ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2005 том 5 № 4 (18)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 5 № 4 (18) 2005

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 5, № 4 (18), 2005

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 5 — 16*

УДК 517.5

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО СУММИРОВАНИЯ С ВЕСОМ

А. М. Абылаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
473021 Астана ул. Мунайтпасова, 5 butulya@mail.ru

На множестве числовых последовательностей вводится оператор дробного суммирования с весом. При различных соотношениях между параметрами оператора найдены необходимые и достаточные условия его ограниченности и компактности.

1. Введение. Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 0$ и $v = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$, $w = \{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ – весовые последовательности, т.е. числовые последовательности с положительными членами. Через $l_{q,v}$ обозначим пространство числовых последовательностей $f = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых конечен функционал

$$\|f\|_{q,v} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|^q v_i\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q < \infty. \tag{1}$$

При $1 \le q < \infty$ функционал (1) является нормой.

В случае $v_i \equiv 1$, $i \ge 0$, полагаем $l_{q,v} \equiv l_q$, $\|f\|_{q,v} \equiv \|f\|_q$.

На множестве числовых последовательностей $f = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ рассмотрим оператор S_w суммирования с весом w, действующий по закону

$$(S_w f)_i = \sum_{j=0}^{i} f_j w_j, \quad i \ge 0.$$

Для любого натурального α индуктивно определим оператор α-кратного суммирования с весом w:

$S_w^{\alpha} = S_w(S_w^{\alpha-1})$, $\quad S_w^0 = I -$ тождественный оператор.

Легко показать, что при $\alpha \ge 1$

$$\frac{1}{(\alpha-1)!}\sum_{j=0}^{i} (W_i - W_{j-1})^{\alpha-1} f_j w_j \le (S_w^{\alpha} f)_i \le \sum_{j=0}^{i} (W_i - W_{j-1})^{\alpha-1} f_j w_j, \;\; i \ge 0,$$

Keywords: *operator of fractional summability, boundedness, compactness, Hardy's inequalities*
2000 Mathematics Subject Classification: 47B37, 47A30

где $W_i = \sum\limits_{k=0}^{i} w_k$ при $i \geq 0$ и $W_{-1} \equiv 0$.

Для любого действительного $\alpha > 0$ положим

$$(S_w^\alpha f)_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{f_j w_j}{(W_i - W_{j-1})^{1-\alpha}}, \quad i \geq 0 \tag{2}$$

и оператор S_w^α назовем оператором дробного суммирования порядка α с весом w. Основной целью настоящей работы является установление ограниченности, компактности оператора дробного суммирования S_w^α, $0 < \alpha < 1$, из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$.

При $w_i \equiv 1$ $\forall i \geq 0$ оператор $S_w^\alpha \equiv S^\alpha$ имеет вид

$$(S^\alpha f)_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{f_j}{(i+1-j)^{1-\alpha}}, \quad i \geq 0. \tag{3}$$

При $\alpha \geq 1$ вопрос ограниченности и компактности оператора (2) из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ вытекает из результатов работы [1]. А в случае $0 < \alpha < 1$ вопрос ограниченности из l_p в $l_{q,v}$ оператора (3) рассмотрен в работе [2].

Отметим, что непрерывный аналог оператора (2) имеет вид

$$(K_\alpha f)(x) = \int_0^x \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \tag{4}$$

где $W(x) = \int\limits_0^x w(s)ds$, а $w(\cdot)$ – неотрицательная и для любого $x > 0$ суммируемая на $(0, x)$ функция.

В работе [3] установлены критерии ограниченности из $L_{p,w}(0,\infty)$ в $L_{q,v}(0,\infty)$ оператора (4). Однако методы доказательства установленных результатов в [3] основаны на непрерывности функции $W(x)$, $x > 0$, которые не проходят в дискретном случае.

Далее для числовой последовательности $f = \{f_i\}_{i=0}^\infty$ пишем $f \geq 0$ $(f > 0)$, если $f_i \geq 0$ $(f_i > 0)$ для всех $i \geq 0$. Соотношение $A \ll B$ означает, что существует положительная константа C, зависящая может быть от несущественных параметров, и имеет место неравенство $A \leq CB$ и пишем $A \approx B$, если имеет место $A \ll B \ll A$.

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных утверждений нам необходимы некоторые известные утверждения и соотношения.

Наряду с оператором (2) рассмотрим оператор

$$(H_\alpha f)_i = \frac{1}{W_i^{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{i} f_j w_j, \quad i \geq 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что для $f \geq 0$

$$S_w^\alpha f \geq H_\alpha f. \tag{6}$$

Критерий ограниченности и компактности из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ оператора (5) вытекает из известных результатов, относящихся к обобщенным неравенствам Харди (см., например, [4-7]). Эти утверждения мы здесь приведем в виде теорем A, B и B*.

Теорема A. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Оператор (5) ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ тогда и только тогда, когда*

$$A = \sup_{k \geq 0} W_k^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

при этом $\|H_\alpha\| \approx A$, *где* $\|H_\alpha\|$ – *норма оператора* H_α *из* $l_{p,w}$ *в* $l_{q,v}$.

Теорема B. *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. *Оператор (5) ограничен из* $l_{p,w}$ *в* $l_{q,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$B = \left(\sum_{i=0}^{\infty} W_i^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} W_j^{q(\alpha-1)} v_j \right)^{\frac{p}{p-q}} w_i \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

причем $\|H_\alpha\| \approx B$.

Для оператора $(H_\alpha^* g)_i = \sum\limits_{k=i}^{\infty} \frac{g_k v_k}{W_k^{1-\alpha}}$, $i \geq 0$ справедлива

Теорема B*. *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. *Оператор* H_α^* *ограничен из* $l_{p,w}$ *в* $l_{q,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$B^* = \left(\sum_{i=0}^{\infty} W_i^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{j=i}^{\infty} W_j^{p'(\alpha-1)} v_j \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} w_i \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

при этом $\|H_\alpha^*\| \approx B^*$.

Теорема C. ([8], с. 32). *Пусть* $q \geq 1$. *Для предкомпактности некоторого множества* $M \subset l_q$ *необходимо и достаточно, чтобы* M *было ограниченным и*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{f\in M} \sum_{i=N}^{\infty} |f_i|^q = 0.$$

Следующие соотношения общеизвестны, но для полноты приведем их с доказательством.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \beta < 1$. *Тогда*

$$W_i^{1-\beta} \leq \sum_{k=0}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^\beta} \leq \frac{1}{\beta} W_i^{1-\beta}.$$

Действительно, имеем

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^\beta} \geq \frac{1}{W_i^\beta} \sum_{k=0}^{i} w_k = W_i^{1-\beta}.$$

Для $0 \leq s \leq i$ положим $\sum\limits_{k=s}^{i} w_k = \widetilde{W}_s$ и $\widetilde{W}_{i+1} \equiv 0$. Тогда $w_k = \widetilde{W}_k - \widetilde{W}_{k+1}$, $W_i - W_{k-1} = \widetilde{W}_k$ при $0 \leq k \leq i$ и $\widetilde{W}_0 = W_i$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^\beta} = \sum_{k=0}^{i} \widetilde{W}_k^{-\beta} (\widetilde{W}_k - \widetilde{W}_{k+1}) = \sum_{k=0}^{i} \widetilde{W}_k^{-\beta} \int\limits_{\widetilde{W}_{k+1}}^{\widetilde{W}_k} dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{i} \int\limits_{\widetilde{W}_{k+1}}^{\widetilde{W}_k} t^{-\beta} dt = \int\limits_0^{\widetilde{W}_0} t^{-\beta} dt = \int\limits_0^{W_i} t^{-\beta} dt = \frac{1}{\beta} W_i^{1-\beta}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\alpha > 0$ и $i > j$. Тогда*

$$\sum_{k=j}^{i} W_k^\alpha w_k \geq \frac{1}{\alpha+1}(W_i^{\alpha+1} - W_{j-1}^{\alpha+1}).$$

Действительно,

$$\sum_{k=j}^{i} W_k^\alpha w_k = \sum_{k=j}^{i} W_k^\alpha (W_k - W_{k-1}) = \sum_{k=j}^{i} W_k^\alpha \int\limits_{W_{k-1}}^{W_k} dt \geq$$

$$\geq \sum_{k=j}^{i} \int\limits_{W_{k-1}}^{W_k} t^\alpha dt = \int\limits_{W_{j-1}}^{W_i} t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}(W_i^{\alpha+1} - W_{j-1}^{\alpha+1}).$$

3. Критерий ограниченности и компактности оператора (2) при $p \leq q$.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$. Тогда оператор (2) ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ тогда и только тогда, когда $A < \infty$, при этом $\|S_w^\alpha\| \approx A$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор S_w^α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$, т.е.

$$\|S_w^\alpha f\|_{q,v} \leq \|S_w^\alpha\| \cdot \|f\|_{p,w} \quad \forall f \geq 0.$$

Из (5) в силу (6) следует, что

$$\|H_\alpha f\|_{q,v} \leq \|S_w^\alpha\| \cdot \|f\|_{p.w} \quad \forall f \geq 0, \tag{7}$$

т.е. оператор H_α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ и $\|H_\alpha\| \leq \|S_w^\alpha\|$. Тогда на основании теоремы **A** величина $A < \infty$ и $\|H_\alpha\| \approx A$. Следовательно,

$$\|S_w^\alpha\| \gg A. \tag{8}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $A < \infty$. Покажем, что выполняется неравенство

$$\|S_w^\alpha f\|_{q,v} \leq C\|f\|_{p,w} \quad \forall f \geq 0 \tag{9}$$

с некоторой константой $C > 0$, независящей от f.

Величина W_i по i не убывает. Для любого целого $i \geq 0$ положим $k_i = \max\{k \in Z: \ 2^k \leq W_i\}$, где Z – множество целых чисел. Из определения величины k_i и из свойств W_i следует, что

$$2^{k_i} \leq W_i < 2^{k_i+1}, \quad i \geq 0, \tag{10}$$

и величина k_i, $i \geq 0$, – ступенчатая и неубывающая функция от $i \geq 0$. Поэтому существуют строго возрастающие последовательности чисел m_j и n_j, $j = 0, 1, ..., s$, $0 \leq s \leq \infty$, такие, что

$$k_i = n_j \ \text{при} \quad m_j \leq i < m_{j+1}, \tag{11}$$

$$2^{n_j} \leq W_i < 2^{n_j+1} \ \text{при} \quad m_j \leq i < m_{j+1} \tag{12}$$

и

$$[0, \infty) = \underset{j}{\cup}[m_j, m_{j+1}), \tag{13}$$

где $[0,\infty)$ и $[m_j, m_{j+1})$ – множества целых чисел, принадлежащих промежуткам $[0,\infty)$ и $[m_j, m_{j+1})$, соответственно. В случае $s<\infty$ будем считать, что $m_{s+1}=\infty$.

Для любого k $m_j \le k < m_{j+1}$ и для любого $\beta>0$

$$W_k^\beta - W_{m_{j-1}-1}^\beta \ge 2^{\beta n_j}(1-2^{-\beta}). \tag{14}$$

Действительно, из (12) следует $W_k^\beta \ge 2^{n_j}$, $W_{m_{j-1}-1} < 2^{n_{j-2}+1}$. Но в силу строгого возрастания последовательности $\{n_j\}$, $n_{j-2}+1 \le n_{j-1} \le n_j - 1$, имеем $W_{m_{j-1}-1} < 2^{n_j-1}$ и $W_k^\beta - W_{m_{j-1}-1}^\beta \ge 2^{\beta n_j} - 2^{\beta(n_j-1)} = 2^{\beta n_j}(1-2^{-\beta})$.

Из (13) следует, что

$$\|S_w^\alpha f\|_{q,v}^q = \sum_{k=0}^\infty v_k \left(\sum_{i=0}^k \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q = \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=0}^k \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q =$$

$$= \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left[\left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} + \sum_{i=m_{j-1}+1}^k\right) \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right]^q \le$$

$$\le 2^{q-1} \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left[\left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q + \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^k \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q\right] \ll$$

$$\ll \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q +$$

$$+ \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^k \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q = J_1 + J_2. \tag{15}$$

Оценим величины J_1 и J_2 по отдельности.

Из (14) при $\beta=1$ и $k=m_j$ вытекает

$$W_{m_j} - W_{m_{j-1}-1} \ge \frac{1}{2} 2^{n_j} = \frac{1}{2^2} 2^{n_j+1}. \tag{16}$$

Поэтому на основании (16) и (12) имеем

$$J_1 = \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q \le$$

$$\le \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \frac{1}{\left(W_{m_j} - W_{m_{j-1}-1}\right)^{q(1-\alpha)}} \left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} f_i w_i\right)^q \le$$

$$\le 2^{2q(1-\alpha)} \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{v_k}{2^{(n_j+1)q(1-\alpha)}} \left(\sum_{i=0}^{m_{j-1}} f_i w_i\right)^q \ll \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\frac{1}{W_k^{1-\alpha}} \sum_{i=0}^{m_{j-1}} f_i w_i\right)^q \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty v_k \left(\frac{1}{W_k^{1-\alpha}} \sum_{i=0}^k f_i w_i\right)^q = \|H_\alpha f\|_{q,v}^q. \tag{17}$$

Откуда в силу теоремы **A**

$$J_1 \ll A^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{18}$$

Применяя неравенство Гельдера и лемму 1, получим

$$J_2 = \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{k} \frac{f_i w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}} \right)^q \leq$$

$$\leq \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{k} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{k} \frac{w_i}{(W_k - W_{i-1})^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} \leq$$

$$\leq \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{w_i}{(W_k - W_{i-1})^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} \ll$$

$$\ll \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} v_k W_k^{\frac{q}{p'} - q(1-\alpha)} =$$

$$= \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}} \cdot W_k^{\frac{q}{p'}} \leq$$

(учитываем, что в силу (12) $W_k^{\frac{q}{p'}} < 2^{(n_j+1)\frac{q}{p'}}$ при $m_j \leq k \leq m_{j+1} - 1$)

$$\leq \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \cdot 2^{(n_j+1)\frac{q}{p'}} \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}. \tag{19}$$

Откуда в силу $W_{m_j} \geq 2^{n_j}$

$$J_2 \ll 2^{\frac{q}{p'}} \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \cdot W_{m_j}^{\frac{q}{p'}} \sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}} \ll$$

$$\ll \sup_j \left(W_{m_j}^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \leq A^q \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \leq$$

С учетом $\frac{q}{p} \geq 1$ применяем неравенство Иенсена

$$\leq A^q \left(\sum_j \sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \leq A^q \left(\sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j-1} + \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} \right) f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{q}{p}} A^q \|f\|_{p,w}^q \ll A^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{20}$$

Из (15), (18) и (20) имеем

$$\|S_w^\alpha f\|_{q,v} \ll A \|f\|_{p,w} \quad \forall f \geq 0.$$

Следовательно, оператор S_w^α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ и $\|S_w^\alpha\| \ll A$, что вместе с (8) дает $\|S_w^\alpha\| \approx A$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \le q < \infty$. Оператор S_w^α компактен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{k\to\infty} W_k^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор S_w^α компактен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$. Тогда он ограничен и по теореме 1 $A < \infty$. Для любого целого $N \ge 0$ определим последовательность $f_N = \{f_{N,i}\}_{i=0}^{\infty}$, где

$$f_{N,i} = a, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N \ \text{ и } \ f_{N,i} = 0, \quad i = N+1,\ N+2,\ \ldots,\ a = \left(\sum_{j=0}^{N} w_j\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Легко видеть, что $\|f_N\|_{p,w} = 1 \ \forall N \ge 0$. В силу компактности оператора S_w^α множество $\{S_w^\alpha f_N, \quad N \ge 0\}$ предкомпактно в $l_{q,v}$, а, следовательно, множество $\{v^{\frac{1}{q}} S_w^\alpha f_N,\ N \ge 0\}$ предкомпактно в l_q. Тогда по теореме **C**

$$\lim_{n\to 0} \sup_{N\ge 0} \sum_{k=n}^{\infty} v_k \left(S_w^\alpha f_N\right)^q = 0. \tag{22}$$

Имеем

$$\sup_{N\ge 0} \sum_{k=n}^{\infty} v_k (S_w^\alpha f_N)^q \ge \sup_{N\le n} \sum_{k=n}^{\infty} v_k \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f_{N,i} w_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}\right)^q \ge$$

$$\ge \sup_{N\le n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}} \left(a \sum_{i=0}^{N} w_i\right)^q = W_n^{\frac{q}{p'}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{v}{W_k^{q(1-\alpha)}}.$$

Из последнего неравенства и из (22) следует (21). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (21). Тогда легко видеть, что $A < \infty$. Поэтому по теореме 1 оператор S_w^α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$. Следовательно, множество $\{v^{\frac{1}{q}} S_w^\alpha f_N,\ \|f\|_{p,w} \le 1\} \equiv M$ ограничено в l_q.

По теореме **C** множество M предкомпактно в l_q, а, следовательно, множество $\{S_w^\alpha f_N,\ \|f\|_{p,w} \le 1\}$ предкомпактно в $l_{q,v}$, если

$$\lim_{n\to 0} \sup_{\|f\|_{p,w}\le 1} \sum_{k=n}^{\infty} v_k \left|(S_w^\alpha f)_k\right|^q = 0. \tag{23}$$

Зафиксируем произвольное натуральное $n > 1$ и положим $\tilde{v} = \{\tilde{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\tilde{v}_i = 0$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, $\tilde{v}_i = v_i$, $i = n,\ n+1,\ \ldots$.

Рассмотрим оператор S_w^α из $l_{p,w}$ в $l_{q,\tilde{v}}$. По теореме 1

$$\|S_w^\alpha f\|_{q,\tilde{v}}^q = \sum_{k=n}^{\infty} v_k \left|(S_w^\alpha f)_k\right|^q \ll \tilde{A}^q \|f\|_{p,w}^q, \tag{24}$$

где $\widetilde{A}^q = \sup\limits_{k\ge 0} W_k^{\frac{q}{p'}} \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{\tilde{v}_i}{W_i^{q(1-\alpha)}}$.

Из определения последовательности $\tilde{v}$ следует

$$\widetilde{A}^q = \sup_{k\ge n} W_k^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}}.$$

Поэтому соотношение (24) для f, $\|f\|_{p,w} \le 1$, имеет вид

$$\sup_{\|f\|_{p,w}\le 1} \sum_{k=n}^{\infty} v_k \, |(S_w^\alpha f)_k|^q \ll \sup_{k\ge n} W_k^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}}. \tag{25}$$

Но в силу (21)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} W_k^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, W_n^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}} = \lim_{n\to\infty} W_n^{\frac{q}{p'}} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{q(1-\alpha)}} = 0,$$

поэтому из (25) следует (23), тем самым, оператор S_w^α компактен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$. Теорема 2 доказана.

Ограниченность и компактность оператора S_w^α из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ эквивалентны соответственно ограниченности и компактности сопряженного оператора $(S_w^\alpha)^*$ из $l_{q',v^{1-q'}}$ в $l_{p',w^{1-p'}}$, что, в свою очередь, равносильно соответственно ограниченности и компактности из $l_{q',v}$ в $l_{p',w}$ оператора $T_\alpha = w^{-1}(S_w^\alpha)^* v$, который действует по закону

$$(T_\alpha g)_i = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{g_k v_k}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}}, \quad i \ge 0. \tag{26}$$

Поэтому теорема 1 и теорема 2 соответственно дают критерии ограниченности и компактности из $l_{q',v}$ в $l_{p',w}$ оператора T_α. Сделаем переход $p' \to q$, $q' \to p$, тогда из теорем 1 и 2 имеем
Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le q < \frac{1}{1-\alpha}$. Тогда оператор T_α ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,w}$ тогда и только тогда, когда*

$$A^* = \sup_{k\ge 0} W_k^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом $\|T_\alpha\| \approx A^*$.
Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 < p \le q < \frac{1}{1-\alpha}$. Тогда оператор T_α компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,w}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{k\to\infty} W_k^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} = 0.$$

4. Критерии ограниченности оператора (2) при $p > q$.
Теорема 5. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < q < p < \infty$, $p > \frac{1}{\alpha}$. Тогда оператор S_w^α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ тогда и только тогда, когда $B < \infty$, при этом $\|S_w^\alpha\| \approx B$.*
Доказательство. *Необходимость.* Из неравенства (7) следует, что оператор H_α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ и $\|H_\alpha\| \le \|S_w^\alpha\|$. Тогда в силу теоремы **B** величина $B < \infty$ и

$$\|S_w^\alpha\| \gg B. \tag{27}$$

Достаточность. Пусть $B < \infty$. Покажем ограниченность оператора S_w^α. Из доказательства теоремы 1 имеем соотношения (15), (17) и (19). А из (17) на основании теоремы **B** имеем

$$J_1 \ll B^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{28}$$

В силу (19)

$$J_2 \ll \sum_j \left(\sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i \right)^{\frac{q}{p}} 2^{n_j \frac{q}{p'}} \sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}} \le$$

(применим неравенство Гельдера с показателями $\frac{p}{q}$ и $\frac{p}{p-q}$)

$$\leq \left(\sum_j \sum_{i=m_{j-1}}^{m_{j+1}-1} f_i^p w_i\right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_j 2^{n_j \frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

(используем неравенство $W_{m_j}^{\frac{q(p-1)}{p-q}} - W_{m_{j-1}-1}^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \geq 2^{\frac{q(1-p)}{p-q}} \cdot 2^{n_j \frac{q(p-1)}{p-q}}$, вытекающее из (14))

$$\ll \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i^p w_i\right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_j \left(W_{m_j}^{\frac{q(p-1)}{p-q}} - W_{m_{j-1}-1}^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\right) \left(\sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

(на основании леммы 2)

$$\ll \left(\sum_j \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j} W_i^{\frac{p(q-1)}{p-q}} w_i \left(\sum_{k=m_j}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,w}^q \leq$$

$$\leq \left(\sum_j \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j} W_i^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}} w_i\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,w}^q \leq$$

$$\leq \left(2\sum_j \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j-1} W_i^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}} w_i\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,w}^q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{i=0}^{\infty} W_i^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{v_k}{W_k^{q(1-\alpha)}}\right)^{\frac{p}{p-q}} w_i\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,w}^q = B^q \|f\|_{p,w}^q. \tag{29}$$

Из (15), (28) и (29) имеем, что оператор S_w^α ограничен из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ и имеет место оценка $\|S_w^\alpha\| \ll B$, которая вместе с (27) дает $\|S_w^\alpha\| \approx B$. Теорема 5 доказана.

Замечание. *Вопрос компактности оператора S_w^α из $l_{p,w}$ в $l_{q,v}$ при $1 \leq q < p < \infty$ эквивалентен условию $B < \infty$, так как по теореме Питта (Pitt) (см. [9], часть I, предложение 2) любой линейный непрерывный из l_p в l_q оператор при $1 \leq q < p < \infty$ компактен.*

Для оператора (26) справедлива

Теорема 6. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < q < \min\left\{p, \frac{1}{1-\alpha}\right\} < \infty$, $p > 1$. Тогда оператор T_α ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,w}$ тогда и только тогда, когда $B^* < \infty$, причем $\|T_\alpha\| \approx B^*$.*

Доказательство. В случае $1 < q < \min\left\{p, \frac{1}{1-\alpha}\right\}$ справедливость утверждения теоремы 6 получаем из теоремы 5, переходя к сопряженному оператору.

Теорему 6 докажем в случае $0 < q \leq 1 < p < \infty$. Условия необходимости $B^* < \infty$ и оценка

$$\|T_\alpha\| \ll B^* \tag{30}$$

следуют из неравенства $T_\alpha g \geq H_\alpha^* g$ для $g \geq 0$ и теоремы $\mathbf{B}^*$.

Докажем достаточность. Пусть $B^* < \infty$ и $0 < q \leq 1 < p < \infty$. Имеем

$$\|T_\alpha g\|_{q,w}^q = \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}}\right)^q =$$

$$= \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left[\left(\sum_{i=k}^{m_{j+1}-1} + \sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} + \sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \right) \frac{g_i v_i}{(W_k - W_{i-1})^{1-\alpha}} \right]^q \le$$

$$\le 3^{q-1} \left[\sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=k}^{m_{j+1}-1} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q + \right.$$

$$+ \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q +$$

$$\left. + \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \right] \ll J_1^* + J_2^* + J_3^*. \tag{31}$$

В выражении для J_1^*, используя представления $w_k = w_k^q \cdot w_k^{1-q}$, применим неравенство Гельдера с показателями $\frac{1}{1-q}$ и $\frac{1}{q}$, а затем, меняя местами операции суммирования, получим

$$J_1^* \le \sum_j \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \right)^{1-q} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \sum_{i=k}^{m_{j+1}-1} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \le$$

$$\le \sum_j W_{m_{j+1}-1}^{1-q} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i v_i \sum_{k=m_j}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \ll$$

$$\ll \sum_j 2^{n_j(1-q)} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i v_i \sum_{k=0}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \ll$$

(на основании леммы 1 и соотношения (12))

$$\ll \sum_j 2^{n_j(1-q)} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i \frac{v_i}{W_i^{1-\alpha}} W_i \right)^q \ll \sum_j 2^{n_j(1-q)} \cdot 2^{q n_j} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i \frac{v_i}{W_i^{1-\alpha}} \right)^q \le$$

(дважды применим неравенство Гельдера)

$$\le \sum_j 2^{n_j} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} |g_i|^p v_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} \le$$

$$\le \left(\sum_j \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i^p v_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_j 2^{n_j \frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} g_i \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

(используем оценку $W_{m_j}^{\frac{p}{p-q}} - W_{m_{j-1}-1}^{\frac{p}{p-q}} \ge 2^{-\frac{p}{p-q}} \cdot 2^{n_j \frac{p}{p-q}}$, вытекающую из (14))

$$\ll \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i^p v_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_j \left(W_{m_j}^{\frac{p}{p-q}} - W_{m_{j-1}-1}^{\frac{p}{p-q}} \right) \left(\sum_{i=m_j}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

(на основание леммы 2)

$$\ll \left(\sum_j \sum_{k=m_{j-1}}^{m_j} W_k^{\frac{q}{p-q}} w_k \left(\sum_{i=m_j}^{\infty} \frac{v_i}{W_k^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \|g\|_{p,v}^q \le$$

$$\le \left(\sum_j \sum_{k=m_{j-1}}^{m_j} W_k^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} w_k \right)^{\frac{p-q}{p}} \|g\|_{p,v}^q \le$$

$$\le \left(2\sum_{k=0}^{\infty} W_k^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} w_k \right)^{\frac{p-q}{p}} \|g\|_{p,v}^q \ll (B^*)^q \|g\|_{p,v}^q. \tag{32}$$

Поступая также, как для оценки J_1^*, имеем

$$J_2^* \le \sum_j \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \right)^{1-q} \cdot \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q <$$

$$< \sum_j 2^{n_j(1-q)} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} g_i v_i \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \ll$$

$$\ll \sum_j 2^{n_j(1-q)} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} g_i v_i \sum_{k=0}^{i} \frac{w_k}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \ll \sum_j 2^{n_{j+1}(1-q)} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} g_i \frac{v_i}{W_i^{1-\alpha}} W_i \right)^q \le$$

$$\le \sum_j 2^{n_{j+1}} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} g_i^p v_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q}{p'}} \le$$

$$\le \left(\sum_j \sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} g_i^p v_i \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_j 2^{n_{j+1}\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{m_{j+2}-1} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_j \sum_{k=m_j-1}^{m_{j+1}} W_k^{\frac{q}{p-q}} w_k \left(\sum_{i=m_{j+1}}^{\infty} \frac{v_i}{W_i^{p'(1-\alpha)}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \cdot \|g\|_{p,v}^q \ll (B^*)^q \|g\|_{p,v}^q. \tag{33}$$

Чтобы оценить J_3^*, предварительно произведем следующую оценку:

$$\sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{m_{j+1}-1})^{1-\alpha}} \le \sum_{s\ge 2} \sum_{i=m_{j+s}}^{m_{j+s+1}} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{m_{j+1}-1})^{1-\alpha}} \le$$

$$\le \sum_{s\ge 2} \frac{1}{(W_{m_{j+s}} - W_{m_{j+1}-1})^{1-\alpha}} \cdot \sum_{i=m_{j+s}}^{m_{j+s+1}-1} g_i v_i \le$$

(используем соотношения $W_{m_{j+s}} - W_{m_{j+1}-1} \geq 2^{n_{j+s}} - 2^{n_j+1} \geq 2^{n_{j+s}} - 2^{n_{j+1}} \geq 2^{n_{j+s}} - 2^{n_{j+s}-1} = \frac{1}{2}2^{n_{j+s}}$ и $2^{n_{j+s}} > \frac{1}{2}W_i$ при $m_{j+s} \leq i \leq m_{j+s+1} - 1$)

$$\leq \sum_{s\geq 2} 4^{1-\alpha} \sum_{i=m_{j+s}}^{m_{j+s+1}-1} \frac{g_i v_i}{W_i^{1-\alpha}} = 4^{1-\alpha} \sum_{s\geq 2} \sum_{i=m_{j+s}}^{m_{j+s+1}-1} \frac{g_i v_i}{W_i^{1-\alpha}} = 4^{1-\alpha} \sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{W_i^{1-\alpha}}.$$

На основании выше полученной оценки имеем

$$J_3^* = \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{k-1})^{1-\alpha}} \right)^q \leq$$

$$\leq \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{(W_i - W_{m_{j+1}-1})^{1-\alpha}} \right)^q \ll$$

$$\ll \sum_j \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} w_k \left(\sum_{i=m_{j+2}}^{\infty} \frac{g_i v_i}{W_i^{1-\alpha}} \right)^q \leq \sum_{k=0}^{\infty} w_k \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{g_i v_i}{W_i^{1-\alpha}} \right)^q = \|H_\alpha^* g\|_{q,w}^q.$$

Откуда и в силу Теоремы $\mathbf{B}^*$ получим

$$J_3^* \ll (B^*)^q \|g\|_{p,v}^q. \tag{34}$$

Из (31), (32), (33) и (34) следует, что

$$\|T_\alpha g\|_{q,w} \ll B^* \|g\|_{p,v}, \quad g \geq 0,$$

и оценка $\|T_\alpha\| \ll B^*$, которая вместе с (30) дает $\|T_\alpha\| \approx B^*$. Теорема 6 доказана.

Цитированная литература

1. **Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х.** // Известия НАН РК. Серия физ-мат. 2004. № 1. С. 39-49.
2. **Prokhorov D.V.** // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, № 2. P. 617-628.
3. **Абылаева А.М., Ойнаров Р.** // Математический журнал. 2003. Том 1, №1. С.1-9.
4. **Braverman M. Sh. and Stepanov V.D.** // Bull. London Math. Soc. 1994. V. 26. P. 283-287.
5. **Goldman M.L.** // Res. Rep. 98/31. Khabarovsk: Russ. Acad. Sci. Far-East Branch Comput. Center. 1998. 69 p.
6. **Bennet G.** // Quart. S. Math. Oxford Ser. 1987. V. 38, № 2. P. 401-425.
7. **Bennet G.** // Quart. S. Math. Oxford Ser. 1991. V. 42, № 2, P. 149-174.
8. **Крейн С.Г. и др.** Функциональный анализ (серия "Справочная матем. библиотека"). М. 1972.
9. **Lindenstrauss J. and Tzafriri L.** Classical Banach Spaces, I. Sequences Spaces, I. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, 1979.

Поступила в редакцию 01.02.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 17 — 23*

УДК 517.937

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Айсагалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
г. Алматы, ул. Масанчи, 39/47 aisagaliev@kazsu.kz.

Исследуются свойства решений одного класса интегральных уравнений. Предлагается конструктивный метод построения общего решения интегрального уравнения. Показывается применение полученнных результатов для решения задачи управляемости.

Постановка задачи. Рассматривается интегральное уравнение следующего вида:

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \tag{1}$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m},$ – известная матрица порядка $n \times m$ с кусочно-непрерывными по t при каждом фиксированном t_0 элементами, $t_0 \in \Delta_0 \subset R^1, t_1 \in \Delta_1 \subset R^1$, $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество, $a \in R^n$ – заданный n-мерный вектор, $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, $K : L_2(I, R^m) \to R^n$.

Интегральное уравнение вида (1) может быть отнесено к типу интегральных уравнений Фредгольма первого рода [1]. Ставятся следующие задачи.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (1).

Задача 2. Найти общее решение интегрального уравнения (1).

В качестве приложения приведено решение задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поиск решения ряда краевых задач управляемости и оптимального управления, классических краевых задач, задач на собственные значения и предельных циклов может быть сведен к решению интегрального уравнения вида (1). Поэтому приведенные выше задачи 1, 2 являются актуальными. Частные случаи интегрального уравнения вида (1) исследованы в работах автора [2, 3], методы решения различных краевых задач изложены в [4, 5]. В данной статье рассматривается общий случай.

Keywords: *integral equation, general solution, solution with minimal norm*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C75

Существование решения. Необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения вида (1) дает следующая теорема.

Теорема 1. Интегральное уравнение (1) при любом фиксированном $a \in R^n$ имеет решение, тогда и только тогда, когда матрица

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) dt \tag{2}$$

порядка $n \times n$ является положительно-определенной, где $t_0 \in \Delta_0,\ t_1 \in \Delta_1$ – некоторые числа, $*$ – знак транспонирования.

Доказательство. Достаточность. Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена, т.е. квадратичная форма $b^* C(t_0, t_1) b > 0 \forall b,\ b \in R^n,\ b \neq 0$. Покажем, что интегральное уравнение (1) имеет решение. В самом деле, поскольку матрица $C(t_0, t_1) > 0$, то существует обратная матрица $C^{-1}(t_0, t_1)$. Выберем $u(t) = K^*(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) a,\ t \in I$, где $a \in R^n$ – любой заданный вектор. Тогда $Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) u(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) a\, dt =$
$= \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) dt\, C^{-1}(t_0, t_1) a = C(t_0, t_1) C^{-1}(t_0, t_1) a = a.$

Следовательно, в случае, когда матрица $C(t_0, t_1) > 0$, интегральное уравнение (1) имеет, по крайней мере, одно решение $u(t) = K^*(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) a$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть интегральное уравнение (1) имеет решение при любом фиксированном $a \in R^n$. Покажем, что матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Поскольку для любого вектора $b \in R^n$ квадратичная форма $b^* C(t_0, t_1) b \geq 0$, то для доказательства положительной определенности матрицы $C(t_0, t_1)$ достаточно показать, что матрица $C(t_0, t_1)$ неособая.

Предположим противное. Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ особая. Тогда существует вектор $c \in R^n,\ c \neq 0$, такой, что $c^* C(t_0, t_1) c = 0$. Определим функцию $w(t) = K^*(t_0, t) c,\ t \in I$, $w(\cdot) \in L_2(I, R^m)$. Заметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} w^*(t) w(t) dt = c^* \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) K^*(t_0, t) dt\, c = c^* C(t_0, t_1) c = 0. \tag{3}$$

Тогда функция $w(t) \equiv 0\ \forall t, t \in I$. Так как интегральное уравнение (1) имеет решение при любом векторе $a \in R^n$, то, в частности, существует функция $\overline{u}(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ такая, что $(a = c)$

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t) \overline{u}(t) dt = c. \tag{4}$$

Как следует из соотношений (3), (4), верно равенство $0 = \int_{t_0}^{t_1} w^*(t) \overline{u}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} c^* K(t_0, t) \overline{u}(t) dt = c^* c$. Это противоречит тому, что $c \neq 0$. Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица $C(t_0, t_1)$ является особой. Следовательно, матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Необходимость доказана. Теорема доказана.

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования решения интегрального уравнения (1) является положительная определенность матрицы $C(t_0, t_1)$.

Общее решение. Множество всех решений интегрального уравнения (1) определяет следующая теорема.

Теорема 2. Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (1) имеет вид

$$u(t)=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt,\ t\in I, \tag{5}$$

где $v(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ – произвольная функция, $a\in R^n$ – любой вектор.

Доказательство. Введем следующие множества

$$U=\Big\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\ /\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u(t)dt=a\Big\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Q\ \ =\ \ &\Big\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\ /\ u(t)=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-\\ &-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt\ \ \forall v(\cdot),\ v(\cdot)\in L_2(I,R^m)\Big\}, \end{aligned} \tag{7}$$

где множество U содержит все решения интегрального уравнения (1). Теорема утверждает, что функция $u(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ принадлежит множеству U тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству Q, т.е. что $U=Q$. Докажем, что $U=Q$. Для этого достаточно показать, что $Q\subset U$ и $U\subset Q$. Покажем, что $Q\subset U$. В самом деле, если $u(t)\in Q$, то, как следует из соотношения (7), верно равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u(t)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)\Big[K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+v(t)-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt\Big]dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dtC^{-1}(t_0,t_1)a+\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt\,C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)v(t)dt=a.$$

Отсюда следует, что $u(t)\in U$. Следовательно, множество $Q\subset U$. Покажем, что $U\subset Q$. Пусть $u_*(t)\in U$, т.е. для функции $u_*(t)\in U$ выполнено равенство (см. (6)) $\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt=a$. Заметим, что в соотношении (7) функция $v(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ произвольная. В частности, можно выбрать $v(t)=u_*(t),\ t\in I$. Теперь функция $u(t)\in Q$ запишется в виде

$$u(t)=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a+u_*(t)-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt=K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt\Big]+u_*(t)-K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t_0,t)u_*(t)dt=u_*(t),\ \ t\in I.$$

Следовательно, $u_*(t)=u(t)\in Q$. Отсюда следует, что $U\subset Q$. Из включений $Q\subset U$, $U\subset Q$ следует, что $U=Q$. Теорема доказана.

Следует отметить, что

1. как следует из формулы (5), функция $u(t),\ t \in I$ может быть представлена в виде $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, где $u_1(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a$ – частное решение интегрального уравнения (1), $u_2(t) = v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt,\ t \in I,$ – решение однородного интегрального уравнения $\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u_2(t)dt = 0$. В самом деле,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u_1(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt\, C^{-1}(t_0,t_1)a = a,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)u_2(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\Big[v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt\Big]dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)K^*(t_0,t)dt\, C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt = 0;$$

2. функции $u_1(\cdot) \in L_2(I,R^m), u_2(\cdot) \in L_2(I,R^m)$ ортогональны, т.е. $u_1 \perp u_2$. В самом деле,

$$\langle u_1, u_2\rangle_{L_2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} u_1^*(t)u_2(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a^*C^{-1}(t_0,t_1)K(t_0,t)\Big[v(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt\Big]dt = a^*C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt - a^*C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)\times$$

$$\times K^*(t_0,t)dtC^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v(t)dt = 0;$$

3. функция $u_1(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a,\ t \in I$, является решением интегрального уравнения (1) с минимальной нормой в $L_2(I,R^m)$. Действительно, $\|u\| \le \|u_1\| + \|u_2\|$. Отсюда следует, что $\|u\| \le \|u_1\|$. Если функция $v(t) \equiv 0,\ t \in I$, то функция $u_2(t) \equiv 0,\ t \in I$. Тогда $u = u_1,\ \|u\| = \|u_1\|$;

4. множество решений интегрального уравнения (1) является выпуклым. Как следует из доказательства теоремы 2, множеством всех решений уравнения (1) является множество Q. Покажем, что Q — выпуклое множество. Пусть $\overline{u} \in Q,\ \overline{\overline{u}} \in Q,\ u_\alpha = \alpha\overline{u} + (1-\alpha)\overline{\overline{u}}$, $\alpha \in [0,1]$. Легко убедиться в том, что $u_\alpha \in Q$ при всех $\alpha, \alpha \in [0,1]$. В самом деле,

$$\overline{u}(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v_1(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v_1(t)dt,$$

$$\overline{\overline{u}}(t) = K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v_2(t) - K^*(t_0,t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0,t)v_2(t)dt,$$

$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^m)$. Тогда $u_\alpha(t) = \alpha\overline{u}(t) + (1-\alpha)\overline{\overline{u}}(t) = K^*(t_0, t) \times$
$\times\, C^{-1}(t_0, t_1)a + v_\alpha(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v_\alpha(t)dt \in Q$, где $v_\alpha(\cdot) = \alpha v_1(\cdot) + +(1-\alpha)v_2(\cdot) \in L_2(I, R^m)$.

Управляемость. В качестве приложения приведем решение задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u(t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{8}$$

$$y(t_0) = y_0,\ y(t_1) = y_1,\ \ u(\cdot) \in L_2(I, R^m), \tag{9}$$

где $A(t), B(t)$ — заданные матрицы с кусочно- непрерывными элементами размерности $n \times n,\ n \times m$ соответственно, $\mu(t),\ t \in I,$ — заданная n-мерная функция с кусочно-непрерывными элементами, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — управление, моменты времени t_0, t_1 фиксированы, y_0, $y_1 \in R^n$ — любые фиксированные точки. При указанных предположениях система (8) при каждом фиксированном управлении $u(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ имеет единственное решение $y(t) = y(t; y_0, t_0, v), t \in I$, исходящее из точки $y_0 \in R^n$, функция $y(t), t \in I$, абсолютно непрерывна, в общем случае $y(t_1) \neq y_1$.

Пусть $U \subset L_2(I, R^m)$ — множество тех и только тех управлений, для которых $y(t_1) =$ $= y(t_1; y_0, t_0, u) = y_1$, т.е.

$$U = \Big\{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)\ /\ y(t_1; y_0, t_0, u(\cdot)) = y_1\Big\} \subset L_2(I, R^m).$$

Ставится задача нахождения множества U.

Решение системы (8) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mu(\tau)d\tau,\ t \in I,$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau),\ \theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi} = A(t)\xi$. Тогда управления, которые переводят траекторию системы (8) из начального состояния $y_0 \in R^n$ в состояние $y_1 \in R^n$ определяются из условия

$$y_1 = y(t_1) = \Phi(t_1, t_0)y_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)u(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\mu(t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)u(t)dt = a, \tag{10}$$

где $a = \Phi(t_0, t_1)[y_1 - \Phi(t_1, t_0)y_0] - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu(t)dt \in R^n$. Теперь искомое множество U может быть представлено в виде

$$U = \Big\{u(\cdot) \in L_2(I, R^m)\ /\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)u(t)dt = a\Big\}. \tag{11}$$

Теорема 3. Пусть матрица $W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt$ порядка $n\times n$ положительно определена. Тогда управление $u(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ переводит траекторию системы (8) из любой начальной точки $y_0\in R^n$ в любое конечное состояние $y_1\in R^n$ тогда и только тогда, когда

$$u(t)\in U=\Big\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)\ /\ u(t)=v(t)+\lambda_1(t,y_0,y_1)+N_1(t)z(t_1,v),\ t\in I\Big\}, \tag{12}$$

где $v(\cdot)\in L_2(I,R^m)$ – произвольная функция, а функция $z(t)=z(t,v), t\in I$, является решением дифференциального уравнения

$$\dot z=A(t)z+B(t)v(t),\ z(t_0)=0,\ t\in I,\ v(\cdot)\in L_2(I,R^m). \tag{13}$$

Решение дифференциального уравнения (8), соответствующее управлению $u(t)\in U$, определяется по формуле

$$y(t)=z(t,v)+\lambda_2(t,y_0,y_1)+N_2(t)z(t_1,v),\ t\in I, \tag{14}$$

где

$$\lambda_1(t,y_0,y_1)=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a,\quad N_1(t)=-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),$$

$$\lambda_2(t,y_0,y_1)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)y_0+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)y_1+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt,$$

$$N_2(t)=-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1).$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1,2. Как следует из вышеизложенного, решение задачи управляемости сводится к нахождению общего решения интегрального уравнения (10). Далее, путем замены $K(t_0,t)$ на $\Phi(t_0,t)B(t)$ получим $C(t_0,t_1)=W(t_0,t_1)$, элементы множества U из (5) запишутся в виде (12), множество U из (11), (12) совпадает с множеством Q. Дифференциальное уравнение (13) и соотношение (14) непосредственно следуют из формул

$$z(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau,\quad z(t_1)=\Phi(t_1,t_0)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)v(t)dt.$$

Теорема доказана.

Заключение. Исследованы свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих при решении различных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения в виде положительной определенности квадратной матрицы, определяемой через ядро оператора. Предлагается конструктивный метод построения общего решения интегрального уравнения и исследованы свойства общего решения: выделены частное решение неоднородного уравнения и общее решение однородного уравнения, показана их ортогональность, найдено решение с минимальной нормой, доказана выпуклость множества решений. В качестве приложения приведено решение задачи управляемости для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Цитированная литература

1. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М. 1989.

2. **Айсагалиев С.А.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1992. № 1, С. 3-8 .
3. **Айсагалиев С.А.** // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1476-1486.
4. **Айсагалиев С.А.** Краевые задачи оптимального управления. Алматы, 1999.
5. **Айсагалиев С.А.Айсагалиев Т.С.** Методы решения краевых задач. Алматы, 2002.

Поступила в редакцию 06.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 24 – 33*

УДК 517.518

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им.Е.А.Букетова
Караганда, ул.Университетская, 28 akishev@kargu.krg.kz

В статье рассмотрено анизотропное пространство Лоренца периодических функций. Установлена точная оценка порядка приближения класса О.В.Бесова тригонометрическими полиномами в пространствах Лоренца с анизотропной нормой.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих 2π- период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ - невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1],[2]);

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0 \ \ \forall j = 1, ..., m;$$

$a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i<\overline{n},\overline{x}>},$$

Keywords: *approximation, Lorentz space, Besov's class*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \left\{ \overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in Z^m : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m \right\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n} \in Z^m,} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\| \{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n} \in Z^m} \right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{ \sum_{n_m = -\infty}^{\infty} \left[... \left[\sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} ... \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

По аналогии с [3] (см.также [4], с. 59) рассмотрим класс О.В. Бесова

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p}, \overline{\theta}} (I^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}}} = \|f\|^*_{\overline{p}, \overline{\theta}} + \left\| \left\{ 2^{<\overline{s}, \overline{r}>} \left\| \delta_{\overline{s}} (f) \right\|^*_{\overline{p}, \overline{\theta}} \right\} \right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leq 1 \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 \leq p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан положительный вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{<\bar{s}, \bar{\gamma}> < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{ t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i<\bar{k}, \bar{x}} \}.$$

$E_n^{(\overline{\gamma})} (f)_{\overline{p}, \overline{\theta}}$ — наилучшее приближение функции $f \in L^*_{\overline{p}, \overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$, $S_n^{\bar{\gamma}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i<\bar{k}, \bar{x}>}$– частичная сумма ряда Фурье функции f.

Как отмечено в [5], одна из сложностей в теории приближений функции многих переменных связана с выбором гармоник приближающих полиномов. Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К.И. Бабенко [6].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследованы в [7]-[19]. Эти исследования относятся к приближению функций в пространствах Лебега с изотропной нормой. Обзор по этой теме дан в [5], [20].

Основной целью настоящей статьи является оценка порядка величины

$$E_n^{\overline{\gamma}} \left(B^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}} \right) = \sup_{f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\theta}, \overline{\tau}}} E_n^{\overline{\gamma}} (f)_{\overline{q}, \overline{\theta}}.$$

Положим

$$Y^m (\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in Z^m_+ : \sum_{j=1}^{m} s_j \gamma_j \geq n \right\},$$

$$Y_1^{m-l} (\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s}_{m-l} = (s_{l+1}, ..., s_m) \in Z^{m-l}_+ : \sum_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j < n \right\},$$

$$Y_2^l \left(\overline{\gamma}, n - \sum_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j \right) = \left\{ \overline{s_l} = (s_1, ..., s_l) \in Z^l_+ : \sum_{j=1}^{l} s_j \gamma_j \geq n - \sum_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j \right\},$$

$$Y_3^{m-l} (\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s}_{m-l} = (s_{l+1}, ..., s_m) \in Z^{m-l}_+ : \sum_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j \geq n \right\}.$$

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различных в разных формулах.

Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A(y) \le B(y) \le C_2 \cdot A(y)$.

Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения (см.[21]). Пусть дано целое неотрицательное число $l < \nu \le m$, $\overline{\gamma} = (\gamma_{l+1}, ..., \gamma_m)$, $1 = \gamma_{l+1} = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le ... \le \gamma_m$ и $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = l+1, ..., m$, $\overline{\theta} = (\theta_{l+1}, ..., \theta_m)$. Тогда имеет место соотношение

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha<\overline{s},\overline{\gamma}>} \right\}_{\overline{s} \in Y^{m-l}(\overline{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} \frac{1}{\theta_j}}.$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением: $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ – характеристическая функция множества $\varkappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \quad \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}$.

Лемма. Пусть дано неотрицательное целое число $l < m$, $\bar{\tau} = (\tau_{l+1}, ..., \tau_m)$, $1 \le \tau_j < +\infty$, $\quad j = l+1, ..., m$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\left\| \left\{ \chi_{\varkappa(n)}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} \frac{1}{\tau_j}}.$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции по размерности m.

Пусть $m = l+2$. Из определения множества $\varkappa(n)$ получим

$$I_n = \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} \left[\sum_{s_{l+1} = \frac{1}{\gamma_{l+1}}(n - \gamma_{l+2} s_{l+2})} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+2}}} = \left\{ \sum_{s_{l+2} < \frac{n}{\gamma_{l+2}}} 1 \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+2}}} \le C(\tau, \gamma) n^{\frac{1}{\tau_{l+2}}}. \qquad (1)$$

Пусть $m > l+2$. Предположим , что утверждение леммы верно для $s = m-1$, т.е.

$$I_n \le C(\tau, \gamma) n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}}.$$

В силу предположения и неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \le C(\alpha) n^{\alpha+1}, \quad \alpha + 1 > 0 \qquad (2)$$

будем иметь

$$I_n = \left\{ \sum_{s_m \le \frac{n}{\gamma_m}} \left[\sum_{s_{m-1} \le \frac{1}{\gamma_{m-1}}(n - s_m \gamma_m)} ... \left[\sum_{s_{l+1} = (n - \sum\limits_{j=l+2}^{m} s_j \gamma_j)} 1 \right]^{\frac{\tau_{l+2}}{\tau_{l+1}}} ... \right]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \le$$

$$\le C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_m \le \frac{n}{\gamma_m}} (n - s_m \gamma_m)^{\tau_m \cdot \sum\limits_{j=l+2}^{m-1} \frac{1}{\tau_j}} \right\}^{\frac{1}{\tau_m}} \le C(\tau, \gamma) \cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} \frac{1}{\tau_j}}.$$

Оценка снизу при $m = l+2$ следует из (1). Если $m = l+3$, то

$$I_n \ge C(\tau, \gamma) \left\{ \sum_{s_{l+3} < \frac{n}{2\gamma_{l+3}}} (n - s_{l+3}\gamma_{l+3})^{\frac{\tau_{l+3}}{\tau_{l+2}}} \right\}^{\frac{1}{\tau_{l+3}}} \ge C(\tau, \gamma) n^{\frac{1}{\tau_{l+2}} + \frac{1}{\tau_{l+3}}}.$$

Далее для $m > l+3$ методом индукции нетрудно убедиться в справедливости оценки снизу утверждения леммы. Лемма доказана.

Для доказательства основных результатов будут применяться следующие теоремы.

Теорема 1. *(см.[22]). Пусть* $1 \le p_j < q_j < +\infty, \quad 1 \le \theta_j < +\infty$. *Если* $f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ *и величина*

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m\theta_m(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q_m})} \left[\cdots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1\theta_1(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{\theta_1}_{\bar{p},\bar{\theta}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, то функция $f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}} \le C(\bar{p},\bar{q},\bar{\theta}) \cdot \sigma(f).$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $j = 1, ..., m$.

1) Если $1 \le \theta_j < \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} \le C\left(\theta, q, m, r\right) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j\left(s_j\right) \right\}_{\overline{s}\in Y(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}}}.$$

2) Если $\tau_j \le \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} \le C\left(\theta, \tau, m, r\right) \cdot \sup_{\overline{s}\in Y(\overline{\gamma},n)} \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j\left(s_j\right) \right\}.$$

3) Если $\tau_j \le \theta_j$, $j = 1, ..., l \le \nu$, $\theta_j < \tau_j$, $j = l+1, ..., m$, *то*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}} \le C\left(\theta, r, m, \tau\right) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j\left(s_j\right) \right\}_{\overline{s}_{m-l}\in Y_5^{m-l}(n)} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}_{m-l}}} +$$

$$+ \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j\left(s_j\right) \cdot \sup \prod_{j=1}^{l} 2^{-s_j r_j} \mu_j\left(s_j\right) \right\}_{\overline{s}_{m-l}\in Y_3^{m-l}(\overline{\gamma},n)} \right\|_{l_{\overline{\epsilon}_{m-l}}},$$

где $\overline{\epsilon}_{m-l} = (\epsilon_{l+1}, ..., \epsilon_m)$, $\epsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\beta_j = \frac{\tau_j}{\theta_j}$, $\frac{1}{\beta_j} + \frac{1}{\beta'_j} = 1$, $j = l+1, ..., m$.

Эта теорема доказывается, как теорема 3 в [21] применением теоремы 1 и леммы 1 при $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $j = 1, ..., m$.

Теперь докажем основные утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q_j < \tau_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$. *Если* $f \in L^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ *и*

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^d_+} b_{\bar{s}} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

то имеет место неравенство

$$\|f\|^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}} \ge C(q,\theta,\tau,m) \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m\theta_m\left(\frac{1}{\tau_m}-\frac{1}{q_m}\right)} \left[... \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1\theta_1\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{q_1}\right)} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{\bar{\tau},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} ... \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

Доказательство. Пусть $S_{2^\nu,...,2^\nu}(f,\bar{x})$– прямоугольная частичная сумма ряда Фурье функции $f\in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$. Известно [2], что

$$\|S_{2^\nu,...,2^\nu}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\le C(q,\theta)\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \tag{3}$$

и (см.[1], с. 161)

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\ge \sup_{\substack{g\in L^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}\\ \|g\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}\le 1}}\int_{I^m}|f(\bar{x})\cdot g(\bar{x})|d\bar{x}, \tag{4}$$

где $\bar{q}'=(q_1',...,q_m')$, $\bar{\theta}'=(\theta_1',...,\theta_m')$, $\frac{1}{q_j}+\frac{1}{q_j'}=1$, $\frac{1}{\theta_j}+\frac{1}{\theta_j'}=1$, $1<q_j,\theta_j<+\infty$, $j=1,...,m$.

В силу соотношений (3) и (4) имеем

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\ge \sup_{\substack{g\in L^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}\\ \|g\|^*_{\bar{q}',\bar{\theta}'}\le 1}}\sum_{s_m=1}^{\nu-1}...\sum_{s_1=1}^{\nu-1}\int_{I^m}\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})\cdot g(\bar{x})d\bar{x}. \tag{5}$$

Положим

$$\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j}=\left\{\sum_{s_j=1}^{\nu-1}2^{s_j\theta_j\left(\frac{1}{\tau_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\left[...\left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1}2^{s_1\theta_1\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{q_1}\right)}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\tau},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\right]^{\frac{\theta_j}{\theta_{j-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_j}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_\nu(\bar{x})=\sum_{s_m=1}^{\nu-1}...\sum_{s_1=1}^{\nu-1}b_{\bar{s},\nu}\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

где

$$b_{\bar{s},\nu}=\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\tau},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta_m'}}\cdot\prod_{j=1}^{m-1}(\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^m 2^{s_j\theta_j(1-\frac{1}{q_j})}\left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j}\right)^{-1}\cdot\prod_{j=2}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{\tau_j})(\theta_1-\theta_j)}\cdot|b_{\bar{s}}(f)|^{\theta_1-1}\cdot sign(b_{\bar{s}}(f)).$$

Учитывая соотношение

$$\left\|\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\right\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\asymp\prod_{j=1}^m 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})},\quad 1<p_j,\theta_j<+\infty, \tag{6}$$

нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\left(\|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|^*_{\bar{\tau}',\bar{\theta}'}\right)^{\theta_1'}\le C(\tau,\theta,m)\prod_{j=2}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j}-\frac{1}{q_j}\right)\theta_j\theta_1'}\cdot 2^{s_1\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{q_1}\right)(\theta_1+\theta_1')}\cdot\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\tau},\bar{\theta}}\right)^{\theta_1}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^m(\sigma_\nu(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j}\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{\tau},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta_m'}}\right)^{\theta_1'}. \tag{7}$$

Далее, пользуясь неравенством (7) и учитывая равенства $\frac{1}{\tau'_j} - \frac{1}{q'_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j}$, $(\frac{1}{\tau'_j} - \frac{1}{q'_j})\theta'_j + (\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j})\theta_j \cdot \theta'_j = \theta_j(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j})$, определение чисел $\sigma_\nu(f)_{\bar\theta_j}$, получим

$$J(g_\nu) = \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau'_j} - \frac{1}{q'_j}\right)} \|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau',\bar\theta'} \right\}_{\bar s \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar\theta'}} =$$

$$= C(q,\theta,\tau,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau,\bar\theta} \right\}_{\bar s \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar\theta}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s_m=1}^{\nu-1} 2^{s_m\theta_m\left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{q_m}\right)} \left[\ldots \left[\sum_{s_1=1}^{\nu-1} 2^{s_1\theta_1\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \left(\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau,\bar\theta} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \ldots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \leq$$

$$\leq C(q,\theta,\tau,m). \tag{8}$$

Так как по условию теоремы $q_j < \tau_j$, то $q'_j > \tau'_j$, $j = 1, ..., d$. Поэтому в силу теоремы 1 и неравенства (8) получим

$$\|g_\nu\|^*_{\bar q',\bar\theta'} \leq C \cdot J(g_\nu) \leq C(q,\theta,\tau,m).$$

Следовательно, функция $\varphi_\nu = \frac{1}{C(q,\theta,\tau,d)} g_\nu \in L^*_{\bar q',\bar\theta'}(I^m)$ и $\|\varphi_\nu\|^*_{\bar q',\bar\theta'} \leq 1$.

Далее в силу ортогональности при фиксированных $\bar s \in Z^m_+$ имеем

$$\int_{I^m} \delta_{\bar s}(f,\bar x) g_\nu(\bar x) d\bar x = (2\pi)^m \cdot b_{\bar s}(f) b_{\bar s,\nu} \cdot \prod_{j=1}^m 2^{s_j - 1}. \tag{9}$$

Из определения чисел $b_{\bar s,\nu}$ следует, что

$$\prod_{j=1}^m 2^{s_j} b_{\bar s}(f) b_{\bar s,\nu} \geq C(\tau,\theta) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau,\bar\theta} \right\}_{\bar s = \bar 1}^{\bar\nu} \right\|_{l_{\bar\theta}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \prod_{j=1}^{m-1} (\sigma_\nu(f)_{\bar\theta_j})^{\theta_{j+1} - \theta_j} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m 2^{s_j\theta_j\left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \left(\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau,\bar\theta} \right)^{\theta_1}. \tag{10}$$

Теперь, учитывая (9) и (10), получим

$$\sup_{\substack{g \in L^*_{\bar q',\bar\theta'} \\ \|g\|^*_{\bar q',\bar\theta'} \leq 1}} \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \ldots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \int_{I^m} \delta_{\bar s}(f,\bar x) \cdot g(\bar x) d\bar x \geq C(\tau,\theta) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar\tau,\bar\theta} \right\}_{\bar s = \bar 1}^{\bar\nu} \right\|_{l_{\bar\theta}}. \tag{11}$$

Из неравенств (5) и (11) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $1 \leq \theta_j, \tau_j < +\infty$, $1 \leq p_j < q_j < +\infty$,

$\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j,\ j=1,...,m,\ 0<r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}=...=r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu}<r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}}\le ...\le= r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$. *Тогда справедливы соотношения*

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}}\asymp\begin{cases}2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)}, & \theta_j<\tau_j,\ j=1,...,m\\ 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}, & \tau_j\le\theta_j,\ j=1,...,m,\end{cases},$$

и для $\tau_j\le\theta_j<+\infty,\ j=1,...,l<\nu,\quad \theta_j<\tau_j<+\infty,\ j=l+1,...,m,$

$$C(p,q,m,r,\theta)\cdot 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)}\le E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}}\le$$

$$\le C_1\left(p,q,\theta,r\right)\times 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

Доказательство. Пусть $\theta_j<\tau_j,\ j=1,...,m$. Тогда в силу пункта 1 теоремы 2 имеем

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}}\le C(\theta,m,q)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})\langle\sum\limits_{j=1}^{m}s_j\cdot\gamma j}\right\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\right\|_{l_{\bar\varepsilon}},\qquad(12)$$

где $\bar\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m)$, $\varepsilon_j=\theta_j\beta'_j$, $\beta'_j=\frac{\beta_j}{\beta_j-1}$, $\beta_j=\frac{\tau_j}{\theta_j}$, $j=1,...,m$.

В лемме 1 полагая $\gamma_j=\frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}$, $j=1,...,m$, $l=0$, $\alpha=r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}$, и учитывая, что $\frac{1}{\varepsilon_j}=\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}$, $j=1,...,m$, из (12) будем иметь

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}}\le C(\theta,m,q,p)\cdot 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{m}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j})}$$

для любой функции $f\in B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}$, $\theta_j<\tau_j$, $j=1,...,m$.

Рассмотрим случай $\tau_j\le\theta_j$, $j=1,...,m$. В силу из второго пункта теоремы 2 и условия $r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}>0$ будем иметь

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(B^{\bar r}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}\right)_{\overline{q},\overline{\theta}}\le C(\theta,r,m,q)\cdot\sup_{\substack{\bar s\in\mathbb{Z}^m_+\\ \langle\bar s,\bar\gamma\rangle\ge n}}2^{-\sum\limits_{j=1}^{m}s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\le C(\theta,r,m,q)\cdot 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}.$$

Оценка сверху во втором пункте доказана.

Теперь рассмотрим вариант $\tau_j\le\theta_j,\quad j=1,...,l$,и $\theta_j<\tau_j,\quad j=l+1,...,m$. Согласно третьему случаю теоремы 2 получим

$$\|f-S_n^{\bar\gamma}(f)\|^*_{\bar q,\bar\theta}\le C(q,\theta,m,r,\tau)\cdot\left\{\left\|\left\{\prod_{j=l+1}^{m}2^{-s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\bar s_{m-l}\in Y_3(n)}\right\|_{l_{\bar\varepsilon_{m-l}}}+\right.$$

$$\left.+\left\|\left\{\prod_{j=l+1}^{m}2^{-s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\cdot\sup_{\bar s_l\in Y_4(n-\sum\limits_{j=l+1}^{m}s_j\gamma_j)}\prod_{j=1}^{l}2^{-s_j(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\bar s_{m-l}\in Y_1(n)}\right\|_{l_{\bar\varepsilon_{m-l}}}\right\}=$$

$$= C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot (J_1(n) + J_2(n)), \tag{13}$$

где $\bar{\varepsilon}_{m-l} = (\varepsilon_{l+1}, ..., \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \theta_j \beta'_j$, $\beta'_j = \frac{\beta_j}{\beta_j - 1}$, $\beta_j = \frac{\tau_j}{\theta_j}$, $j = l+1, ..., m$.

Оценим $J_1(n)$. Учитывая определение множества $Y_3^{m-l}(\bar{\gamma}, n)$ и пользуясь леммой 1 при $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}}$, $j = 1, ..., m$, $l = 0$, $\alpha = r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}$, получим

$$J_1(n) \le C(q, \theta, m, r, \tau) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}. \tag{14}$$

Теперь оценим $J_2(n)$. Так как по условию теоремы $r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} > 0$, $j = 1, ..., m$, то учитывая определение множества $Y_2(n - \sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j)$, будем иметь

$$J_2(n) \le 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \left\| \left\{ \prod_{j=l+1}^{m} 2^{-s_j (r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \cdot 2^{(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}) \sum\limits_{j=l+1}^{m} s_j \gamma_j} \right\}_{\bar{s}_{m-l} \in Y_1^{m-l}(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\varepsilon}_{m-l}}}. \tag{15}$$

Далее, учитывая неравенство (2), из (15) получим

$$J_2(n) \le C(\theta, r, m, q, \tau) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}. \tag{16}$$

Теперь из неравенств (13), (14) и (16) следует, что

$$E_n^{\bar{\gamma}} \left(B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}} \le C(q, \theta, m, r) \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m} (\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j})}$$

для любой функции $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}$. Этим оценки сверху доказаны.

Докажем оценки снизу. Пусть $\theta_j < \tau_j$, $j = 1, ..., m$. Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m} \frac{1}{\tau_j}} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j \left(r_j + 1 - \frac{1}{p_j} \right)} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i \langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Положим $\varkappa(n) = \{ \bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \quad \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n \}$ и χ_A– характеристическая функция множества A. Так как f_0 непрерывна, то $f_0 \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p}, \bar{\theta}}(I^m)$. В силу соотношения (6) и леммы 2 при $l = 0$ имеем

$$J_4(n) = \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f_0) \|^*_{\bar{p}, \bar{\theta}} \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \le C(\tau, q, p, m, r).$$

Следовательно, $C_0 \cdot f_0 \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}$.

Далее, так как $S_n^{\bar{\gamma}}(f_0, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} \in I^m$, то

$$\left\| f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0) \right\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}} = \| f_0 \|_{\bar{q}, \bar{\theta}}*. \tag{17}$$

Теперь выберем числа λ_j так, чтобы $q_j < \lambda_j$, $\quad j = 1, ..., m$. Тогда по теореме 3, учитывая соотношение (6) и пользуясь леммой 1 при $l = 0$, из (17) получим

$$\left\| f_0 - S_n^{\bar{\gamma}}(f_0) \right\|^*_{\bar{q}, \bar{\theta}} \ge C(q, \theta, m) \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \| \delta_{\bar{s}}(f_0) \|_{\bar{\lambda}, \bar{\theta}} \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ge$$

$$\geq \ C(r,\theta,q,p,\tau)\cdot 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)}. \tag{18}$$

Этим оценка снизу в случае $\theta_j<\tau_j$, $j=1,...,m$, доказана.

Пусть $\tau_j<\theta_j$, $j=1,...,m$ и $\widetilde{\bar{s}}=(\widetilde{s}_1,...,\widetilde{s}_m)\in\mathbb{Z}_+^m$ такой, что $\langle\widetilde{\bar{s}},\bar{\gamma}\rangle=n$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x})=2^{-\sum\limits_{j=1}^{m}\widetilde{s}_j\left(r_j+1-\frac{1}{p_j}\right)}\sum_{\bar{k}\in\rho(\widetilde{\bar{s}})}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда $f_1\in\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ и в силу соотношения (6) функция $C_1\cdot f_1\in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}$. Из определений частичной суммы и функции f_1 и соотношения (17) следует

$$\left\|f_1-S_n^{\bar{\gamma}}(f_1)\right\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}=\|f_1\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\geq C(q,\theta)\cdot 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}. \tag{19}$$

Таким образом, в случае $\tau_j<\theta_j$, $j=1,...,m$, оценка снизу доказана.

Теперь рассмотрим случай $\tau_j\leq\theta_j$, $j=1,...,l$ и $\theta_j<\tau_j$, $j=l+1,...,m$. Рассмотрим множество векторов $\bar{s}_0=(s_1^0,...,s_l^0,s_{l+1},...,s_m)\in\varkappa(n)$, координаты $s_j^0, j=1,...,l$, фиксированы. Положим $\varkappa(n-\sum_{j=1}^l s_j^0\gamma_j)=\{\bar{s}_{m-l}=(s_{l+1},...,s_m):\ \ \langle\bar{s}_{m-l},\bar{\gamma}_{m-l}\rangle=n-\sum_{j=1}^l s_j^0\gamma_j\}$, где $\bar{s}_{m-l}=(s_{l+1},...,s_m)$, $\bar{\gamma}_{m-l}=(\gamma_{l+1},...,\gamma_m)$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(\bar{x})=n^{-\sum\limits_{j=l+2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\cdot\sum_{\bar{s}_{m-l}\in\varkappa\left(n-\sum_{j=1}^l s_j^0\gamma_j\right)}\prod_{j=l+1}^{m}2^{-s_j\left(r_j+1-\frac{1}{p_j}\right)}\sum_{\bar{k}_{m-l}\in\rho(\bar{s}_{m-l})}e^{i\langle\bar{x}_{m-l},\bar{k}_{m-l}\rangle}\times$$

$$\times 2^{-\sum\limits_{j=1}^{l}s_j^0\left(r_j+1-\frac{1}{p_j}\right)}\cdot\sum_{\bar{k}_l\in\rho(\bar{s}_l^0)}e^{i\langle\bar{k}_l,\bar{x}_l\rangle}.$$

Эта функция непрерывна. Следовательно, $f_2\in\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$. Пользуясь соотношением (6) и леммой 2, получим $C_2\cdot f_2\in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$.

Так как $\langle\bar{s}_0,\bar{\gamma}\rangle=n$, то $S_n^{\bar{\gamma}}(f_2,\bar{x})=0$. Поэтому, выбирая числа $\lambda_j\in(q_j,\ \infty)$, $\quad j=1,...,m$, и пользуясь теоремой 3 и леммой 1, будем иметь

$$\left\|f_2-S_n^{\bar{\gamma}}(f_2)\right\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}=\|f_2\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\geq C(p,q,\theta,m,r)\cdot\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f_2)\|^*_{\bar{\lambda},\bar{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\geq$$

$$\geq C(p,q,\theta,m,\tau)\cdot 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \tag{20}$$

для $n>2\sum\limits_{j=1}^{l}s_j^0\gamma_j$, $\tau_j\leq\theta_j$, $j=1,...,l$, и $\theta_j<\tau_j$, $j=l+1,...,m$.

Так как оператор частичной суммы $S_n^{\bar{\gamma}}(f,\bar{x})$ ограничен в пространстве $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ ([2]), то

$$\left\|f-S_n^{\bar{\gamma}}(f)\right\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\leq C\left(q,m,\theta\right)\cdot E_n^{\bar{\gamma}}\left(f\right)_{\bar{q},\bar{\theta}}.$$

Поэтому из неравенств (18)-(20) следуют оценки снизу в теореме 4. Этим теорема доказана.

В случае $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}, j = 1, ..., m,\ r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m,\quad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = ... = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}$, оценка сверху в теореме 4 ранее доказана в [21].

Цитированная литература

1. **Blozinski A.P.** // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V.263. P.146–167.
2. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН. Серия математика. 2000. Т.64. №1. С.95–121.
3. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** //Труды МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
4. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.
5. **Тихомиров В.М.** // Современные пробл. матем. 1987. Т.14. С.103–270.
6. **Бабенко К.И.** // ДАН СССР. 1960. Т. 132, №5. С. 982–985.
7. **Теляковский С.А.** // Матем. сб. 1964. Т.63. С.426–444.
8. **Митягин Б.С.** // Матем. сб. 1962. Т.58. №3, С.397–414
9. **Бугров Я.С.** // Матем. сб. 1964. Т.64. С. 410–418.
10. **Никольская Н.С.** // Сиб. матем. жур. 1974. Т. 15. С. 395–412.
11. **Галеев Э.М.** // Матем. зам. 1996. Т. 59. №2, С.189–199.
12. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. С.112.
13. **Динь Зунг** // Матем. сб. 1986. Т.131. №2, С.251–271.
14. **Пустовойтов Н.Н.** // Anal. Math. 1994. V. 20. P.35–48.
15. **Белинский Э.С.** //Исслед.по теории функц. многих вещ.перемен. Ярославль, 1984. С.10–24.
16. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М., 1999. С. 69–99.
17. **Романюк А.С.** // Укр. матем. ж. 1991. Т.43. С.1398–1408.
18. **Романюк А.С.** // Укр. матем. ж. 1997. Т.49. С.1250–1268.
19. **Сихов М.** //Матем. журнал. 2002. Т.2. С.95–100.
20. **Темиргалиев Н.** // Вестник Евразийского универ. 2002. № 3-4. С. 222–271.
21. **Акишев Г.** // Вестник КарГУ. Серия матем. 2004. № 3. С. 9–16
22. **Акишев Г.А.** //Труды 10 - межвузов. науч. конфер. по матем. и мех. Алматы, 2005. Т. 1. С. 53–60.

Поступила в редакцию 12.08.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 34 – 44*

УДК 517.968.72.

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Э.А. Бакирова, Д.С. Джумабаев

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Устанавливается взаимосвязь между корректными разрешимостями краевых задач для интегро-дифференциальных и соответствующих нагруженных дифференциальных уравнений.

Интегро-дифференциальные уравнения являются математической моделью многих процессов естествознания. Различные вопросы теории интегро-дифференциальных уравнений и их многочисленные приложения рассмотрены в [1,2,3]. Задачи Коши и краевые задачи для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений и приближенные методы нахождения их решений исследованы в [4,5,6,7]. При этом, в основном, применяется метод Некрасова [8] или его модификации, позволяющие с помощью фундаментальной системы решений дифференциальной части свести решение интегро-дифференциального уравнения к решению интегрального уравнения. Однако найти фундаментальную систему решений обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами удается в редких случаях. Поэтому возникает необходимость в нахождении условий разрешимости и алгоритмов решения задач в терминах исходных данных без привлечения фундаментальной системы решений.

С этой целью в [9] был предложен метод параметризации исследования и решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для линейной двухточечной краевой задачи установлен коэффициентный критерий однозначной разрешимости и предложено двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения ее решения.

Линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

Keywords: *integro-differential equation, two-point boundary-value problem, approximation*
2000 Mathematics Subject Classification: 45J05

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$,

$||A(t)|| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \le \alpha, \quad \|K(t,s)\| \le \beta, \quad \alpha, \beta - const.$

методом параметризации исследована в [10]. В терминах данных задачи (1),(2) получены достаточные условия однозначной разрешимости.

В настоящей статье отрезок $[0,T]$ разбивается на части с шагом $h>0: mh=T$, интеграл $\int\limits_0^T K(t,s)x(s)ds$ заменяется суммой $\sum\limits_{j=1}^{m} K_j(t)x[(j-1)h]h$, где $K_j(t) = K[t,(j-1)h]$, $t\in[0,T]$, $j=\overline{1,m}$, и задача (1),(2) аппроксимируется двухточечной краевой задачей для нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)y[(j-1)h]h + f(t), \quad t\in[0,T], \quad y\in R^n, \tag{3}$$

$$By(0) + Cy(T) = d, \quad d\in R^n. \tag{4}$$

Исследуется взаимосвязь между свойствами и решениями задач (1),(2) и (3),(4). При этом используется следующая краевая задача:

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} z(s)ds + f(t), \quad t\in[0,T], \quad z\in R^n, \tag{5}$$

$$Bz(0) + Cz(T) = d, \quad d\in R^n. \tag{6}$$

Равенствами $K_h(t,s) = K_j(t)$, $t\in[0,T]$, $s\in[(j-1)h, jh)$, $j=\overline{1,m-1}$, $K_h(t,s) = K_m(t)$, $s\in[(m-1)h, mh]$, определим кусочно - непрерывные на $[0,T]\times[0,T]$ матрицы $K_h(t,s)$. Из равномерной непрерывности $K(t,s)$ на $[0,T]\times[0,T]$ следует, что $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$, где

$$\varepsilon(h) = \sup_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|K(t,s) - K_h(t,s)\|.$$

Отметим, что коэффициентные необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (3),(4) получены в [11].

Определение 1. *Краевая задача (1),(2)$\Big($(3),(4)$\Big)$ называется корректно разрешимой, если она для любых $f(t)$, d имеет единственное решение $x(t)\Big(y(t)\Big)$ и для него справедливо неравенство*

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\| \le K\max(\|f\|_1, \|d\|),$$

$$\Big(\|y\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|y(t)\| \le \gamma\max(\|f\|_1, \|d\|)\Big),$$

где $K(\gamma)$ — константа, не зависящая от $f(t)$, d. Число $K(\gamma)$ называется константой корректной разрешимости задачи (1),(2)((3),(4)).

Теорема 1. *Пусть краевая задача (3),(4) корректно разрешима с константой γ и выполняются неравенства*

$$а)\quad q_1(h) = \frac{1}{2}[(\alpha+\beta T)\gamma + 1]\beta Th < 1,$$

$$б)\quad q_2(h) = \frac{2\gamma\varepsilon(h)T}{2 - [(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th} < 1.$$

Тогда краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой

$$K = \frac{2\gamma}{2 - [(\alpha+\beta T)\gamma + 1]\beta T h - 2\gamma\varepsilon(h)T}$$

и справедлива оценка

$$\|y - x\|_1 \le \frac{\gamma}{2 - [(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta T h}\Big\{[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta T h +$$

$$+\frac{4\gamma\varepsilon(h)T}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta T h - 2\gamma\varepsilon(h)T}\Big\}\max(\|f\|_1, \|d\|), \tag{7}$$

где $y(t)-$ решение задачи (3),(4), $x(t)-$ решение задачи (1),(2).

Доказательство. Сначала установим корректную разрешимость задачи (5),(6). В качестве нулевого приближения $z^{(0)}(t)$ возьмем $y(t)-$ решение задачи (3),(4) и решение задачи (5),(6) найдем методом последовательных приближений. Первое приближение $z^{(1)}(t)$ найдем, решая двухточечную краевую задачу для нагруженного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) z[(j-1)h]h + f(t) + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]\Big]ds, \tag{8}$$

$$Bz(0) + Cz(T) = d. \tag{9}$$

Из непрерывности матрицы $K_j(t)$, $j=\overline{1,m}$, на $[0,T]$ следует непрерывность на $[0,T]$ функции $F(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]\Big]ds$. Тогда из корректной разрешимости задачи (3),(4) следует существование единственного решения задачи (8),(9) – функций $z^{(1)}(t)$ и для $\Delta^{(1)}(t) = z^{(1)}(t) - z^{(0)}(t)$, являющейся решением краевой задачи

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)\Delta[(j-1)h]h + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]\Big]ds, \tag{10}$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0, \tag{11}$$

справедлива оценка

$$\|\Delta^{(1)}\|_1 \le \gamma \max_{t\in[0,T]}\|F(t)\| \le \gamma \sum_{j=1}^{m}\max_{t\in[0,T]}\|K_j(t)\|\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\|z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]\|ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}\gamma m h \beta h \|\dot z^{(0)}\|_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta T h\|\dot z^{(0)}\|_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta T h \|\dot y\|_1. \tag{12}$$

Здесь мы при оценке $\|z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]\|$ использовали теорему о среднем в интегральной форме. Из уравнения (10) вытекает следующая оценка:

$$\|\dot\Delta^{(1)}\|_1 \le (\alpha+\beta T)\|\Delta^{(1)}\|_1 + \frac{1}{2}\beta T h\|\dot y\|_1 \le \frac{1}{2}\Big[(\alpha+\beta T)\gamma + 1\Big]\beta T h\|\dot y\|_1 = q_1(h)\|\dot y\|_1. \tag{13}$$

Продолжая итерационный процесс, $(k+1)$ – приближение найдем, как решение краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)z[(j-1)h]h + f(t) + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[z^{(k)}(s) - z^{(k)}[(j-1)h]\Big]ds,$$

$$Bz(0) + Cz(T) = d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t) = z^{(k+1)}(t) - z^{(k)}(t)$ будет решением краевой задачи (10), (11), где в правой части уравнения (10) разность $z^{(0)}(s) - z^{(0)}[(j-1)h]$ заменена разностью $\Delta^{(k)}(s) - \Delta^{(k)}[(j-1)h]$. При этом аналогично (12),(13) устанавливаются оценки

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

$$\|\dot{\Delta}^{(k+1)}\|_1 \le (\alpha+\beta T)\|\Delta^{(k+1)}\|_1 + \frac{1}{2}\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 \le \frac{1}{2}(\alpha+\beta T)\gamma\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 = \frac{1}{2}[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 = q_1(h)\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1, \quad k = 1, 2, \dots \tag{15}$$

Отсюда и из условия a) получим равномерную на $[0, T]$ сходимость последовательности $\dot{z}^{(k+1)}(t)$ к $v(t)$ при $k \to \infty$. Тогда в силу неравенства (14) последовательность $z^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, ...$, равномерно на $[0, T]$ сходится к $z(t)$ – решению задачи (5),(6) при $k \to \infty$ и $v(t) = \dot{z}(t)$. На основе (14),(15) имеем

$$\|z^{(k+1)} - y\|_1 \le \|z^{(k+1)} - z^{(k)}\|_1 + \|z^{(k)} - z^{(k-1)}\|_1 + ... + \|z^{(2)} - z^{(1)}\|_1 + \|z^{(1)} - z^{(0)}\|_1 \le$$

$$\le \frac{1}{2}\,\gamma\,\beta\,T\,h\Big\{\Big[[q_1(h)]^{k-1} + [q_1(h)]^{k-2} + \dots + 1\Big]\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1 + \|\dot{y}\|_1\Big\}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\|z - y\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma\beta Th\Big\{\frac{1}{1-q_1(h)}\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1 + \|\dot{y}\|_1\Big\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\gamma\beta Th\Big[\frac{q_1(h)}{1-q_1(h)}\|\dot{y}\|_1 + \|\dot{y}\|_1\Big] = \frac{\gamma\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}\|\dot{y}\|_1. \tag{16}$$

Из уравнения (3), корректной разрешимости задачи (3),(4) и неравенства (16) вытекают

$$\|\dot{y}\|_1 \le (\alpha+\beta T)\|y\|_1 + \|f\|_1 \le (\alpha+\beta T)\gamma\max(\|f\|_1, \|d\|) + \|f\|_1 \le [(\alpha+\beta T)\gamma+1]\max(\|f\|_1, \|d\|),$$

$$\|z - y\|_1 \le \gamma\frac{[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}\max(\|f\|_1, \|d\|), \tag{17}$$

$$\|z\|_1 \le \|z-y\|_1 + \|y\|_1 \le \gamma\frac{[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}\max(\|f\|_1, \|d\|) +$$

$$+\gamma\max(\|f\|_1, \|d\|) = \frac{2\gamma}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma+1]\beta Th}\max(\|f\|_1, \|d\|). \tag{18}$$

Покажем единственность решения задачи (5),(6). Пусть $z(t)$, $\widetilde{z}(t)$– два решения задачи (5),(6). Тогда их разность $\Delta z(t) = z(t) - \widetilde{z}(t)$ будет непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и удовлетворять нагруженному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta z}{dt} = A(t)\Delta z + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)\Delta z[(j-1)h]h + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[\Delta z(s) - \Delta z[(j-1)h]\Big]ds \tag{19}$$

и однородным граничным условиям

$$B\Delta z(0) + C\Delta z(T) = 0. \tag{20}$$

Из корректной разрешимости задачи (3),(4) следует, что функция $\Delta z(t)$ является единственным решением задачи (19),(20) и для него справедлива оценка

$$\|\Delta z\|_1 \leq \gamma \sum_{j=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|K_j(t)\| \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \|\Delta z(s) - \Delta z[(j-1)h]\| ds \leq \frac{1}{2}\gamma\beta T h \|\Delta \dot{z}\|_1. \tag{21}$$

Из (21) и уравнения (19) аналогично (13) вытекает неравенство

$$\|\Delta \dot{z}\|_1 \leq \frac{1}{2}\Big[(\alpha+\beta T)\gamma + 1\Big]\beta T h \|\Delta \dot{z}\|_1 = q_1(h)\|\Delta \dot{z}\|_1.$$

Учитывая, что $q_1(h) < 1$, получим $\|\Delta \dot{z}\|_1 = 0$. Тогда из (21) следует, что $\|\Delta z\|_1 = 0$, т.е. $z(t) = \widetilde{z}(t)$ для всех $t \in [0,T]$. Отсюда и из (18) следует корректная разрешимость задачи (5),(6) с константой $K^* = \dfrac{2\gamma}{2 - [(\alpha+\beta T)\gamma + 1]\beta T h}$.

Теперь, используя корректную разрешимость задачи (5),(6), методом последовательных приближений найдем решение задачи (1),(2). За нулевое приближение возьмем решение задачи (5),(6), т.е. $x^{(0)}(t) = z(t)$, и следующее приближение определим как решение краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} x(s)ds + f(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K(t,s) - K_j(t)\Big] x^{(0)}(s)ds, \tag{22}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \tag{23}$$

Так как матрицы $K_j(t)$, $K(t,s)$ непрерывны соответственно на $[0,T]$, $[0,T]\times[0,T]$, то функция $F(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K(t,s) - K_j(t)\Big] x^{(0)}(s)ds$ непрерывна на $[0,T]$. Поэтому, используя корректную разрешимость задачи (5),(6), найдем единственное решение $x^{(1)}(t)$ задачи (22),(23) и для функции $\Delta^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)$, являющейся решением краевой задачи

$$\frac{d\Delta}{dt} = A(t)\Delta + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Delta(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} [K(t,s) - K_j(t)] x^{(0)}(s)ds, \tag{24}$$

$$B\Delta(0) + C\Delta(T) = 0, \tag{25}$$

установим оценку

$$\|\Delta^{(1)}\|_1 \leq K^* \varepsilon(h) T \|z\|_1 = q_2(h)\|z\|_1. \tag{26}$$

Продолжая этот процесс, $(k+1)$–приближение найдем, решая краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{m} K_j(t) \int\limits_{(j-1)h}^{jh} x(s)ds + f(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{(j-1)h}^{jh} \Big[K(t,s) - K_j(t)\Big] x^{(k)}(s)ds,$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t) = x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)$ будет решением краевой задачи (24),(25), где в правой части уравнения (24) функция $x^{(0)}(s)$ заменена функцией $\Delta^{(k)}(s)$. При этом аналогично (26) устанавливается оценка $\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \le K^*\varepsilon(h)T\|\Delta^{(k)}\|_1 = q_2(h)\|\Delta^{(k)}\|_1, \quad k = 1, 2, \dots$ Отсюда и в силу условия б) последовательность функций $x^{(k+1)}(t)$ равномерно сходится на $[0, T]$ к $x(t)$ при $k \to \infty$ и для разности $x^{(k+1)}(t)$, $z(t)$ справедливо неравенство

$$\|x^{(k+1)} - z\|_1 \le K^*\varepsilon(h)T\Big[\|\Delta^{(k)}\|_1 + \|\Delta^{(k-1)}\|_1 + ... + \|\Delta^{(1)}\|_1 + \|z\|_1\Big] \le$$

$$\le K^*\varepsilon(h)T\Big\{\Big[[q_2(h)]^{k-1} + [q_2(h)]^{k-2} + ... + 1\Big]\|\Delta^{(1)}\|_1 + \|z\|_1\Big\}.$$

Устремляя k к бесконечности, получим

$$\|x - z\|_1 \le K^*\varepsilon(h)T\left[\frac{1}{1 - q_2(h)}\|\Delta^{(1)}\| + \|z\|_1\right] \le$$

$$\le K^*\varepsilon(h)T\left[\frac{K^*\varepsilon(h)T}{1 - K^*\varepsilon(h)T}\|z\|_1 + \|z\|_1\right] = \frac{K^*\varepsilon(h)T}{1 - K^*\varepsilon(h)T}\|z\|_1. \tag{27}$$

Отсюда и из корректной разрешимости задачи (5),(6) имеем

$$\|x\|_1 \le \|x - z\|_1 + \|z\|_1 \le \frac{K^*\varepsilon(h)T}{1 - K^*\varepsilon(h)T}\|z\|_1 + \|z\|_1 \le \frac{K^*}{1 - K^*\varepsilon(h)T}\max(\|f\|_1, \|d\|). \tag{28}$$

Покажем единственность решения задачи (1),(2). Пусть $x(t)$, $\widetilde{x}(t)$ являются решениями задачи (1),(2). Тогда $\Delta x(t) = x(t) - \widetilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x + \sum_{j=1}^{m} K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Delta x(s)ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K(t,s) - K_j(t)\Big]\Delta x(s)ds \tag{29}$$

и краевым условиям

$$B\Delta x(0) + C\Delta x(T) = 0. \tag{30}$$

Из корректной разрешимости задачи (5), (6) следует, что функция $\Delta x(t)$ является единственным решением задачи (29), (30) и для него справедливо неравенство

$$\|\Delta x\|_1 \le K^*\varepsilon(h)T\|\Delta x\|_1 = q_2(h)\|\Delta x\|_1.$$

Учитывая, что $q_2(h) < 1$, получим $\|\Delta x\|_1 = 0$, т.е. $x(t) = \widetilde{x}(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Отсюда и из (28) следует, что краевая задача (1), (2) корректно разрешима с константой $K = \dfrac{K^*}{1 - K^*\varepsilon(h)T}$. Поэтому из неравенств (17),(27) и $\|y - x\|_1 \le \|y - z\|_1 + \|z - x\|_1$ следует справедливость оценки (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (1), (2) корректно разрешима с константой K и выполняются неравенства*

$$a) \quad \delta_1(h) = K\varepsilon(h)T < 1,$$

$$б) \quad \delta_2(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha + \beta T)K}{1 - K\varepsilon(h)T} + 1\right]\beta T h < 1.$$

Тогда краевая задача (3),(4) корректно разрешима с константой

$$\gamma = \frac{2K}{2(1 - K\varepsilon(h)T) - [(\alpha + \beta T)K + 1 - K\varepsilon(h)T]\beta T h}$$

и справедлива оценка

$$\|x-y\|_1 \le \frac{K}{1-K\varepsilon(h)T}\Bigg\{K\varepsilon(h)T+$$

$$+\frac{[(\alpha+\beta T)K+1-K\varepsilon(h)T]\beta Th}{2(1-K\varepsilon(h)T)-[(\alpha+\beta T)K+1-K\varepsilon(h)T]\beta Th}\Bigg\}\max(\|f\|_1,\|d\|), \tag{31}$$

где $x(t)-$ решение задачи (1),(2), $y(t)-$ решение задачи (3),(4).

Доказательство. Используя корректную разрешимость задачи (1),(2), методом последовательных приближений найдем решение задачи (5),(6). Полагаем $z^{(0)}(t)=x(t)$ и $z^{(1)}(t)$ определим, решая краевую задачу

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+\int\limits_0^T K(t,s)z(s)ds+f(t)+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_j(t)-K(t,s)\Big]z^{(0)}(s)ds,$$

$$Bz(0)+Cz(T)=d.$$

Тогда функция $\Delta^{(1)}(t)=z^{(1)}(t)-z^{(0)}(t)$ будет решением задачи

$$\frac{d\Delta}{dt}=A(t)\Delta+\int\limits_0^T K(t,s)\Delta(s)ds+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_j(t)-K(t,s)\Big]z^{(0)}(s)ds, \tag{32}$$

$$B\Delta(0)+C\Delta(T)=0 \tag{33}$$

и для нее справедлива оценка

$$\|\Delta^{(1)}\|_1\le K\varepsilon(h)T\|z^{(0)}\|_1=K\varepsilon(h)T\|x\|_1=\delta_1(h)\|x\|_1. \tag{34}$$

Продолжая процесс, $(k+1)$ – приближение определим из краевой задачи

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+\int\limits_0^T K(t,s)z(s)ds+f(t)+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_j(t)-K(t,s)\Big]z^{(k)}(s)ds,$$

$$Bz(0)+Cz(T)=d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t)=z^{(k+1)}(t)-z^{(k)}(t)$ будет решением краевой задачи (32),(33), где функция $z^{(0)}(s)$ заменена функцией $\Delta^{(k)}(s)$. При этом аналогично (34) имеет место оценка $\|\Delta^{(k+1)}\|_1\le K\varepsilon(h)T\|\Delta^{(k)}\|_1=\delta_1(h)\|\Delta^{(k)}\|_1,\ k=1,2,\ldots$ Отсюда и из условия a) следует, что последовательность функций $z^{(k+1)}(t)$ равномерно сходится на $[0,T]$ к $z(t)$ при $k\to\infty$ и для разности функций $z^{(k+1)}(t)$ и $x(t)$ справедлива оценка

$$\|z^{(k+1)}-x\|_1\le K\varepsilon(h)T\Big[\|\Delta^{(k)}\|_1+\|\Delta^{(k-1)}\|_1+\ldots+\|\Delta^{(1)}\|_1+\|x\|_1\Big]\le$$

$$\le K\varepsilon(h)T\Big\{\Big[[\delta_1(h)]^{k-1}+[\delta_1(h)]^{k-2}+\ldots+1\Big]\|\Delta^{(1)}\|_1+\|x\|_1\Big\}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем

$$\|z-x\|_1\le K\varepsilon(h)T\Big\{\frac{1}{1-\delta_1(h)}\|\Delta^{(1)}\|_1+\|x\|_1\Big\}\le$$

$$\leq K\varepsilon(h)T\left\{\frac{K\varepsilon(h)T}{1-\delta_1(h)}\|x\|_1+\|x\|_1\right\}=\frac{K\varepsilon(h)T}{1-K\varepsilon(h)T}\|x\|_1. \tag{35}$$

Отсюда и из корректной разрешимости задачи (1),(2) следует

$$\|z\|_1\leq\|z-x\|_1+\|x\|_1\leq\frac{K\varepsilon(h)T}{1-K\varepsilon(h)T}\|x\|_1+\|x\|_1\leq\frac{K}{1-K\varepsilon(h)T}\max(\|f\|_1,\|d\|). \tag{36}$$

Покажем единственность решения задачи (5),(6). Пусть $z(t)$, $\widetilde{z}(t)$ – решения задачи (5),(6). Тогда $\Delta z(t)=z(t)-\widetilde{z}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta z}{dt}=A(t)\Delta z+\int\limits_0^T K(t,s)\Delta z(s)ds+\sum_{j=1}^m\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[K_j(t)-K(t,s)\Big]\Delta z(s)ds$$

и однородным краевым условиям

$$B\Delta z(0)+C\Delta z(T)=0.$$

Из корректной разрешимости задачи (5),(6) следует существование единственного решения $\Delta z(t)$ и справедливость оценки $\|\Delta z\|_1\leq K\varepsilon(h)T\|\Delta z\|_1=\delta_1(h)\|\Delta z\|_1$. Учитывая, что $\delta_1(h)<1$, получим $\|\Delta z\|_1=0$, т.е. $z(t)=\widetilde{z}(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Отсюда и из (36) следует корректная разрешимость задачи (5),(6) с константой $\gamma^*=\dfrac{K}{1-K\varepsilon(h)T}$.

Теперь покажем корректную разрешимость задачи (3),(4). Решение задачи (3),(4) найдем методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выберем $y^{(0)}(t)=z(t)$, где $z(t)$ – решение задачи (5),(6). Первое приближение определим, решая краевую задачу

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}y(s)ds+f(t)+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[y^{(0)}[(j-1)h]-y^{(0)}(s)\Big]ds, \tag{37}$$

$$By(0)+Cy(T)=d. \tag{38}$$

По предположению задача (37), (38) имеет единственное решение $y^{(1)}(t)$ и для функции $\Delta^{(1)}(t)=y^{(1)}(t)-y^{(0)}(t)$, являющейся решением краевой задачи

$$\frac{d\Delta}{dt}=A(t)\Delta+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Delta(s)ds+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[y^{(0)}[(j-1)h]-y^{(0)}(s)\Big]ds, \tag{39}$$

$$B\Delta(0)+C\Delta(T)=0, \tag{40}$$

имеет место оценка

$$\|\Delta^{(1)}\|_1\leq\frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\|\dot{y}^{(0)}\|_1=\frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\|\dot{z}\|_1. \tag{41}$$

Из уравнения (39) вытекает

$$\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1\leq\frac{1}{2}\Big[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1\Big]\beta Th\|\dot{z}\|_1=\delta_2(h)\|\dot{z}\|_1. \tag{42}$$

Продолжая итерационный процесс, $(k+1)$ – приближение найдем, решая краевую задачу

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}y(s)ds+f(t)+\sum_{j=1}^m K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[y^{(k)}[(j-1)h]-y^{(k)}(s)\Big]ds,$$

$$By(0)+Cy(T)=d.$$

Тогда функция $\Delta^{(k+1)}(t)=y^{(k+1)}(t)-y^{(k)}(t)$ будет решением краевой задачи (39), (40), где в правой части уравнения (39) разность $y^{(0)}[(j-1)h]-y^{(0)}(s)$ заменена разностью $\Delta^{(k)}[(j-1)h]-\Delta^{(k)}(s)$. При этом аналогично (41),(42) устанавливаются оценки

$$\|\Delta^{(k+1)}\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1, \qquad k=1,2,\ \dots, \tag{43}$$

$$\|\dot{\Delta}^{(k+1)}\|_1 \le (\alpha+\beta T)\|\Delta^{(k+1)}\|_1+\frac{1}{2}\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1 \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\alpha+\beta T)\gamma^*\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1+\frac{1}{2}\beta Th\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1=\delta_2(h)\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1, \quad k=1,2,\ \dots \tag{44}$$

Отсюда и из условия б) следует, что последовательность функций $\dot{z}^{(k+1)}(t)$ равномерно на $[0,T]$ сходится к $v(t)$ при $k\to\infty$. Тогда из (43) следует равномерная на $[0,T]$ сходимость последовательности $z^{(k)}(t)$ к $z(t)$ при $k\to\infty$ и $v(t)=\dot{z}(t)$. Учитывая (43),(44), установим оценку

$$\|y^{(k+1)}-z\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\Big[\|\dot{\Delta}^{(k)}\|_1+\|\dot{\Delta}^{(k-1)}\|_1+\ \dots\ +\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1+\|\dot{z}\|_1\Big] \le$$

$$\le \frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\bigg\{\Big[[\delta_2(h)]^{k-1}+[\delta_2(h)]^{k-2}+\ \dots\ +1\Big]\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1+\|\dot{z}\|_1\bigg\}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\|y-z\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\Big[\frac{1}{1-\delta_2(h)}\|\dot{\Delta}^{(1)}\|_1+\|\dot{z}\|_1\Big] \le \frac{\gamma^*\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}\|\dot{z}\|_1. \tag{45}$$

Из уравнения (5), корректной разрешимости задачи (5),(6) и неравенства (45) вытекают

$$\|\dot{z}\|_1 \le (\alpha+\beta T)\|z\|_1+\|f\|_1 \le (\alpha+\beta)\gamma^*\max(\|f\|_1,\|d\|)+\|f\|_1 \le [(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\max(\|f\|_1,\|d\|),$$

$$\|y-z\|_1 \le \gamma^*\frac{[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}\max(\|f\|_1,\|d\|), \tag{46}$$

$$\|y\|_1 \le \|y-z\|_1+\|z\|_1 \le \gamma_*\frac{[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}\max(\|f\|_1,\|d\|)+$$

$$+\gamma^*\max(\|f\|_1,\|d\|)=\frac{2\gamma^*}{2-[(\alpha+\beta T)\gamma^*+1]\beta Th}\max(\|f\|_1,\|d\|). \tag{47}$$

Покажем единственность решения задачи (3),(4). Пусть $y(t)$, $\widetilde{y}(t)$– два решения задачи (3),(4). Тогда их разность $\Delta y(t)=y(t)-\widetilde{y}(t)$ будет непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и удовлетворять уравнению

$$\frac{d\Delta y}{dt}=A(t)\Delta y+\sum_{j=1}^{m}K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Delta y(s)ds+\sum_{j=1}^{m}K_j(t)\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\Big[\Delta y[(j-1)h]-\Delta y(s)\Big]ds \tag{48}$$

и однородным граничным условиям

$$B\Delta y(0)+C\Delta y(T)=0. \tag{49}$$

Из корректной разрешимости задачи (5),(6) следует, что функция $\Delta y(t)$ является единственным решением задачи (48),(49) и для него справедлива оценка

$$\|\Delta y\|_1 \le \frac{1}{2}\gamma^*\beta Th\|\Delta\dot{y}\|_1. \tag{50}$$

Из (50) и уравнения (48) аналогично (44) вытекает неравенство

$$\|\Delta\dot{y}\|_1 \leq \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta T)\gamma^* + 1\right]\beta Th\|\Delta\dot{y}\|_1 = \delta_2(h)\|\Delta\dot{y}\|_1.$$

Учитывая, что $\delta_2(h) < 1$, получим $\|\Delta\dot{y}\|_1 = 0$. Тогда из (50) следует, что $\|\Delta y\|_1 = 0$, т.е. $y(t) = \widetilde{y}(t)$ для всех $t \in [0, T]$. Отсюда и из (47) следует, что краевая задача (3),(4) корректно разрешима с константой $\gamma = \dfrac{2\gamma^*}{2 - [(\alpha+\beta T)\gamma^* + 1]\beta Th}$. Поэтому из неравенств (35),(46) и $\|x - y\|_1 \leq \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1$ следует справедливость оценки (31). Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
2. **Быков Я. В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1957.
3. **Иманалиев М. И.** Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. Фрунзе, 1977.
4. **Кривошеин Л. Е.** Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1962.
5. **Васильев В. В.** //Докл. АН СССР 1955. Т. 100, № 5. С. 849 - 852.
6. **Васильев В. В.** //Известия высш. учеб. завед. 1963. № 37. С.29 - 38.
7. **Вигpаненко Т. И.** //Зап. Ленингр. горн. инс-та. 1956. Т.33, вып. 3. С.177 - 187.
8. **Некрасов А. И.** Собр. сочин. 1961. Т. 1. С.117.
9. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
10. **Бакирова Э. А.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2004. № 1. С. 85 – 90.
11. **Бакирова Э. А.** // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 3(17). С. 25 – 34.

Поступила в редакцию 7.01.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 44 — 51*

УДК 519.6.

БАЙЕСОВСКИЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЙ

В.Б. Бериков

Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН
Россия, Новосибирск

Предложены байесовские критерии качества дерева решений в задаче распознавания образов. Создан алгоритм построения дерева решений, использующий эти критерии. Проведено исследование алгоритма методом статистического моделирования.

Введение. По сравнению с классическими методами распознавания образов методы, основанные на логических решающих функциях (деревьях решений) обладают рядом положительных свойств:

– позволяют проводить анализ разнотипной информации (т.е. при наличии количественных и качественных переменных, описывающих объекты);

– находят вероятностные логические закономерности, отражающие причинно-следственные связи изучаемого явления.

Эти методы изложены, например, в [1,2,3]. Существует потребность в разработке методов построения деревьев решений, которые позволяли бы улучшать качество прогнозирования.

Можно рассмотреть два способа повышения качества. Первый способ заключается в нахождении критериев, позволяющих усилить прогнозирующую способность решений. Второй способ связан с разработкой более эффективных алгоритмов поиска решения, оптимального по заданному критерию.

В данной работе получены байесовские оценки прогнозирующей способности, которые используются как критерии качества дерева решений.

В работе [4] был предложен подход к оцениванию прогнозирующей способности, основанный на свойстве равномерной сходимости частот к вероятностям. Поскольку закон распределения вероятностей неизвестен, для нахождения гарантированных оценок качества решающих функций рассматривается наиболее неблагоприятный случай. Поэтому в реальных задачах полученные оценки оказываются чересчур пессимистичными.

В байесовском подходе [5] используется представление о случайности возникновения задачи обучения, а оценивание проводится "в среднем". Для оценивания качества метода распознавания этот подход использовался, например, в работах [6,2,8].

Keywords: *Bayesian criteria, decision tree, pattern recognition*
2000 Mathematics Subject Classification: 62B10

1. Деревья решений и распознавание по конечному множеству событий. Дерево решений можно определить рекурсивным образом. Пусть имеется набор разнотипных переменных $X = (X_1, \dots, X_n)$, а также прогнозируемая переменная Y.

Рассмотрим дерево, содержащее корневую вершину B и дочерние вершины $B_1, \dots, B_q, \dots, B_l$, где $l \geq 2$. Каждой ветви дерева $b = (B, B_q)$ поставим в соответствие простое высказывание "$x_j \in E_q$", где $E_q \in D_j$, D_j – множество значений некоторой переменной X_j, E_q – полуинтервал в случае непрерывной переменной X_j, объединение соседних значений в случае дискретной упорядоченной переменной X_j, объединение любых значений в случае дискретной неупорядоченной переменной X_j, причем множества $E_1, \dots, E_l$ составляют разбиение D_j.

Будем называть описанное дерево деревом решений, если каждая из вершин B_q, $q = 1, \dots, l$, является либо

а) корневой вершиной некоторого дерева решений, либо

б) конечной вершиной («листом», терминальной вершиной) с приписанным ей значением предсказываемой переменной Y.

Рассмотрим дерево решений с M листьями. Этому дереву соответствует разбиение пространства характеристик на х попарно непересекающихся подобластей $E^{(1)}, \dots, E^{(M)}$, так что каждому m-му листу сопоставляется подобласть $E^{(m)}$.

Под задачей распознавания образов по конечному множеству событий будем понимать задачу распознавания, возникающую при разбиении пространства переменных на некоторое конечное число подобластей (под событием понимается принятие вектором переменных значения из некоторой подобласти). Если ввести новую переменную, значениям которой соответствуют данные подобласти, получим задачу распознавания по значениям одной дискретной неупорядоченной переменной. Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача является достаточно важной. Ясно, что из любого пространства переменных (как дискретных, так и непрерывных) может быть образовано конечное множество событий путем разбиения пространства.

Задача распознавания по конечному множеству событий удобна для теоретического изучения, так как не возникают проблемы, связанные с заданием распределений в многомерном пространстве переменных (сложный вид модели, большое число параметров и т.д.).

Деревья решений используют разбиение пространства переменных и поэтому для их изучения естественно использовать подход, основанный на исследовании задачи распознавания по конечному множеству событий.

2. Оценка качества решающей функции при распознавании по конечному множеству событий. Для удобства записи, будем использовать следующие соглашения. Выражение $x_{(n)}$ обозначает: $x_{(n)} = x \dots (x+n-1)$. Оператор $\sum\limits_j$ (а также $\prod\limits_j$) означает, что суммирование (перемножение) ведется по всем значениям j из заданного множества, причем само это множество не указывается, если его нетрудно определить из контекста.

Рассмотрим две дискретные случайные переменные: входную (объясняющую или предикторную) переменную X с множеством неупорядоченных значений $D_X = \{c_1, \dots, c_M\}$, где c_j – j-е значение (ячейка) и выходную (предсказываемую) переменную Y с множеством неупорядоченных значений $D_Y = \{\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(K)}\}$, где $\omega^{(i)}$ – i-е значение, называемое i-м образом (классом), $K \geq 2$ – число классов. Далее, для удобства, закодируем значения переменной X через номера ячеек, а классы – через соответствующие им номера.

Пусть $p_j^{(i)}$ - вероятность совместного события "$X = j, Y = i$", при этом выполняется: $p_j^{(i)} \geq 0$, $\sum\limits_{i,j} p_j^{(i)} = 1$, $j = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, K$. Обозначим $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_M)$, где $\theta_j = (p_j^{(1)}, p_j^{(2)}, \dots, p_j^{(K)})$.

Для решения задачи распознавания требуется найти решающую функцию $f : D_X \to D_Y$. Предполагается, что задана ограниченная неотрицательная функция потерь $L_{i,q}$, возникающих в случае принятия решения $Y = i$, когда истинный класс есть q. Будем называть функцию потерь индикаторной, если $L_{i,i} = 0$ и $L_{i,q} = 1$ при $i \neq q$, $i, q = 1, \ldots, K$.

Пусть имеется некоторый класс $\mathbf{\Phi}$ решающих функций распознавания. Под сложностью класса будем понимать величину M.

Каждой решающей функции f из $\mathbf{\Phi}$ можно сопоставить ожидаемые потери (риск) при распознавании произвольного наблюдения: $R_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{l=1}^{K} p_j^{(l)} L_{f(j),l}$ (для индикаторной функции потерь риск совпадает с вероятностью ошибки распознавания). Если перейти на язык теории игр, то можно считать, что природа играет против нас стратегией θ, а мы играем стратегией f. Тогда паре (θ, f) сопоставляется риск $R_f(\theta)$.

Если бы вектор θ был известен, можно было бы построить оптимальную байесовскую решающую функцию f^B, для которой риск минимален: $f^B(j) = i : \sum\limits_{l=1}^{K} p_j^{(l)} L_{i,l} = \min\limits_{\rho} \sum\limits_{l=1}^{K} p_j^{(l)} L_{\rho,l}$, где $\rho = 1, \ldots, K$, $j = 1, \ldots, M$.

В прикладных задачах распознавания вектор θ обычно неизвестен. Решающая функция выбирается из $\mathbf{\Phi}$ на основе анализа выборки наблюдений над X и Y (обучающей выборки) с помощью некоторого заданного метода (алгоритма) обучения μ. Будем полагать, что результаты наблюдений являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Пусть N – объем выборки, $n_j^{(i)}$ – число наблюдений i-го класса, соответствующих j-й ячейке; $\sum\limits_{i,j} n_j^{(i)} = N$. Обозначим вектор частот через $s = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_m)$, где $s_j = (n_j^{(1)}, n_j^{(2)}, \ldots, n_j^{(K)})$. Вектор частот s будем также называть обучающей выборкой. Алгоритм μ можно рассматривать как функцию, задающую отображение конечного множества всевозможных векторов $\mathbf{S}=\{s\}$ во множество решающих функций $\mathbf{\Phi}$: $f = \mu(s)$. Оценкой эмпирического риска (или просто эмпирическим риском) для решающей функции f называют величину $\hat{R}_f(s) = \frac{1}{N} \sum\limits_{q,j} L_{f(j),q} n_j^{(q)}$.

Например, метод минимизации эмпирического риска состоит в следующем: поставить в соответствие j-й ячейке такой номер класса i, что $\sum_l n_j^{(l)} L_{i,l} = \min\limits_{\rho} \sum_l n_j^{(l)} L_{\rho,l}$, где $\rho = 1, \ldots, K$, $j = 1, \ldots, M$. Решающую функцию, полученную с помощью этого метода, называют функцией, минимизирующей эмпирический риск.

Пусть $S = (N_1^{(1)}, N_1^{(2)}, \ldots, N_M^{(K)})$ – случайный вектор частот. Этот вектор подчиняется полиномиальному распределению, т.е. $p(s|\theta) = \frac{N!}{\prod\limits_{l,j} n_j^{(l)}!} \prod\limits_{l,j} \left(p_j^{(l)}\right)^{n_j^{(l)}}$.

Рассмотрим семейство полиномиальных моделей распределения вектора частот с множеством параметров $\mathbf{\Theta} = \{\theta\}$. Будем использовать байесовский подход: предположим, что на множестве $\mathbf{\Theta}$ определена случайная величина $\Theta = (P_1^{(1)}, \ldots, P_M^{(K)})$ с некоторым известным априорным распределением $p(\theta)$ при $\theta \in \mathbf{\Theta}$. В этом случае риск является функцией $R_f(\Theta)$, зависящей от случайного вектора параметров модели.

Будем полагать, что параметр Θ подчиняется распределению Дирихле:

$$p(\theta) = \frac{1}{Z} \prod_{l,j} (p_j^{(l)})^{d_j^{(l)} - 1}$$

, где $d_j^{(l)} > 0$ — некоторые заданные вещественные числа, выражающие априорные знания о распределении θ, $l = 1, \ldots, K$, $j = 1, \ldots M$, Z – нормализующая константа. Для нахождения Z

используем формулу Дирихле:

$$\int\limits_{\substack{x_1,\dots,x_{m-1}:\\ x_i\ge 0\\ \sum_{i=1}^{m-1} x_i\le h}} \prod_{i=1}^{m-1}(x_i)^{d_i-1}(h-\sum_i x_i)^{d_m-1}dx_1\dots dx_{m-1}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\Gamma(d_i)}{\Gamma(\sum\limits_{i=1}^{m}d_i)}(h)^{\sum\limits_{i=1}^{m}d_i-1}, \qquad (1)$$

где $d_1,\dots,d_m$ – вещественные неотрицательные числа, $\Gamma(\cdot)$ – гамма - функция.

Из (1) получим, что $Z=\frac{\prod_{l,j}\Gamma(d_j^{(l)})}{\Gamma(D)}$, где $D{=}\sum_{l,j}d_j^{(l)}$.

Например, при $d_j^{(l)}\equiv 1$ получим случай равномерного априорного распределения, использование которого оправдано при наличии априорной неопределенности в выборе модели.

Выбор распределения Дирихле объясняется тем, что оно удобно для выражения априорных знаний о распределении на множестве стратегий природы: величины $d_j^{(l)}$ аналогичны числу попаданий в ячейки наблюдений различных классов. Это распределение сопряжено с рассматриваемым полиномиальным распределением вектора частот.

Пусть f – произвольная решающая функция, выбранная из множества решающих функций $\mathbf{\Phi}$, и задана обучающая выборка $s\in\ \mathbf{S}$.

Согласно байесовскому подходу, функция риска $R_f(\Theta)$ при фиксированной выборке является случайной величиной, зависящей от случайного вектора Θ. Рассмотрим апостериорную плотность распределения $p(\theta|S=s)=p(\theta|s)$, где $s\in\ \mathbf{S}$. По формуле Байеса получим: $p(\theta|s)=\frac{p(s|\theta)p(\theta)}{p(s)}$, где $p(s|\theta)$ – функция вероятности полиномиального распределения, $p(s)=\int\limits_{\mathbf{\Theta}}p(s|\theta)p(\theta)d\theta$. Из (1) следует, что $p(\theta|s)=\frac{\Gamma(N+D)}{\prod\limits_{j,l}\Gamma(d_j^{(l)}+n_j^{(l)})}\prod\limits_{j,l}(p_j^{(l)})^{d_j^{(l)}+n_j^{(l)}-1}$.

Утверждение 1. *Апостериорное математическое ожидание функции риска у решающей функции f равно* $E_{\Theta|s}R_f(\Theta)=\frac{1}{N+D}\sum\limits_j\sum\limits_q L_{f(j),q}(n_j^{(q)}+d_j^{(q)})$.

Доказательство. По определению функции риска

$$E_{\Theta|s}R_f(\Theta)=E_{\Theta|s}\sum_{j,q}L_{f(j),q}P_j^{(q)}=\sum_{j,q}L_{f(j),q}(E_{\Theta|s}P_j^{(q)})=$$

$$=\sum_{j,q}L_{f(j),q}\int\limits_{\mathbf{\Theta}}p(\theta|s)p_j^{(q)}d\theta=$$

$$=\sum_{j,q}\frac{\Gamma(N+D)}{\prod\limits_{m,l}\Gamma(d_m^{(l)}+n_m^{(l)})}L_{f(j),q}\int\limits_{\mathbf{\Theta}}\prod_{j,l}(p_j^{(l)})^{d_j^{(l)}+n_j^{(l)}-1}p_j^{(q)}d\theta=$$

$$=\sum_{j,q}\frac{\Gamma(N+D)}{\prod\limits_{j,l}\Gamma(d_j^{(l)}+n_j^{(l)})}L_{f(j),q}\frac{\prod\limits_{j,l}\Gamma(d_j^{(l)}+n_j^{(l)})\Gamma(d_j^{(q)}+n_j^{(q)}+1)}{\Gamma(N+D+1)}=$$

$$=\frac{1}{N+D}\sum_j\sum_q L_{f(j),q}(n_j^{(q)}+d_j^{(q)}),$$

что и требовалось доказать.

Определение 1. *Назовем найденную выше величину $E_{\Theta|s}R_f(\Theta)$ байесовской апостериорной оценкой функции риска (или просто байесовской оценкой риска), соответствующей решающей функции f. Обозначим эту величину как $R_{f,s}$.*

Следствие 1. *Байесовская оценка вероятности ошибочной классификации в случае равномерного априорного распределения индикаторной функции потерь равна*

$$P_{f,s} = \frac{\widetilde{n} + (K-1)M}{N + KM}. \tag{2}$$

Обозначим $\widetilde{p} = \frac{\widetilde{n}}{N}$, $\rho = \frac{M}{N}$. Тогда (2) примет вид: $P_{f,s} = Q(\widetilde{p},\rho) = \frac{\widetilde{p}+(K-1)\rho}{1+K\rho}$.

При малых $\widetilde{p},\rho$, воспользовавшись формулой Тейлора, получим $Q(\widetilde{p},\rho) \approx Q(0,0) + \widetilde{p} + ((K-1) - \widetilde{p}K)\rho$. Пренебрегая членами второго порядка малости, $P_{f,s} \approx p + (K-1)\rho = \frac{\widetilde{n}}{N} + (K-1)\frac{M}{N}$.

3. Задание априорного распределения по ожидаемой вероятности ошибки байесовской решающей функции. В данном параграфе для простоты рассматривается случай двух классов и индикаторной функции потерь.

На практике, в задачах распознавания всегда можно предполагать, что переменные, описывающие наблюдаемые объекты, задаются не случайно, но обладают некоторой информативностью. Поэтому позволительно считать, что вероятность ошибки оптимального байесовского решающего правила не слишком велика (например, не более 0,1 – 0,15). Эта вероятность выражает степень "пересечения" между классами. Покажем, каким образом задание параметров распределения Дирихле позволяет учитывать такую априорную информацию.

Пусть для всех l, j ($l = 1, 2$, $j = 1, \ldots, M$) выполняется $d_j^{(l)} = d$, где $d > 0$ – некоторый параметр. Таким образом, считаем, что не имеется априорной информации о предпочтении одних ячеек перед другими, однако априорное распределение на множестве стратегий природы необязательно равномерное ($d \neq 1$). Для фиксированного вектора параметров $\theta \in \mathbf{\Theta}$ вероятность ошибки распознавания байесовской решающей функции f_B равна $P_{f_B}(\theta) = \sum\limits_j \min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\}$. Найдем ожидаемую вероятность ошибки $EP_{f_B}(\Theta)$, где усреднение проводится по всем случайным векторам Θ с плотностью распределения $p(\theta) = \frac{1}{Z}\prod\limits_{l,j}(p_j^{(l)})^{d-1}$.

Утверждение 2. *Выполняется $EP_{f_B}(\Theta) = I_{0{,}5}(d+1, d)$, где $I_x(p,q)$ – бета функция распределения, $I_x(p,q) = \frac{B_x(p,q)}{B(p,q)}$, $B_x(p,q)$ – неполная бета функция, $B_x(p,q) = \int\limits_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, $B(p,q)$ – бета функция с параметрами p, q, $B(p,q) = B_1(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.*

Доказательство. Так как $EP_{f_B}(\Theta) = \int\limits_{\mathbf{\Theta}} \sum\limits_j \min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\} p(\theta)d\theta$, а $D = 2Md$, то получим

$$EP_{f_B}(\Theta) = \frac{1}{Z}\sum_j \int\limits_{\mathbf{\Theta}} \min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\} \prod_{l,r}(p_r^{(l)})^{d-1}d\theta =$$

$$= \frac{M}{Z} \int\limits_{\substack{p_1^{(1)}, p_1^{(2)}:\\ p_1^{(1)}+p_1^{(2)} \le 1}} \min\{p_1^{(1)}, p_1^{(2)}\}(p_1^{(1)})^{d-1}(p_1^{(2)})^{d-1} \int\limits_{\substack{p_j^{(l)}:\, j\neq 1,\\ \sum_{l,j} p_j^{(l)} = 1 - p_j^{(1)} - p_j^{(2)}}} \prod_{j\neq 1}(p_j^{(l)})^{d-1}d\theta =$$

$$= \frac{M}{Z} \int\limits_{\substack{p_1^{(1)}, p_1^{(2)}:\\ p_1^{(1)}+p_1^{(2)} \le 1}} \min\{p_1^{(1)}, p_1^{(2)}\}(p_1^{(1)})^{d-1}(p_1^{(2)})^{d-1} \frac{(\Gamma(d))^{2M-2}}{\Gamma(2Md - 2d)} \times$$

$$\times(1-p_1^{(1)}-p_1^{(2)})^{2Md-2d-1}dp_1^{(1)}dp_1^{(2)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой 1. Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть p, q, r – вещественные неотрицательные числа и*

$$\chi(p,q,r) = \int\limits_{\substack{x+y\leq 1,\\ y<x,\, x\geq 0,\, y\geq 0}} x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy.$$

Тогда

$$\chi(p,q,r) = B(p+q,r)B_{0,5}(q,p).$$

Доказательство. Воспользуемся следующей заменой переменных:
$x = u(1-t)$, $y = ut$. Тогда $\chi(p,q,r) = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^{0.5} u^{p-1}(1-t)^{p-1}u^{q-1}t^{q-1}(1-u)^{r-1}udt =$
$= \int\limits_0^1 u^{p+q-1}(1-u)^{r-1}du \int\limits_0^{0.5} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = B(p+q,r)B_{0.5}(q,p)$, что и требовалось доказать.

Вернемся к вычислению ожидаемой вероятности ошибки. Так как в рассматриваемом случае константа $Z = \frac{(\Gamma(d))^{2M}}{\Gamma(2Md)}$, то имеем

$$EP_{f_B}(\Theta) = \frac{2M\Gamma(2Md)}{\Gamma^2(d)\Gamma(2Md-2d)} \int\limits_{\substack{p_1^{(1)},p_1^{(2)}:\, p_1^{(1)}<p_1^{(2)}\\ p_1^{(1)}+p_1^{(2)}\leq 1}} (p_1^{(1)})^d(p_1^{(2)})^{d-1}\times$$

$$\times(1-p_1^{(1)}-p_1^{(2)})^{2Md-2d-1}dp_1^{(1)}dp_1^{(2)}.$$

Воспользовавшись доказанной леммой, получим

$$EP_{f_B}(\Theta) = \frac{2M\Gamma(2Md)}{\Gamma^2(d)\Gamma(2Md-2d)}B(2d+1,2Md-2d)B_{0,5}(d+1,d) =$$

$$= \frac{2M\Gamma(2Md)}{\Gamma^2(d)\Gamma(2Md-2d)}\frac{\Gamma(2d+1)\Gamma(2Md-2d)}{\Gamma(2Md+1)}B_{0,5}(d+1,d) =$$

$$= \frac{2M\Gamma(2d+1)}{\Gamma^2(d)2Md}B_{0,5}(d+1,d) = \frac{\Gamma(2d+1)}{\Gamma(d)\Gamma(d+1)}B_{0,5}(d+1,d) = I_{0,5}(d+1,d),$$

что и требовалось доказать.

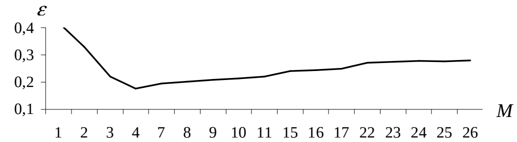

Рис. 1: Зависимость между параметром d и ожидаемой вероятностью ошибки байесовской решающей функции.

На рис. 1 показан график зависимости $EP_{f_B}(\Theta)$ от величины d.

Параметр d может служить для задания неравномерного априорного распределения на классе стратегий природы $\mathbf{\Theta}$: при уменьшении этого параметра плотность априорного распределения меняется так, что классы в среднем более разделены. Например, если предположить, что ожидаемая по стратегиям вероятность ошибки байесовской решающей функции не превосходит $0,15$, то параметр d не должен превышать значения $0,38$.

Аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе, можно показать, что $P_{f,s} \approx \approx \frac{\widetilde{n}}{N} + d\frac{M}{N}$.

4. Практическая реализация. Ранее был разработан рекурсивный алгоритм построения дерева решений ("R-метод") [8]. В отличие от существующих этот алгоритм позволяет изменять глубину перебора при поиске оптимального дерева. Использовался критерий качества дерева вида $Q = \frac{\widetilde{n}}{N} + \beta\frac{M}{N}$, где β – регуляризующий параметр, который задавался эвристически. Байесовский подход позволяет дать теоретическое обоснование выбору параметра β.

Поскольку теоретическое исследование алгоритма представляется затруднительным, был использован способ статистического моделирования. Исследование проводилось с помощью программной системы x+TL++=, предназначенной для сравнения алгоритмов распознавания образов [9]. В систему x+TL++= включены классические алгоритмы распознавания, использующие линейные дискриминантные функции (T-L), квадратичные дискриминантные функции (x-L), алгоритм, основанный на непараметрических оценках плотности Розенблатта-Харзена (=+x), и три алгоритма, использующие логические решающие функции DW , LRP и GLRP [2].

№(N_l)	T-L	x-L	=+x	DW	LRP	GLRP	R
1 (40)	0,220	–	0,257	0,369	0,312	0,491	0,424
1 (100)	0,138	0,235	0,202	0,368	0,302	0,337	0,411
1 (200)	0,137	0,202	0,202	0,360	0,294	0,226	0,400
2 (40)	0,510	0,212	0,450	0,490	0,473	0,493	**0,038**
2 (100)	0,493	0,165	0,300	0,510	0,187	0,478	**0,019**
2 (200)	0,482	0,156	0,290	0,480	0,180	0,302	**0,013**
3 (40)	0,505	0,453	**0,067**	0,418	0,401	0,394	0,166
3 (100)	0,336	0,367	**0,043**	0,150	0,130	0,330	0,134
3 (200)	0,373	0,366	**0,030**	0,132	0,118	0,321	0,122
4 (40)	0,423	0,068	0,070	0,142	0,254	0,523	0,044
4 (100)	0,418	0,063	0,052	0,050	0,136	0,464	0,038
4 (200)	0,390	0,046	0,035	0,050	0,056	0,459	0,011
5 (40)	0,482	–	0,488	0,443	0,311	0,311	**0,185**
5 (100)	0,455	0,473	0,473	0,184	0,080	0,087	0,093
5 (200)	0,433	0,463	0,132	0,163	0,066	0,064	0,093
6 (40)	0,190	0,163	0,142	0,207	0,182	0,148	0,164
6 (100)	0,182	0,147	0,123	0,160	0,160	**0,064**	0,179
6 (200)	0,172	0,145	0,100	0,155	0,158	**0,060**	0,169

Таблица 1: Результаты исследований в системе x+TL++=.

Было решено шесть модельных задач, каждая из которых имела тип распределения вероятностей, «наилучшим» образом подходящий одному из шести алгоритмов (например, алгоритму x-L соответствовала модель, в которой два класса имели такие плотности нормального распределения, что оптимальному байесовскому решающему правилу соответствовала квадратичная разделяющая функция). Номер модельного эксперимента совпадает с порядковым номером алгоритма, в пользу которого он предложен. Каждая задача решалась для объемов обучающей выборки N_l =40, 100 и 200. Объем контрольной выборки равен 200. Объекты обучающей и контрольной выборок генерировались в соответствии с заданным распределением случайным и независимым образом. В таблице 1 даны результаты моделирования (оценки вероятности ошибки распознавания).

Число случаев, когда алгоритм T-L проработал значимо лучше всех других алгоритмов на какой-либо модельной задаче (выделено жирным шрифтом), оказалось равным 0, для алгоритма x-L аналогичная величина равна 0, для =+x – 3, DW – 0, LRP - 0, GLRP – 2, R-метод – 4. Значимость расхождений определялась путем сравнения 95% доверительных интервалов для вероятности ошибки, определяемых по контрольной выборке.

На основании этого можно сделать следующие выводы. Ни один из алгоритмов не оказался лучше всех остальных на всех модельных задачах. Рекурсивный алгоритм чаще давал лучшие результаты, чем любой другой алгоритм.

С помощью предложенного алгоритма решен ряд задач: анализ генетических последовательностей [10], анализ медицинских данных, прогнозирование экстремальных гидрологических событий и др.

"Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00858а".

Цитированная литература

1. **Лбов Г.С.** Методы обработки разнотипных экспериментальнvх данных. Новосибирск, 1981.

2. **Лбов Г.С. и др.** Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск, 1999.

3. **Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C.** Classification and Regression Trees. Belmont, CA: Wadsworth Int. Group, 1984.

4. **Вапник Т. и др.** Теория распознавания образов. М., 1979.

5. **Hughes G.F.** // IEEE Trans. Inform. Theory. 1968. V. 14, №1. P. 55–63.

6. **Бериков В.Б.** // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, №9. С. 1448–1456.

7. **Berikov V.B.** // Pattern Recognition Letters. 2002. V. 23, №1-3. P. 227-233.

8. **Lbov G.S., Berikov V.B.** // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. Vol. 3, №4. P. 428-431.

9. **Лбов Г.С. и др.** Сравнение алгоритмов распознавания с помощью программной системы Полигон. Вычислительные системы. 1990. Вып. 134. С. 56–66.

10. **Berikov V.B., Rogozin I.B.** // Bioinformatics. 1999. Vol. 15. P.553-562.

Поступила в редакцию 20.10.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 52 — 60*

УДК 517.962

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ РДС

К.Б.Бопаев

Институт Математики МОиН РК
050010 г.Алматы ул. Пушкина,125 marat@math.kz

Вводится понятие условной устойчивости решения разностных динамических систем (РДС). Обобщены основные теоремы об устойчивости. Распространены некоторые методы исследования асимптотических свойств дифференциальных уравнений на случай РДС.

1. Введение. Постановка задачи. Для исследования асимптотического поведения решений разностных дифференциальных уравнений (РДС) важную роль играет понятие устойчивости, впервые введенное О.Перроном [1], как аналоги таких же понятий, введенных А.М.Ляпуновым для систем дифференциальных уравнений. Со времен О.Перрона эти понятия обобщались в различных формах в зависимости от постановки задач [2-4].

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = Ax_n + \varphi(n, x_n), \tag{1}$$

где A– постоянная $(m \times m)$– матрица, имеющая l характеристических корней $(0 < l < m)$ по модулю меньше единицы, причем $\varphi(n, x_n) = o(x_n)$ равномерно по n.

Целью данной работы является введение в теорию РДС понятия условной устойчивости решения РДС и на основе этого понятия обобщение основных теорем об устойчивости [1]; распространить некоторые методы исследования асимптотических свойств дифференциальных уравненний на случай РДС и получить анаплогичные теоремы [5] для РДС.

Условная устойчивость. Определение. *Говорят,что решение* $\eta_n = \eta(n)$ *РДС (1) условно устойчиво при* $n \to \infty$, *если в* R^m *существуют* l*-мерные многообразия* $\Omega_l \subset \eta_{n_0}$ *начальных значений такие, что для всякого решения* $x_n = x(n)$, *подчиненного условию:* $x_{n_0} \in \Omega_l, \quad |x_{n_0} - \eta_{n_0}| < \delta(\varepsilon)$, *будет выполнено неравенство* $|x_{n_0} - \eta_{n_0}| < \varepsilon \ \forall n > n_0$.

Условная устойчивость называется асимптотической, если сверх того $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \eta_n) = 0$, *где* $|x_n - \eta_n| < \Delta$ *(*Δ*– некоторая положительная постоянная).*

Keywords: *conditional stability, difference dynamic system, limited solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Теорема 1. Пусть матрица A имеет l собственных значений по модулю меньше единицы, $m-l$ собственных значений по модулю не меньше единицы, причем вектор-функция $\varphi(n, x_n)$, $n \in N$, удовлетворяет по x условию Липшица:

$$\begin{gathered} \|\varphi(n, x_n^{'}) - \varphi(n, x_n^{''})\| \leq L\| \|x_n^{'} - x_n^{''}\|, \\ (\|x_n^{'}\|, \quad \|x_n^{''}\| < \Delta, \quad n \in N), \end{gathered} \tag{2}$$

где $L = L(\Delta)$ и $L \to 0$ при $\Delta \to 0$ (для дальнейших рассуждений существенно, что константа Липшица может быть выбрана достаточно малой). Тогда тривиальное решение $x_n = 0$ системы (2) условно асимптотически устойчиво относительно некоторого l-мерного многообразия Ω_l начальных значений.

Доказательство. Без нарушения общности рассуждения можно принять $n_0 = 0$. Положим $x_n = Cy_n$, где действительная неособая матрица C такова, что

$$C^{-1}AC = B = diag(N,\ P),$$

причем $\lambda_j(N) < 1 \quad (j = \overline{1, l})$, $\lambda_k \cdot (P) \geq 1,\ k = \overline{l+1, m}$. Тогда (1) примет вид

$$y_{n+1} = By_n + \Psi(n, y_n), \tag{3}$$

где $\Psi(n, y_n) = C^{-1}\varphi(n, cy_n)$. Полагая $L_1 = \|C^{-1}\| \cdot \|C\| \cdot L$, имеем

$$\|\Psi(n, y_n^{'} - \Psi(n, y_n^{''})\| \leq L_1 \|y_n^{'} - y_n^{''}\| \ \text{ для } n \geq 0, \tag{4}$$

Если только $\|y_n^{'}\| < \Delta_1,\ \|y_n^{''}\| < \Delta_1,$ где $\Delta_1 = \dfrac{\Delta}{\|C\|}$.

Пусть $\beta > 0$ – произвольное малое число и $\alpha > 0$ таково, что

$$\alpha + \beta < min[-ln\lambda_j(N)].$$

Тогда, очевидно, справедливы неравенства

$$\left. \begin{array}{l} \|N\|^n \leq A \cdot e^{-(\alpha+\beta)n} \text{ при } n \geq 0, \\ \|P\|^n \leq A \cdot e^{\beta n} \text{ при } n \leq 0 \end{array} \right\}, \tag{5}$$

где A– некоторая достаточно большая положительная постоянная.

Положим

$$G(n) = \begin{cases} B^n diag(E_l, 0) \text{ при } n \geq 0, \\ -B^n diag(0, E_{m=l}) \text{ при } n \leq 0, \end{cases} \tag{6}$$

где E_p– единичная матрица соответствующего порядка. Очевидно,

$$G(+0) - G(-0) = E_m.$$

Из неравенства (5), учитывая, что $B^n = diag(N^n, P^n)$, получаем

$$G(n) = \begin{cases} Ae^{-(\alpha+\beta)n} \text{при } n > 0, \\ Ae^{\beta n} \text{ при } n < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Кроме того, очевидно, имеем

$$G(n+1) = BG(n) \text{ при } n \neq 0.$$

Рассмотрим сингулярно-суммарное уравнение [6]

$$y_n(a) = Z_n a + \sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)\psi(s, y_s(a)). \tag{8}$$

Здесь $Z_n = B^n diag(E_l, 0) = diag(N^n, 0)$, где a– постоянный вектор, $m-l$ последних координат которого равны нулю. Для решения суммарного уравнения (8) применим метод последовательных приближений, полагая

$$y_n^{(0)}(a) = 0$$

и

$$y_n^{(q)}(a) = Z_n a + \sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)\psi(s, y_s^{(q-1)}(a)) \quad (q = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Выберем число Δ столь малым, чтобы было выполнено неравенство $L_1 < \dfrac{\rho}{4A}$ и пусть $\|a\| < \dfrac{A_1}{2A} = a_0$.

Тогда, учитывая первое из неравенств (5) при $n \geq 0$, будем иметь

$$\|y_n(a)\| \leq \|Z_n\| \cdot \|a\| \leq Ae^{-(\alpha+\beta)n}\|a\| \leq A\|a\|e^{-\alpha n}.$$

Пусть

$$\|y_n^{(q)}(a) - y_n^{(q-1)}(a)\| \leq \frac{A}{a^{q-1}} a \leq A\|a\|e^{-\alpha n}. \tag{10}$$

из формулы (9) Используя неравенство (7), выводим

$$\|y_n^{(q+1)}(a) - y_n^{(q)}(a)\| \leq \sum G(n-s)\|\psi(s, y_n^{(q)}(a)) - \psi(s, y_n^{(q-1)}(s\cdot a)\| \leq \sum_{s=0}^{m} Ae^{-(\alpha+\beta)(n-s)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\beta}{4A}\cdot\frac{A}{2^{q-1}}\cdot\|a\|\cdot e^{-\alpha n} + \sum_{s=n+1}^{\infty} Ae^{\beta(n-s)}\frac{\beta}{4A}\cdot\frac{A}{2^{q-1}}\cdot\|a\|\cdot e^{-\alpha n} = \frac{\beta A}{2^q}\cdot\|a\|\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-s)}}{1-e^{-(\alpha+\beta)}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-e^{-(\alpha)(n+1)}}{1-e^{-\alpha}} + \frac{\beta A}{2^q}\cdot\|a\|\frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\cdot\frac{e^{-\alpha(n+1)}}{1-e^{-\alpha}} \leq \frac{\beta A}{2^q}\|a\|\cdot e^{-\alpha n}$$

при $n \geq 0$.

Следовательно, для всех q выполняется (10).

Отсюда $\lim\limits_{q\to a} y_n^{(q)}(a) = \lim\limits_{q\to a} y_n^{(q-1)}(a)$, причем предельная функция $y_n(a)$ непрерывна по совокупности переменных n и a на множестве целых чисел и $\|a\| < a_0$. Переходя к пределу при $q \to \infty$ в (9), будем иметь

$$y_n(a) = Z_n A + \sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)\psi(s, y_s(a)), \tag{11}$$

т.е. предельная функция $y_n(a)$ является решением суммарного уравнения (8). Из последнего находим

$$y_{n+1} = BZ_n a + B\sum_{s=0}^{\infty} G(n-s)\psi_s(n, y, (a)) + [G(0) - G(-0)]\psi(n, y_n(a)) = By_n(a) + \psi(n, y_n(a))$$

и, значит, $y_n(a)$ является решением системы РДС (4). Используя неравенства (10), получаем

$$\|y_n(a)\| \leq \|y_n^0(a)\| + \sum_{q=1}^{\infty} \|y_n^q(a) - y_n^{q-1}(a)\| \leq \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A}{2^{q-1}} \|a\| e^{-an} = \alpha A \cdot \|a\| e^{-an}$$

отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(a)$ т.е. при $\|a\| \prec a_0$ представляет собой многообразия решений РДС (4), непрерывно зависящее от l параметров $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_l$ первых l координат вектора a, стремящихся к нулю при $n \to \infty$. Из уравнения (11), учитывая структуру (6) матрицы $G(n)$, для координат $y_{nj}(a)$ решений при $n = 0$ будут иметь место следующие выражения:

$$y_{0j}(a) = a_j \quad (j = \overline{1, l})$$

и

$$y_{0j}(a) = \left[\sum_{s=0}^{\infty} G(-s)\psi(s, y_{,s}(a))\right]_j \qquad (j = \overline{l+1, m}),$$

где $[\ ]_j$ обозначает j-ю компоненту соответствующего вектора. Поэтому в окрестности начала координат 0 эти начальные значения удовлетворяют системе уравнений, которые определяют в пространстве на которые l-мерные многообразия S-начальных значений, перерождающее решения $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Возвращаясь к прежним переменным $x_n = Cy_n$, получим, что аналогичное утверждение справедливо для решений $x_n = x(n)$ исходной системы (1). Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Пусть матрица A имеет l собственных чисел по модулю меньше единицы и $n - l$ собственных числа по модулю больше единицы, причем условие Липшица (1) для $\varphi(n, x_n)$ выполнено $\forall n \in Z$ и при этом константа Липшица достаточно мала. Тогда в некоторых окрестностях точки пространства R^m существуют многообразия S_l^+ и S_{m-l}^- соответственно l и $m - l$ измерений такие, что для решений x_n РДС (1) справедливы предельные соотношения:*

$$x_n \to 0 \ \textit{при}\ n \to \infty\ ,\ \textit{если}\ x_0 \in S_l^+,$$

$$x_n \to 0 \ \textit{при}\ n \to -\infty\ ,\ \textit{если}\ x_0 \in S_{m-l}^-.$$

Условия существования ограниченного решения на Z. Сначала докажем следующую лемму

Лемма. Пусть

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n, \tag{12}$$

где A– постоянная $m \times m$ матрица, $x_n \in R^m,\ f_m \in R^m$– векторы, причем

$$\|\lambda(A)\| \neq 1 \ (j \neq m) \text{ и } \sup_{n\in N} \|f(n)\| = \Gamma < \infty.$$

Тогда существует матрица $G(n) \in C^\infty \quad (n \in N)$, имеющая следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&1)\ G(+0) - G) - 0) = E_n,\ \text{где } E_n\ \text{– единичная } (m \times m) \text{ матрица},\\
&2)\ \|G(n)\| \leq ce^{-\alpha\|n\|} \text{ где } c \text{ и } \alpha\ \text{– положительные постоянные},\\
&3)\ G(n+1) = AG(n),\\
&4)\ \eta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n-s)f(s)
\end{aligned} \tag{13}$$

представляет собой единственное ограниченное на Z решение (12).

Доказательство. С помощью неособенной постоянной $m\times m$ матрицы C матрицу A можно привести к следующему виду:

$$CAC^{-1} = diag(N, P),$$

где N $(l \times l)$ и P $(m-l\times m-l)$– матрицы, имеющие собственные числа соответственно по модулю меньше и больше единицы, т.е.

$$\|\lambda_j(N)\| < 1 \text{ и } \|\lambda_\tau(P)\| > 1 \quad (j=\overline{1,l}, \tau=\overline{l+1,m}).$$

Положим

$$\begin{aligned} G(n) &= S^{-1}diag(N^n, 0)S \quad \text{ при } n>0,\\ G(n) &= S^{-1}diag(0, P^n)S \quad \text{ при } n<0, \end{aligned} \tag{14}$$

отсюда

$$G(+0) - G) - 0) = E_n$$

и выполняется условие 1).

Далее, полагая $0<\alpha_1<\min\limits_j[-\lambda_j(P)]$ и $0<\alpha_2<\min\limits_\tau[-\lambda_\tau(P)]$, получим

$$\|N^n\| \le \|e^{Nn}\| \le c_1 e^{\alpha_1 n} \text{ при } \eta \ge 0,$$

и

$$\|P^n\| \le \|e^{Pn}\| \le c_2 e^{\alpha_1 n} \quad \text{ при } \eta \le 0,$$

где c_1 и c_2– некоторые положительные постоянные. Отсюда следует свойство 2)

$$\|G(n)\| \le ce^{-\alpha\|n\|} \quad (n \ne 0). \tag{15}$$

Здесь $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ и c- положительная постоянная.

Из (14) следует, что

$$G(n+1) = S^{-1}diag(N^{n+1}, 0)S = S^{-1}\cdot Ndiag(N^n, 0)S =$$

$$= S^{-1}diag(NP)\cdot S\cdot\cdot S^{-1}diag(N^n, 0)S = AG(n) \quad \text{ при } n\in Z.$$

Аналогично из (14) имеем

$$G(n+1) = AG(n) \quad \text{ при } n \in Z.$$

Следовательно, имеет место свойство 3).

Наконец из (15) выводим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|G(n)\| \le a\sum_{s=0}^{\infty}e^{-\alpha n} = \frac{2a}{1-e^{-\alpha}}. \tag{16}$$

Поэтому ряд (13) сходится $\forall n\in Z$. Из (13)

$$\eta(n+1) = [G(+0)-G(-0)]f(n+1) + A\sum_{s=-\infty}^{\infty}G(n-s)f_s = A\eta(n) + f_{n+1}.$$

Итак, при $n \in Z \quad \eta(n)$ является решением (12).

Оценивая $\eta(n)$ по норме и на основании (15) будем иметь

$$\|\eta(n)\| \le \sup_n\|f(n+1)\|\cdot\sum_{s=-\infty}^{\infty}\|G(n-s)\| \le \Gamma\cdot\frac{2a}{1-e^{\alpha}} = \Gamma_1 < \infty. \tag{17}$$

Следовательно, решение $\eta(n)$ ограничено на Z. То, что ограниченное решение $\eta(n)$ единственно, следует из того, что для двух ограниченных на Z решений $\eta(n), \eta_1(n)$ их разность $\xi(n) = \eta_1(n) - \eta(n)$ является решением однородной линейной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

единственным ограниченным на Z решением которой является тривиальное решение $x_n = 0$, т.е. $\eta_1(n) = \eta(n)$. Таким образом, свойство 4) также выполнено.

Следствие. *Для ограниченного решения $\eta(n)$ РДС (12) справедлива оценка: $\sup\limits_n \eta(n) \leq a \cdot \sup\limits_n f(n)$, где постоянная a зависит только от матрицы A.*

Замечание. *Если неоднородности (12) есть ω-периодичная функция, т.е. $f(n+\omega) = f(n)$, где $\omega \in N$, то ограниченное решение (12) также ω-периодично.*

Действительно, на основании формулы (13) имеем

$$\eta(n+\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n+\omega-s)f(s) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)f(s+\omega) = \eta(n).$$

Теорема 2. *Пусть РДС (1) такова, что A– постоянная $(m \times m)$ матрица,*

$$\varphi(n, x_n) \in C(Z \times X / \|x_n\| < \alpha).$$

Если

1. $|\lambda_j(A)| \neq 0 \quad (j = \overline{1,m})$ *причем* $|\lambda_j(A)| > 1$ *при* $j = \overline{1,l}$, $|\lambda_j(A)| < 1$ *при* $j = \overline{l+1,m} \quad (0 \leq l < \infty)$,
2. $\sup\limits_n \|\varphi(n,0)\| = \Gamma < \infty$,
3. *выполнено условие Липшица* $\|\varphi(n,x^{'}) - \varphi(n,x^{''})\| \leq L\|x^{'} - x^{''}\|$,

то при постоянно малой константе Липшица

1) существует решение $\eta = \eta(n)$ РДС (1), определенное и ограниченное на Z;

2) в пространстве R^m имеются многообразия S_l^+ и S_{m-l}^-, соответственно l и $m-l$ измерений такие, что решения $x_n(x_0)$ РДС (1) обладают свойствами:

$$\lim_{n\to\infty}[x_n(x_0) - \eta_n] = 0, \text{ если } x_0 \in S_l^+, \tag{18}$$

$$\lim_{n\to-\infty}[x_n(x_0) - \eta_n] = 0, \text{ если } x_0 \in S_{m-l}^-. \tag{19}$$

Доказательство. Принимая $\varphi(n, x_n)$ за члены неоднородности линейной РДС по аналогии с формулой (13) рассмотрим суммарное уравнение

$$x_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, x_s), \tag{20}$$

где $G(n)$– функция, определенная в лемме. В силу свойств 1),2), 3), 4) функции $G(n)$ непрерывное и ограниченное решение $\eta(n)$ суммарного уравнения (20) является также решением РДС (1).

Пусть

$$c_1 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n)\|(c < \infty) x_n^0 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s,0).$$

На основании условия 2) имеем

$$\|x_n^0\| = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n-s)\| \cdot \|\varphi(s,0)\| = \sup_n \varphi(n,0) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n-s)\| = \Gamma \cdot c_1 = \Gamma_1.$$

Выберем H такое, что

$$H > 2\Gamma_1. \tag{21}$$

В пространстве R^m ограниченных на Z вектор-функций x_n, где $\sup\limits_n \|x_n\| < H$, рассмотрим оператор T, определяемый правой частью суммарного уравнения (20):

$$Tx_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s,x_s). \tag{22}$$

Так как при $\|x\| < H$ имеем

$$\sup_n \|\varphi(n,x_n)\| \le \sup_n \|\varphi(n,0)\| + L \sup_n \|x_n\| \le \Gamma + LH,$$

то при $x_n \in R^m$ ряд (22) сходится, причем равномерно на каждом конечном отрезке множества целых чисел. Отсюда легко убедится, что если $x_n \in R^m$, то Tx_n имеет смысл для любого $x_n \in Z$ и $Tx_n \in C(Z)$.

Далее, при $x_n \in R^m$ будем иметь

$$Tx_n = x_n^0 + \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)[\varphi(s,x_s)) - \varphi(s,0)],$$

отсюда

$$\|Tx_n\| \le \|x_n^0\| + \sup_n \|x_n\| \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(s) \le \Gamma_1 + LHC_1. \tag{23}$$

Если выбрать константу Липшица L столь малой, чтобы

$$L = \frac{1}{2c_1}, \tag{24}$$

то из равенства (23), учитывая, что $\Gamma_1 < \dfrac{H}{2}$, получим

$$\sup_n \|Tx_n\| \le \Gamma_1 + \frac{H}{2} < H.$$

Таким образом, при L, удовлетворяющем неравенству (24), получаем, что если $x_n \in C$, то $Tx_n \in C$. В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (24) выполнено.

Для функций $x_n, y_n \in C$ введем расстояние, полагая

$$\varrho(x_n,y_n) = \sup_n \|x_n - y_n\|.$$

Тогда C будет являться метрическим пространством, причем это пространство полное.

Теперь убедимся, что при условии (23) отображение Tx_n будет сжатым.

Действительно, если $x_n, y_n \in C$, то из формул

$$Tx_n = x_n^0 + \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s,x_s)$$

и

$$Ty_n = x_n^0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, y_s),$$

используя условие Липшица 3), получим

$$\|Tx_n - Ty_n\| \leq L \sup_n \|x_n - y_n\| \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n-s)\| = LC_1 \varrho(x_n, y_n),$$

отсюда

$$\varrho(Tx_n, Ty_n) \leq q\varrho(x_n, y_n),$$

где $q = Lc_1 < \dfrac{1}{2}$ в силу неравенства (23).

Таким образом, выполнены все условия принципа сжатых отображений [8] и, следовательно, существует непрерывное ограниченное на Z решение системы суммарного уравнения (20), а значит и РДС (1), причем

$$\sup_n \|\eta(n)\| < H.$$

Решение $\eta(n)$ может быть найдено методом последовательных приближений

$$x_n^{(0)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, 0),$$

$$x_n^{(q)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, x_n^{(q-1)}), \quad q = 1, 2, \ldots$$

2) В системе (1) положим

$$x_n = \eta(n) + y_n.$$

Тогда будем иметь

$$y_{n+1} = Ay_n + \psi(n, y_n), \tag{25}$$

где $\Psi(n, y_n) = \varphi(n, \eta(n) + y_n) - \varphi(n, \eta(n))$, очевидно, имеем

$$\Psi(n, 0) = 0 \quad \text{ и } \quad \|\psi(n, y_n^{'}) - \psi(n, y_n^{''})\| \leq L\|y_n^{'} - y_n^{''}\| \quad (y_n^{'}, y_n^{''} \in R^m),$$

причем $\varphi(n, x_n) \to 0$ при $x_n \to 0$.

Отсюда на основании теоремы 1 об условной устойчивости заключаем о существовании многообразий S_l^+ и S_{m-l}^-, обладающих соответственно свойствами (18) и (19). Теорема доказана полностью.

Следствие. *Если $\varphi(n, x_n)$ в (1) периодична по n с периодом $\omega \in N$, то ограниченное решение $\eta(n)$ также ω-периодично.*

Действительно, из равенства

$$\eta(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, \eta(s))$$

получаем

$$\eta(n+\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n+\omega-s)\varphi(s, \eta(s)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(n-s)\varphi(s, \eta(s+\omega)),$$

отсюда

$$\|\eta(n+\omega)-\eta(n)\| \leq \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n-s)\| \cdot \|\varphi(s,\eta(s+\omega))-\varphi(s,\eta(s))\| \leq$$
$$\leq L\sup_n \|\eta(n+\omega)-\eta(n)\| \cdot c_1,$$

где $c_1 = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} \|G(n)\|$. Следовательно,

$$\sup_n \|\eta(n+\omega)-\eta(n)\| \leq c_1 L \|\eta(n+\omega)-\eta(n)\|,$$

а так как $c_1 L < 1$, то $\sup\limits_n \|\eta(n+\omega)-\eta(n)\| \leq 0$, откуда следует

$$\eta(n+\omega) = \eta(n).$$

Что и требовалось доказать.

Следствие теоремы 2 является аналогом для РДС известной теоремы Боля 5 по качественной теории дифференциальных уравнений.

Цитированная литература

1. **Perron O.** // Jour. RAM. 1929.V.161, № 1. P. 41-64.

2. **Врамберг П. В.** Устойчивость и автоколебание импульсных систем регулирования. М., 1953.

3. **Халанай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

4. **Бопаев К. Б.** Устойчивость решения системы нелинейных разностных уравнений в критическом и близко к критическому случаях. Препринт № 2. Алматы-Новосибирск. 1995.

5. **Боль П.** О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике. Юрьев. 1900.

6. **Быков Я. В., Линенко В. Г.** О некоторых вопросах качественной теории устойчивости. Фрунзе, 1968.

7. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М., 1960.

8. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1960.

Поступила в редакцию 12.12.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 61 — 67*

УДК 517.968.2

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, А. Е. Туймебаева

Институт математики ЦФМИ МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Показано, что особый интегральный оператор типа Вольтерра второго рода является нетеровым и имеет индекс равный 1.

При отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, естественным образом возникают (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) интегральные уравнения Вольтерра третьего рода [1]

$$t^\alpha \upsilon(t) - \lambda \int\limits_0^t \frac{\upsilon(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \;\; 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Заметим, что уравнение (1) было объектом изучения многих авторов [2 – 7]. В отличие от работы [1], в которой это уравнение подробно исследовано для действительных значений $\lambda \in \mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$, и для ограниченного временного интервала $0 < t < 1$, в данной работе будет исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (1) при условиях: $\lambda \in \mathbb{C}$, и $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Постановки задач. Уравнение (1) простым преобразованием $\mu(t) = t^\alpha \upsilon(t)$ можно представить как особое интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\tau^\alpha (t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+, \;\; 0 < \alpha < 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

(Использование термина особое интегральное уравнение для (2) будет обосновано ниже.)

Будем считать, что правая часть и решение уравнения (2) принадлежат классам функций, суммируемых с соответствующими весами:

$$e^{-t} f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad t^{-\alpha} e^{-t} \mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+). \tag{3}$$

Очевидно, из (3) также следует, что $e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$.

Ставятся следующие задачи:

Keywords: *singular Volterra integral equation, index of operator, eigenfunctions*
2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

Задача 1. *Исследовать разрешимость особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода (2) при условиях (3).*

Задача 2. *Исследовать спектральные вопросы для особого интегрального оператора Вольтерра второго рода (2) при условиях (3).*

2. Свойства интегрального оператора (2). Запишем уравнение (2) в виде:

$$\mathbf{K}_\lambda\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f(t), \ \ t\in\mathbb{R}_+. \tag{4}$$

где $\mathscr{K}(t,\tau)$ — определяется из равенства

$$\mathscr{K}(t,\tau) = \frac{1}{\tau^\alpha(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad 0<\tau<t<\infty. \tag{5}$$

Заметим, что это ядро обладает следующими свойствами:

1°. ядро $\mathscr{K}(t,\tau),\ 0<\tau<t<\infty$, непрерывно;

2°. ядро $\mathscr{K}(t,\tau)\geq 0,\ 0<\tau<t<\infty$;

3°. для каждого $t_0\geq\varepsilon>0:\ \lim\limits_{t\to+t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\mathscr{K}(t,\tau)d\tau = 0$;

4°. норма интегрального оператора, определяемого ядром $\mathscr{K}(t,\tau)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\pi/\sin\pi\alpha\neq 0$.

Свойства 1° – 3° очевидны, а справедливость 4° следует из соотношения

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^\alpha(t-\tau)^{1-\alpha}} = B(\alpha,1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} > 0.$$

В связи с этими свойствами ядра $\mathscr{K}(t,\tau)$ уравнение (2) названо особым интегральным уравнением Вольтерра.

Если ввести функцию $k(z)$ по формуле

$$k(z) = \begin{cases} 0, & 0<z<1; \\ \dfrac{1}{(z-1)^{1-\alpha}}, & 1<z<\infty, \end{cases} \tag{6}$$

то можно переписать уравнение (4) в виде (см., например, [8]):

$$\mu(t) - \lambda\int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = f(t). \tag{7}$$

3. Решение однородного интегрального уравнения. Исследуем однородное интегральное уравнение, соответствующее (7):

$$\mu(t) - \lambda\int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = 0. \tag{8}$$

Применяя к нему преобразование Меллина, с учетом теоремы о свертке [8], получим

$$\widehat{\mu}(s)[1-\lambda\widehat{k}(s)] = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где

$$\widehat{\mu}(s) = \int\limits_0^\infty \mu(\tau)\tau^{s-1}d\tau,\ \operatorname{Re} s > 0,$$

– изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_0^1 z^{-s-\alpha}(1-z)^{\alpha-1}dz = B(\alpha, -s+1-\alpha),\ \ \operatorname{Re} s < 1-\alpha, \tag{9}$$

здесь $B(x,y)$ — Бета-функция.

Наличие и вид собственных функций однородного интегрального уравнения (8), определяется наличием и количеством корней следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра s

$$1 - \lambda\widehat{k}(s) = 0, \quad (s = s_1 + is_2), \tag{10}$$

а, именно:

1°. действительным однократным корням $s^{(k)}$ уравнения (10) отвечают собственные функции

$$\mu_k(t) = t^{s^{(k)}},$$

2°. комплексным однократным корням $s^{(k)} = s_1^{(k)} + is_2^{(k)}$ уравнения (10) отвечает пара собственных функций

$$\mu_k^1(t) = t^{s_1^{(k)}} \cdot \cos\left(s_2^{(k)} \ln t\right), \quad \mu_k^2(t) = t^{s_1^{(k)}} \cdot \sin\left(s_2^{(k)} \ln t\right).$$

Общее решение однородного уравнения (8) представляет собой линейную комбинацию собственных функций этого уравнения.

Исследуем подробнее вопрос о корнях уравнения (10), т.е. согласно (9) уравнения

$$\lambda \cdot B(\alpha, -s+1-\alpha) = 1. \tag{11}$$

Учитывая свойство Бета-функции $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ и пользуясь ее представлением в виде ряда [10, с.964], получим

$$\begin{aligned} B(1-\alpha-s,\,\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n)}{n!\,(n+1-\alpha-s)} = \\ &= \frac{1}{1-\alpha-s} - \frac{\alpha-1}{1!\,(2-\alpha-s)} + \ldots + (-1)^k \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)}{k!\,(k+1-\alpha-s)} + \ldots = \\ &= \frac{1}{1-\alpha-s} + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n+1-\alpha-s}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$b_n = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{n!} = \left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1-\frac{\alpha}{k}\right) > 0.$$

Таким образом, изображение ядра интегрального уравнения (8) можно представить в следующем виде

$$B(-s+1-\alpha,\,\alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{n+1-\alpha-s}, \quad b_0 = 1.$$

Записывая равенство (11) в виде

$$\frac{1}{\lambda_1 + i\lambda_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1-\alpha-s_1-is_2},$$

получим соотношения

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n+(1-\alpha-s_1)}{(n+1-\alpha-s_1)^2+s_2^2}\ , \qquad -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} = s_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(n+1-\alpha-s_1)^2+s_2^2}. \tag{13}$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Для всех значений s, таких, что $Re\, s = s_1 < 1-\alpha$, значения сумм в правых частях равенств (13) положительны. Это означает, что величина $\lambda_1 = Re\,\lambda > 0$, а $\lambda_2 = Im\,\lambda$ имеет знак, равный противоположному знаку числа $s_2 = Im\, s$.*

Справедливость утверждения 1 сразу же следует из представления Бета-функции (12), соотношений (13) и условия, что $b_n > 0$ для $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

Из утверждения 1 непосредственно следует справедливость следующей теоремы о разрешимости однородного интегрального уравнения (8).

Теорема 1. *Для $\forall\,\lambda$ при $Re\,\lambda \geqslant \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ однородное интегральное уравнение (8) (наряду с тривиальным) имеет нетривиальное решение вида $\mu(t) = t^{s^*}$, где s^* определяется как корень уравнения (10), и $Re\, s^* < 1-\alpha$. Если же $Re\,\lambda < \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, то однородное уравнение (8) имеет только тривиальное решение.*

4. Решение неоднородного интегрального уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение (7):

$$\mu(t) - \lambda \int_0^{\infty} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \mu(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f(t).$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Меллина, получаем

$$\widehat{\mu}(s)[1-\lambda\widehat{k}(s)] = \widehat{f}(s),$$

где $\widehat{k}(s)$ определяется из равенства (9), а $\widehat{f}(s)$ – соответственно преобразование Меллина функции $f(t)$:

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt\,, \quad \mathrm{Re}\, s > \gamma,$$

и параметр γ выбран так, чтобы

$$\int_0^{\infty} |f(t)| t^{\gamma-1} dt < \infty.$$

Таким образом, частное решение уравнения (7) имеет вид

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\widehat{f}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)} t^{-s} ds\,, \ \ \gamma < \mathrm{Re}\, s < 1-\alpha, \tag{14}$$

здесь $\gamma < \sigma < 1-\alpha$ выбрано так, чтобы $1-\lambda\widehat{k}(s) \neq 0$ для заданного значения λ, и интеграл берётся вдоль прямой $\mathrm{Re}\, s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s, (расположенной правее всех нулей функции $1-\lambda\widehat{k}(s) = 0$, $\mathrm{Re} s < 1-\alpha$) и понимается в смысле главного значения.

Если спектральный параметр λ расположен в правой полуплоскости ($Re\,\lambda > 0$), тогда общее решение интегрального уравнения (2) можно получить, прибавив к частному решению (14) общее решение соответствующего однородного уравнения.

Преобразуем частное решение (14). Для этого, воспользуемся соотношением

$$\frac{\widehat{f}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)} = \widehat{f}(s) + \frac{\lambda\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)} \cdot \widehat{f}(s).$$

Если теперь ввести обозначение

$$\widehat{r}(s) = \frac{\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)},$$

то, используя формулу свертки для преобразования Меллина [8], получим

$$\mu(t) = f(t) + \lambda\int\limits_0^\infty r(t/\tau)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{15}$$

где $r(\theta)$ – обратное преобразование Меллина (оригинал) образа $\widehat{r}(s)$. Найдём явное выражение для резольвенты $r(\theta)$. По формуле обращения находим

$$r(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\widehat{k}(s)}{1-\lambda\widehat{k}(s)}\theta^{-s}ds, \ \ \gamma < \mathrm{Re}\, s < 1-\alpha. \tag{16}$$

Для вычисления интеграла (16) применим теорему Коши о вычетах. При $0 < \theta < 1$ в контур интегрирования включаем полуокружность, лежащую в левой полуплоскости. В этом случае, если $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то подынтегральная функция имеет единственную особенность в точке $-s^*$, которая является нулем функции $A(s) = 1-\lambda\widehat{k}(s)$ и одновременно — простым полюсом функции $\widehat{r}(s)$.

Таким образом, для случая $\mathrm{Re}\lambda > 0$ имеем

$$r(\theta) = l(-s^*)\theta^{-s^*}, \ \ 0 < \theta < 1, \tag{17}$$

где $l(-s^*)$ – величина, обратная логарифмической производной функции $\widehat{k}(s)$ в точке $s = -s^*$:

$$l(-s^*) = -\frac{\widehat{k}(-s^*)}{\widehat{k}'(-s^*)}. \tag{18}$$

Значит, из (15) следует, что частное решение неоднородного интегрального уравнения (2) можно записать в следующем виде

$$\mu(t) = f(t) + l(-s^*)\int\limits_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}}f(\tau)d\tau. \tag{19}$$

Для рассмотрения случая $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, необходимо учесть:
во-первых, для $s_1 \in \mathbb{R}_+$ сумма ряда

$$\widehat{k}(s_1) = S(s_1) = \frac{1}{1-\alpha-s_1} + \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n+1-\alpha-s_1}$$

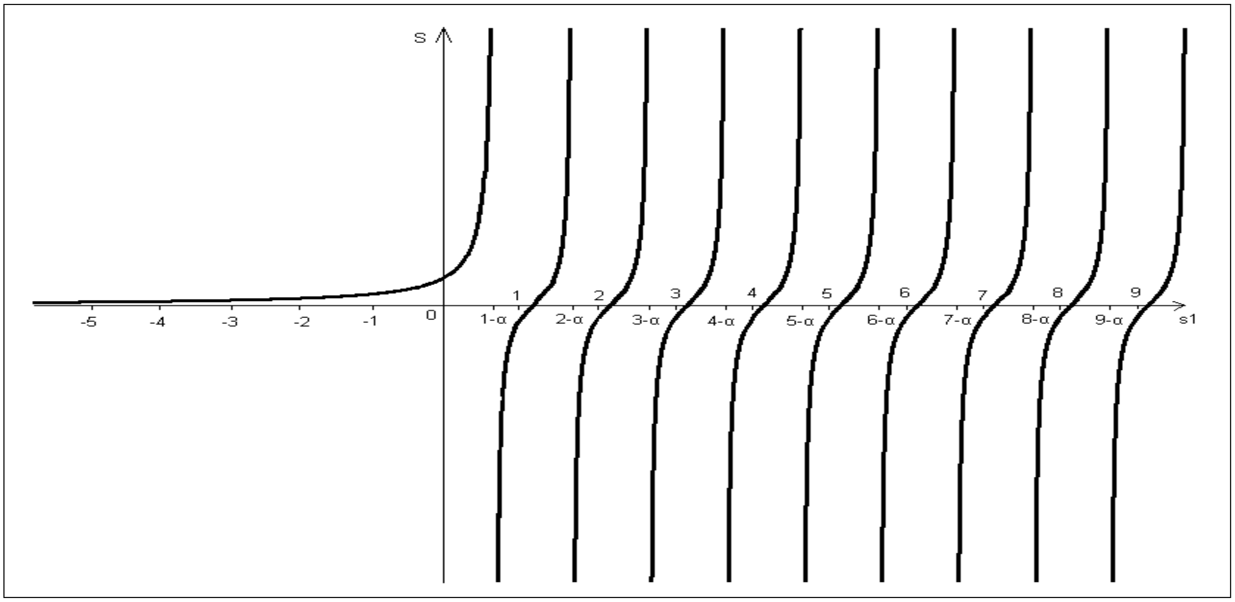

Рис. 1: График функции $S(s_1)$.

может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рис. 1);
во-вторых, определяя функцию $\widehat{k}(s)$ (9) (см. также формулу (12)) через сумму ряда

$$\widehat{k}(s) = S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1-\alpha-s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

мы, фактически, продолжаем ее аналитически на всю комплексную плоскость за исключением счетного числа точек $s = n+1-\alpha,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$, в которых она имеет только простые полюсы.

Итак, для случая $\lambda \in \mathbb{R}$ (т.е. $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$) имеет место утверждение.

Утверждение 2. *Если для заданного значения $\lambda_1 = Re\,\lambda$ на полуоси $s_1 = Re\,s < 1-\alpha$ функция $A(s_1) = 1 - \lambda_1 \widehat{k}(s_1)$ имеет единственный нуль при $\lambda_1 > 0$ и не имеет нулей при $\lambda_1 < 0$, то на полуоси $s_1 > 1-\alpha$ для любых значений λ_1 эта функция имеет счетное число нулей (см. рис.1)*

На основании утверждения 2 и соотношений (13) получим, что в случае $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ (для любого фиксированного значения λ), особенности подынтегральной функции суть нули функции $A(s) = 1 - \lambda\widehat{k}(s) : s = s_k^0 = s_{1k}^0 + is_{2k}^0, k = 1, 2, ...$, расположенные в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s > 1-\alpha$ (а именно, на действительной оси, т.е. $s_{1k}^0 = k+1-\alpha,\ \ s_{2k}^0 = 0$), так что

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0 - 1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau.$$

Суммируя вышеизложенное, получаем следующий результат:

Теорема 2. *Для любой функции $f(t)$ (3) неоднородное интегральное уравнение (2) имеет решение из класса (3):*

$$\mu(t) = f(t) + l(-s^*) \int_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}} f(\tau) d\tau + C \cdot t^{-s^*}, \text{ если } Re\,\lambda > 0;$$

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0 - 1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau, \text{ если } Re\,\lambda < 0.$$

Для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно убедиться, что полученное решение $\mu(t)$ принадлежит классу (3). Действительно, для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ имеем

$$e^{-t}\mu(t) = e^{-t}f(t) + l(-s^*) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-s^*} \cdot e^{-\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + C \cdot e^{-t} t^{-s^*}.$$

Нам нужно только показать, что интегральное слагаемое принадлежит классу $L_1(\mathbb{R}_+)$. Это следует из неравенства:

$$\left| \int_0^t e^{-(t-\tau)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-s^*} \cdot e^{-\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right| \le \int_0^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-s^*} \left| e^{-\tau} f(\tau) \right| \frac{d\tau}{\tau},$$

правая часть которого в силу теоремы о свертке (в смысле Меллина) суммируема на $\mathbb{R}_+$. Аналогичное имеет место и для случая $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Заключение. Таким образом, показано, что особый интегральный оператор типа Вольтерра второго рода является нетеровым и имеет индекс равный 1.

Цитированная литература

1. **Нахушев А.М.** // Дифференциальные уравнения. 1974. Т.X, № 1. С.100 – 111.

2. **Holmgren E.** // Arkif for mat. astz. och. fysik. 1922. V.16, 5. P.1 – 20.

3. **Brawne P.I.** // Comptes Rendues Ac. Sc., Paris. 1914. 158. P.1562 – 1565.

4. **Титчмарш Е.** Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л. 1948.

5. **Михайлов Л.Г.** Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе. Изд.АН ТаджССР. 1963.

6. **Михайлов Л.Г.** Интегральное уравнение с ядром однородным степени — 1. Душанбе, "Дониш", 1966.

7. **Стеценко В.Я.** // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. Душанбе, 1964, 133с.

8. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения. М. Наука, 1975.

9. **Полянин А.Д., Манжиров А.В.** Справочник по интегральным уравнениям. М. ФМЛ, 2003. 608с.

10. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. 1962. 1100с.

Поступила в редакцию 01.02.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С.68 — 74*

УДК 530.12:531.51

Some Classes of Cylindrically Symmetric Rotating Perfect Fluid Solutions

M.F. Mourad

Mathematics Department, Faculty of science,
Minia University, EGYPT

Cylindrically symmetric rotating perfect fluid has been studied. The field equations have been derived. The stationary cylindrically symmetric solutions when the pressure is constant, the rotation is rigid and the $r-z$ space is flat have been analyzed. The energy and momentum densities of these solutions have been calculated by using Landau-Lifshitz's prescription and Möller's prescription.

In the past decades, numerous attempts have been made to construct analytic models of rotating perfect fluid in general relativity. The basic equation of general relativity for the stationary and axially symmetric space-time was presented in the cylindrical coordinates by Ernst [1]. Tominatso and Sato found some solutions of this equation due to rotating source [2]. In a standard cosmological models, the matter distribution was considered as a homogenous perfect fluid where the fluid particles are moving along geodesic line. Exact solutions for a rigidly rotating perfect fluid with constant pressure and flat $r-z$ space are obtained by Khater and Mourad [3]. The stationary metrices were studied in the last decade. The general cosmological solution, which is implicitly contained in the Kransinski solution [4], was obtained explicitly in [5-7].This made possible to build an exterior solution for the Gödel metric [8]. Sklavenites studied two models with certain form for the equations of state, which reduce to Kramer and Evans solutions in the state limit [9]. Ivanos found a general physically relativistic solution with two parameters [10].

Since Einstein proposed the general theory of relativity, many attempts have been made to evaluate the energy-momentum distribution with the gravitational field, for instance, Tolman [11], Landau and Lifshitz [12], Papapetrou [13] and Weinberg [14]. These definitions only give meaningful results if the calculations are performed in "Cartesian "coordinates. Möller has shown that it is impossible to find a satisfactory expression for the energy-momentum complex in any coordinate system [15]. In a series of papers [16] Cooperstock has propounded a hypothesis according to which, in curved spacetime, energy momentum tensor T_a^b of the matter and all non-gravitation fields . The results of Xulu [17] and Bringley [18] support this hypothesis. Recently, Sharif [19-21] and Gad [22] have applied some prescriptions to calculate energy-momentum densities of Gödel Space time.

The aim of this work is to find some cosmological solutions in the stationary cylindrically symmetric of perfect fluid with constant pressure, rigid rotation and the $r-z$ space is flat. These

Keywords: *rotating perfect fluid, Einstein field equations, energy-momentum tensor, gravitational field*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q75

solutions show that the Gödel universe is the only homogeneous universe having these properties. Also, we calculate the energy-momentum densities of these solutions explicitly as Gödel type solutions by using Landau-Lifshitz's prescription and Möller's prescription.

This paper is organized as follows. In section two, the field equations of a rotating perfect fluid have been written. In section three, we find some classes of solutions of the field equations. In section four, we calculate the energy and momentum of these solutions in Landau-Lisfhitz and Möller's prescriptions. The last section is devoted for the conclusion.

1. The Field Equations. The Einstein field equations are given by

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -8\pi\kappa T_{ab}, \tag{1}$$

where T_{ab} is the energy-momentum tensor of the source producing the gravitational field. A perfect fluid medium is characterized by a stress tensor T_{ab} of the form

$$T_{ab} = (p+\rho) u_a u_b - p g_{ab}, \tag{2}$$

where ρ is the mass density, p is the pressure of the fluid and u_a is 4-velocity vector of the fluid, with $u^a u_a = 1$.

The metric in the cylindrically symmetric case can be written, [23] as

$$ds^2 = f dt^2 - 2k d\theta dt - l d\theta^2 - e^{\mu}(dr^2 + dz^2), \tag{3}$$

where the metric functions $f, k, l,$ and μ depend on r only. The signature of the space time metric is taken to be -2. If we set $(x^0, x^1, x^2, x^3)= (t, r, z, \theta)$, the components of u^a are

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = (f - 2\omega k - \omega^2 l)^{-\frac{1}{2}}, \quad u^1 = u^2 = 0, \quad u^3 = \frac{d\theta}{ds} = \omega u^0, \tag{4}$$

where ω is the angular velocity.

In the cylindrically symmetric case, using the continuity equation $(\rho u^a)_{;a} = 0$, where the semi-coma denotes to the covariant derivative, the $t-$ and $\theta-$components of the conservation of the energy-momentum tensor are satisfied identically while the $r-$component is given by

$$\frac{1}{2}(p+\rho)(f - 2\omega k - \omega^2 l)^{-\frac{1}{2}}(f_r - 2\omega k_r - \omega^2 l_r) + p_r (f - 2\omega k - \omega^2 l)^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{5}$$

where a subscript r denotes to a differentiation with respect to r.

In terms of the metric (3), three of the field equations can be written as follows

$$\begin{aligned} 2e^{\mu} D^{-1} R_{00} &= (D^{-1} f_r)_r + D^{-3} f (f_r l_r + k_r^2) = \\ &= -16\pi\kappa(p+\rho) e^{\mu} D^{-1} (f - 2\omega k - \omega^2 l)^{-1} (f - \omega k)^2 - 8\pi\kappa e^{\mu} f (p - \rho), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 2e^{\mu} D^{-1} R_{03} &= (D^{-1} k_r)_r + D^{-3} k f_r l_r = \\ &= 16\pi\kappa(p+\rho) e^{\mu} D^{-1} (f - 2\omega k - \omega^2 l)^{-1} (f - \omega k)(k + \omega l) + 8\pi\kappa e^{\mu} k (p - \rho), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 2e^{\mu} D^{-1} R_{33} &= (D^{-1} l_r)_r + D^{-3} l (f_r l_r + k_r^2) = \\ &= -16\pi\kappa(p+\rho) e^{\mu} D^{-1} (f - 2\omega k - \omega^2 l)^{-1} (k - \omega l)^2 + 8\pi\kappa e^{\mu} l (p - \rho). \end{aligned} \tag{8}$$

A useful combination of these components can be written as follows

$$e^{\mu} D^{-1} (l R_{00} - 2k R_{03} + f R_{33}) = D_{rr} = 16\pi e^{\mu} D p. \tag{9}$$

In a rotating coordinate system with angular velocity ω, the functions f, k, l given by (3) transform to F, K, L as follow

$$L = l, \qquad K = k - \omega l, \qquad F = f - 2\omega k - \omega^2 l. \tag{10}$$

Note that $D^2 = fl + k^2 = LF + K^2$. In terms of the new functions, the equations (5) can be written as

$$\frac{1}{2}(p+\rho)F^{-\frac{1}{2}}(F_r + 2k\omega_r) + p_r F^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{11}$$

The other two non-trivial components of the equation (1) can be written as

$$R_{11} = -\frac{1}{2}\mu_{rr} - D^{-1}D_{rr} + \frac{1}{2}D^{-1}u_r D_r + \frac{1}{2}D^{-2}(F_r L_r + K_r^2) = 4\pi\kappa e^{\mu}(p-\rho), \tag{12}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2}\mu_{rr} - \frac{1}{2}D^{-1}u_r D_r = 4\pi\kappa e^{\mu}(p-\rho). \tag{13}$$

2. The Solutions of The Field Equations. Now we solve the field equations under some conditions, namely the pressure p is constant, the rotation ω is rigid, and the $r-z$ space is flat, i.e. $e^{\mu} = 1$.

Using (13) we obtain the equation of state

$$p = \rho. \tag{14}$$

A useful combination of the equations (6), (7), (8) can be obtained in the form

$$\begin{aligned} 2e^{\mu}D^{-1}((k+wl)R_{00} + (f+w^2 l)R_{03} + w(f-wk)R_{33}) &= \\ = (D^{-1}(FK_r - KF_r))_r = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Now equation (9)reduces to

$$D_{rr} = a^2 D, \tag{16}$$

where $a = 4\sqrt{\pi p}$. Integrating (11) we obtain

$$F = F_0 = 1. \tag{17}$$

So, the line element (3) reduce to the homogeneous generalized Gögel-type metric

$$ds^2 = (dt + K(r)d\theta)^2 - D^2(r)d\theta^2 - dr^2 - dz^2, \tag{18}$$

which may be transformed to quasi-Cartesian coordinates

$$\begin{aligned} ds^2 = dt^2 + 2K(r)(\frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx)dt - \frac{(D^2(r) - K^2(r))}{r^4}(xdy - ydx) - \\ -\frac{1}{r^2}(xdy + ydx)^2 - dz^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Inserting (17) in (15)we obtain

$$\frac{K_r}{D} = constant \equiv -2\omega. \tag{20}$$

Now, we study the solutions of the field equations in the following four cases.
Case I: $a^2 > 0, \omega \neq 0$. In this case the general solution of equations (16) and (20) is given by

$$K(r) = \frac{2\omega}{a^2}(1 - cosh(ar)), \quad D(r) = \frac{1}{a} sinh(ar). \tag{21}$$

Case II: $a^2 = 0, \omega \neq 0$. Ior this case the general solution of equations (16) and (20) is given by

$$K(r) = -\omega r^2, \quad D(r) = r. \tag{22}$$

Case III: $a^2 = -\beta^2, \omega \neq 0$. In this case the general solution of equations (16) and (20) is given by

$$K(r) = \frac{2\omega}{\beta^2}(cos(\beta r) - 1), \quad D(r) = \frac{1}{\beta} sin(\beta r). \tag{23}$$

Case IV: $a^2 \neq 0, \omega = 0$. In this case one can make

$$K(r) = 0, \quad D(r) = \frac{1}{a} sinh(ar). \tag{24}$$

If $a^2 = \omega = 0$, the line element becomes Minkowskian. Also it is mentioned that the case $a^2 = 2\omega^2$ defines the original gödel metric.

3. Energy and Momentum of Homogeneous Gödel-type Metrics. In this section we study energy and momentum of homogeneous Gödel-type metrics (19) in the sense of two prescriptions namely Landau-Lifshitz's prescription and Möller's prescription.

3.1. The Energy and Momentum in Landau-Lifshitz's Prescription. The energy and momentum densities in Landau-Lifshitz's prescription are given by

$$\Theta^m = \frac{1}{16\pi} M^{mj0k}_{jk}, \tag{25}$$

where

$$M^{mjnk} = -g(g^{mn}g^{jk} - g^{mk}g^{jn}). \tag{26}$$

In order to evaluate the energy and momentum densities for Gödel-type metrics, we need to calculate the non-vanishing components of M^{mjnk} and then one obtain the energy and momentum densities in Landau-Lifshitz as [22]

$$\Theta^0 = \frac{1}{8\pi r^4}((K^2 - D^2) - 3r(KK_r - DD_r) + r^2(K_r^2 - D_r^2 + KK_{rr} - DD_{rr})), \tag{27}$$

$$\Theta^x = \frac{y}{16\pi r^3}(rK_{rr} - K_r), \tag{28}$$

$$\Theta^y = \frac{x}{16\pi r^3}(K_r - rK_{rr}), \tag{29}$$

$$\Theta^z = 0. \tag{30}$$

Now we calculate the nonvanishing components of the energy and momentum for the four cases.
Case I:

$$\begin{aligned}\Theta^0 = \frac{1}{4\pi r^4}\{(\frac{2\omega}{a^2}(1 - cosh(ar)))^2 - \frac{1}{a^2} sinh^2(ar) - \\ -3r(\frac{1}{2}(\frac{4\omega^2}{a^2} - 1)sinh(2ar) - \frac{4\omega^2}{a^2} sinh(ar)) + \\ +r^2((\frac{4\omega^2}{a^2} - 1)cosh(2ar) - \frac{4\omega^2}{a^2} cosh(ar))\},\end{aligned} \tag{31}$$

$$\Theta^x = \frac{2\omega y}{4\pi r^3}\{cosh(ar) - \frac{1}{a}sinh(ar)\}, \tag{32}$$

$$\Theta^y = \frac{2\omega x}{4\pi r^3}\{\frac{1}{a}sinh(ar) - cosh(ar)\}, \tag{33}$$

$$\Theta^z = 0. \tag{34}$$

Case II:

$$\Theta^0 = \frac{1+2\omega^2}{8\pi r^2} - \frac{\omega^2}{8\pi}, \tag{35}$$

$$\Theta^x = \Theta^y = \Theta^z = 0. \tag{36}$$

Case III:

$$\Theta^0 = \frac{1}{8\pi r^4}\{(\frac{2\omega}{\beta^2}(cos(\beta r) - 1))^2 - \frac{1}{\beta^2}sin^2(\beta r) - \\ -3r(\frac{1}{2}(\frac{4\omega^2}{\beta^3} + 1)sin(2\beta r) - \frac{4\omega^2}{\beta^3}sinh(\beta r)) + \\ +r^2((\frac{4\omega^2}{\beta^2}(cos(2\beta r)cos(\beta r) + 1)\}, \tag{37}$$

$$\Theta^x = \frac{2\omega y}{4\pi r^3}\{\frac{1}{\beta}sin(\beta r) - rcos(\beta r)\}, \tag{38}$$

$$\Theta^y = \frac{2\omega x}{4\pi r^3}\{rcos(\beta r) - \frac{1}{\beta}sin(\beta r)\}, \tag{39}$$

$$\Theta^z = 0. \tag{40}$$

Case IV:

$$\Theta^0 = \frac{1}{8\pi r^4}\{\frac{1}{a^2}sinh^2(ar) + \frac{3r}{2a}sinh(2ar) - r^2cosh(2ar)\}, \tag{41}$$

$$\Theta^x = \Theta^y = \Theta^z = 0. \tag{42}$$

3.2. The Energy and Momentum in Möller's Prescription. The energy and momentum densities in Möller's prescription are given by

$$\Omega_i^k = \frac{1}{\pi}\tau_{i,l}^{kl}, \tag{43}$$

where the antisymmetric superfield τ_i^{kl}

$$\tau_i^{kl} = -\tau_i^{lk} = \sqrt{-g}(\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^n})g^{km}g^{nl}. \tag{44}$$

The energy-momentum complex Ω_i^k satisfies the local conservation laws:

$$\frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{45}$$

The only non-vanishing components of τ_i^{kl} are

$$\tau_0^{01} = \frac{KK_r}{D}, \tag{46}$$

$$\tau_2^{01} = \frac{1}{D}(K_r(K^2 + D^2) - 2DD_rK). \tag{47}$$

Using the above components in (43), we obtain the energy and momentum densities in the form

$$\Omega_0^0 = \frac{1}{8\pi D^2}(DKK_{rr} + DK_r^2 - KK_rD_r), \tag{48}$$

$$\Omega_2^0 = \frac{1}{8\pi D^2}[(K^2 + D^2)(DK_{rr} - K_rD_r) + 2KD(K_r^2 - DD_{rr})], \tag{49}$$

$$\Omega_1^0 = \Omega_3^0 = 0. \tag{50}$$

Now also, we calcuate the nonvanshing components of the energy and momentum for the four cases.
Case I:

$$\tau_0^{01} = \frac{-4\omega}{a}(1 - cosh(ar)), \tag{51}$$

$$\tau_2^{01} = \frac{4\omega^2}{a^2}sinh^2(ar) - \frac{32\omega^3}{a^4}(1 - cosh(ar))^2 - \\ -\frac{4\omega}{a^2}cosh(ar)(1 - cosh(ar)), \tag{52}$$

$$\Omega_0^0 = \frac{4\omega^2}{2\pi a}sinh(ar), \tag{53}$$

$$\Omega_2^0 = \frac{1}{2\pi a}(\frac{4\omega^2}{a^2} - 1)sinh(ar)(1 - cosh(ar)), \tag{54}$$

$$\Omega_1^0 = \Omega_3^0 = 0. \tag{55}$$

Case II:

$$\tau_0^{01} = \tau_2^{01} = 2\omega^3r^2, \tag{56}$$

$$\Omega_0^0 = \frac{\omega^2}{\pi a}r, \tag{57}$$

$$\Omega_2^0 = -\frac{\omega^3}{\pi}r, \tag{58}$$

$$\Omega_1^0 = \Omega_3^0 = 0. \tag{59}$$

Case III:

$$\tau_0^{01} = -\frac{4\omega^2}{\beta^2}(cos(\beta r) - 1), \tag{60}$$

$$\tau_2^{01} = \frac{4\omega}{\beta^2}cos(\beta r)(1 - cos(\beta r)) - \frac{2\omega}{\beta^2}sin^2(\beta r) - \\ -2\omega(\frac{2\omega}{\beta^2}(cos(\beta r) - 1)^2, \tag{61}$$

$$\Omega_0^0 = \frac{\omega^2}{2\pi}sin(\beta r), \tag{62}$$

$$\Omega_2^0 = \frac{\omega}{2\pi\beta^2}(\frac{4\omega^2}{a^2} - 1)sin(\beta r)(cos(ar) - 1), \tag{63}$$

$$\Omega_1^0 = \Omega_3^0 = 0. \tag{64}$$

Conclusion. Four classes of stationary cylindrically symmetric solutions of the rigid rotation, the constant pressure and the $r - z$ space is flat have been investigated. These solutions show that the Gödel universe is the only homogeneous universe having these properties. Also, we calculate the energy-momentum densities of these solutions as Gödel type solutions by using Landau-Lifshitz's prescription and Möller's prescription . It is usually believed that energy-momentum complex could give different results for a given geometry. Keeping this point in mind, it follows from Eqs (27-30) and (48)-(50) that two results obtained by using the Landau-Lifshitz's prescription and Möller's prescription differ in general for the all four classes. This is example which indicate that the idea of localization does not follow along the lines of pseudo-tensorial construction but instead it follows from the energy-momentum itself.

References

1. **Ernst F. J.** Phys. Rev. 1968. V.167. P.1175.
2. **Tomimatsu A. and Sato H.,** Prog. Theor. Phys. 1973. V.50 P.95.
3. **Khater A.H. and Mourad M. F.** Astrophysies and Space Sci. 1990. V.162. P.247.
4. **Krasinski A.** Class. Quantum Grav.1994. V.11. P.1373.
5. **Santos N. O.** Class. Quantum Grav.1993 V.10. P.2401.
6. **Santos N. O.** Class. Quantum Grav.1997. V.14. P.3177.
7. **MacCallum M. A. H. and Santos N. O.** Class. Quantum Grav. 1998. V.15. P.1627.
8. **Bonnor W.B. , Santos N. O. and MacCallum M.A. H.** Class. Quantum Grav. 1998. V.15. P.357.
9. **Sklavenites D.** Class. Quantum Grav. 1999. V. 16. P.2753.
10. **Ivanos V.** Class. Quantum Grav. 2002. V. 19. P.3851.
11. **Toloman R. C.** Relativity, Thermodynamics and Cosmology(Oxford University Press, Oxford). 1934. P. 227.
12. **Landau L. D. and Lifstitz E. M.** The Classical theory of field (Pergamon Press) 1987. P.280.
13. **Papapetrou A.** Proc. R. Irish Academy A. 1948. V.25. P.11.
14. **Weinberg S.** Gravitation and Cosmology, Principles and applications of General Theory of Relativity, John Wieley and Sons, Ins. New York. 1972. P. 72.
15. **Möller, C.** Ann. of Phys. (NY)1958. V.4. P.347.
16. **Cooperstock F. I.** : in Topics on Gravity and Beyond Essays in honour of L. Witten on his retirement, ed F. Mansouri, and J. J. Scanio (World Scientific, Singapore, 1993); Mod. Phys. Lett. 1999. V.14. P.1531. Annals of Phys 2000. V. 282. P.115. F. I. Cooperstock and S. Tieu, Found Phys. 2003. V. 33. P.1033.
17. **Xulu S. S.** Mod. Phys. Lett. 2000. V. 15. P.1511. Astrophys. and Space Sci. A 2003. V.285. P.23.
18. **Bringley T.** Mod. Phys. Lett. A 2002. V. 17. P.157.
19. **Sharif M.** Int. J. of Mod. Phys. A 2002. V. 17. P.1175.
20. **Sharif M.** Int. J. of Mod. Phys. A 2003. V. 18. P.1175.
21. **Sharif M.** Int. J. of Mod. Phys. A 2003. V. 18. P.1175.
22. **Gad R.** Astrophys. and Space Sci. A 2004. V.293. P.453.
23. **Islam J. N.** Rotating Field in General Relativity. Cambridge University Press. London. 1985.

Поступила в редакцию 21.09.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 75— 85*

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Т. Орумбаева

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz

Устанавливаются достаточные условия существования единственного решения полупериодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений и предлагается алгоритм его нахождения.

На $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t,u), \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрица $A(x,t)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, $f : \overline{\Omega} \times R^n \to R^n$ непрерывна,

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \qquad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|.$$

Нелокальные краевые задачи, в том числе периодические и полупериодические задачи для систем гиперболических уравнений, различными методами исследованы многими авторами [1--6]. В работе [7] на основе метода введения функциональных параметров [8] предложено двухпараметрическое семейство алгоритмов нахождения решения полупериодической краевой задачи для системы линейных гиперболических уравнений. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, одновременно обеспечивающие сходимость алгоритмов.

Keywords: *system of hyperbolic equation, semi periodical boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

В настоящей работе с помощью алгоритма, предложенного в [7], в терминах исходных данных устанавливаются достаточные условия существования единственного решения полупериодической краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений (1)-(3).

Пусть $C(J,R^n)$ – множество непрерывных на J ($J\subset R^1$ или $J\subset R^2$) функций $u: J\to R^n$. Функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\in C(\overline{\Omega},R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}\in$ $\in C(\overline{\Omega},R^n)$ называется *классическим решением задачи (1)-(3),* если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$, и краевым условиям (2),(3).

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ и задачу (1)-(3) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(x,t)v+f(x,t,u),\qquad (x,t)\in\overline{\Omega},\tag{4}$$

$$v(x,0)=v(x,T),\qquad x\in[0,\omega],\tag{5}$$

$$u(x,t)=\int\limits_0^x v(\xi,t)d\xi,\qquad t\in[0,T],\quad x\in[0,\omega].\tag{6}$$

Здесь мы свели задачу нахождения решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений к нахождению решения семейства периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональному соотношению. Задачи (1)-(3) и (4)-(6) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(x,t)$, является решением задачи (1)-(3), то пара $(v(x,t),u(x,t))$ будет решением задачи (4)-(6) и, наоборот, если пара $(\widehat{v}(x,t),\widehat{u}(x,t))$ – решение задачи (4)-(6), то $\widehat{u}(x,t)$ – решение задачи (1)-(3).

Для решения задачи (4)-(6) применяется метод параметризации [9].

По шагу $h>0: Nh=T$ произведем разбиение $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh), N\geq 2$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $v_r(x,t)$, $u_r(x,t)$ обозначим соответственно сужение функций $v(x,t)$, $u(x,t)$ на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh), r=\overline{1,N}$. Тогда задача (4)-(6) будет эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(x,t)v_r+f(x,t,u_r),\quad (x,t)\in\Omega_r,\tag{7}$$

$$v_1(x,0)-\lim_{t\to T-0}v_N(x,t)=0,\quad x\in[0,\omega],\tag{8}$$

$$u_r(x,t)=\int\limits_0^x v_r(\xi,t)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},\tag{9}$$

$$\lim_{t\to sh-0}v_s(x,t)=v_{s+1}(x,sh),\qquad s=\overline{1,N-1},\tag{10}$$

где (10)– условие склеивания решения во внутренних линиях разбиения. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(x,t)$ при $t=(r-1)h$, т.е. $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$, и сделаем замену $\widetilde{v}_r(x,t)=$ $=v_r(x,t)-\lambda_r(x), r=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t}=A(x,t)\widetilde{v}_r+A(x,t)\lambda_r(x)+f(x,t,u_r),\quad (x,t)\in\Omega_r,\tag{11}$$

$$\widetilde{v}_r(x,(r-1)h)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,N},\tag{12}$$

$$u_r(x,t)=\int\limits_0^x\widetilde{v}_r(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},\tag{13}$$

$$\lambda_1(x) - \lambda_N(x) - \lim_{t \to T-0} \widetilde{v}_N(x,t) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{14}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t \to sh-0} \widetilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{15}$$

Задачи (7)–(10) и (11)–(15) эквивалентны в том смысле, что если система пар $\{v_r(x,t), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1,N}$, является решением задачи (7)–(10), то система троек $\{\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h); \widetilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - v_r(x,(r-1)h), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1,N}$, будет решением задачи (11)–(15) и, наоборот, если $\{\lambda_r(x), \widetilde{v}_r(x,t), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1,N}$, — решение задачи (11)–(15), то пара $\{\lambda_r(x)+\widetilde{v}_r(x,t), u_r(x,t)\}$, $r = \overline{1,N}$, будет решением задачи (7)–(10).

Задача (11), (12) при фиксированных $\lambda_r(x), u_r(x,t)$ является семейством задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$. Его решение эквивалентно интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_r(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)\widetilde{v}_r(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_r(x) + \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau,u_r(x,\tau))d\tau. \tag{16}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(x,\tau)$ подставим соответствующую правую часть (16) и, повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, ...$) раз, получим

$$\widetilde{v}_r(x,t) = D_{\nu r}(x,t)\lambda_r(x) + F_{\nu r}(x,t,u_r) + G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r), \quad r = \overline{1,N}, \tag{17}$$

где

$$D_{\nu r}(x,t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1)d\tau_1 ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(x,\tau_{j+1})d\tau_{j+1}...d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(x,t,u_r) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(x,\tau_1,u_r(x,\tau_1))d\tau_1 +$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu-1} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(x,\tau_j) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} f(x,\tau_{j+1},u_r(x,\tau_{j+1}))d\tau_{j+1}d\tau_j...d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(x,\tau_1) ... \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(x,\tau_{\nu-1}) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)\widetilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}...d\tau_1,$$

$\tau_0 = t, r = \overline{1,N}$. Переходя к пределу при $t \to rh - 0$ в уравнении (17), имеем

$$\lim_{t \to rh-0} \widetilde{v}_r(x,t) = D_{\nu r}(x,rh)\lambda_r(x) + F_{\nu r}(x,rh,u_r) + G_{\nu r}(x,rh,\widetilde{v}_r), \quad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,N}.$$

Подставляя в (14),(15) вместо $\lim\limits_{t \to rh-0} \widetilde{v}_r(x,t)$, $\quad r = \overline{1,N}$, соответствующие им правые части и умножая обе части уравнения (14) на $h > 0$, для неизвестных функций $\lambda_r(x)$, $\quad r = \overline{1,N}$, получим систему функциональных уравнений:

$$Q_\nu(x,h)\lambda(x) = -F_\nu(x,h,u) - G_\nu(x,h,\widetilde{v}), \tag{18}$$

где

$$Q_\nu(x,h)=\begin{vmatrix} hI & 0 & \ldots & 0 & -h[I+D_{\nu N}(x,Nh)] \\ I+D_{\nu 1}(x,h) & -I & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(x,2h) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I+D_{\nu,N-1}(x,(N-1)h) & -I \end{vmatrix},$$

$$F_\nu(x,h,u)=(-hF_{\nu N}(x,Nh,u_N),F_{\nu 1}(x,h,u_1),...,F_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,u_{N-1})),$$

$$G_\nu(x,h,\widetilde{v})=(-hG_{\nu N}(x,Nh,\widetilde{v}_N),G_{\nu 1}(x,h,\widetilde{v}_1),...,G_{\nu,N-1}(x,(N-1)h,\widetilde{v}_{N-1})).$$

Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_r(x),\widetilde{v}_r(x,t),u_r(x,t)\}, r=\overline{1,N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (18), (17) и (13). Функции $\lambda_r(x)$, $\widetilde{v}_r(x,t)$, $u_r(x,t)$, $r=\overline{1,N}$, находим как пределы соответствующих последовательностей $\{\lambda_r{}^{(k)}(x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\}$, $\{u_r{}^{(k)}(x,t)\}$, $r=\overline{1,N}$, при $k\to\infty$, определяемые по следующему алгоритму.

Шаг 0. Предполагая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при всех $x\in[0,\omega]$, из уравнения (18), где $u_r(x,t)=0,\widetilde{v}_r(x,t)=0$, находим $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),...,\lambda_N^{(0)}(x))'$, т.е.

$$\lambda^{(0)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\big\{F_\nu(x,h,0)+G_\nu(x,h,0)\big\}.$$

Используя уравнение (17), при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$ найдем функции $\{\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\}, r=\overline{1,N}$,

$$\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(0)}(x)+F_{\nu r}(x,t,0)+G_{\nu r}(x,t,0).$$

Функции $u_r^{(0)}(x,t), r=\overline{1,N}$, определяются из соотношений

$$u_r^{(0)}(x,t)=\int\limits_0^x\widetilde{v}_r^{(0)}(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r^{(0)}(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r.$$

Шаг 1. Учитывая обратимость матрицы $Q_\nu(x,h)$ при $x\in[0,\omega]$, функцию $\lambda^{(1)}(x)=$ $=(\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),...,\lambda_N^{(1)}(x))'$ определяем как решение системы уравнений (18), где $u_r(x,t)=$ $=u_r^{(0)}(x,t),\quad \widetilde{v}_r(x,t)=\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t),\quad r=\overline{1,N}$, т.е.

$$\lambda^{(1)}(x)=-[Q_\nu(x,h)]^{-1}\Big\{F_\nu(x,h,u^{(0)})+G_\nu(x,h,\widetilde{v}^{(0)})\Big\}.$$

Вновь используя уравнение (17) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\{\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)\},\quad r=\overline{1,N}$

$$\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)=D_{\nu r}(x,t)\lambda_r^{(1)}(x)+F_{\nu r}(x,t,u_r^{(0)})+G_{\nu r}(x,t,\widetilde{v}_r^{(0)}).$$

Функции $u_r^{(1)}(x,t),\quad r=\overline{1,N}$, определим из соотношений

$$u_r^{(1)}(x,t)=\int\limits_0^x\widetilde{v}_r^{(1)}(\xi,t)d\xi+\int\limits_0^x\lambda_r^{(1)}(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r.$$

Продолжая процесс, на k-м шаге получаем систему троек $\{\lambda_r^{(k)}(x),\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t),u_r^{(k)}(x,t)\}, r=\overline{1,N}$.

Через $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$ обозначим множество непрерывных и ограниченных на $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-$ $-1)h,rh)$ функций $u_r:\Omega_r\to R^n$ с нормой $\|u_r\|_1=\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_r}\|u_r(x,t)\|$.

Введем множества $G_1(0,\rho_0)=\{(x,t,u):(x,t)\in\overline{\Omega},\|u\|<\rho_0\}$,
$S_1(0,\rho_0)=\big\{\big(u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_N(x,t)\big)',\quad u_r(x,t)\in\widetilde{C}(\Omega_r,R^n),\quad \|u_r\|_1<\rho_0,r=\overline{1,N}\big\}$.

Условие 1. Функция $f(x,t,u)$ имеет непрерывную частную производную $f'_u(x,t,u)$ в $G_1(0,\rho_0)$ и $\|f'_u(x,t,u)\| \le L$, где $L - const$.

Условия следующего утверждения обеспечивают равномерную относительно $(x,t) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,N}$, сходимость предложенного алгоритма к решению краевой задачи с неизвестными функциями (11)–(15).

Теорема 1. *Пусть имеет место условие 1 и при некоторых* $h > 0 : Nh = T, N = 1,2,...,$ $\nu, \nu \in \mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(x,h)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$. *Тогда при выполнении неравенств:*

а) $\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(x,h), \quad x \in [0,\omega]$,

б) $q_\nu(x,h) = \dfrac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1 + \gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right] \le \beta < \dfrac{1}{2}$,

в) $\left[\left(\dfrac{e^d}{1-2\beta}+1\right)\left(\widetilde{\chi}L\omega + \beta\right)+1\right]\omega\widetilde{\chi}\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\| < \rho_0$,

где $\alpha(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(x,t)\|, \quad \beta - const, \quad d = \dfrac{\widetilde{\chi}L}{\beta}, \quad \widetilde{\chi} = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\chi(x)$,

$\chi(x) = \left[1 + \gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{(\alpha(x)h)^j}{j!}h$,

задача (1)-(3) в $S_1(0,\rho_0)$ *имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|F_\nu(x,h,u)\| \le h\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,u_r(x,t))\|,$$

$$\|G_\nu(x,h,\widetilde{v})\| \le \max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r(x,t)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\| \le \sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из нулевого и первого шагов алгоритма вытекают следующие оценки:

$$\|\lambda^{(0)}(x)\| = \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\| \le \gamma_\nu(x,h)\max(1,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| \le \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|D_{\nu r}(x,t)\|\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(0)}(x)\| +$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F_{\nu r}(x,t,0)\| + \max_{r=\overline{1,N}}\|G_{\nu r}(x,t,0)\| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\| + h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\| \le$$

$$\le \left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(0)}(x,t)\| \le \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\| + \max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(0)}(x)\| \le$$

$$\leq \left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\cdot$$

$$\cdot h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|\leq$$

$$\leq \left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|\leq$$

$$\leq \chi(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)\|\leq \omega\max_{x\in[0,\omega]}\left(\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right]\times\right.$$

$$\left.\times h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|\right)\leq \omega\widetilde{\chi}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\|<\rho_0.$$

Учитывая условие 1, установим неравенства:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{(1)}(x)-{\lambda_r}^{(0)}(x)\|\leq$$

$$\leq \gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\left[h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,u_r^{(0)}(x,t))-f(x,t,0)\|+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\right]\leq$$

$$\leq \gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)\|+$$

$$+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq \left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)\|+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{(1)}(x)-{\lambda_r}^{(0)}(x)\|\leq$$

$$\leq \left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(0)}(x,t)\|+$$

$$+\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\times$$

$$\times\int_0^x\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\gamma_\nu(\xi,h)\max(1,h)+1\right\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(\xi,t,0)\|d\xi+$$

$$+\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|\leq$$

$$\leq\chi(x)L\int_0^x\chi(\xi)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(\xi,t,0)\|d\xi+q_\nu(x,h)\chi(x)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,0)\|.$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(1)}(x,t)-u_r^{(0)}(x,t)\|\leq\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(1)}(\xi,t)-v_r^{(0)}(\xi,t)\|d\xi\leq$$

$$\leq\int_0^x\left[\chi(\xi)L\int_0^\xi\chi(\xi_1)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(\xi_1,t,0)\|d\xi_1+q_\nu(\xi,h)\chi(\xi)\right.$$

$$\left.\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(\xi,t,0)\|\right]d\xi\leq$$

$$\leq\left(\widetilde{\chi}L\omega+\beta\right)\omega\widetilde{\chi}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\|<\rho_0.$$

Для систем разностей

$$\lambda_r{}^{(k+1)}(x)-\lambda_r{}^{(k)}(x),\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t),u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t),$$

$r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,...$, справедливы оценки:

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(k+1)}(x)-\lambda_r{}^{(k)}(x)\|\leq$$

$$\leq\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|f(x,t,u_r^{(k)}(x,t))-f(x,t,u_r^{(k-1)}(x,t))\|+$$

$$+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+$$

$$+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|, \tag{19}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|. \tag{20}$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k+1)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r{}^{(k+1)}(x)-\lambda_r{}^{(k)}(x)\|,$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k+1)}(x,t)-u_r^{(k)}(x,t)\|\leq\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k+1)}(\xi,t)-v_r^{(k)}(\xi,t)\|d\xi.$$

Используя неравенства (19), (20), получим

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\|\leq\left\{\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL+\right.$$

$$\left.+\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\right\}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{(k)}(x,t)-u_r^{(k-1)}(x,t)\|+$$

$$+\left\{\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}+\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\right\}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(x,t)-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\cdot$$

$$\cdot\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k)}(\xi,t)-v_r^{(k-1)}(\xi,t)\|d\xi+$$

$$+\left[1+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right]\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k)}(x,t)-v_r^{(k-1)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\chi(x)L\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k)}(\xi,t)-v_r^{(k-1)}(\xi,t)\|d\xi+$$

$$+q_\nu(x,h)\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{(k)}(x,t)-v_r^{(k-1)}(x,t)\|.$$

Таким образом,

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\| \leq \widetilde{\chi}L\int\limits_0^x \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k)}(\xi,t)-v_r^{(k-1)}(\xi,t)\|d\xi+$$

$$+\beta \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k)}(x,t)-v_r^{(k-1)}(x,t)\|. \qquad (21)$$

Для функции $\Delta^{(k+1)}(x)=\max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\|$ на основе (21) установим неравенство

$$\Delta^{(k+1)}(x)\leq \sum_{j=0}^{k}\frac{(k)!}{(k-j)!j!}\cdot\beta^{k-j}\cdot\frac{1}{j!}\left(\max_{x\in[0,\omega]}\chi(x)L\right)^j\cdot\max_{x\in[0,\omega]}\Delta^{(1)}(x)\leq$$

$$\leq \beta^k\sum_{j=0}^{k}\frac{(k)!}{(k-j)!j!}\max_j\frac{1}{j!}\left(\frac{\widetilde{\chi}L}{\beta}\right)^j\cdot\max_{x\in[0,\omega]}\Delta^{(1)}(x)\leq(2\beta)^k e^d\cdot\max_{x\in[0,\omega]}\Delta^{(1)}(x). \qquad (22)$$

В силу неравенства $2\beta<1$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k+1)}(x)$ при $x\in[0,\omega]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательностей $v_r^{(k)}(x,t)$ к непрерывной на $x\in[0,\omega]$ функции $v_r^*(x,t)$ при всех $r=\overline{1,N}$. На основе (9) следует равномерная относительно $(x,t)\in\Omega_r$ сходимость последовательности $u_r^{(k)}(x,t)$, $\quad r=\overline{1,N}$, к функции $u_r^*(x,t)$, принадлежащей $\widetilde{C}(\Omega_r,R^n)$:

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\| \leq \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(k)}(x,t)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k)}(x,t)-v_r^{(k-1)}(x,t)\|+...+\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq \Delta^{(k+1)}(x)+\Delta^{(k)}(x)+...+\Delta^{(1)}(x)\leq\left[\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right]\max_{x\in[0,\omega]}\Delta^{(1)}(x).$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\|\leq\left[\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right]\max_{x\in[0,\omega]}\Delta^{(1)}(x).$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)\|\leq \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(k+1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\|+$$

$$+\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\left[\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right]\max_{r=\overline{1,N}}\max_{(x,t)\in\Omega_r}\|v_r^{(1)}(x,t)-v_r^{(0)}(x,t)\|+\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{(0)}(x,t)\|\leq$$

$$\leq\left[\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right]\max_{x\in[0,\omega]}[\chi^2(x)L\omega\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|f(x,t,0)\|+$$

$$+q_\nu(x,h)\chi(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|f(x,t,0)\|]+\chi(x)\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|f(x,t,0)\|.$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|v^{(k+1)}(x,t)\|\leq\left[\left(\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right)\left(\widetilde{\chi}L\omega+\beta\right)+1\right]\widetilde{\chi}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\|.$$

Используя соотношение $u^{(k+1)}(x,t)=\int\limits_0^x v^{(k+1)}(\xi,t)d\xi$, получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^{(k+1)}(x,t)\|\le\left[\left(\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right)\left(\widetilde{\chi}L\omega+\beta\right)+1\right]\omega\widetilde{\chi}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\|<\rho_0.$$

При $k\to\infty$ имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^{*}(x,t)\|\le\left[\left(\frac{e^d}{1-2\beta}+1\right)\left(\widetilde{\chi}L\omega+\beta\right)+1\right]\omega\widetilde{\chi}\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|f(x,t,0)\|<\rho_0.$$

Таким образом, функция $u^*(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(3).

Докажем единственность решения задачи (1)-(3). Пусть существуют два классических решения $u^{**}(x,t),u^*(x,t)$ в $S_1(0,\rho_0)$. В силу эквивалентности задач (1)-(3) и (4)-(6) существуют пары $(v^*(x,t),u^*(x,t))$, $(v^{**}(x,t),u^{**}(x,t))$ которые являются решениями задачи (4)-(6). Тогда соответствующие им системы $(\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(x,t),u_r^*(x,t))$, $(\lambda_r^{**}(x)+\widetilde{v}_r^{**}(x,t),u_r^{**}(x,t))$, $r=\overline{1,N}$, будут решениями краевой задачи (11)-(15). Аналогично соотношениям (19),(20) для разностей $\lambda_r^{**}(x)-\lambda_r^*(x)$, ${v_r}^{**}(x,t)-{v_r}^*(x,t),{u_r}^{**}(x,t)-{u_r}^*(x,t),r=\overline{1,N}$, при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ получим

$$\max_{r=\overline{1,N}}\|{\lambda_r}^{**}(x)-{\lambda_r}^{*}(x)\|\le\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{**}(x,t)-u_r^*(x,t)\|+$$

$$+\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{**}(x,t)-\widetilde{v}_r^*(x,t)\|,\qquad(23)$$

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{**}(x,t)-\widetilde{v}_r^*(x,t)\|\le$$

$$\le\left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}hL\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{**}(x,t)-u_r^*(x,t)\|+$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\gamma_\nu(x,h)\max(1,h)+1\right\}\frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{**}(x,t)-\widetilde{v}_r^*(x,t)\|.\qquad(24)$$

Суммируя соответственно левые и правые части (23), (24) имеем,

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{**}(x,t)-v_r^*(x,t)\|\le$$

$$\le\widetilde{\chi}L\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{**}(x,t)-u_r^*(x,t)\|+\beta\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{**}(x,t)-v_r^*(x,t)\|,$$

отсюда

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{**}(x,t)-v_r^*(x,t)\|\le\frac{\widetilde{\chi}L}{1-\beta}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|u_r^{**}(x,t)-u_r^*(x,t)\|.$$

Из равенства $u_r(x,t)=\int\limits_0^x v_r(\xi,t)d\xi,r=\overline{1,N}$, получим

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{**}(x,t)-v_r^*(x,t)\|\le\frac{\widetilde{\chi}L}{1-\beta}\int_0^x\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|v_r^{**}(\xi,t)-v_r^*(\xi,t)\|d\xi.$$

С помощью неравенства Беллмана-Гронуолла имеем $\max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v_r^{**}(x,t) - v_r^*(x,t)\| = 0$. Откуда вытекает, что $v_r^*(x,t) = v_r^{**}(x,t), r = \overline{1,N}$, при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}_r$. Используя соотношения $u_r^{**}(x,t) = \int\limits_0^x v_r^{**}(\xi,t)d\xi, u_r^*(x,t) = \int\limits_0^x v_r^*(\xi,t)d\xi, \quad r = \overline{1,N}$, получим $u_r^*(x,t) = u_r^{**}(x,t)$, $r = \overline{1,N}, \quad (x,t) \in \Omega_r$, т.е. $u^*(x,t) = u^{**}(x,t)$ при всех $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Цитированная литература

1. **Cesari L.** //Тр. межд. симп. по нелинейным колебаниям. Киев. 1963. Т. 2. С. 440 – 457.

2. **Vejvoda O.** et al. Partial differential equations: time-periodic solutions. Hague; Boston; London, 1982.

3. **Пташник Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.

4. **Кигурадзе Т. И.** //Дифференц.уравнения. 1993. Т. 23, № 29. С. 281 – 297.

5. **Митропольский Ю. А., Хома Г. П, Громяк М. И.** Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.

6. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** //Дифференц.уравнения. 2005. Т. 1, № 3. С. 337 – 346.

7. **Орумбаева Н. Т.** // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 4(14). С. 64 – 74.

8. **Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1673 – 1685.

9. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

Поступила в редакцию 8.10.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 86 – 96*

УДК 517.946.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПРЯМОЙ

Ж.Ш.Шаршеналиев, А.Т.Турумбеков, Ж.Н.Кутунаев

Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова
Бишкек, пр.Мира, 66

С применением функционально – дифференциальных уравнений с конечной группой преобразования аргумента и интеграла Фурье решается смешанная задача для одного вида гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, допускающее общее решение в виде произвольно бегущих волн.

Введение. Как известно, в случае, когда математические модели колебательных процессов описывается обыкновенным дифференциальным уравнениями, важную роль играет знание общего решения данного уравнения. В случае уравнения с частными производными общее решение может быть найдено значительно реже и дело обстоит сложнее. Если это и удается, то общее решение данных уравнений обычно не применяется в приложениях в той мере, как это можно было бы ожидать. Здесь часто используются частные решения рассматриваемых уравнений и их последующие суперпозиции.

В настоящей работе смешанные задачи для гиперболических уравнений решаются, исходя именно из общих представлений решений. Будет показано, что использование общих решений приводит к рассмотрению функционально – дифференциальных уравнений, у которых преобразования аргумента образуют конечную группу [2] и применение которых позволяет разрабатывать новый эффективный способ решения смешанных задач в более общей постановке.

Постановка задачи. Найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left[\left(\beta_1 - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x} + $$
$$+ (\beta_1+\beta_2)\frac{\partial u}{\partial t} - \left[\left(\beta_1 - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\left(\beta_2 + \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right) + c^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]u,$$
$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (1)$$

Keywords: *differential equation, non-local boundary value problem, parametrization's method*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

удовлетворяющее граничному условию

$$a_1\left[\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2}-(\beta_1+\beta_2)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\right]+a_2\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+a_3u(0,t)=0,\quad 0<t<\infty, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\mu(x),\quad 0<x<\infty, \tag{3}$$

где a_i $(i=1,2,3)$, c, β_1, β_2 – постоянные числа, $\mu(x)$ – заданная функция, $\psi(x)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\psi(x)\neq 0$ в промежутке $[0,\infty)$.

Решение поставленной задачи. В [3] показано что уравнение (1) допускает общее решение вида

$$u(x,t)=\psi(x)\left[e^{\beta_1 t}f\left(\frac{x}{c}+t\right)+e^{\beta_2 t}g\left(\frac{x}{c}-t\right)\right],$$

где f и g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Эта функция удовлетворяет начальному условию $u(x,0)=0$, если ее выбрать в виде

$$u(x,t)=\psi(x)\left[e^{\beta_1 t}f\left(\frac{x}{c}+t\right)-e^{\beta_2 t}f\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]. \tag{4}$$

Дифференцируя функцию (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\beta_1 t}\left(\psi'(x)f\left(\frac{x}{c}+t\right)+\frac{\psi(x)}{c}f'\left(\frac{x}{c}+t\right)\right)-$$
$$-e^{\beta_2 t}\left(\psi'(x)f\left(\frac{x}{c}-t\right)+\frac{\psi(x)}{c}f'\left(\frac{x}{c}-t\right)\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\left[e^{\beta_1 t}\left(\beta_1 f\left(\frac{x}{c}+t\right)+f'\left(\frac{x}{c}+t\right)\right)-\right.$$
$$\left.-e^{\beta_2 t}\left(\beta_2 f\left(\frac{x}{c}-t\right)-f'\left(\frac{x}{c}-t\right)\right)\right], \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\psi(x)\left[e^{\beta_1 t}\left(\beta_1^2 f\left(\frac{x}{c}+t\right)+2\beta_1 f'\left(\frac{x}{c}+t\right)+f''\left(\frac{x}{c}+t\right)\right)-\right.$$
$$\left.-e^{\beta_2 t}\left(\beta_2^2 f\left(\frac{x}{c}-t\right)-2\beta_2 f'\left(\frac{x}{c}-t\right)+f''\left(\frac{x}{c}-t\right)\right)\right]. \tag{7}$$

Подставляя (4) – (7) в граничное условие (2), получим функционально – дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции $f(z)$:

$$a_1\left\{\psi(0)\left[e^{\beta_1 t}\left(\beta_1^2 f(t)+2\beta_1 f'(t)+f''(t)\right)-e^{\beta_2 t}\left(\beta_2^2 f(-t)-2\beta_2 f'(-t)+f''(-t)\right)\right]-\right.$$
$$\left.-(\beta_1+\beta_2)\psi(0)\left[e^{\beta_1 t}(\beta_1 f(t)+f'(t))-e^{\beta_2 t}(\beta_2 f(-t)-f'(-t))\right]\right\}+$$
$$+a_2\left[e^{\beta_1 t}\left(\psi'(0)f(t)+\frac{\psi(0)}{c}f'(t)\right)-e^{\beta_2 t}\left(\psi'(0)f(-t)+\frac{\psi(0)}{c}f'(-t)\right)\right]+$$
$$+a_3\psi(0)\left(e^{\beta_1 t}f(t)-e^{\beta_2 t}f(-t)\right)=0$$

или

$$p_1f''(t)+p_2f'(t)+p_3f(t)=e^{(\beta_2-\beta_1)t}(p_1f''(-t)+p_2f'(-t)+p_3f(-t)), \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} p_1 = a_1\psi(0), \\ p_2 = \psi(0)\left[a_1(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{a_2}{c}\right], \\ p_3 = \psi(0)(a_3 - a_1\beta_1\beta_2) + a_2\psi'(0). \end{cases} \tag{9}$$

Функцию $f(z)$, удовлетворяющую функционально – дифференциальному уравнению (8), будем иметь в виде

$$f(z) = e^{mz} + ke^{nz}, \tag{10}$$

где m, n, k – постоянные величины. Полагая $m+n = \beta_2 - \beta_1$ и подставляя (10) в (8), будем иметь

$$p_1(m^2e^{mt} + kn^2e^{nt}) + p_2(me^{mt} + kne^{nt}) + p_3(e^{mt} + ke^{nt}) =$$
$$= p_1(m^2e^{nt} + kn^2e^{mt}) + p_2(me^{nt} + kne^{mt}) + p_3(e^{nt} + ke^{mt}).$$

Приравнивая коэффициенты при e^{mt} и e^{nt} в правых и левых частях полученного равенства, будем иметь

$$e^{mt}\|p_1m^2 + p_2m + p_3 = k(p_1n^2 + p_2n + p_3),$$
$$e^{nt}\|k(p_1n^2 + p_2n + p_3) = p_1m^2 + p_2m + p_3.$$

Как видим, в результате имеем одно и то же равенство. Таким образом, в силу отсутствия второго граничного условия для m, n, k получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} m + n = \beta_2 - \beta_1, \\ p_1m^2 + p_2m + p_3 = k(p_1n^2 + p_2n + p_3). \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы (11) будем искать во множестве комплексных чисел, а именно, в виде

$$m = \frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1) + i\frac{\lambda}{2}, \quad n = \frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1) - i\frac{\lambda}{2}, \tag{12}$$

где λ – вещественное число. Согласно (10) найдем функцию $f_\lambda(z)$, отвечающую (12):

$$f_\lambda(z) = e^{\left[\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)+i\frac{\lambda}{2}\right]z} +$$
$$+\frac{p_1\left[\dfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)+i\dfrac{\lambda}{2}\right]^2 + p_2\left[\dfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)+i\dfrac{\lambda}{2}\right] + p_3}{p_1\left[\dfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)-i\dfrac{\lambda}{2}\right]^2 + p_2\left[\dfrac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)-i\dfrac{\lambda}{2}\right] + p_3} e^{\left[\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)-i\frac{\lambda}{2}\right]z} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left(e^{i\frac{\lambda}{2}z} + \frac{P_\lambda + i\lambda P}{P_\lambda - i\lambda P}e^{-i\frac{\lambda}{2}z}\right),$$

где

$$\begin{cases} P_\lambda = \dfrac{p_1}{4}\left[(\beta_2-\beta_1)^2 - \lambda^2\right] + \dfrac{p_2}{2}(\beta_2-\beta_1) + p_3, \\ P = \dfrac{p_2}{2}(\beta_2-\beta_1) + \dfrac{p_2}{2}. \end{cases} \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$k_\lambda = \frac{P_\lambda + i\lambda P}{P_\lambda - i\lambda P} = e^{i\theta_\lambda}, \tag{14}$$

где θ_λ определяется из следующей системы:

$$\begin{cases} \cos\theta_\lambda = \dfrac{P_\lambda^2 - \lambda^2 P^2}{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}, \\ \sin\theta_\lambda = \dfrac{2\lambda P_\lambda P}{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}. \end{cases} \tag{15}$$

Пользуясь формулой (14), можем представить функцию $f_\lambda(z)$ в виде

$$f_\lambda(z) = e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left(e^{\frac{i}{2}\lambda z} + e^{i(\theta_\lambda - \frac{\lambda}{2}z)}\right) =$$
$$= e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left[\cos\left(\frac{\lambda}{2}z\right) + \cos\left(\theta_\lambda - \frac{\lambda}{2}z\right) + i\left(\sin\left(\frac{\lambda}{2}z\right) + \sin\left(\theta_\lambda - \frac{\lambda}{2}z\right)\right)\right] =$$
$$= 2e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left[\cos\left(\frac{\lambda}{2}\theta_\lambda\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\lambda z - \theta_\lambda)\right]$$

или окончательно

$$f_\lambda(z) = A_\lambda e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\cos\left[\frac{1}{2}(\lambda z - \theta_\lambda)\right], \tag{16}$$

где $A_\lambda = 2e^{\frac{i}{2}\theta_\lambda}$ – выражение, независящее от z.

Согласно (4) построим теперь частные решения $u_\lambda(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1), граничному условию (2) и начальному условию $u_\lambda(x,0) = 0$:

$$u_\lambda(x,t) = \psi(x)\left[e^{\beta_1 t} f_\lambda\left(\frac{x}{c} + t\right) - e^{\beta_2 t} f_\lambda\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] =$$
$$= A_\lambda \psi(x)\left\{e^{\beta_1 t} e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)(\frac{x}{c}+t)}\cos\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\left(\frac{x}{c}+t\right) - \theta_\lambda\right)\right] -\right.$$
$$\left. - e^{\beta_2 t} e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)(\frac{x}{c}-t)}\cos\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\left(\frac{x}{c}-t\right) - \theta_\lambda\right)\right]\right\} =$$
$$= A_\lambda \psi(x) e^{1/2[(\beta_2-\beta_1)x/c + (\beta_2+\beta_1)t]}\left\{\cos\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\left(\frac{x}{c}+t\right) - \theta_\lambda\right)\right] - \cos\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\left(\frac{x}{c}-t\right) - \theta_\lambda\right)\right]\right\}$$

или окончательно

$$u_\lambda(x,t) = -2A_\lambda \psi(x) e^{1/2[(\beta_2-\beta_1)x/c + (\beta_2+\beta_1)t]}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{x}{c} - \theta_\lambda\right)\right]\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right). \tag{17}$$

В силу линейности и однородности уравнения (1) функция (17) определяется с точностью до постоянного множителя. Таким образом, функция

$$u_\lambda(x,t) = B\psi(x) e^{1/2[(\beta_2-\beta_1)x/c + (\beta_2+\beta_1)t]}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{x}{c} - \theta_\lambda\right)\right]\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) \tag{18}$$

удовлетворяет уравнению (1), граничному условию (2) и начальному условию $u_\lambda(x,0) = 0$ при любых вещественных λ, где B – произвольное постоянное число.

В случае ограниченного отрезка λ принимает только дискретные значения. А в случае полуограниченной прямой второго граничного условия нет и, следовательно, все значения λ являются допустимыми. Поэтому вместо суммирования по дискретным значениям λ, которые мы применяли в случае ограниченного отрезка, в данном случае мы должны применить интегрирование по параметру λ, считая B зависящим от $\lambda : B = B(\lambda)$. Таким образом, мы получим

$$u(x,t) = \psi(x) e^{1/2[(\beta_2-\beta_1)x/c+(\beta_2+\beta_1)t]} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) \sin\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{x}{c} - \theta_\lambda\right)\right] \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) d\lambda =$$

$$= \psi(x) e^{1/2[(\beta_2-\beta_1)x/c+(\beta_2+\beta_1)t]} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)\right] \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) d\lambda.$$

Из системы (15) определим $\cos\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right)$ и $\sin\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right)$:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right) = \pm\frac{P_\lambda}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\theta_\lambda\right) = \pm\frac{\lambda P}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}. \tag{19}$$

Используя (19), функцию $u(x,t)$ можно представить в виде:

$$u(x,t) = \psi(x) e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2+\beta_1)t]} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) \frac{P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}} \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) d\lambda, \tag{20}$$

где знаки $\pm$ включены в $B(\lambda)$. Функция $B(\lambda)$ должна определяться из начального условия $u_t(x,0) = \mu(x)$. Дифференцируя функцию (20) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x) e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2+\beta_1)t]} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) \frac{P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}} \left[\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_1)\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) + \frac{\lambda}{2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right] d\lambda.$$

Отсюда видно, что начальное условие $u_t(x,0) = \mu(x)$ дает

$$\frac{\mu(x) e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{\psi(x)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda B(\lambda) \frac{P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{2\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}} d\lambda.$$

Представим полученное равенство в виде

$$\frac{\mu(x) e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{c\psi(x)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda B(\lambda) P_\lambda}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}} \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) d\left(\frac{\lambda}{2c}\right) -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 B(\lambda) P}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}} \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) d\left(\frac{\lambda}{2c}\right). \tag{21}$$

Теперь отметим, что если какая–нибудь функция $z(x)$ представима интегралом Фурье, то, как известно [1], имеет место формула

$$z(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(s)\cos[\alpha(s-x)]ds\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(s)\cos(\alpha s)ds\right)\cos(\alpha x)d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(s)\sin(\alpha s)ds\right)\sin(\alpha x)d\alpha. \quad (22)$$

Если функция $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{c\psi(x)}$ представима интегралом Фурье, то согласно (22) получим

$$\frac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{c\psi(x)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right). \quad (23)$$

Сравнивая (21) с (23) видим, что

$$\frac{\lambda B(\lambda)P_\lambda}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \quad (24)$$

$$\frac{-\lambda^2B(\lambda)P}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \quad (25)$$

Если функция $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{c\psi(x)}$ – четная, то функция $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}s\right)$ от s есть функция четная, а функция $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}s\right)$ нечетна. Поэтому интеграл от четной функции $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}s\right)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен $2\int\limits_0^\infty\dfrac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\cdot\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}s\right)ds$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен $\dfrac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}s\right)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен нулю. Таким образом, если $\dfrac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{c\psi(s)}$ есть функция четная, то $B(\lambda)$ определяется из равенства (25):

$$B(\lambda)=\frac{-\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{c\pi\lambda^2P}\int\limits_0^\infty\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (20), получим решение задачи (1) – (3):

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi c}\psi(x)e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2+\beta_1)t]}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)}\left(\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda}-\frac{P_\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda^2P}\right)\right]\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right\}\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)d\lambda.$$

Так как P_λ есть четная функция от λ, то подынтегральная функция также будет четной функцией от λ. Поэтому

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi c}\psi(x)e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2+\beta_1)t]}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)}\left(\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda}-\frac{P_\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda^2P}\right)\right]\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right\}\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)d\lambda. \quad (27)$$

Если же $\dfrac{\mu(x)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{x}{c}}}{\psi(x)}$ есть нечетная функция, то интеграл, стоящий в правой части равенства (25), равен нулю, $B(\lambda)$ определяется из равенства (24):

$$B(\lambda)=\frac{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{c\pi\lambda P_\lambda}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (20) и принимая во внимание четность подынтегральной функции, как функции от λ, получим решение задачи (1) – (3):

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi c}\psi(x)e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)\frac{x}{c}+(\beta_2+\beta_1)t]}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\mu(s)e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)\frac{s}{c}}}{\psi(s)}\left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\lambda}-\frac{P\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{P_\lambda}\right)\right]\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right\}\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)d\lambda. \quad (29)$$

Рассмотрим теперь частный случай задачи (1) – (3) при $\beta_1=\beta,\ \ \beta_2=-\beta$, считая, что $u(x,0)=$ $=\mu_1(x):$

найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2c\left(\beta-\frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left[\left(\frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}-\beta\right)^2-c^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]u, \quad (30)$$

$$0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$$

, удовлетворяющее граничному условию

$$a_1\frac{\partial^2u(0,t)}{\partial t^2}+a_2\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+a_3u(0,t)=0,\quad 0<t<\infty, \quad (31)$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \mu_1(x), \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t} = \mu_2(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{32}$$

где $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ – заданные функции.

Чтобы решить задачу (30) – (32), вместо $u(x,t)$ введем две функции по формуле

$$u = \upsilon + \omega, \tag{33}$$

где функция $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + 2c\left(\beta - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \left[\left(\frac{c\psi'(x)}{\psi(x)} - \beta\right)^2 - c^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]\upsilon, \tag{34}$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$a_1 \frac{\partial^2 \upsilon(0,t)}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial x} + a_3 \upsilon(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \tag{35}$$

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \upsilon(x,0)}{\partial t} = \mu_2(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{36}$$

а функция $\omega(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2c\left(\beta - \frac{c\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x} + \left[\left(\frac{c\psi'(x)}{\psi(x)} - \beta\right)^2 - c^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\right]\omega, \tag{37}$$

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$a_1 \frac{\partial^2 \omega(0,t)}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial \omega(0,t)}{\partial x} + a_3 \omega(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \tag{38}$$

$$\omega(x,0) = \mu_1(x), \quad \frac{\partial^2 \omega(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \infty. \tag{39}$$

Задача (34) – (36) рассмотрена выше. Достаточно в формулах (9), (13) и (20) положить $\beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = -\beta :$

$$\upsilon(x,t) = \psi(x) e^{\frac{-\beta x}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) \frac{P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}} \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) d\lambda, \tag{40}$$

где

$$\begin{cases} p_1 = a_1 \psi(0), \\ p_2 = \psi(0)\left[2a_1\beta + \frac{a_2}{c}\right], \\ p_3 = \psi(0)(a_3 + a_1\beta_1^2) + a_2\psi'(0), \\ P_\lambda = \frac{p_1}{4}(4\beta^2 - \lambda^2) - p_2\beta + p_3, \\ P = -p_1\beta + \frac{p_2}{2}. \end{cases} \tag{41}$$

Рассмотрим теперь задачу (37) – (39). Здесь начальное условие $\dfrac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = 0$ позволяет искать частное решение уравнения (37) в виде

$$\omega(x,t) = \psi(x)\left[e^{\beta t} f\left(\frac{x}{c} + t\right) + e^{-\beta t} f\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]. \tag{42}$$

Поступая также, как и выше, убедимся, что функция

$$\omega(x,t)=\psi(x)e^{\frac{-\beta x}{c}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D(\lambda)\frac{P_\lambda\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)-\lambda P\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}t\right)d\lambda \tag{43}$$

удовлетворяет уравнению (37), граничному условию (38) и начальному условию $\dfrac{\partial\omega(x,0)}{\partial t}=0.$ Подставляя (40) и (43) в (33), будем иметь

$$u(x,t)=\psi(x)e^{\frac{-\beta x}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_\lambda\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)\lambda P\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}\left(B(\lambda)\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)+D(\lambda)\cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right)d\lambda. \tag{44}$$

Функции $B(\lambda)$ и $D(\lambda)$ должны определяться из начальных условий (32), которые дадут:

$$\frac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_\lambda D(\lambda)\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}d\left(\frac{\lambda}{2c}\right)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda PD(\lambda)\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}d\left(\frac{\lambda}{2c}\right), \tag{45}$$

$$\frac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_\lambda B(\lambda)\sin\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}d\left(\frac{\lambda}{2c}\right)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda PB(\lambda)\cos\left(\dfrac{\lambda}{2c}x\right)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}d\left(\frac{\lambda}{2c}\right). \tag{46}$$

Если функции $\dfrac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ и $\dfrac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ представимы интегралом Фурье, то

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right)+\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right),\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right)+\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right)\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)d\left(\frac{\lambda}{2c}\right).\end{aligned} \tag{48}$$

Сравнивая (45) с формулой (47), а (46) с формулой (48), видим, что

$$\frac{P_\lambda D(\lambda)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \tag{49}$$

$$\frac{-\lambda PD(\lambda)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \tag{50}$$

$$\frac{\lambda P_\lambda B(\lambda)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \tag{51}$$

$$\frac{-\lambda^2 PB(\lambda)}{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \tag{52}$$

1. Пусть $\dfrac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ и $\dfrac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{c\psi(x)}$ – обе четные функции. Тогда интегралы, стоящие в правых частях (49) и (51), обращаются в нуль и, следовательно, $B(\lambda)$ определяется из равенства (52), а $D(\lambda)$ – из (50):

$$B(\lambda)=\frac{-1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{\lambda^2P}\int\limits_0^\infty\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \tag{53}$$

$$D(\lambda)=\frac{-1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{\lambda P}\int\limits_0^\infty\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \tag{54}$$

Подставляя (53) и (54) в (44) и принимая во внимание четность подынтегральной функции, как функции λ, получим решение задачи (30) – (32):

$$u(x,t)=\frac{-2}{c\pi P}\psi(x)e^{\frac{-\beta x}{c}}\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_0^\infty\left[\frac{e^{\frac{\beta s}{c}}}{\psi(s)}\left(P_\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)-\lambda P\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\mu_2(s)}{\lambda^2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)+\frac{\mu_1(s)}{2\lambda}\cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right)\right]\cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right\}d\lambda. \tag{55}$$

2. Пусть $\dfrac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ и $\dfrac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{c\psi(x)}$ – обе нечетные функции.

В этом случае интегралы, стоящие в правых частях (50) и (52), обращаются в нуль, $B(\lambda)$ определяется из равенства (51), а $D(\lambda)$ – из (49):

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{\lambda P_\lambda}\int\limits_0^\infty\frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds, \tag{56}$$

$$D(\lambda)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{P_\lambda^2+\lambda^2P^2}}{P_\lambda}\int\limits_0^\infty\frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)}\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds. \tag{57}$$

Подставляя (56) и (57) в (44) и учитывая четность подынтегральной функции, как функции λ, получим решение задачи (30) – (32):

$$u(x,t)=\frac{2}{c\pi}e^{\frac{-\beta x}{c}}\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_0^\infty\left[\frac{e^{\frac{\beta s}{c}}}{\psi(s)}\left(P_\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)-\lambda P\cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\mu_2(s)}{\lambda P_\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)+\frac{\mu_1(s)}{2P_\lambda}\cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right)\right]\sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right)ds\right\}d\lambda. \tag{58}$$

3. Пусть функции $\dfrac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ – четная, а $\dfrac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{c\psi(x)}$ – нечетная.

В этом случае интегралы, стоящие в правых частях (49) и (52), обращаются в нуль, $B(\lambda)$ определяется из равенства (51), а $D(\lambda)$ – из (50):

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}}{\lambda P_\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{c\psi(s)} \sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) ds, \tag{59}$$

$$D(\lambda) = \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}}{\lambda P} \int\limits_0^\infty \frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)} \cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) ds. \tag{60}$$

Согласно формуле (44) получаем решение задачи (30) – (32) в виде

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{2}{c\pi}\psi(x)e^{\frac{-\beta x}{c}} \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_0^\infty \left[\frac{e^{\frac{\beta s}{c}}}{\psi(s)} \left(P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)\right) \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \left(\frac{\mu_2(s)}{\lambda P_\lambda} \sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right) - \frac{\mu_1(s)}{2\lambda P} \cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right)\right] ds \right\} d\lambda. \end{gathered} \tag{61}$$

4. Наконец, пусть функция $\dfrac{\mu_1(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{2c\psi(x)}$ – нечетная, а $\dfrac{\mu_2(x)e^{\frac{\beta x}{c}}}{c\psi(x)}$ – четная. Тогда интегралы, стоящие в правых частях (50) и (51), обращаются в нуль, $B(\lambda)$ определяется из равенства (51), а $D(\lambda)$ – из (50):

$$B(\lambda) = \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}}{\lambda^2 P} \int\limits_0^\infty \frac{\mu_2(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{c\psi(s)} \cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) ds, \tag{62}$$

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{P_\lambda^2 + \lambda^2 P^2}}{P_\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{\mu_1(s)e^{\frac{\beta s}{c}}}{2c\psi(s)} \sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) ds. \tag{63}$$

Решение задачи (30) – (32) примет вид

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{2}{c\pi}e^{\frac{-\beta x}{c}} \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_0^\infty \left[\frac{e^{\frac{\beta s}{c}}}{\psi(s)} \left(P_\lambda \sin\left(\frac{\lambda}{2c}x\right) - \lambda P \cos\left(\frac{\lambda}{2c}x\right)\right) \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \left(\frac{\mu_1(s)}{2P_\lambda} \sin\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}t\right) - \frac{\mu_2(s)}{\lambda^2 P} \cos\left(\frac{\lambda}{2c}s\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2}t\right)\right)\right] ds \right\} d\lambda. \end{gathered} \tag{64}$$

Цитированная литература

1. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. М. 1970.

2. **Турумбеков А.** Функционально – дифференциальные уравнения с конечной группой преобразований аргумента в смешанных задачах. Ош. 2002.

3. **Турумбеков А.** // Известия Ошского технологического университета. 2004. № 1. С.27 – 30.

4. **Шаршеналиев Ж., Турумбеков А.** // Сборник научных трудов Ошского технологического университета, 2002. вып. 5, С. 3 – 9.

Поступила в редакцию 18.11.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 97 — 101*

УДК 517.5

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Н.Т. Тлеуханова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
473021 г. Астана ул. Мунайтпасова, 5 tleukhanova@yandex.ru

Исследованы вопросы суммируемости коэффициентов Фурье по регулярным системам функции из анизотропного пространства Лоренца. Получены нижние оценки нормы функции из пространства Лоренца через коэффициенты Фурье, которые уточняют известные. Результаты являются новыми и в случае тригонометрических рядов.

Пусть $1 < p < \infty$, $\Phi = \{\phi\}_{k=1}^{\infty}$– ортонормированная система, ограниченная в совокупности, $f \in L_p[0,1]$, $f \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$. Задача о свойствах суммируемости коэффициентов Фурье $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ функции f в случае $1 < p < 2$ решается с помощью классического неравенства Харди-Литлвуда-Пэли [1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} (a_k^*)^p \leq c \|f\|_{L_p}^p, \tag{1}$$

где $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{|a_k|\}_{k=1}^{\infty}$.

Если $2 \leq p < \infty$ и ортонормированная система $\Phi = \{\phi\}_{k=1}^{\infty}$ регулярна, то из неравенства, доказанного Нурсултановым [2],

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |\bar{a_k}|^p \leq c \|f\|_{L_p}^p, \tag{2}$$

где $\bar{a_k} = \frac{1}{k} \left| \sum_{m=1}^{k} a_m \right|$.

Данные неравенства имеют место и в многомерном случае ([2, 3]). Если же рассматривать функции из анизотропных пространств, зависящих от векторного параметра $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, то представляет интерес рассматривать задачу о суммируемости коэффициентов Фурье, когда одни параметры p_i больше 2, а остальные меньше или равны 2.

Пусть $1 \leq \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, ..., q_n) \leq \infty$.

Keywords: *Fourier series, anisotropic Lorentz space, lower estimates*
2000 Mathematics Subject Classification: 42C10

Определим пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}[0,1]^n$ со смешанной метрикой как пространство измеримых функций на $[0,1]^n$ с нормой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}} = \left(\int_0^1 \dots \left(\int_0^1 |f(x_1,...,x_n)|^{p_1} dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Пусть $f(x_1,...,x_n)$ – измеримая функция, заданная на $[0,1]^n$. Через $f^*(t) = f^{*_1,...,*_n}(t_1,...,t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_1,...,x_n$ в $[0,1]^n$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(t)$ будем называть *невозрастающей перестановкой функции* f.

Пространство $L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n$ (см.[4, 2]) определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n} = \left(\int_0^1 \dots \left(\int_0^1 \left|t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} f^{*_1 \dots *_n}(t_1,\dots,t_n)\right|^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty.$$

Пусть W_j– некоторые фиксированные семейства конечных наборов e_j мультииндексов из $\mathbb{N}$. Семейство $W = W_1 \times \dots \times W_n$ подмножеств из $\mathbb{N}^n$ назовем *анизотропной сетью в* $\mathbb{N}^n$. Определим пространство последовательностей

$$n_{\mathbf{pq}}(W) = \{\{a_{s_1,...,s_n}\}_{s_1 \in \mathbb{Z}^{m_1},...,s_n \in \mathbb{Z}^{m_n}} :\}.$$

$$\|a\|_{n_{\mathbf{pq}}(W)} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{\frac{q_n}{p_n}-1} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{\frac{q_1}{p_1}-1} (\bar{a}_{k_1 \dots k_n}(W))^{q_1}\right)^{q_2/q_1} \dots\right)^{1/q_n} =$$

$$= F_{\mathbf{pq}}\left(\{\bar{a}_{\mathbf{k}}(W)\}\right) < \infty\},$$

здесь

$$\bar{a}_{k_1,...,k_n}(W) = \sup_{\substack{|e_j|>k_j \\ e \in W}} \frac{1}{|e|} \left|\sum_{\mathbf{k} \in e} a_{\mathbf{k}}\right|,$$

где $|e|$ – количество элементов множества $e = e_1 \times \dots \times e_n$, а $|e_j|$ – количество элементов множества e_j, $j = 1,\dots,n$.

Для пространств $n_{\mathbf{pq}}(W)$, $L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n$ верны следующие свойства.

a). Если $W_1 \subset W_2$, то

$$n_{\mathbf{pq}}(W_2) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq}}(W_1).$$

b). При $\mathbf{q} \le \mathbf{q_1}$ верно

$$n_{\mathbf{pq}}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq_1}}(W), \quad L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n \hookrightarrow L_{\mathbf{pq_1}}[0,1]^n.$$

c) Если $p_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$n_{\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q_1}}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq}}(W),$$

$$L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n \hookrightarrow L_{\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q}}[0,1]^n,$$

где

$$\mathbf{p} = (p_1,...,p_n), \mathbf{q} = (q_1,...,q_n), \bar{\mathbf{p}} = (p_1,...,p_{j_0-1}, p_{j_0} - \varepsilon, p_{j_0+1},...,p_n),$$

$$\mathbf{q_1} = (q_1,...,q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1},...,q_n).$$

Теорема 1 ([2]). *Пусть W произвольная анизотропная сеть в $\mathbb{N}^n$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1\}$– вершины единичного куба, $\mathbf{1} < \mathbf{p_0} = (p_1^0, ..., p_n^0) < \mathbf{p_1} = (p_1^0, ..., p_n^0) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{q_0} = (q_1^0, ..., q_n^0)$, $\mathbf{q_1} = (q_1^0, ..., q_n^0) < \infty$, $q_i^0 \neq q_i^1, i = 1, 2, ...n$. Если T – линейный оператор такой, что для любого $\varepsilon \in E$ ограничен*

$$T : L_{\mathbf{p}_\varepsilon}[0,1]^n \ \to \ n_{\mathbf{p}_\varepsilon \infty}(W) \text{ с нормой } M_\varepsilon,$$

где $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, ..., p_n^{\varepsilon_n})$, тогда

$$T : L_{\mathbf{pr}}[0,1]^n \to n_{\mathbf{qr}}(W), \text{с нормой} \|T\| \leq c \max_{\varepsilon \in E} M_\varepsilon,$$

где $\frac{1}{\mathbf{p}} = \frac{1-\theta}{\mathbf{p_0}} + \frac{\theta}{\mathbf{p_1}}$, $\frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{1-\theta}{\mathbf{q_0}} + \frac{\theta}{\mathbf{q_1}}$, $0 < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < 1$, $0 < \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$.

Ортонормированную систему $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ назовем *регулярной,* если существует константа B, что

1) для любого отрезка e из $[0,1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\left| \int_e \phi_k(x)dx \right| \leq B \min(|e|, 1/k),$$

2) для любого отрезка w из $\mathbb{N}$ и $t \in [0,1]$

$$\left(\sum_{k \in w} \phi_k(\cdot) \right)^* (t) \leq B \min(|w|, 1/t),$$

где $\left(\sum_{k \in w} \phi_k(\cdot)\right)^* (t)$ – невозрастающая перестановка функций $\sum_{k \in w} \phi_k(x)$.

Тригонометрические системы, мультипликативные системы, в частности, система Уолша являются регулярными.

Пусть $\Psi_1 = \{\psi_k^1(x)\}_{k=1}^\infty, \ldots, \Psi_n = \{\psi_k^n(x)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированные в $L_2[0,1]$ регулярные системы функций. Определим $\Phi = \{\phi_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}^n}$ следующим образом:

$$\phi_k(x) = \phi_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{k_1}^1(x_1) \ldots \psi_{k_n}^n(x_n).$$

Назовем ее *регулярной системой в* $[0,1]^n$.

Для $f \in L_1[0,1]^n$ определим коэффициенты Фурье по системе $\Psi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$

$$a_k = \int_{[0,1]^n} f(x)\overline{\phi_k(x)}dx, \quad k \in \mathbb{N}^n.$$

Через M_p определим сеть в $\mathbb{N}$ следующим образом. Если $1 < p \leq 2$, то это – множество всех отрезков из $\mathbb{N}$, если же $2 < p < \infty$, то это – множество всех компактов из $\mathbb{N}$.

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty, M_{p_i}$ – сеть, определенная выше,

$$M_\mathbf{p} = M_{p_1} \times ... \times M_{p_n} - \tag{3}$$

сеть в $\mathbb{N}^n$

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty$, $p_i' = p_i/(p_i - 1)$, $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, ..., q_n) \leq \infty$, $M_\mathbf{p}$ – сеть, определенная равенством (3), $f \in L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n, f \overset{п.в.}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \phi_k(x)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(k_1^{\frac{1}{p_1'}} \ldots k_n^{\frac{1}{p_n'}} \bar{a}_{k_1 \ldots k_n}(M_p) \right)^{q_1} \frac{1}{k_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \frac{1}{k_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{pq}}}.$$

Доказательство. Докажем сначала слабое неравенство при $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^n} k_1^{\frac{1}{p_1'}} \dots k_n^{\frac{1}{p_n'}} \bar{a}_{k_1 \dots k_n}(M_{\mathbf{p}}) \leq c \|f\|_{L_{\mathbf{p}}}. \tag{4}$$

Пусть $1 < p < 2$, $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$– регулярная система, следовательно она ограничена в совокупности. Пусть e – произвольный компакт из $\mathbb{N}$, $|e|$– количество элементов в e. Через $g(x)$ определим функцию

$$g(x) = \frac{1}{|e|^{1/p}} \left| \sum_{k \in e} \phi_k(x) \right|.$$

Из неравенства (1) следует

$$\left| \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) \overline{\frac{1}{|e|^{1/p}} \sum_{k \in e} \phi_k(x)} dx \right| =$$

$$= \frac{1}{|e|^{1/p}} \left| \sum_{m \in e} a_m \right| \leq \frac{1}{|e|^{1/p}} \sum_{k=1}^{|e|} a_k^* \leq \left(\sum_{k=1}^{|e|} k^{p-2} (a_k^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1 \|f\|_{L_p}.$$

Возьмем верхнюю точную грань от выражения слева по всем $f \in L_p[0,1]$ с нормой $\|f\|_{L_p} = 1$. Из обратного неравенства Гельдера имеем

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq c_1. \tag{5}$$

Пусть теперь $2 \leq p < \infty$, $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – регулярная система, ω – произвольный отрезок в $\mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{|\omega|^{1/p}} \left| \sum_{k \in \omega} \phi_k(x) \right|.$$

Из неравенства (2) имеем

$$\left| \int_0^1 f(x) \overline{\psi(x)} dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) \overline{\frac{1}{|\omega|^{1/p}} \sum_{k \in \omega} \phi_k(x)} dx \right| = \frac{1}{|\omega|^{1/p}} \left| \sum_{m \in \omega} a_m \right| \leq c_2 \|f\|_{L_p}.$$

Аналогично имеем

$$\|\psi(x)\|_{L_{p'}} \leq c_2. \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty$, M_p – сеть, указанная в условии теоремы, Q – произвольный элемент сети. Тогда

$$Q = Q_1 \times \dots \times Q_n,$$

где Q_i – отрезок, если $2 \leq p_i < \infty$, и Q_i – компакт, если $1 < p_i < 2$.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1}} \dots |Q_n|^{\frac{1}{p_n}}} \left| \sum_{k_1 \in Q_1} \dots \sum_{k_n \in Q_n} a_{k_1 \dots k_n} \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|Q_i|} \sum_{k_i \in Q_i} \phi_{k_i}^i(x) dx_1 ... dx_n \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\cdots \int_0^1 |f(x_1,...,x_n)| \left(\frac{1}{|Q_1|} \left| \sum_{k_1 \in Q_1} \phi^1_{k_1}(x_1) \right| \right) dx_1 ... \right) \times$$

$$\times \frac{1}{|Q_n|} \left| \sum_{k_n \in Q_n} \phi^n_{k_n}(x_n) \right| dx_n.$$

Применим неравенство Гельдера по каждой переменной и оценим последнее выражение через

$$\|f\|_{L_p} \cdot \prod_{i=1}^n \left\| \frac{1}{|Q_i|} \left| \sum_{k_i \in Q_i} \phi^i_{k_i} \right| \right\|_{L_{p'_i}}.$$

Воспользуемся (5) и (6), получим

$$\frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1}} \ldots |Q_n|^{\frac{1}{p_n}}} \left| \sum_{k_1 \in Q_1} \cdots \sum_{k_n \in Q_n} a_{k_1 \ldots k_n} \right| \leq c_1^j \cdot c_2^{n-j} \|f\|_{L_{\mathbf{p}}},$$

где j – количество p_i больше 2, а константы c_1 и c_2 из неравенств (5), (6) соответственно.

Таким образом, учитывая произвольность выбора Q из M_p, для произвольного $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,...,p_n) < \infty$ верно

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p'}\infty(\mathbf{M_p})}} \leq c\|f\|_{L_{\mathbf{p}}}. \quad (7).$$

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,...,p_n) < \infty$. Найдутся $\mathbf{p_0} = (p_1^0,...,p_n^0)$ и $\mathbf{p_1} = (p_1^1,...,p_n^1)$ такие, что $\mathbf{1} < \mathbf{p_0} < \mathbf{p} < \mathbf{p_1} < \infty$, причем, если $2 < p_i < \infty$, то $2 < p_i^0 < p_i < p_i^1 < \infty$. В этом случае имеем $M_{\mathbf{p}} \subset M_{\mathbf{p_0}}, M_{\mathbf{p}} \subset M_{\mathbf{p_1}}$ и, более того для произвольного $\varepsilon \in E$, $M_{\mathbf{p}} \subset M_{\mathbf{p}_\varepsilon}$, где $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1},...,p_n^{\varepsilon_n})$.

Из (7) следует

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'_\varepsilon\infty}}(M_{\mathbf{p}}) \leq \|a\|_{n_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}}(M_{\mathbf{p}_\varepsilon}) \leq c\|f\|_{L_{\mathbf{p}}}$$

для любого $\varepsilon \in E$.

Применим интерполяционную теорему 1, получим нужное нам утверждение.

Цитированная литература

1. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М., 1961.
2. **Нурсултанов Е.Д.** //Изв. РАН. 2000. Т.64, № 1. С. 95-122.
3. **Nursultanov E.D.** // East J. Approx. 1998. V 4, № 2. P. 243-275
4. **Blozinski A.P.** //Transactions of the American Math. Soc. 1981. V.263, № 1. P. 149-167.

Поступила в редакцию 10.09.2005г.

Математический журнал. Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 102 – 103

ХРОНИКА

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 70 лет академику НАН Республики Казахстан Назарбаю Кадыровичу Блиеву, известному ученому, специалисту в области теории обобщенных аналитических функций, краевых задач математической физики и сингулярных интегральных уравнений. Н.К.Блиев родился 15 сентября 1935 года в поселке Жаркамыс Байганинского района Актюбинской области в семье служащего. В 1952 году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета КазГУ им.С.М.Кирова (ныне КазНУ им.аль-Фараби). Под руководством академика К.П. Персидского в 1957г. он защитил дипломную работу по теории устойчивости и окончил с отличием КазГУ им.С.М.Кирова. Был направлен на работу в Гурьевский пединститут (ныне Атырауский университет), где работал преподавателем, затем старшим преподавателем до 1960г.

В 1960г. он поступил в аспирантуру МИ АН СССР. Первым его научным руководителем был д.ф.-м.н. Владимир Сергеевич Виноградов — ученик академика АН СССР Ильи Нестеровича Векуа. Назарбай Кадырович начал заниматься изучением поведения решения эллиптических систем дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек коэффициентов. Им были получены необходимые и достаточные условия существования аналитических решений вырождающихся эллиптических систем первого порядка в окрестности точек вырождения. Эти результаты положили начало другим исследованиям о возможности существования непрерывных решений, связанных с вопросами теории поверхностей в геометрии. Указанные результаты Н.К.Блиева были высоко оценены И.Н.Векуа, что послужило началом дальнейшего тесного сотрудничества.

В 1965г. Н.К.Блиев успешно защитил кандидатскую диссертацию "О существовании аналитических решений у вырождающихся эллиптических систем в окрестности точки вырождения". Академик И.Н.Векуа предложил ему заниматься проблемой о возможности продолжения теории обобщенных аналитических функций на крайние предельные случаи, а именно, на класс коэффициентов эллиптических систем, суммируемых в степени не более, чем два. В те годы Н.К.Блиев работал в лаборатории профессора Т.И.Аманова (ученика академика АН СССР С.М.Никольского). Ему удалось доказать утверждения о мультипликаторах и получить соотношения между параметрами пространств, в которых теория Векуа остается в силе. Результаты Н.К.Блиева, относящиеся к дифференциальным уравнениям и краевым задачам в ограниченных областях, вошли в его докторскую диссертацию "Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости в дробных пространствах и краевые задачи," успешно защищенную в МИ АН СССР в 1980г.

С 1963г. научная деятельность Н.К.Блиева связана с Институтом (до 1965 года бывшего Сектором) математики и механики НАН РК, в котором он последовательно проходит все ступени профессионального роста. В 1988–2000гг. был директором Института математики, с 2000г. — руководитель темы (по совместительству).

С 1964г. Н.К.Блиев работал по совместительству в КазГУ (ныне КазНУ им.аль-Фараби), а с сентября 2000г. он полностью переходит на педагогическую работу и ныне заведует кафедрой функционального анализа и теории вероятностей КазНУ им.аль-Фараби.

Н.К.Блиев активно занимается научно-организаторской и общественной деятельностью, является членом редколлегий журналов "Известия НАН РК. Серия физико-математическая," "Математический журнал," "Вестник КазНУ им.аль-Фараби," диссертационного Совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Института Математики МОН РК.

В 1999–2002гг. работал (по совместительству) академиком-секретарем Отделения физико-математических наук, был членом президиума ВАК (ГАК), председателем секции физико-математических наук Терминологического комитета при Кабинете Министров РК, членом Комитета по государственным премиям РК, Президиума НАН РК, заместителем ответственного редактора журнала "Известия НАН РК. Серия физико-математическая," членом редколлегии журнала "Вестник МОН РК," Энциклопедии РК, Фонда развития науки, диссертационных советов Института математики АН Узбекистана, Актюбинского университета им. К. Жубанова.

Им опубликовано более 120 научных работ, в том числе, монография "Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах" (Алма-Ата, Наука, 1985), которая была переиздана в международной серии "Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 86" на английском языке "Generalized analytic functions in fractional Spaces" (USA, Addison Wesley Longman inc., 1997). Среди его прямых учеников — 18 кандидатов и 3 доктора наук, которые имеют свои школы и учеников.

Научные заслуги Н.К. Блиева получили достойную оценку. В 1985г. он получил звание профессора, 1989г. был избран членом-корреспондентом АН Казахстана, 1996г. — академиком Российской академии естественных наук, а в 2003г. становится академиком НАН РК. В 1998г. ему присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки и техники РК," в 1999г. удостоен Международной премии Хорезми первой степени.

Он выступал с докладами на Международном Конгрессе математиков (15–23 августа 1983г., Варшава, Польша), Втором европейском конгрессе математиков (21–27 июля 1996г., Будапешт, Венгрия), конференция европейского математического общества (15–23 июня 2004г., Bedlewo, Польша) и т.д.

Н.К.Блиев полон сил и энергии для осуществления своих новых математических замыслов.

Редакционная коллегия

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 4 (18) . С. 104 – 105*

ХРОНИКА

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

В этом году исполнилось 70 лет со дня рождения и 50 лет научно-педагогической деятельности академика НАН Республики Казахстан, заведующего кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики КазНУ им.аль-Фараби, доктора физико-математических наук, профессора, видного ученого и основоположника казахстанской школы асимптотической теории дифференциальных уравнений, известного организатора математической науки и высшего образования Кулжабая Абдыкалыковича Касымова.

Касымов К.А. родился 25 сентября 1935 года в селе Талапты Коксуйского района Талды-Курганской области. В 1952г., окончив среднюю школу с отличием, он поступает на физико-математический факультет КазГУ им.С.М.Кирова. В 1957г. после окончания КазГУ он работает ассистентом на кафедре математического анализа. В 1958г. физико-математический факультет КазГУ направляет К.А.Касымова на годичную стажировку в МГУ им.М.В. Ломоносова на кафедру вычислительной математики. Его руководителями по стажировке были профессора Н.С. Бахвалов и В.В. Воеводин. После окончания стажировки он поступает в аспирантуру МГУ под руководством член-корр.АН СССР, профессора Л.А.Люстерника. Ему было предложено исследовать решения дифференциального уравнения второго порядка с экспоненциальным ростом начального значения. Результаты по этой проблеме послужили началом его многолетней плодотворной научной деятельности, связанной с теорией начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных задач. Будучи аспирантом, К.А.Касымов неоднократно докладывает свои научные результаты на семинарах академиков А.А.Дородницина, И.Г.Петровского, А.Н.Тихонова, М.А.Лаврентьева, где он знакомится с М.И.Иманалиевым, А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузовым, Н.Х.Розовым и др.

В 1963г. К.А.Касымов успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему "Асимптотика решений задачи Коши с начальным скачком для дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных". С 1963 по 1968 годы он работает доцентом, заведующим кафедрой вычислительный математики КазГУ. В эти годы им предлагается квадратурная формула для вычисления определенного интеграла, которая явилась основой для создания приближенного метода решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений.

С 1968г. К.А.Касымов работает старшим научным сотрудником в Институте математики и механики АН КазССР, где вскоре становится заведующим лабораторией прикладных методов анализа. В эти годы он разрабатывает асимптотические методы решения задачи Коши для систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, имеющих начальные скачки в области пограничного слоя. Он обнаруживает качественно новое явление начального скачка, заключающееся в том, что начальные скачки присущи не всем компонентам медленной переменной, а только тем компонентам, которым соответствуют компоненты правой части системы при большом росте быстрой переменной. В случае сингулярно возмущенных нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений К.А.Касымов устанавливает принципиальное отличие задач с нерастущим начальным значением для быстрой переменной, когда невозмущенная система не совпадает с той системой, которая получается из исходной сингулярно возмущенной системы при формальном предельном переходе. Ранее о такого рода качественно новом эффекте не было известно ни для дифференциальных, ни для интегро-дифференциальных уравнений. Впервые К.А.Касымовым доказывается наличие начального скачка для сингулярно возмущенных уравнений и систем уравнений в частных производных гиперболического типа. По результатам этих исследований в мае 1972г. К.А.Касымов защищает докторскую диссертацию на тему "Асимптотические разложения решений задач с начальными скачками для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных и гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной".

В разные годы К.А.Касымов являлся членом Ученого совета по присуждению ученых степеней кандидата физико-математических наук, специализированного совета по защите докторских диссертаций при Институте математики МОН РК. В настоящее время он — председатель диссертационного совета Д14А02.33 по защите докторских диссертаций при КазНУ им.аль-Фараби. Занимая должности заведующего кафедрой, декана математического факультета КазГУ и ректора Казахского педагогического института им.Абая, он активно участвует в подготовке высококвалифицированных специалистов для республики. Его успехи в эти годы был отмечены Министерством Высшего Образования СССР нагрудным значком "За отличные успехи в работе", Правительством Республики — Грамотой Верховного Совета КазССР и медалью им.Ы.Алтынсарина. В 1983г. Касымов К.А. избирается членом-корреспондентом АН КазССР, а в 2003г. становится действительным членом (академиком) Национальной Академии наук РК.

К.А. Касымовым создана известная специалистам математическая школа в области дифференциальных уравнений, он — руководитель активно работающего научного коллектива. Им опубликовано около 200 научных работ, четыре монографии и три учебника. Под его руководством защищены 2 докторских и более 50 кандидатских диссертаций. Ряд его учеников стали профессорами ведущих вузов республики.

За огромные заслуги в развитии казахстанской науки и подготовке высококвалифицированных кадров К.А.Касымов указом Президента Республики Казахстан от 7 ноября 2004 г. награжден орденом "Құрмет".

К.А.Касымов находится в расцвете творческих сил для активного продолжения плодотворной научно-педагогической деятельности на благо общества, развития науки и высшего математического образования.

Редакционная коллегия

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.5 2000 MSC: 47A30

A b y l a e v a A . M . **Boundedness and compactness of fractional summability operator with weight.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.5–16.

On a set of number sequence $f = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ we introduce a fractional summability operator S_w^α of the order $0 < \alpha < 1$ with weight $w = \{w_i\}_{i=0}^{\infty}$, which acts according to the following law:

$$(S_w^\alpha f)_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{f_j w_j}{(W_i - W_{j-1})^{1-\alpha}}, \quad i \geq 0,$$

where $W_i = \sum\limits_{j=0}^{i} w_j$ for $i \geq 0$ and $W_{-1} \equiv 0$. We obtain necessary and sufficient conditions of boundedness and compactness of operator S_w^α from $l_{p,w}$ to $l_{q,v}$ for various relations between parameters α, p and q, where $v = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ is a weight sequence.

References — 9.

УДК: 517.5 2000 MSC: 47A30

А б ы л а е в а А . М . **Салмақпен бөлшекті қосындылау операторының шенелгендігі мен компактылығы.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.5–16.

$f = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ сандар тізбегінің жиынында,

$$(S_w^\alpha f)_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{f_j w_j}{(W_i - W_{j-1})^{1-\alpha}}, \quad i \geq 0,$$

ережесі бойынша әсер ететін $w = \{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ салмағымен бөлшекті қосындылау реті $0 < \alpha < 1$ болатын S_w^α операторы қарастырылған. Мұнда $i \geq 0$ болғанда $W_i = \sum\limits_{j=0}^{i} w_j$ және $W_{-1} \equiv 0$.

α, p және q параметрлерінің әр түрлі қатынасында S_w^α операторының $l_{p,w}$ кеңістігінен $l_{q,v}$ кеңістігіне шенелгендігі мен компактылығының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Мұндағы $v = \{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ - салмақты тізбек.

Библ. — 9.

УДК: 517.937 2000 MSC: 37C75

A i s a g a l i e v S . A . **General solution of one class of integral equations.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.17–23.

Some properties of solutions of one class of integral equations are under consideration. Necessary and sufficient conditions of a solution existence are obtained. Method of construction of a general solution is offered. Controllability problem solving is presented as an application.

References — 5.

УДК: 517.937 2000 MSC: 37C75

А й с а г а л и е в С . А . **Интегралдық теңдеулердің бір класының жалпы шешімі** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.17–23.

Интегралдық теңдеулердің бір класының шешімдерінің қасиеттері зерттелген. Шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Жалпы шешімді құрудың конструктивті әдісі ұсынылған, басқарымдылық есебін шешуге қолданылуы көрсетілген.

Библ. — 5.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

A k i s h e v G . **On approximation of functional classes in the spaces with mixed norm.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.24–33.

In this paper anisotropic Lorentz space of periodic functions is under consideration. Exact estimation of order of approximation in Besov's classes is obtained using trigonometric polynomials in Lorentz anisotropic normal spaces.

References — 22

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

А қ ы ш е в Ғ . **Функционалдық кластарды аралас мөлшерлі кеңістіктерде жуықтау туралы.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.24–33.

Мақалада периодты функциялардың аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігі қарастырылған. О.В.Бесов кластарын аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігінде тригонометриялық көпмүшелермен жуықтаудың дәл реті анықталған.

Библ. — 22.

УДК: 517.968.72. 2000 MSC: 45J05

B a k i r o v a E . A ., D z h u m a b a e v D . S . **On one approximation of linear two points boundary value problem for integro-differential equation.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.34–43.

Interrelation of correct solvability of boundary value problem for integro-differential equation and corresponding loaded differential one is established.

References — 11.

УДК: 517.968.72. 2000 MSC: 45J05

Б ә к і р о в а Э . А ., Ж ұ м а б а е в Д . С . **Интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің аппроксимациясы туралы**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.34–43.

Интегралды-дифференциалдық және сәйкес жүктелген дифференциалдық теңдеулердің корректі шешімділіктерінің арасындағы байланыс тағайындалған.

Библ. — 11.

УДК: 519.6 2000 MSC: 62B10

Berikov V.B. **Bayesian criteria of decision tree quality.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.44–51.

Bayesian criteria of decision tree quality in the problem of pattern recognition are suggested. With these criteria, we offer an algorithm for decision tree construction. The algorithm is studied by the method of statistical modeling.

References — 10.

УДК: 519.6 2000 MSC: 62B10

Беріков Э. А. **Шешім ағаштарының сапасының Байестік нышандары.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.44–51.

Бейнелерді тану есебінде шешім ағаштарының сапасының Байестік нышандары үсынылды. Осы нышандарды қолданатын шешім ағашын түрғызу алгоритмі жасалды. Статистикалық сүлбелеу әдісі арқылы алгоритмді зерттеу келтірілді.

Библ. — 10.

УДК: 517.962 2000 MSC: 34B37

Bopaev K.B. **Investigating of asymptotical behavior of DDS's solutions.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.52–60.

Definition of conditional stability of difference dynamic systems'(DDS) solutions is introduced. The main theorems on stability are generalized. Some methods of investigating of differential equation asymptotical properties apply to DDS.

References — 8.

УДК: 517.962 2000 MSC: 34B37

Бопаев К.Б. **АДЖ шешімдерінің асимптотикалың тәртібін зерттеу** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.52–60.

Айырымды-динамикалық жүйелердің (АДЖ) шешімдерінің шартты орнықтылығынң түсінігі енгізілді. Орнықтылық туралы негізгі теоремалар жалпыланды. Дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық қасиеттерін зерттеудің кейбір әдістері АДЖ жағдайына өрбітілді.

Библ. — 8.

УДК: 517.968.2 2000 MSC: 45D05

Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. **About one special Volterra integral equation of the second kind.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.61–67.

It is shown, the special Volterra integral operator of the second kind is Noetherian and has index equal to unit.

References — 10.

УДК: 517.968.2 2000 MSC: 45D05

Ж и е н э л и е в М . Т . , Р а м а з а н о в М . Ы . , Т ү й м е б а е в а А . Е . **Екінші текті арнайы Вольтерр интегралдық теңдеуі туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.61–67.

Арнайы екінші текті Вольтерр типтес интегралдық оператордың Нетер операторы жəне оның индексінің бірге тең екендіктері көрсетілген.
Библ. — 10.

УДК: 530.12:531.51 2000 MSC: 35Q75

М о у р а д М . Ф . **Некоторые классы решений цилиндрических симметричных вращений идеальной жидкости**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.68–74.

Исследуется симметрическое вращение идеальной жидкости. Для описания движения используются уравнения Эйнштейна теории поля. Построены осесимметричные решения в цилиндрической системе координат в случае метрических функций, зависящих только от r, и в предположении постоянства давления. Определены плотности энергии и момента с использованием представлений Ландау-Лифшица и Моллера.
References — 23.

УДК: 530.12:531.51 2000 MSC: 35Q75

М о у р а д М . Ф . **Идеалды сұйықтың цилиндрлік симметриялық айналуы шешімдерінің кейбір кластары**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.68–74.

Идеалды сүйықтың симметриялы айналуы зерттеледі. Қозғалысты сипаттауға Эйнштейннің өріс теориясының теңдеулері қолданылады. Қысым тұрақты деп есептелінген жөне тек тəуелді өлшемді функциялар жағдайында өсь бойынша симметриялы шешімдер цилиндрлік координаттар жүйесінде құрастырылды. Ландау-Лифшиц, Моллер кейіптемесін пайдаланып энергия тығыздығы мен момент анықталды.
Библ. — 23.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L2

O r u m b a y e v a N . T . **On solvability of semi-periodical boundary value problem for system of the quasi-linear of hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.75–85.

The sufficient conditions of existence of unique solution of semi periodical boundary value problem for system of the quasi-linear hyperbolic equations are established.
References — 9.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

О р ы н б а е в а Н . Т . **Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты квазисызықты шеттік есептің шешілімдігі туралы** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.75–85.

Квазисызықты гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылады және жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары алынған.

Библ. — 9.

УДК: 517.946.9 2000 MSC: 35L20

S h a r s h e n a l i e v Zh. Sh., T u r u m b e k o v A. T., K u t u n a e v Zh. N. **Mixed problem on vibration of semi-infinite line.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.86–96.

One type of hyperbolic equation with variable coefficients are considered when general solution in the form of running waves exists. The mixed problem is solved by using functionally differential equations with finite group of argument and Fourier integral transformation.

References — 4.

УДК: 517.946.9 2000 MSC: 35L20

Ш а р ш е н а л и е в Ж. Ш., Т ұ р ы м б е к о в А. Т., Қ ұ т ы н а е в Ж. Н. **Жартылай шектелген түзу тербелісінің аралас есебі**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.86–96.

Ақырлы топты түрлендіруі бар функционалды-дифференциалдық теңдеулерді қолдану және Фурье интегралы арқылы еркін жүгіруші толқын түрінде жалпы шешімді мүмкін қылатын, айнымалы коэффициентті гиперболалық теңдеудің бір түрі үшін аралас есеп шешіледі.

Библ. — 4.

УДК: 517.5 2000 MSC: 42C10

T l e u k h a n o v a N. T. **Fourier series coefficients of functions in anisotropic Lorentz spaces.** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 4 (18). P.97–101.

Properties of summable of Fourier series coefficients for regular systems of functions in anisotropic Lorentz spaces are considered. Lower estimates for the norm of functions in Lorentz spaces are proved.

References — 4.

УДК: 517.5 2000 MSC: 42C10

Т і л е у х а н о в а Н. Т. **Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі функциялардың Фурье коэффициенттері.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 4 (18). Б.97–101.

Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі регулярлы функциялардың жүйесі бойынша Фурье коэффициенттерінің қосындылану мәселелері зерттелінеді. Белгілілерді анықтайтын Фурье коэффициенттері арқылы Лоренц кеңістігіндегі функцияның нормасының төменгі бағасы алынды. Нәтижелер тригонометриялық қатарлар үшін де жаңа болып табылады.

Библ. — 4.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.