}{F_{i-1}(1)h_{i-1} + F_i(0)h_i}.$$

Доказательство. Определим коэффициенты A_i, B_i, C_i, учитывая условия:

а) непрерывности $S_n(x)$ в узлах x_i:

$$A_{i-1} + B_{i-1} + C_{i-1}u_{i-1}(1) = A_i + C_i u_i(0), \quad i = 1, 2, ..., n-1; \tag{9}$$

b) гладкости $S_n(x)$ в узлах x_i:

$$B_i + C_i u_i'(0) = m_i h_i,$$

$$B_i + C_i u_i'(1) = m_{i+1} h_i, \tag{10}$$

где $m_i = S_n'(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n-1$;

c) интерполяции в $z_i = x_i + \tau_i h_i$, $\tau_i \in \Gamma_i$.

$$A_i + B_i \tau_i + C_i u_i(\tau_i) = f_i, i = 0, 1, ..., n-1. \tag{11}$$

Из (9) – (11) получаем

$$A_i = f_i - \frac{1}{\Delta_i}[m_i h_i(\tau_i u_i'(1) - u_i(\tau_i)) - m_{i+1} h_i(\tau_i u_i'(0) - u_i(\tau_i))],$$

$$B_i = \frac{h_i}{\Delta_i}[m_i u_i'(1) - m_{i+1} u_i'(0)], \tag{12}$$

$$C_i = \frac{h_i}{\Delta_i}(m_{i+1} - m_i).$$

Используя выражения (12), (4) и (5), получаем представление для сплайна:

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= f_i - \frac{m_i h_i}{\Delta_i}(\tau_i u_i'(1) - u_i(\tau_i)) + \frac{m_{i+1} h_i}{\Delta_i}(\tau_i u_i'(0) - u_i(\tau_i)) + \\ &+ \frac{h_i}{\Delta_i}[m_i u_i'(1) - m_{i+1} u_i'(0)]t + \frac{h_i}{\Delta_i}(m_{i+1} - m_i) u_i(t) = \\ &= f_i - m_i h_i \frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i} + m_{i+1} h_i \frac{\psi_i(t)}{\Delta_i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Оценим уклонение

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leq |f_i - f(x)| + \left(\left| \frac{\varphi_i(t)}{\Delta_i} \right| + \left| \frac{\psi_i(t)}{\Delta_i} \right| \right) h_i ||m||, \tag{14}$$

где $||m|| = \max\limits_i |m_i|$.

Из свойств 1, 2 и (4), (5) видно, что

$$\varphi_i(t) \cdot \psi_i(t) \leq 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\varphi_i(t) - \psi_i(t)}{\Delta_i} = \tau_i - t.$$

Учитывая это, получаем

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leq \omega(f, h_i) + |\tau_i - t| h_i \|m\|. \tag{15}$$

Оценим $\|m\|$.

Из (12) и (9) получаем систему для определения величин m_i:

$$m_{i-1}h_{i-1}\left[-\frac{\varphi_{i-1}(1)}{\Delta_{i-1}}\right]+m_i\left[h_{i-1}\frac{\psi_{i-1}(1)}{\Delta_{i-1}}+h_i\frac{\varphi_i(0)}{\Delta_i}\right]+$$
$$+m_{i+1}h_i\left[-\frac{\psi_i(0)}{\Delta_i}\right]=f_i-f_{i-1},\qquad i=1,2,...,n, \tag{16}$$

где $f_{n+k}=f_k$, $m_{n+k}=m_k$, $h_{n+k}=h_k$, $\varphi_{n+k}(t)=\varphi_k(t)$, $\psi_{n+k}(t)=\psi_k(t)$.

В [1] доказано, что данная матрица имеет доминирующую главную диагональ. Тогда (см., напр., [2], гл. 1, с. 29)

$$\|m\|\le\max_i\frac{|d_i|}{r_i}, \tag{17}$$

где r_i – величина диагонального преобладания, d_i – правая часть i-го уравнения системы (19).

Из (17), (16) и (6) получаем

$$r_i=\frac{\psi_{i-1}(1)}{\Delta_{i-1}}h_{i-1}+\frac{\varphi_i(0)}{\Delta_i}h_i+\frac{\varphi_{i-1}(1)}{\Delta_{i-1}}h_{i-1}+\frac{\psi_i(0)}{\Delta_i}h_i=$$
$$=\frac{\varphi_{i-1}(1)+\psi_{i-1}(1)}{\Delta_{i-1}}h_{i-1}+\frac{\varphi_i(0)+\psi_i(0)}{\Delta_i}h_i=F_{i-1}(1)h_{i-1}+F_i(0)h_i, \tag{18}$$

$$\|m\|\le\max_i\frac{|f_i-f_{i-1}\,|}{F_{i-1}(1)h_{i-1}+F_i(0)h_i}=$$
$$=\max_i\left|\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\cdot\frac{h_i}{F_{i-1}(1)h_{i-1}+F_i(0)h_i}\right|\leqslant L\cdot\chi, \tag{19}$$

где

$$L=\max_i\left|\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right|$$

и

$$\chi=\max_i\frac{h_i}{F_{i-1}(1)h_{i-1}+F_i(0)h_i}.$$

Теорема доказана.

Замечание. *Если положить* $u_i(t)=t^2$ *и* $\tau_i=\dfrac{1}{2}$ $(i=0,1,...,n-1)$, *то в условиях теоремы из (4) – (6), (15) и (19) получаем известную оценку для параболических сплайнов (см. [2], гл. 2, с.66):*

$$|S_n(f,x)-f(x)|\le\omega(f,h_i)+2Lh_i. \tag{20}$$

Цитированная литература

1. **Исмагулов М.Р.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1994. №1.

2. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М., 1976.

Поступила в редакцию 09.11.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 40 – 49*

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шоманбаева

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.О.Ауезова
160012 Шымкент пр.Тауке-Хана, 5 e-mail: mtshomanbaeva@mail.ru

В настоящей работе рассматривается природа спектра оператора периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом и с младшим членом:

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и a – const.

1. Постановка задачи.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB: 0 \le t \le T, x=0; BC: 0 \le x \le l, t=T; CD: 0 \le t \le T, x=l; DA: 0 \le x \le l, t=0$ (см.рис.1).

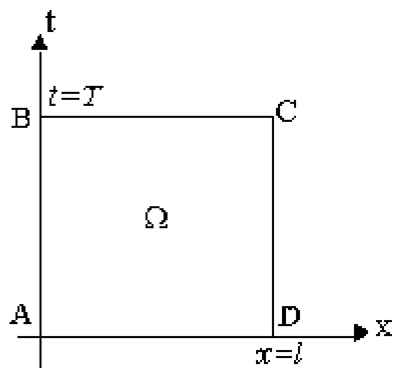

Рис. 1: Область $\Omega \subset R^2$.

Keywords: *Heat conductivity equation, deviating argument.*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Периодическая задача СМЧ. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и a – const.

Определение 1. *Под регулярным решением задачи* (1) – (3) *будем понимать функцию* $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, *n=1,2,3,..., обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2) - (3).*

Определение 2. *Функцию* $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ *назовем сильным решением задачи (1) - (3), если существует последовательность функций* $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega}\right)$, *удовлетворяющая краевым условиям задачи, такая, что* $\{u_n\}$ *и* $\{Lu_n\}, n = 1,2,3,...,$ *сходятся в* $L^2(\Omega)$ *соответственно к* u *и* f.

Определение 3. *Краевая задача* (1) – (3) *называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части* $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ *и единственно [1].*

В предыдущей работе авторов [2] были получены условия существования и единственности сильного решения задачи (1) – (3).

Теорема 1.1. Для существования и единственности сильного решения краевой задачи (1)–(3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\lambda_{mn}|^2 = \left[(-1)^n\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\tfrac{\pi}{T} - \left(\tfrac{2m\pi}{l}\right)^2 - \tfrac{2m\pi}{l}\cdot Ima\right]^2 + \left(\tfrac{2m\pi}{l}\cdot Rea\right)^2 \neq 0,$$
$$m = 0, \pm1, \pm2, ...; n = 0,1,2,...$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи (1) – (3) существует и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}\cdot u_{mn}(x,t)$$

для всех $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2 < +\infty,$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 + \frac{2m\pi i}{l}\cdot a; \tag{4}$$

$$u_{mn}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{Tl}}exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right)\cdot sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T}, \quad m = 0,\pm1,\pm2,...; \ n = 0,1,2,...$$

– собственные значения и собственные функции спектральной задачи, соответствующей краевой задаче (1) – (3):

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = \lambda u(x,t), \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0. \tag{7}$$

Целью настоящей работы является исследование природы спектра (4) и влияния младшего члена на сильную разрешимость краевой задачи (1) – (3) в пространстве $L^2(\Omega)$.

2. О самосопряженности в существенном оператора L.

Лемма 2.1. *Если симметрический оператор A имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора $\bar{A}$ самосопряжено в H, иначе говоря, оператор самосопряжен в существенном.*

Доказательство. В силу симметричности оператора A имеет место включение $A \subset A^*$. Поэтому $D(A) \subset D(A^*) \subset H$ и оператор A^* плотно определен. Тогда существует A^{**} и имеет место равенство $\bar{A} = A^{**}$. Из включения $A \subset A^*$ следует, что имеет место обратное включение. Пусть $x \in D(A^*)$. Собственные векторы $\{\varphi_n\}, n = 1, 2, ...,$ оператора A образуют базис пространства H, поэтому имеет место

$$A^*x = \sum_{n=1}^{+\infty} (A^*x, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, A\varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (x, \varphi_n) \cdot \varphi_n.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n (x, \varphi_n)|^2 < +\infty.$$

Пусть x_N – частичная сумма ряда Фурье элемента x, т.е.

$$x_N = \sum_{n=1}^{N} (x, \varphi_n) \cdot \varphi_n,$$

и $x_N \to x$ при $N \to +\infty$. Тогда

$$Ax_N = \sum_{n=1}^{N} (x, \varphi_n) \cdot A\varphi_n = \sum_{n=1}^{N} (x, \varphi_n) \cdot \lambda_n \varphi_n \to A^*x$$

при $N \to +\infty$ и по определению замыкания оператора A имеет место включение $x \in D(\bar{A})$ и равенство $\bar{A}x = A^*x$, а это значит $A^* \subset \bar{A}$, т.е. имеет место обратное включение, тем самым имеет, место равенство $\bar{A} = A^*$, тогда $(\bar{A})^* = A^{**} = \bar{A}$.

При $a + \bar{a} = 0$ оператор L удовлетворяет всем условиям этой леммы, поэтому имеет место теорема.

Теорема 2.1. *Если $a + \bar{a} = 0$, то оператор*

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + a \cdot u_x(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

самосопряжен в существенном в пространстве $H = L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ – прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости $(x, t) \subset R^2$.

Из теорем 1.1 и 2.1 следует следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если*

$$(a) \quad Rea = 0,$$

$$(b) \quad (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot Ima \neq 0,$$

то существует обратный оператор $\bar{L}^{-1}$, который также самосопряжен.

Доказательство. Существование оператора следует из теоремы 3.1, остальное следует из цепочки равенств $(\bar{L}^{-1})^* = (\bar{L}^*)^{-1} = \bar{L}^{-1}$, в которой использована теорема 4.1 и известная лемма $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

3. О нормальности оператора $\bar{L}$.

Если $a + \bar{a} \neq 0$, то оператор L не является симметрическим, поэтому нельзя ставить вопрос о его самосопряженности.

Определение 4. *Линейный оператор A (необязательно ограниченный) в пространстве H называется нормальным, если он плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию $A^*A = AA^*$.*

Лемма 3.1. [3]. *Пусть A – плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда*

(а) A^* замкнут;

(б) A допускает замыкание тогда и только тогда, когда $D(A^*)$ плотно, причем в этом случае $\bar{A} = A^{**}$;

(с) если A допускает замыкание, то $(\bar{A})^* = A^*$.

Лемма 3.2. [4]. *Пусть A – нормальный оператор в пространстве H. Тогда*

(а) $D(A) = D(A^*)$;

(б) $\|Ax\| = \|A^*x\| \ \forall x \in D(A)$;

(с) A является максимальным нормальным оператором.

Эта лемма является необходимым признаком нормальности оператора A, поэтому, чтобы установить нормальность нашего оператора $\bar{L}$ мы должны проверить условия этой леммы.

Если $u, v \in D(L)$, то в силу леммы 2.1 имеет место равенство

$$(Lu, v) = (u, L^*v),$$

что говорит о том, что $D(L) \subset D(L^*)$.

Собственные векторы оператора L являются собственными векторами и для оператора L^*. Поскольку эти векторы образуют базис пространства $H = L_2(\Omega)$, то в силу леммы 2.1 оператор L^* замкнут, оператор L допускает замыкание и имеет место равенство $\bar{L} = L^{**}, (\bar{L})^* = L^*$. Попробуем описать область определения оператора $\bar{L}$. Пусть $u \in D(\bar{L})$, тогда

$$\bar{L}u = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{L}u, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (L^{**}u, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, L^*\varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \lambda_n \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \varphi_n) \cdot \varphi_n,$$

где φ_n – собственные векторы оператора L, соответствующие собственным значениям λ_n. Следовательно, если $u \in D(\bar{L})$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n (u, \varphi_n)|^2 < +\infty$. Этот же результат можно получить, воспользовавшись равенством $(\bar{L})^* = L^*$.

Теперь пусть $u \in D(L^*)$, тогда имеет место равенство

$$L^*u = \sum_{n=1}^{\infty} (L^*u, \varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, L\varphi_n) \cdot \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} (u, \varphi_n) \cdot \varphi_n,$$

следовательно,

$$\|L^*u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\lambda_n} (u, \varphi_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n (u, \varphi_n)|^2 < +\infty.$$

Таким образом, $D(\bar{L}) = D(L^*) = D(\bar{L}^*)$.

Пусть $u \in D(\bar{L})$, тогда

$$\|\bar{L}u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n (u, \varphi_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\lambda_n} (u, \varphi_n)|^2 = \|L^*u\|^2 = \|(\bar{L})^*u\|^2 \ \Rightarrow$$

$$\|\bar{L}u\| = \|(\bar{L})^* u\|.$$

Из этих равенств видно, что оператор удовлетворяет необходимым условиям нормальности. Пусть $u \in D(\bar{L}^*\bar{L})$, тогда

$$\bar{L}^*\bar{L}u = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}^*\bar{L}u, \varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}u, \bar{L}\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}u, L\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(\bar{L}u, \varphi_n)\cdot\varphi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(u, \bar{L}^*\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(u, L^*\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_n}(u, \overline{\lambda_n}\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\lambda_n}|^2(u, \varphi_n)\cdot\varphi_n.$$

Теперь пусть будет $u \in D(\bar{L}\bar{L}^*)$, тогда

$$\bar{L}\bar{L}^*u = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}\bar{L}^*u, \varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}^*u, \bar{L}^*\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}^*u, L^*\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\bar{L}^*u, \overline{\lambda_n}\varphi_n)\cdot\varphi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\bar{L}^*u, \varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(u, \bar{L}\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(u, L\varphi_n)\cdot\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{\lambda_n}|^2(u, \varphi_n)\cdot\varphi_n.$$

Следовательно, $\bar{L}^*\bar{L} = \bar{L}\bar{L}^*$, т.е. оператор $\bar{L}$ нормален.

Теорема 3.1. *Если $a + \bar{a} \neq 0$, то замыкание оператора L является нормальным оператором, т.е. имеет место равенство $\bar{L}^*\bar{L} = \bar{L}\bar{L}^*$.*

4. О природе спектра оператора.

Пусть на вещественной прямой отмечено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...,$$

мы накручиваем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будут ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки α_n покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число n_α тех из первых n отмеченных точек, которые при накручивании попадают на дугу α, асимптотически задается в виде $|\alpha|\cdot n$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|.$$

При этом $|\alpha|$ означает длину дуги α. О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги α. Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1, то есть, что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел x, которые сравнимы по модулю 1 с некоторым заданным числом α, имеется одно и только одно число, для которого выполняется неравенство; это число, сравнимое с α по модулю 1, будет обозначаться (α).

1-ая теорема Вейля. *Если $\varphi(z)$ – некоторый многочлен со свободным членом α_0 и у $\varphi(z) - \alpha_0$ не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел*

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3), ...$$

распределена всюду равномерно плотно.

В частности,

2-ая теорема Вейля. *"Если ξ – некоторое иррациональное число, то последовательность точек*

$$1\xi,\ 4\xi,\ 9\xi,\ 6\xi,\ 25\xi, ...$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадрат чисел заменить на их кубы или четвертые степени и т.д."

В связи с этими теоремами Вейля [5] возникает вопрос: "А не уплотняются ли собственные значения нашего оператора с ростом индексов n, m?" Найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 + \frac{2m\pi i}{l} \cdot a, \quad a \neq 0.$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки: если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ окажется неограниченным.

Если $\lambda_{mn} \to 0$ по некоторой подпоследовательности, то

$$|\lambda_{mn}|^2 = \left[(-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot Ima\right]^2 + \left(\frac{2m\pi}{l} \cdot Rea\right)^2 \neq 0,$$

Это невозможно при $Re\ a \neq 0$. Если $Re\ a \neq 0$, то

$$|\lambda_{mn}|^2 \geq \left(\frac{2m\pi}{l} \cdot Rea\right)^2 \quad \forall\ m = 1, 2, ... \Rightarrow |\lambda_{mn}| \geq \frac{2m\pi}{l} |Rea| ,$$

$$|\lambda_{0n}|^2 = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T}\right]^2 \geq \left(\frac{\pi}{2T}\right)^2, \quad |\lambda_{0n}| \geq \frac{\pi}{2T} \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$$

Следовательно,

$$|\lambda_{mn}| \geq max \left\{\frac{\pi}{2T}, \frac{2\pi}{l}|Re\ a|\right\} \quad \forall m = 0, \pm1, \pm2, ...; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Таким образом, при $Re\ a \neq 0$ обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ существует и ограничен. Если некоторая подпоследовательность $\{\lambda_{kl}\}$ последовательности $\{\lambda_{mn}\}$ сходится к некоторой точке λ_0 комплексной плоскости, то последовательность $\{|\lambda_{kl}|\}$ ограничена, следовательно, второй индекс l принимает лишь конечное число значений. Тогда первый индекс тоже принимает конечное число значений. Мы получили противоречие, ибо по предположению $\{\lambda_{kl}\}$ – бесконечная сходящаяся последовательность. Следовательно, последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ не имеет предельных точек на конечной части комплексной λ плоскости, а это означает, что спектр оператора $\bar{L}$ дискретен. В связи с этим обстоятельством возникает вопрос: "А не является ли оператор $\bar{L}^{-1}$ компактным, ибо дискретность спектра является свойством компактных операторов”? Любая подпоследовательность последовательности $\{\lambda_{mn}\}, m = 0, \pm1, \pm2, ...; \quad n = 0, 1, 2, ...$, стремится к бесконечности. В самом деле, пусть $\{\lambda_{ij}\}$ – произвольная бесконечная подпоследовательность последовательности $\{\lambda_{mn}\}$. Тогда возможны две ситуации:

1) либо первый индекс принимает бесконечное число значений, тогда

$$|\lambda_{ij}|^2 \geq \left(\frac{2i\pi}{l} Rea\right)^2 \ \Rightarrow \ |\lambda_{ij}| \to +\infty,$$

2) либо первый индекс принимает конечное число значений, тогда второй индекс принимает бесконечное число значений, поэтому

$$|\lambda_{ij}|^2 = \left[(-1)^j \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2 - \frac{2i\pi}{l} Ima\right]^2 + \left(\frac{2i\pi}{l} Rea\right)^2 \geq$$

$$\geq \left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} + (-1)^{j+1} \left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2 + (-1)^{j+1} \frac{2i\pi}{l} Ima\right]^2 \ \to +\infty.$$

В силу того, что $j \to +\infty$, второе и третье слагаемые – ограниченные величины.

Лемма 4.1. *Для полной непрерывности оператора нормального типа необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

В силу этой леммы наш оператор $\bar{L}^{-1}$ вполне непрерывен и дискретность его спектра оказалась неслучайной.

Теперь рассмотрим случай $Re\ a = 0$. В этом случае найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot Ima.$$

Предположим, что $\lambda_{mn} \neq 0$, т.е.

$$Im\ a \neq \frac{(-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Если $n = 2k + 1,\ k = 0, 1, 2, ...$, то

$$\lambda_{m,2k+1} = -\left(2k + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot Ima \to +\infty$$

при $m, k \to +\infty$, поэтому эта подпоследовательность не имеет предельных точек.

Если $n = 2k,\ k = 0, 1, 2, ...$, то

$$\lambda_{m,2k} = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot Ima, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...; \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Преобразуем это выражение к удобному для нас виду

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[k + \frac{1}{4} - \frac{2m^2\pi T}{l^2} - \frac{mT}{l} \cdot Ima\right] = \frac{2\pi}{T}\left[k + \frac{1}{4} - \left(m^2\frac{2\pi T}{l^2} + m\frac{T \cdot Ima}{l}\right)\right].$$

Для удобства введем обозначения:

$$\varphi(m) = m^2\frac{2\pi T}{l^2} + m\frac{T \cdot Ima}{l},$$

$[x]$ – целая часть, (x) – дробная часть x. Предположим, что $k = [\varphi(m)]$, тогда

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} + [\varphi(m)] - \varphi(m)\right] = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m) - [\varphi(m)])\right] = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m))\right].$$

Теперь воспользуемся теоремой Вейля. Для этого предположим, что хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

иррациональна. Тогда в силу теоремы Вейля дробная часть $\varphi(m)$, т.е. $(\varphi(m))$ заполняет отрезок равномерно плотно при изменении $m = 0, 1, 2, ...$ Тогда последовательность $\lambda_{m,2k},\ m = 0, 1, 2, ...$, всюду плотна на отрезке

$$\left[-\frac{3\pi}{2T}, \quad \frac{\pi}{2T}\right].$$

Полагая $k = [\varphi(m)] + 1,\ k = [\varphi(m)] + 2, ...,$ а затем $k = [\varphi(m)] - 1,\ k = [\varphi(m)] - 2, ...,$ и т.д., получим, что последовательность $\lambda_{m,n}$ всюду равномерно плотна, т.е. непрерывный спектр оператора $\bar{L}$ заполняет всю числовую ось от $-\infty$ до $+\infty$. Пусть теперь обе величины

$$\frac{2\pi T}{l^2},\quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

рациональны, тогда $\varphi(m)$ всегда рациональна. Для определенности пусть

$$\frac{2\pi T}{l^2} = \frac{p}{q},\quad \frac{T \cdot Ima}{l} = \frac{r}{k},$$

тогда

$$\varphi(m) = m^2 \cdot \frac{p}{q} + m \cdot \frac{r}{k} = \frac{m^2 p + mr}{qk} = [\varphi(m)] + (\varphi(m)).$$

Дробная часть $\varphi(m)$ принимает лишь конечное число значений, это есть остатки от деления $m^2 p + mr$ на qk, т.е.

$$0,\ \frac{1}{qk},\ \frac{2}{qk}, ..., \frac{qk-1}{qk}.$$

При изменении m от $-\infty$ до $+\infty$ эти значения повторяются бесконечное число раз, хотя бы один или все из них. Для нас важно, чтобы они не совпали с $\frac{1}{4}$.

Полагая $k = [\varphi(m)],\ m = 0, 1, 2, ...,$ видим, что

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{4} - (\varphi(m))\right],\quad m = 0, 1, 2, ...$$

Эта бесконечная последовательность содержится в сегменте

$$\left[-\frac{3\pi}{2T},\quad \frac{\pi}{2T}\right]$$

и состоит из конечного числа дробей вида

$$\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{4},\quad \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{qk}\right), ..., \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{qk}\right), ..., \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{qk-1}{qk}\right),$$

поэтому хотя бы один из них, или все, или некоторые из них повторяются бесконечное число раз. Это говорит о том, что некоторые числа из интервала $\left[-\frac{3\pi}{2T},\ \frac{\pi}{2T}\right]$ являются бесконечно кратными собственными значениями. Продолжая это рассуждение, как в иррациональном случае, видим, что спектр оператора $\bar{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значений и среди этих собственных значений имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значений. По нашему предположению

$$Im\ a \neq \frac{(-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l},\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\quad n = 0, 1, 2, ...,$$

поэтому обратный оператор существует и ограничен, но некомпактен из-за наличия бесконечнократных собственных значений, ибо спектр компактного оператора конечнократен. Если $Re\ a = 0$ и

$$Im\ a = \frac{(-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}$$

для некоторых значений $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\quad n = 0, 1, 2, ...,$ то обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ не существует, ноль является собственным значением, возможно, бесконечнократным. При этом, если хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2},\quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

иррациональна, то спектр оператора $\bar{L}$ заполняет всю числовую ось. Если обе эти величины рациональны, то спектр оператора L состоит из бесконечного множества собственных значений, среди которых имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значений.

Теорема 4.1.

(а) Если $Re\ a \neq 0$, *то существует обратный оператор* $\bar{L}^{-1}$, *который является нормальным и компактным. Имеет место оценка*

$$\|\bar{L}^{-1}\| \leq K^{-1}, \quad K = max\left\{\frac{\pi}{2T}, \frac{2\pi}{l}|Rea|\right\}.$$

Спектр оператора $\bar{L}$ *дискретен, т.е. не имеет предельных точек на конечной части плоскости.*

(б) Если $Re\ a = 0$,

$$Im\ a \neq \frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

и обе величины

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

рациональны, то обратный оператор существует, ограничен, но некомпактен. Оператор $\bar{L}$ *самосопряжен, его спектр состоит из бесконечного множества собственных значений, среди которых имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значений.*

(в) Если $Re\ a = 0$,

$$Im\ a \neq \frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

и хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

иррациональна, то обратный оператор $\bar{L}^{-1}$ *существует, но неограничен. Оператор* $\bar{L}$ *самосопряжен и его спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего всю числовую ось* $(-\infty, +\infty)$. *Точки непрерывного спектра являются предельными точками собственных значений.*

(г) Если $Re\ a = 0$ *и*

$$Im\ a = \frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m} \cdot \frac{l}{T} - \frac{2m\pi}{l}$$

для некоторых значений $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ \ n = 0, 1, 2, ...$, *то обратный оператор не существует. Оператор* $\bar{L}$ *является самосопряженным. Если обе величины*

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

рациональны, то спектр состоит из бесконечного множества собственных значений, среди которых имеется бесконечное множество бесконечнократных собственных значений. Если хотя бы одна из двух величин

$$\frac{2\pi T}{l^2}, \quad \frac{T \cdot Ima}{l}$$

иррациональна, то спектр оператора $\bar{L}$ *заполняет всю числовую ось* $(-\infty, +\infty)$.

Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, Гылым, 1993. С.28 – 56.

2. **Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.** // Математический журнал. 2007. Т.7. №4(26), С.44 – 50.

3. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. М., 1977. Т.1. С.278 – 285.

4. **Рудин У.** Функциональный анализ. М., 1975. С.391 – 399.

5. **Вейль Г.** Избранные труды. М., 1984. С.510.

Поступила в редакцию 14.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 50 – 58*

УДК 517.95

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Б. Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов

Институт математики, информатики и механики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 koshanov@list.ru

В данной работе в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности. Отметим, что полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

1. Вспомогательные утверждения и основной результат.

Постановка задачи. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset R^n$ (n – натуральное число, δ – положительное число) с границей $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{(i)}}{\partial \overrightarrow{n}_x^{(i)}} u\right|_{|x|=\delta} = 0, \ \ i = 0, 1, 2, ..., m-1, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}_x}$ – нормальная производная вдоль $\partial\Omega_\delta$, Δ – оператор Лапласа.

Для этого сформулируем несколько известных утверждений.

Утверждение 1. *Существует единственная функция* $G_{2m,n}(x, y)$ *такая, что*

1) удовлетворяет условиям

$$\Delta_x^m G_{2m,n}(x, y) = \delta(x - y), \ \ \left.\frac{\partial^{(i)}}{\partial \overrightarrow{n}_x^{(i)}} G_{2m,n}(x, y)\right|_{|x|=\delta} = 0, \ \ i = 0, 1, 2, ..., m-1,$$

Keywords: *polyharmonic equation, Dirichlet problem, Green function*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J67, 31A30, 31A10

2) при любых $f(y) \in L_2(\Omega_\delta)$ решение задачи (1)–(2) представляется в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_\delta} G_{2m,n}(x,y) f(y) dy\,,$$

3)функция $G_{2m,n}(x,y)$ является симметричной, т.е. при любых $x, y \in \Omega_\delta$ выполняется тождество

$$G_{2m,n}(x,y) = G_{2m,n}(y,x),$$

где $\delta(x-y)$ – дельта функция Дирака.

Такая функция $G_{2m,n}(x,y)$ называется функцией Грина задачи (1) – (2).

В целях сокращения объема статьи в дальнейшем считаем, что n – нечетное число. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1 [1,2]. *Фундаментальное решение уравнения (1) при нечетных n задается формулой*

$$\varepsilon_{2m,n} = c_{2m,n} |x-y|^{2m-n}\,. \tag{3}$$

Выражение для константы $c_{2m,n}$ будет указано ниже.

Лемма 2 [3]. *а) При любых $x, y \in \Omega_\delta$ выполняется тождество*

$$\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|_{\forall x,y\in\Omega_\delta} = \left|\frac{x}{\delta}\right| \left|y - \frac{x}{|x|^2}\,\delta^2\right|_{\forall x,y\in\Omega_\delta}; \tag{4}$$

б) При $x \in S_\delta$ и для любого $y \in \Omega_\delta$ выполняется тождество

$$\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|_{|x|=\delta, \forall y\in\Omega_\delta} = |y-x|\Big|_{|x|=\delta, \forall y\in\Omega_\delta}. \tag{5}$$

Доказательство. В единичном шаре $(\delta = 1)$ справедливо равенство

$$|x|\left|y - \frac{x}{|x|^2}\right| = \left||x|y - \frac{x}{|x|}\right| = \left[|x|^2|y|^2 - 2(x,y) + 1\right]^{1/2} = \left||y|x - \frac{y}{|y|}\right| = |y|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\right|.$$

Откуда следуют утверждения леммы.

Справедлива

Теорема 1. *А) В случае нечетного n функция Грина задачи Дирихле (1) – (2) представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y), \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n},$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n}, \tag{7}$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)\, c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n} \cdot \left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1} \cdot \frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\ k = 2,...,m, \tag{8}$$

$$c_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)!\,2^{m-1}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n}\,. \tag{9}$$

B) Утверждение A) остается справедливым при четных n, *если* $2m < n$.
C) Когда n *– четное и* $2m \geqslant n$, *то функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|, \tag{10}$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n}\ln\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right], \tag{11}$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)\,c_{2m,n}\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\times$$

$$\times\ln\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\ k=2,...,m, \tag{12}$$

$$c_{2m,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}\,. \tag{13}$$

2. Доказательство теоремы 1.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *При всех* $2 \leqslant k \leqslant m$ *выполняется*

$$\Delta^m_x g^k_{2m,n}(x,y) = 0, \tag{14}$$

где

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)\,c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\ k=2,...,m.$$

Доказательство. Функцию $g^k_{2m,n}(x,y)$ можно представить в следующем виде: $g^k_{2m,n}(x,y) = g^1_{2m-2k-2,n}(x,y)\cdot f_{2k-2}(|x|,|y|)$, где $f_{2k-2}(|x|,|y|)$ – многочлен степени $(2k-2)$ от $|x|$.

Нам известно, что $g^1_{2m-2k+2,n}(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta^{m-k+1}_x g^1_{2m-2k+2,n}(x,y) = 0$.

По теореме Альманзи [2] функция $g^1_{2m-2k+2,n}(x,y)$ представляется в виде

$$g^1_{2m,n}(x,y) = \sum_{j=0}^{m-k}|x|^{2j}\psi_j(x), \tag{15}$$

где $\Delta_x\psi_j(x) = 0$.

Поэтому справедливо представление

$$g^k_{2m,n}(x,y) = \sum_{j=0}^{m-k}|x|^{2j}\psi_j(x)\cdot f_{2k-2}(|x|,|y|) = \sum_{j=0}^{m-1}|x|^{2j}\widetilde{\psi}_j(x)\,,$$

где $\widetilde{\psi}_j(x)$ – некоторые гармонические функции, являющиеся линейными комбинациями функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{m-k}(x)$.

Следовательно, согласно теореме Альманзи функция $g^k_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет полигармоническому уравнению (14), т.е. $\Delta^m_x g^k_{2m,n}(x,y)=0$.

Сформулируем вначале утверждения для производных первого порядка.

Лемма 4. *При всех $k \geqslant 2$ выполняется*

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\,g^k_{2m,n}(x,y) = I^{2m}_1 g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y) + I^{2m}_0 g^k_{2m-2,n}(x,y), \tag{16}$$

где

$$I^{2m}_1 = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\cdot|x|\,, \tag{17}$$

$$I^{2m}_0 = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)\,. \tag{18}$$

Заметим, что I^{2m}_1, I^{2m}_0 не зависят от индекса k. В дальнейшем этот факт будет использоваться.

Доказательство. Пусть $k=1$, тогда имеем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial|x|}g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\frac{\partial}{\partial|x|}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n} =$$

$$= (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\,. \tag{19}$$

Для $k=2$ функция

$$g^2_{2m,n}(x,y) = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)(2-1)}g^1_{2m-2,n}(x,y), \tag{20}$$

поэтому ее производные примут вид

$$\frac{\partial}{\partial|x|}g^2_{2m,n}(x,y) = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(2-1)}\right)\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)+$$
$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\frac{\delta^2}{(-2)(2-1)}\cdot(2m-2-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\times$$
$$\times\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y) = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(2-1)}\right)\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)*1+$$
$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)g^2_{2m-2,n}(x,y). \tag{21}$$

Для $k=3$ функция

$$g^3_{2m,n}(x,y) = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)(3-1)}g^2_{2m-2,n}(x,y), \tag{22}$$

поэтому ее производные примут вид

$$\frac{\partial}{\partial|x|}g^3_{2m,n}(x,y) = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(3-1)}\right)\cdot g^2_{2m-2,n}(x,y)+$$

$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\frac{\delta^2}{(-2)(3-1)}\times$$

$$\times\left\{(2m-2-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(2-1)}\right)\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)+\right.$$

$$\left.+(2m-2-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)g^2_{2m-4,n}(x,y)\right\}=$$

$$=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(3-1)}\right)\cdot g^2_{2m-2,n}(x,y)*2+$$

$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|})g^3_{2m-2,n}(x,y). \tag{23}$$

Предположим, что формула (16) верна при $k-1$. Докажем ее по индукции для k. По определению

$$g^k_{2m,n}(x,y)=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)(k-1)}g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y). \tag{24}$$

Отсюда в силу индуктивного предположения верно представление для производной

$$\frac{\partial}{\partial|x|}g^k_{2m,n}(x,y)=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(3-1)}\right)\cdot g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y)+$$

$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\frac{\delta^2}{(-2)(k-1)}\times$$

$$\times\left\{(2m-2-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(k-2)}\right)\cdot g^{k-2}_{2m-4,n}(x,y)\cdot(k-2)+\right.$$

$$\left.+(2m-2-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)g^{k-1}_{2m-4,n}(x,y)\right\}=$$

$$=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(\frac{|x|}{(k-1)}\right)\cdot g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y)*(k-1)+$$

$$+(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2-\frac{xy}{|x|}\right)g^k_{2m-2,n}(x,y)=I^{2m}_1g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y)+I^{2m}_0g^k_{2m-2,n}(x,y). \tag{25}$$

Таким образом, лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\,\varepsilon_{2m,n}(x,y)=P^{2m}_1\varepsilon_{2m-2,n}(x,y), \tag{26}$$

где

$$P^{2m}_1=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(|x|-\frac{xy}{|x|}\right). \tag{27}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\,\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\frac{\partial}{\partial|x|}\Big|x-y\Big|^{2m-n}=$$

$$=(2m-n)c_{2m,n}\Big|x-y\Big|^{2m-2-n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j(x_j-y_j)}{|x|}=$$

$$= (2m-n)c_{2m,n}\Big|x-y\Big|^{2m-2-n}\left(|x|-\frac{xy}{|x|}\right) = P_1^{2m}\varepsilon_{2m-2,n}(x,y).$$

Лемма 5 доказана.

Связь между I_1^{2m}, I_0^{2m}, P_1^{2m} будет указана в следующем следствии.

Следствие 1. *Для функции* I_1^{2m}, I_0^{2m}, P_1^{2m} *выполняется следующее соотношение:*

$$I_1^{2m} + I_0^{2m} = P_1^{2m}. \tag{28}$$

Далее вычислим производные вторых и высших порядков фундаментального решения $\varepsilon_{2m,n}(x,y)$.

Лемма 6. *Справедливо представление*

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y) = P_1^{2m}P_1^{2m-2}\varepsilon_{2m-4,n}(x,y) + S_1^{2m}\varepsilon_{2m-2,n}(x,y), \tag{29}$$

где

$$S_1^{2m} = \frac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m} = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}. \tag{30}$$

Отсюда видно, что S_1^{2m} не зависит от $|x|$. Доказательство леммы 6 основывается на утверждении леммы 5. Действительно, имеем цепочку соотношений

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y) = \frac{\partial}{\partial|x|}\Big(\frac{\partial}{\partial|x|}\varepsilon_{2m,n}(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial|x|}(P_1^{2m}\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)) =$$

$$= P_1^{2m}P_1^{2m-2}\varepsilon_{2m-4,n}(x,y) + S_1^{2m}\varepsilon_{2m-2,n}(x,y).$$

Лемма 6 полностью доказана.

Лемма 7. *При любом* $j \geq 1$ *производная* j *порядка* $\dfrac{\partial^j}{\partial|x|^j}\varepsilon_{2m,n}(x,y)$ *имеет представление:*

$$\frac{\partial^j}{\partial|x|^j}\varepsilon_{2m,n}(x,y) = P_1^{2m}P_1^{2m-2}...P_1^{2m-2j+2}\varepsilon_{2m-2j,n}(x,y)+$$

$$+S_1^{2m}P_1^{2m-2}...P_1^{2m-2j+2}\varepsilon_{2m-2j+2,n}(x,y) + ... + S_1^{2m}S_1^{2m-2}...\varepsilon_{2m-2,n}(x,y), \tag{31}$$

где сумма распространяется по всевозможным различным разложениям натурального числа j *на сумму единиц и двоек.*

Доказательство леммы 7 проведем по индукции. При $j=2$ утверждение леммы 7 указано в лемме 6. Докажем лемму 7 для $j+1$, считая доказанной ее при j :

$$\frac{\partial^{j+1}}{\partial|x|^{j+1}}\varepsilon_{2m,n}(x,y) = \frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{\partial^j}{\partial|x|^j}\varepsilon_{2m,n}(x,y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m}P_1^{2m-2}...P_1^{2m-2j+2}\varepsilon_{2m-2j,n}(x,y) + ... + S_1^{2m}S_1^{2m-2}...\varepsilon_{2m-2,n}(x,y).$$

Вычисление производной $\dfrac{\partial}{\partial|x|}$ от выражения вида $P_1^{2m}S_1^{2m-2}\dots P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)$ дает представление:

$$\frac{\partial}{\partial|x|}(P_1^{2m}S_1^{2m-2}\dots P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m}\right)S_1^{2m-2}\dots P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)+$$

$$+P_1^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial|x|}S_1^{2m-2}\right)\dots P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)+\dots+$$

$$+P_1^{2m}S_1^{2m-2}\dots\left(\frac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m-2\theta+2}\right)\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)+$$

$$+P_1^{2m}S_1^{2m-2}\dots P_1^{2m-2\theta+2}(\frac{\partial}{\partial|x|}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)).$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m}=S_1^{2m}$, $\dfrac{\partial}{\partial|x|}S_1^{2m}=0$, $\dfrac{\partial}{\partial|x|}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)=P_1^{2m-2\theta}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)$, то получаем

$$\frac{\partial}{\partial|x|}(P_1^{2m}S_1^{2m-2}...P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y))=S_1^{2m}S_1^{2m-2}...P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)+...+$$

$$+P_1^{2m}S_1^{2m-2}...S_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)+P_1^{2m}S_1^{2m-2}...P_1^{2m-2\theta+2}P_1^{2m-2\theta}\varepsilon_{2m-2\theta-2,n}(x,y).$$

Таким образом, взятие производной $\dfrac{\partial}{\partial|x|}$ означает либо замену $P_1^{2m-2\theta}$ на $S_1^{2m-2\theta}$ (все, кроме последнего слагаемого), либо добавление множителя $P_1^{2m-2\theta}$ (последнее слагаемое). Это означает, что либо 1 (это $P_1^{2m-2\theta}$) заменяется на 2 ($S_1^{2m-2\theta}$), либо добавляется 1 (это в последнем слагаемом – $P_1^{2m-2\theta}$). Таким образом, каждому разложению натурального j соответствуют разложения числа $(j+1)$, так как единица заменяется на двойку (когда $\dfrac{\partial}{\partial|x|}P_1^{2m-2\theta}=S_1^{2m-2\theta}$), когда добавляется единица (когда $\dfrac{\partial}{\partial|x|}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)=S_1^{2m-2\theta}$). Следовательно, при вычислении $\dfrac{\partial}{\partial|x|}$ от выражений $P_1^{2m}S_1^{2m-2}\dots P_1^{2m-2\theta+2}\varepsilon_{2m-2\theta,n}(x,y)$ возникают слагаемые, соответствующие всевозможным различным разложениям натурального числа $(j+1)$, что доказывает лемму 7.

Теперь переходим к вычислению вторых, третьих и высших порядков производных от функции $g_{2m,n}^k(x,y)$. Последовательное применение формулы

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\,g_{2m,n}^k(x,y)=I_1^{2m}g_{2m-2,n}^{k-1}(x,y)+I_0^{2m}g_{2m-2,n}^k(x,y) \tag{32}$$

дает утверждение следующей леммы.

Лемма 8. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\,g_{2m,n}^k(x,y)=J_1^{2m}g_{2m-2,n}^{k-1}(x,y)+J_0^{2m}g_{2m-2,n}^k(x,y)+$$

$$+I_1^{2m}(I_1^{2m-2}g_{2m-4,n}^{k-2}(x,y)+I_0^{2m-2}g_{2m-4,n}^{k-1}(x,y))+$$

$$+I_0^{2m}(I_1^{2m-2}g_{2m-4,n}^{k-1}(x,y)+I_0^{2m-2}g_{2m-4,n}^{k}(x,y)), \tag{33}$$

где

$$J_1^{2m}=\frac{\partial}{\partial|x|}I_1^{2m}=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\left(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\right), \tag{34}$$

$$J_0^{2m}=\frac{\partial}{\partial|x|}I_0^{2m}=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\frac{|y|^2}{\delta^2}. \tag{35}$$

Следствие 2. *Имеет место следующее соотношение:*

$$J_1^{2m}+J_0^{2m}=S_1^{2m}=(2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\,. \tag{36}$$

Лемма 9. *При любом* $j \geqslant 1$ *сумма производных* $\dfrac{\partial^j}{\partial|x|^j}\, g^k_{2m,n}(x,y)$ *порядков* j *имеет представление:*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^j}{\partial|x|^j}\, g^k_{2m,n}(x,y) = P_1^{2m} P_1^{2m-2} \ldots P_1^{2m-2j+2} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2j,n}(x,y) + \tag{37}$$

$$+ S_1^{2m} P_1^{2m-2} \ldots P_1^{2m-2j+2} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2j+2,n}(x,y) + ... + S_1^{2m} S_1^{2m-2} ... \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2,n}(x,y).$$

Здесь учтены соотношения из следствий 1 и 2 и формулы (30), т.е.

$$I_1^{2m} + I_0^{2m} = P_1^{2m}, \quad J_1^{2m} + J_0^{2m} = S_1^{2m}, \quad S_1^{2m} = \frac{\partial}{\partial|x|} P_1^{2m} = (2m-n)\frac{c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}.$$

Доказательство леммы аналогично, как в лемме 7.

Далее произведем проверку краевых условий задачи (1)–(2). Первое краевое условие на границе имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} g^k_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = g^1_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} + g^2_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} + ... + g^m_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} =$$

$$= g^1_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} \equiv \varepsilon_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta}.$$

В силу лемм 4, 5 и следствия 1 получаем справедливость второго краевого условия:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial|x|} g^k_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = \sum_{k=1}^{m} [I_1^{2m} g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y) + I_0^{2m} g^k_{2m-2,n}(x,y)]|_{|x|=\delta} =$$

$$= I_1^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} + I_0^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} =$$

$$= [I_1^{2m} + I_0^{2m}] g^1_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = P_1^{2m} \varepsilon_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} \equiv \frac{\partial}{\partial|x|} \varepsilon_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta}.$$

Теперь в утверждении леммы 8 берем сумму по k от 1 до m:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial|x|^2} g^k_{2m,n}(x,y) = \sum_{k=1}^{m} [J_1^{2m} g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y) + J_0^{2m} g^k_{2m-2,n}(x,y) +$$

$$+ I_1^{2m}(I_1^{2m-2} g^{k-2}_{2m-4,n}(x,y) + I_0^{2m-2} g^{k-1}_{2m-4,n}(x,y)) + I_0^{2m}(I_1^{2m-2} g^{k-1}_{2m-4,n}(x,y) + I_0^{2m-2} g^k_{2m-4,n}(x,y))] =$$

$$= J_1^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2,n}(x,y) + J_0^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2,n}(x,y) + I_1^{2m}(I_1^{2m-2} \sum_{k=1}^{m} g^{k-2}_{2m-4,n}(x,y) +$$

$$+ I_0^{2m-2} \sum_{k=1}^{m} g^{k-1}_{2m-4,n}(x,y)) + I_0^{2m}(I_1^{2m-2} \sum_{k=1}^{m} g^{k-1}_{2m-4,n}(x,y) + I_0^{2m-2} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-4,n}(x,y)).$$

Далее, подставляя граничное значение при $|x| = \delta,$ получаем третье краевое условие:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial|x|^2} g^k_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = J_1^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^{k-1}_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} + J_0^{2m} \sum_{k=1}^{m} g^k_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} +$$

$$+I_1^{2m}(I_1^{2m-2}\sum_{k=1}^{m} g_{2m-4,n}^{k-2}(x,y)|_{|x|=\delta} + I_0^{2m-2}\sum_{k=1}^{m} g_{2m-4,n}^{k-1}(x,y)|_{|x|=\delta})+$$

$$+I_0^{2m}(I_1^{2m-2}\sum_{k=1}^{m} g_{2m-4,n}^{k-1}(x,y)|_{|x|=\delta} + I_0^{2m-2}\sum_{k=1}^{m} g_{2m-4,n}^{k}(x,y)|_{|x|=\delta}) =$$

$$= (J_1^{2m} + J_1^{2m})g_{2m-2,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} + I_1^{2m}(I_1^{2m-2} + I_0^{2m-2})g_{2m-4,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta}+$$

$$+I_0^{2m}(I_1^{2m-2} + I_0^{2m-2})g_{2m-4,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} =$$

$$= S_1^{2m}g_{2m-2,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} + (I_1^{2m} + I_0^{2m})P_1^{2m-2}g_{2m-4,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} =$$

$$= S_1^{2m}g_{2m-2,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} + P_1^{2m}P_1^{2m-2}g_{2m-4,n}^{1}(x,y)|_{|x|=\delta} =$$

$$= S_1^{2m}\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} + P_1^{2m}P_1^{2m-2}\varepsilon_{2m-4,n}(x,y)|_{|x|=\delta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta}.$$

Утверждения B), C) доказываются также, как было доказано утверждение A).

3. Замечание. Явные представления функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеются в работе [4]. Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областей [5–7]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами. Данная тематика исследований предложена академиком НАН РК Кальменовым Т.Ш.

Цитированная литература

1. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частыми производными. М., 1966.
2. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
3. **Бицадзе А.В.** Уравнения математической физики. М., 1985.
4. **Begehr H., Vanegas C.J.** // Math. Nachr. 2006. V.279. P. 38 – 57.
5. **Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.** Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Препринт. Алматы, 2005. 54с.
6. **Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д.** // Доклады НАН РК. 2006. №5, С. 9 – 12.
7. **Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D.** // International Congress of Mathematicians. Madrid, 2006. P. 416.

Поступила в редакцию 12.10.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 59 – 63*

УДК 531.36

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

И. У. Махамбаева

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата
120008 Кызылорда ул. Жахаева, 67 aturesh@mail.ru

Найдены стационарные решения фотогравитационной задачи и установлено, что в отличие от классической задачи существуют целые семейства точек, которые образуют устойчивые облачные скопления частиц газопылевых облаков или микрометеоритных частиц.

Как известно, в природе существует огромное количество двойных звезд, расстояния между компонентами которых составляют несколько десятков тысяч астрономических единиц, а периоды их обращения столь велики, что не удается обнаружить их орбитальное движение [1–3]. Следовательно, на достаточно большом промежутке времени процессов образования межзвездных газопылевых облаков подобные звезды двойной системы практически можно считать неподвижными и изолированными из-за их достаточной удаленности от других звездных систем [2,4]. Тогда в качестве динамической модели частиц в силовом поле двойной звезды можно рассматривать задачу двух неподвижных центров [4], но уже в качественно новой постановке: учитывать влияние сил светового давления со стороны излучающих тел, которые могут быть не только соизмеримыми с силами гравитации, но и значительно их превосходящими [5–7]. В такой же постановке задача рассматривается в работе [8], где проводится полное интегрирование системы ее дифференциальных уравнений.

В настоящей работе впервые найдены необходимые и достаточные условия существования трехпараметрического семейства стационарных точек системы – положений равновесия частиц. Получены необходимые условия устойчивости по Ляпунову и показано, что в отличие от классического варианта задачи существуют целые семейства точек либрации, в которых образуются устойчивые облачные скопления частиц межзвездной среды.

Установлено, что на определенном многообразии рассматриваемые точки являются устойчивыми в нелинейном приближении.

Keywords: *gas-dust, stationary, micro meteorite, three parameters family of stationary points, Lyapunov's stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

Введение некоторого нового физического параметра, определяемого как отношение удельных мощностей излучения центров, который следует рассматривать как обобщенную характеристику гравитационно-репульсивного поля, позволяет сделать более ясную и физически наглядную интерпретацию области устойчивости рассматриваемых точек.

Движение частицы P изучим в барицентрической системе координат с осью Ox, проходящей через звезды S_1 и S_2 и осью Oy, перпендикулярной Ox; ось Oz дополняет систему до правой. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс звезд m_1 и m_2 примем за единицу массы, расстояние между центрами S_1 и S_2 – за единицу длины.

Тогда уравнения движения частицы газопылевого облака межзвездной среды в поле двойной звезды можно записать так [4,5]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

где $U = (1 - Q_1)\dfrac{m_1}{r_1} + (1 - Q_2)\dfrac{m_2}{r_2}$ – силовая функция,
$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}$,
$Q_1 = \frac{G_1}{fm_1} \times \frac{S}{m_0}, \quad Q_2 = \frac{G_2}{fm_2} \times \frac{S}{m_0}$ – коэффициенты редукции, зависящие от интенсивности излучения звезды и парусности частицы, G_i, m_i – мощность излучения и масса $i-$ той звезды $(i = 1, 2)$; S и m_0 – площадь поперечного сечения и масса частицы, движение которой излучается, f – гравитационная постоянная, а r_1, r_2 – расстояния от центров до точек $S_1(O, O, x_1)$ и $S_2(O, O, x_2)$, в которых расположены звезды. Переходя к безразмерным массам, имеем

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu, \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1 - m_2}{m_1 + m_2} = 1 - \mu.$$

Если поместить начало O координатных осей в центр масс системы из двух звезд, то координаты расположения звезд на оси x определим из следующих формул:

$$(1 - \mu)x_1 + \mu x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = 1,$$

так как $x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1 - \mu$.

Теперь поставим задачу определения координат положений равновесия частицы, которая приводит к отысканию решения системы следующих алгебраических уравнений относительно x, y, z :

$$(A + B)y = 0, \quad (A + B)z = 0, \quad Af_1 + Bf_2 = 0, \tag{2}$$

где $\quad A = \frac{(1-Q)(1-\mu)}{r_1^3}, \quad B = \frac{(1-Q_2)\mu}{r_2^3}, \quad f_1 = (x + \mu), \quad f_2 = (x + \mu - 1).$

Легко показать, что последняя система (2) допускает решение только тогда, когда $y = z = 0$. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к решению трехпараметрического алгебраического уравнения седьмого порядка относительно x, т.е.

$$\frac{(1 - Q)(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} + \frac{(1 - Q_2)\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3} = 0, \tag{3}$$

где $r_1 = |x + \mu|, \quad r_2 = (x + \mu - 1)$.

Для исследования на устойчивость равновесных состояний частиц введем возмущения по формулам

$$\xi = x - x^*, \quad \eta = y - y^*, \quad \zeta = z - z^*,$$

которые подставим в исходные уравнения движения (1), называемые уравнениями невозмущенного движения частицы, и разложим в ряд их правые части. В результате имеем

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big)_* \xi + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\Big)_* \eta + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\Big)_* \zeta + ...,\\
\ddot{\eta} &= \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\Big)_* \xi + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big)_* \eta + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\Big)_* \zeta + ...,\\
\ddot{\zeta} &= \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\Big)_* \xi + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\Big)_* \eta + \Big(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big)_* \zeta + ...
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для изолированной двойной звезды решение вопроса об устойчивости положения равновесия частицы сводится к рассмотрению лишь одного уравнения

$$\ddot{\xi} + c_1 \xi = f(\xi), \tag{5}$$

решение которого при $f(\xi) = 0$ имеет вид

$$\zeta = \zeta_0 \cos\Big(\sqrt{c_1} \cdot t\Big). \tag{6}$$

Последняя величина будет ограниченной (невозрастающей) вещественной функцией, если выполнено условие

$$c_1 = -2\frac{(1-Q_1)(1-\mu)}{|x+\mu^3|} - 2\frac{(1-Q_2)\mu}{|x+\mu-1|^3} \geq 0.$$

Следовательно, необходимое условие устойчивости положений равновесия изучаемой частицы можно записать в следующем виде:

$$(1-Q_1)\frac{(1-\mu)}{|x+\mu^3|} + (1-Q_2)\frac{\mu}{|x+\mu-1|^3} \leq 0. \tag{7}$$

Для получения более полного ответа на вопрос об устойчивости [9] стационарных состояний частицы выпишем уравнения возмущенного движения с привлечением нелинейных членов:

$$\ddot{\xi} + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 = 0, \tag{8}$$

где

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{2(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{2(1-Q_2)\mu}{r_2^3},\\
c_2 &= -\frac{6(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^4} + \frac{6(1-Q_2)\mu}{r_2^4},\\
c_3 &= -\frac{24(1-Q_1)(1-\mu)}{r_1^5} - \frac{24(1-Q_2)\mu}{r_2^5}.
\end{aligned}
$$

Записав (8) в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -c_1x_1 - c_2x_2^2 - c_3x_1^3 \tag{9}$$

и построив знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2)$ Ляпунова, убеждаемся в том, что ее производная по времени $\dot{V}$ в силу уравнений (8) при $c_1 = 1$ равна нулю, что гарантирует устойчивость по Ляпунову [6] рассматриваемых положений равновесия в строго нелинейной постановке [9]. Для введения в рассмотрение параметра k ($k = Q_1/Q_2$), обращаясь к формуле (7), нетрудно установить, что необходимые условия устойчивости положения равновесия для внутренних и внешних точек имеют вид

$$\frac{k(1-\mu)r_2^2 \mp \mu r_1^2}{(1-\mu)r_2^2 \mp \mu r_1^2}[(1-\mu)r_2^3 + \mu r_1^3] - [k(1-\mu)r_2^3 - \mu r_1^3] \leq 0. \tag{10}$$

Полученные выражения позволяют определить область устойчивости частиц газопылевого облака в поле двойных звезд, которые составляют более половины известных звездных систем. Решение неравенств (10) для произвольных фиксированных значений μ является чрезвычайно сложной задачей, так как требует анализа двухпараметрического алгебраического уравнения 7-го порядка относительно одного из радиусов или x.

Рассмотрим наиболее интересный с точки зрения приложений случай, когда массовые параметры звезд одинаковы, что характерно для двойных звездных систем [2,3]. Совместное рассмотрение неравенств (10) при $\mu = 1/2$ позволяет установить область устойчивости по Ляпунову рассматриваемых положений равновесия частиц в плоскости (k, z) (см.рис.1).

Как видим из рисунка, в зависимости от соотношения мощностей излучения звезд каждой фиксированной бинарной системы область существования (например, для $G_1 \geq G_2$), в основном, расположена ближе ко второму компоненту звездной пары, у которого мощность излучения сравнительно меньше. В окрестности каждой из точек плоскости (k, z) может быть расположено огромное количество частиц (в зависимости от значений их парусности), образуя устойчивые скопления газопылевых облаков.

Разработана программа, позволяющая строить область устойчивости для произвольных значений параметров системы (10).

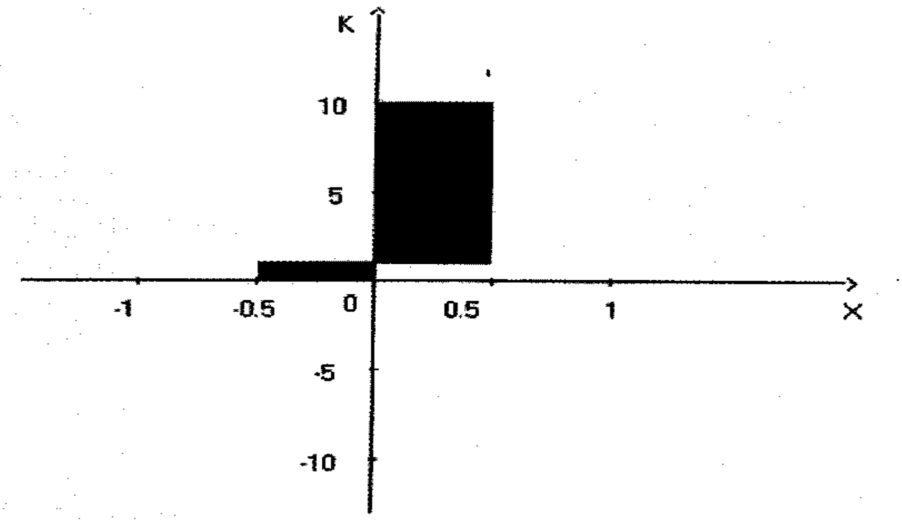

Рис. 1: Область (заштрихована) устойчивости стационарных решений для $\mu = 1/2$.

Практическая значимость результатов работы не исчерпывается лишь динамикой частиц межзвездной материи. Она может быть использована в качестве основной математической модели при изучении движения космических аппаратов с солнечным парусом, а также кометных форм и малых планет в системе Солнце-Юпитер [2,3,5].

Цитированная литература

1. **Ачекян Т. А.** Звезды галактики. Метогалактика. М., 1981.

2. **Куликовский П. Г.** Звездная астрономия. М., 1985.
3. **Шкаловский И. С.** Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М., 1984.
4. **Дубошин Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1975.
5. **Kunitsin A. L., Tureshbaev A. T.** // Celest. Mech. 1985. V.35. P.105 – 112.
6. **Турешбаев А. Т.** // Письма в Астрон.журн. 1986. Т. 12, №9. С.722 – 725.
7. **Турешбаев А. Т., Махамбаева И.У.** // Вестник КазНУ, 2002. №5, С.109 – 114.
8. **Беков А. А.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2004. С.8 – 11.
9. **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения. М., 1980.

Поступила в редакцию 10.02.2008 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 64 – 73*

УДК 517.946

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

М.Б. Муратбеков, Ж.А. Серикбаев

Таразский институт МКТУ
080000 Тараз ул. Асимова, 28 szhcit@rambler.ru

Рассмотрен класс дифференциальных уравнений второго порядка с переменным операторным коэффициентом. Доказана разделимость и существование обратного оператора.

1. Введение и формулировка основных результатов

В настоящей работе изучаем вопросы разделимости и гладкости решений сингулярных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, здесь сингулярность означает, что уравнение задано в неограниченной области, а его коэффициенты могут иметь неограниченный рост в бесконечности. К необходимости исследования сингулярных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами приводит ряд задач, возникающих в теоретической физике, гидро- и газодинамике, теории поверхностей и оболочек.

Обзор литературы показывает, что для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами изучены следующие два случая:

1) полуограниченные дифференциальные операторы с операторными коэффициентами,

2) неполуограниченные дифференциальные операторы с операторными коэффициентами.

Первый случай хорошо изучен: при этом были разработаны методы исследования, которые доведены ныне до классического совершенства и подробно изложены в известных работах Б.М. Левитана [1], А.Г. Костюченко [2], М. Отелбаева [3], И.Г. Гасымова [4] и др.

Второй случай исследован менее подробно. Данный случай изучался в работах М.Б. Муратбекова с соавторами [5-8], К.Н. Оспанова [9], А. Биргебаева[10] и др.

Настоящая статья относится ко второму случаю.

Пусть H – абстрактное сепарабельное пространство Гильберта, где норма определена равенством $\|u\|_H =< u, u >^{1\backslash 2}$. Обозначим через $H_1 = L_2(R, H)$ гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(R, H)$ множества финитных бесконечно гладких вектор-функций, определенных на $R(-\infty, +\infty)$, со значением в H по норме

$$\|u(y)\|_{H_1} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|u(y)\|_H^2 dy \right)^{1/2} ,$$

Keywords: *differential equation with variable operator coefficient, divides and existence of inverse operator*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

соответствующей скалярному произведению

$$< u(y), v(y) >_{H_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} < u(y), v(y) >_H \, dy.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -u''(y) + k(y)A(y)u + ia(y)A^{\alpha}(y)u + c(y)u,$$

определенный на множестве $C_0^{\infty}(R, H)$. Замыкание L в норме H_1 также обозначим через L. Здесь A – положительно определенный самосопряженный оператор, зависящий от переменной y в гильбертовом пространстве H, с вполне непрерывным обратным, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, $k(y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция в R, $k(0) = 0$ и $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, $a(y), c(y)$ – непрерывные функции в R, i – мнимая единица.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*
i) $|a(y)| \geq \delta_0 > 0$, $c(y) \geq \delta > 0$;
ii) $\sup\limits_{|y-t|\leq 1} \frac{a(y)}{a(t)} \leq c_0 < \infty$; $\sup\limits_{|y-t|\leq 1} \frac{c(y)}{c(t)} \leq c_1 < \infty$;
iii) $\sup\limits_{|y-t|\leq 1} \|(A^{\alpha}(y) - A^{\alpha}(t))A^{-\alpha}(t)\|_H \leq o(1)$, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$;
iv) $c(y) \leq c_0 a^2(y)$ *для любого* $y \in R$, $c_0 - const$.

Тогда для оператора $L + \lambda E$ *при достаточно больших* $\lambda > 0$ *существует ограниченный обратный оператор* $(L + \lambda E)^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия i)-iii). Тогда для любого* $u \in D(L)$ *справедлива оценка*

$$\left\|u'(y)\right\|_{H_1} + \|ia(y)A^{\alpha}(y)u\|_{H_1} + \|c(y)u\|_{H_1} \leq c\|Lu\|_{H_1}.$$

2. Вспомогательные леммы и неравенства.

Рассмотрим оператор

$$l_{n,\Delta_i}u \equiv -u''(y) + k(y)\lambda_n(y_j)u + ia(y)\lambda_n^{\alpha}(y_j)u + c(y)u, \quad n = 1, 2, ...,$$

$$u(\Delta_i^-) = u(\Delta_i^+) = 0,$$

определенный на множестве $C_0^{\infty}(\bar{\Delta}_i)$, где $d < \lambda_n < \infty$, $d > 0$, $R = \cup\Delta_i$, $\Delta_i = (i-1, i+1)$, Δ_i^-, Δ_i^+ – соответственно левый и правый концы интервала Δ_i, $y_j \in \bar{\Delta}_i$. Отметим, что оператор l_{n,Δ_i} допускает замыкание, замыкание также обозначим через l_{n,Δ_i}.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие i). Тогда*
а) $\|l_{n,\Delta_i}u\|_2 \geq \lambda_n^{\alpha}\delta_0\|u\|_2$, $u \in D(l_{n,\Delta_i})$, $n = 1, 2, ...$;
б) $c\|l_{n,\Delta_i}u\|_2 \geq (\|u'\|_2 + \left\|\sqrt{c(y)}u\right\|_2)$, $u \in D(l_{n,\Delta_i})$, $n = 1, 2, ...$, *где* $\|u(y)\|_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dy\right)^{1/2}$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие i). Тогда существует непрерывный обратный оператор* l_{n,Δ_i}^{-1}, *определенный в* $L_2(\bar{\Delta}_i)$.

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие i). Тогда при* $\lambda > 0$ *справедливы неравенства*
а) $\left\|(l_{n,\Delta_i} + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \frac{c}{\lambda^{1/2}}$;

б) $\left\|\frac{d}{dy}(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le \frac{c}{\lambda^{1/4}}$;

в) $\left\|(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{2\to 2} \le \frac{1}{\lambda_n^{2\alpha}(y_j)\cdot \min\limits_{y\in\bar{\Delta}_i}|c(y)|^2}$;

г) $\left\|(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{2\to 2} \le \frac{1}{\lambda_n^{2\alpha}(y_j)\cdot\delta_0}$;

д) $\left\|(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\right\|_{H\to H} \le \frac{\sqrt{2}}{c(y)+\lambda}$, *где* $\|V\|_{H\to H}=\sup\limits_{x\in D(V)}\frac{\|Vx\|_H}{\|x\|_H}$.

Доказательство лемм 2.1-2.3. Используя выкладки и рассуждения, которые использованы в работах [6-8], получаем доказательство лемм 2.1-2.3.

3.О максимальной диссипативности оператора $l_{n,j}$.

В этом пункте рассмотрим оператор

$$(l_{n,j}+\lambda E)u = -u'' + k(y)\lambda_n(y_j)u + ia(y)\lambda_n^{\alpha}(y_j)u + c(y)u,$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty(R)$.

Напомним определение максимально диссипативного оператора.

Определение. *Оператор* A *в гильбертовом пространстве* H *называется диссипативным, если* $Im < Au,u >\ge 0$ *для любого* $u\in D(A)$.

Диссипативный оператор A называется максимально диссипативным, если множество $\{Au+\lambda u:\ u\in D(A)\}$ плотно в H . Справедлива лемма.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда оператор* $l_{n,j}$ *максимально диссипативен.*

Доказательство. Возьмем набор $\{\varphi_i\}$ – неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что $\sum\limits_i {\varphi_i}^2\equiv 1$, $\mathrm{supp}\varphi_{\mathrm{j}}\subset R$, $\mathrm{supp}\varphi_{\mathrm{i}}=\Delta_i$, $\bigcup\limits_i\Delta_i=R$. Через K_0 обозначим оператор, определенный равенством

$$K_0f=\sum_i\varphi_i(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f,\ f\in L_2(R),\quad i=0,\pm1,\pm2,...,$$

где $K_0f\in D(l_{n,j})$, $D(l_{n,j})$ – область определения оператора $l_{n,j}$, $l_{n,\Delta_i}u=-u''(y)+k(y)\lambda_n(y_i)+$ $+ia(y)\lambda_n^\alpha(y_i)+c(y))u$, $u(\Delta_i^-)=u(\Delta_i^+)=0$.

Теперь, действуя на K_0f оператором $(l_{n,j}+\lambda E)$, имеем

$$(l_{n,j}+\lambda E)K_0f=(l_{n,j}+\lambda E)\sum_{\{i\}}\varphi_i(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f=(-\tfrac{d^2}{dy^2}+(k(y)\lambda_n(y_j)+ia(y)\lambda_n^\alpha(y_j)+$$
$$+c(y)))\sum_{\{i\}}\varphi_i(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f=f+\sum_{\{i\}}\varphi_i''(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f+2\sum_i\varphi_i'\tfrac{d}{dy}(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f).$$

Здесь учитывалось, что $\sum\limits_{\{\mathrm{i}\}}{\varphi_i}^2\equiv 1$.

Введем обозначения: $Af=\sum\limits_i\varphi_i''(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f$, $Bf=\sum\limits_i\varphi_i'\frac{d}{dy}(l_{n,\Delta_i}+\lambda E)^{-1}\varphi_i f)$.

Тогда из последнего равенства получим, что $(l_{n,j}+\lambda E)K_0f=f+Af+Bf$.
Из полученного равенства и согласно лемме 2.3 и пункта а) леммы 2.1 при достаточно больших положительных λ оператор $(l_{n,j}+\lambda E)$ в пространстве $L_2(R)$, имеет ограниченный обратный оператор $(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}$, причем справедливо равенство

$$(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}=K_0(E+A+B)^{-1}.$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия i)-ii), iv). Тогда справедливы неравенства:*

а) $\left\|(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2}\le\frac{c}{\lambda^{1/2}}$, $c>0$ *– постоянное число;*

б) $\left\| \frac{d}{dy}(l_{n,j}+\lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le \frac{c}{\lambda^{1/4}}$, $c>0$ *– постоянное число;*
в) $\left\| a(y)\lambda_n^{\alpha}(y_j)(l_{n,j}+\lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c < \infty$ *;*
г) $\left\| c(y)(l_{n,j}+\lambda E)^{-1} \right\|_{2\to 2} \le c < \infty$ *, где* $\|V\|_{2\to 2} = \sup\limits_{x\in D(V)} \frac{\|Vx\|_2}{\|x\|_2}$.

Доказательство. Доказательство пунктов а), б) и в) следует из лемм 2.3 и 3.1.

4. Построение правого обратного оператора для оператора $(L+\lambda E)$.

Рассмотрим оператор

$$(L_j+\lambda E)u \equiv -u'' + k(y)A(y_j)u + ia(y)A^{\alpha}(y_i)u + c(y)u,$$

определенный на множестве $C_0^{\infty}(R,H)$. Оператор $L_j+\lambda E$ допускает замыкание, замыкание также обозначим через $L_j+\lambda E$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие i). Тогда существует ограниченный обратный оператор* $(L_j+\lambda E)^{-1}$ *оператора* $(L_j+\lambda E)$.

Доказательство. Обозначим через $\{e_n\}$ полную ортонормированную систему собственных векторов оператора A . Тогда любой элемент $u(y)\in H_1$ можно представить в виде

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)e_n,$$

причем

$$\|u(y)\|_{H_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(y)\|_2^2.$$

Тогда

$$(L_j+\lambda E)u_m = \sum_{n=1}^{m} (l_{n,j}+\lambda E)u_n e_n,$$

где $u_m = \sum\limits_{n=1}^{m} u_n e_n$, $u_m \xrightarrow{H_1} u$, при $m\to\infty$,
$(l_{n,j}+\lambda E)u \equiv -u'' + k(y)\lambda_n(y_j)u + ia(y)\lambda_n^{\alpha}(y_j)u + c(y)u + \lambda u.$

Далее справедливость утверждения следует из леммы 3.1.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия i)- iii),* $\lambda>0$ *. Тогда справедливы оценки*
а) $\left\| (L_j+\lambda E)^{-1} \right\|_{H_1} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ *;*
б) $\left\| D_y(L_j+\lambda E)^{-1} \right\|_{H_1} \le \frac{c}{\lambda^{1/4}}$, $c>0$ *– постоянное число.*

Доказательство. Из леммы 4.1 следует, что

$$(L_j+\lambda E)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (l_{n,j}+\lambda E)^{-1} f_n e_n. \qquad (1)$$

Отсюда $\left\| (L_j+\lambda E)^{-1}f \right\|_{H_1}^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| (l_{n,j}+\lambda E)^{-1} f_n \right\|_2$.

Далее, пользуясь леммой 3.1 получаем, что

$$\left\| (L_j+\lambda E)^{-1}f \right\|_{H_1}^2 \le \sup \left\| (l_{n,j}+\lambda E)^{-1} \right\|_2^2 \|f\|_{H_1}^2 \le \frac{c}{\lambda} \|f\|_H^2.$$

Аналогичным способом вычисляем норму оператора $D_y(L_j+\lambda E)^{-1}$.

Из (1) имеем

$$D_y(L_j+\lambda E)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}f_n e_n.$$

Отсюда и из пункта б) леммы 3.2 получаем доказательство пункта б) леммы 4.2.

Определим оператор

$$Kf=\sum_j \varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f,\ f\in C_0^\infty(R),$$

где $\{\varphi_j\}$ – набор неотрицательных функций из $C_0^\infty(R)$ таких, что $\sum\limits_j {\varphi_j}^2\equiv 1$, $\operatorname{supp}\varphi_j\subset R$, $\Delta_j=\operatorname{supp}\varphi_j$, $\underset{j}{\cup}\Delta_j=R$.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия i)- iii). Тогда справедливо равенство*

$$(L+\lambda E)Kf=f+Bf+Mf, \tag{2}$$

где $Bf=B_1f+B_2f, Mf=M_1f+M_2f$,
$B_1f=\sum\limits_{\{j\}}\varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f$, $B_2f=2\sum\limits_{\{j\}}\varphi_j D_y(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f$,
$M_1f=\sum\limits_{\{j\}}\varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f$, $M_2f=\sum\limits_{\{j\}}\varphi_j(A^\alpha(y)-A^\alpha(y_j))ia(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f.$

Доказательство. Действуя на оператор Kf оператором $(L+\lambda E)$, имеем

$$(L+\lambda E)Kf=f-\sum_{\{j\}}\varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f-2\sum_{\{j\}}\varphi_j'\big[(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\big]'+$$
$$+\sum_{\{j\}}\varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+\sum_{\{j\}}\varphi_j(A^\alpha(y)-A^\alpha(y_j))ia(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f.$$

Здесь учитывалось, что

$$\sum_{\{j\}}\varphi_j(-\tfrac{d^2}{dy^2}+A(y_j)k(y)+iA^\alpha(y_j)a(y)+c(y))(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f=$$
$$=\sum_{\{j\}}\varphi_j(L_j+\lambda E)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f=\sum_{\{j\}}\varphi_j^2 f=f,$$

где $\sum\limits_{\{j\}}\varphi_j^2\equiv 1.$

Отсюда имеем

$$(L+\lambda E)Kf=f+Bf+Mf.$$

Лемма 4.3 доказана.

Справедлива

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия i)-iii). Тогда при достаточно больших $\lambda>0$ операторы Bf , Mf ограничены, причем*

$$\|B+M\|_{H_1\to H_1}<1.$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы вначале оценим нормы операторов M_1f, M_2f . Имеем

$$\left\|\sum_j\varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2\le$$
$$\le\sum_j\int\limits_{\Delta_j}\left\|\sum_j\varphi_j k(y)(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_H^2 dy.$$

В последнем неравенстве нетрудно проверить, что на $\Delta_j = [j-1, j+1]$ только $\varphi_{j-1}, \varphi_j, \varphi_{j+1}$ не равны 0, следовательно

$$\left\|\sum_j \varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq$$
$$\leq \sum_j \int\limits_{\Delta_j} \left\|\sum_{j-1}^{j+1} \varphi_j k(y)(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_H^2 dy.$$

Отсюда, учитывая известное неравенство $||a|+|b|+|c||^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_j \varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq \\ &\leq 9 \sup_{y\in R}|k(y)|\sup_j\left\|\varphi_j(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)\right\|_H^2 \cdot \sum_{\{j\}} \left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1,\Delta_j}^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Оценим норму $\left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1\to H_1}$.
Согласно равенству (1) имеем

$$\left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 = \left\|A(y_j)\sum_{n=1}^{\infty}(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}f_n e_n\right\|_{H_1}^2, \tag{4}$$

где $f_{n.j} =< \varphi_j f, e_n >_H$, $\{e_n\}$ – ортонормированная система собственных векторов оператора $A(y_j)$.

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2(y_j)\left\|(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}f_{n,j}\right\|_2^2. \tag{5}$$

Учитывая неравенство г) леммы 3.2, из равенства (5) получаем, что

$$\left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2(y_j)\left\|(l_{n,j}+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2\|f_{n,j}\|_2^2 \leq \frac{1}{\delta_0^2}\|f\|_{H_1}^2.$$

Из (5) согласно определению нормы операторов находим

$$\left\|A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq \frac{1}{\delta_0}. \tag{6}$$

Из неравенства (3), учитывая неравенство (6), получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j k(y)(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)A(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq$$
$$\leq \frac{9}{\delta_0}c \sup_{|y-t|\leq 1}\left\|(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)\right\|_H^2\|f\|_{H_1}^2.$$

Отсюда, и пользуясь условием iii), имеем

$$\begin{aligned}&\|M_1 f\|_{H_1}^2 = \left\|\sum_j \varphi_j(A(y)-A(y_j))k(y)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \leq \\ &\leq \tfrac{9}{\delta_0}c \sup_{|y-t|\leq 1}\left\|(A(y)-A(y_j))A^{-1}(y_j)\right\|_H^2\|f\|_{H_1}^2 \leq \tfrac{1}{4}\|f\|_{H_1}^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Теперь вычислим $\|M_2 f\|^2_{H_1}$:

$$\begin{aligned}\|M_2 f\|^2_{H_1} &= \left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) i a(y)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1} = \\ &= \left\|\sum_{\{j\}} i\varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) A^{-\alpha}(y_j) A^\alpha(y_j) a(y)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (6), из (8) имеем

$$\begin{aligned}\|M_2 f\|^2_{H_1} &= \left\|\sum_{\{j\}} \varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) i a(y)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1} \le \\ &\le 9 \sup_j \|\varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) A^{-\alpha}(y_j)\|^2_H \sum_j \left\|a(y) A^\alpha(y_j)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1,\Delta_j}.\end{aligned} \tag{9}$$

Оценим норму $\left\|a(y) A^\alpha(y_j)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|_{H_1,\Delta_j}$. Пользуясь неравенством в) леммы 3.2, получаем, что

$$\left\|a(y) A^\alpha(y_j)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1,\Delta_j} \le \sum_{n=1}^{\infty} \left\|a(y) \lambda_n^\alpha(y_j)(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}\right\|^2_{2\to 2} \|f_{n,j}\|^2_2. \tag{10}$$

Отсюда и в силу леммы 3.2 получаем, что

$$\begin{aligned}&\left\|a(y) A^\alpha(y_j)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1,\Delta_j} \le \\ &\le \sup_{\{n\}} \left\|a(y) \lambda_n^\alpha(y_j)(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n,j}\|^2_H = c_0 \|\varphi_j f\|^2_{H_1},\end{aligned} \tag{11}$$

где $c_0 = \sup_{\{n\}} \left\|a(y) \lambda_n^\alpha(y_j)(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2}$.

Из неравенства (9), учитывая неравенство (11), находим

$$\|M_2 f\|^2_{H_1} \le 9 \sup_{\{j\}} \left\|\varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) A^{-\alpha}(y_j)\right\|^2_H \cdot$$

$$\cdot \sum_{\{j\}} \left\|a(y) A^\alpha(y_j)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f\right\|^2_{H_1,\Delta_j} \le 9 \sup_{\{j\}} \left\|\varphi_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j)) A^{-\alpha}(y_j)\right\|^2_H \|f\|^2_{H_1}.$$

Отсюда согласно условию iii) теоремы 1 получаем, что

$$\|M_2 f\|^2_{H_1} \le 9 \sup_{|y-t|\le 1} \left\|(A^\alpha(y) - A^\alpha(t)) A^{-\alpha}(t)\right\|^2_H \|f\|^2_{H_1} \le \frac{1}{4} \|f\|^2_{H_1}. \tag{12}$$

Объединяя неравенства (7) и (12), находим

$$\|Mf\|^2_{H_1} = \|M_1 f + M_2 f\|^2_{H_1} \le \|M_1 f\|^2_{H_1} + \|M_2 f\|^2_{H_1} \le \frac{1}{4}\|f\|^2_{H_1} + \frac{1}{4}\|f\|^2_{H_1} = \frac{1}{2}\|f\|^2_{H_1}.$$

Отсюда

$$\|M\|_{H_1 \to H_1} \le \frac{1}{2}.$$

Оценим норму оператора $B_1 f = \sum\limits_{\{j\}} \varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f$:

$$\|B_1 f\|_{H_1}^2 = \left\|\sum_j \varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \le c\sup_{\{j\}}\left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_{H_1}^2 \sum_{\{j\}}\|\varphi_j f\|_{H_1}^2.$$

Из последнего неравенства в силу леммы 4.2 находим

$$\|B_1 f\|_{H_1}^2 = \left\|\sum_j \varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \le \frac{c}{\lambda}\|f\|_{H_1}^2. \tag{13}$$

Аналогично,

$$\|B_2 f\|_{H_1}^2 = \left\|2\sum_j \varphi_j'\left[(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right]'\right\|_{H_1}^2 = 2\left\|\sum_j \varphi_j'\left[(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right]'\right\|_{H_1}^2 \le$$
$$\le 2\sup_j \sum_j \left\|\varphi_j D_y (L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_{H_1}^2 \le 2c\cdot\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_{H_1}^2.$$

Отсюда и из неравенства (13) следует, что

$$\|Bf\|_{H_1}^2 = \|B_1 f + B_2 f\|_{H_1}^2 = \left\|\sum_j \varphi_j''(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f + 2\sum_j \varphi_j'\left[(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right]'\right\|_{H_1}^2 \le$$
$$\le \left(\frac{c_0}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c_1}{\lambda^{1/4}}\right)\|f\|_{H_1}^2.$$

Здесь можно подобрать $\lambda > 0$ так, чтобы $\frac{c_0}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c_1}{\lambda^{1/4}} \le \frac{1}{3}$.
Отсюда следует, что

$$\|B+M\|_{2\to 2} \le \|B\| + \|M\| \le c < 1.$$

Лемма 4.4 доказана.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия i)-iii) и пусть* $\|B+M\|_{2\to2} < 1$. *Тогда*

$$(L+\lambda E)^{-1} = K[E+B+M]^{-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Существование правого обратного оператора $(L+\lambda E)$ следует из равенства (2) и леммы 4.4. Пользуясь выкладками и рассуждениями, которые были использованы в работе [7], получаем единственность представления (14).
Лемма 4.5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из утверждения леммы 4.5 следует доказательство теоремы 1.

5. Разделимость оператора.

Доказательство теоремы 2. Из представления (14) видно, что оператор $c(y)(L+\lambda E)^{-1}$ ограничен (или неограничен) вместе с оператором $c(y)K(E+B+M)^{-1}$. Поэтому необходимо оценить норму оператора $c(y)K(E+B+M)^{-1}$:

$$\left\|c(y)K(E+B+M)^{-1}\right\|_{H_1}^2 = \left\|c(y)\sum_j \varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E+B+M)^{-1}f\right\|_{H_1}^2 \le$$
$$\le 9\sup_{\{j\}}\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_{H_1}^2\left\|(E+B+M)^{-1}f\right\|_{H_1}^2.$$

Из последнего неравенства имеем

$$\left\|c(y)K(E+B+M)^{-1}\right\|^2_{H_1\to H_1}\le 9\sup_{\{j\}}\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H_1}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что для доказательства ограниченности оператора $c(y)K(E+B+M)^{-1}$ осталось показать ограниченность $\sup\limits_{\{j\}}\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H_1\to H_1}$.

Оценим норму:

$$\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}f\right\|^2_{H_1}\le\left\|c(y)(L+\lambda E)^{-1}f\right\|^2_{H_1}.$$

Отсюда, и пользуясь представлением (1), получим, что

$$\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}f\right\|^2_{H_1}\le\left\|c(y)\sum_{n=1}^{\infty}(l_{n.j}+\lambda E)^{-1}f_ne_n\right\|^2_{H_1}\le$$

$$\le\sup_{\{n\}}\left\|c(y)(l_{n.j}+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{2\to 2}\|f\|^2_{H_1}. \qquad (16)$$

Согласно определению нормы оператора из (16) находим

$$\left\|c(y)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H_1\to H_1}\le\sup_{\{n\}}\left\|c(y)(l_{n.j}+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H\to H}. \qquad (17)$$

Неравенства (15), (17) и пункт г) леммы 3.2 доказывают ограниченность оператора $c(y)(L+\lambda E)^{-1}$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать ограниченность оператора $ia(y)A^{\alpha}(y)(L+\lambda E)^{-1}$.
Из представления (14) имеем

$$ia(y)A^{\alpha}(y)(L+\lambda E)^{-1}f=ia(y)A^{\alpha}(y)K(E+B+M)^{-1}f=$$

$$=\sum_{\{j\}}(A^{\alpha}(y)-A^{\alpha}(y_j))A^{-\alpha}(y_j)ia(y)A^{\alpha}(y_j)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E+B+M)^{-1}f+ \qquad (18)$$

$$+\sum_{\{j\}}ia(y)A^{\alpha}(y_j)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E+B+M)^{-1}f.$$

Из (18) следует, что

$$\left\|ia(y)A^{\alpha}(y)(L+\lambda E)^{-1}f\right\|^2_{H_1}\le$$

$$\le\left\|\sum_{\{j\}}(A^{\alpha}(y)-A^{\alpha}(y_j))A^{-\alpha}(y_j)ia(y)A^{\alpha}(y_j)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E+B+M)^{-1}f\right\|^2_{H_1}+ \qquad (19)$$

$$+\left\|\sum_{\{j\}}ia(y)A^{\alpha}(y_j)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j(E+B+M)^{-1}f\right\|^2_{H_1}.$$

Норма $\left\|\varphi_ja(y)A^{\alpha}(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H_1\to H_1}$ оценивается таким же образом, как неравенство (10) леммы 4.4, т.е.,

$$\sup_j\left\|\varphi_ja(y)A^{\alpha}(y_j)(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|^2_{H_1\to H_1}\le c<\infty. \qquad (20)$$

Согласно условию iii) имеем

$$\left\| \sum_j (A^\alpha(y) - A^\alpha(y_j))A^{-\alpha}(y_j)ia(y)A^\alpha(y_j)\varphi_j(L_j + \lambda E)^{-1}\varphi_j(E + B + M)^{-1}f \right\|_{H_1}^2 \le c_0 < \infty. \quad (21)$$

Оценка нормы второго слагаемого неравенства (19) следует из неравенства (20).
Отсюда и из (20) имеем

$$\left\| ia(y)A^\alpha(y)\varphi_j(L_j + \lambda E)^{-1} \right\|_{H_1}^2 \le c < \infty.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Цитированная литература

1. **Левитан Б.М.** // Матем. сборник. 1968. Т. 76 (118), № 2. С. 239 – 270.

2. **Костюченко А.Г.** // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 1. С. 21 – 24.

3. **Отелбаев М.** // Украинский матем. журнал. 1976. Т. 28, № 6. С. 763 – 777.

4. **Гасымов М.Г.** // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 4. С. 456 – 458.

5. **Муратбеков М.Б., Тогочуев А.Ж.** // Тезисы докладов конференции матем. и мех. Киргизия, 1987. С. 97 – 98.

6. **Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б.** Спектральные свойства оператора смешанного типа. ЮКТУ, 1997.

7. **Муратбеков М.Б.** Разделимость и спектр дифференциальных операторов смешанного типа. Тараз, 2006.

8. **Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М.** // Дифференциальные уравнения. 2007. Т.43, №1. С. 135 – 137.

9. **Оспанов К.Н.** Коэрцитивная разрешимость и свойства спектра систем типа Бельтрами и Дирака. Автореф. докторской диссертации, Караганда. 2000. 32 с.

10. **Биргебаев А.** // Тезисы докладов VIII Респ. межвуз. научной конф. по матем. и мех. Алма-Ата. 1984. С. 56.

Поступила в редакцию 02.10.2007 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 74 – 81*

УДК 517.92

ОЦЕНКА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧЕК

К.Р. Мырзатаева

Евразийский национальный университет им Л.Н.Гумилева
010000 Астана ул. Мунаитпасова, 5 kalbibi@mail.ru

Для полулинейного дифференциального уравнения второго порядка без сопряженных точек получены двусторонние оценки специальных решений.

1. Введение. Рассмотрим на интервале $I = [a, b]$, $-\infty \le a < b \le \infty$, полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\big(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)\big)' - \vartheta(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{1}$$

где $1 < p < \infty$ и $\rho(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ – непрерывные функции на I.

Решением уравнения (1) называется функция y: $I \to R$, непрерывно дифференцируемая вместе с $\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)$ на I и удовлетворяющая уравнению (1) при всех $t \in I$.

Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на I, если любое его решение имеет на интервале I не более одного нуля.

Известно [1], что если уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале I, то оно имеет решения, нигде не обращающиеся в нуль на I. В силу полулинейности уравнения (1) эти решения будем считать положительными на I.

Далее предположим, что

$$\rho(t) > 0, \;\; \vartheta(t) > 0 \;\; \forall t \in I, \tag{2}$$

тогда на основании вариационного принципа [2] уравнение (1) будет уравнением без сопряженных точек на интервале I.

В предположении (2) в работе [2] приведены условия на ρ и ϑ, при которых существуют решения уравнения (1), удовлетворяющие одному из условий

$$y(t) > 0, \;\; y'(t) > 0 \;\; \forall t \in I, \tag{3}$$

$$y(t) > 0, \;\; y'(t) < 0 \;\; \forall t \in I. \tag{4}$$

Keywords: *half-linear differential equation, disconjugate equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 39A10

Основной целью настоящей статьи является характеризация поведения решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (3) или (4).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть

$$\varphi_+(x) = \inf_{a<t<x} \left[\left(\int_t^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{1-p} + \int_t^x \vartheta(s)ds \right]^{p'-1},$$

$$\varphi_-(x) = \inf_{x<t<b} \left[\left(\int_x^t \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{1-p} + \int_x^t \vartheta(s)ds \right]^{p'-1},$$

$$\psi_+(x) = \inf_{a<t<x} \left[\int_t^x \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_t^x \vartheta(s)ds \right)^{1-p'} \right],$$

$$\psi_-(x) = \inf_{x<t<b} \left[\int_x^t \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_x^t \vartheta(s)ds \right)^{1-p'} \right],$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и функции ρ, υ удовлетворяют условию (2). Для любых $x \in I$ имеет место оценка*

$$1 \leq \psi_\pm(x)\varphi_\pm(x). \tag{5}$$

Доказательство. Докажем (5) для $\psi_+(x)\varphi_+(x)$, а для $\psi_-(x)\varphi_-(x)$ (5) доказывается аналогично.

Пусть ε, $0 < \varepsilon < 1$ – произвольное число, $x \in (a, b)$. По определению инфимума существуют точки $t^* \in (a, x)$, $t_* \in (a, x)$ такие, что

$$\varphi_+(x) \geq (1-\varepsilon) \left[\left(\int_{t^*}^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{1-p} + \int_{t^*}^x \upsilon(s)ds \right]^{p'-1}, \tag{6}$$

$$\psi_+(x) \geq (1-\varepsilon) \left[\int_{t_*}^x \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_{t_*}^x \upsilon(s)ds \right)^{1-p'} \right]. \tag{7}$$

Если $t_* \geq t^*$, то из (6) и (7) имеем

$$\psi_+(x)\varphi_+(x) \geq (1-\varepsilon)^2 \left(\int_{t^*}^x \upsilon(s)ds \right)^{p'-1} \left(\int_{t_*}^x \upsilon(s)ds \right)^{1-p'} \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^2 \left(\int_{t^*}^x \upsilon(s)ds \right)^{p'-1} \left(\int_{t^*}^x \upsilon(s)ds \right)^{1-p'} = (1-\varepsilon)^2.$$

В случае $t^* > t_*$ имеем

$$\psi_+(x)\varphi_+(x) \geq (1-\varepsilon)^2 \left(\int_{t^*}^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{-1} \left(\int_{t_*}^x \rho^{1-p'}(s)ds \right) \geq (1-\varepsilon)^2.$$

Таким образом, $\psi_+(x)\varphi_+(x) \geq (1-\varepsilon)^2$. Откуда в силу произвольности ε, $0 < \varepsilon < 1$, получим (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено условие (2). Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции y: $I \to R$ и $x \in I$ имеют место оценки*

$$|y(x)|^p \leq \inf_{a<t<x} \left\{ \left[\int_t^x \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_t^x \upsilon(s)ds \right)^{1-p'} \right]^{p-1} \int_t^x [\rho(s)|y'(s)|^p + \upsilon(s)|y(s)|^p]ds \right\}, \quad (8)$$

$$|y(x)|^p \leq \inf_{x<t<b} \left\{ \left[\int_x^t \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_x^t \upsilon(s)ds \right)^{1-p'} \right]^{p-1} \int_x^t [\rho(s)|y'(s)|^p + \upsilon(s)|y(s)|^p]ds \right\}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $a < t < x$. На основании формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Гельдера имеем

$$|y(x)| \leq \int_t^x |y'(s)|ds + |y(t)| \leq \left(\int_t^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^x \rho(s)|y'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + |y(t)|. \quad (10)$$

Умножим обе части неравенства (10) на $\upsilon(t)$ и интегрируем по t на промежутке $(z, x) \subset I$, а затем, применяя неравенство Гельдера, получим

$$|y(x)| \int_z^x \upsilon(t)dt \leq \int_z^x \upsilon(t) \left(\int_t^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_t^x \rho(s)|y'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} dt + \int_z^x \upsilon(t)|y(t)|dt \leq$$

$$\leq \int_z^x \upsilon(t)dt \left(\int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^x \rho(s)|y'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_z^x \upsilon(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^x \upsilon(t)|y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\left(\int_z^x \upsilon(t)dt \right)^{p'} \int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds + \int_z^x \upsilon(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^x [\rho(s)|y'(s)|^p + \upsilon(s)|y(s)|^p]ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$|y(x)|^p \leq \left(\int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_z^x \upsilon(t)dt \right)^{1-p'} \right)^{p-1} \int_z^x [\rho(s)|y'(s)|^p + \upsilon(s)|y(s)|^p]ds,$$

откуда в силу произвольности $z \in (a, x)$ имеем (8). Оценка (9) доказывается аналогично, исходя из неравенства

$$|y(x)| \leq \int_x^t |y'(s)|ds + |y(t)|, \; t > x.$$

Лемма 2 доказана.

3.Основные результаты. Решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3), (4), обозначим соответственно через y_+, y_-, а также пусть $\phi(y) = |y|^{p-2}y$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и функции* ρ, υ *удовлетворяют условию (2). Если уравнение (1) имеет решение* $y_+(y_-)$, *удовлетворяющее условию (3) ((4)), то для него имеет место оценка*

$$\rho^{1-p'}(t)\varphi_\pm(t) \geq \pm\frac{d}{dt}\ln y_\pm(t) \geq \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_\pm(t)}\ \forall t \in I. \tag{11}$$

$$\upsilon(t)\psi_\pm^{p-1}(t) \geq \pm\frac{d}{dt}\ln|\rho(t)\phi(y'_\pm(t))| \geq \upsilon(t)\varphi_\pm^{1-p}(t)\ \forall t \in I. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (1) имеет решение y_+, удовлетворяющее условию (3). Интегрируя уравнение (1) при $y = y_+$ на промежутке $(t, x) \subset I$, имеем

$$\rho(x)|y'_+(x)|^{p-1} - \rho(t)|y'_+(t)|^{p-1} - \int_t^x \upsilon(s)|y_+(s)|^{p-1}ds = 0$$

или

$$\rho(x)|y'_+(x)|^{p-1} = \rho(t)|y'_+(t)|^{p-1} + \int_t^x \upsilon(s)|y_+(s)|^{p-1}ds. \tag{13}$$

Умножим обе части (13) на $\rho^{1-p'}(t)$ и интегрируем по t от $z \in (a, x)$ до x, а затем применяем неравенство Гельдера:

$$\rho(x)|y'_+(x)|^{p-1}\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt = \int_z^x \rho^{2-p'}(t)|y'_+(t)|^{p-1}dt + \int_z^x \rho^{1-p'}(t)\int_t^x \upsilon(s)|y_+(s)|^{p-1}dsdt \leq$$

$$\leq \left(\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt)^{\frac{1}{p}}\left(\int_z^x \rho(t)|y'_+(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt(\int_z^x \upsilon(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_z^x \upsilon(s)|y_+(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \left[\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt + \left(\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt\right)^p \int_z^x \upsilon(s)ds\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_z^x \left[\rho(t)|y'_+(t)|^p + \upsilon(t)|y_+(t)|^p\right]dt\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Откуда найдем

$$\rho^{p'}|y'_+(t)|^p \leq \left[\left(\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt\right)^{1-p} + \int_z^x \upsilon(s)ds\right]^{p'-1}\int_z^x \left[\rho(t)|y'_+(t)|^p + \upsilon(t)|y_+(t)|^p\right]dt. \tag{14}$$

Теперь умножим уравнение (1) на $y_+(t)$ и проинтегрируем от $z \in (a, x)$ до x. Тогда

$$\rho(x)|y'_+(t)|^{p-1}y_+(x) - \rho(z)|y'_+(z)|^{p-1}y_+(z) - \int_z^x \left[\rho(t)|y'_+(t)|^p + \upsilon(t)|y_+(t)|^p\right]dt = 0.$$

В силу $\rho(z)|y'_+(z)|^{p-1}y_+(z) > 0$ получим

$$\rho(x)|y'_+|^{p-1}y_+ \geq \int_z^x \left[\rho(t)|y'_+(t)|^p + \upsilon(t)|y_+(t)|^p\right]dt. \tag{15}$$

Из (15) и (8), (15) и (14) соответственно для всех $z \in (a,x)$ имеем

$$\rho(x)|y'_+(x)|^{p-1}y_+(x) \geq |y_+(x)|^p \left[\int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds + \left(\int_z^x \upsilon(s)ds\right)^{1-p'}\right]^{1-p},$$

$$\rho(x)|y'_+(x)|^{p-1}y_+(x) \geq \rho^{p'}(x)|y'_+(x)|^p \left[\left(\int_z^x \rho^{1-p'}(t)dt\right)^{1-p} + \int_z^x \upsilon(s)ds\right]^{1-p'}$$

или тогда получаем

$$\frac{y'_+(x)}{y_+(x)} \geq \rho^{1-p'}(x)[\int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds + (\int_z^x \upsilon(s)ds)^{1-p'}]^{-1}, \tag{16}$$

$$\frac{y'_+(x)}{y_+(x)} \geq \rho^{1-p'}(x)[(\int_z^x \rho^{1-p'}(s)ds)^{1-p} + \int_z^x \upsilon(s)ds]^{p'-1}. \tag{17}$$

Так как неравенства (16) и (17) справедливы для всех $z \in (a,x)$, то имеем

$$\rho^{1-p'}(t)\varphi_+(t) \geq \frac{y'_+(x)}{y_+(x)} \geq \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_+(t)}$$

или

$$\rho^{1-p'}(t)\varphi_+(t) \geq \frac{d}{dt}\ln y_+(x) \geq \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_+(t)},$$

то есть неравенство (11) для y_+ доказано. Аналогично доказывается неравенство для решения y_-, удовлетворяющее условию (4), если оно существует.

Теперь докажем (12). Из (11) имеем

$$\rho^{p'-1}(t)\psi_\pm(t) \geq \frac{y_\pm(t)}{|y'_\pm(t)|} \geq \frac{\rho^{p'-1}(t)}{\varphi_\pm(t)} \ \ \forall t \in I \tag{18}$$

или

$$\rho^{p'-1}(t)\psi_\pm(t) \geq \pm\frac{y_\pm(t)}{y'_\pm(t)} \geq \frac{\rho^{p'-1}(t)}{\varphi_\pm(t)} \ \ \forall t \in I. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует

$$\psi_\pm^{p-1}(t) \geq \pm\frac{|y_\pm(t)|^{p-2}y_\pm(t)}{\rho(t)|y'_\pm(t)|^{p-2}y'_\pm(t)} \geq \frac{1}{\varphi_\pm^{p-1}(t)} \tag{20}$$

или, умножая (20) на $\upsilon(t)$, в силу уравнения (1) имеем

$$\upsilon(t)\psi_\pm^{p-1}(t) \geq \pm\frac{(\rho(t)|y'_\pm(t)|^{p-2}y'_\pm(t))'}{\rho(t)|y'_\pm(t)|^{p-2}y'_\pm(t)} \geq \frac{\upsilon(t)}{\varphi_\pm^{p-1}(t)},$$

то есть оценка (12) справедлива. Теорема 1 доказана.

Пусть $\omega_\pm$ – решения уравнения типа Риккати

$$\omega'(t) - \upsilon(t) + (p-1)\rho^{1-p'}(t)|\omega(t)|^{p'} = 0,$$

соответствующие решениям $y_\pm$ уравнения (1), то есть

$$\omega_\pm(t) = \frac{\rho(t)\phi(y'_\pm(t))}{\phi(y_\pm(t))}.$$

Из (20) имеем

$$\varphi_{\pm}^{p-1}(t) \ge \pm\omega_{\pm}(t) \ge \frac{1}{\psi_{\pm}^{p-1}(t)} \quad \forall t \in I.$$

Интегрируя (11) и (12) от z до x, получим

$$y_{\pm}(z)\exp(\pm\int\limits_z^x \rho^{1-p'}(t)\varphi_{\pm}(t)dt) \ge y_{\pm}(x) \ge \pm y_{\pm}(z)\exp(\pm\int\limits_z^x \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_{\pm}(t)}dt) \tag{21}$$

$$\rho(z)\phi(y'_{\pm}(z))\exp(\pm\int\limits_z^x \upsilon(t)\psi_{\pm}^{p-1}(t)dt) \ge \rho(x)\phi(y'_{\pm}(x)) \ge$$

$$\ge \rho(z)\phi(y'_{\pm}(z))\exp(\pm\int\limits_z^x \upsilon(t)\varphi_{\pm}^{1-p}(t)dt). \tag{22}$$

Далее для удобства положим

$$B_{\rho,\varphi}^{\pm}(z) = \int\limits_z^b \rho^{1-p'}(t)\varphi_{\pm}(t)dt,\ B_{\rho,\psi}^{\pm}(z) = \int\limits_z^b \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_{\pm}(t)}dt,$$

$$A_{\rho,\varphi}^{\pm}(z) = \int\limits_a^z \rho^{1-p'}(t)\varphi_{\pm}(t)dt,\ A_{\rho,\psi}^{\pm}(z) = \int\limits_a^z \frac{\rho^{1-p'}(t)}{\psi_{\pm}(t)}dt,$$

$$B_{\upsilon,\varphi}^{\pm}(z) = \int\limits_z^b \upsilon(t)\varphi_{\pm}^{1-p}(t)dt,\ B_{\upsilon,\psi}^{\pm}(z) = \int\limits_z^b \upsilon(t)\psi_{\pm}^{p-1}(t)dt,$$

$$A_{\upsilon,\varphi}^{\pm}(z) = \int\limits_a^z \upsilon(t)\varphi_{\pm}^{1-p}(t)dt, A_{\upsilon,\psi}^{\pm}(z) = \int\limits_a^z \upsilon(t)\psi_{\pm}^{p-1}(t)dt.$$

Ниже через l обозначим положительное число, имеющее в разных местах, возможно, разные значения.

Из (21) и (22) следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $z \in I$. Тогда*

1.1) Если $B_{\rho,\psi}^{+}(z) = \infty$ или $B_{\rho,\varphi}^{+}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{t\to b} y_{+}(t) = \infty$ или $\lim\limits_{t\to b} y_{+}(t) = l$;

1.2) если $A_{\rho,\varphi}^{+}(z) = \infty$ или $A_{\rho,\psi}^{\pm}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{t\to a} y_{+}(t) = 0$ или $\lim\limits_{t\to a} y_{+}(t) = l$;

1.3) если $B_{\rho,\varphi}^{-}(z) = \infty$ или $B_{\rho,\psi}^{-}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{t\to b} y_{-}(t) = 0$ или $\lim\limits_{t\to b} y_{-}(t) = l$;

1.4) если $A_{\rho,\psi}^{-}(z) = \infty$ или $A_{\rho,\varphi}^{-}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{t\to a} y_{-}(t) = \infty$ или $\lim\limits_{t\to a} y_{-}(t) = l$;

2.1) если $B_{\upsilon,\varphi}^{+}(z) = \infty$ или $B_{\upsilon,\psi}^{+}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{x\to b} \rho(x)\phi(y'_{+}(x)) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to b} \rho(x)\phi(y'_{+}(x)) = l$;

2.2) если $A_{\upsilon,\psi}^{+}(z) = \infty$ или $A_{\upsilon,\varphi}^{+}(z) < \infty$, то соответственно
$\lim\limits_{x\to a} \rho(x)\phi(y'_{+}(x)) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} \rho(x)\phi(y'_{+}(x)) = l$;

2.3) если $B^-_{\upsilon,\varphi}(z)=\infty$ или $B^-_{\upsilon,\psi}(z)<\infty$, то соответственно
$\lim\limits_{x\to b}\rho(x)\phi(y'_-(x))=0$ или $\lim\limits_{x\to b}\rho(x)\phi(y'_-(x))=-l$;
2.4) если $A^-_{\upsilon,\psi}(z)=\infty$ или $A^-_{\upsilon,\varphi}(z)<\infty$, то соответственно
$\lim\limits_{x\to a}\rho(x)\phi(y'_-(x))=-\infty$ или $\lim\limits_{x\to a}\rho(x)\phi(y'_-(x))=-l$.

Лемма 3. Пусть $1<p<\infty$ и функции ρ,υ удовлетворяют условию (2). Если для некоторого $x\in I$

$$\int\limits_a^x\rho^{1-p'}(s)ds+\int\limits_a^x\upsilon(s)ds=\infty,\ \int\limits_x^b\rho^{1-p'}(s)ds+\int\limits_x^b\upsilon(s)ds=\infty, \tag{23}$$

то соответственно для произведений $\psi_+\varphi_+$, $\psi_-\varphi_-$ имеют место оценки

$$\psi_\pm(x)\varphi_\pm(x)\le 4\max\{1,2^{p'-2}\}\ \ \forall x\in I. \tag{24}$$

Доказательство. Докажем справедливость оценки (24) для $\psi_+\varphi_+$, а для $\psi_-\varphi_-$ (24) доказывается аналогично.

Для любых t, x: $a<t<x<b$ имеем

$$\psi_+(x)\varphi_+(x)\le[(\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds)^{1-p}+\int\limits_t^x\upsilon(s)ds]^{p'-1}[\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds+(\int\limits_t^x\upsilon(s)ds)^{1-p'}]. \tag{25}$$

Так как

$$[(\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds)^{1-p}+\int\limits_t^x\upsilon(s)ds]^{p'-1}\le(\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds)^{-1}+\left(\int\limits_t^x\upsilon(s)ds\right)^{p'-1}$$

при $1<p'\le 2$ и

$$[(\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds)^{1-p}+\int\limits_t^x\upsilon(s)ds]^{p'-1}\le 2^{p'-2}\left[\left(\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-1}+\left(\int\limits_t^x\upsilon(s)ds\right)^{p'-1}\right]$$

при $p'>2$, то из (4) имеем

$$\psi_+(x)\varphi_+(x)\le\max\{1,2^{p'-2}\}\left(2+\inf_{a<t<x}\left[u(t,x)+\frac{1}{u(t,x)}\right]\right), \tag{26}$$

где

$$u(t,x)=\int\limits_t^x\rho^{1-p'}(s)ds(\int\limits_t^x\upsilon(s)ds)^{p'-1}.$$

По условию леммы 2 для $\psi_+\varphi_+$ выполнено первое условие (23). Поэтому функция $u(t,x)$ при фиксированном $x\in I$ принимает значения от нуля до бесконечности, когда переменная t пробегает значения от a до x. Следовательно, $\inf\limits_{a<t<x}[u(t,x)+\frac{1}{u(t,x)}]=2$ и из (26) имеем оценку (24) для $\psi_+\varphi_+$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим, что выполнено первое условие (23), если существует решение y_+ уравнения (1), и выполнено второе условие из (23), если существует решение y_- уравнения (1). Тогда имеют место оценки*

$$\rho^{1-p'}(t)\varphi_\pm(t)\ge\pm\frac{d}{dt}\ln y_\pm(t)\ge\frac14\min\{1,2^{2-p'}\}\rho^{1-p'}(t)\varphi_\pm(t),$$

$$\upsilon(t)\psi_{\pm}^{p-1}(t) \geq \pm\frac{d}{dt}\ln|\rho(t)\phi(y'_{\pm}(t))| \geq (\frac{1}{4}\min\{1, 2^{2-p'}\})^{p-1}\upsilon(t)\psi_{\pm}^{p-1}(t).$$

Справедливость утверждения теоремы 3 вытекает из (24), (11), (12).

Из теорем 2 и 3 следует

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда имеют место утверждения*

$$B^{+}_{\rho,\varphi}(z) = \infty \; (B^{+}_{\rho,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to b} y_{+}(t) = \infty \, (\lim_{t\to b} y_{+}(t) = l);$$

$$A^{+}_{\rho,\varphi}(z) = \infty \, (A^{+}_{\rho,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to a} y_{+}(t) = 0 \, (\lim_{t\to a} y_{+}(t) = l);$$

$$B^{-}_{\rho,\varphi}(z) = \infty \, (B^{-}_{\rho,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to b} y_{-}(t) = 0 \, (\lim_{t\to b} y_{-}(t) = l);$$

$$A^{-}_{\rho,\varphi}(z) = \infty \, (A^{-}_{\rho,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to a} y_{-}(t) = \infty \, (\lim_{t\to a} y_{-}(t) = l);$$

$$B^{+}_{\upsilon,\varphi}(z) = \infty \, (B^{+}_{\upsilon,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to b} \rho(t)\phi(y'_{+}(t)) = \infty \, (\lim_{t\to b} \rho(t)\phi(y'_{+}(t)) = l);$$

$$A^{+}_{\upsilon,\varphi}(z) = \infty \, (A^{+}_{\upsilon,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to a} \rho(t)\phi(y'_{+}(t)) = 0 \, (\lim_{t\to a} \rho(t)\phi(y'_{+}(t)) = l);$$

$$B^{-}_{\upsilon,\varphi}(z) = \infty \, (B^{-}_{\upsilon,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to b} \rho(t)\phi(y'_{-}(t)) = 0 \, (\lim_{t\to b} \rho(t)\phi(y'_{-}(t)) = -l);$$

$$A^{-}_{\upsilon,\varphi}(z) = \infty \, (A^{-}_{\upsilon,\varphi}(z) < \infty) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to a} \rho(t)\phi(y'_{-}(t)) = -\infty \, (\lim_{t\to a} \rho(t)\phi(y'_{-}(t)) = -l);$$

$$\varphi_{\pm}^{p-1}(t) \geq \pm\omega_{\pm}(t) \geq (\frac{1}{4}\min\{1, 2^{2-p'}\})^{p-1}\varphi_{\pm}^{p-1}(t).$$

Отметим, что в случае $p = 2$, то есть когда уравнение (1) становится линейным уравнением вида

$$(\rho(t)y'(t))' - \upsilon(t)y(t) = 0,$$

утверждения теорем 1 и 2 и вытекающие от них следствия ранее были показаны Р.Ойнаровым [3].

Цитированная литература

1. **Dosly O.** // Czechoslovak Math.J. 2000. V.50(125). P.657 – 671.
2. **Dosly O.** // Math. Bohemica. 2002. V.127(2). P.181 – 195.
3. **Ойнаров Р.** // Изв. АН КазССР. Сер.физ-мат. 1990. №1. С.43 – 46.

Поступила в редакцию 08.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 82 – 89*

УДК 004.056.5

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМА ШИФРОВАНИЯ, РАЗРАБОТАННОГО НА БАЗЕ МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКИ, СО СТАНДАРТОМ ШИФРОВАНИЯ AES

С. Е. Нысанбаева

Институт проблем информатики и управления МОиН РК
050026 г. Алматы ул. Богенбай батыра, 221 nyssanbayeva@ipic.kz

Рассмотрены основные характеристики американского стандарта шифрования AES и алгоритма шифрования, созданного с использованием непозиционных полиномиальных систем счисления.

В настоящее время возможности технической базы по реализации шифров возросли на несколько порядков по сравнению с возможностями их аппаратной реализации в 70-е годы XX века. Соответственно пропорционально увеличились и возможности их криптоанализа. Поэтому требования 70-х годов прошлого века к экономичности реализации шифров перестали быть преобладающими, а требования к стойкости существенно возросли. Это вызвало изменения в современных подходах к построению блочных шифров с секретными ключами. 2 октября 2000 года Американский институт стандартизации NIST (National Institute of Standards Technology) объявил о выборе в США нового стандарта шифрования AES (Advanced Encryption Standard), который вступил в силу с 26 мая 2002 года. Алгоритм AES – это бельгийский шифр RIJNDAEL, название которого составлено по начальным буквам фамилий его авторов: Joan Daemen (Дж. Деймен) и Vincent Rijmen (В. Риджмен) [1,2], ([3], с. 41), ([4], с. 513). Алгоритм RIJNDAEL относят к симметричным блочным шифрам с архитектурой "квадрат". Эта архитектура основана на непосредственных преобразованиях шифруемого блока, представленного в форме матрицы байтов. Поскольку в алгоритме не используется сеть Фейстеля для криптопреобразований, то его относят к нетрадиционным. Процедура шифрования (зашифрования или расшифрования) осуществляется за определенное количество раундов в зависимости от длины ключа. В стандарте AES длина блока равна 128 бит, которая представляется числом Nb $=4$ (или соответственно 4-мя 32-разрядными словами). В нем могут быть использованы криптографические ключи длиной 128, 192 или 256 бит (соответственно варианты шифра AES-128, AES-192 и AES-256). Длина ключа шифра представляется значениями Nk, а число раундов – Nr (таблица 1).

Keywords: *standard AES, encryption, non-traditional algorithm, non-positional polynomial notation*
2000 Mathematics Subject Classification: 94A60

Таблица 1: Допустимые значения параметров стандарта AES (длина ключа Nk, длина блока Nb и число раундов Nr) для вариантов шифра AES-128, AES-192 и AES-256.

	Длина ключа (Nk слов)	Длина блока (Nb слов)	Число раундов (Nr слов)
AES-128	4	4	10
AES-192	6	4	12
AES-256	8	4	14

За каждый раунд производится шифрование всего блока. В AES базовой единицей для обработки является байт и ряд операций определяется на уровне байтов. Битовые последовательности входа (открытого текста), выхода (криптограммы или шифртекста) и ключа шифра обрабатываются как массивы байтов, которые формируются путем деления битовых последовательностей на группы из восьми смежных бит. Эти байты интерпретируются как элементы конечного поля $GF(2^8)$, то есть как полиномы не выше седьмой степени с двоичными (битовыми) коэффициентами:

$$b_7x^7 + b_6x^6 + b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, \tag{1}$$

где b_i принимают значения 0 или 1, $i = 1, 2, ..., 7$.

Результаты промежуточных преобразований, выполняемых в каждом раунде алгоритма, называются состояниями (State). Процесс обработки данных интерпретируется как выполнение операций алгоритма над двумерным массивом байтов State размером 4×4. Эта квадратная матрица называется массивом состояний и в ней отображаются результаты промежуточных преобразований. При этом каждая строка и каждый столбец могут рассматриваться как 32-битовые или 4-байтовые слова. Значение Nb определяет число столбцов в массиве State. В самом начале процесса шифрования входной блок из байтов $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ копируется в массив State по столбцам:

a_0	a_4	a_8	a_{12}
a_1	a_5	a_9	a_{13}
a_2	a_6	a_{10}	a_{14}
a_3	a_7	a_{11}	a_{15}

а

$s_{0,0}$	$s_{0,1}$	$s_{0,2}$	$s_{0,3}$
$s_{1,0}$	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	$s_{1,3}$
$s_{2,0}$	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$	$s_{2,3}$
$s_{3,0}$	$s_{3,1}$	$s_{3,2}$	$s_{3,3}$

б

Рис. 1: Пример отображения входного блока данных из байтов (а) на массив состояний State (б).

В режимах зашифрования (Cipher) и расшифрования (Inverse Cipher) в алгоритме AES используется раундовая функция, которая включает следующие четыре преобразования:

- подстановка байтов SubBytes() с использованием таблицы подстановок S-box;
- сдвиг строк ShiftRows() массива State на различное количество байт;
- смешивание данных MixColums() в пределах каждого столбца массива State;
- прибавление раундового ключа AddRoundKey() к массиву State.

Преобразование SubBytes() – это нелинейная побайтовая подстановка, которая воздействует независимо на каждый байт массива State. Таблица замены является инвертируемой, она построена из композиции двух преобразований входного байта (в виде (1)) над полем GF(2). Применение таблицы S-box (S-блок) ко всем байтам матрицы State обозначается как SubBytes(State).

Преобразование ShiftRows() циклически сдвигает байты в трех последних строках влево на различное расстояние. В первой строке байты остаются на месте. Вторая строка сдвигается на

1 байт, вторая строка – на 2 байта, третья строка – на 3 байта. Операция сдвига в последних трех строках обозначается как ShiftRows (State).

Преобразование MixColums() является математическим и воздействует поочередно на все столбцы массива State, которые рассматриваются как многочлены над полем $GF(2^8)$

$$s_c(x) = s_{0,c}\,x^3 + s_{1,c}\,x^2 + s_{2,c}\,x + s_{3,c},\ c = 0,1,2,3. \tag{2}$$

Эти многочлены умножаются по модулю (x^4+1) на фиксированный многочлен, коэффициенты которого представлены в шестнадцатеричном виде:

$$a(x) = \{03\}x^3 + \{01\}x^2 + \{01\}x + \{02\}.$$

Умножение в конечном поле представляется как операция умножения матриц, в результате получаются новые четыре байта столбцов $s'_{0,c}, s'_{1,c}, s'_{2,c}, s'_{3,c}$, которыми заменяются в этом преобразовании соответственно исходные байты массива $State$ $s_{0,c}, s_{1,c}, s_{2,c}, s_{3,c}$, $c = 0,1,2,3$. Применение этой операции ко всем четырем столбцам состояния обозначается как MixColums (State).

В преобразовании AddRoundKey () ключ раунда Round Key прибавляется к массиву State посредством операции простого побитового сложения XOR (сложения по модулю 2). Длина ключа раунда равна длине блока. В режиме шифрования первое сложение величины Round Key производится до начала первого раунда. Все это преобразование обозначается как AddRoundKey (State, RoundKey).

Раундовые ключи вырабатываются из ключа шифрования в результате выполнения алгоритма выработки ключей (Key Schedule), суть которого состоит в следующем:

1. определяется общее число битов раундовых ключей: оно равно длине блока, умноженной на число раундов плюс 1 (для длины блока 128 бит и 10 раундов необходимо 1408 бит раундовых ключей или 11 ключей);

2. производится расширение ключа шифрования, в результате получают расширенный ключ (Expanded Key);

3. расширенный ключ делится на равные части по 128 бит: первая часть – это первый раундовый ключ, вторая часть – второй раундовый ключ и т.д.

Ключ шифрования и расширенный ключ также представляются в виде векторов 4-байтовых слов. Расширенный ключ – это линейный массив $w[i]$ из $Nb(Nk+1)$ слов. В нем первые Nk слов содержат ключ шифрования. Каждое следующее слово $w[i]$ получается в результате нелинейного преобразования над предыдущими словами $w[i-1]$ и $w[i-Nk]$, расположенными соответственно на одну и Nk позиций раньше. Расширенный ключ получается всегда из ключа зашифрования и никогда не указывается напрямую. Процедура выработки расширенных ключей зависит от длины ключа.

Перечисленные четыре преобразования исполняются алгоритмом AES в каждом раунде, за исключением последнего. Последний раунд состоит только из трех преобразований SubBytes(), ShiftRows() и AddRoundKey(): из-за отсутствия операции смешения столбцов MixColums() последовательность операций в алгоритме AES является симметричной. Этим обеспечивается эквивалентность прямого и обратного шифрующих преобразований. Таким образом, функция зашифрования включает следующие этапы:

1. начальное прибавление раундового ключа перед первым раундом;

2. проведение Nr-1 раундов зашифрования;

3. выполнение заключительного раунда, в который не включена операция MixColums().

В режиме расшифрования в обратной последовательности выполняются преобразования, инверсные к SubBytes(), ShiftRows(), AddRoundKey() и MixColums().

Порядок использования раундовых ключей является обратным по отношению к тому, который используется при зашифровании. При расшифровании массива State к нему применяют инвертированные преоразования в следующем последовательности: InvShiftRows(), InvSubBytes(), InvMixColums() и AddRoundKey(). Преобразование InvShiftRows() - инверсия преобразования ShiftRows(). Последние три строки циклически сдвигаются вправо на различное число байтов: вторая строка - на 1 байт, вторая строка - на 2 байта, третья строка - на 3 байта.

Преобразование InvSubBytes() является инверсией преобразования SubBytes(). Для его реализации используется инверсный S-блок.

Преобразование InvMixColums() инверсно преобразованию MixColums(). Оно воздействует поочередно на все столбцы массива State, обращаясь с каждым столбцом как с четырехчленным полиномом в виде (2), рассматриваемым как полином над полем $GF(2^8)$. Эти многочлены умножаются по модулю (x^4+1) на фиксированный многочлен $a^{-1}(x)$, обратный многочлену $a(x)$:

$$a^{-1}(x) = \{0b\}x^3 + \{0d\}x^2 + \{09\}x + \{0e\}.$$

Умножение в конечном поле представляется как операция умножения матриц, в результате получаются новые четыре байта столбцов $s'_{0,c}, s'_{1,c}, s'_{2,c}, s'_{3,c}$, ими заменяются соответственно исходные байты массива State $s_{0,c}, s_{1,c}, s_{2,c}, s_{3,c}$, $c = 0, 1, 2, 3$. В результате применения этой операции ко всем четырем столбцам получим преобразованную матрицу State. Преобразование AddRoundKey() является обратным самому себе, так как в нем выполняется только операция XOR.

В стандарте AES процедуры зашифрования и расшифрования эквивалентны с точностью до вектора ключевых элементов, таблиц подстановок и констант алгоритма, то есть операционно идентичны и отличаются в деталях при обратном преобразовании. Это позволяет совместить реализацию процедур зашифрования и расшифрования как при аппаратной, так и при программной реализации.

В этом стандарте возможно также распараллеливание: операции преобразований могут работать параллельно с байтами (функции SubBytes() и AddRoundKey()) или со строками массива State (функция ShiftRows()) или столбцами массива State (функция MixColums()). Криптостойкость стандарта AES определяется длиной ключа и равна 2^{-Nk} (таблица 2).

Таблица 2. Криптостойкость нетрадиционных алгоритмов шифрования в зависимости от длины ключа.

Длина ключа	Криптостойкость стандарта AES	Криптостойкость шифрования в НПСС по формуле(9”)	Криптостойкость шифрования в НПСС по формуле (9’)	Криптостойкость шифрования в НПСС по формуле (9)
128	10^{-39}	10^{-65}	10^{-70}	10^{-105}
192	10^{-58}	10^{-96}	10^{-105}	10^{-159}
256	10^{-77}	10^{-126}	10^{-139}	10^{-212}

Нетрадиционным является также симметричный блочный алгоритм шифрования, разработанный на базе непозиционных полиномиальных систем счисления (НПСС) [5,6]. Синонимами НПСС являются системы счисления в остаточных классах с полиномиальными основаниями или модулярная арифметика ([7], с.13), [8]. Криптостойкость шифрования в этом случае определяется надежностью самого криптографического алгоритма. Формирование НПСС при шифровании блоков длины N начинается с формирования системы полиномиальных рабочих оснований НПСС из общего числа всех неприводимых многочленов степени не выше N над полем $GF(2)$. В связи с этим была создана база данных неприводимых многочленов над полем $GF(2)$ по результатам работы программы по вычислению таких многочленов [9]. Пусть из построенной базы данных основаниями выбраны многочлены

$$p_1(x), p_2(x), ..., p_S(x) \tag{3}$$

соответственно степеней $m_1, m_2, ..., m_s$. Все эти основания должны быть различными в соответствии с требованиями Великой китайской теоремы об остатках, даже если они являются неприводимыми полиномами одной и той же степени. Многочлен $P(x) = p_1(x), p_2(x), ..., p_S(x)$ степени $m = \sum\limits_{i=1}^{S} m_i$ определяет основной рабочий диапазон НПСС. В рассматриваемой непозиционной системе любой многочлен степени меньшей m имеет единственное представление в виде его вычетов по модулям рабочих оснований соответственно.

В построенной НПСС блок длины N бит интерпретируется как последовательность остатков $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_S(x)$ от деления некоторого неизвестного многочлена $F(x)$ степени меньше m на основания (3) соответственно:

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_S(x)). \tag{4}$$

В системе оснований учитывается и порядок их расположения, то есть все их возможные перестановки. Непозиционное представление (4) многочлена $F(x)$ является единственным и по нему при хранении и передаче информации восстанавливается его позиционное представление [8]:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i(x) P_i(x), \text{ где } P(x) = \frac{P(x)}{p_i(x)}. \tag{5}$$

В выражении (4) остатки $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_S(x)$ выбираются так, чтобы первым l_1 битам блока соответствовали двоичные коэффициенты остатка $\alpha_1(x)$, следующим l_2 битам – двоичные коэффициенты остатка $\alpha_2(x)$ и так далее, последним l_S двоичным разрядам соответствовали двоичные коэффициенты вычета $\alpha_S(x)$.

Затем генерируется ключевая последовательность длиной N бит, которая также интерпретируется как последовательность остатков $\beta_1(x), \beta_2(x), ..., \beta_S(x)$, но от деления некоторого другого многочлена $G(x)$ степени не выше m по тем же рабочим основаниям системы (3):

$$G(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), ..., \beta_S(x)). \tag{6}$$

Следующей является процедура нетрадиционного шифрования. Полученная в результате ее выполнения криптограмма в виде последовательности вычетов $\omega_1(x), \omega_2(x), ..., \omega_S(x)$ рассматривается как некоторая функция $H(F(x), G(x))$, операции которой в соответствии с операциями непозиционной системы счисления выполняются параллельно по модулям оснований системы. Криптограмма (шифртекст) в НПСС имеет вид:

$$H(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), ..., \omega_S(x)). \tag{7}$$

Таким образом, алгоритм шифрования в НПСС характеризуется полным ключом, включающим не только ключевую последовательность $G(x)$ длиной N бит, но и выбранную систему полиномиальных оснований с учетом порядка их следования.

На выбор системы оснований степеней от m_1 до m_S из базы данных неприводимых многочленов накладывается следующее условие: рабочие основания выбираются таким образом, чтобы вычеты по ним покрывали блок длины N. Поэтому степени оснований m_i, $i = 1, 2, ..., S$, должны быть не выше N, а выбор оснований задается уравнением

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + ... + k_S m_S = N. \tag{8}$$

Из уравнения (8) находятся неизвестные коэффициенты k_i, определяющие число выбираемых в качестве оснований неприводимых полиномов степени $m_i, 0 \le k_i \le n_i$, n_i – множество всех неприводимых многочленов степени $m_i, 1 \le m_i \le N, S = k_1 + k_2 + ... + k_S$ – количество всех выбранных оснований. Полные системы вычетов по модулям многочленов степени m_i содержат все многочлены с двоичными коэффициентами степени не выше $m_i - 1$, для записи которых необходимо m_i бит ([10], с. 192). При $m_S = N$ для записи полных систем вычетов по модулям этих оснований необходимо N бит. Уравнение (8) имеет широкий спектр решений, так как с увеличением степени неприводимых многочленов их количество быстро растет.

Рабочие основания (3) образуют одну систему оснований. Если поменять основания местами, то получим другую систему оснований, но при этом число оснований k_i каждой степени $m_i, i = 1, 2, ..., S$, и количество всех выбранных оснований не меняются. Всего таких систем оснований (то есть для одного варианта их выбора) будет $(k_1 + k_2 + ... + k_S)!$ Криптостойкость шифрования блока длины N определяется всеми возможными и отличающимися друг от друга вариантами выбора систем оснований и генерируемых ключевых последовательностей и описывается следующим выражением:

$$p_{kr} = 1/(2^N \sum_{k_1, k_2, ..., k_S} (k_1 + k_2 + ... + k_S)! \, C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} ... C_{n_S}^{k_S}), \tag{9}$$

в котором суммирование распространено на всевозможные комбинации коэффициентов $k_1, k_2, ..., k_S$, удовлетворяющих равенству (8), т. е. на все варианты выбора систем оснований из числа неприводимых полиномов с двоичными коэффициентами степени не выше N, запись вычетов по которым покрывает длину заданного сообщения N.

В случае выбора одной системы с учетом возможных перестановок оснований в ней (один вариант) из (9) следует, что криптостойкость шифрования блока длины N определяется как

$$p'_{kr} = 1/(2^N (k_1 + k_2 + ... + k_S)! \, C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} ... C_{n_S}^{k_S}). \tag{9'}$$

Тогда криптостойкость шифрования блока длины N только для одной системы оснований задается выражением

$$p''_{kr} = 1/(2^N C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} ... C_{n_S}^{k_S}). \tag{9''}$$

В таблице 3 приведены определенные по формуле (9) значения криптостойкости шифрования сообщений длины от $N = 1$ до $N = 16$ бит. Увеличение длины блока на два бита приводит к повышению криптостойкости более, чем в 10 раз.

Таблица 3. Криптостойкость алгоритма шифрования на базе НПСС.

Длина блока	1	2	3	4	5	6	7	8
Криптостойкость шифрования	$5.0{\cdot}10^{-1}$	$2.5{\cdot}10^{-1}$	$3.2{\cdot}10^{-2}$	$7.8{\cdot}10^{-3}$	$2.0{\cdot}10^{-3}$	$3.8{\cdot}10^{-4}$	$9.3{\cdot}10^{-5}$	$2.0{\cdot}10^{-5}$
Длина блока	9	10	11	12	13	14	15	16
Криптостойкость шифрования	$4.5{\cdot}10^{-6}$	$9.1{\cdot}10^{-7}$	$2.1{\cdot}10^{-7}$	$4.8{\cdot}10^{-8}$	$1.0{\cdot}10^{-8}$	$2.4{\cdot}10^{-9}$	$4.8{\cdot}10^{-10}$	$1.1{\cdot}10^{-10}$

При моделировании алгоритма шифрования используется нетрадиционный криптографический метод [11]. Криптограмма сообщения (7) получается в результате умножения многочленов (4) и (6) в соответствии со свойствами сравнений по двойному модулю:

$$F(x)G(x) = H(x)(mod \; P(x)).$$

Тогда элементы последовательности вычетов $\omega_1(x), \omega_2(x), ..., \omega_S(x)$ являются наименьшими остатками от деления произведений $\alpha_i(x)\beta_i(x)$ на соответствующие основания $p_i(x)$:

$$\alpha_i(x)\beta_i(x) \equiv \omega_i(x)(mod\ p_i(x)),\ i = 1, 2, ..., S. \tag{10}$$

В двоичном виде полученная криптограмма (7) записывается аналогично (4): двоичным коэффициентам остатка $\omega_1(x)$ ставятся в соответствие первые l_1 бит криптограммы $H(x)$, двоичным коэффициентам остатка $\omega_2(x)$ – следующие l_2 бит криптограммы и так далее, двоичным коэффициентам последнего вычета $\omega_S(x)$ ставятся в соответствие последние l_S двоичных разрядов криптограммы. Для расшифрования криптограммы $H(x)$ по известному ключу $G(x)$ необходимы инверсные многочлены $\beta_i^{-1}(x)$; как следует из (10), они вычисляются для каждого значения $\beta_i(x)$ из условия выполнения следующего сравнения:

$$\beta_i(x)\beta_i^{-1}(x) \equiv 1(mod\ p_i(x)),\ i = 1, 2, ..., S. \tag{11}$$

В результате получится многочлен $G^{-1}(x) = (\beta_1^{-1}(x), \beta_2^{-1}(x), ..., \beta_S^{-1}(x))$, инверсный к многочлену $G(x)$. Тогда исходный блок в соответствии с (10) и (11) восстанавливается по сравнению:

$$F(x) \equiv G^{-1}(x)H(x)(mod\ P(x)). \tag{12}$$

Через вычеты выражение (12) запишется в виде следующих сравнений:

$$\alpha_i(x) \equiv \beta_i^{-1}(x)\omega_i(x)(mod\ p_i(x)),\ i = 1, 2, ..., S. \tag{13}$$

Таким образом, в рассмотренной модели предложенного алгоритма шифрования блока из N бит в НПСС полный ключ состоит из выбранной системы полиномиальных оснований $p_1(x), p_2(x), ..., p_S(x)$, полученной некоторым генератором псевдослучайных последовательностей ключа зашифрования $G(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), ..., \beta_S(x))$ и инверсного к нему ключа расшифрования $G^{-1}(x) = (\beta_1^{-1}(x), \beta_2^{-1}(x), ..., \beta_S^{-1}(x))$, вычисляемого в соответствии с выражениями (12) или (13). При реализации полные ключи вычисляются для блоков различной длины и сохраняются в созданной для них базе данных.

В предлагаемом нетрадиционном алгоритме:

- процедура шифрования производится за один раунд;
- длина блока может быть любой;
- длина ключа шифрования равна длине блока;
- криптостойкость шифрования определяется не только длиной ключа (6), но и самим его алгоритмом;
- чем больше длина блока, тем выше криптостойкость шифрования;
- расшифрование эквивалентно процедуре зашифрования;
- распараллеливание операций можно производить по каждому из оснований системы, а это также, как и в стандарте AES, позволяет совместить реализацию процедур зашифрования и расшифрования и при аппаратной, и при программной реализации.

Рассмотрим примеры выбора систем оснований НПСС и определения криптостойкости шифрования для длин ключей 128, 192 и 256 бит.

1. Длина ключа – 128 бит: система оснований НПСС выбрана из 8-ми неприводимых полиномов 8-й степени.

2. Длина ключа – 192 бит: система оснований НПСС состоит из 12-ти неприводимых полиномов степени 16.

3. Длина ключа – 256 бит: система оснований НПСС включает 16-ть неприводимых полиномов 16-й степени.

Полученные значения криптостойкости предложенного алгоритма шифрования в НПСС приведены в таблице 2. Для НПСС вычислены значения криптостойкости для вариантов выбора систем оснований, описываемых выражениями (9”), (9’) и (9), то есть для примеров выбора одного варианта систем (9”) и конкретной одной системы (9’) оснований и для общего случая (9). В общем случае величина криптостойкости шифрования оценивается приближенно для всевозможных комбинаций коэффициентов $k_1, k_2, ..., k_S$, удовлетворяющих равенству (8).

Из полученных данных видно, что криптостойкость разработанного нетрадиционного алгоритма шифрования превышает криптостойкость стандарта AES при длине ключа 128 и 192 бита на десятки порядков, а при длине ключа 256 бит – на сотни порядков. Для вариантов выбора систем оснований, описываемых выражениями (9”)и (9’), эта разница составляет десятки порядков.

Цитированная литература

1. **Применко Э. А., Винокуров А. А.** // Системы безопасности. 2001. № 37. С.79 – 82.
2. **Применко Э. А., Винокуров А. А.** // Системы безопасности. 2001. № 39. С.71 – 72.
3. **Зензин О. С., Иванов М. А.** Стандарт криптографической зашиты - AES. Конечные поля. М., 2002.
4. **Соколов А. И., Шаньгин В. Ф.** Защита информации в распределенных корпоративных сетях и системах. М., 2002.
5. **Амербаев В. М., Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Известия АН РК. Сер. физ.-мат. 2005. № 3. С. 84 – 89.
6. **Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Материалы VIII межд. научно-практ. конф. "Информационная безопасность". Таганрог, 2006. С. 66 – 69.
7. **Акушский И. Я., Юдицкий. Д. И.** Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968.
8. **Бияшев Р. Г.** Разработка и исследование методов сквозного повышения достоверности в системах обмена данными распределенных АСУ. Дис. на соискание уч. степ. докт. тех. наук. М., 1985.
9. **Бияшев Р. Г., Арсланова С. З., Нысанбаева С. Е.** // Свидетельство о государственной регистрации объекта интеллектуальной собственности под названием NeprivodPolinom"(программа для ЭВМ)". Зарегистрировано в реестре Комитета по правам интеллектуальной собственности Министерства юстиции Республики Казахстан за № 055 от 21 февраля 2006 года.
10. **Моисил Гр. К.** Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств. М., 1963.
11. **Нысанбаев Р. К.** Разработка нетрадиционных методов и средств криптографической защиты информации. дис. канд. тех. наук. Алматы, 2000. 117 с.

Поступила в редакцию 11.03.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 90 – 94*

УДК 521.36, 534.1

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

У. Ш. Омарова

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата
120008 Кызылорда ул. Жахаева, 67 aturesh@mail.ru

В работе рассматривается ограниченная эллиптическая задача трех тел с учетом светового давления. Получены условия существования и устойчивости в линейном приближении коллинеарных точек. Дана физически ясная и геометрически наглядная интерпретация области устойчивости.

Для небесной механики и динамики космических полетов наиболее важной является ограниченная задача трех тел, в которой изучается движение тела P малой массы m под действием не только ньютоновского притяжения [1], но и репульсивной силы светового давления со стороны двух основных излучающих тел [2,3], обладающих точечными массами m_1 и m_2 $(m_1 \geq m_2 >> m)$, которые обращаются друг относительно друга по кеплеровым орбитам, определяемым задачей двух тел. При этом сила светового давления, обратно пропорциональная квадрату расстояния до излучающего тела, зависит не только от интенсивности источника излучения, но и от парусности частицы [2], определяемой отношением "сечение / масса". Следовательно, динамической моделью, адекватно описывающей движение частиц (частиц газопылевых облаков в космическом пространстве, спутников-баллонов, а также кораблей-парусников) в поле двух основных гравитирующих и одновременно излучающих тел, является так называемая фотогравитационная ограниченная задача трех тел [3,4].

В работе [3] впервые рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел с двумя излучающими массами и построена область устойчивости коллинеарных точек в плоскости параметров-коэффициентов редукции масс системы. Анализу треугольных точек (введением нового обобщенного параметра) посвящена работа [4].

В настоящей работе рассматриваются коллинеарные решения ограниченной фотогравитационной эллиптической задачи трех тел и получены условия (с привлечением названного выше параметра), которые позволяют строить физически наглядную и геометрически простую область их устойчивости для круговой задачи.

Keywords: *elleptic, problem of three bodies, existence, stability, collinear solution, photogravitation, boundary problem*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

Выберем прямоугольную систему координат $OXYZ$, начало которой поместим в центр масс системы тел; ось OX направим вдоль прямой, соединяющей основные излучающие тела S_1 и S_2, а ось OZ – перпендикулярно плоскости орбитального движения в сторону, откуда вращение системы тел видно происходящим против хода часовой стрелки. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс m_1 и m_2 основных тел примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, отношение $T/2\pi$ – за единицу времени (где T – период обращения тел друг относительно друга). Тогда уравнения частицы P можно записать в виде [3]:

$$\begin{gathered}\ddot{X} - 2\dot{\vartheta}\dot{Y} - \ddot{\vartheta}Y - \dot{\vartheta}^2 X = \frac{\partial U}{\partial X},\\ \ddot{Y} + 2\dot{\vartheta}\dot{X} + \ddot{\vartheta}X - \ddot{\vartheta}^2 Y = \frac{\partial U}{\partial Y},\\ \ddot{Z} = \frac{\partial U}{\partial Z},\end{gathered} \tag{1}$$

где $U = \dfrac{q_1(1-\mu)}{r_1} + \dfrac{q_2\mu}{r_2}$ – силовая функция, $q_1 \in (-\infty; 1]$ и $q_2 \in (-\infty; 1]$ – коэффициенты редукции массы, характеризующие суммарное воздействие гравитационной и радиационной репульсивной сил на частицу, $r_1 = \sqrt{(X+\mu r)^2 + Y^2 + Z^2}$ и $r_2 = \sqrt{(X-(1-\mu)r)^2 + X^2 + Z^2}$ – расстояние частицы до основных тел, $1-\mu$ и μ их безразмерные массы, $r = p/(1+e\cos\vartheta)$ – расстоянии между основными телами, p и $e-$ – соответственно параметр и эксцентриситет их кеплеровой орбиты), ϑ – истинная аномалия.

Следуя Нехвилу [1], введем в уравнениях (1) замену переменных

$$X = rx, \quad Y = ry, \quad Z = rz.$$

После перехода к новой независимой переменной ϑ уравнения (1) преобразуются в следующую систему дифференцированных уравнений:

$$\begin{gathered}x'' - 2y' = \frac{1}{1+e\cos\vartheta}\cdot\frac{\partial W}{\partial x},\\ y'' + 2x' = \frac{1}{1+e\cos\vartheta}\cdot\frac{\partial W}{\partial y},\\ z'' = \frac{1}{1+e\cos\vartheta}\cdot\frac{\partial W}{\partial z}.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{gathered}W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - e\cos\vartheta\cdot z^2) + \frac{q_1(1-\mu)}{r_1} + \frac{q_2\mu}{r_2},\\ r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + x^2},\\ x_1 = -\mu, \qquad x_2 = 1-\mu.\end{gathered}$$

Система уравнений (2) может иметь стационарные решения, называемые точками либрации, если выполнены необходимые и достаточные условия их существования в виде

$$\begin{gathered}[1-A]x + (1-\mu)\mu\cdot\left(\frac{q_2}{r_2^3} - \frac{q_1}{r_1^3}\right) = 0,\\ y[1-A] = 0,\\ z[e\cos\vartheta + A] = 0, \quad A = \frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{q_2\mu}{r_2^3}.\end{gathered} \tag{3}$$

Как видно, последнее уравнение системы (3) может выполняться лишь при $e = 0$, что указывает на существование пространственных решений (компланарных точек либрации) только в фотогравитационной круговой задаче. Однако, как следует из последнего уравнения, при $0 < e << 1$ вокруг этих точек существуют периодические решения, которые моделируют движение частиц в окрестности компланарных точек.

Рассмотрим прямолинейные решения, координаты x^* которых определяются при $y = z = 0$ из (3) уравнением

$$[1 - \varphi(x)]x + (1-\mu)\mu\Big[\frac{q_2}{r_2^3} - \frac{q_1}{r_1^3}\Big] = 0, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{q_2\mu}{r_2^3}, \quad r_1 = |x+\mu|, \quad r_2 = |x+\mu-1|.$$

Область существования и устойчивости этих точек (положений относительного равновесия, называемых коллинеарными точками либрации) определяются как параметрами гравитационно–репульсивного поля, так и парусностью находящихся в этом поле частиц. В работе [4] посредством введения некоторого обобщенного параметра k, характеризующего гравитационно–репульсивное поле системы и равного

$$k = (1-q_1)/(1-q_2) = M_1Q_2/M_2Q_1, \tag{5}$$

где M_i – массы основных тел, а Q_i – мощности их излучения) была дана геометрически весьма простая и физически ясная интерпретация картины существования и устойчивости треугольных точек либрации. Для фиксированной пары основных тел коэффициенты редукции, как видно из (5), не могут быть произвольными, что не принималось во внимание во многих посвященных этой проблеме предыдущих исследованиях.

Введя возмущения $\xi = x - x^*$, $\eta = y$, $\zeta = z$, получим уравнения возмущенного движения в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot\xi - 2\dot\eta + c_1\xi &= 0,\\ \ddot\eta - 2\dot\xi + c_2\eta &= 0,\\ \ddot\zeta + c_3\dot\zeta &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$c_1 = (1+e\cos\vartheta)^{-1}[-1-2\varphi(x)], c_2 = (1+e\cos\vartheta)^{-1}[-1+\varphi(x)], \quad c_3 = (1+e\cos\vartheta)^{-1}\varphi(x), \tag{7}$$

а выбранная за независимую переменную ϑ является истинной аномалией.

Полагая $y = z = 0$, из (3) находим координаты коллинеарных точек, решая уравнение

$$f(x) = x - q_1(1-\mu)\frac{(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - q_2\mu\frac{(x+\mu-1)}{|x+\mu-1|^3} = 0.$$

Корни характеристического уравнения системы (6) при $e = 0$ равны

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\Big[-(c_1+c_2+4) \pm \sqrt{(c_1+c_2+4)^4 - 4c_1c_2}\Big], \tag{9}$$

$$\lambda_3^2 = -c_3.$$

Здесь

$$c_1 = -\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big)_* = -1-2\varphi(x), c_2 = -\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big)_* = -1+\varphi(x), \quad c_3 = -\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\Big)_* = \varphi(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{q_2\mu}{r_2^3}, \quad r_1 = |x^* + \mu|, \quad r_2 = |x^* + \mu - 1|.$$

При выполнении системы неравенств

$$\sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2} \leq 2,$$
$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \leq 0, \quad c_3 \geq 0, \tag{10}$$

корни (9) характеристического уравнения будут чисто мнимыми.

В системе неравенств (10), исключив q_1 и q_2 с помощью (5) и (8), получим необходимые условия устойчивости по Ляпунову в виде

$$\Big(k\frac{\mu}{r_2^2} - \frac{1-\mu}{r_1^2}\Big)\Big\{[9\mu(1-r_2^3) + r_1 r_2^3](1-\mu) - k\cdot\mu[9(1-\mu)(1-r_1^3) + r_1^3\cdot r_2]\Big\} \leq 0, \tag{11}$$

$$\Big[\frac{(1-\mu)}{r_1^2} - \frac{k\mu}{r_2^2}\Big]^{-1}\cdot\Big[\frac{(1-r_2^3}{(1-r_1^2} - k\Big] \leq 0.$$

Система неравенств (11) позволяет установить, что для всякой фиксированной пары основных тел в плоскости (x, k) существуют целые семейства коллинеарных точек либрации (см. рис.1)

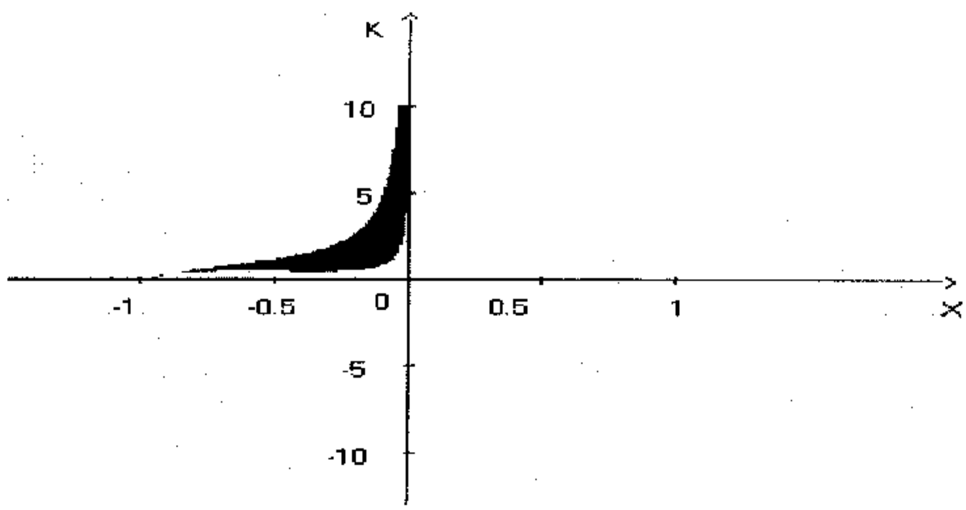

Рис. 1: Область (заштрихована) устойчивости коллинеарных точек либрации для $\mu = 0.99$.

Если учесть, что коэффициенты редукции зависят не только от параметров гравитационно-репульсивного поля, но и от парусности самих частиц, которая растет с уменьшением их абсолютных размеров, то это позволяет допусти возможность существования в каждой точке области (x, k) бесчисленного множества частиц различной парусности, образующих устойчивое скопление газопылевых облаков в фотогравитационном поле двойных звездных систем (см. рис.1). Полученные условия (11) устойчивости являются и достаточными за исключением множества точек из области устойчивости в линейном приближении, расположенных на резонансных кривых 3-го и 4-го порядков, в которых может быть нарушена устойчивость. Задавая μ произвольные значения (в интервале $0 < \mu < 1$) можно определить эволюцию межзвездных газопылевых комплексов.

Цитированная литература

1. **Дубошин Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1975.

2. **Радзиевский В. В.** // Астроном.ж. 1950. Т.27. С.249 – 256.
3. **Kunitsin A. L., Tureshbaev A. T.** //Celest. Mech. 1985. V.35. P.105 – 112.
4. **Куницын А. Л.** // ПММ. 2000. Т.65., Вып. 5. С.788 – 794.

Поступила в редакцию 10.02.2008 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 1 (27) . С. 95 – 100*

УДК 510.67

К ВОПРОСУ ОБ ОБОГАЩЕНИИ ПОЧТИ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Г. О. Туреханова

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125, Guljan@ipic.kz

В данной работе мы исследуем некоторые частные случаи обогащения модели слабо о-минимальной теории выпуклым унарным предикатом. Рассмотрен случай, когда при таком обогащении сохраняется почти о-минимальность, то есть когда слабая ортогональность типов над моделью совпадает с почти ортогональностью. Для рассматриваемого случая заметно упрощается доказательство теоремы Байжанова ([1], с.1388), о сокращении квантора «существует в модели M» для пары моделей $M \preceq N$ слабо о-минимальной теории.

1. Введение.

Определение 1 ([3], с. 5435). *Линейно упорядоченная структура* $M = (M, <, ...)$ *называется* слабо о-минимальной, *если любое определимое с параметрами подмножество* M *равно некоторому конечному объединению выпуклых относительно порядка* $<$ *множеств.*

Теория называется *слабо о-минимальной,* если любая ее модель слабо о-минимальна.

На протяжении всей статьи мы полагаем, что M – модель слабо о-минимальной теории, $A \subset M$, N – $|M|^+$ – насыщенное элементарное расширение модели M, $S_1(A)$ – множество 1-типов с параметрами из A.

Определение 2 [2]. *A-формулу $F(x, y)$ называют* выпуклой вправо, *если для всех* $\alpha \in N$ *и для всех* $\beta \in F(N, \alpha)$ *верно*

$$\forall\gamma(\alpha < \gamma < \beta \Rightarrow \gamma \in F(N, \alpha)).$$

Определение 3 [2]. *Пусть* $p \in S_1(A)$. *Формулу* $\Phi(x, y)$ *с параметрами из* A *называют* p-устойчивой, *если для любого* $\alpha \models p$ *существуют* $\gamma_1, \gamma_2 \models p$, *такие что* $\gamma_1 < \Phi(N, \alpha) < \gamma_2$.

Определение 4 [2]. *Пусть* $p \in S_1(A)$, *а* $F_1(x, y)$ *и* $F_2(x, y)$ *– две p-устойчивые выпуклые вправо A-формулы. Формула* $F_2(x, y)$ больше, *чем* $F_1(x, y)$, *если существует* $\alpha \in p(N)(\equiv \forall\alpha \in p(N))$ *такой, что*

$$F_1(N, \alpha) \cap (\alpha, \infty) \subset F_2(N, \alpha) \cap (\alpha, \infty).$$

Keywords: *Model Theory, o-minimal, expansion of a model*
2000 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

Определение 5 [2]. *Пусть $p \in S_1(A)$ – неалгебраический тип. Тип p называют* полуквазиодиночным вправо, *если существует наибольшая p-устойчивая выпуклая вправо A-формула $F(x,y)$.*

Аналогично определяется полуквазиодиночность влево.

Определение 6 [2]. *Пусть $p \in S_1(A)$. Тип p называют* квазиодиночным, *если он полуквазиодиночный вправо и влево.*

Определение 7 [2]. *Разбиение (A,B) модели M называется* сечением, *если $A < B$. Здесь, $A < B \iff$ для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место $a < b$. Сечение называется* рациональным, *если A имеет максимальный элемент или B – минимальный, или одно из них пусто. Мы говорим, что сечение* квазирационально, *если A и, следовательно, B определимы (с параметрами). Неквазирациональное сечение называется* иррациональным.

Замечание 1 ([2], с. 4) *Пусть $p \in S_1(A)$ – неалгебраический тип. Если p полуквазиодиночный вправо или влево, то он квазиодиночный.*

Замечание 2 ([2], с. 4) *Пусть $p \in S_1(A)$ – квазиодиночный. Пусть $F_1(x,y)$ – наибольшая выпуклая вправо p-стабильная A-формула, а $F_2(x,y)$ – наибольшая выпуклая влево p-стабильная A-формула. Тогда $E(x,y) \triangleq F_1(x,y) \vee F_2(x,y)$ является отношением эквивалентности на множестве реализаций типа p. Очевидно, что это отношение эквивалентности максимальное p-устойчивое.*

Теорема 1 . *Пусть M – модель слабо о-минимальной теории языка L, а N её $|M|^+$–насыщенное элементарное расширение. Пусть $p(x) \in S_1(M)$ – иррациональный квазиодиночный тип, $\alpha \models p$. Тогда, если $P(x)$ – новый символ отношения, реализуемый в M множеством $(-\infty,\alpha)\cap M$, $L^* = L\cup\{P\}$ и $M^* = \langle M, L^*\rangle$, то для любой формулы $\varphi^*(\bar{x})$ языка L^* существует формула $K_{\varphi^*(\bar{x})}(\bar{x},z)$ языка L, такая что для любого $\bar{a} \in M$ имеет место*

$$[M^* \models \varphi^*(\bar{a}) \iff N \models K_{\varphi^*(\bar{x})}(\bar{a},\alpha)] \qquad (*)$$

Доказательство. Индукцией по построению формулы.

Базисный шаг. Рассмотрим атомарную формулу $\varphi^*(\bar{x})$ языка L^*. Если φ^* есть P, то заменяем $P(x)$ на $x < \alpha$ и получаем формулу языка L. Иначе, φ^* есть формула языка L, оставляем ее без изменений. Очевидно, что в этом случае свойство (*) верно по выбору α и свойствам элементарной подмодели.

Индукционный шаг.

Если $\varphi^*(\bar{x}) \triangleq \neg\psi^*(\bar{x})$. Положим, что $K_{\neg\psi^*(\bar{x})}(\bar{a},\alpha) \triangleq \neg K_{\psi^*(\bar{x})}(\bar{a},\alpha)$. Непосредственно из определений следует, что (*) верно.

Если $\varphi^*(\bar{x}) \triangleq \psi_1^*(\bar{x}) \wedge \psi_2^*(\bar{x})$, тогда $K_{\varphi^*(\bar{x})} \triangleq K_{\psi_1^*(\bar{x})} \wedge K_{\psi_2^*(\bar{x})}$. Очевидно, что (*) верно.

Рассмотрим последний случай: $\varphi^*(\bar{x}) \triangleq \exists y\psi^*(\bar{x},y)$. Вспомним, что тип p квазиодиночный, тогда в силу замечания 2 существует максимальное p-устойчивое отношение эквивалентности $E(x,y) \in L(M)$.

Обозначим

$$K_{\exists y\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{x},\alpha) \triangleq \exists z_1\exists z_2\exists y[z_1 < E(N,\alpha) < z_2 \wedge \forall z(z_1 < z < z_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{x},y,z))].$$

По индукционному предположению для любых $\bar{a}, b \in M$ имеет место

$$M^* \models \psi^*(\bar{a},b) \iff N \models K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a},b,\alpha).$$

Докажем, что для любого $\bar{a} \in M$ также верно

$$M^* \models \exists y \psi^*(\bar{a}, y) \Rightarrow N \models K_{\exists y \psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, \alpha).$$

Зафиксируем произвольный $\bar{a} \in M$, такой что $M^* \models \exists y \psi^*(\bar{a}, y)$. Так как $M \prec N$, существует $b \in M$, такой что $M^* \models \psi^*(\bar{a}, b)$, и по индукционному предположению $N \models K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, \alpha)$.

Формула $K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, z) \in tp(\alpha/M)$. Тип $tp(\alpha/M)$ иррациональный, следовательно, существуют c_1, c_2, такие что $c_1 < P(N) < c_2$ и $(c_1, c_2) \subset K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, M)$. Тогда

$$N \models \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, z)],$$

$$N \models c_1 < E(N, \alpha) < c_2 \wedge \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, z)],$$

$$N \models \exists z_1 \exists z_2 \exists y[z_1 < E(N, \alpha) < z_2 \wedge \forall z[z_1 < z < z_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, y, z)].$$

Таким образом,

$$N \models K_{\exists y \psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, \alpha).$$

Теперь докажем, что для любого $\bar{a} \in M$ имеет место

$$N \models K_{\exists y \psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, \alpha) \Rightarrow M^* \models \exists y \psi^*(\bar{a}, y).$$

Пусть $N \models K_{\exists y \psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, \alpha)$. Положим

$$\theta_1(z_1, \bar{a}, \alpha) \triangleq \exists z_2 \exists y[z_1 < E(N, \alpha) < z_2 \wedge \forall z(z_1 < z < z_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{x}, y, z))].$$

Если $N \models \theta_1(\gamma_1, \bar{x}, \alpha)$, то $\gamma_1 < E(N, \alpha)$ и для любого $\gamma_1' \in N$ ($\gamma_1 < \gamma_1' < E(N, \alpha)$) следует, что $\gamma_1' \in \theta_1(N, \bar{a}, \alpha)$. Так как $\theta_1(z, \bar{a}, \alpha)$ не содержит $E(N, \alpha)$, то она не является выпуклой влево формулой. Это легко исправить, добавив $E(z_1, \alpha)$. Пусть

$$\theta_1'(z_1, \bar{a}, \alpha) \triangleq \theta_1(z_1, \bar{a}, \alpha) \vee E(z_1, \alpha).$$

Формула θ_1' выпуклая влево и $\theta_1'(N)$ больше, чем $E(N, \alpha)$. В силу того, что $E(z_1, \alpha)$ маскимальная p-устойчивая формула, получаем, что θ_1' не p-устойчива. Значит существует элемент $c_1 \in \theta_1'(N, \bar{a}, \alpha) \cap M$, такой что $N \models \theta_1'(c_1, \bar{a}, \alpha)$. Отсюда $N \models \theta_1(c_1, \bar{a}, \alpha)$.

Положим

$$\theta_2(z_2, c_1, \bar{a}, \alpha) \triangleq \exists y[c_1 < E(N, \alpha) < z_2 \wedge \forall z(c_1 < z < z_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{x}, y, z))].$$

Формула θ_2 не является выпуклой вправо. Введем формулу $\theta_2'(z_2, c_1, \bar{a}, \alpha) \triangleq \theta_2(z_2, c_1, \bar{a}, \alpha) \vee E(z_2, \alpha)$. Так же, как и θ_1', формула $\theta_2'(z_2, c_1, \bar{a}, \alpha)$ не p-устойчивая, тогда существует элемент $c_2 \in \theta_2'(N, c_1, \bar{a}, \alpha) \cap M$, такой что $N \models \theta_2'(c_2, c_1, \bar{a}, \alpha)$, что влечёт $N \models \theta_2(c_2, c_1, \bar{a}, \alpha)$.

Таким образом,

$$N \models \exists y[c_1 < E(N, \alpha) < c_2 \wedge \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, y, z)],$$

$$N \models \exists y \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, y, z)].$$

Так как $M \prec N$, $M \models \exists y \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, y, z)]$, тогда существует элемент $b \in M$, что верно

$$N \models \forall z[c_1 < z < c_2 \to K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, z)].$$

Так как $c_1 < \alpha < c_2$, то $N \models K_{\psi^*(\bar{x},y)}(\bar{a}, b, \alpha)$. По индукционному предположению имеем $M^* \models \psi^*(\bar{a}, b)$, следовательно, $M^* \models \exists y \psi^*(\bar{a}, y)$.

Замечание 3 ([1], стр. 1388). *Пусть M – модель слабо о-минимальной теории, M^* – обогащение модели M унарным предикатом, где реализация предиката есть выпуклое множество и N – $|M|^+$ – насыщенное элементарное расширение модели M. Предположим, что для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M, (*)$ существует $\bar{\gamma} \in N \setminus M$, такой что для любой $(M \cup \bar{\alpha})$-определимой формулы $\phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ языка L существует $(N \cup \bar{\alpha} \bar{\cup} \bar{\gamma})$-определимая формула $K_\Phi(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ языка L, такая что для любого $\bar{a} \in M$ имеет место $[\exists b \in M, N \models \Phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow N \models K_\Phi(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})]$.*
Тогда M^* – модель слабо о-минимальной теории.

Из теоремы 1 и замечания 3 получим

Следствие 1 . *Пусть M – модель слабо о-минимальной теории языка L, N – $|M|^+$– насыщенное элементарное расширение модели M, $p(x) \in S_1(M)$ – иррациональный квазиодиночный тип, $\alpha \models p$. Тогда, если $P(x)$ – новый символ отношения, реализуемый в M множеством $(-\infty, \alpha) \cap M$, $L^* = L \cup \{P\}$ и $M^* = \langle M, L^* \rangle$, то M^* – модель слабо о-минимальной теории.*

Отметим, что о-минимальные варианты теоремы 1 и следствия 1 были доказаны в [3], (с. 5442).

2. Основной результат.

Определение 8 [2]. *Пусть N – $|M|^+$ – насыщенна, $A \subset M$, $p, q \in S_1(A)$. Будем говорить, что* тип p не почти ортогонален типу q *($p \not\perp^a q$), если существует A–формула $\phi(x, y)$ такая, что для любого $\alpha \in p(N)$ существуют $\beta_1, \beta_2 \in q(N)$, такие что $\emptyset \neq \phi(N, \alpha) \subset q(N)$ и $\beta_1 < \phi(N, \alpha) < \beta_2$.*

Определение 9 . *Пусть N — $|M|^+$-насыщенна, $A \subset M$, $p, q \in S_1(A)$. Говорят, что* тип p слабо ортогонален типу q *($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(x)$ определяет полный 2-тип.*

Определение 10 [2]. *Будем говорить, что слабо о-минимальная теория T является* почти о-минимальной, *если для любой модели $M \models T$, для любого множества $A \subseteq M$ и для любых неалгебраических типов $p, q \in S_1(A)$ выполняется следующее: $p \not\perp^a q \Leftrightarrow p \not\perp^w q$.*

Определение 11 . *Семейство типов $\{p_i\}_{i \in I}$ называется n* слабо ортогональным, *если для любых попарно различных $i_1, \ldots, i_n \in I$, $p_{i_1}(x_1) \cup \ldots \cup p_{i_n}(x_n)$ определяет полный n-тип.*

Замечание 4 ([4], с.1516.) *Пусть M – линейно упорядоченная структура. Предположим, что множество реализаций любого типа $p \in S_1(M)$ является выпуклым множеством в любом элементарном расширении для M. Тогда для любого сечения C в M существует не больше двух полных 1-типов над M, расширяющих C.*

Из следствия 1 и замечания 4 получим

Замечание 5 . *Пусть M – модель почти о-минимальной теории языка L, M^* – обогащение модели M унарным предикатом P, где предикат P определяет иррациональное сечение в M, которое квазиодиночно, $L^* = L \cup P$. Тогда любой тип над M языка L имеет не более двух расширений в языке L^*.*

Теорема 2 . *Пусть T – почти о-минимальная теория языка L, M – модель теории T, а M^* – обогащение модели M унарным предикатом P, где $P(x)$ – новый символ отношения, реализуемый в M множеством $(-\infty, \alpha) \cap M$. Предикат P определяет иррациональное квазиодиночное сечение в M. Существуют 2-ортогональное и не 3-ортогональное семейство квазиодиночных типов $\{p, r, q\} \in S_1(A)$, где $A \subset M$, тогда и только тогда, когда M^* не почти о-минимальна.*

Доказательство. Необходимость. Предикат $P(x)$ рассекает тип $p = tp(\alpha/M)$ на два квазирациональных типа: $p_1^* = p \cup \{P(x)\}$ и $p_2^* = p \cup \{\neg P(x)\}$. Пусть $\beta \models q$, а $\gamma \models r$. Тогда получаем новые типы $q^* = tp_*(\beta/M)$ и $r^* = tp_*(\gamma/M)$ языка L^*, где $L^* = L \cup \{P\}$. В силу теоремы 1 и попарной слабой ортогональности типов p, q и r получим, что типы q^* и r^* однозначно определяются типами q и r соответственно.

Действительно, предположим, что q^* не однозначно определяется типом q. Тогда существует формула $\varphi^*(y)$ языка $L^*(M)$, такая что она сама и ее отрицание совместны с типом q. По теореме 1 существует формула $\varphi(y,\alpha)$ языка $L(M)$, такая что $\varphi(N,\alpha) \cap M = \varphi^*(M)$. Получаем, что как $\varphi(y,\alpha)$, так и ее отрицание совместны с типом q, значит, $p \not\perp^w q$. Противоречие.

Докажем, что M^* – не почти о-минимальна. Для этого покажем, что $q^* \perp^a r^*$ и $q^* \not\perp^w r^*$.

По теореме 1 из условий $p \perp^w q$ и $p \perp^w r$ следует, что $p_1^* \perp^w r^*$, $p_2^* \perp^w r^*$ и $p_1^* \perp^w q^*$, $p_2^* \perp^w q^*$.

Пусть $q_1 \triangleq tp(\beta/M \cup \alpha)$, $r_1 \triangleq tp(\gamma/M \cup \alpha)$, N — $|M|^+$-насыщенное элементарное расширение модели M. По условию теоремы и по определению ортогональности типов $s(x,y,z) \triangleq p(x) \cup q(y) \cup r(z)$ – неполный 3-тип. Тогда существует A– определимая формула $\varphi(x,y,z)$ языка L, такая что она сама и ее отрицание совместны с типом $s(x,y,z)$, то есть существуют $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \models s$, где $i = 1,2$, такие что $N \models \varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \wedge \neg\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$. Так как N – большая насыщенная модель, которую можно считать однородной, существует $\tau \in Aut(N/M)$, такой что $\tau(\alpha_2) = \alpha_1$. Тогда $N \models \neg\varphi(\alpha_1,\tau(\beta_2),\tau(\gamma_2)) \wedge \varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$. Если в качестве α взять α_1, получим неортогональность типов q_1 и r_1 – $q_1 \not\perp^w r_1$. А теорема 1 влечет неортогональность типов q^* и r^* – $q^* \not\perp^w r^*$.

Докажем теперь почти ортогональность типов q^* и r^*.

Так как $s(x,y,z) \triangleq p(x) \cup q(y) \cup r(z)$ образует неполный 3-тип, то существует A-определимая формула $\varphi(x,y,z)$ языка L, такая что как она сама, так и ее отрицание совместны с типом $s(x,y,z)$. Зафиксируем $\gamma \models r$. Пусть

$$\varphi^*(\alpha,y,\gamma) \triangleq \exists x[x < P(x)^+ \wedge \varphi(x,y,\gamma)].$$

φ^* – L^*-формула, выделяющая левую или правую части q^*. Предположим, что $q^* \not\perp^a r^*$, тогда существует $\Phi^*(x,y,\alpha)$ такая что, для любого $\gamma \in r^*(N)$ существуют $\beta_1, \beta_2 \in q^*(N)$, такие что $\beta_1 < \Phi^*(N,\gamma,\alpha) < \beta_2$, то есть $V_{q^*}(\gamma) \neq \emptyset$.

Тогда $\Psi(x,\gamma) \triangleq \exists y(\Phi^*(x,y,\gamma) \wedge \varphi(x,y,\gamma))$ делит $p_1^*(N)$. Противоречие, так как $p_1^* \perp^w q^*$. Следовательно, $q^* \perp^a r^*$.

Итак, $q^* \perp^a r^*$ и $q^* \not\perp^w r^*$, значит M^* не почти о-минимальная.

Достаточность. Пусть M^* – не почти о-минимальна, тогда по определению существуют типы r^*, $q^* \in S_1(A)$, такие что $q^* \perp^a r^*$ и $q^* \not\perp^w r^*$. Пусть $\alpha \models p$, $\beta \models q$, $\gamma \models r$, а типы q, r являются сужением типов q^*, r^* до языка L соответственно.

Докажем, что $p \perp^w q$, $p \perp^w r$ и $p \not\perp^w q \times r$.

В силу условий $q^* \perp^a r^*$ и $q^* \not\perp^w r^*$ существует формула $R^*(x,y)$ языка L^*, такая что для любого $\gamma \models r^*$ $R^*(x,\gamma)$ делит тип q^*. Пусть $q_1 = tp(\beta/M \cup \alpha)$, $r_1 = tp(\gamma/M \cup \alpha)$. Тогда по теореме 1 существует формула $R(x,y,\alpha)$ языка L, которая делит типы q_1 и r_1, отсюда $p(x) \cup r(y) \cup q(z)$ – неполный 3-тип, то есть $p \not\perp^w q \times r$.

Пусть $p \not\perp^w q$, то есть существует формула $\varphi(x,y)$ языка L, такая что для любого $\alpha \models p$, $\varphi(x,\alpha)$ делит тип q. В силу почти о-минимальности получаем, что $p \not\perp^a q$ или, что то же самое, $V_q(\alpha) \neq 0$, то есть существует формула $\phi(x,y)$ языка L, такая что для любого $\alpha \models p$ существуют $\beta_1, \beta_2 \models q$, такие что $\beta_1 < \phi(N,\alpha) < \beta_2$. Тогда формула $\Psi(y,\alpha) \triangleq \exists x(\phi(x,\alpha) \wedge \varphi(x,y,\alpha))$ делит тип r, то есть $p \not\perp^w r$, тогда $r \not\perp^w q$, то в силу почти о-минимальности получаем, что $r \not\perp^a q$, тогда существует формула $\phi(x,y)$, такая что для любого $\gamma \models r$ существуют $\beta_1, \beta_2 \models q$, такие что $\beta_1 < \phi(N,\gamma) < \beta_2$. Так как $p \not\perp^w q$, по замечанию 5 тип q имеет ровно два расширения q_1^* и q_2^* в языке L^*, где $q^* \in \{q_1^*, q_2^*\}$ и $q(N) = q_1^*(N) \cup q_2^*(N)$. Тогда существуют $\gamma_1, \gamma_2 \models r$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \models q$, такие что $\beta_1 < \phi(N,\gamma_1) < \beta_2 < \phi(N,\gamma_2) < \beta_3$. Заметим, что β_1, β_2 или β_2, β_3 реализуют один тип: q_1^* или q_2^*. Предположим, $\beta_3 \models q_1^*$. Рассмотрим автоморфизм $\tau \in Aut(N/M)$, такой что $\tau(\beta_2) = \beta_3$. Тогда $\tau(\beta_1) < \phi(N, \tau(\gamma)) < \beta_3$, то есть $V_{q^*}(\tau(\gamma)) \neq 0$. Если $\beta_3 \models q_2^*$, то возьмем такой $\tau \in Aut(N/M)$, что $\tau(\beta_1) = \beta_3$. Тогда $\beta_3 < \phi(N, \tau(\gamma)) < \tau(\beta_2)$, то есть $V_{q^*}(\tau(\gamma)) \neq 0$. В обоих случаях мы получили, что $q^* \not\perp^a r^*$. Противоречие. Следовательно, $p \perp^w q$.

Пример. Пусть $M \triangleq (Q, =, <, +)$. Хорошо известно, что элементарная теория упорядоченной группы рациональных чисел о-минимальна, следовательно, она и почти о-минимальна. Пусть $M^* \triangleq (Q, =, <, +, P^1)$, где $P(x)$ – новый символ отношения, реализуемый в M множеством $(-\infty, \sqrt{2})$. Очевидно, что типы $p = tp(\sqrt{2}/Q)$, $r = tp(\pi/Q)$, $q = tp(\pi + \sqrt{2})$ – одиночные, 2-ортогональные, но не 3-ортогональные. По теореме 2, M^*– не почти о-минимальна.

Следствие 2 . *Пусть M– модель почти о-минимальной бинарной теории. Тогда любое ее обогащение выпуклым предикатом, определяющим квазиодиночное сечение, почти о-минимально.*

Доказательство. Если семейство типов попарно слабо ортогонально, то в силу бинарности оно слабо ортогонально.

Автор благодарит научного руководителя Б. С. Байжанова за постановку задачи, а также выражает признательность Б. С. Байжанову и В. В. Вербовскому за полезные обсуждения и ценные замечания.

Цитированная литература

1. **Baizhanov B.S.** // Journal of Symbolic Logic. 2001. V.66. P. 1382 – 1414, 2001.

2. **Baizhanov B.S.** // Algebra and Model Theory II, edited by A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov. Novosibirsk, 1999. P. 3 – 28.

3. **Macpherson D., Marker D. and Steinhorn Ch.** // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. V.352. P. 5435 – 5483.

4. **Kulpeshov B.Sh.** // Journal of Symbolic Logic. 1998. V.63. P. 1511 – 1528.

Поступила в редакцию 04.11.2006г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

Asanova A.T. **On non-local problem with integral displacement for systems of hyperbolic equations with mixed derivative**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.5 – 11.

A non-local problem with integral displacement for the system of second order hyperbolic equations is considered. Sufficient coefficients conditions of the existence of a unique classical solution of the problem are obtained by the method of additional parameter's introduction and algorithms of its solving are proposed.

References – 6.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

Асанова А.Т. **Гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін интегралдық ығысуы бар бейлокал есеп туралы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.5 – 11.

Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін интегралдық ығысуы бар бейлокал есеп қарастырылады. Қосымша параметрлер енгізу әдісінің көмегімен зерттеліп отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының коэффициенттік жеткілікті шарттары тағайындалған және оны табу тәсілдері ұсынылған.

Библ. – 6.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45,26B40

Balgimbayeva Sh.A. **Recovery the differential operator in anisotropic space Nikol'Skii-Besov** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.12 – 20.

Exact order estimations of recovery error of differential operator in Nikol'skii - Besov's anisotropic spaces using spectrum information of a function (Fourier transformer) are obtained.

References – 4.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45,26B40

Балғымбаева Ш.А. **Дифференциалдык операторын анизотроптық Никольский - Бесов кеңістіктерінде қалпына келтіру.** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.12 – 20.

Никольский - Бесов кеңістіқтерінде дифференциалдық операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру бір әдісінің нақты реттік бағалаулары алынды.

Библ. – 4.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H05

G i r n i s S . R . , U k r a i n e t s V . N . **Problem of streaming load effect on trilaminar casing in elastic space** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.21 – 26.

It's considered a problem of effect of arbitrary local load, running at constant subsonic speed on internal surface of infinite long circular trilaminar shell, located in elastic space. For description of motions of exterior (thin) layers of shell classical equations of the theory of thin shells are used, and for description of motions of medium (thick) layer and environment dynamic equations of theory of elasticity in the floating coordinate system, connected with load are used. Also cases of sliding and aggressive contacts of shell with massive strata are considered. With the help of Fourier's integral transformation on axial coordinate stationary solution of a problem for a case when speed of load is less its critical speed is obtained. The given problem is a modeling at researching dynamics of tunnels of deep laying.
References – 10.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H05

Г и р н и с С . Р . , У к р а и н е ц В . Н . **Серпiмдi ортадағы үш өлшемдi қабықшаға әсер ететiн жүгiрмелi жүктеме туралы есеп** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.21 – 26.

Серпiмдi ортадағы шексiз ұзын үшөлшемдi серпiмдi қабықшаның iшiнде дыбыс жылдамдығына дейiнгi тұрақты жылдамдықпен қозғалатын жергiлiктi жүктеме әсерi туралы есеп шешiлдi. Қабықшаның сыртқы (жұқа) қабаттарының қозғалысын сипаттау үшiн жұқа қабықшалардың классикалық теория теңдеулерi қолданылды. Қабықшаның ортаңғы (қалың) қабаттарының қозғалысын сипаттау үшiн жүктемемен байланысты қозғалмалы координат жүйесiндегi динамикалық серпiмдi теориясының теңдеулерi қолданылды. Массивпен жылжымалы және тұрақты бекiтiлген қабықшаның контактарының жағдайлары қарастырылды. Жүктеменiң қозғалыс жылдамдығы оның критикалық жылдамдықтарынан аз болғандағы жағдай үшiн есептi стационар шешiмi Фурьенiң интегралдық түрлендiруi арқылы алынды. Бұл есеп терең тоннелдер динамикасын зерттеу үшiн моделдi есеп болып табылады.
Библ. – 10.

УДК: 510.67 2000 MSC: 45D05

E s h k e e v A . R . **On some kinds of atomicity among countable models in the class for Δ-PJ-theories and Δ-PR-theories**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.27 – 34.

In this article Δ-PJ-theories and Δ-PR-theories and some kind of their countable models are considered. Relations between h-Δ -algebraic prime and various kinds of atomicity of these theories is prime and different kinds of atomicity of these theories are established. Properties h-Δ-algebraically prime models concerning Δ-PJ-theories, and properties of countable -atomic models of Δ-PR-theories are considered. Results which are Δ-PJ-generalizations of a well-known results of E.A.Paljutin are obtained, and a result connected with a question of existence of total categorical universal is received.
References – 13.

УДК: 510.67 2000 MSC: 45D05

Е ш к е е в А . Р . **Δ-PJ- теориясы және Δ-PR- теориясы үшiн саналмалы сүлбелер класы арасындағы атомдықты кейбiр түрлерi түралы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.27 – 34.

Δ-PJ-теориясы мен Δ-PR-теориясы және олардық кейбір саналмалы түрлері қарастырылады h-Δ алгебралық қарапайымдылығы осы теорияның атомдығының әртүрлі түрлері арасындағы байланыс тағайындалған, h-Δ алгебралық қарапайым сүлбелерді Δ-PR теориясына қатысты қасиеттері қарастырылды. Е.А. Палютиннің нәтижелерін Δ-PJ-жалпылау болып табылатын нәтижелер және жалпы категориялық әмбебапты болуы мәселесі тұрғысында нәтиже алынды.

Библ. – 13.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

I s m a g u l o v M . R . **Estimate of approximation of continuous periodic functions by regular parabolic splines**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.35 – 39.

Estimate of interpolation of continuous periodic functions by generalized parabolic splines is obtained. In particular we obtain a well-known estimate of approximation by polynomial parabolic splines.

References – 2.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

И с м а г у л о в М . Р . **Үзіліссіз периодты функцияларды регулярлы параболалық сплайндармен жуықтау бағалауы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.35 – 39.

Үзіліссіз периодты функцияларды регулярлы интерполяциялық параболалық сплайндармен жуықтауды бағалауы алынған. Дербес жағдайда полиномиалды параболалық сплайндармен жуықтауды белгілі бағалауы.

Библ. – 2.

УДК: 517.929 2000 MSC: 42A16

K a l m e n o v T . S h . , S h a l d a n b a e v A . S h . , S h o m a n b a e v a M . T . **On spectrum nature of operator of periodic problem for heat equation with deviating argument** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.40 – 49.

In this article the spectrum nature of operator of periodic problem for heat conductivity equation with deviating argument and lowest term :

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

where $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ and a – const.

References – 5.

УДК: 517.929 2000 MSC: 42A16

К а л м е н о в Т . Ш . , Ш а л д а н б а е в А . Ш . , Ш о м а н б а е в а М . Т . **Ауытқыған аргументті жылуөткізгіш тендеуі үшін периодтық есебінің операторының спектрінің жаратылысы туралы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.40 – 49.

Бұл еңбекте аргументі аутқыйтын кіші мүшесі бар жылу өткізгіш теңдеудің

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

аралас есебі операторының спектрының табиғаты қараластырылған. Бұл жерде $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ және a – const.

Библ. – 5.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J67, 31A30,31A10

Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. **Representation and properties of Green function of Dirichlet problem for the polyharmonic equations** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P. 50 – 58.

In this article Green function of Dirichlet problem in the polyharmonic equations in the space of any dimension is constructed in explicit form.

References – 7.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J67, 31A30,31A10

Қанғожин Б.Е., Қошанов Б.Д. **Полигармоникалық теңдеулер үшін Дирихле есебінің Грин функциясының қасиеттері жайлы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.50 – 58.

Біртексіз полигармоникалық теңдеу үшін Дирихле есебінің шешімі Грин функциясы арқылы айқын түрде шарда анықталған және қасиеттері көрсетілген.

Библ. – 7.

УДК: 531.36 2000 MSC: 34B37

Makhambayeva I.U. **Existence and stability of stationary solutions of photoproblem of two fixed centres** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P. 59 – 63.

Stationary solutions of photogravitation problem of two fixed centres are obtained and it's proved that unlike a classical problem there exist families of points forming steady cloudy congestions of particles of gas-dust of clouds or micro meteorite particles.

References – 9.

УДК: 531.36 2000 MSC: 34B37

Махамбаева И. **Фотогравитациялық екі қозғалмайтын дене есебінің стационарлы шешімдерінің пайда болуы және орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.59 – 63.

Микрометеоритті және шаңтозаңды бұлттардың бөліктерінің жинақталуының орнықтылығын құрайтын, бүтіндей нүктелердің классикалық есептен айырмашылығын белгілейтін стационарлы шешімдері табылған.

Библ. – 9.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35L10

Muratbekov M. B., Serikbayev Zh. A. **On properties of solutions of one class of differential equation with operator coefficient** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P. 64 – 73.

Class of second order differential equations with variable operator coefficient is under considera-. Existence and divides of inverse operator is proved.

References – 10.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

М ұ р а т б е к о в М. Б., С е р і к б а е в Ж. А. **Операторлы коэффициентті дифференциалдық теңдеудің бір класының шешімінің қасиеттері туралы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б. 64 – 73.

Айнымалы операторлы коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеулер класы қарастырылған. Кері оператордың бар болуы және бөліктенуі дәлелденген.

Библ. – 10.

УДК: 517.92 2000 MSC: 39A10

M y r z a t a e v a K. R. **Estimate of Spesial Solutions of Half-Linear Second Order Differential Disconjugate Equations** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.74 – 81.

Two-sided estimates of spesial solutions of half-linear second order differential disconjugate equation are obtained.

References – 3.

УДК: 517.92 2000 MSC: 39A10

М ы р з а т а е в а К. Р. **Жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық тедеудің арнайы шешімдерін бағалау**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б. 74 – 81.

Жартылай сызықты екінші ретті дифференциалдық тедеудің

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \upsilon(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0,$$

арнайы шешімдері $y > 0$, $y' > 0$ және $y > 0$, $y' < 0$ шарттарды қанағаттандырған жағдайы үшін екіжақты бағалаулары алынған, мұндағы $1 < p < \infty$, $\rho : I \to R$, $\upsilon : I \to R$ оң таңбалы үзіліссіз функциялар $\forall t \in I$.

Библ. – 3.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 3570,35B10

N y s s a n b a y e v a S. E. **Comparison of Algorithm of the Encryption Developed on Basis of Modular Arithmetics, with Encryption Standard AES**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.82 – 91.

The basic characteristics of American encryption standard AES and algorithm of encryption developed with use of non-positional polynomial notations are considered.

References – 11.

УДК: 517.956.3 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

Ң ы с а н б а е в а С. Е. **Модульді арифметика негізінде кұрылған шифрлеу алгоритмін AES шифрлеу стандартымен салыстыру** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б. 82 – 89.

Америка шифрлеу стандарты AES пен позициялы емес полиномды санау жүйесін қолдану арқылы құрылған шифрлеу алгоритмінi негізгі сипаттамалары қарастырылған.

Библ. – 11.

УДК: 521.36 2000 MSC: 34B37

O m a r o v a U . S H . **Existence and stability of collinear points of libration of photocircle problem of three bodies** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.90 – 94.

In this article elliptic boundary problem of three bodies with light pressure is under consideration. Physical clear and geometrical visual interpretation of stability region is given.

References – 4.

УДК: 521.36 2000 MSC: 34B37

О м а р о в а Ү . Ш . **Фотогравитациялық шеңберлік үш дене есебінің либрациясының коллинеарлы нүктелерінің болуы және орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.90 – 94.

Жұмыста шектелген эллиптикалық сәулелі қысымы бар үш дене есебі қарастырылады. Коллинеарлы нүктелердің орнықтылығы мен пайда болу шарттары алынған. Орнықтылық облыстарының физикалық және геометриялық интерпретациясы берілген.

Библ. – 4.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

T u r e k h a n o v a G . O . **On expansions of almost o-minimal theories** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 1 (27). P.95 – 100.

We investigate some special cases of expansion of a model of a weakly o-minimal theory by convex predicate. We consider the case when such expansion preserves almost o-minimality, that is when weak orthogonality of one-types coincides with almost orthogonality. For the considered case a proof of Baizhanov's theorem [1],(p. 1388), on eliminating a quantifier "exists in a model M" for a pair of models $M \prec N$ of weakly o-minimal theory is appreciably simplified.

References – 4.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

Т ө р е х а н о в а Г . О . **О-минималдық дерлік теорияны байыту мәселелері жөнінде**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 1 (27). Б.95 – 100.

Біз әлсіз о-минималды теорияның моделін дөнес унарлық предикатпен байытудың қандай да бір нақты жағдайларын қарастырамыз. Осындай байыту кезіндегі дерлік о-минималдық сақталатын жағдай қарастырылған, яғни типтердің әлсіз ортогональдығы дерлік ортогональдықпен беттеседі. Қарастырылған жағдайда әлсіз о-минималды теорияның $M \preceq N$ екі модель үшін "M моделінде бар"кванторын қысқарту жөніндегі Байжанов [1,б.1388], теоремасының дәлелдеуі жеңілденеді.

Библ. – 4.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 1 (27) 2008

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Жамбыла, 25, к.705
тел.: 8(7272)-91-13-15, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 27.03.2008г.
Тираж 300 экз. Объем 108 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru