ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2005 том 5 № 2 (16)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 5 № 2 (16) 2005

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 5, № 2 (16), 2005

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 5—11*

УДК 517.9

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ 2D-3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ - СТОКСА II

У.У.Абылкаиров

КазНУ им. аль-Фараби
050012 г. Алматы ул. Масанчи, 39/47 UAbylkair@kazsu.kz

Получены теоремы существования и единственности сильных решений двух задач протекания для 2D - 3D системы Навье - Стокса с нестандартными граничными условиями.

В настоящей работе рассматривается две задачи протекания для полной системы Навье-Стокса. Получены необходимые априорные оценки для решений обеих искомых задач. На основании результатов работы [1] и полученных ниже априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности сильных решений задач протекании для системы Навье-Стокса.

1. Задача протекания для 2D - 3D системы Навье-Стокса.

1.1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, – область и её граница Γ, связные компоненты Γ^0, Γ^1 удовлетворяют условию (i) из п.п. 1.2. (см. [1]).

Будем рассматривать ниже начально-краевую задачу, называемую нами **задачей протекания 1:**

$$\partial_t\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} + grad\, p = \nu\Delta\vec{v} + \vec{f},\ \operatorname{div}\vec{v} = 0,\ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\vec{v}(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times (0,T), \tag{3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{4}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{5}$$

Keywords: *non-standard boundary condition, flow problem, Navier - Stokes systems*
2000 Mathematics Subject Classification: 35D05, 35Q30

описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω. Здесь $\vec{v}$, p – скорость, давление жидкости соответственно; $\nu = const > 0$ – коэффициент кинематической вязкости; $\vec{f}$ – объемная плотность внешних сил; $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$ – заданные функции. Ниже будем ссылаться на задачу (1)-(5) для заданных $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$ как на **задачу 1**. Наряду с **задачей 1** будем рассматривать другую **задачу 2**, заключающуюся в нахождении решения уравнения Навье-Стокса в форме Громэки-Лэмба

$$\partial_t\vec{v} + \mathrm{rot}\,\vec{v}\times\vec{v} + \mathrm{grad}\,(p + |\vec{v}|^2/2) = \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}, \tag{6}$$

в которой вместо условия (5) на $\Sigma^{1,T}$ выполняется следующее соотношение:

$$h :\equiv p + |\vec{v}|^2/2 = \varphi(t) + const; \ \int\limits_{\Omega} h\,dx = 0 \ \text{ на } \ \Sigma^{1,T}. \tag{7}$$

Определение сильного решения задач 1, 2. *Двойку* $(\vec{v}(x,t), p(x,t))$ *удовлетворяющие условиям:*

(i) $\vec{v}\in L^2(0,T;\,V^2(\Omega))$, $\partial_t\vec{v}\in L^2(Q)$, $\nabla p\in L^2(Q)$,

(ii) $\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x)$

(iii) $\partial_t\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} + grad\,p = \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}$, $div\,\vec{v} = 0$ *почти всюду в* Q,

(iv) $\nabla p\in L^2(0,T;\,G(\Omega))$ *в **задаче 1**,*

(v) $\nabla h\in L^2(0,T;\,G(\Omega))$ *в **задаче 2**,*

*называем решением **задач 1, 2**, где* $V^2(\Omega)\equiv V^1(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$.

1.2. Вспомогательные результаты. Прежде чем приступить к выводу априорных оценок, приведем некоторые неравенства вложения для функций из пространства $W^{2,1}(\Omega)$.

Лемма 1.1 [2]. *Пусть* $\Omega\subset R^d$ *– область с кусочно-гладкой границей* Γ. *Тогда для произвольной функции* $\vec{v}(x)\in W^{2,1}(\Omega)$ *имеем*

$$\|\vec{v}(x)\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} \le C(q,n)\|\vec{v}\|^{n/q}_{W^{2,1}(\Omega)}\|\vec{v}\|^{1-n/q}_{L^2(\Omega)}, \tag{8}$$

если $q\ge n$ *при* $n>2$ *и* $q>2$ *при* $n=2$;

Если $\vec{v}=0$, $x\in\Gamma^0\subset\Gamma=\partial\,\Omega$, $\mathrm{mes}\,\Gamma^0>0$, *то*

$$\|\vec{v}(x)\|_{L^{2q/(q-2)}(\Omega)} \le C(q,n)\,\|\vec{v}_x\|^{n/q}_{L^2(\Omega)}\|\vec{v}\|^{1-n/q}_{L^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Далее в предположениях $\vec{u}=0$, $x\in\Gamma^0\subset\Gamma=\partial\,\Omega$, $\mathrm{mes}\,\Gamma^0>0$ справедливо соотношение

$$\|\vec{v}\|_{q,\Omega} \le C(q,n)\,\|\vec{v}_x\|_{2,\Omega}, \tag{10}$$

где $q\le 2n/n-2$ при $n>2$ и $q<\infty$ при $n=2$.

Априорные оценки задачи 1. Относительно решения **задачи 1** докажем такое утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть* $\vec{f}\in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x)\in V^1(\Omega)$, *тогда для гладкого решения **задачи 1** справедлива оценка:*

$$\|\partial_t\vec{v}\|_{2,Q} + \max_{0\le t\le T}\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2(0,T;\,W^{2,2}(\Omega))} \le C_1 \tag{11}$$

a) при $n=2$ *и если выполнено*

$$\left(\nu-\sqrt{2}\,(\|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)}+\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,1,\,Q})\right)\geq\rho_1>0, \tag{12}$$

b) при $n=3$ *и если выполнено*

$$\rho_2\equiv 1-\frac{C\,T}{\nu}\left(\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}+\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q}\right)^2>0. \tag{13}$$

Доказательство. Случай $n=2$. Из (1) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}+\int\limits_{\Omega}(\vec{v},\nabla)\vec{v}\cdot\vec{v}\,dx+\nu\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}=(\vec{f},\vec{v})_{2,\Omega}. \tag{14}$$

В силу (9) имеем, что

$$\left|((\vec{v},\nabla)\vec{v},\vec{v})_{2,\Omega}\right|\leq\|\vec{v}\|^2_{4,\Omega}\cdot\|\nabla\,\vec{v}\|_{2,\Omega}\leq\sqrt{2}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}.$$

Следовательно, из (14) выводится следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}+\left(\nu-\sqrt{2}\,\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\right)_{2,\Omega}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\leq\left\|\vec{f}\right\|_{2,\Omega}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\,. \tag{15}$$

Так как функция $\varphi(t)=(\,\nu-\sqrt{2}\,\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)})$ непрерывна при $t\geq 0$ и положительна в точке $t=0$, то может быть одно из двух: или она положительна для всех $t\in[0,\,T]$, или существует такое $t_1\leq T$, что при $t_1<T$ она положительна, а при $t=t_1$ обращается в нуль. Покажем, что второй случай невозможен.

Действительно, предположим, что существует момент времени $t=t_1$ такой, что $\varphi(t_1)=0$. Тогда, опуская неотрицательное слагаемое в (15), интегрированием по t от 0 до $\tau\in[0,\,t_1]$ найдем, что

$$\|\vec{v}(\tau)\|_{\,V^0(\Omega)}\leq\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,1,\,Q}+\|\vec{v}_0\|_{\,V^0(\Omega)}=C_1 \tag{16}$$

выполняется равномерно по $\tau\in[0,\,t_1]$. Откуда с учетом (12) следует, что

$$\varphi(t_1)\geq\rho_1>0.$$

Получили противоречие.

Таким образом, соотношение (16) выполнено при всех $\tau\in[0,\,T]$ и $\varphi(\tau)\geq\rho_1>0$ на $[0,\,T]$.

Интегрируя (15) по $t\in[0,\,T]$ и используя (16), получим полезную оценку

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))}\leq\frac{1}{\rho_1}\left[\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,1,\,Q}\left(\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,1,\,Q}+\|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)}\right)+\frac{1}{2}\,\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}\right]. \tag{17}$$

Для доказательства существования решения искомой задачи нам необходимы сильные оценки для $\vec{v}$. Для этого умножим уравнение импульса (1) (см. [1]) на $\partial_t\vec{v}$ в $L^2(\Omega)$, получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}+\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)}\leq\left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)}+\|\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega}\|\vec{v}_t\|_{2,\,\Omega}.$$

При оценке последнего слагаемого воспользуемся мультипликативными неравенствами (8), (9) и оценкой (13) из п. 1.5. (см. [1]) стационарной задачи, которую с учетом определенного там же оператора Δ_1 запишем в таком виде

$$\|\vec{v}\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le C_\Omega \|\Delta_1 \vec{v}\|_{V^0(\Omega)}. \tag{18}$$

Тогда последний член без сомножителя $\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega}$ имеет следующий вид:

$$\|\vec{v}\|_{4,\Omega}\|\nabla\vec{v}\|_{4,\Omega} \le C\,\|\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}.$$

С помощью этого соотношения и неравенства Коши получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega} + C^2\,\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}. \tag{19}$$

Далее после умножения уравнения (1) из [1] на $\Delta_1\vec{v}$ выводим

$$\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{4,\Omega}\cdot\|\nabla\vec{v}\|_{4,\Omega} \le$$

$$\le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + C\,\|\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)}.$$

Следовательно, отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le 2\left\|\vec{f}\right\|_{2,\Omega} + 2\|\vec{v}_t\|_{V^0(\Omega)} + C^2\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{20}$$

Из соотношения (19), учитывая (16) и (20), заключаем, что

$$\nu\frac{d}{dt}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le C_1\,\|\vec{v}\|^4_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega}. \tag{21}$$

Соотношение (21) приведем к следующему эквивалентному виду:

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\frac{C_1}{\nu}\int_0^t \|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}d\tau\right)\cdot\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega}\cdot\exp\left(-\frac{C_1}{\nu}\int_0^t \|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}d\tau\right) \le \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\Omega}.$$

Затем интегрируя по времени от 0 до t, $t\in[0,T]$ и учитывая оценки (16), (17), получим

$$\max_{0\le t\le T}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \exp C_2\cdot\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}, \tag{22}$$

где $C_2 = C_1/\nu$.

Далее, из (20) и (21) выводятся следующие априорные оценки:

$$\|\vec{v}_t\|^2_{L^2(0,T;V^0(\Omega))} \le 2[\nu\,\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q} + C_3], \tag{23}$$

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le C^2_\Omega\,\|\Delta_1\vec{v}\|^2_{2\,\Omega} \le C^2_\Omega[2\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,Q} + C_4]. \tag{24}$$

Из оценок (22) и (24) вытекает справедливость первой части леммы.

Для доказательства (11) для случая $b)$ уравнение (1) умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ на $\Delta_1 \vec{v}$. Имеем

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\Delta_1 \vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \leq \|(\vec{v},\, \nabla)\vec{v}\|_{2,\,\Omega} \cdot \|\Delta_1 \vec{v}\|_{V^0(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega} \cdot \|\Delta_1 \vec{v}\|_{V^0(\Omega)}\,.$$

Далее с помощью неравенства Коши получим

$$\nu\,\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\Delta_1 \vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \leq 2\left(\|(\vec{v},\, \nabla)\vec{v}\|^2_{2,\,\Omega} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}\right).$$

При оценке нелинейного члена в правой части воспользуемся следующими неравенствами:

$$\|(\vec{v},\, \nabla)\vec{v}\,\|_{2,\,\Omega} \leq \|\vec{v}\|_{6,\,\Omega} \cdot \|\nabla\vec{v}\|_{3,\,\Omega} \leq C_{11}(3)\,\|\vec{v}\|^{3/2}_{V^1(\Omega)} \cdot \|\Delta_1 \vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)} \ \text{при} \quad n=3,$$

$$\|(\vec{v},\, \nabla)\vec{v}\,\|_{2,\,\Omega} \leq \|\vec{v}\|_{4,\,\Omega} \cdot \|\nabla\vec{v}\|_{4,\,\Omega} \leq C_{11}(2)\,\|\vec{v}\|^{3/2}_{V^1(\Omega)} \cdot \|\Delta_1 \vec{v}\|^{1/2}_{V^0(\Omega)} \ \text{при} \quad n=2.$$

Следовательно, из предыдущего соотношения вытекает, что

$$\nu\,\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta_1 \vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \leq \frac{C_{11}}{2}\|\vec{v}\|^6_{V^1(\Omega)} + \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}. \tag{25}$$

При интегрировании (25) по $t \in [0,T]$ опустим знакоопределенный член в левой части, найдем

$$\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \leq \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{C_{11}}{2\,\nu}\int_0^t \|\vec{v}(\tau)\|^6_{V^1(\Omega)}d\tau + \frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega}. \tag{26}$$

Обозначим через $y(t) \equiv \int\limits_0^t \|\vec{v}(\tau)\|^{\,6}_{V^1(\Omega)}d\tau$, тогда (26) принимает вид

$$\frac{dy}{d\,t}(\tau) \leq \left(C_1 + C_2\,y(\tau)\right)^3,$$

где $C_2 = \dfrac{C_{11}}{2\,\nu}$, $C_1 = \dfrac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}$.

Тогда из последнего дифференциального неравенства получим

$$y(t) \leq \frac{C_1}{C_2}\Big[\left(1 - 2\,C_1^2\,C_2\,t\right)^{-1/2} - 1\Big],$$

откуда с учетом основного предположения (13) имеем

$$1 - 2\,C_1^2\,C_2\,t \geq 1 - \frac{C_{11}}{\nu}\,T\,\left(\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,Q} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}\right)^2 = \rho_2,$$

если $t \in [0,\, T]$. Следовательно, из (26) находим

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \leq C_1 \cdot \rho_2^{-1/2}. \tag{27}$$

Используя оценку для стационарной задачи (13) (см. [1]) при интегрировании соотношении (25) от 0 до T, мы получим следующую оценку:

$$\|\vec{v}\|^2_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega))} \le C_\Omega^2 \left(\left\|\vec{f}\right\|^2_{L^2(Q)} + C_{11}\cdot (C_1\,\rho_2^{-1/2})^3\, T + \nu\,\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} \right) \le C_5. \tag{28}$$

Для получения оценки на $\vec{v}_t$ делаем те же последовательности действий, как при выводе для случая $a)$, следовательно, получим

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\vec{v}_t\|^2_{V^0(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega} + C_{11}^2\,\|\vec{v}\|^3_{V^1(\Omega)}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}. \tag{29}$$

Откуда легко получить требуемую оценку

$$\|\vec{v}_t\|^2_{L^2(Q)} \le C_6. \tag{30}$$

Тем самым, оценки (27), (28), (30) составляют вторую часть, т.е.случай $b)$ леммы 1.2. Лемма доказана.

Решения **задачи протекания 2** обладают следующими свойствами.

Лемма 1.3. *Пусть* $\vec{f}(x,t)\in L^2(Q),\,\vec{v}_0(x)\in V^1(\Omega)$. *Тогда для гладкого решения* ***задачи протекания 2*** *имеет место априорная оценка (11) при следующих случаях:* (i) *– при* $n=2$ *безусловно;* (ii) *– при* $n=3$, *если выполнено (13);* (iii) *– при* $n=3$, *если выполняется следующее условие малости данных задачи:*

$$\rho_3 \equiv 1 - 2\,C(\Omega)\cdot\,\delta\left[\frac{1}{\nu}\left\|\vec{f}\right\|^2_{2,\,\Omega} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)}\right]^{1/2} > 0, \tag{31}$$

где $C(\Omega)$ *– постоянная из соотношения (18),* δ *– константа неравенства вложения* $W^{2,2}(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$ *при* $n=3$.

Доказательство. Вывод оценок решения **задачи 2** аналогичен выводам оценок леммы 1.2. (см. [1]), поэтому ограничимся лишь кратким изложением схемы рассуждений.

Используя форму Громэки-Лэмба, перепишем (1) в эквивалентном виде

$$\vec{v}_t + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{v} + \nabla\left(p + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) = \nu\,\Delta\,\vec{v} + \vec{f}, \quad \text{в} \quad Q. \tag{32}$$

После умножения уравнения (32) скалярно на вектор $\vec{v}$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} + \nu\,\|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} \le \left\|\vec{f}\right\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\vec{v}\|_{V^0(\Omega)}.$$

Откуда теми же рассуждениями получим (16) и (17).

Доказательство случаев (i)-(ii) аналогично доказательству леммы 1.2. с той лишь разницей, что вместо уравнения (1) участвует уравнение (32).

Для доказательства случая (iii) уравнение импульса (32) умножим скалярно на $\Delta_1\,\vec{v}$ в $L^2(\Omega)$. Оценим отдельно нелинейный член следующим образом:

$$|(\mathrm{rot}\,\vec{v}\times\vec{v},\,\Delta_1\vec{v})| \le \max_{\Omega}|\vec{v}|\cdot\|\mathrm{rot}\,\vec{v}\|_{2,\,\Omega}\cdot\|\Delta_1\vec{v}\|_{V^0(\Omega)} \le C_7\,\|\Delta_1\vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)}\cdot\|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}, \tag{33}$$

где $C_7 = C_\Omega \cdot \delta$.

Таким образом, используя (33), получим

$$\nu \frac{d}{dt} \|\vec{v}\|^2_{V^1(\Omega)} + \Big(1 - 2\, C_7 \|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)}\Big)\ \|\Delta_1 \vec{v}\|^2_{V^0(\Omega)} \le \Big\|\vec{f}\Big\|^2_{2,\,\Omega}. \tag{34}$$

С подобными рассуждениями, как при получении оценок леммы 1.2., установим из (34) оценку

$$\max_{0 \le t \le T} \|\vec{v}\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}\|_{L^2(0,\,T;\,W^{2,\,2}(\Omega))} \le C_8.$$

После этого из равенства, подобного (29), следует оценка

$$\|\vec{v}_t\|_{2,\,Q} \le C_9.$$

Таким образом, лемма 1.3. доказана.

1.3. Теоремы существования. Перейдем теперь к доказательству разрешимости **задач протекания 1,2**. Для этого будем использовать **метод Фаэдо-Галеркина.**

В качестве базиса в гильбертовом пространстве $V^2(\Omega) \equiv W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega)$ возьмем собственные функции оператора Δ_1 с **нестандартными граничными условиями**, которые, как это установлено в ([1], см. лемму 1.5), образуют ортонормированную систему в $V^0(\Omega)$ и являются ортогональными в пространстве $V^1(\Omega)$.

Рассмотрим систему **галеркинских приближений** для 2D-3D системы Навье-Стокса (1). Пусть $\{\vec{w}_j(x),\ j = 1, 2, ...\}$ – полная, линейно независимая система в $V^0(\Omega)$, **галеркинское приближение** для $\vec{v}(x,t)$ построим в следующем виде:

$$\vec{v}_N = \vec{v}_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_{jN}(t) \vec{w}_j(x), \tag{35}$$

где $c_{jN}(t),\ j = 1, 2, ..., N,\ t \in [0,\, T]$, – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из **галеркинских приближений** для (1):

$$\frac{d}{dt} c_{kN} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{iN}\, c_{jN}\, a_{i\,j\,k} + c_{kN}\, \nu\ a_k = f_k(t),\ \ k = 1, 2, ..., N, \tag{36}$$

$a_{i\,j\,k} = (\,(\vec{w}_i, \nabla)\, \vec{w}_j,\, \vec{w}_k)$ в **задаче 1**, $a_{ijk} = (\,\vec{w}_i \times \mathrm{rot}\, \vec{w}_j,\, \vec{w}_k)$ в **задаче 2**; $f_k = \Big(\vec{f}, \vec{w}_j\Big)$; $a_k = -\lambda_k$, λ_k – собственное число оператора Δ_1, соответствующее собственной функции $\vec{w}_k$. Начальные значения $c_{kN}(0)$ определяются из разложения вектор-функций $\vec{v}_0(x)$ в ряд Фурье:

$$c_{kN}(0) = (\vec{v}_0,\, \vec{w}_k)\,,\ k = 1, 2, ..., N. \tag{37}$$

Сформулируем основные утверждения, справедливость которых установим далее с помощью **метода Фаэдо-Галеркина.**

Теорема 1.1. *Пусть* $\vec{f}(x,t) \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$ *и выполнено* (12) *или* (13). *Тогда* ***задача протекания 1*** *имеет единственное решение*

$$\vec{v}(x,t) \in L^2(0,\,T;\,V^2(\Omega)) \cap W^{1,\,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega)),\ \nabla p \in L^2(0,\,T; G(\Omega)).$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\vec{f}(x,t) \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$. *Тогда в случае* $n = 2$, *то есть в плоско-паралельном движении жидкости,* ***задача протекания 2*** *имеет единственное решение*

$$\vec{v}(x,t) \in L^2(0,\,T;\,V^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega)),\ \nabla p \in L^2(Q). \tag{38}$$

В случае $n = 3$ **задача 2** однозначно разрешима в классе функций (38) "в малом", то есть при наличии одного из условий (13), либо (31).

Прежде всего отметим, что **единственность решений задач 1, 2** в функциональном классе $\vec{v}(x,t) \in L^2(0,\,T;\,W^{2,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,\,T;\,L^2(\Omega))$ доказывается на основе соотношения, получающегося домножением уравнения для разности $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}$ двух возможных решений на $\vec{u}$ и интегрированием по области Q.

Доказательство существования решения проведем для одного конкретного случая, поскольку для других все рассуждения почти не меняются. Пусть, например, в теореме 1.1. имеет место соотношение (12).

Поскольку все члены в системе (36) зависят от неизвестных c_{iN} гладким образом, то для разрешимости задачи (36), (37) на всем интервале $[0,\,T]$ достаточно убедиться в априорной ограниченности c_{iN}, $i = 1,2,...,N$.

Для этого умножим уравнение для c_{kN} в системе (36) на c_{kN} и просуммируем по k от 1 до N. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\|\vec{v}_N\|^2_{V^0(\Omega)} + \nu\,\|\vec{v}_N\|^2_{V^1(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} (\,(\vec{v}_N,\,\nabla)\,\vec{v}_N,\,\vec{v}_N)\,dx = \left(\vec{f},\,\vec{v}_N\right)_{2,\,\Omega}. \tag{39}$$

Так как для $\vec{v}_N(0)$ и $\vec{f}$ имеет место неравенство (12), поскольку $\|\vec{v}_N(0)\|_{V^0(\Omega)} \leq \|\vec{v}_0\|_{V^0(\Omega)}$, то, действуя так же как в лемме 1.2, получим оценки (16), (17):

$$\begin{aligned}&\max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}_N\|_{V^0(\Omega)} = \max_{0\leq t\leq T}\left[\sum_{i=1}^{N}(c_{iN})^2\right]^{1/2} \leq C_{10}\,,\ N = 1,2,...,\\ &\|\vec{v}_N\|_{L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))} \leq C_{11}\,,\ N = 1,2,...\end{aligned} \tag{40}$$

Установим, что для приближений $\vec{v}_N$ имеет место оценка (11), равномерная по N. После умножения уравнения для c_{kN} на $\dfrac{dc_{kN}}{dt}$ и на $\lambda_k \cdot c_{kN}$, суммируя полученные выражения по k от 1 до N, для $\vec{v}_N$ будем иметь соотношения (19), (20), из которых точно так же, как в лемме 1.2., вытекает оценка

$$\|\partial_t\vec{v}_N\|_{L^2(\Omega)} + \max_{0\leq t\leq T}\|\vec{v}_N\|_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}_N\|_{\,L^2(0,\,T;\,W^{2,\,2}(\Omega))} \leq C_{12}\,, \tag{41}$$

равномерная по $N = 1,\,2,...$

Из априорных оценок (40), (41) следует, что из последовательности галеркинских приближений $\{\,\vec{v}_N\}$ можно выделить последовательность, которую ради удобства обозначим по-прежнему через $\{\,\vec{v}_N\}$, такую, что

$$\begin{aligned}&\vec{v}_N \to \vec{v} \quad \star-\text{слабо в}\quad L^\infty(0,\,T;\,V^1(\Omega)),\\ &\vec{v}_N \to \vec{v} \quad \text{слабо в}\quad W^{1,2}(0,\,T;\,V^0(\Omega)),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\vec{v}_N \to \vec{v} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))$$

при $N \to \infty$.

Пусть $\vec{\varphi}(x,t) \in L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))$. Рассмотрим функцию $\vec{\varphi}_S(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{S} (\vec{\varphi},\,\vec{w}_i)\,\vec{w}_i = \sum\limits_{i=1}^{S} \alpha_i\,\vec{w}_i$. Умножим каждое из равенств (36) на соответствующее α_k, считая $N > S$ и $\alpha_j = 0,\ j > S$, результаты сложим по всем k от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. В результате получим

$$(\partial_t\vec{v}_N + (\vec{v}_N,\nabla)\,\vec{v}_N\,,\,\vec{\varphi}_S) + \nu\,(\vec{v}_N\,,\,\vec{\varphi}_S)_{L^2(0,\,T;V^1(\Omega))} = \left(\vec{f},\,\vec{\varphi}_S\right)_{2,\,\Omega}. \tag{43}$$

Из соотношений (42) и оценки (41) вытекает, что равенство (43) справедливо для функции $\vec{v}$ и произвольной $\varphi \in L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))$.

После применения формулы Гаусса-Остроградского во втором члене равенства (43), будем иметь тождество

$$\left(\partial_t\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\,\vec{v} - \nu\,\Delta\vec{v} - \vec{f},\,\vec{\varphi}\right) = 0$$

для любой $\vec{\varphi} \in L^2(0,\,T;\,V^1(\Omega))$, а следовательно, и для всех $\varphi \in L^2(0,\,T;\,V^0(\Omega))$. Откуда ввиду разложения $L^2(Q) = L^2(0,\,T;\,V^0(\Omega)) \oplus L^2(0,\,T;\,G(\Omega))$ найдется единственный элемент $\nabla p \in L^2(0,\,T;\,G(\Omega))$ такой, что

$$\partial_t\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\,\vec{v} - \nu\,\Delta\vec{v} - \vec{f} = -\nabla p \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Замечание 1.1. *Если область* Ω *такова, что оценка* (18) *не верна, то на основе неравенств* (40) *можно доказать существование слабого решения* **задачи 2** *в классе функций, имеющих конечную энергетическую норму*

$$\|\vec{v}\|_Q \equiv \sup_{0\le t\le T} \|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\,\vec{v}\|_{L^2(Q)}\,.$$

Причем в плоском случае $n = 2$ *это решение единственно.*

Замечание 1.2. *Условие* (13) *в теоремах* 1.1., 1.2. *означает, что либо малы* $\left\|\vec{f}\right\|_{L^2(Q)}$ *и* $\|\vec{v}_0\|_{V^1(\Omega)}$, *либо мал интервал существования решения.*

Цитированная литература

1.**Абылкаиров У.У.** //Математический журнал. 2005. Vol. 5, №2 (16).

2. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

Поступила в редакцию 04.03.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 12—16*

УДК 517.5

ВСПЛЕСК-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

Д. Б. Базарханов

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы, ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Здесь получены характеризации для некоторых функциональных пространств обобщенной положительной смешанной гладкости, определяемых с помощью (смешанных) весовых норм гладких двоичных разложений их преобразований Фурье, в терминах всплеск – представлений.

1. Введение. В предлагаемой работе рассматриваются функциональные пространства обобщенной положительной смешанной гладкости $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. Здесь ϵ — (произвольное) разбиение множества индексов $e_d = \{1, \ldots, d\}$ на n $(\le d)$ непустых множеств (т.е. $e_d = \cup_{i=1}^n e^{(i)}, e^{(i)} \cap e^{(k)} = \varnothing$ при $1 \le i \ne k \le n$, $e^{(i)} \ne \varnothing, d_i := |e^{(i)}|, 1 \le i \le n, \sum_{i=1}^n d_i = d$), $\mathbf{s} \in (0,\infty)^n$, и вектор $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_{n+d})$ образован смешением векторов $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$ и $\mathbf{q} \in (1,\infty)^n$ в (произвольно) фиксированном порядке, при котором p_j будет левее p_{j+1} $(1 \le j < d)$, а q_i — левее q_{i+1} $(1 \le i < n)$.

Ряд эквивалентных (квази)нормировок для $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ (в частности, использующие атомарные, молекулярные представления и так называемое $\varphi-$преобразование), а также подробные замечания исторического характера, касающиеся этих пространств, приведены в [**?**] (в работе [**?**] допускались $\mathbf{p} \in (0,\infty)^d$ и $\mathbf{q} \in (0,\infty)^n$).

В разделе 2 дается определение пространств $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. В разделе 3 приводится специальная конструкция (учитывающая разбиение ϵ) базиса всплесков $\Psi^{\mathbf{s},\,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ для $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{p} \in (1,\infty)^d$, использующая $([s_i]+1)$-регулярные d_i-мерные *кратномасштабные аппрокси- мации*, $i = 1, \ldots, n$. Раздел 4 содержит основной результат работы — теорему представления элементов пространства $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ по системе $\Psi^{\mathbf{s},\,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$, в которой также приводится их нормировка, использующая коэффициенты всплеск-представления, эквивалентная исходной.

Введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых, $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, как обычно, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^d x_j y_j$ — скалярное произведение и $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ — длина вектора $\mathbf{x}$, кроме того, запись $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ $(\mathbf{x} < \mathbf{y})$ будет

Keywords: *wavelet representation, function space, mixed smoothness*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45,26B40

означать, что $x_i \le y_i$ $(x_i < y_i)$ для $j = 1, \ldots, d$; для мультииндекса $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим $|\alpha| = \sum_1^d \alpha_j$, $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$,

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ j = 1, \ldots, d.$$

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на $\mathbb{R}^d$ соответственно; $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ с компактными носителями. Для $t \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ положим $g_t(\mathbf{x}) = t^{-d} g(\mathbf{x}/t)$, $g_k(\mathbf{x}) = g_{2^{-k}}(\mathbf{x})$, $\hat{f}$ — преобразование Фурье распределения f, а $f * g$ — свертка f и g.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}, n \le d$; для произвольных $e \subset e_d = \{1, \ldots, d\}$ $(e = \{j_1, \ldots, j_{|e|}\}$, $1 \le j_1 < \ldots < j_{|e|} \le d$; здесь $|e|$ — количество элементов $e)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим $\mathbf{x}(e) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{|e|}}) \in \mathbb{R}^{|e|}$, $\mathbf{x}(e)^{\boldsymbol{\alpha}(e)} = x_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots x_{j_{|e|}}^{\alpha_{j_{|e|}}}$ и $\partial^{\boldsymbol{\alpha}(e)} = \partial_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdots \partial_{j_{|e|}}^{\alpha_{j_{|e|}}}$.

Далее, фиксируем разбиение $\boldsymbol{\epsilon} = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ множества e_d (т.е. $e_d = \cup_{i=1}^n e^{(i)}, e^{(i)} \cap e^{(k)} = \varnothing$ при $1 \le i \ne k \le n$, $e^{(i)} \ne \varnothing, d_i := |e^{(i)}|, 1 \le i \le n, \sum_{i=1}^n d_i = d$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n))$. Для удобства для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ пишем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(e^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}, 1 \le i \le n$, а также $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(e), \mathbf{x}(e_d \setminus e))$, где $e \subset e_d$.

Для произвольных $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n = \{1, \ldots, n\}$ $(\mathbf{e} = \{i_1, \ldots, i_{|\mathbf{e}|}\}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_{|\mathbf{e}|} \le n)$ и $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ положим как выше $\mathbf{t}(\mathbf{e}) = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{|\mathbf{e}|}}) \in \mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}$.

Запись $A_1 \ll A_2$ будет означать, что $A_1 \le C A_2$, где константа C, вообще говоря, зависит от всех фиксированных параметров, а $A_1 \approx A_2$ — что одновременно $A_1 \ll A_2$ и $A_2 \ll A_1$.

2. Определение пространства $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. Для $p \in (0, \infty]$ пусть, как обычно, $l_p = l_p(\mathbb{N}_0)$ — пространство числовых (комплексных) последовательностей $\{b_k\} = \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ с конечной (квази)нормой $\| \, b_k \mid l_p \, \| = \| \, \{b_k\} \mid l_p \, \|$, где

$$\| \, b_k \mid l_p \, \| = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} | \, b_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \in (0, \infty)), \qquad \| \, b_k \mid l_\infty \, \| = \sup \, \{| \, b_k| \ : \ k \in \mathbb{N}_0\};$$

$L_p = L_p(\mathbb{R})$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, суммируемых в p-й степени (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{R}$, с конечной (квази)нормой $\| \, f \mid L_p \, \|$, где

$$\| \, f \mid L_p \, \| = \left\{ \int_{\mathbb{R}} | \, f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \in (0, \infty)), \qquad \| \, f \mid L_\infty \, \| = \text{ess sup} \, \{ \, | \, f(x)| \ : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ради удобства будем еще использовать общее обозначение $\mathcal{L}_p$ для пространств $l_p(\mathbb{N}_0)$ и $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in (0, \infty]^d$ и $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in (0, \infty]^n$. Тогда $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ с конечной (квази)нормой

$$\| \, f \mid L_{\mathbf{p}} \| = \| \, (\cdots \, \| \, f \mid L_{p_1} \| \, \cdots) \mid L_{p_d} \|$$

(здесь (квази)норма $\| \cdot \mid L_{p_j} \|$ вычисляется по x_j, $1 \le j \le d$), а $l_{\mathbf{q}}(\mathbb{N}_0^n)$ — пространство кратных числовых (комплексных) последовательностей $\{b_{\mathbf{m}}\} = \{b_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной (квази) нормой

$$\|\{b_{\mathbf{m}}\} \mid l_{\mathbf{q}}\| = \|\{\cdots \, \|\{b_{\mathbf{m}}\}_{m_1 \in \mathbb{N}_0} \mid l_{q_1}\| \, \cdots \}_{m_n \in \mathbb{N}_0} \mid l_{q_n}\|.$$

Теперь для векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ образуем вектор $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_{n+d})$, расположив координаты векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в строку в (произвольно) фиксированном порядке, при котором p_j будет левее p_{j+1} $(1 \le j < d)$, а q_i — левее q_{i+1} $(1 \le i < n)$. Через $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$ обозначим пространство кратных последовательностей $\{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\} = \{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n}$ измеримых функций $f_{\mathbf{k}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$, с конечной (квази)нормой

$$\| \{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\} \mid \mathcal{L}_{\mathbf{r}} \| = \| (\cdots \| f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \mid \mathcal{L}_{r_1} \| \cdots) \mid \mathcal{L}_{r_{n+d}} \|$$

(здесь $\mathcal{L}_{r_l} = L_{p_j}(\mathbb{R})$ и (квази)норма $\| \cdot \mid \mathcal{L}_{r_l} \| \equiv \| \cdot \mid L_{p_j} \|$ вычисляется по переменной x_j при $r_l = p_j$, и $\mathcal{L}_{r_l} = l_{q_i}(\mathbb{N}_0)$ и (квази)норма $\| \cdot \mid \mathcal{L}_{r_l} \| \equiv \| \cdot \mid l_{q_i} \|$ вычисляется по индексу k_i при $r_l = q_i$).

Вектор $\mathbf{r}$ может быть записан в виде $\mathbf{r} = (\mathbf{p}(e^{\langle 1\rangle}), \mathbf{q}(\mathbf{e}^{\langle 1\rangle}), \dots, \mathbf{p}(e^{\langle m\rangle}), \mathbf{q}(\mathbf{e}^{\langle m\rangle}))$, где $2 \le m \le n$, $e^{\langle k\rangle} = \{j_{k-1}+1, \dots, j_k\}$, $\mathbf{e}^{\langle k\rangle} = \{i_{k-1}+1, \dots, i_k\}$, $1 \le k \le m$, $0 = j_0 \le j_1 < \dots < j_m = d, 0 = i_0, 1 \le i_1 < \dots < i_{m-1} \le i_m = n$, причем множества $e^{\langle 1\rangle}$ или $\mathbf{e}^{\langle m\rangle}$ могут быть пустыми (соответственно при $j_1 = 0$ или $i_{m-1} = n$). Тогда (квази)норма пространства $\mathcal{L}_{\mathbf{r}}$ может быть записана в виде

$$\| \cdot \mid \mathcal{L}_{\mathbf{r}} \| = \| (\cdots (\| \cdot \mid L_{\mathbf{p}(e^{\langle 1\rangle})}(\mathbb{R}^{|e^{\langle 1\rangle}|}) \|) \cdots) \mid l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}^{\langle m\rangle})}(\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^{\langle m\rangle}|}) \|. \tag{1}$$

Выберем функции $\varphi_i^\circ, \varphi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d_i}),\ i = 1, \dots, n$, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi_i^\circ} \subset \{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^{d_i} : |\boldsymbol{\xi}_i| < 2\}, \quad |\hat{\varphi}_i^\circ(\boldsymbol{\xi}_i)| > 0 \ \text{ при } \ |\boldsymbol{\xi}_i| \le \frac{5}{3}, \tag{2}$$

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi}_i \subset \{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^{d_i} : \frac{1}{2} < |\boldsymbol{\xi}_i| < 2\}, \quad |\hat{\varphi}_i(\boldsymbol{\xi}_i)| > 0 \ \text{ при } \ \frac{3}{5} \le |\boldsymbol{\xi}_i| \le \frac{5}{3}. \tag{3}$$

Положим $\varphi_{i0}(\mathbf{x}_i) = \varphi_i^\circ(\mathbf{x}_i)$, $\varphi_{ij}(\mathbf{x}_i) = 2^{jd_i}\varphi_i(2^j\mathbf{x}_i)$ $(j \in \mathbb{N})$,

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{ik_i}(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n. \tag{4}$$

Определение 1. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in (0,\infty)^d$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (0,\infty)^n$. *Пространство* $\mathcal{ML} = \mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon} = \mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ *состоит из всех распределений* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, *для которых конечна величина*

$$\| f \mid \mathcal{ML} \| = \| f \mid \mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d) \| = \| \{2^{(\mathbf{s},\mathbf{k})}\varphi_{\mathbf{k}} * f\} \mid \mathcal{L}_{\mathbf{r}} \|.$$

Замечание 1. Стандартные рассуждения показывают, что функционал $\| f \mid \mathcal{ML} \|$ является (квази)нормой, а пространство $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}$, снабженное этой (квази)нормой, является (квази)банаховым. Если в определении 1 рассматривать случай $\mathcal{L}_{\mathbf{r}} = l_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}})$ (соответственно $\mathcal{L}_{\mathbf{r}} = L_{\mathbf{p}}(l_{\mathbf{q}})$), то получим пространство Никольского - Бесова (соответственно Лизоркина - Трибеля) обобщенной смешанной гладкости.

3. Система всплесков $\Phi^{\mathbf{d},\boldsymbol{\tau},\epsilon,\mathbf{x}}(\mathbb{R}^d)$. Напомним определение *кратномасштабной аппроксимации* (КМА) для $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Последовательность $\mathcal{V} = \{ V_k \}_{k\in\mathbb{Z}}$ подпространств пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ называется КМА, если

i) $V_k \subset V_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$;

ii) $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k} = L_2(\mathbb{R}^d)$;

iii) $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} V_k = \{ 0 \}$;

iv) $f(\mathbf{x}) \in V_k \Leftrightarrow f(2\mathbf{x}) \in V_{k+1},\ k \in \mathbb{Z}$;

v) существует функция $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такая, что система $\{ \phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) \}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция ϕ называется *масштабной функцией* КМА $\mathcal{V}$. КМА $\mathcal{V}$ называется $\tau-$регулярной ($\tau \in \mathbb{N}_0$), если ее масштабная функция ϕ может быть выбрана таким образом, что

$$|\partial^\alpha \phi(\mathbf{x})| \leqslant c_m(1+|\mathbf{x}|)^{-m}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

для любого $m \in \mathbb{N}_0$ и каждого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^d: \ |\alpha| \leqslant \tau$.

Согласно теории всплесков (см., например, [2, ch.3, Th.2]) существуют 2^d-1 функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^d-1}$, называемые *всплесками, порожденными* КМА $\mathcal{V}$, такие, что

$$|\partial^\alpha \varphi_l(\mathbf{x})| \leqslant c_m(1+|\mathbf{x}|)^{-m}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

для любого $m \in \mathbb{N}_0$ и каждого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^d: \ |\alpha| \leqslant \tau$ ($l=1,\ldots,2^d-1$), а система $\{ \varphi_l(\mathbf{x}-\mathbf{k}) \}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, l=1,\ldots,2^d-1}$ образует ортонормированный базис в $W_0 = V_1 \ominus V_0$, ортогональном дополнении пространства V_0 в V_1. Как следствие, система ($d-$мерных) всплесков $\Phi \equiv \Phi(d,r,\mathbf{x}) \equiv \{ \phi(\mathbf{x}-\mathbf{m}), 2^{jd/2}\varphi_l(2^j\mathbf{x}-\mathbf{k}) \}_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d, \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, j\in\mathbb{N}_0}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Выберем τ_i-регулярные КМА $\mathcal{V}_i$ (для $L_2(\mathbb{R}^{d_i})$) и соответствующие им масштабные функции ϕ^i и всплески $\varphi^i_{l_i}$, $l_i = 1,\ldots,2^{d_i-1}$ ($i=1,\ldots,n$). Нам будет удобно использовать иную нумерацию функций систем $\Phi(d_i, r_i, \mathbf{x}_i)$, использующую диадические кубы из $\mathbb{R}^{d_i}$.

Обозначим через $\mathcal{D}_i$ совокупность всех диадических кубов Q^i из $\mathbb{R}^{d_i}$, объем $|Q^i|$ которых не превосходит 1 ($i=1,\ldots,n$), пусть $Q^i \in \mathcal{D}_i$,

$$Q^i = Q^i_{k_i\mathbf{m}_i} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_i} \ : \ m_j \le 2^{k_i}x_j < m_j+1, j \in e^{(i)}\} \ (k_i \in \mathbb{N}_0, \mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^{d_i}), \tag{5}$$

положим $\phi^i(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_i) \equiv \varphi^i_{0,Q^i}(\mathbf{x}_i) \equiv \varphi^i_{0,Q^i_{0\mathbf{m}_i}}(\mathbf{x}_i)$ ($\mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^{d_i}$), $2^{d_ik_i/2}\varphi^i_l(2^{k_i}\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_i) \equiv \varphi^i_{l_i,Q^i}(\mathbf{x}_i) \equiv \varphi^i_{l_i,Q^i_{k_i\mathbf{m}_i}}(\mathbf{x}_i)$ ($\mathbf{m}_i \in \mathbb{Z}^{d_i}, k_i \in \mathbb{N}_0, l_i = 1,\ldots,2^{d_i}-1$).

Тензорное произведение $\Phi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, \epsilon, \mathbf{x})$ систем $\Phi(d_i, \tau_i, \mathbf{x}_i)$, построенных как выше, ($i=1,\ldots,n$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$) назовем кратной ($\mathbf{d}$-мерной) системой всплесков.

Через $\mathcal{D}^\epsilon_d$ обозначим совокупность всех диадических параллелепипедов $\mathcal{Q}$ из $\mathbb{R}^d$ вида

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathbf{x}_i \in Q^i, i=1,\ldots,n\}, \tag{6}$$

где $Q^i \in \mathcal{D}_i, i=1,\ldots,n$; положим $\mathcal{Q} = Q^1 \times \cdots \times Q^n$, $|\mathcal{Q}| = \prod_{1=1}^n |Q^i|$.

Кратная система всплесков $\Phi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, \epsilon, \mathbf{x})$ может быть записана в следующем виде

$$\Phi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, \epsilon, \mathbf{x}) \equiv \Bigg\{ \varphi_{\mathbf{l},\mathcal{Q}}(\mathbf{x}) \equiv \prod_{i=1}^n \varphi^i_{l_i,Q^i}(\mathbf{x}_i),$$

$$l_i = 0,\ldots,2^{d_i-1}, \text{ если } |Q^i| = 1, \text{ и } l_i = 1,\ldots,2^{d_i-1}, \text{ если } |Q^i| < 1, \ \mathcal{Q} \in \mathcal{D}^\epsilon_d \Bigg\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_d) \in (1,\infty)^d$. *Тогда кратная система всплесков* $\Phi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\tau}, \epsilon, \mathbf{x})$ *является безусловным базисом для пространства* $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Замечание 2. Другой вариант этой теоремы и достаточно подробное обсуждение приведены в [4] (см. там теорему 1 и замечание 1). Хотя условия (быстрого) убывания на бесконечности для масштабных функций и всплесков, определяемых КМА $\mathcal{V}_i$ ($i=1,\ldots,n$), предполагаемые в настоящей работе, заведомо сильнее условий из [4], тем не менее сформулированная здесь теорема 1 не является частным случаем теоремы 1 из [4], поскольку в первой (в отличие от второй) допускаются КМА $\mathcal{V}_i$, порождающие "несепара- бельные"(d_i-мерные) системы всплесков.

3. Представление $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ посредством системы всплесков $\Phi(\mathbf{d},\boldsymbol{\tau},\epsilon,\mathbf{x})$. Как обычно, χ_A — характеристическая функция множества $A\subset\mathbb{R}^d$.

Введем следующее пространство числовых (комплексных) последовательностей $\{a_{\mathcal{Q}}\} = \{a_{\mathcal{Q}}\}_{\mathcal{Q}\in\mathcal{D}_d^{\epsilon}}$, "занумерованных"с помощью элементов $\mathcal{D}_d^{\epsilon}$.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_d)\in(0,\infty)^d$, $\mathbf{q}=(q_1,\dots,q_n)$, $\mathbf{s}=(s_1,\dots,s_n)\in(0,\infty)^n$. *Пространство* $\Lambda_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}$ *состоит из всех последовательностей* $\{a_{\mathcal{Q}}\}_{\mathcal{Q}\in\mathcal{D}_d^{\epsilon}}$, *для которых конечна (квази) норма*

$$\|\ \{a_{\mathcal{Q}}\}\mid\Lambda_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}\| = \|\ \{2^{(\mathbf{k},\mathbf{s})}\sum_{\mathcal{Q}:|Q^i|=2^{-k_i d_i},i\in\mathbf{e}_n}|\mathcal{Q}|^{-1/2}a_{\mathcal{Q}}\chi_{\mathcal{Q}}(\cdot)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^n}\mid\mathcal{L}_{\mathbf{r}}\ \|.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{p}\in(1,\infty)^d$, $\mathbf{q}\in(1,\infty)^n$, $\mathbf{s}\in(0,\infty)^n$, $\mathbf{r}\in\mathbb{N}^n$ *таковы, что* $\tau_i>s_i$, $i=1,\dots,n$. *Тогда кратная система всплесков* $\Phi(\mathbf{d},\boldsymbol{\tau},\epsilon,\mathbf{x})$ *является безусловным базисом для пространства* $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$. *Более того, функция* $f\in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ *тогда и только тогда, когда* $\{\ a_{\mathcal{Q}}\equiv\sum_{l_1=[2^{|Q^1|}-1]}^{2^{d_1}-1}\cdots\sum_{l_n=[2^{|Q^n|}-1]}^{2^{d_n}-1}|\langle\ f,\ \varphi_{\mathbf{l},\mathcal{Q}}\ \rangle\ \}\in\Lambda_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}$, *при этом*

$$\|\ f\mid\mathcal{ML}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}\|\ \ll\ \|\ \{a_{\mathcal{Q}}\}\mid\Lambda_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s},\epsilon}\|.$$

Замечание 3. Отметим, что частный случай этой теоремы для пространств Никольского - Бесова и Лизоркина - Трибеля обобщенной смешанной гладкости и кратной системы всплесков Мейера получен ранее в работе [3], там же приведено обсуждение предшествующих работ по базисам всплесков в функциональных пространствах, которые имеют непосредственное отношение к нашим (см. там замечание 3). В этой связи укажем еще монографии [2], [5], [8].

Цитированная литература

1. **Базарханов Д. Б.** // Тр. МИАН. 2005. Т.248. С.24-37.
2. **Meyer Y.** Wavelets and operators, Cambridge Univ. Press 1992.
3. **Базарханов Д.Б.** // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. 2004. №1. с.14-21.
4. **Базарханов Д.Б.** // Матем. ж. Алматы. 2004. Т.4, №1. с.17-20.
5. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets, SIAM, 1991.
6. **Frazier M., Jawerth B.** //J.Funct.Anal. 93(1990),34—170.
7. **Frazier M., Jawerth B.,Weiss G.** // CBMS Reg.Conf.Ser. Math., 79. 1991.
8. **Кашин Б. С., Саакян А. А.** Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.

Поступила в редакцию 04.03.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 17—25*

УДК 517.51

ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Байарыстанов, А. А. Калыбай

Институт математики МО и Н РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 aigerim_k@academset.kz

1. Введение. Граничные задачи с данными в особых точках для обыкновенных дифференциальных уравнений изучены довольно мало. Это связано с тем, что в особой точке дифференциального уравнения предельные значения решения и его производных не существуют, а если даже они существуют, то они могут быть мало информативными для выделения индивидуального решения. Поэтому характеристика поведения решения в окрестности особой точки требует существенно других понятий, чем предельные значения решения и его производных в этой точке. Так, Л.Д. Кудрявцев (см., напр., [1-4]) предложил для уравнения

$$x^{(n)}(s) = f(s, x, x', ..., x^{(n-1)}),\ s \in [t_0, +\infty),\ t_0 > 0 \tag{1}$$

рассматривать начальные данные в бесконечной точке как стабилизацию решения уравнения (1) к заданному алгебраическому многочлену $P_{n-1}(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_{n-1}s^{n-1}$ при стремлении аргумента к бесконечности:

$$\lim_{s\to\infty}[x(s) - P_{n-1}(s)]^{(k)} = 0,\ k = 0, 1, ..., n-1 \tag{2}$$

и решал вопрос существования и единственности задачи (1) – (2).

В работе [5] Б.Л. Байдельдинов и Р. Ойнаров заменой независимой переменной $s = \frac{1}{t}$ получили возможность характеризовать поведение функции уже не в окрестности бесконечности, а в окрестности конечной сингулярной точки ноль. При этом замена переменной дает переход от операции дифференцирования функции к следующей дифференциальной операции:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = -s^{-2}\frac{dx}{dt} = (-1)^1 t^2 \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(-t^2\frac{dx}{dt}\right) = -t^2\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -t^2\frac{d}{dt}(-1)t^2\frac{dx}{dt} = (-1)^2t^2\frac{d}{dt}t^2\frac{dx}{dt},$$

$$\cdots$$

Keywords: *ordinary differential equation, initial conditions, singularity at point*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

$$\frac{d^n x}{ds^n} = (-1)^n t^2 \frac{d}{dt} t^2 \frac{d}{dt} ... t^2 \frac{dx}{dt}.$$

Если в полученных выражениях положить вместо степени "2" любое действительное число, а также умножить саму функцию на некоторую степенную функцию до первого дифференцирования, то, введя соответствующие обозначения, получим

$$D_{\overline{\alpha}}^{0} x(t) \equiv t^{\alpha_0} x(t),$$

$$D_{\overline{\alpha}}^{i} x(t) = t^{\alpha_i} \frac{d}{dt} t^{\alpha_{i-1}} \frac{d}{dt} ... t^{\alpha_1} \frac{d}{dt} t^{\alpha_0} x(t), \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in R$, $i = 0, 1, ..., n$.

Эту дифференциальную операцию $D_{\overline{\alpha}}^{i} x(t)$ будем называть $\overline{\alpha}$ – весовой производной функции $x(t)$ соответствующего порядка $i = 0, 1, ..., n$.

В настоящей работе рассматривается задача

$$D_{\overline{\alpha}}^{n} x(t) = f(t, D_{\overline{\alpha}}^{0} x, D_{\overline{\alpha}}^{1} x, ..., D_{\overline{\alpha}}^{n-1} x), \ t \in (0, t_0], \ t_0 > 0 \tag{3}$$

с непрерывной правой частью $f : (0, t_0] \times R^n \to R$ и начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} D_{\overline{\alpha}}^{k} (x(t) - P_{n-1}(t, a)) = 0, \ k = 0, 1, ..., n-1, \tag{4}$$

где

$$P_{n-1}(t, a) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \, w_i(t, t_0)$$

– многочлен по обобщенной чебышевской системе функций $w_j(t, t_0) = t^{-\alpha_0} K_{1,j}(t, t_0)$, $j = 0, 1, ..., n-1$:

$$K_{i,j}(t, t_0) = \int\limits_{t}^{t_0} t_i^{-\alpha_i} \int\limits_{t_i}^{t_0} t_{i+1}^{-\alpha_{i+1}} ... \int\limits_{t_{j-1}}^{t_0} t_j^{-\alpha_j} dt_j dt_{j-1} ... dt_i \ \text{ при } \ i \le j;$$

$$K_{i,j}(t, t_0) \equiv 1 \ \text{ при } \ i = j+1; \ K_{i,j}(t, t_0) \equiv 0 \ \text{ при } \ i > j+1.$$

Нам также понадобятся сопряженные функции $\overline{w}_j(t, t_0) = t^{-\alpha_0} \overline{K}_{1,j}(t, t_0)$, $j = 0, 1, ..., n-1$:

$$\overline{K}_{i,j}(t, t_0) = \int\limits_{t}^{t_0} t_i^{-\alpha_i} \int\limits_{t}^{t_i} t_{i+1}^{-\alpha_{i+1}} ... \int\limits_{t}^{t_{j-1}} t_j^{-\alpha_j} dt_j dt_{j-1} ... dt_i \ \text{ при } \ i \le j;$$

$$\overline{K}_{i,j}(t, t_0) \equiv 1 \ \text{ при } \ i = j+1; \ \overline{K}_{i,j}(t, t_0) \equiv 0 \ \text{ при } \ i > j+1.$$

Условие (4) означает, что функция $x(t)$ стабилизируется к обобщенному многочлену $P_{n-1}(t, a)$ при стремлении аргумента к нулю. Для удобства этот факт можно обозначить

$$x(t) \sim P_{n-1}(t, a), \ t \to 0. \tag{5}$$

В работе [6] было доказано, что условие (4) ((5)) выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_{\max} = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \gamma_i < 1$, где $\gamma_i = \alpha_n + \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} (\alpha_j - 1)$, $i = 0, 1, ..., n-2$, $\gamma_{n-1} = \alpha_n$. Более того, для всех $k = 0, 1, ..., n-1$ и $t \in (0, t_0]$ имеет место соотношение

$$D_{\overline{\alpha}}^{k} x(t) = \sum_{i=k}^{n-1} (-1)^i a_i \, K_{k+1,i}(t, t_0) + \int\limits_{0}^{t} \overline{K}_{k+1,n-1}(s, t) s^{-\alpha_n} D_{\overline{\alpha}}^{n} x(s) ds. \tag{6}$$

Для краткости примем также обозначение:

$$f(t, D_{\overline{\alpha}}^0 x(t), D_{\overline{\alpha}}^1 x(t), ..., D_{\overline{\alpha}}^{n-1} x(t)) = f(t, \overline{D_{\overline{\alpha}} x}(t)).$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $I = (0, t_0]$, $\overline{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1})$, $\gamma_i < 1$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

Пусть $CP_{\overline{\gamma}}^{n-1}(I)$ – множество всех $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых на I функций $x(t)$, каждая из которых стабилизируется при $t \to 0$ к своему обобщенному многочлену $P_{n-1,x}(t, a_x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i,x}\, w_i(t, t_0)$, с конечной нормой

$$\|x\|_{CP_{\overline{\gamma}}^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i - 1} |D_{\overline{\alpha}}^i (x(t) - P_{n-1,x}(t, a_x))\,| + \sum_{i=0}^{n-1} |a_{i,x}|.$$

Утверждение 1. $CP_{\overline{\gamma}}^{n-1}(I)$ *– банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{x_m\}$ – фундаментальная последовательность в $CP_{\overline{\gamma}}^{n-1}(I)$. Это означает, что $\forall\, l \in N$

$$\|x_{m+l} - x_m\|_{CP_{\overline{\gamma}}^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i - 1} \left| D_{\overline{\alpha}}^i \left[\left(x_{m+l}(t) - P_{n-1, x_{m+l}}(t, a_{x_{m+l}}) \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \, (x_m(t) - P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m}))\right]\right| + \sum_{i=0}^{n-1} |a_{i,x_{m+l}} - a_{i,x_m}| \to 0,\ m \to \infty.$$

Из стремления первой суммы к нулю следует, что при каждом $i = 0, 1, ..., n-1$ непрерывные и ограниченные последовательности функций

$$\left\{ t^{\gamma_i - 1} D_{\overline{\alpha}}^i (x_m(t) - P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m})) \right\}$$

являются фундаментальными в полном пространстве $C(I)$ непрерывных и ограниченных функций на I. Поэтому существуют функции $y_i(t)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, такие, что

$$t^{\gamma_i - 1} y_i(t) \in C(I) \tag{7}$$

и

$$D_{\overline{\alpha}}^i (x_m(t) - P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m}) \to y_i(t) \tag{8}$$

при $m \to \infty$ для всех $t \in I$, причем эта сходимость является равномерной на каждом сегменте $[\epsilon, t_0]$ для всех $0 < \epsilon < t_0$. Так как $D_{\overline{\alpha}}^i (x_m(t) - P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m})) \to 0$ при $t \to 0$ для всех $m \ge 1$, то

$$\lim_{t \to 0} y_i(t) = 0,\ i = 0, 1, ..., n-1. \tag{9}$$

Из стремления второй суммы к нулю в силу полноты евклидового пространства R следует, что для каждого $i = 0, 1, ..., n-1$ существуют числа a_i такие, что $a_{i,x_m} \to a_i$ при $t \to 0$. Тогда $P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m}) \to P_{n-1}(t, a)$ при $m \to \infty$ для всех $t \in I$, поэтому из (8) имеем

$$D_{\overline{\alpha}}^i x_m(t) \to y_i(t) + D_{\overline{\alpha}}^i P_{n-1}(t, a),\ m \to \infty,\ \forall\, t \in I,\ i = 0, 1, ..., n-1. \tag{10}$$

Так как

$$D_{\overline{\alpha}}^{i-1} (x_m(t) - P_{n-1,x_m}(t, a_{x_m})) = \int_0^t s^{-\gamma_{i-1}} s^{\gamma_i - 1} D_{\overline{\alpha}}^i (x_m(s) - P_{n-1,x_m}(s, a_{x_m})) ds, \tag{11}$$

$$\max_{0\le i\le n-1}\sup_{m\ge 1}\sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i-1}|D^i_{\overline{\alpha}}(x_m(t)-P_{n-1,x_m}(t,a_{x_m})|\le C<\infty$$

и

$$\int\limits_0^t s^{-\gamma_{i-1}}ds=\frac{1}{1-\gamma_{i-1}}t^{1-\gamma_{i-1}},\ i=1,...,n-1,$$

то, переходя в (11) к пределу при $m\to\infty$, имеем

$$y_{i-1}(t)=\int\limits_0^t s^{-\alpha_i}y_i(s)ds, i=0,1,...,n-1. \tag{12}$$

Положим $y(t)=t^{-\alpha_0}y_0(t)$, тогда из (12) следует, что $y_i(t)=D^i_{\overline{\alpha}}y(t)$, $i=0,1,...,n-1$. Далее, полагая $z(t)=y(t)+P_{n-1}(t,a)$, из (7) – (10) и (12) имеем $z(t)\sim P_{n-1}(t,a)$ при $t\to 0$, $\|z\|_{CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}}<\infty$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m-z\|_{CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}}=0$. Утверждение 1 доказано.

Пусть $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ – множество всех функций $x(t)$ из $CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$, сходящихся к одному и тому же многочлену $P_{n-1}(t,a)$.

Утверждение 2. *$CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ замкнуто в $CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$.*

Доказательство. Пусть $\{x_m\}\subset CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ и $x_m\to y\in CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ при $m\to\infty$.

Покажем, что $y\in CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$.

Так как

$$\|x_m-y\|_{CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}}=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0}t^{\gamma_i-1}\left|D^i_{\overline{\alpha}}[(x_m(t)-P_{n-1}(t,a))\ -\right.$$

$$\left.-\ (y(t)-P_{n-1,y}(t,a_y))]\right|+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i-a_{i,y}|\to 0,\ m\to\infty,$$

то $a_{i,y}=a_i$, $i=0,1,...,n-1$, следовательно, $y\in CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$.

Утверждение 2 доказано.

В пространстве $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ введем метрику $\forall x,y\in CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$:

$$\rho(x,y)=\|x-y\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}}=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0}t^{\gamma_i-1}|D^i_{\overline{\alpha}}(x(t)-y(t))\,|.$$

В силу утверждения 2 $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ – полное метрическое пространство. На основании (6) задача (3) – (4) ((5)) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t)=P_{n-1}(t,a)+t^{-\alpha_0}\int\limits_0^t\overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s))ds. \tag{13}$$

Рассмотрим отображение

$$Sx(t)=P_{n-1}(t,a)+t^{-\alpha_0}\int\limits_0^t\overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s))ds. \tag{14}$$

Утверждение 3. *Пусть функция $f:(0,t_0]\times R^n\to R$ непрерывна. Если*

$$A\equiv\max_{0\le i\le n-1}\sup_{0<t\le t_0}t^{\gamma_i-1}\int\limits_0^t\overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))\right|ds<\infty,\tag{15}$$

для каждого $i=0,1,...,n-1$ существуют такие функции $\varphi_i(t)\ge 0$, что

$$\lim_{t\to0}t^{\gamma_i-1}\int\limits_0^t\overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\frac{\varphi_i(s)}{s^{\gamma_i-1}}ds=0,\tag{16}$$

и для любых $s\in(0,t_0]$ и $\overline{u}\in R^n$, $\overline{v}\in R^n$ выполняется неравенство

$$|f(s,\overline{u})-f(s,\overline{v})|\le\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(s)|u_i-v_i|,\tag{17}$$

тогда оператор S, задаваемый формулой (8), переводит полное метрическое пространство $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ в себя

$$S:CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)\to CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$$

и существует такое $T:\ 0<T\le t_0$, что он является сжимающимся на интервале $I_T=(0,T]$.

Доказательство. Начнем с доказательства того, что оператор S переводит полное метрическое пространство $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ в себя.

Так как $\|P_{n-1}\|_{CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|<\infty$, то $P_{n-1}(t,a)$ принадлежит $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$. Теперь докажем, что и $SP_{n-1}(t,a)$ принадлежит $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$.

В силу (15) для каждого $i=0,1,...,n-1$ и для всех $t\in I$ имеем

$$D^i_{\overline{\alpha}}(SP_{n-1}(t,a)-P_{n-1}(t,a))=\int\limits_0^t\overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))ds<\infty.\tag{18}$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{t\to0}D^i_{\overline{\alpha}}(SP_{n-1}(t,a)-P_{n-1}(t,a))=0$, $i=0,1,...,n-1$, или $SP_{n-a}(t,a)\sim P_{n-1}(t,a)$, $t\to0$.

Вновь в силу (15) и (18) имеем

$$\|SP_{n-1}\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)}=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0}t^{\gamma_i-1}|D^i_{\overline{\alpha}}(SP_{n-1}(t,a)-P_{n-1}(t,a))|=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0}t^{\gamma_i-1}\left|\int\limits_0^t\overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))ds\right|\le nA<\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что элемент $P_{n-1}(t,a)$ из пространства $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ переводится в элемент $SP_{n-a}(t,a)$ из этого же пространства.

Далее покажем, что это же верно и для любой функции $x(t)$ из пространства $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$. Сначала покажем, что

$$\int\limits_0^t\overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x(s)})|ds<\infty\tag{19}$$

для всех $t \in I$.

Пусть $t, N \in I$ и $0 < N \le t \le t_0$. Оценим интеграл $B \equiv \int\limits_N^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s))\right|ds$:

$$B \le \int\limits_N^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s)) - f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))\right|ds+$$

$$+\int\limits_N^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))\right|ds.$$

В силу (15) – (18) получим

$$B \le \int\limits_N^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(s)\left|D^i_{\overline{\alpha}}(x(s) - P_{n-1}(s,a))\right|ds+$$

$$+\int\limits_N^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left|f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))\right|ds \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i-1}|D^i_{\overline{\alpha}}(x(t)-P_{n-1}(t,a))\,|\cdot\int\limits_0^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\frac{\varphi_i(s)}{s^{\gamma_i-1}}ds + At^{1-\gamma_i} < \infty$$

для всех $t \in I$. Из полученной оценки следует (19).

Следовательно, оператор определен для всех функций из $CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$. Поэтому для любого $x \in CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I)$ имеет место

$$D^i_{\overline{\alpha}}(Sx(t) - P_{n-1}(t,a)) = \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s))ds \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0,$$

т.е. функция $Sx(t)$ стабилизируется к обобщенному многочлену $P_{n-1}(t,a)$ при $t \to 0$.

Докажем конечность $\|Sx\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}}$:

$$\|Sx\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}} = \sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i-1}|D^i_{\overline{\alpha}}(Sx(t)-P_{n-1}(t,a))\,| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i-1}\left|\int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s))ds\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sup_{0<t\le t_0} t^{\gamma_i-1}\left|\int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}\left(f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s)) - f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))\right)ds\, +\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t)s^{-\alpha_n}f(s,\overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a))ds\right| \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq t_0} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \left| f(s, \overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s)) - f(s, \overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a)) \right| ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq t_0} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \left| f(s, \overline{D_{\overline{\alpha}}P_{n-1}}(s,a)) ds \right|.$$

Применяя (17), из последнего неравенства имеем

$$\|Sx\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq t_0} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(s) \left| D^j_{\overline{\alpha}}(x(s) - P_{n-1}(s,a)) \right| ds +$$

$$+ nA \leq \max_{0\leq j\leq n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{0<y\leq t_0} y^{\gamma_j-1} \left| D^j_{\overline{\alpha}}(x(y) - P_{n-1}(y,a)) \right| \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq t_0} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \frac{\varphi_j(s)}{s^{\gamma_j-1}} ds + nA \leq$$

$$\leq \max_{0\leq j\leq n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq t_0} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{i+1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \frac{\varphi_j(s)}{s^{\gamma_j-1}} ds + nA.$$

Откуда в силу (15) и (16)

$$\|Sx\|_{CP(a)^{n-1}_{\overline{\gamma}}} < \infty.$$

Осталось доказать, что существует такое $T:\ 0 < T \leq t_0$, что оператор S является сжимающимся на интервале $I_T = (0, T]$:

$$\rho(Sx, Sy) = \|Sx - Sy\|_{CP^{n-1}_{\overline{\gamma}}(I_T)} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq T} t^{\gamma_i-1} \left| D^i_{\overline{\alpha}}(Sx(t) - Sy(t)) \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq T} t^{\gamma_i-1} \left| \int\limits_0^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \left[f(s, \overline{D_{\overline{\alpha}}x}(s)) - f(s, \overline{D_{\overline{\alpha}}y}(s)) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq T} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(s) \left| D^j_{\overline{\alpha}}(x(s) - y(s)) \right| ds \leq$$

$$\leq \max_{0\leq j\leq n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq T} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \frac{\varphi_j(s)}{s^{\gamma_j-1}} ds \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{0<s\leq T} s^{\gamma_i-1} \left| D^j_{\overline{\alpha}}(x(s) - y(s)) \right|.$$

Откуда вытекает $\rho(Sx, Sy) \leq \delta\, \rho(x, y)$, поскольку в силу (16) можно выбрать $T:\ 0 < T \leq t_0$ так, чтобы

$$\delta = \max_{0\leq j\leq n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{0<t\leq T} t^{\gamma_i-1} \int\limits_0^t \overline{K}_{1,n-1}(s,t) s^{-\alpha_n} \frac{\varphi_j(s)}{s^{\gamma_j-1}} ds < 1.$$

Утверждение 3 доказано.

3. Основной результат.

Т е о р е м а. *В условиях утверждения 3 для заданного многочлена $P_{n-1}(t, a)$ имеется такое $T : 0 < T \leq t_0$, что на промежутке $I_T = (0, T]$ существует и при этом единственное решение задачи (3) – (4) ((5)).*

Это сразу следует из (13) и утверждения 3.

Цитированная литература

1. **Кудрявцев Л.Д.** // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 9. С. 1486-1503.
2. **Кудрявцев Л.Д.** // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2056-2078.
3. **Кудрявцев Л.Д.** // Доклады РАН. 1999. Т. 369, № 6. С. 736-739.
4. **Кудрявцев Л.Д.** // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 194-217.
5. **Байдельдинов Б.Л., Ойнаров Р.** // Труды межд. конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посв. 90 - летию С.М. Никольского. Москва, 1995. С. 49.
6. **Калыбай А.А.** // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 6. С. 727-733.

Поступила в редакцию 01.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 25—34*

УДК 517.926

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

Ш. А. Балгимбаева

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы, ул.Пушкина, 125 sholpan@math.kz

Построена асимптотика решения сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи с начальным скачком для квазилинейного дифференциального уравнения n-го порядка.

1. Постановка задачи. Теория сингулярно возмущенных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений начинается с основополагающих работ А.Н. Тихонова. Историю вопроса и современное состояние теории см. в [1]-[3].

В недавних работах [4], [5] изучается асимптотическое поведение и строится асимптотическое решение сингулярно возмущенных краевых задач с начальным скачком для линейного дифференциального уравнения n- го порядка.

В настоящей работе строится асимптотическое решение сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для квазилинейного уравнения n- го порядка.

Рассмотрим квазилинейное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\varepsilon y^{(n)} + A_0(t, y, ..., y^{(l)})y^{(n-1)} + ... + A_{n-l-2}(t, y, ..., y^{(l)})y^{(l+1)} = F(t, y, ..., y^{(l)}), \tag{1}$$

где $l \in \{0, 1, ..., n-3\}$ — любое фиксированное число, с краевыми условиями

$$y^{(p_j)}(0, \varepsilon) = \alpha_{p_j}, \ \ j = \overline{0, k}, \ \ y^{(q_j)}(1, \varepsilon) = \beta_{q_j}, \ \ j = \overline{0, n-k-2}, \tag{2}$$

где $0 \leq p_0 < ... < p_k = m$, $m \in \{l+1, ..., n-3\}$ —любое фиксированное число, $\varepsilon > 0$ —малый параметр, α_{p_j}, β_{q_j} — известные постоянные.

Для построения асимптотического решения задачи (1),(2) вводим вспомогательную задачу Коши с начальным скачком в одной из краевых точек.

Замечание 1. *Задачу Коши с начальным скачком для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка см. в [3], [7], для линейных дифференциальных уравнений n- го порядка см., например, [8].*

Keywords: *singular perturbed boundary value problem, initial jump, differential equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

Задаче (1),(2) при $\varepsilon=0$ соответствует невозмущенное квазилинейное уравнение

$$A_0(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})\bar{y}^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})\bar{y}^{(l+1)}=F(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)}) \qquad (3)$$

с краевыми условиями

$$\bar{y}^{(p_j)}(0)=\alpha_{p_j},\ \ j=\overline{0,k-1},\ \ \bar{y}^{(q_j)}(1)=\beta_{q_j},\ \ j=\overline{0,n-k-2}\ \ . \qquad (4)$$

Далее будем предполагать, что выполнены условия:
I. функции $A_j(t,y,...,y^{(l)})$, $j=\overline{0,n-l-2}$, $F(t,y,...,y^{(l)})$ имеют непрерывные ограниченные частные производные по всем аргументам;
II. вырожденная задача (3), (4) имеет единственное решение $\bar{y}(t)$ при $0\le t\le 1$;
III. функция $A_0(t,y,...,y^{(l)})$ удовлетворяет неравенству

$$A_0(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})\ge\bar{\gamma}=const,\ \ 0\le t\le 1;$$

IV. $\alpha_{p_k}\ne\bar{y}_0^{(p_k)}(0)$;
V.

$$\bar{\omega}(0,1):=\begin{vmatrix} x_1^{(p_0)}(0) & ..... & x_{n-1}^{(p_0)}(0)\\ ... & ... & ...\\ x_1^{(p_{k-1})}(0) & ... & x_1^{(p_{k-1})}(0)\\ x_1^{(q_0)}(1) & ... & x_{n-1}^{(q_0)}(1)\\ ... & ... & ...\\ x_1^{(q_{n-k-2})}(1) & ... & x_{n-1}^{(q_{n-k-2})}(1)\end{vmatrix}\ne 0,$$

где $x_1(t),...,x_{n-1}(t)$ —фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$A_0(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})x^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})x^{(l+1)}+$$
$$+\sum_{j=0}^{l}\Big[\sum_{j=0}^{n-l-2}\frac{\partial A_j(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})}{\partial y^{(j)}}\bar{y}^{(n-1-i)}-\frac{\partial F(t,\bar{y},...,\bar{y}^{(l)})}{\partial y^{(j)}}\Big]x^{(j)}=0.$$

Рассмотрим задачу Коши с начальным скачком m- го порядка — уравнение (1) с условиями вида

$$y^{(i)}(0,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha_{p_j}, & j=\overline{0,k},\quad i=p_j\\ c^{(\mu_j)}(\varepsilon), & j=\overline{0,m-k-1},\quad i=\mu_j\end{cases},\ \ i=\overline{0,m},$$
$$y^{(m+j)}(0,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^j}c^{(j)}(\varepsilon),\ \ j=\overline{1,n-m-1}, \qquad (5)$$
$$0\le\mu_0<...<\mu_{m-k-1}<m,\ \ \mu_i\ne p_j,\ \ i=\overline{0,m-k-1},\ \ j=\overline{0,k},$$

где $c^{(j)}(\varepsilon)=c_0^{(j)}+\varepsilon c_1^{(j)}+...+$, а $c_r^{(j)}$ —неизвестные постоянные, которые определяются таким образом, чтобы решение задачи (1), (5) являлось решением исходной краевой задачи (1), (2).

1. Алгоритм построения асимптотики решения. Асимптотическое решение задачи (1), (5) ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r y_r(t)+\varepsilon^m\sum_{r=0}^{N+1}\varepsilon^r W_r(\tau)+R_N(t,\varepsilon),\ \ \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \qquad (6)$$

где регулярные члены асимптотики $y_r(t)$ и погранслойные члены асимптотики $W_r(\tau)$ — неизвестные коэффициенты, которые нужно определить, а $R_N(t,\varepsilon)$ — остаточный член асимптотики.

Нулевое приближение регулярной части асимптотики $y_0(t)$ является решением вырожденного квазилинейного уравнения

$$A_0(t,y_0,...,y_0^{(l)})y_0^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,y_0,...,y_0^{(l)})y_0^{(l+1)}=F(t,y_0,...,y_0^{(l)}), \tag{7_0}$$

а r-е приближения $y_r(t),\ r=1,2,...,$ — решения последовательности линейных уравнений

$$A_0(t,y_0,...,y_0^{(l)})y_r^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,y_0,...,y_0^{(l)})y_r^{(l+1)}+ \tag{7_r}$$

$$+\sum_{j=0}^{l}\Big[\sum_{i=0}^{n-l-2}\frac{\partial A_i(t,y_0,...,y_0^{(l)})}{\partial y^{(j)}}y_0^{(n-1-i)}(t)-\frac{\partial F(t,y_0,...,y_0^{(l)})}{\partial y^{(j)}}\Big]y_r^{(j)}(t)=f_r(t),$$

где $f_r(t)$ —известные функции, зависящие от $y_0(t),...,y_{r-1}(t)$.

Нулевое приближение погранслойной части асимптотики $W_0(\tau)$ является решением линейного однородного уравнения

$$\overset{(n)}{W}_0(\tau)+A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)})\overset{(n-1)}{W}_0(\tau)=0, \tag{8_0}$$

а r -е приближения погранслойной части асимптотики $W_r(\tau),\ \ r=1,2,...,$ — решения последовательности линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\overset{(n)}{W}_r(\tau)+A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)})\overset{(n-1)}{W}_r(\tau)=\Phi_r^{(0)}(\tau), \tag{8_r}$$

где правые части $\Phi_r^{(0)}(\tau),\ \ r=1,2,...,$ выражаются через функции $W_i(\tau),\ i<r$.

Для однозначного определения коэффициентов частичной суммы

$$\bar y_N(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r y_r(t)+\varepsilon^m\sum_{r=0}^{N+1}\varepsilon^r W_r(\tau),\quad N\ge 0, \tag{9}$$

формулу (9) подставим в начальные условия (5).

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$y_0^{(j)}(0)=\begin{cases}\alpha_{p_j}, & j=p_i, \quad i=\overline{0,k-1}\\ c_0^{(\mu_i)}, & j=\mu_i, \quad i=\overline{0,m-k-1}\end{cases},\ j=\overline{0,m-1}, \tag{10_0}$$

$$y_r^{(j)}(0)=\begin{cases}0, & j=p_i, \quad i=\overline{0,k-1}, \quad r=\overline{1,\min(m-1,N)},\\ c_r^{(\mu_i)}, & j=\mu_i, \quad i=\overline{0,m-k-1}, \quad j=\overline{0,m-r-1},\end{cases} \tag{10_r}$$

$$\overset{(j)}{W}_r(0)=\begin{cases}-y^{(j)}_{r+m-j}(0), & j=p_i, \quad i=\overline{0,k-1},\\ -y^{(j)}_{r+m-j}(0)+c^{(\mu_i)}_{r+m-j}, & j=\mu_i, \quad i=\overline{0,m-k-1},\end{cases} \tag{11_r}$$

$$r=\overline{0,N-m-1},\ \ j=\overline{0,m-1},\ \ r=\overline{N-m,N-1},\ \ j=\overline{r-N+m,m-1},$$

$$\overset{(j)}{W}_r(0)=\begin{cases}0, & j=p_i, \quad i=\overline{0,k-1}, \quad r=\overline{N-m+1,N},\\ c^{(\mu_i)}_{N+1}, & j=\mu_i, \quad i=\overline{0,m-k-1}, \quad j=r-N+m-1,\end{cases} \tag{12_r}$$

$$\overset{(j)}{W}_r(0)=0,\ \ r=\overline{\max(0,N-m+2),N+1},\ \ j=\overline{0,\max(0,r-N+m-1)-1}, \tag{13_r}$$

$$\overset{(m)}{W}_0(0)+y_0^{(m)}=\alpha_m,\ \overset{(m)}{W}_r(0)+y_r^{(m)}=0,\ r=\overline{1,N},\ \ \overset{(m)}{W}_{N+1}(0)=0, \tag{14_r}$$

$$\overset{(m+j)}{W_r}(0) = y_{r-j}^{(m+j)}(0) + c_r^{(j)},\ j = \overline{1, n-m-1},\ r = \overline{0, N+1},$$
$$y_r^{(m+j)} \equiv 0,\ r < 0,\quad r > N+1. \quad (15_r)$$

Вырожденное уравнение (7_0) будем решать с краевыми условиями

$$y_0^{(p_j)}(0) = \alpha_{p_j},\ j = \overline{0, k-1},\ y_0^{(q_j)}(1) = \beta_{q_j},\ j = \overline{0, n-k-2}. \quad (16_0)$$

Согласно условию II краевая задача (7_0), (16_0) имеет единственное решение $y_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Остальные члены частичной суммы (9) и неизвестные постоянные $c_r^{(j)}$ определяются последовательно.

Введем дополнительное условие

$$\overset{(j)}{W_0}(\infty) = 0, \quad j = \overline{\max(0, m-1-N), n-1}. \quad (17_0)$$

Проинтегрировав повторно уравнение (8_0) по τ от 0 до ∞, получим реккурентное соотношение

$$\overset{(j+1)}{W_0}(0) + A_0(0, y_0, ..., y_0^{(l)})\overset{(j)}{W_0}(0) = 0,\ j = \overline{\max(0, m-1-N), n-2}. \quad (18_0)$$

Из (18_0) с учетом (16_0) выписываем начальные условия для уравнения (8_0)

$$\overset{(j)}{W_0}(0) = (\alpha_m - y_0^{(m)}(0))(-A_0(0, y_0, ..., y_0^{(l)}))^{j-m},\ j = \overline{\max(0, m-1-N), n-1}, \quad (19_0)$$

и определяем неизвестные $c_0^{(\mu_j)}, c_0^{(j)}$

$$c_0^{(\mu_j)} = y_0^{(\mu_j)}(0),\ j = \overline{0, m-k-1}, \quad (20_0)$$

$$c_0^{(j)} = (\alpha_m - y_0^{(m)}(0))(-A_0(0, y_0, ..., y_0^{(l)}))^j,\ j = \overline{1, n-m-1}. \quad (21_0)$$

Сопоставляя начальные условия (19_0) и (13_0), определим часть краевых условий для уравнений (7_r), $r = \overline{1, N}$,

$$y_{m-p_j}^{(p_j)}(0) = (y_0^{(m)}(0) - \alpha_m)(-A_0(0, y_0, ..., y_0^{(l)}))^{p_j-m},\ j = \overline{0, k-1}. \quad (22)$$

Последовательно повторно интегрируя уравнения (8_r), $r = \overline{1, N}$, по τ от 0 до ∞, с помощью дополнительных условий

$$\overset{(j)}{W_r}(\infty) = 0, \quad j = \overline{\max(0, r+m-1-N), n-1},\ r = \overline{1, N}, \quad (17_r)$$

получим реккурентное соотношение

$$\overset{(j+1)}{W_r}(0) + A_0(0, y_0, ..., y_0^{(l)})\overset{(j)}{W_r}(0) = -\int_0^\infty \Phi_r^{(n-j-2)}(\tau)d\tau,$$
$$j = \overline{\max(0, r+m-1-N), n-2}, \quad (18_r)$$

где $\Phi_r^{(j)}(\tau) = -\int_\tau^\infty \Phi_r^{(j-1)}(\tau)d\tau$.

Сходимость несобственных интегралов из (18_r) и последующих формул легко доказывается.

Используя реккурентные соотношения (18_r), $r=\overline{1,N}$, преобразуем начальные условия (13_r) - (15_r), $r=\overline{1,N}$,

$$\overset{(j)}{W}_r(0)=0,\ r=\overline{1,N},\ j=\overline{0,\max(0,r-N+m-1)-1},$$

$$\overset{(j)}{W}_r(0)=-y_r^{(m)}(0)(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j-m}-$$

$$-\sum_{s=1}^{m-j}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))\int\limits_0^\infty \Phi_r^{(n-j-s-1)}(\tau)d\tau,\ j = \overline{\max(0,r-N+m-1),m}, \quad (19_r)$$

$$\overset{(m+j)}{W}_r(0)=-y_r^{(m)}(0)(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j}-$$

$$-\sum_{s=0}^{j-1}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j-s-1}\int\limits_0^\infty \Phi_r^{(n-m-s-2)}(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,n-m-1},$$

однозначно определим неизвестные $c_r^{(j)}$, $r=\overline{1,N}$,

$$c_r^{(j)}=y_{r-j}^{(m+j)}(0)-(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j}y_r^{(m)}(0)-$$

$$-\sum_{s=0}^{j-1}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j-s-1}\int\limits_0^\infty \Phi_r^{(n-m-s-2)}(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,n-m-1}, \quad (21_r)$$

а также найдем краевые условия для уравнений (7_r), $r=\overline{1,N}$,

$$y_r^{(p_j)}(0)=0,\ r=\overline{1,m-p_j-1},\ j=\overline{0,k-1};$$

$$y_r^{(p_j)}(0)=(y_{r-m+p_j}^{(m)}(0)-d_{r-m+p_j})(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{p_j-m}+$$

$$+\sum_{s=1}^{m-p_j}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{-s}\int\limits_0^\infty \Phi_{r-m+p_j}^{(n-p_j-s-1)}(\tau)d\tau,\ r=\overline{m-p_j,N},\ j=\overline{0,k-1},$$

$$\Phi_0\equiv 0,\quad d_0\equiv\alpha_m,\ d_i=0,\ i\neq 0, \quad (16_r)$$

$$y_r^{(q_j)}(1)=0,\ r=\overline{1,N},\ j=\overline{0,n-k-2}.$$

Задачи (8_r), (19_r) имеют единственное решение при $\tau\geq 0$. Согласно условию V линейные краевые задачи (7_r), (16_r), $r=\overline{1,N}$, однозначно разрешимы при $0\leq t\leq 1$.

Следовательно, неизвестные $c_r^{(\mu_j)}$, $\overline{r=1,N}$, имеют вид

$$c_r^{(\mu_j)}=y_r^{(\mu_j)}(0),\ r=\overline{1,m-\mu_j-1},\ j=\overline{0,m-k-1},$$

$$c_r^{(\mu_j)}=y_r^{(\mu_j)}(0)-y_r^{(m)}(0)(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{\mu_j-m}-$$

$$-\sum_{s=1}^{m-\mu_j}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{-s}\int\limits_0^\infty \Phi_{r-m+\mu_j}^{(n-\mu_j-s-1)}(\tau)d\tau,\ r=\overline{m-\mu_j,N},\ j=\overline{0,m-k-1}. \quad (20_r)$$

Интегрируя уравнение (9_{N+1}) с помощью дополнительных условий

$$\overset{(j)}{W}_{N+1}(\infty)=0,\quad j=\overline{m,n-1}, \quad (17_{N+1})$$

получим следующее соотношение:

$$\overset{(j+1)}{W}_{N+1}(0)+A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)})\overset{(j)}{W}_{N+1}(0)=-\int\limits_0^\infty \Phi_{N+1}^{(0)}(\tau)d\tau,\qquad j=\overline{m,n-2}. \quad (18_{N+1})$$

Используя (18_{N+1}), преобразуем начальные условия (15_{N+1}) - (17_{N+1})

$$\overset{(j)}{W}_{N+1}(0)=0,\ j=\overline{0,m},$$

$$\overset{(j)}{W}_{N+1}(0)=-\sum_{s=0}^{j-1}(-A_0(0,y_0,...,y_0^{(l)}))^{j-s-1}\int\limits_0^\infty \Phi_{N+1}^{(n-m-s-2)}(\tau)d\tau,\quad j=\overline{1,n-m-1},\quad (19_{N+1})$$

и однозначно определим неизвестные $c_{N+1}^{(j)},\ j=\overline{1,n-m-1},\ \ c_{N+1}^{(\mu_j)},\ j=\overline{0,m-k-1}$,

$$c_{N+1}^{(\mu_j)}=\overset{(\mu_j)}{W}_{N-m+\mu_j+1}(0), \quad (20_{N+1})$$

$$c_{N+1}^{(j)}=-y_{N+1-j}^{(m+j)}(0)-\overset{(m+j)}{W}_{N+1}(0). \quad (21_{N+1})$$

Задача (9_{N+1}), (19_{N+1}) имеет единственное решение при $\tau\geq 0$.

Таким образом, из задач (7_r), (16_r), $r=\overline{0,N}$, (8_r), (19_r), $r=\overline{0,N+1}$, полностью определяются коэффициенты частичной суммы (6) и неизвестные $c_r^{(\mu_j)},\ j=\overline{0,m-k-1}$, $c_r^{(j)},\ j=\overline{1,n-m-1},\ r=\overline{0,N+1}$.

3. Вспомогательные леммы. Для пограничных функций и остаточного члена справедливы оценки, которые приведены в следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда для функций* $W_r(\tau)$, $r=\overline{0,N+1}$, *при* $\tau\geq 0$ *справедливы оценки*

$$|\overset{(j)}{W}_r(\tau)|\leq K\exp(-\gamma\tau),\quad r=\overline{0,N},\ j=\overline{\max(0,r-N+m-1),n-1},$$

$$r=N+1,\ j=\overline{m+1,n-1},$$

$$|\overset{(j)}{W}_r(\tau)|\leq K(\tau^{\max(0,r-N+m-1)-1-j}+\exp(-\gamma\tau)),\quad r=\overline{0,N},\ j=\overline{0,\max(0,r-N+m-1)-1},$$

$$|\overset{(j)}{W}_{N+1}(\tau)|\leq K(\tau^{m-j}+\exp(-\gamma\tau)),\qquad j=\overline{0,m}, \quad (23)$$

где $K>0$, $\bar\gamma>\gamma>0$ *— постоянные, независящие от* t *и* ε.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда функция* $\bar y_N(t,\varepsilon)$, *выражаемая формулой (9), на отрезке* $[0,1]$ *является приближенным решением задачи (1), (5) с точностью порядка* $O(\varepsilon^{N+1})$

$$\varepsilon\bar y_N^{(n)}+A_0(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})\bar y_N^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})\bar y_N^{(l+1)}=F(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)}), \quad (24)$$

$$\bar y_N^{(i)}(0,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha_{p_j}, & j=\overline{0,k},\quad i=p_j\\ c_0^{(\mu_j)}+...+\varepsilon^{N+1}c_{N+1}^{(\mu_j)}, & j=\overline{0,m-k-1},\quad i=\mu_j\end{cases},\ i=\overline{0,m},$$

$$\bar y_N^{(m+j)}(0,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^j}(c_0^{(j)}+...+\varepsilon^{N+1}c_{N+1}^{(j)}),\ j=\overline{1,n-m-1}. \quad (25)$$

4. Основная теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда сингулярно возмущенная краевая задача (1) , (2) при достаточно малых* ε *на отрезке* $[0,1]$ *имеет единственное решение* $y(t,\varepsilon)$, *которое допускает асимптотическое разложение (6), а остаточный член имеет оценки*

$$|R_N^{(j)}(t,\varepsilon)| \le K\varepsilon^{N+1}, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad 0\le t\le 1, \tag{26}$$

где $K>0$ *— постоянная, независящая от* t *и* ε. *Функции* $y_r(t)$, $r=\overline{0,N}$, *при* $0\le t\le 1$ *однозначно определяются из краевых задач* (7_r), (16_r), $r=\overline{0,N}$, *и ограничены; функции* $W_r(\tau)$, $r=\overline{0,N+1}$, *при* $\tau\ge 0$ *однозначно определяются из задач* (8_r), (19_r), $r=\overline{0,N+1}$, *и для них справедливы оценки (23).*

Доказательство. Вначале докажем, что утверждения теоремы верны для вспомогательной задачи (1), (5).

Подставив (6) в (1), (5), получим задачу для определения $R_N(t,\varepsilon)$

$$\varepsilon R_N^{(n)} + A_0(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})R_N^{(n-1)} + ... + A_{n-l-2}(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})R_N^{(l+1)} +$$

$$+\sum_{j=0}^{l}\Big[\sum_{s=0}^{n-l-2}\frac{\partial A_s(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})}{\partial \bar y_N^{(j)}}\bar y_N^{(n-1-s)} - \frac{\partial F(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})}{\partial \bar y_N^{(j)}}\Big]R_N^{(j)} = G(t,R_N,...,R_N^{(n-1)}), \tag{27}$$

$$R_N^{(i)}(0,\varepsilon)=\begin{cases}0, & i=p_j,\\ h(\varepsilon), & i\ne p_j,\end{cases}\qquad j=\overline{0,k},\quad i=\overline{0,m},\quad R_N^{(m+j)}\equiv h(\varepsilon), \tag{28}$$

где $h(\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$.
Функции $G(t,R_N,...,R_N^{(n-1)})$ обладают свойством

$$G(t,0,...,0)=O(\varepsilon^{N+1}),\quad 0\le t\le 1.$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\varepsilon R_N^{(n)} + A_0(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})R_N^{(n-1)} + ... + A_{n-l-2}(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})R_N^{(l+1)} +$$

$$+\sum_{j=0}^{l}\Big[\sum_{s=0}^{n-l-2}\frac{\partial A_s(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})}{\partial \bar y_N^{(j)}}\bar y_N^{(n-1-s)} - \frac{\partial F(t,\bar y_N,...,\bar y_N^{(l)})}{\partial \bar y_N^{(j)}}\Big]R_N^{(j)} = 0.$$

Для уравнения такого типа известны фундаментальная система решений и функции Коши $K_i(t,s)$, $i=\overline{1,n}$, [8]. Задачу (27), (28) с помощью функции Коши $K_i(t,s)$ заменим эквивалентным уравнением

$$R_N(t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{m-k-1}K_{1+\mu_j}(t,0)h(\varepsilon)+\sum_{j=1}^{n-m-1}K_{m-j+1}(t,0)h(\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_n(t,s)G(s,R_N,...,R_N^{(n-1)})ds. \tag{29}$$

Последовательно дифференцируя уравнение (29) по t $(n-1)$ раз, получим систему интегральных уравнений, которую запишем в векторном виде

$$U(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n-k-1}\Phi(t)\Phi^{-1}(0)U_j^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s,U(s,\varepsilon))ds, \tag{30}$$

где $U(t,\varepsilon)$, U_i^0, $i=\overline{0,n-k-1}$, $B(s,U)$ — вектор - столбцы.

Интегральное уравнение (30) решаем методом последовательных приближений, где нулевое приближение $\overset{[0]}{U}(t,\varepsilon)\equiv 0$. Остальные приближения определяются по формуле

$$\overset{[i]}{U}(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n-k-1}\Phi(t)\Phi^{-1}(0)U_j^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s,\overset{[i-1]}{U})ds. \tag{31}$$

Справедлива оценка

$$\|\overset{[i+1]}{U}(t,\varepsilon)\|\le K\varepsilon^{N+1},\quad i=0,1,2,..., \tag{32}$$

где норма вектора $\bar{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ определяется как $\|\bar{x}(t)\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t)|$. После ряда несложных оценок, окончательно получаем

$$\max_{0\le t\le 1}\|\overset{[i+1]}{U}-\overset{[i]}{U}\|\le\lambda\|\overset{[i]}{U}-\overset{[i-1]}{U}\|,\quad i=1,2,...,$$

где $0<\lambda<1$.

Таким образом, здесь применим принцип сжимающих отображений: последовательные приближения $\overset{[i]}{U}(t,\varepsilon)$ при $i\to\infty$ равномерно сходятся на $[0,1]$ к функции $U(t,\varepsilon)$, являющейся единственным решением уравнения (30), и для которой справедлива оценка

$$\|U(t,\varepsilon)\|\le K\varepsilon^{N+1},\ \ 0\le t\le 1. \tag{33}$$

Возвращаясь к задаче (27), (28), получаем, что она при $t\in[0,1]$ имеет единственное решение $R_N(t,\varepsilon)$, для которого справедливы оценки (26). Значит, вспомогательная задача (1), (5) имеет единственное решение $y(t,\varepsilon)$, представимое в виде (6).

Теперь докажем, что решение задачи (1), (5) есть решение исходной краевой задачи (1), (2). Для этого достаточно показать, что в некоторых малых окрестностях значений $c_0^{(j)}$, $j=\overline{1,n-k-1}$, при достаточно малых ε существуют единственные значения $c^{(j)}(\varepsilon)$, представимые в виде: $c^{(j)}(\varepsilon)=c_0^{(j)}+O(\varepsilon)$, $j=\overline{1,n-k-1}$, и являющиеся решениями уравнений

$$y^{(q_j)}(1,c^{(\mu_0)}(\varepsilon),...,c^{(\mu_{m-k-1})}(\varepsilon),c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-m-1)}(\varepsilon))\equiv$$

$$\equiv\quad y^{(q_j)}(1,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)\quad=\quad\beta_{q_j},\qquad j\quad=\quad\overline{0,n-k-2}. \tag{34}$$

Дифференцируя задачу (1), (5) по параметру $c^{(j)}(\varepsilon)$, $j=\overline{1,n-k-1}$, получаем линейные задачи с начальными скачками относительно функций
$z_i(t,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon):=\frac{\partial y(t,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial c^{(i)}(\varepsilon)}$, $i=\overline{1,n-k-1},$:

$$\varepsilon z_i^{(n)}+A_0(t,y,...,y^{(l)})z_i^{(n-1)}+...+A_{n-l-2}(t,y,...,y^{(l)})z_i^{(l+1)}+$$

$$+\quad \sum_{r=0}^{l}[\sum_{s=0}^{n-l-2}\frac{\partial A_s(t,y,...,y^{(l)})}{\partial y^{(j)}}y^{(n-1-s)}\quad-\quad\frac{\partial F(t,y,...,y^{(l)})}{\partial y^{(j)}}]z_i^{(r)}\quad=\quad 0, \quad (35)$$

$$z_i^{(s)}(0,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)=\begin{cases}0, & s=p_j,\quad j=\overline{0,k-1},\\ 1, & s=\mu_j=i,\end{cases}\quad s=\overline{0,m},$$

$$z_i^{(m+j)}(0,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)\quad=\quad\begin{cases}\varepsilon^{-j}, & m+j=i,\quad j=\overline{1,n-m-1}\\ 0, & m+j\neq i,\end{cases}, \quad (36)$$

где $y(t,\varepsilon)\equiv y(t,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)$ —решение задачи (1), (5). Решение задачи (35), (36) запишем через функции Коши

$$z_i(t,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)=$$

$$=\quad\begin{cases}K_{1+\mu_j}, & \underline{\mu_j=i-1,} \quad j=\overline{0,m-k-1},\quad i=\overline{1,m-k}\\ \varepsilon^{-j}K_{j-1}, & i=\overline{m-k+1,n-k-1},\quad j=\overline{m+1,n}\end{cases}. \quad (37)$$

Для того чтобы показать справедливость (34), необходимо доказать, что якобиан $J(\varepsilon)=det\|a_{ij}\|\neq 0$, где $a_{ij}:=\frac{\partial y^{(q_j-1)}(1,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial c^{(i)}(\varepsilon)}=z_i^{(q_{j-1})}(1,c^{(1)}(\varepsilon),...,c^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)$.

Используя (37), получим, что для $J(\varepsilon)$ справедливо представление

$$J(\varepsilon)=\varepsilon^{-\frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2}}A_0^{m+1-n}(0)(-1)^{p_0+...+p_{k-1}+(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}}[\bar{\omega}(0,1)+O(\varepsilon)].$$

При достаточно малых ε из условия V следует, что $J(\varepsilon)\neq 0$ и, следовательно, уравнение (34) однозначно разрешимо относительно $c^{(j)}(\varepsilon)$.

Таким образом, существуют $c^{(j)}(\varepsilon)$, $j=\overline{1,n-k-1}$, такие, что решение $y(t,c_0^{(1)}(\varepsilon),...,c_0^{(n-k-1)}(\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1), (5) является решением задачи (1), (2). Тем самым доказаны существование и единственность решения задачи (1), (2).

Из соотношения $c^{(j)}(\varepsilon)=\bar{c}^{(j)}+O(\varepsilon^{N+1})$, $j=\overline{1,n-k-1}$, следует справедливость асимптотического представления (6) решения краевой задачи (1), (2) и оценок для остаточного члена (26).

Замечание 2. *В [4] рассматривается линейное уравнение n -го порядка с более общими краевыми условиями, а именно: с краевыми условиями*

$$\sum_{j=0}^{m_i}\alpha_{ij}y^{(j)}(0,\varepsilon)=a_i,\ i=\overline{1,l},\quad \sum_{j=0}^{r_i}\beta_{ij}y^{(j)}(1,\varepsilon)=a_{l+i},\ i=\overline{1,p},\quad l+p=n. \quad (38)$$

Отметим, не вдаваясь в подробности, что аналог нашей теоремы справедлив и для задачи (1),(38).

Замечание 3. *Часть результатов данной работы была опубликована ранее в [9].*

Цитированная литература

1. **Васильева А. Б., Бутузов В. А.** Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

2. **Ломов С. А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.

3. **Касымов К. А.** Дифференциальные уравнения с малым параметром. Алма-Ата, 1985.

4. **Касымов К. А., Нургабыл Д. Н.** //Укр. матем. ж. 2003. Т.55, № 11, С. 1476 -1488.

5. **Касымов К. А., Нургабыл Д. Н.** //Дифференциальные уравнения. 2004. Т.40, № 5. С. 597 -607.

6. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** // ДАН СССР. 1958. Т.121. С.778-781.

7. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** // ДАН СССР. 1960. Т.132. №6. С.1242-1245.

8. **Балгимбаева Ш. А., Абильдаев Е. А.** // Известия НАН РК. 1994. №5. С.3-8.

9. **Балгимбаева Ш. А.** // Деп. в КазГосИНТИ, 18.03.94. № 4728-К94.

Поступила в редакцию 16.05.2005

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 35—39*

УДК 62.50

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗВИТИЯ ОСНОВНЫХ ФОНДОВ

М. А. Бейсенби, А. Р. Ойнаров

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
010080 Астана ул. Мунайтпасова, 5

Соотношение между инвестициями и износом основных фондов – объемом основных фондов, потребленных в ходе производства – служит хорошим индикатором того, находится ли производство в состоянии подъема, застоя или спада [1]. Когда инвестиции в производство превышают износ, производство находится в подъеме в том смысле, что его производственные мощности растут, т.е. чистые инвестиции являются величиной положительной. Следовательно, экономическое развитие непосредственно определяется количеством и качеством основных фондов в экономике $X(t)$, и динамику основных фондов можно в простейшем случае представить дифференциальным уравнением [1]:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{T} X(\beta(X) - \mu(X)), \tag{1}$$

где коэффициенты инвестиций β и износа μ зависят от количества основных фондов; T – постоянная времени, характеризующего динамические свойства экономической системы.

Предположим, что заданная траектория развития основных фондов, описывающая невозмущенное движение, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dX_s}{dt} = \frac{1}{T} X_s(\beta_0 - \mu_0), \tag{2}$$

где β_0 – $const$, μ_0 – $const$ – постоянные коэффициенты, характеризующие экспоненциальный закон развития.

В уравнении (1) между коэффициентами β, μ и переменной X существует сложная нелинейная зависимость. Поэтому уравнение динамики основных фондов (1) линеаризуем вокруг траекторий невозмущенного движения. Для этого представляем $X = X_s + x$ и уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{dX_s}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}\left[X_s(\beta_0 - \mu_0) + (\beta_0 - \mu_0)x + X_s\left(\left.\frac{\partial \beta}{\partial X}\right|_{X=X_s} - \left.\frac{\partial \mu}{\partial X}\right|_{X=X_s}\right)x + \right.$$

Keywords: *robust stability, fixed capital development, structural-steady map*
2000 Mathematics Subject Classification: 91B62,93D09

$$+\left(\left.\frac{\partial\beta}{\partial X}\right|_{X=X_s}-\left.\frac{\partial\mu}{\partial X}\right|_{X=X_s}\right)x^2+O\left(|x|^2\right)\Bigg]. \qquad (3)$$

Учитывая (2) и отбрасывая члены второго и выше порядков малости $O\left(|x|^2\right)$, данное уравнение (3) представим в виде

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{T}x(\alpha-\gamma x), \qquad (4)$$

где

$$\alpha=\beta_0-\mu_0+X_s\left(\left.\frac{\partial\beta}{\partial X}\right|_{X=X_s}-\left.\frac{\partial\mu}{\partial X}\right|_{X=X_s}\right),\quad \gamma=\left(\left.\frac{\partial\mu}{\partial X}\right|_{X=X_s}-\left.\frac{\partial\beta}{\partial X}\right|_{X=X_s}\right).$$

Уравнение (4) описывает любое возмущенное движение развития основных фондов в отклонениях $x(t)$.

Здесь α определяет истинную скорость роста основных фондов; $\frac{\alpha}{\gamma}$ определяет асимптотическое равновесное количество основных фондов.

Из анализа модели развития основного фонда известно, что динамическая модель (4) поражает невообразимым многообразием типов поведения, варьирующиеся от простых точек равновесия до множественных периодических или хаотических в зависимости от значений коэффициента α и T. Причем это сложное поведение связано с потерей устойчивости развития экономической системы. Так как большинство макроэкономических переменных, которые измеряют тот или иной вид доходов, расходов или состояние происходящих в экономике процессов, изменяются в значительной степени синхронно развитию основных фондов [1], то это означает, что при определенных значениях параметров α и T траектория развития, соответствующая невозмущенному движению экономической системы, теряет устойчивость. Поэтому требуется исследовать возможность увеличения потенциала робастной устойчивости возможных траекторий развития экономической системы.

Пусть закон управления инвестицией $u(t)$ выбирается в форме двухпараметрических структурно - устойчивых отображений (катастрофа типа сборки) в зависимости от отклонения $x(t)$:

$$u(t)=-x^4+k_1x^2+k_2x.$$

Уравнение развития основных фондов экономической системы в отклонениях $x(t)$ получим в виде

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{T}x\left[-x^3+(k_1-\gamma)x+k_2+\alpha\right]. \qquad (5)$$

Рассмотрим равновесные состояния системы

$$-x_s^4+(k_1-\gamma)x_s^2+(k_2+\alpha)x_s=0. \qquad (6)$$

Тривиальное решение уравнения (6):

$$x_s^1=0 \qquad (7)$$

и нетривиальное решение, определяемое решением уравнения

$$-x_s^3+(k_1-\gamma)x_s+(k_2+\alpha)=0. \qquad (8)$$

Как известно из элементарной алгебры, уравнение (8) может иметь до трех действительных решений вида

$$x_s^2=A+B,\quad x_s^{3,4}=-\frac{A+B}{2}\pm j\frac{A+B}{2}\sqrt{3},$$

где

$$A = \sqrt[3]{\frac{k_2+\alpha}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{k_2+\alpha}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{k_1-\gamma}{3}\right)^3 + \left(\frac{k_2+\gamma}{2}\right)^2.$$

Если уравнение (8) имеет действительные коэффициенты, то (в тех случаях, когда это возможно) следует брать действительное значение этих корней. В этом случае оно имеет: а) один действительный и два комплексно-сопряженных корня; б) три действительных корня, по крайней мере, два из которых равны; с) три различных действительных корня в зависимости от того, что $Q > 0$, $Q = 0$ или $Q < 0$.

Более того, при изменении величин и происходит слияние трех решений, в результате чего остается единственное реальное решение. Можно определить кривые в параметрическом пространстве, разделяющие эти два режима:

$$4(k_1-\gamma)^3 + 27(k_2+\gamma)^2 = 0.$$

В начале координат при $k_1 - \gamma = 0$ и $k_2 + \alpha = 0$ заканчивается область существования трех действительных решений. При изменении параметра $k_2 + \alpha$, если $k_1 - \gamma = 0$, то только при этих условиях существует единственное действительное решение уравнения (8), равное

$$x_s = x_s^1 = x_s^2 = x_s^3 = \sqrt[3]{k_2+\alpha}. \tag{9}$$

Исследование робастной устойчивости стационарных состояний (7) и (9) системы (5) можно проводить на основе прямого метода Ляпунова или на основе идей линейной аппроксимации [4] и первого метода Ляпунова.

Оказывается, что состояние (7) $X_s^1 = 0$ является асимптотически устойчивым при $k_2 + \alpha < 0$ и неустойчивым при $k_2 + \alpha > 0$, состояние (9) асимптотически устойчиво только при $k_2 + \alpha > 0$ и неустойчиво при $k_2 + \alpha < 0$. Иными словами, ветви установившихся состояний (9) могут появляться в результате бифуркации в тот момент, когда состояние $X_s^1 = 0$ теряет устойчивость, причем сами эти ветви устойчивы.

При $k_2 + \alpha = 0$ зависимость решения x_s от $k_1 - \gamma$ определяется решениями уравнения

$$-x_s^3 + (k_1-\gamma)x_s = 0. \tag{10}$$

Для уравнения (10) существует стационарное состояние $x_s^1 = 0$. Другие стационарные состояния определяются из решения уравнения

$$-x_s^2 + k_1 - \gamma = 0 \tag{11}$$

При отрицательном $k_1 - \gamma$ уравнение (11) имеет мнимое решение, что не может соответствовать какой-либо физически возможной ситуации. При $k_1 - \gamma > 0$ уравнение (11) допускает следующие два решения:

$$x_s = \pm\sqrt{k_1-\gamma}.$$

Эти решения сливаются при $k_1 - \gamma = 0$ и ответвляются от него при $k_1 - \gamma > 0$, т.е. в точке $k_1 - \gamma = 0$ происходит бифуркация.

Оказывается, что состояние x_s^1 является глобально асимптотически устойчивым при $k_1 - \gamma > 0$, состояния x_s^2 и x_s^3 асимптотически устойчивы. Иными словами, ветви x_s^2 и x_s^3 появляются в результате бифуркации в тот момент, когда равновесное состояние $x_s^1 = 0$ теряет устойчивость, причем сами ветви устойчивы. Проверку этих положений производим линеаризацией системы (5) при $k_2 + \alpha = 0$ путем разложения в ряд Тейлора вокруг стационарных состояний x_s^1, x_s^2 и x_s^3. Тогда имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}(k_1-\gamma)x \ \text{ при } \ x_s = x_s^0 = x_s^1 = 0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}(k_1-\gamma)x \quad \text{при} \quad x_s = \pm\sqrt{k_1-\gamma}.$$

Этим уравнениям соответствуют характеристические уравнения

$$\lambda - \frac{1}{T}(k_1-\gamma) = 0 \ \text{ при } \ x_s = x_s^0 = x_s^1 = 0$$

и

$$\lambda + \frac{1}{T}(k_1-\gamma) = 0 \ \text{ при } \ x_s = \pm\sqrt{k_1-\gamma}.$$

Стационарное состояние $x_s = 0$ будет устойчивым при любом $k_1-\gamma < 0$, а стационарные состояния $x_s = \pm\sqrt{k_1-\gamma}$ устойчивы при любом значении параметра $k_1-\gamma > 0$.

Таким образом, при $k_2+\alpha = 0$ уравнение (5) имеет устойчивые стационарные состояния при любых значениях параметра $k_1-\gamma$.

При выполнении условия

$$Q = \left(\frac{k_1-\gamma}{3}\right)^3 + \left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2 \geq 0$$

существуют три действительных корня уравнения (8), два из которых могут совпадать, т.е. параметры $k_1-\gamma$ и $k_2+\alpha$ должны удовлетворять условию

$$k_2+\alpha > 0 \quad \text{и} \ \ k_1-\gamma \leq 3\sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}.$$

Предположим, что значение $k_1-\gamma$ фиксированно и равно $k_1-\gamma = 3\sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}$. Тогда можно получить

$$A = \sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}, \quad B = \sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}, \tag{12}$$

$$x_s^1 = A+B = 2\sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}, \quad x_s^{2,3} = \sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2}. \tag{13}$$

Эти решения сливаются с $x_s = \sqrt[3]{k_2+\alpha}$ при $k_1-\gamma = 0$ и ответвляются от него при $k_1-\gamma > 0$. Устойчивость этих стационарных состояний можно исследовать, используя принцип устойчивости линеаризованной системы. Линеаризуя вокруг стационарных состояний (12) и (13), представим линеаризованную систему в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}\left[-4(x_s)^3 + k_1-\gamma\right]x \ \text{ и } \ k_1-\gamma = 3\sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2} > 0 \ \text{ при } \ x_s = x_s^1 = 2\sqrt[3]{\frac{k_2+\alpha}{2}}, \tag{14}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T}\left[-4(x_s)^3 + k_1-\gamma\right]x \ \text{ и } \ k_1-\gamma = 3\sqrt[3]{\left(\frac{k_2+\alpha}{2}\right)^2} > 0 \ \text{ при } \ x_s = x_s^{2,3} = \sqrt[3]{\frac{k_2+\alpha}{2}}. \tag{15}$$

Этим уравнениям соответствуют характеристические уравнения

$$\lambda + \frac{15}{T}(k_2+\alpha) = 0 \quad \text{и} \ \ \lambda + \frac{1}{T}(k_2+\alpha) = 0.$$

Стационарные состояния (14) и (15) устойчивы при $\lambda < 0$ и при всех значениях $k_2+\alpha > 0$. Таким образом, при выборе закона изменения инвестиции $u(t)$ в форме двухпараметрических структурно - устойчивых отображений в зависимости от отклонения $x(t)$ от траекторий развития, характеризующих невозмущенное движение экономической системы $X_s(t)$, траектория развития экономической системы приобретает свойства устойчивости при любом изменении параметров α, γ и T.

В статье предлагается подход к управлению развитием основных фондов экономической системы в форме двухпараметрических структурно - устойчивых отображений из теории катастроф, позволяющий предельно увеличить потенциал робастной устойчивости прогнозируемых траекторий развития экономической системы.

Цитированная литература

1. **Н. Грегори Мэнкью.** Принципы экономикс. СПб., 2002.

2. **Р. Гилмор.** Прикладная теория катастроф. Т. 1. 1984.

3. **Дж. Томпсон, Т. Майкл.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М., 1985.

4. **Директор С., Рорер.** Введение в теорию систем. М., 1974.

5. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. Кн. 1. М., 1967.

Поступила в редакцию 08.02.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 40—44*

УДК 517.96

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ЯДРА

Б.Т.Калимбетов

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
700125 Ташкент Академгородок ул.Ф.Ходжаева, 29, mathinst@uzsci.net

В статье доказывается асимптотическая сходимость формальных решений интегральных систем к решению вырожденной системы.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\varepsilon^2 y = \int\limits_t^1 (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \tag{1}$$

причем будем предполагать, что $det\ K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$. Более точно, будем считать выполненными следующие условия:

1) $K(t,s) \in C^\infty \left(0 \le s \le t \le 1,\ C^{n^2}\right),\ \ h(t) \in C^\infty\left([0,1], C^n\right);$

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ $(n \times n)$ - матрицы $K(t,t)$ удовлетворяет требованиям

а) $\lambda_j(t) > 0,\ \ i = \overline{1,n},\ \ \forall t \in [0,1]$; б) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t),\ \ i \neq j,\ \ i,j = \overline{1,n},\ \ \forall t \in [0,1]$.

Вместо неизвестной функции $y = y(t,\varepsilon)$ введем новую вектор-функцию

$$z = \int\limits_t^1 (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds.$$

Дифференцируя ее по t и учитывая, что $\varepsilon^2 y = z + h(t)$, будем иметь

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dt} = \int\limits_t^1 G(t,s)z(s,\varepsilon)ds + g(t), \quad z(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где обозначено $G(t,s) \equiv K(t,s) + (t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t},\ \ g(t) \equiv \int\limits_t^1 G(t,s)h(s)ds.$

Решение системы (1) связано с решением системы (2) равенством $y = \varepsilon^{-2}(z + h(t))$. Поэтому, построив асимптотическое решение системы (2), легко вычислим асимптотическое решение системы (1). В работе [1] обсуждалась проблема регуляризации скалярных интегральных

Keywords: *integral equation, degenerate kerned, asymptotical convergence*
2000 Mathematics Subject Classification: 34E10, 34K25, 45M05

уравнений типа (1) и зависимость ее от характера вырождения. Целью нашей работы является изучение предельного перехода в системе (1). Предположим, что предельная система

$$0 = \int_t^1 (t-s)K(t,s)\overline{y}(s) + h(t) \tag{3}$$

имеет решения $y \equiv \overline{y}(t) \in C^\infty([0,1], C^n)$. Тогда необходимо выполнение условий $h(1) = h'(1) = 0$. Действительно, полагая в (3) $t = 1$, получаем $h(1) = 0$. Дифференцируя (3) по t, получим

$$0 = \int_t^1 \left(K(t,s) + (t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \right) \overline{y}(s)ds + h'(t).$$

При $t = 1$ будем иметь $h'(1) = 0$. Дальнейшее дифференцирование приведет к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое при $K(t,s) \in C^2(0 \le s \le t \le 1,\ C^n)$ имеет решение $y = \overline{y}(t) \in C^\infty([0,1],\ C^n)$. Обратные преобразования с учетом условий $h(1) = h'(1) = 0$ являются (при наличии гладкости $K(t,s)$ и $h(t)$) необходимыми и достаточными для существования решения предельной системы (3). Докажем, что в этом случае решение задачи (1) не обязательно сходится при $\varepsilon \to +0$ к решению $\overline{y}(t)$ предельной системы (3).

Обратимся к формуле

$$y_{\varepsilon N} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(h(t) + z_0\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)\right) + \frac{1}{\varepsilon} z_1 \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) + \sum_{j=2}^{N+2} \varepsilon^{j-2} z_j \left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right),$$

где $\frac{\varphi(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_j(\theta)d\theta$, $j = \overline{1,2n}$, $\mu_{2j-1} \equiv -i\sqrt{\lambda_j(t)}$, $\mu_{2j} \equiv +i\sqrt{\lambda_j(t)}$, $j = \overline{1,n}$, $\lambda_j(t)$ – корни характеристического уравнения $\varepsilon^2\lambda_j(t) + K(t,t) = 0$, $j = \overline{1,n}$, $z_k\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right) \in U$ – решение итерационных задач (см., например, [2, 3]), $k = \overline{0, N+2}$.

Из формулы следует, что

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon 0}(t)\|_{C[0,1]} \le C_0\varepsilon, \tag{4}$$

где обозначено

$$y_{\varepsilon 0}(t) = \frac{h(t) + z_0\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^2} + \frac{z_1\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} + z_2\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Пусть теперь выполнены условия $h(1) = h'(1) = 0$. В силу равенства $h(1) = 0$ получаем $z_0(t, \varphi(t)/\varepsilon) \equiv -h(t)$. В этом случае итерационные задачи, из которых вычисляются функции $z_1(t, \varphi(t)/\varepsilon)$ и $z_2(t, \varphi(t)/\varepsilon)$, принимают вид

$$-R_0 z_1 = 0, \qquad z_1(1,0) = 0; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} -R_0 z_2 &= h'(t) - Lz_1 + R_1 z_1, & z_2(1,0) = 0;\\ -R_0 z_3 &= -\frac{\partial z_1}{\partial t} - Lz_2 + R_1 z_2 + R_2 z_1, & z_3(1,0) = 0; \end{aligned} \tag{7}$$

где $R_0 z_1 = \int_t^1 G(t,s) z_0(s)ds$, $L \equiv \sum_{j=1}^{2n} \left[\left(-i\sqrt{\lambda_j(t)}\right)\frac{\partial}{\partial \tau_j} + \left(i\sqrt{\lambda_j(t)}\right)\frac{\partial}{\partial \tau_j}\right]$, $\tau_j = \frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,n}$, R_1, R_2 – интегральные операторы.

Применяя процедуру, развитую при построении решения системы (6) (см. [3]), найдем, что

$$z_1(t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(e^{-\int_t^1 p_k(\theta)d\theta + \tau_{2k-1}} + e^{-\int_t^1 q_k(\theta)d\theta + \tau_{2k}} \right) \cdot \frac{(h'(1), d_k(1))}{\mu_{2k-1}(1)},$$

где $p_k(t)$ и $q_k(t)$ – действительные функции класса $C^\infty([0,T],C^n)$, $k=\overline{1,n}$, так как $h'(1)=0$, $z_1(t,\tau)\equiv 0$. Тогда решение задачи (7) определяется из тройки систем

$$\begin{aligned} &-R_0 z_2 = h'(t), && z_2(1,0)=0;\\ &-R_0 z_3 = -Lz_2 + R_1 z_2, && z_3(1,0)=0;\\ &-R_0 z_4 = -\frac{\partial z_2}{\partial t} - Lz_3 + R_1 z_3 + R_2 z_2, && z_4(1,0)=0. \end{aligned}$$

Решение $z_2(t,\tau)$ задачи (7) имеет вид

$$z_2(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\int\limits_t^1 p_k(\theta)d\theta+\tau_{2k-1}}+e^{-\int\limits_t^1 q_k(\theta)d\theta+\tau_{2k}}\right)\times$$

$$\times\left(-z_2^{(0)}(1),d_k(1)\right)c_k(t)+z_2^{(0)}(t), \tag{8}$$

где $z_2^{(0)}(t)$ – решение интегральной системы

$$-\int\limits_t^1 G(t,s)z_2^{(0)}(s)ds=h'(t)$$

или эквивалентной ей системы (3). Дифференцируя последнюю систему по t, получаем уравнение

$$-K(t,t)z_2^{(0)}(t)-\int\limits_t^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}z_1^{(0)}(s)ds=h''(t).$$

Отсюда видно, что $z_2^{(0)}(1)=-K^{-1}(1,1)h''(1)$, поэтому, если $h''(1)\neq 0$, то в функции $z_2\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)$ (см. (8)) присутствует по крайней мере один из множителей

$$\exp\left\{-\int\limits_t^1 p_k(\theta)d\theta+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_{2k-1}(\theta)d\theta\right\}+\exp\left\{-\int\limits_t^1 q_k(\theta)d\theta+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_{2k}(\theta)d\theta\right\},$$

причем $p_k(t)$ и $q_k(t)$ – действительные функции. Этот множитель быстро осциллирует при $\varepsilon\to+0$ и поскольку $y_{\varepsilon 0}(t)=z_2\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)$, то предельный переход при $\varepsilon\to+0$ $(\forall t\in[0,1])$ невозможен. Если же $h''(1)=0$, то $z_2(t,\tau)\equiv z_2^{(0)}(t)$ и указанный предельный переход имеет место. Очевидно и обратное: если $y(t,\tau)\to\overline{y}(t)$ ($\varepsilon\to+0$) на $[0,1]$, то $h''(1)=0$. Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1) и 2) и* $h(1)=h'(1)=0$. *Для того, чтобы решение* $y(t,\varepsilon)$ *задач (1) сходилось при* $\varepsilon\to+0$ *к решению* $y=\overline{y}(t)$ *предельной системы (3) (равномерно по* $t\in[0,1]$ *), необходимо и достаточно, чтобы* $h''(1)=0$.

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение

$$\varepsilon^2 y=\int\limits_t^1(t-s)y(s)ds+h(t),\quad t\in[0,1]. \tag{9}$$

Это уравнение легко решается. Действительно, дифференцируя дважды, будем иметь

$$\varepsilon^2\frac{d^2y}{dt^2}+y=h''(t),\quad y(1,\varepsilon)=\frac{h(1)}{\varepsilon^2},\quad y'(1,\varepsilon)=\frac{h'(1)}{\varepsilon^2}.$$

Решением этой задачи является функция

$$y(t,\varepsilon)=\left[\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}-\frac{h'(1)}{\varepsilon}\sin\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 h''(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\varepsilon\right]\cos\frac{t}{\varepsilon}+$$

$$+\left[\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}-\frac{h'(1)}{\varepsilon}\cos\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 h''(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\varepsilon\right]\sin\frac{t}{\varepsilon},$$

которую после интегрирования по частям можно записать в форме

$$y(t,\varepsilon)=\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}-\frac{h'(1)}{\varepsilon}\sin\frac{1}{\varepsilon}\right)\cos\frac{t}{\varepsilon}+\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}-\frac{h'(1)}{\varepsilon}\cos\frac{1}{\varepsilon}\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}+$$

$$+h''(t)-h''(1)\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\cos\frac{t}{\varepsilon}\int\limits_t^1 h'''(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta+\sin\frac{t}{\varepsilon}\int\limits_t^1 h'''(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta. \tag{10}$$

Предельное уравнение по отношению к (9) будет таким:

$$\int\limits_t^1 (t-s)\overline{y}(s)ds+h(t)=0.$$

Оно имеет решение $\overline{y}=h''(t)$ при условиях $h(1)=h'(1)=0$. При этих же условиях (10) принимает вид

$$y(t,\varepsilon)=h''(t)-h''(1)\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\left(\int\limits_t^1 h'''(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon}+$$

$$+\left(\int\limits_t^1 h'''(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Еще одно интегрирование по частям показывает, что

$$\left(\int\limits_t^1 h'''(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}+\left(\int\limits_t^1 h'''(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon}\to 0\ (\text{при }\varepsilon\to+0)$$

равномерно по $t\in[0,1]$. Однако, если $h''(1)\neq 0$, то в (11) слагаемое $-h''(1)\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ не имеет предела при $\varepsilon\to+0$ и $t\in[0,1]$. Таким образом, условие $h''(1)=0$ является необходимым и достаточным для наличия предельного перехода $y(t,\varepsilon)\to\overline{y}(t)$ при $\varepsilon\to+0$ на отрезке $t\in[0,1]$. Если же $h''(1)\neq 0$, то точное решение $y(t,\varepsilon)$ уравнения (9) сходится при $\varepsilon\to+0$ к предельному $\overline{y}(t)$ не равномерно, а в норме $L_1[0,1]$. При этом $y(t,\varepsilon)$ совершает около предельного решения $\overline{y}(t)$ быстрые осцилляции. Нарушение же хотя бы одного из условий $h(1)=0$ или $h'(1)=0$ приводит к тому, что указанные осцилляции имеют при $\varepsilon\to+0$ бесконечную амплитуду, в частности, при $t=1$ она равна $h(1)/\varepsilon^2$, что можно установить и непосредственно из уравнения (9).

Цитированная литература

1. **Бободжанов А.А., Туйчиев О.Д.** // Дифференц. уравнения. 1997. Т.33, № 11. С.1537-1542.

2. **Бободжанов А.А., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.** // Вестник МЭИ. 2001. № 6. С.10-24.

3. **Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.** // Труды Межд. конф. "Дифференц. уравнения с частными производными и родств. проблемы анализа и информатики". Ташкент, 2004. Т. II. С.57-63.

Поступила в редакцию 28.04.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 45–51*

УДК 662.92

Построение численного метода решения плоской задачи термодинамики парожидкостной смеси

С.Д.Маусумбекова

КазНУ им.аль- Фараби
050038 Алматы ул. Масанчи, 39/47, s_mausumbekova@mail.ru

Предлагается численный алгоритм решения плоской задачи термодинамики парожидкостной смеси на основе комбинированного представления двухфазного течения. Газ описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса, вкючающей поправки на присутствие конденсированной фазы. Для описания движения частиц применяется траекторная модель. Разработанный алгоритм расчета позволяет проводить реалистичное двумерное моделирование динамики парожидкостной смеси в каналах различной конфигурации, исследовать межфазный массо- теплообмен. Численный алгоритм протестирован на задаче о течении во входном участке канала. Получено удовлетворительное согласование результатов.

Из анализа современного состояния исследований динамики парожидкостных смесей [1-10] вытекает, что в исследовании многофазных сред недостаточно рассмотрена механическая сторона явлений, сопровождающихся интенсивными фазовыми превращениями и перестройкой структур парожидкостного потока. Предложена следующая математическая модель динамики парожидкостных смесей, опирающаяся на смешанное представление двухфазного течения. Основные допущения, используемые при формулировке математической модели, следующие:

- течение является, двухфазным, нестационарным,
- газ является совершенным,
- вторая фаза состоит из полидисперсных частиц сферической формы. С учетом сделанных допущений исходная система имеет вид:

$$\rho_g \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{Fr}\rho_g - \frac{1}{\gamma M^2}\nabla P + K_M \Delta_b \vec{V} + \rho_g g + \dot{F}^s \tag{1}$$

$$\rho_g \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{dP}{dt} + K_H \Delta_b T + \dot{Q}^s \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{V}) = \dot{\rho}^s \tag{3}$$

Keywords: *two-phase flow, vapor-liquid mixture, plane thermodynamics problem, Navier-Stokes equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 76T30

$$P = R_0 T \rho_g \tag{4}$$

Уравнение движения частиц вдоль ее траектории записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_{pk} = \vec{u}_{pk} \tag{5}$$

$$m_p \frac{d}{dt} u_p = \pi d_p^2 \rho_g C_D |V_g - u_p| (V_g - u_p) \tag{6}$$

$$m_p c_p \frac{dT_p}{dt} = \pi d_p \lambda Nu \, (T - T_p) \tag{7}$$

$$\frac{dm_p}{dt} = -m_{vk} \tag{8}$$

где $Fr = V_0^2/gH$- число Фруда, $K_M = K/Re$, $Re = V_0 H \rho_0/\mu$, $K_H = \frac{K_M}{\mathrm{Pr}}$, $K_q = \frac{K_M}{Sc}$, $Sc = \frac{\mu}{\rho_0 D}$ - число Шмидта, $\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ - число Прандтля, K- коэффициент турбулентной вязкости, $M = \frac{V_0}{(\gamma R T_0)^{1/2}}$ – число Маха, g– ускорение свободного падения, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, c_v– удельная теплоемкость при постоянном объеме, m_{vk} - скорость испарения, R–газовая постоянная воздуха, остальные обозначения общепринятые.

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p}\left(1 + \frac{1}{6} Re_p^{2/3}\right) \text{ при } \mathrm{Re}_p \le 1000 \\ 0,424 \text{ при } \mathrm{Re}_p > 1000 \end{cases}$$

Таким образом, имеем две системы уравнений, одна система (1)-(4) для несущей фазы (газа), другая (5)-(8) для частиц (жидкие капли). Эти уравнения соединяют основные два механизма: перемещение газа с объемом занимаемым частицами и обмен импульсом между частицами и газом. Влияние конденсированной фазы на газ учитывается через источниковые члены

$$\dot{\rho}^s = -\int f \rho_p 4\pi r^2 R d\vec{u}_p dT_p dy d\dot{y},$$

$$\vec{F}^s = -\int f \rho_p \left(\frac{4}{3}\pi r^3 (\vec{F} - \vec{g}) + 4\pi r^2 R \vec{u}_p\right) d\vec{u}_p dr dT_p dy d\dot{y},$$

$$\dot{Q}^s = -\int f \rho_p \big\{ 4\pi r^2 R \big[I(T_p) + \tfrac{1}{2}(\vec{u}_p - \vec{u})^2 \big] +$$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 \Big[c_p(\dot{T}_p) + (\vec{F} - \vec{g}) \cdot (\vec{u}_p - \vec{u} - \vec{u}_p') \Big] \Big\} d\vec{u}_p dr dT_p dy d\dot{y},$$

Так как в каждом из уравнений сохранения фигурирует функция распределения, ясно, что эти уравнения связаны с уравнением вида [11]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (f\vec{V}) + \nabla_V \cdot (f\vec{F}) + \frac{\partial (fR)}{\partial r} + \frac{\partial (f\dot{T}_p)}{\partial T_p} + \frac{\partial (f\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial (f\ddot{y})}{\partial \dot{y}} = \dot{f}_{coll} + \dot{f}_{bu} \tag{9}$$

где первое слагаемое в правой части учитывает изменение функции вследствие процессов столкновения, второе слагаемое - вследствие распада частиц. Таким образом, для наиболее адекватного моделирования межфазного тепло-массообмена необходимо учитывать реальное распределение частиц по размеру, температуре, скорости и т.д. Поэтому полная система уравнений оказывается очень сложной и получение ее решения в общем случае оказывается чрезвычайно трудоемким. В работе [11] указывается переход от уравнения (9) к дискретному описанию распределения частиц. Уравнение впрыска описывает поведение функции распределения частиц, которая определяется как

$$dN = f\left(r, \vec{x}, \vec{u}_p, t\right) dr d\vec{x} d\vec{u}_p \tag{10}$$

$$\Delta N = \int\limits_{\Delta r, \Delta\vec{x}, \Delta\vec{u}_p} \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) dr d\vec{x} d\vec{u}_p \tag{11}$$

осредняя получим:

$$\Delta N = \int\limits_{\Delta r, \Delta\vec{x}, \Delta\vec{u}_p} < \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) > dr d\vec{x} d\vec{u}_p \tag{12}$$

$$\Delta N = < \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) > \int\limits_{\Delta r, \Delta\vec{x}, \Delta\vec{u}_p} dr d\vec{x} d\vec{u}_p =$$

$$= < \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) > \Delta r \Delta\vec{x} \Delta\vec{u}_p \tag{13}$$

Сравнивая его с (11), мы можем непосредственно увидеть, что в пределах бесконечно малого объема

$$f\left(r, \vec{x}, \vec{u}_p, t\right) = < \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) > \tag{14}$$

Мгновенная функция распределения есть:

$$f\left(r, \vec{x}, \vec{u}_p, t\right) = \sum_p N_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) \tag{15}$$

где N_p - число одинаковых частиц. Число N_p определяется с помощью граничных условий и $\sum\limits_p N_p m_p = M$, где $M-$масса частиц. Вычисление больших количеств реализации, чтобы получить среднее множество нецелесообразно. Ссылаясь к (13)-(15) мы видим, что

$$f\left(r, \vec{x}, \vec{u}_p, t\right) = < \sum_p \delta\left(r - r_p\right) \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_p\right) \delta\left(\vec{u} - \vec{u}_p\right) > \approx \frac{\Delta N}{\Delta r \Delta\vec{x} \Delta\vec{u}_p} \tag{16}$$

где ΔN - число частиц в "объеме"$\Delta x \Delta r \Delta u_p$. Подставив это выражение в источниковые члены, получим:

$$\dot{\rho}^s = -\frac{1}{V \Delta t} \sum_{p \in (i,j,k)} N_p' \rho_p \frac{4}{3} \pi r_p^3$$

$$\dot{Q}^s = -\frac{1}{V \Delta t} \sum_{p \in (i,j,k)} N_p' \rho_p \frac{4}{3} \pi \left\{ r_p^3 I\left(T_p\right) + r^3 \vec{v}_p \cdot \left(\vec{v}_p^t - u_{lmn}\right) + \frac{1}{2} r_p^3 \left(u_p - u_{lmn}\right)^2 \right\}$$

Гетерогенные смеси (газ- жидкие капли, газ- твердые частицы) представляют собой, как правило, существенно неравновесные системы, которым присущ большой набор физико-химических процессов, протекающих как внутри каждой из фаз, так и на межфазных границах. Для численного решения таких течений разработан лагранжево-эйлеровский алгоритм, который позволяет проводить анализ каждой из фаз естественным образом. Для описания течения используется двухскоростная, двухтемпературная среда. Полная нестационарная система уравнений Навье-Стокса для несущей фазы, включающая поправки на присутствие конденсированных частиц решается проекционным методом. Приведем алгоритм решения этой системы. Основные трудности, возникающие при численном интегрировании системы уравнений (1)-(4) для малых чисел Маха, указаны и исследованы в работе [11]. Для устранения этих трудностей осуществляется преобразование, которое основывается на представлении искомых величин, изменяющихся в некоторых неопределенных пределах, к другим переменным, изменение которых заведомо происходит в интервале порядка единицы. Для этого, вместе со слабо изменяющимся в воздушном потоке безразмерным статическим давлением $P^* \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} = -\frac{\gamma M^2}{Fr}\rho^*\right)$ вводится безразмерное динамическое давление (отнесенное к удвоенному напору -$\rho_0 V_0^2$), изменяющееся в пределах от нуля до значения порядка единицы:

$$\bar{P} = \frac{P - P^*}{\gamma M^2},$$

тогда

$$P = \gamma M^2 \bar{P} + P^*. \tag{17}$$

В начальный момент времени газ находится в состоянии покоя, начальное распределение температуры почти не изменяется с высотой. При этом начальные распределения гидростатического давления изменяются по экспоненциальному закону вида:

$$P^* = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right) \tag{18}$$

На входе задан линейный рост поля скорости по времени $u = 2t, w = 0$ до момента $t = 0,5$, далее скорость принимается постоянной $u = 1, w = 0$, остальные условия следующие: $T = 1 - mz$. На нижней и верхней границе условия для поля скорости совпадают с условиями на входе, для температуры и плотности имеют вид:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f = [T, \rho]. \tag{19}$$

На выходе приняты граничные условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = [u, T, \rho]. \tag{20}$$

Численная реализация системы (1)-(4), (18)-(20) осуществляется в последовательности, указанной римскими цифрами:

I. Динамические характеристики определяются проекционным методом, который является одним из эффективных методов при решении уравнений Навье-Стокса. Таким образом, для решения системы уравнений (1)-(4) был применен этот метод, модифицированный применительно к исходным уравнениям следующим образом:

1. Определение вспомогательного поля $(\overline{u\rho})$ и $(\overline{w\rho})$:

$$\frac{(\overline{u\rho}) - (u\rho)^n}{\tau} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial (u^2\rho)^n}{\partial x} - \frac{\partial (uw\rho)^n}{\partial z} + (F_x^s)^n,$$

$$\frac{(\overline{w\rho}) - (w\rho)^n}{\tau} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\gamma M^2}\frac{\partial P^*}{\partial z} - \frac{\rho}{Fr} - \frac{\partial (w^2\rho)^n}{\partial z} - \frac{\partial (uw\rho)^n}{\partial x} + (F_z^s)^n,$$

$$\rho^{n+1,1} = P^n / T^n$$

2. Расчет динамического давления:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho^{n+1,k}}\frac{\partial \bar{P}^{n+1,k}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho^{n+1,k}}\frac{\partial \bar{P}^{n+1,k}}{\partial z} = -\frac{div\vec{V}^{n+1,k}}{\tau} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\overline{u\rho})}{\rho^{n+1,k}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{(\overline{w\rho})}{\rho^{n+1,k}}\right). \qquad (21)$$

3. Вычисление окончательных значений поля скорости, полного давления и плотности:

$$w^{n+1,k} = \frac{(\overline{w\rho})}{\rho^{n+1,k}} - \frac{\tau}{\rho^{n+1,k}}\frac{\partial \bar{P}^{n+1,k}}{\partial z}, \qquad (22)$$

$$P^{n+1,k} = \gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k} + P^*, \qquad \rho^{n+1,k} = P^{n+1,k}/T^n.$$

Из уравнения (21) видно, что в правой части присутствует значение дивергенции скорости на (n + 1)−ом слое. Для его определения уравнение неразрывности из системы уравнений (20) представим в виде

$$div\vec{V}^{n+1,k} = -\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \left(\frac{\vec{V}}{\rho} grad\rho\right)^n + \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_g^n}.$$

С учетом уравнения состояния и преобразования (17), это выражение записывается в форме

$$div\vec{V}^{n+1,k} = -\frac{1}{\rho^n}\frac{\frac{\gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k} + P^*}{T} - \rho^n}{\tau} - \left(\frac{\vec{V}}{\rho} grad\rho\right)^n + \frac{\dot{\rho}_s}{\rho_g^n}$$

и окончательно получается

$$div\vec{V}^{n+1,k} = -\frac{\gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k}}{\rho^n T \tau} - \frac{1}{\rho^n}\left(\frac{P^*}{\tau T_v} - \frac{\rho^n}{\tau} + \vec{V}^n grad\rho^n + \rho_s\right).$$

Подстановка данной формы записи дивергенции в уравнение (21) приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho^{n+1,k}}\frac{\partial \bar{P}^{n+1,k}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho^{n+1,k}}\frac{\partial \bar{P}^{n+1,k}}{\partial z} - \frac{\gamma M^2}{\rho^n T_v^n \tau^2}\bar{P}^{n+1,k} =$$

$$= \frac{1}{\rho^n}\left(\frac{1}{T_v^n \tau^2}P^* - \frac{1}{\tau^2}\rho^n + \frac{\vec{V}^n}{\tau} grad\rho^n + \rho_s\right) + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{(\overline{u\rho})}{\rho^{n+1,k}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{(\overline{w\rho})}{\rho^{n+1,k}}\right),$$

решение которого осуществляется методом симметричной последовательной верхней релаксации. С учетом того, что верхняя граница представляет собой жесткую пластину, движущуюся с заданной скоростью, рассматриваемая задача фактически сводится к внутренним задачам. Для внутренних течений граничные условия Неймана для динамического давления часто задаются на всех границах. В этом случае необходимо выполнение глобального условия, т.е.

$$\iint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\right)\partial x \partial z = \int\limits_C \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}\partial s\ ,$$

где интеграл по C вычисляется вдоль границы рассматриваемой области.

I. Определяется окончательное значение давления по формуле

$$P^{n+1,k} = \gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k} + P^*.$$

II. Производится расчет промежуточного значения плотности:

$$\bar{\rho}^{n+1,k} = \frac{\gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k} + P^*}{T^n}.$$

III. Поле температуры рассчитывается методом переменных направлений с монотонной схемой по пространственным координатам, имеющей второй порядок аппроксимации, т.е. наряду с основными значениями искомой сеточной функции $T = T^n$ и $T = T^{n+1}$ вводится промежуточное значение $T = T^{n+1/2}$, которое формально рассматривается как значение при $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Таким образом,

$$(E + 0,5\tau\Lambda_2)\, T^{n+1} = (E - 0,5\tau\Lambda_1)\, T^{n+1/2} - 0,5\tau \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dP}{dt}, \tag{23}$$

где $\Lambda_\beta T = -\chi(\alpha T_{\bar{\ell}})_\ell + b^- \alpha T_\ell + b^+ \alpha T_{\bar{\ell}}\, quad \beta = 1,2;$ причем при $\beta = 1 \quad l = x$, а при $\beta = 2 \quad l = z$, E $-$ единичный оператор,

$$\chi = \frac{1}{1 + R_\ell}, \quad \alpha = \frac{1}{\rho Re \Pr}, \quad b^+ = \frac{r^+}{K}, \quad b^- = \frac{r^-}{K}, K = \frac{1}{\rho Re \Pr},$$

$$r^+ = 0.5(r + |r|), \quad r^- = 0.5(r - |r|), \quad |r| = r^+ + r^-, \quad r = r^+ - r^-,$$

$$R_\ell = 0.5 h_\ell \rho Re \Pr |r|, \quad r = (u, w).$$

Реализация уравнений (23) осуществляется методом скалярной прогонки.

IV. Определяется окончательное значение плотности:

$$\rho^{n+1,k+1} = \frac{\gamma M^2 \bar{P}^{n+1,k} + P^*}{T^{n+1,k}}.$$

V. Затем на данном временном слое повторяется расчет поля давления, скорости и температуры с учетом вновь найденного поля плотности до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\max_{i,j} \left| \rho_{i,j}^{n+1,k+1} - \rho_{i,j}^{n+1,k} \right| < \delta,$$

где δ $-$ малая величина.

VI. На этом этапе решаются уравнения для характеристик частиц (жидкие капли)

$$\tfrac{x_p^{n+1} - x_p^n}{\Delta t} = u_p^n,$$

$$\tfrac{u_p^{n+1} - u_p^n}{\Delta t} = \tfrac{D_p}{m_p}(V_g^{n+1} - u_p^{n+1}).$$

Предложенный численный алгоритм тестировался на задаче о течении во входном участке трубы и канала [12]. Получено удовлетворительное согласование результатов. На рисунке 1 приведены результаты сравнения, где сопоставлены осевые скорости на центральной линии канала: $+ + +$ - расчет предложенным алгоритмом, $- - - -$ результаты [12].

З а к л ю ч е н и е. На основании проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- разработана численная модель термодинамики парожидкостной смеси;

- полученные результаты качественно согласуются с данными других авторов;
- предложенный метод решения позволяет провести дальнейшие исследования влияния параметров на структуру двухфазного течения в каналах различной конфигурации.

Цитированная литература

1. **Нигматуллин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.
2. **Нигматуллин Р.И.** Динамика многофазных сред. М., 1987.Ч. 1,2.
3. **Ивандаев А.И.** // Теплофизика высоких температур. 1978. Т.16, №6. С.1269-1276.
4. **Ивандаев А.И., Губайдуллин А.А.** // Теплофизика высоких температур. 1978. Т.16, №3. С.556-562.
5. **Миллер С.** // Теплопередача. 1985. Т.107, №4. С.1-8.
6. **Чжэн Л., Дрю Д., Лаки Р.** // Теплопередача. 1985. Т.107, №2. С.137-145.
7. **Добран Ф.** // Теплопередача. 1988. Т 110, №3. С.206-215.
8. **Саха Р., Ву С.** // Телопередача. 1984. Т.106 , №1. С.181-187.
9. **Нигматуллин Б.И., Сопленков К.И.** // Теплофизика высоких температур. 1990. Т.18, №1. С.118-131.
10. **Dukowicz. J.K.** // Journal of Computational Physics, 1980. V.35, №2. P.229-253.
11. **Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.** Внутренние течения газовых смесей. М., 1989.
12. **Макдональд Дж.В. и др.** // Труды амер. общ. инж.-мех. сер.Е.1982.№4.С.1245-1256.

Поступила в редакцию 07.01.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 52–56*

УДК 521.1

ИНВАРИАНТЫ ЦЕНТРА МАСС ЗАДАЧИ МНОГИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

М. Дж.Минглибаев

АФИФ МОН РК, КазНТУ им. К.Сатпаева,
050013 г.Алматы ул.Сатпаева, 22 minglibayev@ntu.kz

Рассмотрена задача многих гравитирующих тел с изотропно изменяющимися массами в случае, когда массы изменяются со временем в различных темпах. Выведены дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. Получены инварианты центра масс.

1. Введение. В связи с нестационарностью реальных космических систем активно разрабатываются динамические проблемы гравитирующих систем переменной массы [1-5]. Сюда относятся, в частности, вопросы динамической эволюции гравитирующих систем, описываемых задачами трех и N тел с переменными массами. В настоящей работе рассмотрена задача многих гравитирующих тел в различных темпах изменяющимися массами. Выведены дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. В барицентрической системе координат получены инварианты центра масс.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему свободных $n+1$ тел $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$, взаимогравитирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = m_0(t),\ m_1 = m_1(t),\ m_2 = m_2(t),\ \cdots,\ m_n = m_n(t), \tag{1}$$

изоторопно изменяющимися в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j},\ i \neq j. \tag{2}$$

Тела рассмотрим как материальные точки. Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой задачи в абсолютной системе координат в случае (2) не имеют ни одного известного интеграла. Переход к относительной системе координат с началом в точке P_0 с массой $m_0 = m_0(t)$ понижает порядок системы. В этом случае дифференциальные уравнения относительного движения имеют вид [5]

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i)\frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = grad_{\vec{R}_i} W_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

Keywords: *center of mass, variable mass, many-body problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34C14

где

$$W_i = f\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_iX_j + Y_iY_j + Z_iZ_j}{R_j^3}\right), \ \ i \neq j, \tag{4}$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}, \tag{5}$$

$$\Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}. \tag{6}$$

В системе неавтономных дифференциальных уравнений (3) при условии (2) в отличие от других постановок задачи многих тел с переменными массами [1,3] неизвестен ни один интеграл [5]. В связи с этим требуется найти инварианты центра масс в барицентрической системе координат.

3. Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. Для того, чтобы получить инварианты центра масс, исходя из уравнения относительного движения (3), сначала переходим к координатам Якоби, затем переходим к барицентрической системе координат. Тогда в барицентрической системе координат можно написать инварианты центра масс.

Используя свойства барицентра системы материальных точек, известных из аналитической геометрии [6], исходя из дифференциальных уравнений относительного движения (3)-(6) можно написать дифференциальные уравнения движения рассматриваемой задачи в координатах Якоби. Обозначим

$$\nu_j = \nu_j(t) = \frac{m_j}{\sigma_j}, \quad \sigma_j = m_0 + m_1 + m_2 + ... + m_j. \tag{7}$$

Тогда, исходя из определения барицентра системы материальных точек и его свойств, геометрическим путем получим формулу перехода к координатам Якоби

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \sum_{j=0}^{i-1} \nu_j \vec{r}_j, \quad\ i = 1, 2, ...n, \tag{8}$$

где $\vec{r}_i$ - радиус-векторы тел в координатах Якоби, причем $\vec{r}_0 = 0$. Из соотношений (8), (3) получим

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = grad_{\vec{r}_i} U - \mu_i \sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{9}$$

где

$$U = f\sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \ i \neq j, \tag{10}$$

$$\mu_i = \mu_i(t) = m_i \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \nu_i \sigma_{i-1} \tag{11}$$

– приведенные массы, которые являются произвольными функциями времени соответствующей структуры. Силовая функция U задается формулой (10), в которой взаимные расстояния тел (5),(6) согласно (8) преобразуются к виду

$$\vec{\Delta}_{sk} = \vec{R}_k - \vec{R}_s = \vec{r}_k - \vec{r}_s + \sum_{j=s}^{k-1} \nu_j \vec{r}_j, \qquad\quad k > s. \tag{12}$$

Полученные неавтономные дифференциальные уравнения движения в координатах Якоби (9) удобны для исследований рассматриваемой задачи многих тел с переменными массами (1), (2), так как используется одна силовая функция U для всей системы. Например, для задачи трех тел

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t)$$

из соотношения (9) получим

$$\begin{aligned} &\mu_1\ddot{\vec{r}_1} = grad_{\vec{r}_1}U, \\ &\mu_2\ddot{\vec{r}_2} = grad_{\vec{r}_2}U - \mu_2(2\dot{\nu_1}\dot{\vec{r}_1} + \ddot{\nu_1}\vec{r}_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Соответственно из формул (7), (10)-(12) имеем

$$\nu_1 = \frac{m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu_1 = m_1\frac{m_0}{m_0+m_1}, \quad \mu_2 = m_2\frac{m_0+m_1}{m_0+m_1+m_2},$$

$$U = f\left(\frac{m_0m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}\right),$$

$$\Delta_{sk}^2 = \left(x_k - x_N + \sum_{j=s}^{k-1}\nu_jx_j\right)^2 + \left(y_k - y_N + \sum_{j=s}^{k-1}\nu_jy_j\right)^2 + \left(z_k - z_N + \sum_{j=s}^{k-1}\nu_jz_j\right)^2.$$

Исходя из уравнений движения в координатах Якоби (9), получим уравнения движения в барицентрической системе координат. Через $\vec{r}_{\delta i}\,(i = 0, 1, 2, ..., n)$ обозначим радиус–векторы тел P_i в барицентрической системе координат. Тогда из геометрии точечных масс [6] получим формулы преобразований

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\delta 0} &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i, \\ \vec{r}_{\delta 1} &= -\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\vec{r}_1, \\ \vec{r}_{\delta 2} &= -\sum_{i=3}^{n}\frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\vec{r}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{r}_{\delta n-1} &= -\sum_{i=n}^{n}\frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\vec{r}_{n-1}, \\ \vec{r}_{\delta n} &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\vec{r}_n, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\vec{r}_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ – радиус-векторы тел в системе координат Якоби. Из соотношения (14) следует

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\vec{r}_{\delta i} = 0, \tag{15}$$

что естественно для радиус–векторов тел в барицентрической системе координат.

Формулы для обратных преобразований имеют вид

$$\vec{r}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\vec{r}_{\delta n},$$

$$\vec{r}_{n-1} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}[\vec{r}_{\delta n-1} + \frac{m_n}{\sigma_n}\vec{r}_n],$$

$$. . . . .$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2}[\vec{r}_{\delta 3} + \sum_{i=4}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i], \tag{16}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}[\vec{r}_{\delta 2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i],$$

$$\vec{r}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}[\vec{r}_{\delta 1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i].$$

Из формул (16), учитывая (15), имеем

$$\vec{r}_n = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} m_j(\vec{r}_{\delta n} - \vec{r}_{\delta j}). \tag{17}$$

Учитывая (7), (11), перепишем (14) в виде

$$m_0\vec{r}_{\delta 0} = -\sum_{i=1}^{n} (\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})(\mu_i \vec{r}_1),$$

$$m_k\vec{r}_{\delta k} = -\sum_{i=k+1}^{n} (\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})(\mu_i \vec{r}_i) + \mu_k \vec{r}_k, \ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{18}$$

$$m_n\vec{r}_{\delta n} = \mu_n \vec{r}_n.$$

Откуда получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0\vec{r}_{\delta 0}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_0}{\sigma_{i-1}} \frac{d^2}{dt^2}(\mu_i \vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{n} [2\frac{d}{dt}(\mu_i \vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i \vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_k\vec{r}_{\delta k}) = \frac{d^2}{dt^2}(\mu_k \vec{r}_k) - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k}{\sigma_{i-1}} \frac{d^2}{dt^2}(\mu_i \vec{r}_i) - \sum_{i=k+1}^{n} [2\frac{d}{dt}(\mu_i \vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i \vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_n\vec{r}_{\delta n}) = \frac{d^2}{dt^2}(\mu_n \vec{r}_n). \tag{19}$$

Уравнения (9) перепишем в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mu_i \vec{r}_i) = grad_{\vec{r}_i} U - \mu_i \sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j) + 2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{20}$$

Уравнения движения в барицентрической системе координат следуют из соотношений (19), (20):

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0\vec{r}_{\delta 0}) = grad_{\vec{r}_{\delta_0}} U + \overrightarrow{F}_{\delta 0}, \tag{21}$$

$$\overrightarrow{F}_{\delta 0} = m_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}} [\sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j)] - \sum_{i=1}^{n} [\frac{m_0}{\sigma_{i-1}} (2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i) + 2\frac{d}{dt}(\mu_i \vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i \vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_k\vec{r}_{\delta k}) = grad_{\vec{r}_{\delta k}} U + 2\dot{\mu}_k \dot{\vec{r}}_k + \ddot{\mu}_k \vec{r}_k - \mu_k \sum_{j=0}^{k-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j) + \overrightarrow{F}_{\delta k}, \ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{22}$$

$$\vec{F}_{\delta k} = m_k \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}}[\sum_{j=0}^{i-1}(2\dot{\nu}_j\dot{\vec{r}}_j+\ddot{\nu}_j\vec{r}_j)]-\sum_{i=k+1}^{n}[\frac{m_k}{\sigma_{i-1}}(2\dot{\mu}_i\dot{\vec{r}}_i+\ddot{\mu}_i\vec{r}_i)+2\frac{d}{dt}(\mu_i\vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})+(\mu_i\vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_n\vec{r}_{\delta n}) = grad_{\vec{r}_{\delta n}}U + 2\dot{\mu}_n\dot{\vec{r}}_n + \ddot{\mu}_n\vec{r}_n - \mu_n\sum_{j=0}^{n-1}(2\dot{\nu}_j\dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j\vec{r}_j), \qquad (23)$$

где правые части уравнений выражаются через барицентрические координаты согласно выражению (17).

4. Инварианты центра масс. Из соотношений (19), (20) (или (21)-(23)) с учетом

$$\frac{m_0 + m_1 + m_2 + ... + m_j}{\sigma_j} = 1 = const$$

получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sum_{i=0}^{n} m_i\vec{r}_{\delta i}) = 0. \qquad (24)$$

Следовательно, можно написать инварианты центра масс в барицентрической системе координат:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=0}^{n} m_i\vec{r}_{\delta i}) = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\vec{r}_{\delta i} = 0. \qquad (25)$$

Учитывая, что в барицентрической системе координат

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_{\delta i} = 0, \qquad (26)$$

инвариантам центра масс (25) в барицентрической системе координат можно придать вид

$$\sum_{i=0}^{n} \dot{m}_i\vec{r}_{\delta i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\vec{r}_{\delta i} = 0. \qquad (27)$$

5. Заключение. Полученные инварианты являются единственными аналитическими соотношениями, связывающими координаты, скорости и законы изменения масс в рассматриваемой проблеме многих тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами (1),(2) в барицентрической системе координат. Они могут быть эффективно использованы в исследовании нестационарных гравитирующих систем. Аналогично могут быть получены инварианты центра масс рассматриваемой задачи, когда массы тел изменяются в различных темпах анизотропно.

Цитированная литература

1. **Омаров Т.Б.** Динамика гравитирующих систем метагалактики. Алма- Ата, 1975.
2. **Поляхова Е.Н.** // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. 1989. Т.42, вып. 64, №42. С. 104-143.
3. **Omarov Tuken B.** Non - Stationary Dynamical Problems in Astronomy. Nova Science Publishers Jnc. N.-Y, 2002.
4. **Plastino A.R., Muzzio J.C.** // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V.59. P. 201-208.
5. **Лукьянов Л.Г.** // Астрон. журнал. 1983. Т. 60, вып. 1 С. 181-184.
6. **Александров П.С.** Лекции по аналитической геометрии. М., 1968.

Поступила в редакцию 05.03.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 52—56*

УДК 521.1

ИНВАРИАНТЫ ЦЕНТРА МАСС ЗАДАЧИ МНОГИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

М. Дж.Минглибаев

АФИФ МОН РК, КазНТУ им. К.Сатпаева,
050013 г.Алматы ул.Сатпаева, 22 minglibayev@ntu.kz

Рассмотрена задача многих гравитирующих тел с изотропно изменяющимися массами в случае, когда массы изменяются со временем в различных темпах. Выведены дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. Получены инварианты центра масс.

1. Введение. В связи с нестационарностью реальных космических систем активно разрабатываются динамические проблемы гравитирующих систем переменной массы [1-5]. Сюда относятся, в частности, вопросы динамической эволюции гравитирующих систем, описываемых задачами трех и N тел с переменными массами. В настоящей работе рассмотрена задача многих гравитирующих тел в различных темпах изменяющимися массами. Выведены дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. В барицентрической системе координат получены инварианты центра масс.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему свободных $n+1$ тел $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$, взаимогравитирующих по закону Ньютона, с переменными массами

$$m_0 = m_0(t),\ m_1 = m_1(t),\ m_2 = m_2(t),\ \cdots,\ m_n = m_n(t), \tag{1}$$

изоторопно изменяющимися в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j},\ i \neq j. \tag{2}$$

Тела рассмотрим как материальные точки. Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой задачи в абсолютной системе координат в случае (2) не имеют ни одного известного интеграла. Переход к относительной системе координат с началом в точке P_0 с массой $m_0 = m_0(t)$ понижает порядок системы. В этом случае дифференциальные уравнения относительного движения имеют вид [5]

$$\ddot{\vec{R}}_i + f(m_0 + m_i)\frac{\vec{R}_i}{R_i^3} = grad_{\vec{R}_i} W_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

Keywords: *center of mass, variable mass, many-body problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34C14

где

$$W_i = f\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_iX_j + Y_iY_j + Z_iZ_j}{R_j^3}\right), \ i \neq j, \tag{4}$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}, \tag{5}$$

$$\Delta_{i0} = R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}. \tag{6}$$

В системе неавтономных дифференциальных уравнений (3) при условии (2) в отличие от других постановок задачи многих тел с переменными массами [1,3] неизвестен ни один интеграл [5]. В связи с этим требуется найти инварианты центра масс в барицентрической системе координат.

3. Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат. Для того, чтобы получить инварианты центра масс, исходя из уравнения относительного движения (3), сначала переходим к координатам Якоби, затем переходим к барицентрической системе координат. Тогда в барицентрической системе координат можно написать инварианты центра масс.

Используя свойства барицентра системы материальных точек, известных из аналитической геометрии [6], исходя из дифференциальных уравнений относительного движения (3)-(6) можно написать дифференциальные уравнения движения рассматриваемой задачи в координатах Якоби. Обозначим

$$\nu_j = \nu_j(t) = \frac{m_j}{\sigma_j}, \quad \sigma_j = m_0 + m_1 + m_2 + ... + m_j. \tag{7}$$

Тогда, исходя из определения барицентра системы материальных точек и его свойств, геометрическим путем получим формулу перехода к координатам Якоби

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \sum_{j=0}^{i-1} \nu_j \vec{r}_j, \quad i = 1, 2, ...n, \tag{8}$$

где $\vec{r}_i$ - радиус-векторы тел в координатах Якоби, причем $\vec{r}_0 = 0$. Из соотношений (8), (3) получим

$$\mu_i \ddot{\vec{r}}_i = grad_{\vec{r}_i} U - \mu_i \sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j), \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{9}$$

где

$$U = f\sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \, i \neq j, \tag{10}$$

$$\mu_i = \mu_i(t) = m_i \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \nu_i \sigma_{i-1} \tag{11}$$

– приведенные массы, которые являются произвольными функциями времени соответствующей структуры. Силовая функция U задается формулой (10), в которой взаимные расстояния тел (5),(6) согласно (8) преобразуются к виду

$$\vec{\Delta}_{sk} = \vec{R}_k - \vec{R}_s = \vec{r}_k - \vec{r}_s + \sum_{j=s}^{k-1} \nu_j \vec{r}_j, \qquad k > s. \tag{12}$$

Полученные неавтономные дифференциальные уравнения движения в координатах Якоби (9) удобны для исследований рассматриваемой задачи многих тел с переменными массами (1), (2), так как используется одна силовая функция U для всей системы. Например, для задачи трех тел

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t)$$

из соотношения (9) получим

$$\begin{aligned} &\mu_1 \ddot{\vec{r}_1} = grad_{\vec{r}_1} U, \\ &\mu_2 \ddot{\vec{r}_2} = grad_{\vec{r}_2} U - \mu_2(2\dot{\nu_1}\dot{\vec{r}_1} + \ddot{\nu_1}\vec{r}_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Соответственно из формул (7), (10)-(12) имеем

$$\nu_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_1 = m_1 \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2},$$

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}}\right),$$

$$\Delta_{sk}^2 = \left(x_k - x_N + \sum_{j=s}^{k-1} \nu_j x_j\right)^2 + \left(y_k - y_N + \sum_{j=s}^{k-1} \nu_j y_j\right)^2 + \left(z_k - z_N + \sum_{j=s}^{k-1} \nu_j z_j\right)^2.$$

Исходя из уравнений движения в координатах Якоби (9), получим уравнения движения в барицентрической системе координат. Через $\vec{r}_{\delta i}\,(i = 0, 1, 2, ..., n)$ обозначим радиус–векторы тел P_i в барицентрической системе координат. Тогда из геометрии точечных масс [6] получим формулы преобразований

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\delta 0} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i, \\ \vec{r}_{\delta 1} &= -\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\vec{r}_1, \\ \vec{r}_{\delta 2} &= -\sum_{i=3}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\vec{r}_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{r}_{\delta n-1} &= -\sum_{i=n}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i + \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\vec{r}_{n-1}, \\ \vec{r}_{\delta n} &= \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\vec{r}_n, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\vec{r}_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ – радиус-векторы тел в системе координат Якоби. Из соотношения (14) следует

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_{\delta i} = 0, \tag{15}$$

что естественно для радиус–векторов тел в барицентрической системе координат.

Формулы для обратных преобразований имеют вид

$$\vec{r}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\vec{r}_{\delta n},$$

$$\vec{r}_{n-1} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}[\vec{r}_{\delta n-1} + \frac{m_n}{\sigma_n}\vec{r}_n],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2}[\vec{r}_{\delta 3} + \sum_{i=4}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i], \tag{16}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}[\vec{r}_{\delta 2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i],$$

$$\vec{r}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}[\vec{r}_{\delta 1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i}\vec{r}_i].$$

Из формул (16), учитывая (15), имеем

$$\vec{r}_n = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} m_j(\vec{r}_{\delta n} - \vec{r}_{\delta j}). \tag{17}$$

Учитывая (7), (11), перепишем (14) в виде

$$m_0\vec{r}_{\delta 0} = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})(\mu_i\vec{r}_1),$$

$$m_k\vec{r}_{\delta k} = -\sum_{i=k+1}^{n}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})(\mu_i\vec{r}_i) + \mu_k\vec{r}_k,\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{18}$$

$$m_n\vec{r}_{\delta n} = \mu_n\vec{r}_n.$$

Откуда получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0\vec{r}_{\delta 0}) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}\frac{d^2}{dt^2}(\mu_i\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{n}[2\frac{d}{dt}(\mu_i\vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i\vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_k\vec{r}_{\delta k}) = \frac{d^2}{dt^2}(\mu_k\vec{r}_k) - \sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k}{\sigma_{i-1}}\frac{d^2}{dt^2}(\mu_i\vec{r}_i) - \sum_{i=k+1}^{n}[2\frac{d}{dt}(\mu_i\vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i\vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_n\vec{r}_{\delta n}) = \frac{d^2}{dt^2}(\mu_n\vec{r}_n). \tag{19}$$

Уравнения (9) перепишем в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mu_i\vec{r}_i) = grad_{\vec{r}_i}U - \mu_i\sum_{j=0}^{i-1}(2\dot{\nu}_j\dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j\vec{r}_j) + 2\dot{\mu}_i\dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i\vec{r}_i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{20}$$

Уравнения движения в барицентрической системе координат следуют из соотношений (19), (20):

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_0\vec{r}_{\delta 0}) = grad_{\vec{r}_{\delta_0}}U + \overrightarrow{F}_{\delta 0}, \tag{21}$$

$$\overrightarrow{F}_{\delta 0} = m_0\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}}[\sum_{j=0}^{i-1}(2\dot{\nu}_j\dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j\vec{r}_j)] - \sum_{i=1}^{n}[\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}(2\dot{\mu}_i\dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i\vec{r}_i) + 2\frac{d}{dt}(\mu_i\vec{r}_i)\frac{d}{dt}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i\vec{r}_i)\frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_0}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_k\vec{r}_{\delta k}) = grad_{\vec{r}_{\delta k}}U + 2\dot{\mu}_k\dot{\vec{r}}_k + \ddot{\mu}_k\vec{r}_k - \mu_k\sum_{j=0}^{k-1}(2\dot{\nu}_j\dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j\vec{r}_j) + \overrightarrow{F}_{\delta k},\ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{22}$$

$$\overrightarrow{F}_{\delta k} = m_k \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\mu_i}{\sigma_{i-1}} [\sum_{j=0}^{i-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j)] - \sum_{i=k+1}^{n} [\frac{m_k}{\sigma_{i-1}} (2\dot{\mu}_i \dot{\vec{r}}_i + \ddot{\mu}_i \vec{r}_i) + 2\frac{d}{dt}(\mu_i \vec{r}_i) \frac{d}{dt}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}}) + (\mu_i \vec{r}_i) \frac{d^2}{dt^2}(\frac{m_k}{\sigma_{i-1}})],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_n \vec{r}_{\delta n}) = grad_{\vec{r}_{\delta n}} U + 2\dot{\mu}_n \dot{\vec{r}}_n + \ddot{\mu}_n \vec{r}_n - \mu_n \sum_{j=0}^{n-1} (2\dot{\nu}_j \dot{\vec{r}}_j + \ddot{\nu}_j \vec{r}_j), \tag{23}$$

где правые части уравнений выражаются через барицентрические координаты согласно выражению (17).

4. Инварианты центра масс. Из соотношений (19), (20) (или (21)-(23)) с учетом

$$\frac{m_0 + m_1 + m_2 + ... + m_j}{\sigma_j} = 1 = const$$

получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_{\delta i}) = 0. \tag{24}$$

Следовательно, можно написать инварианты центра масс в барицентрической системе координат:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_{\delta i}) = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_{\delta i} = 0. \tag{25}$$

Учитывая, что в барицентрической системе координат

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_{\delta i} = 0, \tag{26}$$

инвариантам центра масс (25) в барицентрической системе координат можно придать вид

$$\sum_{i=0}^{n} \dot{m}_i \vec{r}_{\delta i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_{\delta i} = 0. \tag{27}$$

5. Заключение. Полученные инварианты являются единственными аналитическими соотношениями, связывающими координаты, скорости и законы изменения масс в рассматриваемой проблеме многих тел с изотропно изменяющимися в различных темпах массами (1),(2) в барицентрической системе координат. Они могут быть эффективно использованы в исследовании нестационарных гравитирующих систем. Аналогично могут быть получены инварианты центра масс рассматриваемой задачи, когда массы тел изменяются в различных темпах анизотропно.

Цитированная литература

1. **Омаров Т.Б.** Динамика гравитирующих систем метагалактики. Алма- Ата, 1975.
2. **Поляхова Е.Н.** // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук. 1989. Т.42, вып. 64, №42. С. 104-143.
3. **Omarov Tuken B.** Non - Stationary Dynamical Problems in Astronomy. Nova Science Publishers Jnc. N.-Y, 2002.
4. **Plastino A.R., Muzzio J.C.** // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V.59. P. 201-208.
5. **Лукьянов Л.Г.** // Астрон. журнал. 1983. Т. 60, вып. 1 С. 181-184.
6. **Александров П.С.** Лекции по аналитической геометрии. М., 1968.

Поступила в редакцию 05.03.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 66—70*

УДК 517.956.4

О ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ "СИЛЬНО" НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М. И. Рамазанов

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

В последнее время проявляется всё больший интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений. В этом сыграли свою роль и неуклонно расширяющийся объём их приложений, и тот факт, что нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со своими специфическими задачами [1, 2, 3, 4]. В некоторых случаях, когда нагруженное слагаемое не является слабым возмущением его дифференциальной части, проявляются новые свойства нагруженного дифференциального оператора ("сильно" нагруженного), не присущие операторам со слабым возмущением. Например, первая граничная задача для "сильно" нагруженного оператора теплопроводности в четверти плоскости (порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части уравнения), когда спектральный параметр служит коэффициентом при нагруженном слагаемом, является нётеровой [4] и для некоторых строго описываемых в комплексной плоскости значений коэффициента при нагруженном слагаемом она имеет конечный положительный индекс, значение которого растёт с возрастанием модуля этого коэффициента.

В данной работе рассматривается вторая граничная задача для "сильно" нагруженного оператора теплопроводности в четверти плоскости и показывается, что хотя уравнение и сильно нагружено, но соответствующая задача безусловно разрешима и имеет единственное решение в естественных классах.

1. Постановки задач. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty,0)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие граничные задачи:

$$L_\lambda u = f \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)_{|x=t} = f, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_x(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \lambda \cdot \delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g, \\ \\ v(x,\infty) = 0, \ \ v_x(0,t) = v_x(\infty,t) = v(\infty,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Keywords: *loaded equation, parabolic equation, boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 35D05, 35K05

где

$$\lambda \in \mathbb{C} - \text{ комплексный параметр}, \; f \in M(Q), \; t \cdot g \in L_1(Q),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)_{|x=t} \in M(\mathbb{R}_+) \; - \text{ заданные функции}, \tag{3}$$

$M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q)$, $M(\mathbb{R}_+) = L_\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$, функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ определена формулой

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t} \right) \right\}. \tag{4}$$

Замечание 1. *Относительно получения сопряженного уравнения (2) [5, 6, 7, 8]. Прежде всего покажем, что*

$$\int_0^\infty \delta''(x-y) u(y,t) dy = u_{xx}(x,t), \quad \text{в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1_+) \;\; \forall t \in (0,+\infty). \tag{a}$$

Действительно, в силу соотношений:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+): \; \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \delta(x-y) u(y,t) dy \right] \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \delta(z) u(y,t) \varphi(y+z) dy \right] dz =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \delta(z) \varphi(y+z) dz \right] u(y,t) dz = \int_0^\infty u(y,t) \varphi(y) dy$$

имеем

$$\int_0^\infty \delta(x-y) u(y,t) dy = u(x,t) \;\; \text{в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1_+) \;\; \forall t \in (0,\infty). \tag{b}$$

Далее, дифференцируя равенство (b) по x дважды, получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^\infty \delta(x-y) u(y,t) dy \right] \varphi(x) dx = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \delta(x-y) u(y,t) dy \right] \varphi''(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \delta(z) u(y,t) \varphi''(y+z) dy \right] dz \equiv I(\varphi) \;\; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+).$$

Так как справедливо равенство $\varphi''_{yy}(y+z) = \varphi''_{zz}(y+z)$, *то отсюда следуют*

$$I(\varphi) = \int_0^\infty u(y,t) \varphi''_{yy}(y) dy = \int_0^\infty u_{yy}(y,t) \varphi(y) dy \;\; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+); \tag{c}$$

$$I(\varphi) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta''(z) u(y,t) \varphi(y+z) dz dy = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \delta''(x-y) u(y,t) dy \right] \varphi(x) dx \;\; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+). \tag{d}$$

Из (c) и (d) получаем справедливость равенства (a).

Согласно соотношения (a) и введенным обозначениям получим

$$\int_0^\infty \delta''(t-y)u(y,t)dy \equiv \left(\int_0^\infty \delta''(x-y)u(y,t)dy\right)_{|x=t} = u_{yy}(y,t)_{|y=t} \equiv u_{xx}(t,t).$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$u_t - u_{xx} + \lambda\left(\int_0^\infty \delta''(\eta-y)u(y,t)dy\right)_{\eta=t} = f. \tag{e}$$

Далее с учетом равенства

$$\int_{\mathbb{R}^2_+}\left[\int_0^\infty \delta''(t-y)u(y,t)d\xi\right]v(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2_+} u(x,t)\left[\delta''(t-x)\otimes\int_0^\infty v(y,t)dy\right]dxdt,$$

получим сопряженное уравнение

$$-v_t - v_{xx} + \lambda\delta''(t-x)\otimes\int_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g. \tag{f}$$

Замечание 2. *Если функция f не зависит от x, то второе условие для функции f из (3) следует из первого: $f \in M(Q)$. Если же функция f зависит от x и t, то этого нам не удалось показать.*

Определим функциональные классы $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области определения операторов L и L^* $\mathscr{D}(L)$ и $\mathscr{D}(L^*)$, соответственно, следующим образом:

$$\mathscr{U} = \left\{u|\, u\cdot t^{-1},\ (u_t - u_{xx}) \in M(Q),\ u_{xx}(x,t)_{|x=t} \in M(\mathbb{R}_+)\right\}, \tag{5}$$

$$\mathscr{V} = \left\{v|\, v,\ t\cdot(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q),\ \int_0^\infty v(\xi,t)d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+)\right\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{D}(L_\lambda) \equiv \mathscr{D}(L_1) = \{u|\, u \in \mathscr{U},\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{D}(L^*_\lambda) \equiv \mathscr{D}(L^*_1) = \{v|\, v\in\mathscr{V},\ v(x,\infty)=0,\ v_x(0,t)=0,\ v_x(\infty,t)=0,\ v(\infty,t)=0\}. \tag{8}$$

Граничная задача (2) является сопряженной к задаче (1). Действительно, согласно (1)–(2) имеем

$$< Lu, v > = < u, L^*v > \quad \forall u \in \mathscr{D}(L),\ \forall v \in \mathscr{D}(L^*). \tag{9}$$

Задача 1. *Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(9).*

2. Основной результат. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f, \forall g$ ((3)) граничная задача (1) и сопряжённая задача (2) имеют единственные решения $u \in \mathscr{U}$, $v \in \mathscr{V}$ ((5), (6)).*

Доказательство. Действительно, обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1) и учитывая равенство

$$\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]\right\}d\xi =$$

$$= \left\|\frac{\xi-x}{2\sqrt{t-\tau}} = \eta_1,\ \frac{\xi+x}{2\sqrt{t-\tau}} = \eta_2, \text{и обозначим: } \quad \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} = a\right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-a}^\infty e^{-\eta_1^2}d\eta_1 + \int_a^\infty e^{-\eta_2^2}d\eta_2\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta = 1,$$

будем иметь:

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t u_{\eta\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\tau} d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{10}$$

Таким образом, чтобы найти решение задачи (1), достаточно определить неизвестную величину $\dfrac{\partial^2 u(t,t)}{\partial x^2}$.

Для этого дважды продифференцируем обе части равенства (10) по переменной x и, полагая $x = t$, получим

$$\frac{\partial^2 u(t,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \int_0^t \int_0^\infty f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi \right\} \Big|_{x=t}. \tag{11}$$

Подставив соотношение (11) в представление (10), получим единственное решение задачи (1)

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \int_0^\tau \int_0^\infty f(\xi,\zeta) G(x,\xi,\tau-\zeta) d\xi d\zeta \right\} \Big|_{x=\beta(\tau)} d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi. \tag{12}$$

Теперь, обращая дифференциальную часть в задаче (2) аналогично как в задаче (1), будем иметь

$$v(x,t) = -\lambda \int_t^\infty G_{\xi\xi}(\tau,x,\tau-t) \int_0^\infty v(\eta,\tau) d\eta d\tau + \int_t^\infty \int_0^\infty G(\xi,x,\tau-t) g(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{13}$$

Интегрируя соотношение (13) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$\nu(t) = \int_0^\infty v(\eta,t) d\eta,$$

получим

$$\nu(t) = -\lambda \int_0^\infty \int_t^\infty G_{\xi\xi}(\tau,x,\tau-t) \nu(\tau) d\tau dx + \int_0^\infty \int_t^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t) g(\xi,\tau) d\xi d\tau dx = \int_t^\infty \int_0^\infty g(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Подставляя полученное соотношение в (13), получим решение задачи (2)

$$v(x,t) = -\lambda \int_t^\infty G_{\xi\xi}(\tau,x,\tau-t) \int_\tau^\infty \int_0^\infty g(\xi,\zeta) d\xi d\zeta d\tau + \int_t^\infty \int_0^\infty G(\xi,x,\tau-t) g(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{14}$$

Учитывая условие (3), из равенства (12) непосредственно имеем оценку

$$|u(x,t)| \leqslant Ct. \tag{15}$$

Для производных решения $u(x,t)$ (12) справедливо соотношение

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) \in M(Q) \tag{16}$$

(что следует непосредственно и из уравнения (1)).

Для решения $u(x,t)$ (12) непосредственно проверяется выполнение начального и граничного условий из (1). Таким образом, функция (12) согласно (15) и (16) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (5).

Далее, для того, чтобы функция $v(x,t)$ была из класса (6), достаточно выполнение условия

$$\int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty g(\xi,\tau)d\xi d\tau \in L_1(Q). \tag{17}$$

Включение (17) равносильно неравенству

$$\int\limits_0^\infty \nu(t)dt = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty g(\xi,\tau)d\xi d\tau = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \tau g(\xi,\tau)d\xi d\tau < \infty.$$

Очевидно, что для производных функции $v(x,t)$: $v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ справедливо включение

$$t(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q).$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.

2. **Дженалиев М.Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, ИМ МОН РК, 1995.

3. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.**// Матер. межд. Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы". Нальчик, 2004. С.62—65.

4. **Рамазанов М.И.**// Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т.7, № 1. С.84–91.

5. **Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.** Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979.

6. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М. , 1977.

7. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1979. 8. **Хермандер Л.**// Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.I. Теория распределений и анализ Фурье. М., 1986.

Поступила в редакцию 16.05.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 71—73*

УДК 517.927

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ИХ ВОЗМУЩЕНИИ

М. И. Рахимбердиев

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 marat@math.kz

Исследована разрешимость двухточечной краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений при ее возмущении с нефиксированным правым граничным условием.

Рассматривается линейная система

$$x' = A(t)x, x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ - кусочно-непрерывная и ограниченная на полуоси R^+ матричная функция ($\|A(t)\| \leq c$). Пусть $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы (1), $\lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1) (см.[1]).

Известно, что краевая задача

$$x(0) = a, x(T) = b \tag{2}$$

для системы (1) может быть неразрешимой для каких-то векторов $a, b \in R^n$, причем при любом $T > 0$. При этом могут существовать решения этой задачи для данной краевой задачи не для системы (1), а ее возмущений. Изучим этот вопрос. Введем некоторые определения.

Определение 1. *Скажем, что для данных ненулевых векторов $a, b \in R^n$ краевая задача вида (2) для системы (1) аппроксимативно разрешима, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $T > 0$ и кусочно-непрерывная матрица $B_\varepsilon(t)$ с условием $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ такие, что у системы*

$$x' = (A(t) + B_\varepsilon(t))x \tag{3}$$

(3) существует решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (2).

В силу непрерывной зависимости решений системы (3) на фиксированном отрезке изменения независимой переменной от параметра если задача (2) неразрешима для системы (1) для каких-то ненулевых $a, b \in R^n$ при некотором фиксированном $T > 0$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что любая возмущенная система (3) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ также не имеет решение задачи (2) для тех же a и b. Возможно также, что для данных $a, b \in R^n$ система (3) не имеет решение ни для

Keywords: *ordinary differential equation, boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

каких значений $T > 0$. Например, если $A(t) = diag\{1, -1\}$, $a = b = (1, 1)$, то можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что всякая система (3) не будет иметь решение удовлетворяющее условию (2), при всяких $\varepsilon < \varepsilon_0$ и ни при каком значении $T > 0$. Этот факт есть следствие теоремы 15.2.1 из [1]. Цель наших исследований – установить класс систем (1), для которых поставленная задача может быть разрешимой.

Определение 2. *Система (3) называется слабо экспоненциально разделенной с индексом $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, если существует последовательность отрезков $[a_i, b_i], i \in N$, где $b_i - a_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$, для которой при каждом $i \in N$ существует такое разбиение пространства R^n в прямую сумму подпространств R_i^{n-k} и $R_i^k(0)$, что для некоторых $\alpha > 0$, $beta > 0$ и для всяких ненулевых векторов $\xi \in R_i^{n-k}$, $\eta \in R_i^k(0)$ при всех $t, s \in [a_i, b_i]$, $t \geq s$, ß $\in N$, имеет место неравенство*

$$\|X(t,a_i)\xi\|\|X(s,a_i)\xi\|^{-1} \geq \alpha(\exp(\beta(t-s)))\|X(t,a_i)\eta\|\|X(s,a_i)\eta\|^{-1}.$$

Отметим, что данное определение есть расширение условия Перрона, то есть условия экспоненциальной разделенности линейных дифференциальных систем. Оно возникло в работе О. Перрона (см.[2]).

Определение 3. *Система (1) называется равномерно неразделенной, если для всех $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ она не является слабо разделенной.*

Определение равномерной неразделенности систем (1) введено в [3] (в другой, но эквивалентной формулировке). Простейшим примером линейной системы, удовлетворяющей этому условию, является система скалярного типа, то есть система с матрицей коэффициентов вида $A(t) = a(t)E$, где $a(t)$ – кусочно-непрерывная функция, E – единичная матрица. Нетривиальный пример такой системы (с неустойчивыми особыми и центральными показателями) приведен в [4].

Лемма. *Если система (1) является равномерно неразделенной, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для всякого $s \geq 0$ и для всяких двух ненулевых векторов $a, b \in R^n$ можно задать кусочно-непрерывную матрицу $B_\varepsilon(t)$ со следующими свойствами:*

1. *$\|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [s, s+N]$,*
2. *$B_\varepsilon(t) = 0$ при $t \notin [s, s+N]$,*
3. *существует решение системы (3) $x^*(t)$ такое, что $x^*(s) = a$, $x^*(s+N) = Db$, где D – некоторая положительная константа.*

Доказательство леммы содержится в доказательстве теоремы из [3].

Теорема. *Краевая задача вида (2) для системы (1) аппроксимативно разрешима для любых ненулевых векторов $a, b \in R^n$, если система (1) является равномерно неразделенной и $\lambda_1(A) > 0, \lambda_n(A) < 0$.*

Доказательство. Пусть a, b – произвольные ненулевые векторы из R^n, $x_1(t), x_2(t)$ – какие-либо решения системы (1) соответственно с отрицательным и положительным показателями Ляпунова. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Будем задавать последовательно матрицу возмущения, расширяя область ее определения $B_\varepsilon^1(t)$ следующим образом.

Согласно лемме для данного ε существует $N > 0$ такое, что можно определить такую матрицу $B_\varepsilon(t) = B_\varepsilon^1(t)$, что $\|B_\varepsilon^1(t)\| < \varepsilon/2$ при $t \in [0, N]$, $B_\varepsilon(t) = 0$ при $t \notin [0, N]$, а система (3) при $B_\varepsilon(t) = B_\varepsilon^1(t)$ имеет решение $x^*(t)$, удовлетворяющее условиям $x^*(0) = a, x^*(N) = D_1 x_1(N)$, где D_1 – некоторая положительная константа.

Далее, так как $D_1 x_1(t)$ при $t \geq N$ есть решение системы (1) с отрицательным показателем Ляпунова, то существует такое натуральное число $m_1 > 0$, что $\|D_1 x_1(m_1, N)\| \leq \|b\|$. Зададим теперь матрицу $B^1_\varepsilon(t), \|B^1_\varepsilon(t)\| < \varepsilon/2$, на отрезке $[m_1N, (m_1+1)N]$ согласно лемме так, чтобы решение системы (3) $x^*(t)$ при $B_\varepsilon(t) = B^1_\varepsilon$, определенное на отрезке $[0, (m_1+1)N]$ с условием $x^*(t) = a$, удовлетворяющее также условию $x^*(m_1N) = D_1x_1(m_1N)$, было таково, что $x^*((m_1+1)N) = D_2x_2((m_1+1)N)$, где D_2 – некоторая положительная константа. Так как $D_2x_2(t)$ при $t \geq (m_1+1)N$ есть решение системы (1) с положительным показателем Ляпунова, то существует такое натуральное число $m_2 > m_1+1$, что $\|D_2x_2(m_2, N)\| \leq \|b\|$. Аналогичным образом задавая матрицу $B^1_\varepsilon(t)$, определяем решение $x^*(t)$, исходя из решения $x_1(t)$, затем $x_2(t)$ и т.д. Проделаем эту процедуру r раз. Тогда в силу непрерывности функции $\|x^*(t)\|$ на отрезке $[m_{r-1}N, m_rN]$ найдется такая точка t^*, что $\|x^*(t^*)\| = \|b\|$. Определим теперь на отрезке $[m_rN, (m_r+1)N]$ матрицу $B^1_\varepsilon(t)$ так, чтобы выполнялось следующее условие: $x^*((m_r+1)N) = D_rb$, где D_r – некоторая положительная константа.

В результате построения возмущенной системы (3) мы получили такое решение $x^*(t)$ этой системы, что $x^*((m_r+1)N) = \widetilde{X}((m_r+1)N, 0)a$, где $\widetilde{X}(t,\tau)$ – матрица Коши системы (3). Отсюда

$$D\|b\| = \|x^*((m_r+1)N)\| \|\widetilde{X}((m_r+1)N, t^*)\widetilde{X}(t^*, 0)a\| \leq \|\widetilde{X}((m_r+1)N, t)\|\|b\|.$$

Поэтому

$$D \leq \exp(2N(C+\varepsilon/2)). \tag{4}$$

С другой стороны из равенства $D\widetilde{X}^{-1}((m_r+1)N, t^*)b = \widetilde{X}(t^*, 0)a$ следует, что $D\|\widetilde{X}^{-1}((m_r+1)N, t^*)\|\|b\| \geq \|b\|$. Тогда имеем

$$D \geq \exp(-2N)(C+\varepsilon/2). \tag{5}$$

Возмутив теперь систему (3), считая что $B_\varepsilon(t) = B^1_\varepsilon(t)$, матрицей $\varepsilon_1 I$, где I – единичная матрица, получим систему, решения которой получаются из решений системы (3) умножением их на множитель $\exp(\varepsilon_1 t)$. Уточним выбор ε_1. Пусть $Y(\tau, t)$ – матрица Коши последней системы (3) с матрицей $B_\varepsilon(t) = B^1_\varepsilon(t) + \varepsilon_1 I$. Тогда имеем $Y((m_r+1)N, 0)a = \exp(\varepsilon_1(m_r+1)N)Db$. Из этого равенства следует, что требуемые краевые условия выполняются, если $D = \exp(-\varepsilon_1(m_r+1)N)$, то есть при $\varepsilon_1 = -lnD/(m_r+1)N$. Следовательно, можно выбрать такое m_r, что с учетом (4), (5) выполняется неравенство $|\varepsilon_1| < \varepsilon/2$. Значит, мы установили существование решения краевой задачи для возмущенной системы (3) с нормой, меньше произвольного $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. М.** Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

2. **Perron O. J.** reine und angew/ Math. 1931. P. 254 – 270.

3. **Рахимбердиев М. И.** // Дифференциальные уравнения. 1977. Т 13, № 5. С. 616 – 625.

4. **МиллионщиковВ. М.** // Дифференциальные уравнения. 1969. Т 5, № 4. С. 749 – 750.

Поступила в редакцию 17.03.2005

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 74—78*

УДК 532.546

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА

Г. М. Спабекова

ЮКГУ им. М.О.Ауэзова
486050 Шымкент ул. Тауке-Хана, 5

Как известно, задача Гурса для гиперболических уравнений относится к классу вольтерровых задач, поэтому не решается стандартным методом Фурье из-за отсутствия собственных векторов соответствующей краевой задачи. Настоящая работа посвящена обоснованию метода Фурье для задачи Гурса с применением спектрального метода для уравниения с отклоняющимся аргументом.

1. Постановка задачи.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – конечная область, ограниченная отрезком $AB : 0 \leq x \leq 1$ при $y = 0$, а при $y < 0$ характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Через $W_2^l(\Omega)$ будем обозначать пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $||\cdot||_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Задача Гурса. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{AC\cup BC} = 0. \tag{2}$$

Под регулярным решением задачи Гурса (1)-(2), как обычно, будем понимать функцию $u \in C^2(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнение (1) и краевое условие (2).

Функцию $u \in L_2(\Omega)$ называют сильным решением задачи, если существует последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая краевым условиям задачи, такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Введем в рассмотрение сильный оператор, соответствующий сформулированной задаче, то есть оператор, как замыкание дифференциального оператора, заданного выражением (1) на линейном многообразии функций из $C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевому условию (2) задачи. Обозначим его через L_G.

Согласно нашим определениям задача будет сильно разрешима для особой правой части $f \in L_2(\Omega)$, если и только если ограниченно обратим соответствующий сильный оператор, а функция u будет сильным решением задачи, если и только если она принадлежит области определения соответствующего сильного оператора.

Keywords: *Fourier method , Volterra problem, Goursat problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10 35D05, 35Q30

Относительно регулярной и сильной разрешимости задачи Гурса известны (см. [1]) следующие результаты.

Теорема 1. *а) для любой $f \in C^1(\overline{\Omega})$ регулярное решение задачи Гурса (1)-(2) существует, единственно, принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству*

$$||u||_1 \leq C||f||_0; \tag{3}$$

б) для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи Гурса (1)-(2). Это решение принадлежит классу $W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет оценке (3).

Приведем краткое доказательство этой теоремы. С помощью замены переменных

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

из (1)-(2) после несложных вычислений получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \hat{u}_{\xi\eta} = \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right), \quad \hat{u} = u\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2}\right) = u(x,y), \\ \\ u|_{\xi=0} = u|_{\eta=1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Проинтегрировав это уравнение сначала по η, потом по ξ переменной, с учетом дополнительных условий получим следующее представление:

$$\hat{u} = \frac{1}{4}\int\limits_0^\xi d_{\xi_1}\int\limits_\eta^1 f\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2}, \frac{\xi_1-\eta_1}{2}\right) d_{\eta_1}. \tag{5}$$

Из (5) следует следующая теорема (см. [1]–[2]).

Теорема 2. *Задача Гурса (1)-(2) является вольтерровой краевой задачей.*

Из формулы (5) следует

$$L_G^{-1} u = f, \quad f \in L_2(\Omega), \tag{6}$$

что задача Гурса поставлена корректно по Адамару.

2. Сначала решим соответствующую краевой задаче (1)-(2) спектральную задачу. Для этого вместо классической спектральной задачи рассмотрим обобщенную спектральную задачу [3]. На четырехугольнике $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda u(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ \\ u|_{x=0} = u|_{y=1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Полагая $u(x,y) = v(x)w(y)$, разделим переменные этого уравнения. Подставив данное представление в уравнение, имеем

$$v'(x)w'(y) = \lambda v(1-x)w(1-y).$$

Следовательно,

$$\frac{v'(x)}{v(1-x)} \cdot \frac{w'(y)}{w(1-y)} = \lambda. \tag{8}$$

Поскольку λ - также постоянная, то должно быть

$$v'(x) = kv(1-x), \tag{9}$$

где k - также постоянная. Тогда

$$w'(y) = \frac{\lambda}{k} w(1-y).$$

Пусть $\frac{\lambda}{k} = \mu$. Тогда $\lambda = k\mu$. Из граничного условия (7) имеем $v(0) = 0$. Таким образом, будем решать спектральную задачу

$$\begin{cases} v'(x) = kv(1-x), \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Продифференцировав уравнение (8), получим задачу Штурма-Лиувилля с дополненными условиями

$$-v'' = k^2 v, \quad v'(0) = kv(1), \quad v'(1) = kv(0) = 0.$$

Общие решения этого уравнения имеют вид

$$v(x) = A\cos kx + B\sin kx.$$

Подставив это выражение во второе краевое условие, имеем

$$v(0) = A = 0.$$

Следовательно, собственные функции имеют вид

$$v(x) = B\sin kx, \quad v'(x) = Bk\cos kx.$$

Подставив последнее выражение в первое краевое условие, получим

$$v'(1) = Bk\cos kx = 0, \quad k_n = n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Из условия согласования $v'(0) = kv(1)$ имеем

$$Bk = kB\sin k \text{ или } \quad \sin k = 1.$$

Следовательно, $k_{2n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ и $v_n(x) = B_{2n+1}\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi x$.
Коэффициенты B_n находим из условия нормировки

$$\int_0^1 v_{2n+1}(x)\overline{v_{2n+1}(x)}dx = |B_{2n+1}|^2 \int_0^1 \sin^2\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi x dx =$$

$$= \frac{|B_{2n+1}|^2}{2}\int_0^1 [1 - \cos(4\pi + 1)\pi x]dx = \frac{|B_{2n+1}|^2}{2} = 1, \quad B_{2n+1} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, собственные значения и собственные функции задачи (10) можно найти по формулам:

$$k_{2n} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad v_{2n}(x) = \sqrt{2}\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi x. \tag{11}$$

Непосредственным вычислением также убеждаемся в том, что функции

$$k_{2n+1} = \left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad v_{2n+1}(x) = \sqrt{2}\sin\left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi x \tag{12}$$

также являются собственными функциями задачи (10), соответствующими собственным значениям k_{2n+1}.

Функции, полученные из соотношений (11)–(12), образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(0.1)$.

Далее для функции $w(y)$ получим спектральную задачу

$$\begin{cases} w'(x) = \mu w(1-y), \\ w(1) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

которая решается аналогично. Собственными значениями к собственными функциями задачи (14) соответственно являются функции

$$\begin{cases} w_{2m}(y) = \sqrt{2}\cos\left(2m + \dfrac{1}{2}\right)\pi y, \qquad \lambda_{2m} = (2m + \frac{1}{2})\pi, \\ w_{2m+1}(y) = \sqrt{2}\cos\left(2m + 1 + \dfrac{1}{2}\right)\pi y, \quad \lambda_{2m+1} = -(2m + 1 + \frac{1}{2})\pi. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда функции

$$u_{nm}(x,y) = \begin{cases} 2\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot \cos\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi y\,, \\ 2\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, x \cdot \cos\left(2m + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi y\,, \\ 2\sin\left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot \cos\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi y\,, \\ 2\sin\left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi x \cdot \cos\left(2m + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi y \end{cases} \tag{15}$$

являются собственными функциями задачи Гурса (7), соответствующими собственным значениям

$$\lambda_{nm} = \begin{cases} \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, \\ -\left(2n + \frac{1}{2}\right)\left(2m + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi^2, \\ -\left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi^2, \\ \left(2n + 1 + \frac{1}{2}\right)\left(2m + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi^2. \end{cases} \tag{16}$$

Легко проверить, что собственные функции $u_{nm}(x,\,y)$ образуют полный ортонормированный базис $L_2[0,\,1]^2$. Тем самым доказана

Теорема 3. *Собственные векторы обобщенной спектральной задачи*

$$u_{xy} = \lambda u(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{17}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=1} = 0 \tag{18}$$

образует полный ортонормированный базис пространства $L_2[0,1]^2$.

3. Решим задачу (1)-(2) методом Фурье. После замены переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ задача (1)-(2) примет вид

$$\hat{u}_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\tilde{f}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right), \quad \xi,\,\eta \in (0,\,1)\times(0,\,1), \tag{19}$$

$$u|_{\xi=0} = u|_{\eta=1} = 0, \tag{20}$$

где $\tilde{f}(\xi,\eta) \equiv f(\xi,\eta),\ \xi \le \eta,\ \tilde{f} \equiv 0$ при $\xi \ge \eta$.

Поэтому $\hat{u}_{\xi\eta}(1-\xi, 1-\eta) = \frac{1}{4}\tilde{f}\left(\frac{1-\xi+1-\eta}{2}, \frac{1-\xi-(1-\eta)}{2}\right) = \frac{1}{4}\tilde{f}\left[1-\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right]$.

Разложив в ряд Фурье функции $\hat{u}(\xi,\eta)$ и $\frac{1}{4}\tilde{f}\left[1-\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right]$, имеем

$$u(\xi,\eta) = \sum_{n,m}^{\infty} u_{nm}(\xi,\eta)a_{nm}, \quad \frac{1}{4}\tilde{f}\left[1-\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right] = \sum_{n,m}\tilde{f}_{nm}u_{nm}(\xi.\eta)$$

Подставив эти выражения в (19), получим

$$\sum\nolimits_{n,m} \lambda_{nm} \cdot a_{nm}u_{nm}(\xi,\eta) = \sum_{n,m}^{\infty}\tilde{f}_{nm}u_{nm}(\xi,\eta) \quad \Rightarrow \quad a_{nm} = \frac{\tilde{f}_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

$$\hat{u}(\xi,\eta) = \sum_{n,m}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{n,m}}{\lambda_{n,m}}u_{nm}(\xi,\eta).$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Решение задачи Гурса (1)-(2) представимо в виде*

$$\hat{u}(\xi,\eta) = \sum_{n,m}^{\infty}\frac{\tilde{f}_{n,m}}{\lambda_{n,m}}u_{nm}(\xi,\eta), \tag{21}$$

$$\tilde{f}\left[1-\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right] = \sum_{n,m}\tilde{f}_{nm}u_{nm}(\xi,\eta), \tag{22}$$

где $\tilde{f}_{nm}$ *– коэффициенты Фурье функции* $\frac{1}{4}\tilde{f}\left[1-\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right]$ *по ортонормированной системе* $\{u_{nm}(\xi,\eta)\}$.

Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, 1993.

2. **Тихонов Л.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. Москва, 1974.

3. **Като Т.** Теория возмущенных операторов. Москва, 1972.

Поступила в редакцию 19.01.2005г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 79–86*

УДК 517.925.5:519.216

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЗАМЫКАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДИФФУЗИЕЙ

М. И. Тлеубергенов*, Г. Т. Ибраева**

*Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина,125 marat207@math.kz
**Актюбинский гос. ун-т им. К. Жубанова
463000 Актобе пр. А. Молдагуловой, 34

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи замыкания в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов и вырождающейся относительно части переменных диффузией.

Введение.

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1-7] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Так, в работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). В работах [2-7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [7].

В работах [8-10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, решены: 1) **основная обратная задача динамики** – построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием; 2) **задача восстановления уравнений движения** – построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию; и 3) **задача замыкания уравнений движения** – построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equation, integral manyfold*
2000 Mathematical Subject Classification:34K29,60H10

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которой лежит

Л е м м а 1[7, с.12-13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n},\ m \le n, \tag{1}$$

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu, \tag{2}$$

здесь s - произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H.

1. П о с т а н о в к а о б щ е й з а д а ч и п о с т р о е н и я з а м ы к а ю щ и х с т о х а с т и ч е с к и х д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й и е е р е ш е н и е.

Пусть задано множество

$$\Lambda(t): \qquad \lambda(y, z, v, w, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \qquad \lambda = \lambda(y, z, v, w, t) \in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{y\,z\,v\,w\,t} \tag{3}$$

и система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y} = g_1(y, z, v, w, t), \\ \dot{z} = g_2(y, z, v, w, t) + \sigma_1(y, z, v, w, t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{4}$$

требуется достроить систему замыкающих уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{v} = g_3(y, z, v, w, t), \\ \dot{w} = g_4(y, z, v, w, t) + \sigma_2(y, z, v, w, t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{5}$$

так, чтобы множество (3) было интегральным многообразием системы уравнений (4),(5). Здесь $y \in R^{l_1}, z \in R^{l_2}, v \in R^{p_1}, w \in R^{p_2}, l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n$, σ - матрица $(p \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ - система независимых винеровских процессов [11], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P). Искомые для решения поставленной задачи вектор-функции g_1, g_2, g_3, g_4

и матрицы σ_1,σ_2 предполагаются из класса K- множества функций, непрерывных по t и липшицевых по y, z, v и w в области

$$U_H(\Lambda) = \big\{q = (y^T, z^T, v^T, w^T)^T : \ \rho\big(q, \Lambda(t)\big) < H, \quad H > 0\big\}. \tag{6}$$

Поставленная задача обобщает рассмотренную в [10] задачу построения по заданному уравнению

$$\ddot{x} = f_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \sigma_1(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi} \tag{4'}$$

и заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \ \lambda = \lambda(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{x\dot{x},u\dot{u},t} \tag{3'}$$

стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{u} = f_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + \sigma_2(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi} \tag{5'}$$

так, чтобы множество $(3')$ было интегральным многообразием системы уравнений $(4'), (5')$.

Для решения поставленной задачи построения замыкающей системы уравнений (5) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [11] $\lambda = \lambda(y, z, v, w, t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) g_1 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) g_2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) g_3 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right) g_4 + S_1 + S_2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\sigma_1\dot{\xi} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)\sigma_2\dot{\xi}, \tag{7}$$

здесь $S_1 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} : \sigma_1\sigma_1^T\right]$, $S_2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial w^2} : \sigma_2\sigma_2^T\right]$, а под $\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} : D_1\right]$ и $\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial w^2} : D_2\right]$, следуя [11], понимаются вектора, элементами которых служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y, z, v, w, t)$ вектора по компонентам z,w на матрицы D_1, D_2 :

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} : D_1 = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2}D_1\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial z^2}D_1\big) \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial w^2} : D_2 = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial w^2}D_2\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial w^2}D_2\big) \end{bmatrix}.$$

где $D_1 = \sigma_1\sigma_1^T$, $D_2 = \sigma_2\sigma_2^T$. Введем далее произвольные типа Еругина [1] m-мерную вектор-функцию A и $(m \times k)-$ матрицу B со свойством: $A(0, y, z, v, w, t) \equiv 0, \quad B(0, y, z, v, w, t) \equiv 0$ такие, что имеет место уравнение

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, z, v, w, t) + B(\lambda, y, z, v, w, t)\dot{\xi}. \tag{8}$$

Сравнивая уравнения (7) и (8), приходим к следующим соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\right) g_1 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right) g_2 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right) g_3 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\right) g_4 + S_1 + S_2 = A, \\ \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\sigma_1 + \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\right)\sigma_2 = B. \end{cases} \tag{9}$$

Равенства (9) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}g_3 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}g_4 = A - \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}g_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}g_2 + S_1 + S_2\right), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 = B - \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1, \end{cases} \tag{10}$$

из которых нужно определить вектор-функции g_3, g_4 и матрицу σ_2. Положим $g_3 = \eta(y, z, v, w, t)$, где $\eta \in K$.

Тогда выражение (10) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial w} g_4 = A - \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} g_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} g_2 + S_1 + S_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\eta\right), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 = B - \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1. \end{cases} \tag{11}$$

Из соотношений (11) по формуле (2) леммы 1 определим искомые вектор-функцию g_4 и матрицу σ_2 в виде

$$g_4 = s_1 \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} C\right] + \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right]^+ b_1, \tag{12}$$

$$\sigma_{2i} = s_2 \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} C\right] + \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right]^+ \widetilde{B_i}, \tag{13}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w} C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n} \\ c_{m-1,1} & \cdots & c_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

где $b_1 = A - \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} g_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} g_2 + S_1 + S_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\eta\right)$, $\widetilde{B} = B - \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_1$, σ_{2i} - i-ый столбец матрицы $\sigma_2 = (\sigma_{2\nu j})$ $(\nu = \overline{1, p_2},\ j = \overline{1, k})$; $\widetilde{B_i}$ - i- ый столбец матрицы $\widetilde{B} = (\widetilde{B_{\mu l}})$ $(\mu = \overline{1, p_1},\ l = \overline{1, k})$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы система дифференциальных уравнений типа Ито (4), (5) имела заданное интегральное многообразие (3) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты замыкающих стохастических дифференциальных уравнений (5) вектор-функция g_4 и матрица σ_2 имели соответственно вид (12) и (13).*

2. Линейный случай обратной задачи замыкания.

По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv H_1(t)y + H_2(t)z + H_3(t)v + H_4(t)w + h(t) = 0 \tag{14}$$

и системе стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y} = \Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t), \\ \dot{z} = \Psi_1(t)y + \Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t) + T_1(t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{15}$$

требуется достроить линейную замыкающую стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида

$$\begin{cases} \dot{v} = G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + G_4(t)w + g(t), \\ \dot{w} = U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t) + T_2(t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{16}$$

для которой множество (14) являлось бы интегральным многообразием, иначе говоря, по заданным матрицам $H_1(t), H_2(t), H_3(t), H_4(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ $\Psi_3(t)$ $\Psi_4(t)$ и функциям $h(t), \varphi(t), \psi(t)$ требуется определить матрицы $G_1(t), G_2(t), G_3(t), G_4(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, $U_4(t)$ и вектор-функции $g(t)$ и $u(t)$, а также матрицу $T_2(t)$ так, чтобы для системы уравнений (15),(16) заданные свойства (14) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda} = \dot{h}(t) + H_1(t)\dot{y} + \dot{H}_1(t)y + H_2(t)\dot{z} + \dot{H}_2(t)z + H_3(t)\dot{v} + \dot{H}_3(t)v + H_4(t)\dot{w} + \dot{H}_4(t)w = \\
&= \dot{h}(t) + H_1(t)\left[\Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t)\ \right] + \dot{H}_1(t)y + H_2(t)\left[\Psi_1(t)y + \right.\\
&\left. + \Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t)\right] + \dot{H}_2(t)z + H_3(t)\left[G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + \right.\\
&\left. + G_4(t)w + g(t)\right] + \dot{H}_3(t)v + H_4(t)\left[U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t)\right] + \\
&+ \dot{H}_4(t)w + (H_2(t)T_1(t) + H_4(t)T_2(t))\dot{\xi},
\end{aligned} \tag{17}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0, y, z, v, w, t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1\lambda + B_1\dot{\xi}. \tag{18}$$

Тогда из соотношений (17) и (18) следуют равенства

$$\begin{aligned}
&A_1H_1(t)y + A_1H_2(t)z + A_1H_3(t)v + A_1H_4(t)w + A_1h(t) = \\
&= \dot{h}(t) + H_1(t)\left[\Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t)\right] + \dot{H}_1(t)y + H_2(t)\left[\Psi_1(t)y + \right.\\
&\left. + \Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t)\right] + \dot{H}_2(t)z + H_3(t)\left[G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + G_4(t)w + \right.\\
&\left. + g(t)\right] + \dot{H}_3(t)v + H_4(t)\left[U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t)\right] + \dot{H}_4(t)w \\
&B_1 = H_2(t)T_1(t) + H_4(t)T_2(t),
\end{aligned}$$

которые преобразуются к виду

$$\begin{cases}
H_3(t)G_1(t) + H_4(t)U_1(t) = A_1H_1(t) - \left(H_1(t)\Phi_1(t) + H_2(t)\Psi_1(t) + \dot{H}_1(t)\right), \\
H_3(t)G_2(t) + H_4(t)U_2(t) = A_1H_2(t) - \left(H_2(t)\Phi_2(t) + H_2(t)\Psi_2(t) + \dot{H}_2(t)\right), \\
H_3(t)G_3(t) + H_4(t)U_3(t) = A_1H_3(t) - \left(H_1(t)\Phi_3(t) + H_2(t)\Psi_3(t) + \dot{H}_3(t)\right), \\
H_3(t)G_4(t) + H_4(t)U_4(t) = A_1H_4(t) - \left(H_1(t)\Phi_4(t) + H_2(t)\Psi_4(t) + \dot{H}_4(t)\right), \\
H_3(t)g(t) + H_4(t)u(t) = A_1h(t) - \left(H_1(t)\varphi(t) + H_2(t)\psi(t) + \dot{h}(t)\right), \\
H_4(t)T_2(t) = B_1 - H_2(t)T_1(t).
\end{cases} \tag{19}$$

Пусть $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$, $G_4(t)$-произвольно заданные непрерывные матрицы соответственно порядка $(p_1 \times l_1), (p_1 \times l_2), (p_1 \times p_1), (p_1 \times p_2)$, а $g(t)-$ произвольно заданная непрерывная вектор-функция, тогда (19) можно переписать в виде:

$$\begin{cases}
H_4(t)U_1(t) = A_1H_1(t) - \left(H_1(t)\Phi_1(t) + H_2(t)\Psi_1(t) + \dot{H}_1(t) - H_3(t)G_1(t)\right), \\
H_4(t)U_2(t) = A_1H_2(t) - \left(H_2(t)\Phi_2(t) + H_2(t)\Psi_2(t) + \dot{H}_2(t) - H_3(t)G_2(t)\right) \\
H_4(t)U_3(t) = A_1H_3(t) - \left(H_1(t)\Phi_3(t) + H_2(t)\Psi_3(t) + \dot{H}_3(t) - H_3(t)G_3(t)\right), \\
H_4(t)U_4(t) = A_1H_4(t) - \left(H_1(t)\Phi_4(t) + H_2(t)\Psi_4(t) + \dot{H}_4(t) - H_3(t)G_4(t)\right), \\
H_4(t)T_2(t) = B_1 - H_2(t)T_1(t).
\end{cases} \tag{20}$$

По лемме 1 совокупность всех решений системы уравнений (15),(16) на основании (20) примет вид:

$$\begin{cases} U_1(t) = s_1\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_1,\\ U_2(t) = s_2\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_2,\\ U_3(t) = s_3\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_3,\\ U_4(t) = s_4\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_4,\\ u(t) = s_5\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_5,\\ T_{2i}(t) = s_6\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,B_i, \end{cases} \tag{21}$$

где s_μ $(\mu = 1,2,3,4,5,6)-$ произвольные скалярные величины ,
$M_1 = A_1H_1(t) - \Big(H_1(t)\Phi_1(t) + H_2(t)\Psi_1(t) + \dot H_1(t) - H_3(t)G_1(t)\Big)$,
$M_2 = A_1H_2(t) - \Big(H_1(t)\Phi_2(t) + H_2(t)\Psi_2(t) + \dot H_2(t) - H_3(t)G_2(t)\Big)$,
$M_3 = A_1H_3(t) - \Big(H_1(t)\Phi_3(t) + H_2(t)\Psi_3(t) + \dot H_3(t) - H_3(t)G_3(t)\Big)$,
$M_4 = A_1H_4(t) - \Big(H_1(t)\Phi_4(t) + H_2(t)\Psi_4(t) + \dot H_4(t) - H_3(t)G_4(t)\Big)$,
$M_5 = A_1h(t) - \Big(H_1(t)\varphi(t) + H_2(t)\psi(t) + \dot h(t) - H_3(t)g(t)\Big)$,
$T_{2i} - i$ -ый столбец матрицы $T = (T_{2\nu j}), (\nu = \overline{1,p_2},\ \ j = \overline{1,k})$.

Тем самым доказана

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы стохастическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка Ито (15),(16) имела заданное линейное интегральное многообразие (14) необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданных непрерывных матрицах* $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$, $G_4(t)$ *и вектор-функции* $g(t)$ *матрицы* $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, $U_4(t)$, $T_2(t)$ *и вектор-функция* $u(t)$ *имели соответственно вид (21).*

3. Скалярный нелинейный случай обратной задачи замыкания.

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \eta(y,u,z,v,t) = 0, \quad \text{где} \quad \eta \in R^1 \tag{22}$$

и системе стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot y = w_1(y,u,z,v,t),\\ \dot u = w_2(y,u,z,v,t) + \gamma_1(y,u,z,v,t)\dot\xi \end{cases} \tag{23}$$

требуется достроить замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot z = w_3(y,u,z,v,t),\\ \dot v = w_4(y,u,z,v,t) + \gamma_2(y,u,z,v,t)\dot\xi, \end{cases} \tag{24}$$

где $\xi = \xi(t,\omega)-$ скалярный винеровский процесс [11], так, чтобы множество (22) было интегральным многообразием системы уравнений (23),(24). Задача заключается в определении функций w_3, w_4 и γ_2 по заданным функциям w_1, w_2 , γ_1 и заданному интегральному многообразию $\eta(y,u,z,v,t) = 0$.

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(y,u,z,v,t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [11] в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \frac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \frac{\partial \eta}{\partial v} w_4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right)\dot{\xi}. \qquad (25)$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем скалярные функции $a = a(\eta, y, u, z, v, t)$ и $b = b(\eta, y, u, z, v, t)$, $a(0, y, u, z, v, t) \equiv b(0, y, u, z, v, t) \equiv 0$ такие, что имеет место равенство

$$\dot{\eta} = a + b\dot{\xi}. \qquad (26)$$

Из (25) и (26) следуют соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) = a, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b, \end{cases}$$

которые перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 = a - \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right)\right), \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b - \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 \end{cases}. \qquad (27)$$

Положим $w_3 = w(y, u, z, v, t)$, где $w \in K$. Тогда из (27) следует справедливость соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 = a - \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) - \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3\right), \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b - \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1. \end{cases} \qquad (28)$$

Из (28) в предположении, что $\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} w_4 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} a_1, \\ \gamma_2 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} b_1, \end{cases} \qquad (29)$$

где

$$a_1 = a - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\omega_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\omega_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) - \frac{\partial \eta}{\partial z}\omega_3\right), \quad b_1 = b - \frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1.$$

Соотношения (29) представляют собой решение стохастической задачи замыкания – задачи построения замыкающих уравнений (24) по заданному интегральному многообразию (22) и заданному уравнению (23).

Таким образом, в обратной задаче замыкания при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях построены множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией и обладающих заданным интегральным многообразием.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Еругин Н. П.** //ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659–670.
2. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971.
3. **Галиуллин А. С.** //Дифференциальные уравнения, 1981. Т. XYII. №8. С.1487–1489.
4. **Галиуллин А. С.** //Дифференциальные уравнения, 1982. Т. XYIII. № 5. С.744–748.
5. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М.,1986.
6. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. М., 1994. № 1. С.5–21.
7. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М.,1986.
8. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М., 1999. № 1. С.48–51.
9. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. № 5. С.714–716.
10. **Тлеубергенов М. И.** //Доклады МН–АН РК. 1999. № 1. С.53–60.
11. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила 14.12.2004г.

Математический журнал. *Алматы. 2005. Том 5. № 2 (16). С. 87—93*

УДК 517.925.32

Существование и построение стационарных колебаний систем со многими степенями свободы с медленно меняющимися коэффициентами с помощью функций Ляпунова

Утеулиева К.Н., Камматов К.К., Рамазанова Х.

Атырауский государственный университет имени Х.Досмухамедова
465045, Атырау, Студенческий пр., 212 e-mail: AtyrauUniv@nursat.kz

Выводятся необходимые и достаточные условия существования и построения стационарных колебаний системы со многими степенями свободы с медленно меняющимися коэффициентами с помощью функций Ляпунова.

Для исследования нелинейных колебаний существовали методы возмущения, метод разложения в ряд по степеням малых возмущений и другие, разработанные Эйлером, Лагранжем, Пуассоном и т.д. Наряду с этим появился аппарат - локальная теория периодических решений А. Пуанкаре и теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами А. Ляпунова. Развивая идеи А.М. Ляпунова, Г.В. Каменков [1] исследовал колебания, описываемые системой уравнений возмущенного движения. Метод, который Г.В.Каменков применял при исследовании подобных задач известен в литературе под названием метода Г.В. Каменкова. Этим методом можно решать ряд важных задач, при исследовании которых классические методы становятся неэффективными. Например, при наличии кратных корней амплитудного уравнения этот метод позволяет получить необходимые и достаточные условия существования периодических решений по членам любого порядка правых частей системы, а также построить эти решения. Это также представляет возможность исследовать периодические движения системы, которые при $\mu = 0$ не обращаются в линейные. С помощью этого метода можно исследовать системы со многими степенями свободы как при отсутствии внутреннего резонанса и в случае внутреннего резонанса. Метод Г.В. Каменкова позволяет также определить предельно-допустимое значение параметра μ , в то время как метод усреднения не дает никаких указаний для определения границ по μ , по этому при $\mu \succ \mu_\partial 3$ решение по методу усреднения может не иметь ничего общего с истинным, даже если искомая система имеет вещественные положительные корни нечетной кратности. Развивая идею Г.В. Каменкова, один из соавторов написал работу [2], где исследуются колебания, описываемые существенно нелинейными системами. В [3] приводятся условия существовании ограниченных колебаний;

Keywords: *Stationary conclusion, vibration, Liyapunov' s function, stability of conclusion, Existence of unline system.*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

устанавливается предельное значение параметра; а также оценка точности, которую дает первое приближение при вычислении частных амплитуд; случай, когда член первого порядка по параметру μ не решает существования ограниченных колебаний; а также некоторые приложения.

Исследуются колебания, описываемые нелинейной системой вида:

$$\dot{x_s} = \frac{dx_s}{dt} = \mathbf{X}_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu X(x_s, y_s, \tau, \mu),$$
$$\dot{y_s} = \frac{dy_s}{dt} = \mathbf{Y}_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu Y(x_s, y_s, \tau, \mu), \tag{1}$$

где правые части обращаются в нуль при $x_s = y_s = 0$, а $X_{s0}^{(m_0)}, Y_{s0}^{(m_0)}$ - однородные многочлены не содержащие линейных членов относительно причем

$$\mathbf{X}_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} A_{sp} x_s^{m_0 - p} y_s^p,$$

$$\mathbf{Y}_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} B_{sp} x_s^{m_0 - p} y_s^p,$$

а также $X(x_s, y_s, \tau, \mu), Y(x_s, y_s, \tau, \mu)$ - функций аналитические относительно x_s, y_s и μ , представимые в виде абсолютно сходящихся рядов по целым положительным степеням μ в исследуемой области изменения x_s, y_s, μ и для любых τ в интервале $[0, \infty)$ и:

$$X(x_s, y_s, \tau, \mu) = \mu X_{s1}(x_s, y_s, \tau) + \mu^2 X_{s2}(x_s, y_s, \tau) + \ldots,$$

$$Y(x_s, y_s, \tau, \mu) = \mu Y_{s1}(x_s, y_s, \tau) + \mu^2 Y_{s2}(x_s, y_s, \tau) + \ldots,$$

где μ - малый положительный параметр, $\tau = \mu t$ - медленное время, а $X_{si}(x_s, y_s, \tau), \quad Y_{si}(x_s, y_s, \tau)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ - многочлены относительно x_s и y_s любой конечной степени m_i с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями по τ с ограниченными по τ первыми производными, причем

$$\mathbf{X}_{si}^{(m_i)}(x_s, y_s, \tau) = \sum_{k_1^{(i)} + \ldots + k_n^{(i)} + e_1^{(i)} + \ldots + e_n^{(i)} = m_0 - 1}^{m_i} A_{si}^{\left(k_1^{(i)}, \ldots, e_n^{(i)}\right)}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} \ldots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} \ldots y_n^{e_n^{(i)}},$$

$$\mathbf{Y}_{si}^{(m_i)}(x_s, y_s, \tau) = \sum_{k_1^{(i)} + \ldots + k_n^{(i)} + e_1^{(i)} + \ldots + e_n^{(i)} = m_0 - 1}^{m_i} B_{si}^{\left(k_1^{(i)}, \ldots, e_n^{(i)}\right)}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} \ldots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} \ldots y_n^{e_n^{(i)}}.$$

Стационарными (ограниченными) колебаниями подразумеваются такие колебания, у которых координаты $x_s, y_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$ при $t \longrightarrow \infty$ не стремятся к нулю, ни к бесконечности и ни к какому определенному числу [1].

Предположим, что система (1) при $\mu = 0$ имеет семейство периодических решений, зависящих от произвольных постоянных. Наиболее общий признак существования такого рода решений заключается в том, что система (1) при $\mu = 0$ допускает существование знакоопределенного голоморфного интеграла. Этот интеграл имеет вид

$$x_s^2 + y_s^2 + \Phi(x_s, y_s) = C_s^2. \tag{2}$$

Таким образом, исследуемая система (1) такая, у которых интеграл (2) сохраняет знакоопределенность во всей области исследования периодических решений и представляет при различных значениях C_s замкнутые кривые. Кроме того, будем предполагать, что луч, выходящий из начала координат, пересекает любую из этих замкнутых кривых только в одной точке и не касается их ни в одной точке. Эти свойства знакоопределенных интегралов типа (2) при значениях C_s достаточно малых, всегда выполняются. Полагая в уравнении (2)

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \tag{$*$}$$

получим

$$\rho^2 + \Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = C_s^2. \tag{3}$$

При наших ограничениях, накладываемых на интеграл (2), уравнение (3) определит два решения для ρ при заданных C_s и θ_s .

Эти решения представятся рядами

$$\rho_s = \pm C_s + u_{s2}(\theta_s)C_s^2 \pm u_{s3}(\theta_s)C_s^3 + \ldots \tag{4}$$

Мы можем взять любое из этих решений, так как заменой θ_S на $\pi + \theta_s$ одно из этих решений переходят в другое [3; 4]. Будем также предполагать, что аналитическое выражение корня уравнения (3), представляемые рядами (4), сохраняется для значений $\rho_s > \rho_{max,s}$, где $\rho_{max,s}$ - наибольшее значение радиуса - вектора, принадлежащего исследуемому предельному циклу. Преобразуем систему уравнений (1), приняв за новые переменные полярный угол θ_s и радиус

$$r_s^2 = \rho_s^2 + \Phi_s, \tag{5}$$

легко видеть, что эти переменные будут удовлетворять уравнениям

$$r_s\dot{r_s} = \left(2x_s + \frac{\partial\Phi_s}{\partial x_s}\right)(\mu X_{s1} + \ldots) + \left(2y_s + \frac{\partial\Phi_s}{\partial Y_s}\right)(\mu X_{s1} + \ldots)$$

$$r_s^2\dot{\theta}_s = x_s Y_{s0} - y_s X_{s0} + x_s(\mu Y_{s1} + \ldots) - y_s(\mu X_{s1} + \ldots)$$

Полагая в этих уравнениях $x_s = \rho_s\cos\theta_s, y_s = \rho_s\sin\theta_s$, и заменяя ρ_s на r_s , согласно ($*$), получим систему

$$\begin{gathered}\dot{r_s} = \mu F_{s1}^{(m_i)}(r_s, \theta_s, \tau) + \mu^2 F_{s2}^{(m_i)}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots, \\ \dot{\theta}_s = R_{s0}^{(m_0)}(r_s, \theta_s) + \mu R_{s1}^{(m_0)}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots, \\ (s = 1, 2, \ldots, n).\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь, исключая из (6) dt , получим

$$\frac{\dot{r_s}}{\dot{\theta}_s} = r_s' = \frac{\mu F_{s1}^{(m_i)}(r_s, \theta_s, \tau) + \mu^2 F_{s2}^{(m_i)}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots}{R_{s0}^{(m_0)}(r_s, \theta_s) + \mu R_{s1}^{(m_0)}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots} = \mu P_{s1}(r_s, \theta_s, \tau) + \mu^2 P_{s2}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots, \tag{7}$$

где

$$P_{si}(r_s, \theta_s, \tau) = \sum_{k_1^{(s)} + \ldots + k_n^{(s)} = m_0 - 1}^{M_i^{(s)}} A_{si}^{\left(k_1^{(s)}, \ldots, k_n^{(s)}\right)}(\theta_s, \tau) r_1^{k_1^{(s)}} \ldots r_n^{k_n^{(s)}}$$

$$s = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

при условии, что $R_{s0}^{(m_0)}(r_s,\theta_s)+\mu R_{s1}^{(m_0)}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots>0$, а штрих над переменной означает дифференцирование по θ_s . Рассмотрим новые переменные ρ_s , согласно подстановке

$$r_s=\rho_s+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}, \tag{8}$$

где $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)$ - некоторые периодические функции по θ_s , подлежащие определению, а $k_s^{(s)}\geq m_0-1$. .

С помощью (8) система (7) преобразуется к виду

$$\rho_s^{'}\left[1+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}k_1^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}}\ldots\rho_s^{k_1^{(s)}-1}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}(k_1^{(s)}\rho_1^{'}\rho_1^{k_1^{(s)}-1}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}+\ldots+k_{s-1}^{(s)}\rho_{s-1}^{'}\rho_1^{k_1^{(s)}}\ldots\rho_{s-1}^{k_{s-1}^{(s)}-1}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}+$$

$$+\ldots+k_{s+1}^{(s0}\rho_{s+1}^{'}\rho_1^{k_1^{(s)}}\ldots\rho_{s+1}^{k_{s+1}^{(s)}-1}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}+\ldots+k_n^{(s)}\rho_n^{'}\rho_1^{k_1^{(s)}}\ldots\rho_{n-1}^{k_{n-1}^{(s)}}\rho_n^{k_n^{(s)}-1})u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)}{\partial\theta_i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}\left[A_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\right]\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}+\ldots, \tag{9}$$

где функции B_{sk}, имеющие структуру, аналогичную A_{sk}, определяют результат влияния на члены k_1 - го порядка по μ всех членов более низкого порядка, причем для первого приближения будет

$$B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}\equiv 0$$

Теперь вспомогательные функции $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)$ выбираем так, чтобы удовлетворялись следующие уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+}{\partial\theta_i}+A_{sk}^{'(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)=g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}, \tag{10}$$

где $g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$- неизвестные величины зависящие только от τ.

В силу периодичности функции $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ неизвестные $g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ определяются

$$g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left[A_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\right]d\theta_1d\theta_2\ldots d\theta_n. \tag{11}$$

Определив таким образом $g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ систему (9) можно далее с помощью линейного неособого преобразования (12)

$$\rho_s=\bar{\rho}_s+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\left[\bar{A}_{s1}^{(k)}\bar{\rho}_1+\ldots+\bar{A}_{s,s-1}^{(k)}\bar{\rho}_{s-1}+\bar{A}_{s,s+1}^{(k)}\bar{\rho}_{s+1}+\ldots+\bar{A}_{sn}^{(k)}\bar{\rho}_n\right] \tag{12}$$

можно представить в виде (где сохранено старое обозначение переменных)

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}(\rho_s,\tau)+\mu^{k+1}Q_{s,a+1}^{(M_{a+1}^{(s)})}(\rho_s,\theta_s,\tau)+\ldots, \tag{13}$$

где

$$Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}(\rho_s,\tau)=\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_{k^{(s)}}} g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}},$$

если только параметр μ удовлетворяет условиям

$$1+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}} u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)k_s^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_s^{k_{s-1}^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}>0 \tag{14}$$

С точностью до членов α - го порядка стационарные решения системы (13) определяются системой алгебраических уравнений

$$\sum\mu^k Q_{sk}(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n,\tau)=0 \tag{15}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\alpha}\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_{k^{(s)}}} g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}=0,$$

корни которого, при фиксированном значении $\tau=\tau^*$ из интервала $[0,\infty)$ в общем случае обозначаем как

$$(\rho_{1k},\rho_{2k},\ldots,\rho_{nk},\tau^*)_1,(\rho_{1k},\rho_{2k},\ldots,\rho_{nk},\tau^*)_2,\ldots,(\rho_{1k},\rho_{2k},\ldots,\rho_{nk},\tau^*)_n, \tag{16}$$

Теорема. Каждому набору n - нечетно-кратных вещественных неотрицательных корней (16) системы (15) α - го приближения соответствует стационарное решение системы (6) или (1) независимо от членов порядка $\alpha+1$ и выше относительно μ

Доказательство. В самом деле, поскольку в многочленах $Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}$, $k_s^{(s)}\geq m_0-1>0$ выражения для $\rho_s^{'}$ можно представить в виде:

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{a}\mu^k Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}(\rho_s,\tau)+\ldots=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\rho^{\nu_{sk}}[a_{\nu_{sk}}(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)\rho_s^{\chi_{sk}}+$$

$$+a_{\nu_{sk}-1}(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)\rho_s^{\chi_{sk}-1}+\ldots+$$

$$+a_{\nu_k}(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)\rho_s^{\chi_k}\ldots$$

По теореме о неявных функциях из (17) можно определить $\rho=\rho_s(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)$ в виде χ_{ks} различных зависимостей. Тогда получим, что

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\rho_s^{\nu_{sk}}\prod_{i_k=1}^{\chi_{sk}}\left[\rho_s-\rho_s^{(i_k)}(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)\right]+\ldots$$

где $\nu_{sk}+\chi_{sk}=M_k^{(s)}, s=1,2,\ldots,n; k=1,2,\ldots,\alpha.$

Взяв вещественные неотрицательные корни из набора (16), получим

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\rho_s^{\nu_{sk}}\prod_{i_k=1}^{\omega_{sk}}\left[\rho_s-\rho_s^{(i_k)}(\rho_1,\ldots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\ldots,\rho_n,\tau^*)\right]A_{sk}^{(\rho_s,\tau)}+\ldots$$

где многочлены A_{sk} , степень которых равна $M_k^{(s)}-\chi_{sk}-\omega_{sk}$, сохраняют знак для всех значений $\rho_s>0$. Взяв из набора (16) такую группу корней

$$\rho_{sk}^{(i_1^{(k)})},\rho_k^{(i_2^{(k)})},\ldots,\rho_{nk}^{(i_n^{(k)})} \tag{18}$$

где $i_s^{(k)},(s=1,2,\ldots,n)$ соответствует только вещественным неотрицательным корням нечетной кратности, рассмотрим далее для каждой переменной ρ_s область образованную двумя следующими замкнутыми кривыми

$$\rho_s=\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}+\varepsilon_{s1}$$

$$(18_1)$$

$$\rho_s=\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}-\varepsilon_{s2},\quad s=1,2,\ldots,n,$$

где положительные числа $\varepsilon_{s1},\varepsilon_{s1}$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_{s1}<\rho_{sk}^{(i_s^{(k)+1})}-\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})},\qquad \varepsilon_{s2}<\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}-\rho_{sk}^{(i_s^{(k)-1})}, \tag{19}$$

Учтем, что при соблюдении условия (14) переменные $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$, определяемые системой уравнений (8), являются определенно - положительными функциями переменных $r_1,r_2,\ldots,r_n$, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\tau$ при всех положительных значениях $r_1,r_2,\ldots,r_n$, всех вещественных значениях $0\le\theta\le 2\pi$ и для любого фиксированного значения $\tau=\tau^*$. Это в частности, означает, что кривые $\rho_s(r_1,r_2,\ldots,r_n,\ \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\tau^*)=C_s$ являются замкнутыми кривыми. По свойству положительно - определенных функций кривая $\rho_s=\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}-\varepsilon_{s2}$ будет находиться внутри кривой $\rho_s=\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}+\varepsilon_{s1}$. Учитывая, что (18) есть корень системы (15), представим выражение для $\rho^{'}$ в виде

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k[\rho_s-\rho_s^{(i_s^{(k)})}(\rho_{1k}^{(i_1^{(k)})},\ldots,\rho_{s-1}^{(i_{s-1}^{(k)})},\rho_{s+1,k}^{(i_{s+1}^{(k)})},\ldots,\rho_{n,k}(i_n^{(k)}),\tau^*)]^{\bar{M}_{k^{(s)}}}\bar{A}_{sk}(\rho_s,\tau^*)+$$

$$+\mu^{\alpha+1}Q_{s,\alpha+1}(\ldots)+\ldots, \tag{20}$$

где $\bar{M}_k^{(s)}$ - нечетные числа, а многочлены $\bar{A}_{sk}$ сохраняют знак в указанных пределах (18_1). Для того, чтобы узнать, каким образом интегральные кривые будут пересекать кривые (18_1), рассмотрим знак $\rho_s^{'}$ при изменении ρ_s в пределах (18_1) с помощью (20) и меняя (если будет нужно) θ_s на $-\theta_s$. Тогда получим

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k(-\varepsilon_{s1})^{\bar{M}_k^{(s)}}\bar{A}_{sk}(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}+\varepsilon_{s1},\tau^*)\mu^{\alpha+1}Q_{s,\alpha+1}(\ldots)+\ldots \tag{21}$$

$$\rho_s^{'}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\varepsilon_{s2}^{\bar{M}_k^{(s)}}\bar{A}_{sk}(\rho_{sk}^{(i_s^{(k)})}-\varepsilon_{s2},\tau^*)+\mu^{\alpha+1}Q_{s,\alpha+1}(\ldots)+\ldots \tag{22}$$

знак производных $\rho_s^{'}$ по (21) и (22) при малых значениях μ определяется членами α-го порядка по μ независимо от членов более высокого порядка, т.е.

$$\rho_s^{'} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s1})^{\bar{M}_k^{(s)}} \bar{A}_{sk} < 0 \tag{23}$$

$$\rho_s^{'} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s2})^{\bar{M}_k^{(s)}} \bar{A}_{sk} > 0 \tag{24}$$

Неравенства (23) и (24) показывают, что интегральные кривые секут кривые $\rho_k^{(i_s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}$ снаружи внутрь, а кривые $\rho_{sk}^{(i_s^{(k)}t)} - \varepsilon_{s2}$ изнутри наружу. Следовательно, на основании теоремы Бендиксона, можно сказать, что внутри замкнутых областей (18) находится по крайней мере по одному предельному значению ρ_s , соответствующему стационарному решению (в принятом выше определении) исходной системы. Таким образом, нами доказано, что достаточным условием существования стационарных решений системы (6) или (1) по членам α- го порядка относительно μ независимо от старших членов является наличие набора из (16) нечетной кратности. Рассмотрев набор корней, которые содержат неотрицательные вещественные корни из (16) системы (15) четной кратности, мы бы убедились, что найденные стационарные решения выбором членов, например, при $\mu^{-\alpha+1}$ можно сохранить или уничтожить по желанию. Этим и доказывается необходимость условий теоремы.

Цитированная литература

1. **Каменков Г.В.** Избранные труды, Т.1,2, М., Наука, 1971.

2. **Камматов К.К.** //Диф. уравнения, 1971, Минск, Т 7, №6, С. 998-1006.

3. **Камматов К.К.** Устойчивость и колебания существенно нелинейных систем. Монография, Алматы, Наука, 2001г.

4. **Камматов К.К., Шамбилова Г.К.** // Вестник КазНУ им. аль - Фараби, Алматы, 2001. №4 (27). С. 33 - 43.

Поступила в редакцию 28.10.2004г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.9 2000 MSC: 35D05, 35Q30

Abulkairov U.U. **Unique solvability of a flow problem for 2D and 3D Navier - Stokes system I** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.5–15.

In this paper analogue of Wayl - Ladyzhenskaya theorem of space $L^2(\Omega)$ decomposition to direct sum of subspaces corresponding to non-standard boundary conditions for Stokes system is proved. A theorem of unique solvability of non-standard boundary problem for Stokes system in weak and strong poses is proved.
Referens –13.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35D05, 35Q30

Абылкаиров У.У. **2-3 өлшемді Навье - Стокс жүйесі үшін ағу есебінің бірмәнді шешілуі I** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.5–15.

Бұл жұмыста Стокс жүйесі үшін қойылған стандартты емес шекаралық шарттар үшін $L^2(\Omega)$ кеңістігін ішкікеңістіктерінің тура қосындысына жіктелуі туралы Вейль - Ладыженскаяның теоремасына ұқсас теорема дәлелденді. Стокс жүйесі үшін стандартты емес шеттік есебінің әлсіз және күшті қойылымындарының бірмәнді шешілуі туралы теорема дәлелденді.
Библ.назв.—13.

УДК: 517.51 2000 MSC: 34A45

Baiarystanov A, Kalybay A. **The problem with initial data at singular point for a class of ordinary differential equations** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.16–19.

For a class of ordinary differential equations the problem of existence and uniqueness of solutions stabilizing to generalized polynomial when the argument tends to zero is considered.
Referens –13.

УДК: 517.51 2000 MSC: 34A45

Байарыстанов А., Қалыбай А.А. **Кәдімгі дифференциал теңдеудің бір класына ерекше нүктедегі бастапқы шарты бар есеп.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.5–15.

Кәдімгі дифференциал теңдеудің бір класы үшін аргументі нөлге ұмтылған кездегі жалпылама көпмүшелерге тұрақтанатын бір ғана шешімінің табылуы қарастырылады.
Библ.назв.—13.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45,26B40

Bazarkhanov D.B. **Wavelet representation and equivalent norming for certain function spaces with mixed smoothness**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.16–19.

References — 6. Here characterizations in terms of wavelet representation for certain function spaces with generalized positive mixed smoothness defined by (mixed) weighted norms of smooth diadic decompositions of their Fourier transforms are obtained.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45,26B40

Базарханов Д.Б. **Кейбір жалпыланған аралас тегiстiктi функционалды кеiстiктерi үшiн толқынша арқылы кейiптеу және эквиваленттi нормалаулар**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б. 16–19.

Кейбір жалпыланған о аралас тегiстiктi функционалды кеiстiктерi үшiн еселi толқыншалар арқылы кейiптеу негiзiнде сипаттаулар алынған.
Библ. — 6.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34K29,60H10

Balgimbayeva Sh.A. **Asymptotic representation of a solution of a singular perturbed boundary value problem with an initial jump for a quasilinear equation of the order n.**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б. 16–19.

An asymptotic representation of a solution of a singular perturbed boundary value problem with an initial jump for a quasilinear differential equation of the order n is constructed.
Библ. — 6.

УДК: 517.926 2000 MSC: 34K29,60H10

Балғынбаева Ш.А. **Дәрежесi n сызыққа жақын теңдеудiң бастауыш секiру сингуляр ауытқылықпен шекара есебiнiң асимптотикалық көрсетiлуi**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P. 20–29.

Дәрежесi n сызыққа жақын теңдеудiң бастауыш секiру сингуляр ауытқылықпен шекара есебiнiң асимптотикалық көрсетiлуiнiң құрылуы көрсетiлген.
Библ. — 5.

УДК: 62.50 2000 MSC: 91B62, 93D09

Beisenbi M.A., Oinarov A.P. **Robust stability of fixed capital developmant**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б. 20–29.

An approach to control fixed capital development of economic system in two-parameter structural-steady map map is proposed. This approach provides a robust stability of a predictable trajectory of fixed capital development.
Библ. — 5.

УДК: 62.50 2000 MSC: 91B62,93D09

Бейсенби М.А., Ойнаров А.Р. **Негiзгi фондылар өсуiнiң робасты орнықтылығы**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.30–38.

Экономикалық жүйені негізгі фондларының дамуын екіпараметрлі құрылымдық-орнықты бейнелеу түрінде басқару ұсынылады. Ол негізгі фондлардың бағдарлық даму траекториясына робасты орнытылықты қамтасыз етеді.

References — 7.

УДК: 517.96 2000 MSC: 34E10, 34K25, 45M05

Calimbetov B.T. **Asymptotical convergence in the system of integral equations with diagonal kernel degeneration**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.30–38.

In this paper asymptotical convergence of formal solutions of integral systems to the solution of degenerate system is proved. Библ. — 7.

УДК: 517.96 2000 MSC: 34E10, 34K25, 45M05

Калимбетов Б.Т. **Диагоналды азғындалған өзекті интегралдық теңдеулер жуйесіндегі шектік кошу.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.39–47.

Интегралдық жуйенің формалды шешімінің азғындалған жуйенің шешіміне асимптотакалық жинақтылығы дәлеледенеді. References — 6.

УДК: 662.92 2000 MSC: 76T30

Mausumbekova S.D. **Construction of simulation method of solving plane thermodynamics problem of vapor- liquid mixture**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.39–47.

Based on the mixed representation of the two -phase flow simulation model of vapor- liquid mixture is proposed. A full time -dependet system of Navier-Stokes equations is used to describe the dynamics of the gas phase, including corrections where condensed phase is present. a trajectory model is applied to describe movements of parpiclec (liquid drops). Test problem results are presented for the proposed algorithm. Библ. — 6.

УДК: 662.92 2000 MSC: 76T30

Маусымбекова С.Д. **Булы -сұйықты ортаның термодинамикасын зерттеуге арналған жазықтық есепті шешудің сандық әдісін құру.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.48–51.

Екі фазалық ортаны аралас әдіспен бейнелеу арқылы сұйық тамшылары бар булы ортаның сандық моделі ұсынылған. Газ динамикасын суреттеуде сұйық тамшылардың әсерін есепке алатын толық Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қолданылған. Сұйық тамшылардың динамикасын зерттеуде траекторлық сұлба қолданылған. Ұсынылған сандық алгоритмді тексеруде тестік есептің нәтижелері келтірілген.

References — 7.

УДК: 521.1 2000 MSC: 34C14

Minglibaev M.D. **Invariants of center of mass of problem of many gravitating bodies with variable masses** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.48–51.

A problem of many gravitating bodies with isotrope variable masses changing with different temps on time is under consideration. Differential equations of motion are obtained in barycentric coordinates. Invariants of center of mass are received.

Библ. — 7.

УДК: 521.1 2000 MSC: 34C14

Меңлібаев М.Ж. **Өзара гравитациялық күшпен әсер ететін айнымалы массалы көп дене мәселесіндегі масса орталығының инварианттары.**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.52–66.

Өзара гравитациялық күшпен әсер ететін массасы әртүрлі қалыпта изотропты өзгеретін көп дене мәселесі қарастырылған. Барицентрлік координаттар жүйесінде қозғалыстың дифференциалдық теңдеулері қорытып шығарылған. Масса орталығының инварианттары алынған.
References — 10.

УДК: 517.956.4 2000 MSC: 34K06, 35D05, 35K05

Ramazanov M.I. **On second boundary value problem for "strongly" loaded parabolic equation**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.52–66.

In this paper we proved the unique solvability of second boundary value problem for one-dimensional "strongly" loaded parabolic equation. Библ. — 10.

УДК: 517.956.4 2000 MSC: 34K06, 35D05, 35K05

Рамазанов М.И. **"Әлді" жүктелген параболалық теңдеу үшін екінші шеттік есебі туралы**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.67–74.

"Әлді" жүктелген жылуөткізгіш теңдеу үшін қойылған екінші шеттік есебінің жалғыз шешілімділігі көрсетілген.
References — 12.

УДК: 517.927 2000 MSC: 34D08

Rakhimberdiev M.I. **On conditions for solvability of boundary value problems for linear systems of ordinary differential equations under their perturbations**// Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.67–74.

Solvability of two-point boundary value problem for linear systems of ordinary differential equations under their perturbations with no fixing right boundary is investigated.
Библ. — 12.

УДК: 517.927 2000 MSC: 34D08

Рақымбердиев М.И. **Сызықты жәй теңдеулер жүйелері үшін оның түрткіленуінде шеткі есептерінің шешілімділігінің шарттары туралы**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.75–84.

Бекітілмеген оң жақты некаралық шарты бар сызықты жәй теңдеулер жүйесі үшін оның түрткіленуінде екі нүктелі шеткі есептерінің шешілімділігі зерттелді.
References — 10.

УДК: 532.546 2000 MSC: 34K29,60H10 35D05, 35Q30

Spabekova G.M. **On one modification of Fourier method for solving of Coursat problem.** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.75–84.

It's know that Goursat problem for hyperbolic equations belongs to a class of Volterra problem, so is not solving by standard Fourier method because ther are no eigen vectors of a correspoding boundary-value problem. A present paper is devoted to substantiation of using Fourier method for Goursat problem.

Библ. — 10.

УДК: 532.546 2000 MSC: 34K29,60H10, 35D05, 35Q30

Спабекова Г.М. **Гурса есенбі шешу үшін Фурье әдісінің бір жақсартыеуы туралы**// Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.75–84.

Бүл жумыста Гурса есебін аргументін аунтқыту арқылы Фурье әдісімен шешуге балатыны кӨсетілген. Гиперболалық теңдеулер үшін Гурса есебі вольтерлік есемер класына жататыны белгілі, сондықтан сәйкес шеттік есентің өздік векторларының болмауы себенті Фурьенің стандартты әдісімен шешілмейді. References — 10.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. **On inverse problem of closure of differential systems with degenerating diffusion for the part of variables** // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.75–84.

Necessary and sufficient conditions of inverse problem of closure in the class of Ito stochastic first order differential systems with random disturbances are received.

Библ. — 10.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Тілеубергенов М.Ы., Ибраева Г.Т. **On inverse problem of closure of differential systems with degenerating diffusion for the part of variables** // Mathematical journal. 2005. Vol. 5. №. 2 (16). P.85–93.

Necessary and sufficient conditions of inverse problem of closure in the class of Ito stochastic first order differential systems with random disturbances are received. References — 9.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Диффузиясы айнымалыларының бір бөлігі бойынша азғындалатын дифференциалдық жүйелердің түйықтау кері есебі туралы // Математикалық журнал. 2005. Т. 5. № 2 (16). Б.85–93.

Винер үрдістері класында кездейсоқ түрткілі және диффузиясы бөлігіне қарасты азғын далатын бірінші ретті Ито стохастикалық дифференциалдық жүйелерінің класында түйықтау кері есептің шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Библ. — 9.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.