

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2010 ТОМ 10 № 4 (38)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 4 (38) 2010

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор

М.Т.Дженалиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, В.Г.Войнов,
Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 311
Телефон 8-(727)2-72-43-93, journal@math.kz, <http://www.math.kz>*

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2010г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 10, № 4 (38), 2010

Некорректность смешанной задачи для одного класса многомерных гиперβολо-параболических уравнений <i>С. А. Алдашев</i>	4
К обратной стохастической задаче с непрямым управлением <i>А. Е. Бейбитбаева, М. И. Тлеубергенов</i>	13
Пространственное сверхзвуковое течение совершенного газа с поперечным вдувом струй <i>А. О. Бекетаева</i>	19
Об ограниченности и разделимости оператора Штурма–Лиувилля <i>Ш. Биалал, Е. Д. Сийрбаев</i>	28
Неулучшаемость теоремы вложения разных метрик для классов $E_{p\theta}(\lambda)$ в пространство Лоренца по слабому метрическому параметру <i>А. У. Бимендина, Е. С. Смаилов</i>	37
Критерий корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения <i>С. С. Кабдрахова</i>	47
Численный расчет плоского турбулентного многокомпонентного течения газа с твердыми частицами в канале <i>Г. А. Камалова, Г. И. Рамазанова, Т. М. Усенова</i>	52
Математическая модель электродуговых эрозионных процессов <i>С. Н. Харин, А. Т. Кулахметова, Ю.Р. Шпади</i>	58
Оценки спектра полупериодической задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений <i>М. Б. Муратбеков, М. М. Муратбеков, А. Б. Шыракбаев</i>	70
Инвариантные множества неотрицательных линейных операторов. I. <i>И. Н. Панкратова</i>	80
О периодических движениях в фотогравитационной ограниченной задаче трех тел <i>А. Т. Турешибаев</i>	89

Рефераты

УДК 517.956

НЕКОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО–ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Актюбинский Государственный Университет им. К. Жубанова
030000 Актюбинск Братьев Жубановых, 263

В работе в цилиндрической области изучается смешанная задача для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений. Показано, что однородная задача имеет бесчисленное множество решений, а неоднородная задача разрешима неоднозначно.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1]. Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало [2]. В работе в цилиндрической области изучается смешанная задача для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений. Показано, что однородная задача имеет бесчисленное множество решений, а неоднородная задача разрешима неоднозначно.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α , Γ_β – части поверхности Γ , лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$. Пусть далее S – общая часть границ областей Ω_α , Ω_β , представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим смешанно гиперболо-параболические уравнения:

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x, t)u_{x_i} + e(x, t)u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

В качестве многомерной смешанной задачи рассмотрим следующую задачу

Keywords: *Ill-posedness, the mixed problem, the equation, multi-dimensionality, resolvability.*

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12

© С. А. Алдашев, 2010.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta). \quad (2)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$, – пространства Соболева.

Имеет место [3]

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r, t)$, $d_{in}^k(r, t)$, $\tilde{e}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\tilde{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $d_i(r, \theta, t)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r} \rho$, $e(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi(r, \theta)$, $\psi_1(t, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(x, t), b(x, t), c(x, t) \in W_2^l(\Omega_\alpha), d_i(x, t), e(x, t) \in W_2^l(\Omega_\beta) \subset C(\overline{\Omega_\beta}), l \geq m+1, i = 1, \dots, m$ и $\cos \mu_s \alpha \neq 0, s = 1, 2, \dots$, где μ_s – положительные нули функции Бесселя первого рода $J_{n+(m-2)/2}(z)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теорема 2. Если $\varphi(r, \theta) \in W_2^p(S)$, $\psi_1(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p \geq 3m/2$, то задача 1 разрешима неоднозначно.

Доказательство теорем. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид:

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0, \quad (4)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} (\sin^{m-j-1} \theta_j), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_α будем искать в виде:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (5)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению. Подставив (5) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H , для \bar{u}_n^k получим [4–6]:

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k \right) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \\ n = 1, k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \right. \\ \left. + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k \right) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, k = \overline{1, k_n}, n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Далее суммируя уравнение (8) от 1 до k_1 , а уравнение (9) от 1 до k_n , а затем складывая полученные выражения вместе с (7), приходим к уравнению (6). Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$, – решение системы (7)–(9), то оно является и решением уравнения (6). Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде:

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (10)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$. Далее, из краевого условия (2) в силу (5) будем иметь:

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \bar{\psi}_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

В (10)–(11), произведя замену переменных $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \bar{\psi}_{1n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (12)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Произведя замену переменных $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$, задачу (12), (13) приведем к следующей задаче:

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (14)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad (15)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad \bar{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (14), (15) ищем в виде:

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (16)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (17)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (18)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (19)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (20)$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [7], рассмотрим в виде:

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \quad (21)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t)R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s R_s(r). \quad (22)$$

Подставляя (21) в (17),(18), с учетом (22) получим:

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (23)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (24)$$

$$T_{stt} + \mu T_s = -a_s(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (25)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \quad (26)$$

Ограниченным решением задачи (23), (24) является (8)

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_s r), \quad (27)$$

где $\nu = n + (m - 2)/2$, $\mu = \mu_s^2$.

Общее решение уравнения (25) представимо в виде (8):

$$T_s(t) = c_{1s} \cos \mu t + c_{2s} \sin \mu_s t + \frac{\cos \mu_s t}{\mu_s} \int_0^t a_s(\xi) \sin \mu_s \xi d\xi - \frac{\sin \mu_s t}{\mu_s} \int_0^t a_s(\xi) \cos \mu_s \xi d\xi,$$

c_{1s} , c_{2s} – произвольные постоянные. Удовлетворив условию (26), будем иметь:

$$T_s(t) = c_{2s} (\sin t \mu_s - \operatorname{tg} \alpha \mu_s \cos t \mu_s) + \frac{\cos t \mu_s}{\mu_s} \left(\int_0^t a_s(\xi) \sin \xi \mu_s d\xi - \int_0^{\alpha} a_s(\xi) \sin \xi \mu_s d\xi \right) + \frac{\operatorname{tg} \alpha \mu_s \cos t \mu_s}{\mu_s} \int_0^{\alpha} a_s(\xi) \cos \xi \mu_s d\xi - \frac{\sin t \mu_s}{\mu_s} \int_0^t a_s(\xi) \cos \xi \mu_s d\xi. \quad (28)$$

Подставляя (27) в (22), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t)J_\nu(\mu_s r), \quad 0 < r < 1, \quad (29)$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s J_\nu(\mu_s r), \quad 0 < r < 1. \quad (30)$$

Ряды (29), (30) – разложения в ряды Фурье-Бесселя [9], если

$$a_s(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_s \xi) d\xi, \quad (31)$$

$$b_s = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_s \xi) d\xi, \quad (32)$$

$\mu_s, s = 1, 2, \dots$, – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин. Из (27), (28) получим решение задачи (17), (18) в виде:

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_s(t) J_\nu(\mu_s r), \quad (33)$$

где $a_s(t)$ определяется из (31). Далее, подставляя (27) в (19), (20), с учетом (22) будем иметь:

$$T_{stt} + \mu_s^2 T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \\ T_s(\alpha) = b_s,$$

решением которого является

$$T_s(t) = c_{2s}(\sin t \mu_s - t \alpha \mu_s \cos t \mu_s + b_s \cos t \mu_s / \cos \mu_s \alpha). \quad (34)$$

Из (27), (34) получим:

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} [c_{2s}(\sin t \mu_s - t \alpha \mu_s \cos t \mu_s) + b_s \cos t \mu_s / \cos \mu_s \alpha] J_\nu(\mu_s r), \quad (35)$$

где b_s находится из (32). Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n = 0$), а затем (8), (11) ($n = 1$) и т.д., найдем последовательно все $v_n^k(r, t)$ из (16), где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (33), (35), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$

Итак, в области Ω_α имеет место:

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \quad (36)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ [10]. Отсюда и из (36) следует, что

$$\int_{\Omega_\alpha} f(r, \theta, t) L_1 u d\Omega_\alpha = 0$$

и

$$L_1 u = 0 \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\alpha.$$

Далее из (5), (16), (33), (35) при $t \rightarrow +0$ имеем:

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\begin{aligned} \tau_n^k(r) = & \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=0}^{\infty} r^{(2-m)/2} [-2c_{2s} \operatorname{tg} \alpha \mu_s - \frac{1}{\mu_s} \int_0^\alpha a_s(\xi) \sin \xi \mu_s d\xi + \\ & + \frac{\operatorname{tg} \alpha \mu_s}{\mu_s} \int_0^\alpha a_s(\xi) \cos \xi \mu_s d\xi + b_s / \cos \mu_s \alpha] J_\nu(\mu_s r). \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, мы пришли в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$L_2 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(r, \theta, t) u_{x_i} + e(r, \theta, t) = 0, \quad (38)$$

с условиями

$$u|_s = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta). \quad (39)$$

Решение задачи (38), (39) будем искать в виде (5). Подставляя (5) в (38), будем иметь:

$$\begin{aligned} \rho_0^1 \bar{u}_{0rr} - \rho_0^1 \bar{u}_{0t} + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r} + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr} - \rho_n^k \bar{u}_{nt} + \\ + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar{u}_{nr} + [\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-1}^k - n d_n^k)] \bar{u}_n^k \} = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr} - \rho_0^1 \bar{u}_{0t} + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r} = 0, \quad (41)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr} - \rho_1^k \bar{u}_{1t} + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n=1, k=\overline{1, k_1}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \rho_n^k \bar{u}_{nrr} - \rho_n^k \bar{u}_{nt} + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \\ -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k=\overline{1, k_n}, n=2, 3, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Далее, суммируя уравнение (42) от 1 до k_1 , уравнение (43) от 1 до k_n , а затем складывая полученные выражения вместе с (41), приходим к уравнению (40). Отсюда вытекает, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1, k_n}$, $n=0, 1, \dots$, – решение системы (41)–(43), то оно является и решением уравнения (40).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (41)–(43) можно представить в виде:

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{g}_n^k(r, t), \quad (44)$$

где $\bar{g}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{g}_0^1(r, t) \equiv 0$. В (44), произведя замену переменных $\bar{\omega}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим:

$$\bar{\omega}_{nrr}^k - \bar{\omega}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\omega}_{nr}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\bar{\omega}_n^k = g_n^k(r, t), \quad (45)$$

при этом краевое условие (39) с учетом (37) запишется в виде:

$$\bar{\omega}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{\omega}_n^k(1, t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (46)$$

$$g_n^k(r, t) = \bar{g}_n^k(r, t) + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_{2n}^k + \psi_{2nt}^k, \quad \bar{\tau}_n^k(r) = \tau_n^k(r) - \psi_{2n}^k(0).$$

Произведя замену переменной $\omega_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2}\bar{\omega}_n^k(r, t)$, задачу (45), (46) приведем к следующей задаче:

$$L\omega_n^k \equiv \omega_{nrr}^k - \omega_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega_n^k = \tilde{g}_n^k(r, t), \quad (47)$$

$$\omega_n^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad \omega_n^k(1, t) = 0, \quad (48)$$

$$\tilde{g}_n^k(r, t) = r^{(m-1)/2}g_n^k(r, t), \quad \tilde{\tau}_n^k(r) = r^{(m-1)/2}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (47), (48) ищем в виде:

$$\omega_n^k(r, t) = \omega_{1n}^k(r, t) + \omega_{2n}^k(r, t), \quad (49)$$

где $\omega_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L\omega_{1n}^k = \tilde{g}_n^k(r, t), \quad (50)$$

$$\omega_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad \omega_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (51)$$

а $\omega_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L\omega_{2n}^k = 0, \quad (52)$$

$$\omega_{2n}^k(r, 0) = \tilde{\tau}_n^k(r), \quad \omega_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (53)$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде:

$$\omega_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)V_s(t), \quad (21')$$

при этом пусть

$$\tilde{g}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s(t)R_s(r), \quad \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s R_s(r). \quad (54)$$

Подставляя (21') в (50), (51), с учетом (54) получим задачу (23), (24), решение которой имеет вид (27) и уравнение

$$V_{st} + \mu_s^2 V_s = -d_s(t) \quad (55)$$

с условием

$$V_s(0) = 0. \quad (56)$$

Решением задачи (55), (56) является

$$V_s(t) = - \int_0^t d_s(\xi) \exp[-\mu_s^2(t - \xi)] d\xi. \quad (57)$$

Подставляя (27) в (54), из (31), (37) получим:

$$d_s(t) = \frac{1}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_s \xi) d\xi, \quad (58)$$

$$e_s = -2c_2 s t g \alpha \mu_s - \frac{1}{\mu_s} \int_0^{\alpha} a_s(\xi) \sin \xi \mu_s d\xi + \frac{t g \alpha \mu_s}{\mu_s} \int_0^{\alpha} a_s(\xi) \cos \xi \mu_s d\xi + b_s / \cos \mu_s \alpha. \quad (59)$$

Таким образом из (21), (27), (57) следует, что решением задачи (50), (51) является функция

$$\omega_{1n}^k(r, t) = - \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} \left\{ \int_0^t d_s(\xi) \exp[-\mu_s^2(t - \xi)] d\xi \right\} J_{\nu}(\mu_s r), \quad (60)$$

где $d_s(t)$ определяется из (58). Далее, подставляя (21) в (52), (53), будем иметь:

$$V_{st} + \mu_s^2 V_s = 0,$$

решением которого является

$$V_s(t) = \exp(-\mu_s^2 t). \quad (61)$$

Из (27), (61) с учетом (54) получим

$$\omega_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} e_s J_{\nu}(\mu_s r) \exp(-\mu_s^2 t), \quad (62)$$

где e_s находится из (59).

Следовательно, сначала решив задачу (41), (46) ($n = 0$), а затем (42), (46) ($n = 1$) и т. д., найдем последовательно все $\omega_n^k(r, t)$ из (49), где $\omega_{1n}^k(r, t)$, $\omega_{2n}^k(r, t)$ определяются из (60), (62), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$

Итак, в области Ω_{β} имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_2 u dH = 0. \quad (63)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r) \rho(\theta) T(t)$, причем $R(r) \in V_0$ плотно в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотно в $L_2((\beta, 0))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотно в $L_2(\Omega_{\beta})$. Отсюда и из (63) следует, что $L_2 u = 0 \forall (r, \theta, t) \in \Omega_{\beta}$.

Таким образом, решением задачи 1 в областях Ω_{α} и Ω_{β} являются функции

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} \{ \psi_{1n}^k(t) + r^{(1-m)/2} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \} Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0, \\ u(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} \{ \psi_{2n}^k(t) + r^{(1-m)/2} [\omega_{1n}^k(r, t) + \omega_{2n}^k(r, t)] \} Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0, \end{aligned} \quad (64)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (33), (35), а $\omega_{1n}^k(r, t)$, $\omega_{2n}^k(r, t)$ – из (60), (62).

Из (64) следует, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет нетривиальные решения вида:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{(1-m)/2} [v_{1n}^k(r, t) + \\
 &+ \sum_{s=1}^m \sqrt{r} c_{2s} (\sin t \mu_s - t g \mu_s \alpha \cos \mu_s t) J_{\nu}(\mu_s r)] Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0, \\
 u(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{(1-m)/2} [\omega_{1n}^k(r, t) + \\
 &+ \sum_{s=1}^m \sqrt{r} e_s J_{\nu}(\mu_s r) \exp(-\mu_s^2 t)] Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Учитывая формулу [9] $J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [9,3]

$$|J_{\nu}(z)| = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu},$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, а так же леммы, ограничения на заданные функции $\varphi(r, \theta)$, $\psi_1(t, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$, аналогично [4–6] можно показать, что полученные неоднозначные решения (64), (65) принадлежат искомому классу $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_{\alpha} \cup \Omega_{\beta})$. Теоремы доказаны.

Цитированная литература

1. **Нахушев А.М.** Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М., 2006.
2. **Врагов В.Н.** Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1983.
3. **Михлин С.Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.
4. **Алдашев С.А.** // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64 – 68.
5. **Алдашев С.А.** Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы, 1994.
6. **Алдашев С.А.** Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал, 2007.
7. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М., 1977.
8. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965.
9. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.
10. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Поступила в редакцию 11.01.2010г.

УДК 517.925.5:519.216

К ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НЕПРЯМЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

А. Е. БЕЙБИТБАЕВА, М. И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова

Институт Математики МОиН РК

040000 Талдыкорган Жансугурова, 187 arailym_ertaevna@mail.ru

050010 Алматы Пушкина, 125 marat207@mail.ru

Рассматриваются две обратные задачи в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, зависящим от части переменных, и с управлением по первой производной (задача 1) и с управлением по второй производной (задача 2). В этих задачах определяется множество уравнений регулятора, обеспечивающее достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2,3].

Постановка задач.

Задача 1. Стохастическая задача восстановления с управлением по производным первого порядка. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), & x \in R^n, \\ \dot{y} = g_1(x, y, t) + \sigma_1(x, y, t) \dot{\xi}, & \xi \in R^k. \end{cases} \quad (1)$$

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (1)), то есть определить коэффициенты $g_1(x, y, t)$ и $\sigma_1(x, y, t)$ так, чтобы множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in C_{xt}^{22}, \quad \lambda \in R^m, \quad (2)$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Задача 2. Стохастическая задача восстановления с управлением по производным второго порядка. Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \ddot{y} = g_2(x, y, t) + \sigma_2(x, y, t) \dot{\xi}, & y \in R^r. \end{cases} \quad (3)$$

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equations, integral manifold*

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

© А. Е. Бейбитбаева, М. И. Тлеубергенов, 2010.

Требуется построить уравнение регулятора (второе уравнение системы (3)) по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda(x, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in C_{xt}^{33}. \quad (4)$$

Иначе говоря, по заданным вектор-функциям f , λ определим коэффициенты $g_2(x, y, t)$ и $\sigma_2(x, y, t)$ так, чтобы множество (4) было интегральным многообразием системы уравнений (3).

Здесь $x \in R^n, y \in R^r, \xi \in R^k$, σ – матрица размерности $(r \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_k(t, \omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [4], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P) .

Вектор непрямого управления $y \in R^r$ изменяется в соответствии с уравнением динамики регулятора в виде стохастического уравнения Ито первого порядка в задаче 1 и второго порядка в задаче 2.

Предполагается, что вектор-функции $f(x, \dot{x}, t)$, $g_1(x, y, t)$, $g_2(x, y, t)$ и матрицы $\sigma_1(x, y, t)$, $\sigma_2(x, y, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x и y в области

$$U_H(\Lambda) = \{z = (x^T, y^T)^T : \rho(z, \Lambda(t)) < H, \quad H > 0\}, \quad (5)$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = (x_0^T, y_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4].

Указанные задачи в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv 0$) достаточно полно исследованы в [2,3], а стохастический случай ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$) методом квазиобращения решается в [5].

Для решения данных задач в работе [5] используется метод квазиобращения Р.Г. Мухарлямова [3], в основе которого лежит

Лемма 1 [3, с.12–13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = (h_{\mu k}), \quad \vartheta = (\vartheta_k), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m \leq n, \quad (6)$$

где матрица H имеет ранг равный m , определяется выражением

$$\vartheta = s [H C] + H^+ g. \quad (7)$$

Здесь s – произвольная скалярная величина, $[H C] = [h_1 \dots h_m \ c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $H^+ = H^T (H H^T)^{-1}$, H^T – матрица, транспонированная к H .

На основе леммы 1 в [5] доказаны следующие два утверждения

Лемма 2. *Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2) необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_1\}$ имело вид*

$$g_1 = s_1 [H_1 C] + (H_1)^+ (A_1 - G_1), \quad (8)$$

а множество матриц диффузии $\{\sigma_1\}$ вид

$$\sigma_{1i} = s_2 [H_1 C] + (H_1)^+ (B_{1i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (9)$$

где s_1, s_2 – произвольные скалярные величины.

Лемма 3. *Для того чтобы система уравнений (3) имела заданное интегральное многообразие (4) необходимо и достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_2\}$ имело вид:*

$$g_2 = s_3 [H_2 C_1] + (H_2)^+ (A_2 - G_2), \quad (10)$$

а множество матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ вид

$$\sigma_{2i} = s_4 [H_2 C_1] + (H_2)^+ (B_{2i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (11)$$

где s_3, s_4 – произвольные скалярные величины.

В данной работе задачи 1 и 2 решаются методом проектирования [3, с.23].

1. Решение задачи 1. Следуя правилу стохастического дифференцирования сложной функции $\lambda = \lambda(x, t)$, составим уравнение возмущенного движения

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt}, \quad (12)$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \cdot (g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}) + f_t + \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma \sigma^T + f_t$.

С помощью обозначения

$$G_1 = \lambda_x \left[f_x f + \frac{1}{2} f_{yy} : \sigma \sigma^T + f_t \right] + f^T \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt},$$

перепишем (12) в виде

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \lambda_x f_y g_1 + \lambda_x f_y \sigma_1 \dot{\xi}. \quad (13)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольные функции: m - мерную вектор-функцию A_1 и $(m \times k)$ - матрицу B_1 , которые удовлетворяют условию $A_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$, $B_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$ такие, что

$$\ddot{\lambda} = A_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + B_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (14)$$

На основе уравнений (11) и (12) приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_1 = A_1 - G_1, \\ \lambda_x f_y \sigma_1 = B_1, \end{cases} \quad (15)$$

из которых нужно определить множество управляющих параметров $\{g_1\}$ и множество матриц диффузий $\{\sigma_1\}$. Обозначим $H_1 = \lambda_x f_y$ и методом проектирования [3, с. 23] из соотношений (15) определим вектор-функцию g_1 :

$$g_1 = (E - \lambda_x^T \Gamma^{-1} \lambda_x) c + (H_1)^+ (A_1 - G_1) \quad (16)$$

и столбцы матрицы диффузии $\{\sigma_{1i}\}$ в виде:

$$\sigma_{1i} = (E - \lambda_x^T \Gamma^{-1} \lambda_x) c + (H_1)^+ (B_{1i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (17)$$

где c – произвольный n -вектор, $\Gamma = \lambda_x \lambda_x^T$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы система уравнений (1) имела заданное интегральное многообразие (2) достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_1\}$ имело вид (16), а множество матриц диффузии $\{\sigma_1\}$ вид (17).

Замечание 1.1. В скалярном случае $x \in R^1, y \in R^1, \lambda \in R^1, \lambda \in C_{xt}^{22}$ задачи 1 уравнение возмущенного движения в результате двукратного стохастического дифференцирования примет вид:

$$\ddot{\lambda} = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \dot{f} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \quad (18)$$

где $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} (g_1 + \sigma_1 \dot{\xi}) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Обозначим $\tilde{G}_1 = \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$, тогда (18) запишется в виде:

$$\ddot{\lambda} = G_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_1 \dot{\xi}. \quad (19)$$

Введем произвольные скалярные функции Н.П. Еругина [1] $a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, $b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям $a_1(0, 0, x, y, t) \equiv b_1(0, 0, x, y, t) \equiv 0$ и такие, что

$$\ddot{\lambda} = a_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) + b_1(\lambda, \dot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), приходим к соотношениям:

$$a_1 = \tilde{G}_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_1, \quad (21)$$

$$b_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_1, \quad (22)$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_1 и коэффициент диффузии σ_1 .

Из соотношений (21) и (22) получаем:

$$g_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (a_1 - \tilde{G}_1), \quad (23)$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} b_1. \quad (24)$$

Следовательно, справедливо утверждение

Следствие 1.1. *Для того чтобы система уравнений (1) в скалярном случае $x \in R^1$, $y \in R^1$, $\lambda \in R^1$, $\lambda \in C_{xt}^{22}$ обладала интегральным многообразием (2) достаточно, чтобы коэффициент сноса g_1 имел вид (23), а коэффициент диффузии σ_1 вид (24).*

2. Решение задачи 2. В силу стохастического дифференцирования сложной функции найдем последовательно вторую и третью производные функции $\lambda = \lambda(x, t)$:

$$\ddot{\lambda} = \lambda_x \dot{f} + f^t \lambda_{xx} f + 2\lambda_{xt} f + \lambda_{tt},$$

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & (\lambda_{xx} + \lambda_{xt}) \dot{f} + \lambda_x \ddot{f} + f^T \lambda_{xx} f + f^T (\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f + f^T \lambda_{xx} \dot{f} + \\ & + 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt} \dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\dot{f} = f_x f + f_y \dot{y} + f_t$, $\ddot{f} = (f_{xx} f + f_{xy} \dot{y} + f_{xt}) f + f_x \dot{f} + (f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + f_{yt}) \cdot \dot{y} + f_y \ddot{y} + f_{tx} f + f_{ty} \dot{y} + f_{tt}$.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} G_2 = & (\lambda_{xx} + \lambda_{xt}) \dot{f} + \lambda_x [(f_{xx} f + f_{xy} \dot{y} + f_{xt}) f + f_x \dot{f} + (f_{yx} f + f_{yy} \dot{y} + f_{yt}) \dot{y} + f_{tx} f + \\ & + f_{ty} \dot{y} + f_{tt}] + f^T \lambda_{xx} f + f^T (\lambda_{xxx} + \lambda_{xxt}) f + f^T \lambda_{xx} \dot{f} + 2\lambda_{xxt} f + 2\lambda_{xt} \dot{f} + \lambda_{xtt} + \lambda_{ttt}, \end{aligned}$$

тогда уравнение возмущенного движения (25) запишется в виде:

$$\ddot{\lambda} = G_2 + \lambda_x f_y g_2 + \lambda_x f_y \sigma_2 \dot{\xi}. \quad (26)$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введем произвольную m -мерную вектор-функцию $A_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$ и матрицу $B_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям:

$$A_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0, \quad B_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0,$$

и такие, что имеет место соотношение

$$\ddot{\lambda} = A_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) + B_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t)\dot{\xi}. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), получаем соотношения:

$$\begin{cases} \lambda_x f_y g_2 = A_2 - G_2, \\ \lambda_x f_y \sigma_2 = B_2, \end{cases} \quad (28)$$

из которых нужно определить множества коэффициентов сноса $\{g_2\}$ и матриц диффузий $\{\sigma_2\}$.

Обозначив через $H_2 = \lambda_x f_y$ и используя метод проектирования [3], из соотношений (26) определим множество $\{g_2\}$ в виде:

$$g_2 = (E - \lambda_x^T \Gamma^{-1} \lambda_x) c + (H_2)^+ (A_2 - G_2), \quad (29)$$

а столбцы множества матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ в виде:

$$\sigma_{2i} = (E - \lambda_x^T \Gamma^{-1} \lambda_x) c + (H_2)^+ (B_{2i}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (30)$$

где c – произвольный вектор, $\Gamma = \lambda_x \lambda_x^T$.

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений (3) имела заданное интегральное многообразие (4) достаточно, чтобы множество вектор-функций $\{g_2\}$ имело вид (29), а множество матриц диффузий $\{\sigma_2\}$ вид (30).*

Замечание 2.1. В скалярном случае $x \in R^1, y \in R^1, \lambda \in R^1, \lambda \in C_{xt}^{22}$ задачи 2 уравнение возмущенного движения в результате трехкратного стохастического дифференцирования примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} = & \left(\left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^2 \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t^2} \right) f + 2 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) \dot{f} + \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \ddot{f} + \left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^3}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{f} = & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{f} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \right) \dot{y} + \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 = & \left(\left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x^2 \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x \partial t^2} \right) f + 2 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} \right) \dot{f} + \\ & + \left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x^2} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t \partial x \partial t} \right) f + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial x} \dot{f} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^2 \partial x} f + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial t^3} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) f + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{f} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \right) \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] \end{aligned}$$

и перепишем (31) в виде:

$$\ddot{\lambda} = \tilde{G}_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_2 \dot{\xi}. \quad (32)$$

Далее, следуя методу Н.П. Еругина [1], введем произвольные скалярные функции

$$a_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t), \quad b_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t),$$

которые удовлетворяют следующему условию

$$a_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv b_2(0, 0, 0, x, y, t) \equiv 0,$$

и такие, что

$$\ddot{\lambda} = a_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) + b_2(\lambda, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, x, y, t) \dot{\xi}. \quad (33)$$

Сравнивая (32) и (33), приходим к соотношениям:

$$a_2 = \tilde{G}_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2, \quad (34)$$

$$b_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_2, \quad (35)$$

из которых нужно определить управляющий параметр g_2 и коэффициент диффузии σ_2 .

Из соотношений (34) и (35) получаем

$$g_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} (a_2 - \tilde{G}_2), \quad (36)$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} b_2. \quad (37)$$

Следовательно, справедливо утверждение

Следствие 2.1. *Для того чтобы система уравнений (3) в скалярном случае $x \in R^1, y \in R^1, \lambda \in R^1, \lambda \in C_{xt}^{22}$ обладала интегральным многообразием (4) достаточно, чтобы коэффициент сноса g_2 имел вид (36), а коэффициент диффузии σ_2 вид (37).*

Полученные результаты обобщают на стохастический случай известные в классе ОДУ утверждения И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова [3].

Цитированная литература

1. Еругин Н. П. // ПММ. 1952. Т.10, В.16. С. 659–670.
2. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. М., 1986.
3. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Уравнения программных движений. М., 1986.
4. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.
5. Тлеубергенов М. И. // Известия НАН РК. Серия физ.-матем. 2006. № 5. С. 13–17.

Поступила в редакцию 28.01.2011г.

УДК 532.526

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ

А. О. БЕКЕТАЕВА

Институт математики МОиН РК
050100 Алматы Пушкина, 125 ked@math.kz

Изучены особенности пространственного обтекания круглой струи на основе трехмерных уравнений Навье-Стокса, замкнутых алгебраической моделью турбулентности Болдуина-Ломакса. Проведено сравнение результатов численных экспериментов плоской и пространственной задач перпендикулярного вдува струи в сверхзвуковой поток. Выявлены дополнительные особенности трехмерного обтекания круглой струи, в частности, показано уменьшение интенсивности скачков уплотнения и распределения давления на стенке в результате бокового перетекания набегающего потока.

В последнее время большое внимание уделяется изучению сверхзвуковых течений над обтекаемой поверхностью при наличии на поверхности уступов и струй. Вопросу обтекания препятствий и струй посвящен ряд экспериментальных [1–5] и теоретических [6–9] исследований. В работах [6–7] численно моделируется щелевой поперечный вдув водорода в канале ПВРДсг, работа [8] посвящена адаптированной сетке, авторы [9] исследуют различные методы задания турбулентной вязкости. Из экспериментов известно, что при трехмерном взаимодействии поперечной струи с потоком, в отличие от двумерного, наряду с возникновением отрыва и возвратных течений как перед струей, так и за ней, появляются дополнительные особенности, к примеру, боковое перетекание потока. Большинство исследований посвящены плоскому обтеканию и на данный момент существует немного работ, в которых теоретически рассматривается пространственное обтекание поперечной круглой струи. Соответственно не до конца исследованы трехмерные эффекты взаимодействия и их отличие от плоского течения. Целью данной работы является численное моделирование пространственного сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй на нижней и верхней стенках канала из круглых отверстий, расположенных симметрично. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки.

Keywords: *Turbulence, supersonic flow*

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40

© А. О. Бекетаева, 2010.

Схема течения показана на рисунке 1

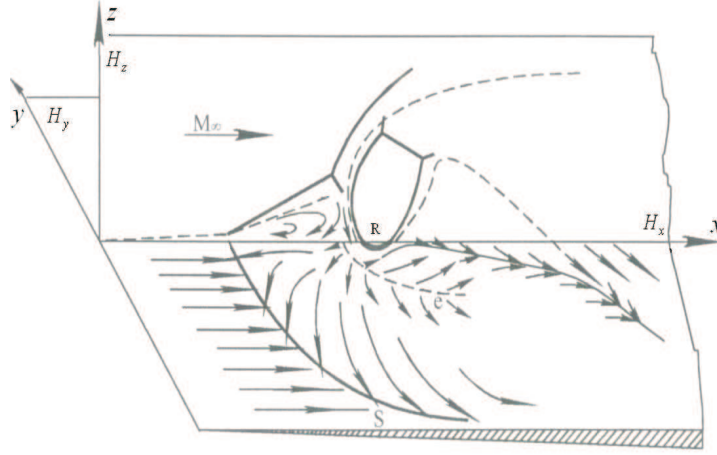


Рис. 1: Схема течения.

Постановка задачи. Для поставленной задачи в качестве исходной принята система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} + \frac{\partial (\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + P)u \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (E_t + P)v \end{pmatrix},$$

компоненты

$$\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$$

связаны с вязкими напряжениями:

$$\begin{aligned} \vec{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x)^T, \\ \vec{F}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T, \\ \vec{G}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y)^T. \end{aligned}$$

Для давления и температуры запишутся следующие выражения:

$$P = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right],$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v} \right) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1) M_\infty^2}.$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2u_x - w_z - v_y), & \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2w_z - u_x - v_y), & \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \frac{\mu_t}{Re} (2v_y - u_x - w_z), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \frac{\mu_t}{Re} (u_z + w_x), & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{\mu_t}{Re} (u_y + v_x), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{\mu_t}{Re} (w_y + v_z), \\ q_x &= -\frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Pr Re} T_x, & q_y &= -\frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Pr Re} T_y, & q_z &= -\frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Pr Re} T_z.\end{aligned}$$

Здесь t – время, u, w, v – компоненты скорости потока в продольном и в поперечном направлениях, ρ – плотность, P – давление, T – температура, c_v – теплоемкость при постоянном объеме, γ – показатель адиабаты, M_0 и M_∞ – числа Маха струи и потока, μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, 0 – отнесен к параметрам струи, ∞ – к параметрам потока.

Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$, давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является диаметр круглого отверстия. Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса [10].

Граничные условия. На входе задаются параметры потока

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq H_y, \quad 0 \leq z \leq H_z;$$

во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, профиль продольной скорости аппроксимируется степенным законом на нижней стенке:

$$u = 0, \quad v = 0, w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq y \leq H_y;$$

в струе:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = 0.6, \quad w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty, \quad P_0 = n P_\infty, \quad z = 0, \quad |x^2 + y^2| \leq R;$$

на верхней границе условие симметрии:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = H, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq y \leq H_y;$$

на боковых границах:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad y = H_y, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq z \leq H_z;$$

где H_x – длина, H_z – высота, H_y – ширина расчетной области, R – радиус круглого отверстия; на выходной границе задается граничное условие неотражения [11].

Метод решения. В работе использовались преобразования координат следующего вида [12]:

$$\xi(x) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{x}{x_c} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau K) \right], \quad \eta(z) = H \frac{\left[(\beta + 1) - (\beta - 1) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} \right]}{\left[\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} + 1 \right]} \quad (2)$$

$\zeta(y) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{y}{y_c} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau K) \right]$, где $K = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{(1 + (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L})}{(1 - (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L})} \right]$, β, τ – параметры сгущения, $\beta, \tau > 1$, a – высота расчетной области в обобщенных координатах, x_c – точка, относительно которой производится сгущение.

При этом уравнения (1) в обобщенных координатах запишутся в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta}, \quad (3)$$

где

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \vec{U}, \quad \tilde{E} = \left(\frac{\xi_x}{J} \right) \vec{E}, \quad \tilde{F} = \left(\frac{\eta_z}{J} \right) \vec{F}, \quad \tilde{E}_{v2} = \left(\frac{\xi_x}{J} \right) \vec{E}_{v2}, \quad \tilde{E}_{vm} = \left(\frac{\xi_x}{J} \right) \vec{E}_{vm},$$

$$\tilde{F}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J} \right) \vec{F}_{v2}, \quad \tilde{F}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J} \right) \vec{F}_{vm}, \quad \tilde{G}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J} \right) \vec{G}_{v2}, \quad \tilde{G}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J} \right) \vec{G}_{vm},$$

$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$ – якобиан преобразования.

Одношаговая конечно-разностная схема Эйлера для интегрирования по времени системы уравнений (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{E}^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}^{n+1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}^{n+1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{E}_{vm}^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{E}_{v2}^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{F}_{v2}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{G}_{vm}^{n+1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{G}_{v2}^{n+1}}{\partial \zeta} \right) = \\ = \tilde{U}^n + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Линеаризованная относительно вектора \tilde{U} система (4) решается методом Бима-Уорминга [13]. Для этого в системе (4) векторы потоков $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ представляются в виде:

$$\tilde{E}^{n+1} \approx A_\xi^n \tilde{U}^{n+1}, \quad \tilde{F}^{n+1} \approx B_\eta^n \tilde{U}^{n+1}, \quad \tilde{G}^{n+1} \approx Q_\zeta^n \tilde{U}^{n+1}, \quad (5)$$

где $A_\xi = \xi_x A$, $B_\eta = \eta_z B$, $Q_\zeta = \zeta_y Q$, $A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{U}}$, $B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}}$, $Q = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{U}}$ – матрицы Якоби.

Члены, содержащие вторые производные, аналогично плоской задаче представляются в виде суммы двух векторов:

$$\tilde{E}_{v2}^{n+1} = \tilde{E}_{v21}^{n+1} + \tilde{E}_{v22}^n, \quad \tilde{F}_{v2}^{n+1} = \tilde{F}_{v21}^{n+1} + \tilde{F}_{v22}^n, \quad \tilde{G}_{v2}^{n+1} = \tilde{G}_{v21}^{n+1} + \tilde{G}_{v22}^n, \quad (6)$$

где векторы \tilde{E}_{v21}^{n+1} , \tilde{F}_{v21}^{n+1} и \tilde{G}_{v21}^{n+1} имеют следующий вид:

$$\tilde{E}_{v21}^{n+1} = \frac{\mu_t \xi_x}{ReJ} \left[0, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

$$\tilde{F}_{v21}^{n+1} = \frac{\mu_t \eta_z}{ReJ} \left[0, \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

$$\tilde{G}_{v21}^{n+1} = \frac{\mu_t \zeta_y}{ReJ} \left[0, \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

а векторы \tilde{E}_{v12}^n и \tilde{F}_{v22}^n содержат оставшиеся диссипативные функции вида:

$$\tilde{E}_{v22}^n = \frac{\xi_x^2}{ReJ} \left[0, 0, 0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(v \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]^n \right]^T,$$

$$\tilde{F}_{v22}^n = \frac{\eta_z^2}{ReJ} \left[0, 0, 0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^n \right]^T,$$

$$\tilde{G}_{v22}^n = \frac{\zeta_y^2}{ReJ} \left[0, 0, 0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) v \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right]^n \right]^T.$$

Для векторов потоков со смешанными производными используется аппроксимация по явной схеме. С учетом (5)–(6) система (4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_\xi^n}{\partial \xi} + \frac{\partial B_\eta^n}{\partial \eta} + \frac{\partial Q_\zeta^n}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mu_t \zeta_y^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = \tilde{U}^n + \\ & + \Delta t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}^n}{\partial \zeta} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{E}_{vm}^{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}^{n-1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}^{n-1}}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \tilde{E}_{v12}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v22}^n}{\partial \zeta} \right] + \\ & + O\left(\frac{\Delta t^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Применение факторизации к (7) приводит к трем одномерным операторам, решение которых производится матричной прогонкой:

1 шаг.

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A_\xi^n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] U^* = RHS^n.$$

2 шаг.

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial B_\eta^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] U^{**} = U^*. \quad (8)$$

3 шаг.

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial Q_\zeta^n}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mu_t \zeta_y^2}{ReJ} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{U_1^n} \right) \right\} \right] \tilde{U}^{n+1} = U^{**},$$

где RHS^n – правая часть системы уравнений (7). При аппроксимации производных в конвективных и диффузионных членах использованы центрально-разностные операторы со вторым порядком точности.

Анализ результатов численного решения задачи. Поставленная задача решалась на разнесенной сетке по пространственным координатам размером $201 \times 101 \times 81$, диапазон параметров был принят следующим: $\Delta x = 0.1 \div 0.5$, $\Delta z = 0.06 \div 0.25$, $\Delta y = 0.1 \div 0.5$, шаг по времени варьировался в пределах $\Delta t = 0.025 \div 0.05$. Численные исследования проводились

при следующих значениях характерных параметров: $Pr = 0.9$, $M_0 = 1$, $1.5 \leq M_\infty \leq 4$, $1 \leq n \leq 15$. Для подавления высокочастотных возмущений на окончательном этапе вводилось сглаживание четвертого порядка с малым коэффициентом ε при сглаживающих членах.

Из экспериментов известно [1, 3], что протяженность области взаимодействия и его интенсивность в трехмерном случае значительно меньше, чем в двумерном случае, поскольку поток может обтекать круглую струю не только сверху, но и с боков. Как видно, из графика 2а ($M_\infty = 4$, $M_0 = 1$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$, $n = 4$), где представлено поле изобар в плоскости симметрии для пространственной задачи, головной скачок уплотнения не поднимается до верхней границы и соответственно не отражается от нее. Увеличение параметра нерасчетности до $n = 10$ (рисунок 2б) также не приводит к отражению головного скачка уплотнения от границы. На рисунке 2в ($n = 4$) и рисунке 2г ($n = 10$), где показан численный эксперимент для плоской задачи, видно, что головной скачок уплотнения доходит до верхней границы и отражается от нее. Результаты сравнения рисунков для двух- и трехмерного случая свидетельствуют об уменьшении интенсивности этого скачка при пространственном течении. В то же время общая картина ударно-волновой структуры точек торможения остается аналогичной двумерному случаю, а именно, перед струей наблюдаются головной (1 на рисунке), косой (2 на рисунке) и замыкающий (3 на рисунке) скачки уплотнения, образующие сложную λ -образную систему скачков.

Из распределения местного числа Маха (рисунок 3а – пространственное обтекание струи, рисунок 3б – щелевое обтекание струи при следующих параметрах $M_\infty = 4$, $M_0 = 1$, $n = 10$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$.) можно увидеть существенное уменьшение размеров бочкообразной структуры, возникающей при вдуве круглой струи по сравнению с щелевой.

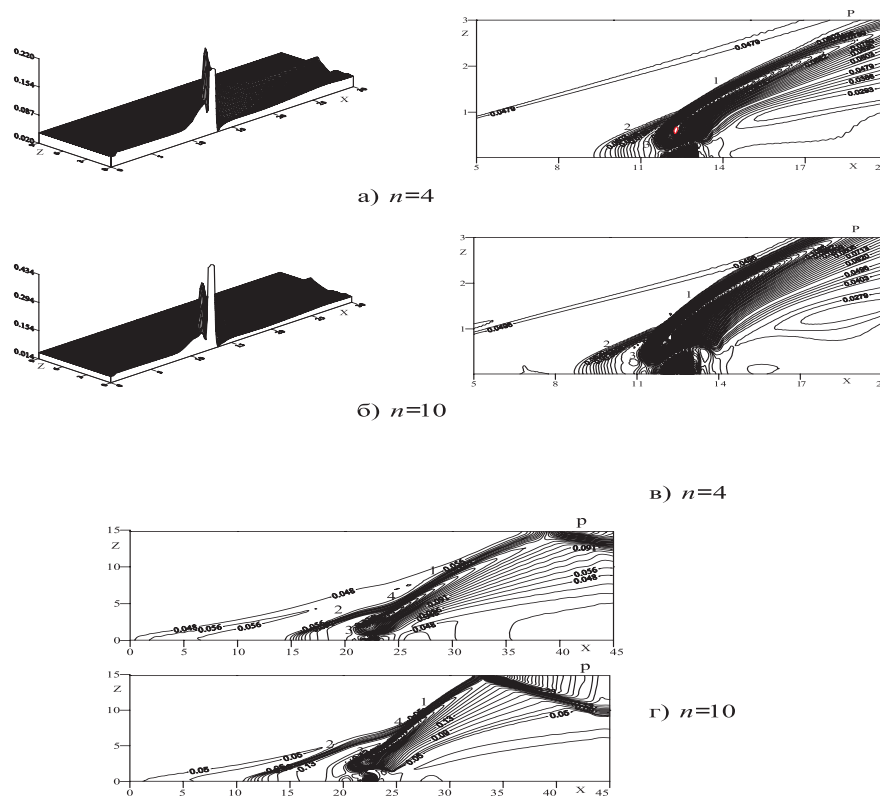


Рис. 2: Влияние параметра нерасчетности на распределение изобар.

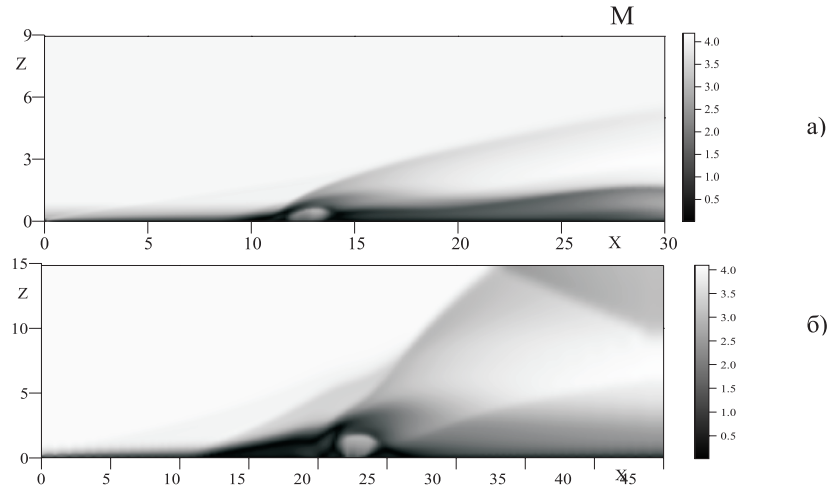
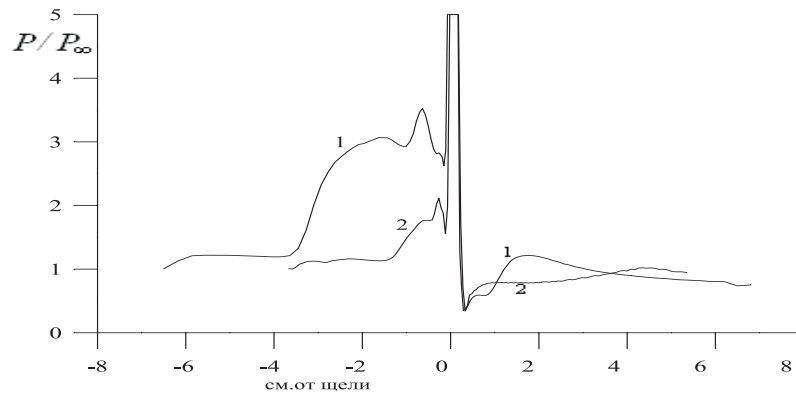


Рис. 3: Распределение местного числа Маха.

Распределение давления на стенке в плоскости симметрии (рисунок 4, для двумерного (кривая 1) и трехмерного (кривая 2) случаев) показывает, что перед струей, вследствие торможения набегающего потока, повышается давление. В передней застойной зоне оно понижается ввиду наибольшей скорости возвратного течения. Затем наблюдается его дальнейший рост, с максимумом за замыкающим скачком уплотнения. Давление на задней границе струи существенно ниже, чем на передней границе струи, что свидетельствует о зоне разрежения. Из сравнения кривых 1 и 2 можно видеть, что длина действия избыточного давления на стенке и его величина для пространственного случая существенно уменьшается.


 Рис. 4: Распределение давления на стенке при $M_\infty = 4$, $M_0 = 1$, $n = 10$, $Pr = 0.9$, $Re = 10^4$.

Как известно из экспериментов [1], распределение давления вблизи струи на стенке, т.е. поле изобарических кривых, аппроксимируется криволинейными замкнутыми, вложенными друг в друга эллипсами, давление вдоль которых постоянно. Эту картину можно наблюдать в левой части рисунка 5, где показано распределение изобар вблизи стенки для следующих значений числа Маха потока а) $M_\infty = 4$, б) $M_\infty = 2$ и в) $M_\infty = 1,5$. Перед струей давление принимает максимальное значение, а за струей образуется зона с пониженным давлением. Из графиков прослеживается, как увеличиваются зона с повышенным давлением перед струей и значение самого избыточного давления с уменьшением Маха потока, так для $M_\infty = 4$ максимальное значение давления 0,08, для $M_\infty = 2$ - 0,22, а для $M_\infty = 1,5$ оно равно 0,38. Показано, что границы наклонного (5 – на рисунке) скачков уплотнения в зависимости от уменьшения числа Маха потока расширяются. Эти линии являются границами передней застойной зоны.

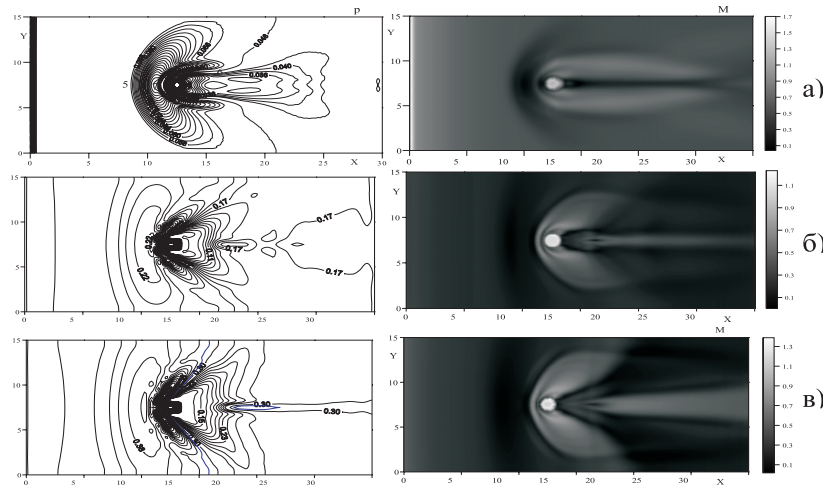


Рис. 5: Влияние числа Маха потока на распределение изобар и местного числа Маха в плоскости yx в сечении $z = 0.06$.

Вышеописанный процесс подтверждается картиной распределения местного числа Маха в плоскости, представленный в правой части рисунка 5 для а) $M_\infty = 4$, б) $M_\infty = 2$ и в) $M_\infty = 1,5$. К примеру, хорошо видна граница вдуваемой струи и сверхзвуковая зона непосредственно вокруг нее, которая возникает в результате ускорения потока, обогнувшего струю. Видно, что с уменьшением числа Маха потока эта зона увеличивается и расширяется по направлению к набегающему потоку.

Изученный механизм взаимодействия поперечной вдуваемой струи с потоком качественно согласуется с опытными данными работ [1, 3]. Так на рисунке 6 ($M_\infty = 3$, $M_0 = 1$, $d = 1.4$ см, $Re = 1.87 \cdot 10^7$, $n = 15$) приведены изобары вблизи стенки (рисунок 6а в плоскости $z = 0.06$) и давление на плоскости симметрии (рисунок 6 б) из вычислительного эксперимента и ниже опытные данные (рисунок 6 в), выполненные для тех же параметров потока и струи, но с нерасчетностью $n = 100$ работы [1].

Заключение. Представлены результаты численного моделирования сверхзвукового течения при наличии поперечного вдува струи через круглое отверстие на стенке. Задача решена в обобщенных координатах в трехмерной постановке. Граничные условия на выходе заданы на анализе характеристических волн. Рассмотрено влияние таких параметров как число Маха потока и нерасчетность на взаимодействие струи с набегающим потоком. Приведенные распределения изобар вблизи стенки из вычислительного эксперимента качественно согласуются с известными опытными данными.

Цитированная литература

1. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С. 97–102.
2. Авдуевский В.С., Медведев К.И., Полянский М.Н. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 5. С. 193–197.
3. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С. 99–102.
4. Авдуевский В.С., Медведев К.И. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 25–33.

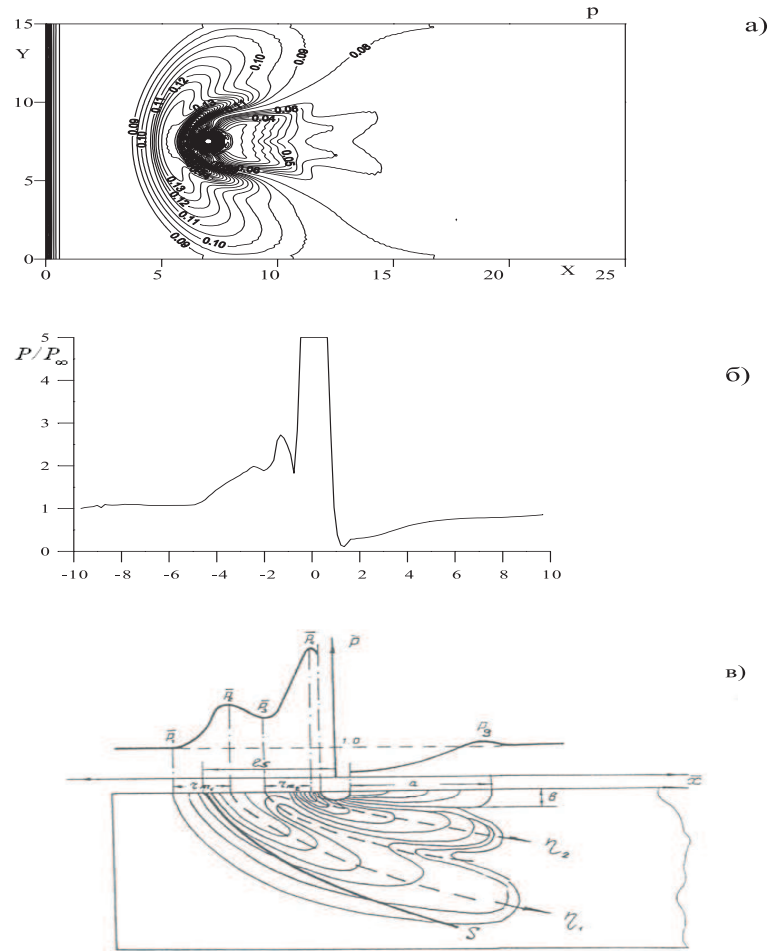


Рис. 6: Сравнение поля давления с опытом [1] $M_\infty = 3$, $M_0 = 1$, $d = 1.4$, $Re = 1.87 \cdot 10^7$, $n = 15$:
 а) в сечении $z = 0.06$, б) на стенке в плоскости симметрии, в) опытные данные.

5. Шец Д. Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания. М., 1985.
6. Драммонд Д.Ф. // Ракетная техника и космонавтика. 1979. Т. 17, № 5. С. 95–97.
7. Шунь Дж.Ш., Юнь С. // Аэрокосмическая техника. 1990. № 10. С. 102–113.
8. Ramakrishnan R., Singh D.J. // AIAA Journal. 1994. Vol. 32, № 5. P. 930–935.
9. Chenault C.F., Beran P.S. // AIAA Journal. 1999. Vol.37, № 10. P. 1257–1269.
10. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. М., 1991. Т. 2.
11. Poinsot T.J., Lele S.K. // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P. 104–129.
12. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1, 2. М., 1990.
13. Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 4. С. 145–156.
14. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 3. С. 72–80.

Поступила в редакцию 07.12.2010г.

УДК 517.9

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И РАЗДЕЛИМОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Ш. БИЛАЛ, Е.Д. СИЙРБАЕВ

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 bilal44@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия ограниченности и разделимости оператора Штурма–Лиувилля.

Постановка задачи. Пусть $J = (a, b)$, $\rho, v \in C^{loc}(J)$ и выполнено условие **A[2]**: Для некоторого $c \in (a, b)$ функция

$$T_a = \int_t^c \rho^{-1}(s) \int_s^c v(\tau) d\tau ds \quad (T_b = \int_c^t \rho^{-1}(s) \int_c^s v(\tau) d\tau ds)$$

- 1) не интегрируема в окрестности точки a (b),
- 2) $\lim_{t \rightarrow a} T_a(t) = \infty$ ($\lim_{t \rightarrow b} T_b(t) = \infty$).

Рассмотрим оператор \mathcal{L}_p , соответствующий уравнению Штурма–Лиувилля в L_p , $1 < p \leq \infty$,

$$\mathcal{L}_p y \equiv -(\rho(x)y'(x))' + v(x)y(x) = 0. \quad (1)$$

Существует оператор \mathcal{L}_p^{-1} и он ограничен в L_p . Пусть $r(\cdot) \in L_q^{loc}$ неотрицательная функция. Рассмотрим вопрос об ограниченности оператора $r\mathcal{L}_p^{-1}$ из L_p в L_q , где $1 < p \leq q \leq \infty$. Из решения этого вопроса, в частности когда $q = p$ и $r(\cdot) = v(\cdot)$, следует разделимость оператора \mathcal{L}_p в L_p . Вопрос разделимости оператора Штурма–Лиувилля впервые рассматривался в работах Everitt W.N. и Giertz M. [1].

Введем следующие функции:

$$d_+(x) = \sup\{d > 0 : \int_x^{x+d} \rho^{-1}(s) ds \int_x^{x+d} v(s) ds \leq 1, [x, x+d) \subset J\},$$

Keywords: *Operator, boundedness, separability, Green function, Chardy inequality*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Ш. Биалл, Е.Д. Сийрбаев, 2010.

$$d_-(x) = \sup\{d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-1}(s)ds \int_{x-d}^x v(s)ds \leq 1, (x-d, x] \subset J\}.$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s)ds, \quad \varphi_-(x) = \int_{x-d_-(x)}^x \rho^{-1}(s)ds.$$

Теорема [2]. Пусть выполнено условие A. Тогда уравнение (1) имеет два линейно-независимых решения $y_+(x)$ и $y_-(x)$, обладающие следующими свойствами:

1) $y_{\pm}(x) > 0, y'_{\pm}(x) \neq 0, x \in J$;

2.1) $y_+(x)$ монотонно убывает, $y_-(x)$ монотонно возрастает и $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$ при $b = \infty, a = -\infty$ соответственно;

2.2) $\lim_{x \rightarrow b} y_+(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} y_-(x) = 0$ при $\int_c^b v(s)ds = \infty$ и $b < \infty, \int_a^c v(s)ds = \infty$ и $a < \infty$ соответственно, $c \in (a, b)$;

3) $\lim_{x \rightarrow a} \rho(x)y'_-(x) = \lim_{x \rightarrow b} \rho(x)y'_+(x) = 0$;

4) $\frac{1}{2}\varphi_{\pm}^{-1}y_{\pm}(x) \leq \mp \rho(x)y'_{\pm}(x) \leq 2\varphi_{\pm}^{-1}(x)y_{\pm}(x), x \in J$.

Построенная для уравнения (1) функция Грина $G(t, t, x)$ удовлетворяет неравенству на базе этих решений

$$\frac{\varphi_- - \varphi_+}{2(\varphi_- + \varphi_+)} \leq G(t, t, \lambda) \leq 2 \frac{\varphi_- - \varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+}. \tag{1^0}$$

Определение. Будем говорить, что коэффициенты (ρ, v) оператора \mathcal{L}_p принадлежат классу $K_p(\delta, v)$, если $\rho(x)\varphi_{\pm}(x) \leq \min\{x-a, b-x\} \forall x \in J$ и существуют числа $\gamma > 1 > \delta$ такие, что $\ln \gamma < \frac{p'}{2}\delta, p' = \frac{p}{p-1}$, и имеет место неравенство

$$\delta \leq \frac{\rho(x)\varphi_{\pm}(x)}{\rho(s)\varphi_{\pm}(s)} \leq \gamma \quad \text{при} \quad |x-s| \leq \rho(x)\varphi_{\pm}(x). \tag{2}$$

Очевидно, что при $p_1 < p_2$ $K_{p_1}(\delta, \gamma) \supset K_{p_2}(\delta, \gamma)$.

Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty, (\rho, v) \in K_p(\delta, \gamma)$. Тогда оператор $r\mathcal{L}_p^{-1}$ ограниченно действует из L_p в $L_q, 1 < p \leq q < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$S_{p,q} = \sup_{x \in J} \left[(\rho\varphi_-)^{1/p'} \left(\int_x^{x+\rho\varphi_-} r^q \left(\frac{\varphi_- - \varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+} \right)^q ds \right)^{1/q} + \right. \\ \left. + (\rho\varphi_+)^{1/p'} \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x r^q \left(\frac{\varphi_- - \varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+} \right) ds \right)^{1/q} \right] < \infty. \tag{3}$$

При этом справедлива оценка

$$C_1 S_{p,q} \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \leq C_2 S_{p,q}. \tag{4}$$

Здесь и далее через C_1, C_2, \dots обозначаются абсолютные постоянные, значения которых несущественны для дальнейшего изложения.

Ниже приведем вспомогательное утверждение, дающее критерий ограниченности указанного оператора в терминах фундаментальных решений уравнения (1).

Лемма 1. Оператор $r\mathcal{L}_p^{-1}$, $r(\cdot) \in L_q^{loc}$, ограниченно действует из L_p в L_q , $1 < p \leq q < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$B_{p,q} = \sup_{x \in J} \left(\|y_-\|_{p',(a,x)} \cdot \|ry_+\|_{q,(x,b)} \right) + \\ + \sup_{x \in J} \left(\|y_+\|_{p',(x,b)} \cdot \|ry_-\|_{q,(a,x)} \right) < \infty. \quad (5)$$

При этом имеет место оценка

$$C_1 B_{p,q} \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \leq C_2 B_{p,q}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть оператор $r\mathcal{L}_p^{-1}$ ограниченно действует из L_p в L_q . Тогда из неотрицательности функции Грина $G(x, y)$ для любого $f \in L_p$ имеем:

$$\|r\mathcal{L}_p^{-1}f\|_q = \left\| r(x) \left(y_-(x) \int_x^b y_+(s)f(s)ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s)f(s)ds \right) \right\|_q \leq \\ \leq \left\| r(x) \left(y_-(x) \int_x^b y_+(s)|f(s)|ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s)|f(s)|ds \right) \right\|_q \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \|f\|_p.$$

Откуда в силу неотрицательности каждого слагаемого имеем:

$$\left\| r(x)y_+(x) \int_a^x y_-(s)|f(s)|ds \right\|_q \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \|f\|_p \quad \forall f \in L_p, \quad (7)$$

$$\left\| r(x)y_-(x) \int_x^b y_+(s)|f(s)|ds \right\|_q \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \|f\|_p \quad \forall f \in L_p. \quad (8)$$

Для завершения доказательства леммы приведем обобщенное неравенство Харди [3, с.41–42]:

Теорема 2. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Для того чтобы существовала константа C , не зависящая от функции f , такая, что

$$\left| \int_0^\infty |\omega(x) \int_0^x f(t)dt|^q dx \right|^{1/q} \leq C \left| \int_0^\infty |v(x)f(x)|^p dx \right|^{1/p},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx \right)^{1/p'} < \infty,$$

где $p' = p/(p-1)$.

Неравенства (7) и (8) соответствуют приведенному в теореме обобщенному неравенству Харди, только вместо $\omega(x)$ и $v(x)$ взяты $r(x)\varphi_\pm(x)$ и $y_\pm^{-1}(x)$. Следовательно, можно воспользоваться утверждением теоремы. Тогда получим:

$$C_1 \sup_{x \in J} \left(\|y_-\|_{p',(a,x)} \|ry_+\|_{q,(x,b)} \right) \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} < \infty,$$

$$C_1 \sup_{x \in J} \left(\|y_+\|_{p',(x,b)} \|ry_-\|_{q,(a,x)} \right) \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} < \infty. \quad (9)$$

Из (9) вытекает выполнение (5) и левой части (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место (5). Тогда из обобщенного неравенства Харди имеем:

$$\|r\mathcal{L}_p^{-1}f\|_q \leq \left\| ry_- \int_x^b y_+(s)f(s)ds \right\|_q + \left\| ry_+ \int_a^x y_-(s)f(s)ds \right\|_q \leq C_2 B_{p,q} \|f\|_p.$$

Отсюда

$$\|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \leq C_2 B_{p,q} < \infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$e^{-2\gamma p'} \rho(x) \varphi_+(x) y_+^{p'}(x) \leq \int_x^b y_+^{p'}(s) ds \leq \frac{y_+^{p'}(x) \rho(x) \varphi_+(x)}{1 - e^{-\delta(p'/2)\gamma}}, \quad (10)$$

$$e^{-2\gamma p'} \rho(x) \varphi_-(x) y_-^{p'}(x) \leq \int_x^b y_-^{p'}(s) ds \leq \frac{y_-^{p'}(x) \rho(x) \varphi_-(x)}{1 - e^{-\delta(p'/2)\gamma}}. \quad (11)$$

Доказательство. Докажем неравенство (11). Интегрируя (2) по $s \in (x, x \pm \rho(x)\varphi_{\pm}(x))$, имеем

$$\delta \leq \int_x^{x+\rho(x)\varphi_{\pm}(x)} \frac{ds}{\rho(s)\varphi_{\pm}(s)} \leq \gamma, \quad \delta \leq \int_{x-\rho(x)\varphi_{\pm}(x)}^x \frac{ds}{\rho(s)\varphi_{\pm}(s)} \leq \gamma.$$

Тогда, из следствий 1 и 2 из [2] вытекают неравенства:

$$e^{\frac{1}{2}\delta} \leq \frac{y_-(z)}{y_-(x)} \leq e^{2\gamma}, \quad \text{если } z - x = \rho(x)\varphi_-(x), \quad (12)$$

$$e^{\frac{1}{2}\delta} \leq \frac{y_+(z)}{y_+(x)} \leq e^{2\gamma}, \quad \text{если } z - x = \rho(x)\varphi_+(x). \quad (13)$$

Отсюда следует:

$$\int_a^x y_-^{p'}(s) ds \geq \int_{x-\rho(x)\varphi_-(x)}^x y_-^{p'}(s) ds \geq \rho(x)\varphi_-(x) y_-^{p'}(x - \rho\varphi_-) \geq e^{-2\gamma p'} \rho(x)\varphi_-(x) y_-^{p'}(x).$$

Чтобы доказать правую часть (11), при фиксированном $x \in J$ покроем множество (a, x) отрезками $\Delta_-(t) = [t - \rho\varphi_-, t]$. Покажем, что такое покрытие возможно. Построим отрезок $\Delta_-(x) = [x - \rho(x)\varphi_-(x), x]$. По определению класса $K_p(\delta, \gamma)$ $x - \rho(x)\varphi_-(x) \geq a$. Поэтому $\Delta_-(x) \subset (a, x)$.

Если $x - \rho(x)\varphi_-(x) = a$, то процесс построения отрезков завершается. Пусть $x - \rho(x)\varphi_-(x) > a$. Положим $x_1 = x - \rho(x)\varphi_-(x)$ и строим отрезок $\Delta_-(x_1)$. Тогда $\Delta_-(x_1) \subset (a, x_1)$ и $\Delta_-(x) \cup \Delta_-(x_1) \subset (a, x)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $\{x_i\}_{i=0}^N$ из (a, x) , где $x_0 = x$, такие что $x_{i+1} = x_i - \rho(x_i)\varphi_-(x_i) \geq a$.

Здесь N может быть конечным или $N = \infty$. В дальнейшем, не ограничивая общности изложения, полагаем $N = \infty$.

Последовательность $\{x_i\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \tilde{a} \geq a$. Допустим, что $\tilde{a} > a$. Но это возможно когда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i) \varphi_-(x_i) = \rho(\tilde{a}) \varphi_-(\tilde{a}) = 0,$$

что противоречит условию $\rho(x) > 0 \quad \forall x \in J$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{a} = a$ и $\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_-(x_i) = (a, x)$. Тогда

$$\int_a^x y_-^{p'}(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Delta_-(x_i)} y_-^{p'}(s) ds \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_-^{p'}(x_i) \rho(x_i) \varphi_-(x_i). \quad (14)$$

Из (51) и (61) имеем $e^{\frac{p'}{2}\delta} \leq \frac{y_-^{p'}(x_{i-1})}{y_-^{p'}(x_i)}$ или $\frac{y_-^{p'}(x_i)}{y_-^{p'}(x_{i-1})} \leq e^{-\frac{p'}{2}\delta}$, $\frac{\rho(x_i) \varphi_-(x_i)}{\rho(x_{i-1}) \varphi_-(x_{i-1})} \leq \gamma$. Откуда

$$\frac{y_-^{p'}(x_i) \rho(x_i) \varphi_-(x_i)}{y_-^{p'}(x_0) \rho(x_0) \varphi_-(x_0)} \leq \left(e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma \right)^i.$$

Так как

$$\ln(e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma) = -\frac{p'}{2}\delta + \ln \gamma < 0,$$

то

$$e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma < 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^x y_-^{p'}(s) ds &\leq y_-^{p'}(x) \rho(x) \varphi_-(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_-^{p'}(x_i) \varphi_-(x_i) \rho(x_i)}{y_-^{p'}(x_0) \rho(x_0) \varphi_-(x_0)} \leq \\ &\leq y_-^{p'}(x) \rho(x) \varphi_-(x) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma)^i = \frac{y_-^{p'}(x)}{1 - e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma} \rho(x) \varphi_-(x). \end{aligned}$$

Для доказательства (10) при фиксированном $x \in J$ покроем множество x, b отрезками $\Delta_+(t) = [t, t + \rho(t) \varphi_+(t)]$. Возможность такого покрытия доказывается как выше. Обозначим $x = x_0$, $x_i = x_{i-1} + \rho(x_{i-1}) \varphi_+(x_{i-1})$. Тогда $(x, b) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_+(x_i)$ и

$$\int_x^b y_+^{p'}(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Delta_+(x_i)} y_+^{p'}(s) ds \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_+^{p'}(x_i) \rho(x_i) \varphi_+(x_i). \quad (15)$$

Из (2) и (13) имеем $e^{\frac{p'}{2}\delta} \leq \frac{y_+^{p'}(x_{i-1})}{y_+^{p'}(x_i)}$ или $\frac{y_+^{p'}(x_i)}{y_+^{p'}(x_{i-1})} \leq e^{-\frac{p'}{2}\delta}$, $\frac{\rho(x_i) \varphi_+(x_i)}{\rho(x_{i-1}) \varphi_+(x_{i-1})} \leq \gamma$. Отсюда

$$\frac{y_+^{p'}(x_i) \rho(x_i) \varphi_+(x_i)}{y_+^{p'}(x_0) \rho(x_0) \varphi_+(x_0)} \leq \left(e^{-\frac{p'}{2}\delta} \gamma \right)^i.$$

Тогда

$$\int_x^b y_+^{p'}(s) ds \leq y_+^{p'}(x) \rho(x) \varphi_+(x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_+^{p'}(x_i) \rho(x_i) \varphi_+(x_i)}{y_+^{p'}(x_0) \rho(x_0) \varphi_+(x_0)} \leq$$

$$\leq y_+^{p'}(x)\rho(x)\varphi_+(x) \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-\frac{p'}{2}\delta\gamma})^i = \frac{y_+^{p'}(x)}{1 - e^{-\frac{p'}{2}\delta\gamma}} \rho(x)\varphi_+(x).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Из лемм 1, 2 и неравенств (12), (13), (10) имеем:

$$\begin{aligned} C_1^{-1} \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} &\geq \left(\int_a^x y_-^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} \left(\int_x^b r^q(s) y_+^q(s) ds \right)^{1/q} + \\ &+ \left(\int_x^b y_+^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} \left(\int_a^x r^q(s) y_-^q(s) ds \right)^{1/q} \geq \\ &\geq e^{-2\gamma} \left[(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'} y_-(x) \left(\int_x^{x+\rho\varphi_-} r^q(s) y_+^q(s) ds \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + (\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'} y_+(x) \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x r^q(s) y_-^q(s) ds \right)^{1/q} \right] \geq \\ &\geq e^{-4\gamma} \left[(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'} y_-(x + \rho(x)\varphi_-(x)) \left(\int_x^{x+\rho(x)\varphi_-(x)} r^q(s) y_+^q(s) ds \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + (\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'} y_+(x - \rho(x)\varphi_+(x)) \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x r^q(s) y_-^q(s) ds \right)^{1/q} \right] \geq \\ &\geq e^{-4\gamma} \left[(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'} \left(\int_x^{x+\rho\varphi_-} r^q(s) (y_-(s) y_+(s))^q ds \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + (\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'} \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x r^q(s) (y_-(s) y_+(s))^q ds \right)^{1/q} \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} e^{-4\gamma} \left[(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'} \left(\int_x^{x+\rho\varphi_-} r^q(s) \left(\frac{\varphi_-(s)\varphi_+(s)}{\varphi_-(s) + \varphi_+(s)} \right)^q ds \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + (\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'} \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x r^q(s) \left(\frac{\varphi_-(s)\varphi_+(s)}{\varphi_-(s) + \varphi_+(s)} \right)^q ds \right)^{1/q} \right]. \end{aligned}$$

Откуда следует выполнение (3) и левой части равенства (4).

Достаточность. Пусть выполнено (3). Тогда имеем:

$$\left(\int_a^x y_-^{p'}(s) ds \right)^{q/p'} \int_x^b r^q(s) y_+^q(s) ds \leq C y_-^q(x) (\rho(x)\varphi_-(x))^{q/p'} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r^q(s) y_+^q(s) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_-^q(x_0)(\rho(x_0)\varphi_-(x_0))^{q/p'}}{y_-^q(x_i)(\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'}} (\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'} \int_{x_i}^{x_i+\rho\varphi_-} r^q(s)(y_-(s)y_+(s))^q ds \leq \\
&= 2^q C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_-^q(x_0)(\rho(x_0)\varphi_-(x_0))^{q/p'}}{y_-^q(x_i)(\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'}} (\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'} \int_{x_i}^{x_i+\rho\varphi_-} r^q(s) \left(\frac{\varphi_-(s)\varphi_+(s)}{\varphi_-(s) + \varphi_+(s)} \right)^q ds \leq \\
&\leq C_1 S_{p,q}^q \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_-^q(x_0)(\rho(x_0)\varphi_-(x_0))^{q/p'}}{y_-^q(x_i)(\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'}}.
\end{aligned}$$

Теперь нужно показать сходимость ряда и оценить его сумму. Из $x_{i+1} = x_i + \rho(x_i)\varphi_-(x_i)$, $x_{i+1} - x_i = \rho(x_i)\varphi_-(x_i)$, $|x_i - x_{i+1}| = \rho(x_i)\varphi_-(x_i)$ имеем:

$$\frac{y_-(x_i)}{y_-(x_{i+1})} \leq e^{-\delta/2}, \quad \frac{\rho(x_i)\varphi_-(x_i)}{\rho(x_{i+1})\varphi_-(x_{i+1})} \leq \gamma.$$

Пользуясь этим получим:

$$\frac{y_-^q(x_i)(\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'}}{y_-^q(x_{i+1})(\rho(x_{i+1})\varphi_-(x_{i+1}))^{q/p'}} = \left[\frac{y_-^{p'}(x_i)\rho(x_i)\varphi_-(x_i)}{y_-^{p'}(x_{i+1})\rho(x_{i+1})\varphi_-(x_{i+1})} \right]^{q/p'} \leq (e^{-\frac{\delta}{2}p'}\gamma)^{q/p'} < 1.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_-^q(x_0)(\rho(x_0)\varphi_-(x_0))^{q/p'}}{y_-^q(x_i)(\rho(x_i)\varphi_-(x_i))^{q/p'}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-\frac{\delta p'}{2}}\gamma)^{\frac{q}{p'}i} = \frac{1}{1 - (e^{-\delta p'/2}\gamma)^{q/p'}}.$$

Поэтому

$$\sup_{x \in J} \left(\int_a^x y_-^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} \left(\int_x^b r^q(s) y_+^q(s) ds \right)^{1/q} \leq C_2 S_{p,q} < \infty.$$

Аналогично получаем оценку:

$$\sup_{x \in J} \left(\int_x^b y_+^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} \left(\int_a^x r^q(s) y_-^q(s) ds \right)^{1/q} \leq C_8 S_{p,q}.$$

Тогда $B_{p,q} \leq C_4 S_{p,q} < \infty$. Откуда на основании леммы 1 получается достаточность и правая часть неравенства (4).

Теорема 3. Пусть $(\rho, v) \in K_p(\delta, \gamma)$ $1 < p \leq \infty$. Тогда оператор $r\mathcal{L}_p^{-1}$, $r(\cdot) \in C^{loc}(J)$, ограниченно действует из L_p в $L_\infty(J)$ тогда и только тогда, когда

$$S_p = \sup_{x \in J} \left(r(x)\rho^{1/p'}(x)\varphi_-(x)\varphi_+(x) \frac{\varphi_+^{1/p'} + \varphi_-^{1/p'}}{\varphi_- + \varphi_+} \right) < \infty.$$

При этом справедлива оценка

$$C_1 S_p \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow \infty} \leq C_2 S_p.$$

Доказательство. В силу интегрируемости оператора $r\mathcal{L}_p^{-1}$ его норма определяется по формуле:

$$\|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow \infty} = \sup_{x \in J} r(x) \left(y_-(x) \left(\int_x^b y_+^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} + y_+(x) \left(\int_a^x y_-^{p'}(s) ds \right)^{1/p'} \right). \quad (16)$$

На основании леммы 2:

$$e^{-2\gamma}r(x)y_-(x)y_+(x)(\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'} \leq r(x)y_-(x)\left(\int_x^b y_+^{p'}(s)ds\right)^{1/p'} \leq \frac{r(x)y_-(x)y_+(x)(\rho(x)\varphi_+(x))^{1/p'}}{1 - e^{-\delta/2\gamma}},$$

$$e^{-2\gamma}r(x)(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'} y_-(x)y_+(x) \leq r(x)y_+(x)\left(\int_a^x y_-^{p'}(s)ds\right)^{1/p'} \leq \frac{r(x)y_-(x)y_+(x)(\rho(x)\varphi_-(x))^{1/p'}}{1 - e^{-\delta/2\gamma}}.$$

Отсюда с учетом (16) и неравенства (1⁰) имеем:

$$C_1S_p \leq \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow \infty} \leq C_2S_p,$$

что и доказывает теорему.

Из теорем 1 и 2 в виде следствия вытекают соответственно теорема 3 и теорема 4.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор \mathcal{L}_p разделим в L_p , т.е. имеет место оценка

$$\|(\rho y')'\|_p + \|vy\|_p \leq C\| -(\rho y')' + vy\|_p, \quad y \in D(\mathcal{L}_p),$$

тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow b)}}} \left[(\rho\varphi_-)^{1/p'} \left(\int_x^{x+\rho\varphi_-} \left(v \frac{\varphi_- - \varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+} \right)^p ds \right)^{1/p} + (\rho\varphi_+)^{1/p'} \left(\int_{x-\rho\varphi_+}^x \left(v \frac{\varphi_- - \varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+} \right)^p ds \right)^{1/p} \right] < \infty$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 при $p' = 1$. Тогда оператор \mathcal{L}_∞ разделим в L_∞ , т.е. имеет место оценка

$$\|(\rho y')'\|_\infty + \|vy\|_\infty \leq C\| -(\rho y')' + vy\|_\infty, \quad y \in D(\mathcal{L}_\infty),$$

тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow b)}}} (v(x)\rho(x)\varphi_-(x)\varphi_+(x)) < \infty.$$

Теперь рассмотрим вопрос об ограниченности оператора \mathcal{L}_p^{-1} из L_p в L_q при $1 \leq q < p < \infty$.

Имеет место

Теорема 5. Пусть $(\rho, v) \in K_p(\delta, \gamma)$. Оператор \mathcal{L}_p^{-1} ограничен из L_p в L_q , $1 \leq q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$B_{p,q} = \int_a^b \left[\frac{\rho(s)\varphi_-(s)\varphi_+(s)}{\varphi_-(s) + \varphi_+(s)} \right]^{\frac{pq}{p-q}} \left[((\varphi_-(s))^{q-1}\varphi_+(s))^{\frac{p}{p-q}} ((\varphi_+(s))^{q-1}\varphi_-(s))^{\frac{p}{p-q}} \right] ds < \infty. \quad (17)$$

При этом справедлива оценка

$$C_1(B_{p,q})^{\frac{p-q}{p}} \leq \|\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \rightarrow q} \leq C_2(B_{p,q})^{\frac{p-q}{p}}.$$

Доказательство теоремы 5 опирается на следующую лемму, которая вытекает из обобщенного неравенства Харди в случае $1 \leq q < p < \infty$ и она доказывается также как лемма 1.

Лемма 3. Оператор \mathcal{L}_p^{-1} ограниченно действует из L_p в L_q , $1 \leq q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b \left(\int_a^t y_-^{p'}(s) ds \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\int_t^b y_+^q(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} y_-^{p'}(t) dt < \infty, \quad (18)$$

$$\int_a^b \left(\int_t^b y_+^{p'}(s) ds \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\int_a^t y_-^q(s) ds \right)^{\frac{p}{p-q}} y_+^{p'}(t) dt < \infty. \quad (19)$$

Доказательство теоремы 5. Необходимость. Пусть \mathcal{L}_p^{-1} ограниченно действует из L_p в L_q . Тогда на основании леммы 3 выполнены (18), (19). Применяя в (18), (19) лемму 2 получим

$$\int_a^b (\rho(t))^{\frac{pq}{p-q}} (\varphi_-(t))^{\frac{p(q-1)}{p-q}} (\varphi_+(t))^{\frac{p}{p-q}} (y_+(t)y_-(t))^{\frac{pq}{p-q}} dt < \infty. \quad (20)$$

$$\int_a^b (\rho(x))^{\frac{pq}{p-q}} (\varphi_+(x))^{\frac{p(q-1)}{p-q}} (\varphi_-(t))^{\frac{p}{p-q}} (y_+(t)y_-(t))^{\frac{pq}{p-q}} dt < \infty. \quad (21)$$

Теперь применяя неравенства (1⁰), получим (17).

Достаточность. Пусть выполнено (17). Тогда на основе неравенства (1⁰) выполнено (18), (19). Значит по лемме 3 оператор \mathcal{L}_p^{-1} ограничен из L_p в L_q . Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Everitt W.N., Giertz M. // Proc. London Math. Soc. 1971. V. 23(3). P. 301–324.
2. Билал Ш. // Изв.НАН МОН РК. сер. физ-мат. 2009. №5. С. 23–30.
3. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л., 1985.

Поступила в редакцию 11.05.2010г.

УДК 517.51

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ КЛАССОВ $E_{p\theta}(\lambda)$ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА ПО СЛАБОМУ МЕТРИЧЕСКОМУ ПАРАМЕТРУ

А. У. Бимендина, Е. С. Смаилов

Карагандинский государственный технический университет МОиН РК
Институт прикладной математики МОиН РК
Караганда Бульвар Мира, 56 bimend@mail.ru
Караганда Университетская, 28/a esmailov@mail.ru

В работе рассматривается необходимое и достаточное условие, обеспечивающее вложение классов функций $E_{p\theta}(\lambda)$, определяемых с помощью мультипликативной системы Прайса, в пространство Лоренца $L_{p\tau}[0, 1]$ по слабому метрическому параметру при условии, что $1 < p < +\infty, 1 < \tau < \theta < +\infty$.

1. Определение и вспомогательные утверждения. Теория вложения классов функций одной переменной имеет свою богатую историю. Первая теорема вложения была получена Е.Титчмаршем в 1927 году. В 1928 году этот результат был усилен Г.Харди и Д. Литтлвудом. В дальнейшем ряд важных результатов в этой области был получен в работах А.А. Коношкова [1], В.А. Андриенко [2], П.Л. Ульянова [3], Э.А. Стороженко [4], В.И. Коляды [5], М.К. Потапова [6] и др. Теоремы вложения в пространство Лоренца $L_{p\theta}$ по сильному метрическому параметру получены Г. Акишевым [7], Г. Акишевым и Е. С. Смаиловым [8], М.Л. Гольдманом [9], С. Тазабековым [10, 11], а по слабому параметру были установлены Н.Т. Темиргалиевым [12], Г. Акишевым [13], Е. Д. Нурсултановым и К.А. Бекмаганбетовым [14].

В настоящей работе найдено более точное достаточное условие вложения по слабому метрическому параметру, чем в [15], и показана его неулучшаемость на классах $E_{p\theta}(\lambda)$.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$, $x \in G = [0, 1]$ мультипликативная система Прайса [16]. Функции $f \in L[0, 1]$ поставим в соответствие ее ряд Фурье-Прайса $f(x) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)$, где $a_k = \int_0^1 f(t) \varphi_k(t) dt, k \in \mathbb{Z}_+$.

Функция $f(x)$ принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}[0, 1] (1 \leq p < +\infty, 1 \leq \theta \leq +\infty)$, если

Keywords: *Lorentz space, multiplicative Price system, best approximation.*

2010 Mathematics Subject Classification: 42C10, 46E25

© А. У. Бимендина, Е. С. Смаилов, 2010.

$$\|f\|_{p\theta} = \left\{ \int_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1} [f^*(t)]^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \quad \text{когда } 1 \leq \theta < +\infty,$$

и

$$\|f\|_{p\theta} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < +\infty, \quad \text{когда } \theta = +\infty,$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(x)|, x \in [0, 1]$ [17].

Сумму $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$ назовем "многочленом Прайса". Наилучшее приближение функции $f \in L_{p\theta}[0, 1]$ многочленами Прайса порядка не выше n будем обозначать через

$$E_n(f)_{p\theta} = \inf\{\|f - T_n\|_{p\theta} : a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – заданная последовательность положительных чисел, которая монотонно стремится к нулю. Введем класс функций $(1 \leq p < +\infty, 1 \leq \theta \leq +\infty)$

$$E_{p\theta}(\lambda) = \{f \in L_{p\theta}[0, 1] \mid E_k(f)_{p\theta} \leq \lambda_k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Положительная последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ называется квазимонотонной, если $\exists \alpha > 0$ такое, что $\frac{a_k}{k^\alpha} \downarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Заметим, что любая положительная монотонно стремящаяся к нулю последовательность чисел квазимонотонна.

Теорема 1. [18] Пусть $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – квазимонотонная последовательность. Для того чтобы числа a_ν были коэффициентами Фурье-Прайса некоторой функции $f \in L_{p\theta}[0, 1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta < +\infty,$$

при этом имеет место неравенство

$$c_{p\theta\tau} \left\{ a_0^\theta + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq \|f\|_{p\theta} \leq c'_{p\theta\tau} \left\{ a_0^\theta + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} a_\nu^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

где константы $c_{p\theta\tau} > 0, c'_{p\theta\tau} > 0$ не зависят от $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$.

Лемма 1. Пусть $1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$ и $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $l_1 \geq 2$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} (\nu+1)^{\frac{1}{p}-1} \varphi_\nu \right\|_{p\theta} \leq B_{p\theta} (\ln l_{k+1})^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} (\nu+1)^{\frac{1}{p}-1} \varphi_\nu \right\|_{p\theta} &\leq \left\| \sum_{\nu=0}^{l_{k+1}-1} (\nu+1)^{\frac{1}{p}-1} \varphi_\nu \right\|_{p\theta} + \left\| \sum_{\nu=0}^{l_k-1} (\nu+1)^{\frac{1}{p}-1} \varphi_\nu \right\|_{p\theta} \leq \\ &\leq c'_{p\theta} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{l_{k+1}-1} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} (\nu+1)^{\theta(\frac{1}{p}-1)} \right\}^{\frac{1}{\theta}} + c''_{p\theta} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{l_k-1} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} (\nu+1)^{\theta(\frac{1}{p}-1)} \right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь

$$\sum_{\nu=1}^{l_k-1} \nu^{\theta(1-\frac{1}{p})-1} (\nu+1)^{\theta(\frac{1}{p}-1)} \leq B'_{p\theta} \sum_{\nu=1}^{l_k-1} \frac{1}{\nu+1} \leq B''_{p\theta} \ln l_k, \quad l_k \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Из соотношении (1), (2) следует утверждение леммы.

Теорема 2. [15] Пусть $f \in L_{p\theta}[0, 1]$, где $1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$, и $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что $\exists \alpha \in (0, 1) : E_{l_{k+1}}(f)_{p\theta} \leq \alpha E_{l_k}(f)_{p\theta} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

Если при $1 < \tau < \theta \leq +\infty$ ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta}$$

сходится, то $f \in L_{p\tau}[0, 1]$ и имеют место соотношения

$$\|f\|_{p\tau} \leq c_{p\theta\tau} \left\{ \|f\|_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right\}.$$

Здесь константа $c_{p\theta\tau} > 0$ зависит только от указанных параметров.

2. Теоремы вложения разных метрик в пространство Лоренца по слабому метрическому параметру.

Теорема 3. Пусть $f \in L_{p\theta}[0, 1], 1 < p < +\infty, 1 < \theta < +\infty$. Если при некотором $\tau, 1 < \tau < \theta$ ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}$$

сходится, то $f \in L_{p\tau}[0, 1]$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{p\tau} \leq c_{p\theta\tau} \left\{ \|f\|_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} \{\log_2(k+1)\}^{-\frac{\tau}{\theta}} E_k^\tau(f)_{p\theta} \right]^{\frac{1}{\tau}} \right\}.$$

Здесь постоянная $c_{p\theta\tau} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Доказательство. Пусть $l_0 = 1; l_1 = \min\{n \in \mathbb{N} | E_n(f)_{p\theta} \leq \frac{1}{2} E_1(f)_{p\theta}\}; l_2 = \min\{n \in \mathbb{N} | E_n(f)_{p\theta} \leq \frac{1}{2} E_{l_1}(f)_{p\theta}\}; \dots l_k = \min\{n \in \mathbb{N} | E_n(f)_{p\theta} \leq \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{p\theta}\}$. Тогда последовательность чисел $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $l_0 = 1 < l_1 < l_2 < \dots < l_k < \dots$ – возрастающая последовательность;
- 2) $E_{l_k}(f)_{p\theta} \leq \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{p\theta}, \forall k \in \mathbb{N}$;
- 3) $E_{l_{k-1}}(f)_{p\theta} > \frac{1}{2} E_{l_{k-1}}(f)_{p\theta}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Пусть $l_n \leq s < l_{n+1}, n \in \mathbb{Z}^+$. Введем следующие обозначения:

$$A_s = \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \left\{ a_{\tau\theta} \sum_{k=s+1}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \quad a_{\tau\theta} = \frac{\{\log_2 e\}^{1-\frac{\tau}{\theta}}}{\{\ln 2\}^{\frac{\tau}{\theta}}};$$

$$B_s = \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Пусть сначала $s = l_{n+1} - 1$. Тогда

$$A_{l_{n+1}-1} = \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \left\{ a_{\tau\theta} \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}}; \quad (3)$$

$$B_{l_{n+1}-1} = \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}}. \quad (4)$$

Из соотношения (3) следует, что

$$A_{l_{n+1}-1} > \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (5)$$

и

$$A_{l_{n+1}-1}^\tau \geq a_{\tau\theta} \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \geq a_{\tau\theta} \sum_{j=n+1}^{+\infty} E_{l_{j+1}-1}^\tau(f)_{p\theta} \sum_{k=l_j}^{l_{j+1}-1} \frac{1}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}.$$

Поскольку, $\frac{1}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \downarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, имеет место следующая оценка

$$\begin{aligned} a_{\tau\theta} \sum_{k=l_j}^{l_{j+1}-1} \frac{1}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} &\geq a_{\tau\theta} (\ln 2)^{\frac{\tau}{\theta}} \int_{l_j}^{l_{j+1}} \frac{d \ln(x+1)}{\{\ln(x+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} = \\ &= a_{\tau\theta} \frac{\theta}{\theta - \tau} \frac{(\ln 2)^{\frac{\tau}{\theta}}}{(\log_2 e)^{1-\frac{\tau}{\theta}}} [\{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}}] = \\ &= \frac{\theta}{\theta - \tau} [\{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}}], \end{aligned} \quad (6)$$

то получим, что

$$\begin{aligned} A_{l_{n+1}-1}^\tau &\geq \frac{\theta}{\theta - \tau} \sum_{j=n+1}^{+\infty} E_{l_{j+1}-1}^\tau(f)_{p\theta} \left\{ \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} - \{\log_2(l_j+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} \right\} \geq \\ &\geq (E_{l_{j+1}-1}(f)_{p\theta}) > \frac{1}{2} E_{l_j}(f)_{p\theta} \geq \\ &\geq \frac{\theta}{2^\tau(\theta - \tau)} \left\{ \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} - \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_j+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} \right\} \geq \\ &\geq (E_{l_j}(f)_{p\theta}) \leq \frac{1}{2} E_{l_{j-1}}(f)_{p\theta} \geq \frac{\theta}{2^\tau(\theta - \tau)} \left\{ \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{n+1}}^\tau(f)_{p\theta} - \frac{1}{2^\tau} \sum_{j=n+2}^{+\infty} \{\log_2(l_j+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{j-1}}^\tau(f)_{p\theta} \right\} \geq \\ &\geq \frac{\theta}{2^\tau(\theta - \tau)} \left\{ \left(\frac{2^\tau - 1}{2^\tau} \right) \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} - \{\log_2(l_{n+1}+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}^\tau(f)_{p\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{(2^\tau - 1)\theta}{2^{2\tau}(\theta - \tau)} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} \leq A_{l_{n+1}-1}^\tau + \frac{2^{1-\frac{\tau}{\theta}}\theta}{2^\tau(\theta - \tau)} \{\log_2 l_{n+1}\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}^\tau(f)_{p\theta}.$$

Теперь с учетом (5) найдем

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{j+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_j}^\tau(f)_{p\theta} \leq \left[\frac{2^{2\tau}(\theta - \tau)}{(2^\tau - 1)\theta} + \frac{2^{1-\frac{\tau}{\theta}+\tau}}{2^\tau - 1} \right] A_{l_{n+1}-1}^\tau = c_{\theta\tau} A_{l_{n+1}-1}^\tau. \quad (7)$$

Так как $l_1 \geq 2$, то в силу (5)

$$E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} \leq A_{l_{n+1}-1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (8)$$

Далее, с помощью неравенства (7) получим, что

$$\begin{aligned} B_{l_{n+1}-1} &= \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq \\ &\leq \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + c_{\theta\tau}^{\frac{1}{\tau}} A_{l_{n+1}-1} \leq \{1 + \log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \\ &\quad + c_{\theta\tau}^{\frac{1}{\tau}} A_{l_{n+1}-1} \leq [1 + \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}}] E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + c_{\theta\tau}^{\frac{1}{\tau}} A_{l_{n+1}-1} = \\ &= E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \{\log_2 l_{n+1}\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + c_{\theta\tau}^{\frac{1}{\tau}} A_{l_{n+1}-1} \leq [(5), (8)] \leq \left[2 + c_{\theta\tau}^{\frac{1}{\tau}} \right] A_{l_{n+1}-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $s = l_{n+1} - 1$ имеет место соотношение:

$$B_s \leq c'_{\theta\tau} A_s, \quad (9)$$

где константа $c'_{\theta\tau} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Пусть теперь $l_n \leq s \leq (l_{n+1} - 2), n \in \mathbb{Z}^+$. Поскольку $2(a+b)^{\frac{1}{q}} > a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}$, при $a > 0, b > 0, 1 < p < +\infty$ то

$$\begin{aligned} A_s &\geq \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \frac{1}{2} \left\{ a_{\tau\theta} \sum_{k=s+1}^{l_{n+1}-1} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ a_{\tau\theta} \sum_{k=l_{n+1}}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} = \{\log_2(s+1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2. \quad (10) \end{aligned}$$

Произведя вычисления точно так же как и в (6), находим

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \left\{ a_{\tau\theta} E_{l_{n+1}-1}^\tau(f)_{p\theta} \sum_{k=s+1}^{l_{n+1}-1} \frac{1}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &\geq \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} [\{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}^\tau(f)_{p\theta} - \{\log_2(s+2)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}^\tau(f)_{p\theta}]^{\frac{1}{\tau}}. \end{aligned}$$

В силу равенства (3) получим, что

$$I_2 \geq A_{l_{n+1}-1} - \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta}.$$

Теперь с учетом неравенства $(a - b)^{\frac{1}{q}} \geq (a^{\frac{1}{q}} - b^{\frac{1}{q}})$, $1 < q < +\infty$, и (9) соотношение (10) можем продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} A_s &\geq \{\log_2(s + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \{\log_2(s + 2)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \frac{1}{2} A_{l_{n+1}-1} - \frac{1}{2} \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} \geq \\ &\geq [s < (l_{n+1} - 1), E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} \leq E_s(f)_{p\theta}] \geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} 2^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} \{\log_2(s + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} B_{l_{n+1}-1} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} 2^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} A_s + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^{\tau}(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} 2^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} \right] A_s &\geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} - 1 \right] \{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^{\tau}(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}}. \end{aligned}$$

Здесь $c''_{\theta\tau} = \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c'_{\theta\tau}} - 1 > 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_s &\geq (E_{l_{n+1}-1}(f)_{p\theta}) > \frac{1}{2} E_{l_n}(f)_{p\theta} > \frac{1}{2} E_s(f)_{p\theta} \geq \\ &\geq c'''_{\theta\tau} \left[\{\log_2(l_{n+1} + 1)\}^{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}} E_s(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1 - \frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^{\tau}(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right] = c'''_{\theta\tau} B_s. \end{aligned}$$

Таким образом, при $l_n \leq s \leq l_{n+1} - 2$ будет выполняться неравенство

$$B_s \leq c_{\theta\tau}^{IV} A_s, \quad (11)$$

где $c_{\theta\tau}^{IV} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Из соотношений (9) и (11) для $s \in \mathbb{N}$: $l_n \leq s < l_{n+1}$ получим, что

$$B_s \leq \bar{c}_{\theta\tau} A_s, \quad (12)$$

где $\bar{c}_{\theta\tau} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Далее, поскольку по условию теоремы ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}$ сходится, то на основании оценки (12) сходится и ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta}$. Поэтому согласно теореме 2 функция $f \in L_{p\tau}[0, 1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < \theta \leq +\infty$, и имеет место неравенство:

$$\|f\|_{p\tau} \leq c_{p\theta\tau} \left\{ \|f\|_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right\}.$$

Так как по определению B_s при $s = 1, n = 0$

$$B_1 = \{\log_2(l_1 + 1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_1(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}},$$

то в силу (12) находим

$$\begin{aligned} \|f\|_{p\tau} &\leq c_{p\theta\tau} \left\{ \|f\|_{p\theta} + \{\log_2(l_1 + 1)\}^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta}} E_1(f)_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \{\log_2(l_{k+1} + 1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_{l_k}^\tau(f)_{p\theta} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right\} \leq \\ &\leq c_{p\theta\tau} \{ \|f\|_{p\theta} + B_1 \} \leq b_{p\theta\tau} \{ \|f\|_{p\theta} + A_1 \} \leq \\ &\leq b'_{\theta\tau} \left[\|f\|_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right] \leq b''_{\theta\tau} \left[\|f\|_{p\theta} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_k^\tau(f)_{p\theta}}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \right]. \end{aligned}$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Теорема 4. Пусть $1 < p < +\infty, 1 < \tau < \theta < +\infty$ и $\{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$ убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Тогда для наличия вложения

$$E_{p\theta}(\lambda) \subset L_{p\tau}[0, 1]$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k^\tau}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточность условия теоремы следует из теоремы 3 и определения класса $E_{p\theta}(\lambda)$. Для того, чтобы установить необходимость условия теоремы, допустим, что верно вложение $E_{p\theta}(\lambda) \subset L_{p\tau}[0, 1]$, но при этом предположим, что ряд (13) расходится. Построим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{l_k\}$ так, чтобы

$$l_0 = 1, l_{k+1} = \min\{\nu \in \mathbb{N} : \lambda_\nu < \frac{1}{2}\lambda_{l_k}\}.$$

Тогда выполняются следующие неравенства:

- a) $\lambda_{l_{k+1}} < \frac{1}{2}\lambda_{l_k}$;
- b) $\lambda_{l_{k+1}-1} \geq \frac{1}{2}\lambda_{l_k}$.

В силу того, что $\lambda_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k^\tau}{k\{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{l_k}^\tau \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} \frac{1}{\nu\{\log_2(\nu+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}} \leq c_{\tau\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{l_k}^\tau [(\ln l_{k+1})^{1-\frac{\tau}{\theta}} - (\ln l_k)^{1-\frac{\tau}{\theta}}].$$

Из предположения расходимости ряда (13) следует, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{l_k}^{\tau} [(\ln l_{k+1})^{1-\frac{\tau}{\theta}} - (\ln l_k)^{1-\frac{\tau}{\theta}}] = +\infty. \quad (14)$$

Рассмотрим ряд Прайса

$$1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_k} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} a_{\nu} \varphi_{\nu}(x), \quad (15)$$

где $a_{\nu} = (\nu + 1)^{\frac{1}{p}-1}$ и $l_0 = 1$.

Через

$$T_{l_{\mu}}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\mu-1} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_k} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} a_{\nu} \varphi_{\nu}(x)$$

обозначим частичную сумму ряда (15).

Пусть $\mu \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}$ такие, что $\mu > s$. Тогда применяя лемму 1, получим, что

$$\begin{aligned} \|T_{l_{\mu}} - T_{l_s}\|_{p\theta} &= \left\| \sum_{k=s}^{\mu-1} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_k} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} a_{\nu} \varphi_{\nu} \right\|_{p\theta} \leq \\ &\leq B_{p\theta} \sum_{k=s}^{\mu-1} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_k} \{\ln l_{k+1}\}^{\frac{1}{\theta}} \leq B_{p\theta} \sum_{k=s}^{\mu-1} \lambda_{l_k} = B_{p\theta} \lambda_{l_s} \sum_{k=s}^{\mu-1} \frac{1}{2^{k-s}} = B'_{p\theta} \lambda_{l_s}, \quad \forall \mu > s. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_m \rightarrow 0$, при $m \rightarrow +\infty$, следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ существует $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall \mu > N_{\varepsilon}, \forall s > N_{\varepsilon}$ и справедливо неравенство

$$\|T_{l_{\mu}} - T_{l_s}\|_{p\theta} < \varepsilon.$$

В силу полноты пространства $L_{p\theta}[0, 1]$ можем утверждать, что существует функция $f_0 \in L_{p\theta}[0, 1]$ такая, что $\|f_0 - T_{l_{\mu}}\|_{p\theta} \rightarrow 0$, при $l \rightarrow +\infty$. Таким образом, в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}[0, 1]$:

$$f_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_k} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} a_{\nu} \varphi_{\nu}(x).$$

Пусть $l_k \leq \mu < l_{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{\mu}(f_0)_{p\theta} &\leq E_{l_k}(f_0)_{p\theta} \leq \left\| \sum_{\nu=k}^{+\infty} \{\ln l_{\nu+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_{\nu}} \sum_{s=l_{\nu}}^{l_{\nu+1}-1} a_s \varphi_s \right\|_{p\theta} \leq \\ &\leq \sum_{\nu=k}^{+\infty} \{\ln l_{\nu+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_{\nu}} \left\| \sum_{s=l_{\nu}}^{l_{\nu+1}-1} a_s \varphi_s \right\|_{p\theta} \leq (\text{лемма 1}) \leq \\ &\leq B_{p\theta} \sum_{\nu=k}^{+\infty} \{\ln l_{\nu+1}\}^{-\frac{1}{\theta}} \lambda_{l_{\nu}} \{\ln l_{\nu+1}\}^{\frac{1}{\theta}} = B_{p\theta} \sum_{\nu=k}^{+\infty} \lambda_{l_{\nu}} \leq B_{p\theta} \lambda_{l_k} \sum_{\nu=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{\nu-k}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq B''_{p\theta} \lambda_{l_k} \leq 2B''_{p\theta} \lambda_{l_{k+1}-1} \leq B'''_{p\theta} \lambda_{\mu} \quad \forall \mu \in \mathbb{N}.$$

Если ввести функцию $g_0(x) = \frac{1}{B''_{p\theta}} f_0(x)$, то $g_0 \in L_{p\theta}[0, 1]$ и $E_{\mu}(g_0)_{p\theta} \leq \lambda_{\mu} \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$. Это означает, что $g_0 \in E_{p\theta}(\lambda)$.

Теперь покажем, что при условии расходимости ряда (13), следствием которого является (14), функция $g_0 \notin L_{p\tau}[0, 1]$.

Для этой цели в силу монотонности коэффициентов ряда Прайса (15) можем применить теорему 1. Итак, в силу утверждения (14) числовой ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{\tau}{\theta}} \lambda_{l_k}^{\tau} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} \frac{\nu^{\tau(1-\frac{1}{p})-1}}{(\nu+1)^{\tau(1-\frac{1}{p})}} \geq c_{p\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(1-\frac{1}{p})} \sum_{k=1}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{\tau}{\theta}} \lambda_{l_k}^{\tau} \sum_{\nu=l_k}^{l_{k+1}-1} \frac{1}{\nu} \geq \\ & \geq c'_{p\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{\tau}{\theta}} \lambda_{l_k}^{\tau} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \frac{dx}{x} \geq c'_{p\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} \{\ln l_{k+1}\}^{-\frac{\tau}{\theta}} \lambda_{l_k}^{\tau} [\ln l_{k+1} - \ln l_k] \geq \\ & \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{l_k}^{\tau} [(\ln l_{k+1})^{1-\frac{\tau}{\theta}} - (\ln l_k)^{1-\frac{\tau}{\theta}}] \end{aligned}$$

расходится. Следовательно, по теореме 1 функция $f_0 \notin L_{p\tau}[0, 1]$, поэтому и $g_0 \notin L_{p\tau}[0, 1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < \theta$. Таким образом, если имеет место вложения $E_{p\theta}(\lambda) \subset L_{p\tau}[0, 1]$, $1 < \tau < \theta$, то необходимо, чтобы сходиллся ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k^{\tau}}{k \{\log_2(k+1)\}^{\frac{\tau}{\theta}}}.$$

Тем самым, теорема доказана.

Замечание. Авторы считают своим долгом признать, что в статье [15] в теореме 4 установили неестественное жесткое достаточное условие вложения, чем в теореме 3 настоящей работы. В качестве подтверждения приводим очевидное неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} \{\log_2(k+1)\}^{-\frac{\tau}{\theta}} E_k^{\tau}(f)_{p\theta} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \{\log_2(k+1)\}^{1-\frac{\tau}{\theta}} E_k^{\tau}(f)_{p\theta}.$$

Доказательство теоремы 3 настоящей работы проводилось по той же схеме, что и доказательство теоремы 4 работы [15]. В доказательстве теоремы 3 отличие состояло только в наличии числового множителя $a_{\tau\theta} = \frac{\{\log_2 e\}^{1-\frac{\tau}{\theta}}}{\{\ln 2\}^{\frac{\tau}{\theta}}}$ в составе вспомогательного выражения A_s .

Цитированная литература

1. **Конюшков А.А.** // Математический сборник. 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.
2. **Андриенко В.А.** // Изв. АН СССР, сер. матем. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.
3. **Ульянов П.Л.** // Изв. АН СССР, сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
4. **Стороженко Э.А.** // Математический сборник. 1975. Т. 97, № 2. С. 230–241.
5. **Коляды В.И.** // Математический сборник. 1977. Вып. 102, № 2. С. 195–215.
6. **Потапов М.К.** // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 143–156.
7. **Акишев Г. А.** // Вестник АН КазССР. 1982. № 7. С. 72–75.

8. Акишев Г.А., Смаилов Е.С. // Изв. АН Каз ССР, серия физ.-матем. 1984. № 1. С. 60–77.
9. Гольдман М. Л. // Доклады АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 72–75.
10. Тазабеков С., Смаилов Е.С. Тригонометрические ряды Фурье с квазимонотонными коэффициентами. Деп. в ВИНТИ АН СССР, 30.06.88, № 5255-В 88.
11. Тазабеков С., Смаилов Е.С. // Изв. АН Каз ССР, серия физ.-матем. 1989. № 5. С. 50–55.
12. Темиргалиев Н. // Сибир. матем. журнал. 1983. Т. 24, № 2. С. 160–172.
13. Акишев Г. А. // Материалы докладов Уфимской международной конференции посвященной памяти А.Ф. Леонтьева, Уфа, 2007. Т. 1. С. 13–14.
14. Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. // Материалы V Международной научной конференции "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". Актобе, 2009. С. 273.
15. Бимендина А.У., Смаилов Е.С. // Математический журнал. Алматы. 2009. Т. 9, № 2(32). С. 35–44.
16. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша, 1987.
17. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. М., 1974.
18. Смаилов Е.С., Бимендина А.У. // Вестник КарГУ. Серия математика. 2005. № 2(38). С. 3–9.

Поступила в редакцию 26.05.2010г.

УДК 517.956.3

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. С. КАБДРАХОВА

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 S_Kabdrachova@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными.

На $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где функции $A(x, t)$, $B(x, t)$, $C(x, t)$, $f(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$.

Пусть $C(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow R$ с нормой $\|u\| = \max_{\bar{\Omega}} |u(x, t)|$. Через $C_{x,t}^{1,1}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и непрерывно дифференцируемых на $\bar{\Omega}$ функций $u(x, t)$ с нормой $\|u\|_0 = \max(\|u\|_C, \|u_x\|_C, \|u_t\|_C)$ и $C^1([0, T])$ – пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $\psi(t)$ с нормой $\|\psi\|_1 = \max(\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|, \max_{t \in [0, T]} |\dot{\psi}(t)|)$.

Функция $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial u^2(x, t)}{\partial x \partial t} \in C(\bar{\Omega})$, называется решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$, на характеристике $x = 0$ принимает данное значение $\psi(t)$, $t \in [0, T]$, на характеристиках $t = 0$, $t = T$ имеет равные значения для $x \in [0, \omega]$.

В работах [1–3] были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с более общим краевым

Keywords: *Correct solvability, semiperiodic boundary value problem, linear hyperbolic equation*

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L70, 35B10

© С. С. Кабдрахова, 2010.

условием. На основе эквивалентности корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости в терминах специальной матрицы, составленной по данным задачи. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными в терминах коэффициента $A(x, t)$ и T .

Определение 1. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любой $f(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на $[0, T]$ функций $\psi(t)$, имеет единственное решение $u(x, t)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_0 \leq K \max \{ \|\psi\|_1, \|f\|_C \},$$

где K – константа, независящая от $f(x, t), \psi(t)$.

Введем новые неизвестные функции $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ и задачу (1)–(3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + B(x, t)w + C(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad w(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x v_t(\xi, t) d\xi. \quad (6)$$

Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{u(x, t), w(x, t), v(x, t)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет семейству периодических краевых задач (4), (5), где функции $u(x, t), w(x, t)$ связаны с $v(x, t), \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

Рассмотрим семейство периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv}{dt} = A(x, t)v + F(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$v(x, 0) = v(x, T), \quad x \in [0, \omega], \quad (8)$$

где $A(x, t), F(x, t)$ – непрерывные на $\bar{\Omega}$ функции.

Функция $v(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, имеющая непрерывную производную по t , называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе уравнений (7) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$ и краевому условию (8) при $x \in [0, \omega]$.

Определение 2. Краевая задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любой функции $F(x, t)$ она имеет единственное решение $v(x, t)$ и справедлива оценка:

$$\max_{t \in [0, T]} |v(x, t)| \leq K \max_{t \in [0, T]} |F(x, t)|,$$

где K – const, независящая от $F(x, t)$.

Из теоремы 3 [1, С.23] следует, что полупериодическая краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима периодическая краевая задача (7), (8).

Следующее утверждение устанавливает необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (7), (8).

Теорема 1. Задача (7), (8) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство $|\int_0^T A(x, \tau) d\tau| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим периодическую задачу (7), (8). При фиксированном $x \in [0, \omega]$ решаем дифференциальное уравнение (7). Общее решение систем уравнений (7) выписывается в виде:

$$v(x, t) = \exp\left(\int_0^t A(x, \tau_1) d\tau_1\right) \times \\ \times \left(C(x) + \int_0^t F(x, \tau) \exp\left(-\int_0^\tau A(x, \tau_1) d\tau_1\right) d\tau\right), t \in [0, T], \quad (9)$$

где $C(x)$ – непрерывная на $[0, \omega]$ функция. Подставим представление функции $v(x, t)$ в условия (8):

$$C(x) = C(x) \exp\left(\int_0^T A(x, \tau_1) d\tau_1\right) + \int_0^T F(x, \tau) \exp\left(\int_\tau^T A(x, \tau_1) d\tau_1\right) d\tau.$$

При выполнении условия теоремы $|\int_0^T A(x, \tau) d\tau| \geq \delta$ получим, что $\exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) \neq 1$. Тогда функция $C(x)$ определяется следующим образом:

$$C(x) = \frac{1}{1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right)} \int_0^T F(x, \tau) \exp\left(\int_\tau^T A(x, \tau_1) d\tau_1\right) d\tau.$$

Таким образом, решение краевой задачи (7), (8) имеет представление:

$$v(x, t) = \frac{\exp\left(\int_0^t A(x, \tau) d\tau\right)}{1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right)} \int_0^T F(x, \tau) \exp\left(\int_\tau^T A(x, \tau_1) d\tau_1\right) d\tau + \\ + \int_0^t F(x, \tau) \exp\left(\int_\tau^t A(x, \tau_1) d\tau_1\right) d\tau.$$

Установим единственность решения краевой задачи (7), (8). Предположим обратное, пусть существуют два решения $v^*(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$ периодической краевой задачи (7), (8). Так как функции $v^*(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$ являются решениями краевой задачи (7), (8) для всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$, то их разность $\Delta v(x, t) = v^*(x, t) - \bar{v}(x, t)$ удовлетворяет периодической краевой задаче для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Delta v}{dt} = A(x, t)\Delta v, \quad (10)$$

$$\Delta v(x, 0) = \Delta v(x, T). \quad (11)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид $\Delta v(x, t) = C(x) \cdot \exp\left(\int_0^t A(x, \tau) d\tau\right)$. Из краевого условия (11) получим $C(x) \left(1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right)\right) = 0$. Так как $|\int_0^T A(x, \tau) d\tau| \geq \delta > 0$ для всех $x \in [0, \omega]$, то $1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) \neq 0$. Отсюда вытекает, что функция $C(x)$ равна нулю при всех $x \in [0, \omega]$. Тогда $\Delta v(x, t) \equiv 0$, т. е. задача (10), (11) имеет только тривиальное решение. Поэтому $v^*(x, t) = \bar{v}(x, t)$ для всех $x \in [0, \omega]$.

Покажем справедливость неравенства

$$\frac{1}{\left|1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right)\right|} \leq \frac{e^\delta}{e^\delta - 1}. \quad (12)$$

Рассмотрим два случая: а) $\int_0^T A(x, \tau) d\tau \leq -\delta$, б) $\int_0^T A(x, \tau) d\tau \geq \delta > 0$.

В случае а) $\exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) \leq e^{-\delta}$, $1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) \geq 1 - e^{-\delta}$

$$\text{и } \left[1 - \exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right)\right]^{-1} \leq \frac{1}{1 - e^{-\delta}} = \frac{e^\delta}{e^\delta - 1}.$$

В случае б) $\exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) \geq e^\delta$, $\exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) - 1 \geq e^\delta - 1$

$$\text{и } \left[\exp\left(\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right) - 1\right]^{-1} \leq \frac{1}{e^\delta - 1}.$$

Из этих неравенств следует справедливость (12).

Учитывая доказанное неравенство (12), для решения $v(x, t)$ имеем оценку:

$$\begin{aligned} \|v(x, \cdot)\|_1 &\leq \frac{e^{\alpha T} \cdot e^\delta}{e^\delta - 1} \cdot \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} \|F(x, \cdot)\|_1 + \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} \|F(x, \cdot)\|_1 \leq \\ &\leq \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} \left(\frac{e^\delta \cdot e^{\alpha T}}{e^\delta - 1} + 1\right) \|F(x, \cdot)\|_1 = K_1(\alpha, \delta, T) \|F(x, \cdot)\|_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha = \max_{(x,t) \in \Omega} |A(x, t)|$, $K_1(\alpha, \delta, T) = \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} \left(\frac{e^\delta \cdot e^{\alpha T}}{e^\delta - 1} + 1\right)$. Тогда, по определению задача (7), (8) корректно разрешима.

Необходимость. Пусть задача (7), (8) корректно разрешима и $K - const$, удовлетворяющая неравенству (13).

Так как семейство периодических краевых задач (7), (8) корректно разрешимо, то возьмем $F(x, t) = 1$ и рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = A(x, t)v + 1, \quad (14)$$

$$v(x, 0) = v(x, T). \quad (15)$$

Допустим, что существует $\tilde{x} \in [0, \omega]$, при котором $\int_0^T A(\tilde{x}, t) dt = 0$. Из корректной разрешимости задачи (7), (8) следует существование единственного решения задачи (14), (15) – $v_1(x, t)$. Функция $v_1(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (14) при каждом $x \in [0, \omega]$, тогда для $x = \tilde{x}$ справедливо

$$v_1(\tilde{x}, t) = \exp\left(\int_0^t A(\tilde{x}, \tau) d\tau\right) \left(v_1(\tilde{x}, 0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau A(\tilde{x}, s) ds\right) d\tau\right). \quad (16)$$

При $t = T$ из (16) получим:

$$v(\tilde{x}, T) = v(\tilde{x}, 0) + \int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau A(\tilde{x}, s) ds\right) d\tau.$$

Из нашего предположения следует, что $v(\tilde{x}, 0) \neq v(\tilde{x}, T)$. Краевое условие (8) не выполняется, отсюда получаем, что задача (7), (8) не имеет решения. Таким образом, пришли к противоречию. Предположение, что существует $\tilde{x} \in [0, \omega]$ и $\int_0^T A(\tilde{x}, t) dt = 0$ неверно. Отсюда следует, что если задача (7), (8) корректно разрешима, то $\left|\int_0^T A(x, \tau) d\tau\right| \neq 0$ для всех $x \in [0, \omega]$. Так

как функция $A(x, t)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$, то $\tilde{A}(x) = \int_0^T A(x, t)dt$ также является непрерывной функцией на $[0, \omega]$. Из непрерывности функции $\tilde{A}(x)$, $|\int_0^T A(x, \tau)d\tau| \neq 0$ для всех $x \in [0, \omega]$ и из теоремы анализа [4, стр.175–176] следует, что существует $\delta > 0$ при котором выполняется неравенство $|\int_0^T A(x, t)dt| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство $|\int_0^T A(x, \tau)d\tau| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Используя теорему 3 из [1, С.23] получим, что задача (7), (8) корректно разрешима. Тогда из теоремы 1 вытекает существование $\delta > 0$ и выполнение неравенства $|\int_0^T A(x, \tau)d\tau| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$.

Достаточность. Пусть существует $\delta > 0$ при котором $|\int_0^T A(x, \tau)d\tau| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$. Тогда из теоремы 1 получим корректную разрешимость задачи (7), (8). Из эквивалентности краевых задач (7), (8) и (1)–(3) по теореме 3 из [1, С.23] вытекает корректная разрешимость краевой задачи (1)–(3). Теорема 2 доказана.

Существенность выполнения неравенства $|\int_0^T A(x, \tau)d\tau| \geq \delta$ для всех $x \in [0, \omega]$ показывают следующие примеры.

Пример 1. В области $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \sin(t - x) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin(t - x), \quad (17)$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (18)$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x \in [0, 1]. \quad (19)$$

Задача (17)–(19) не имеет решения, так как условие теоремы 2 не выполняется, т.е. $\left| \int_0^{2\pi} \sin(\tau - x)d\tau \right| = 0$ не существует $\delta > 0$.

Пример 2. В области $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0, \quad (20)$$

$$u(0, t) = 1, \quad t \in [0, 1], \quad (21)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1), \quad x \in [0, 1]. \quad (22)$$

Для задачи (20)–(22) условие теоремы 2 не выполняется. Задача (20)–(22) имеет бесконечно много решений вида $u(x, t) = C(x)$, $x \in [0, 1]$.

Цитированная литература

1. Асанова А.Т., Джумабаев Д. С. // Изв.НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. № 3. С. 20–26.
2. Асанова А.Т., Джумабаев Д. С. // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295–297.
3. Асанова А.Т., Джумабаев Д. С. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337–346.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференц. и интег. исчисления. Т. 1. М., 1969.

Поступила в редакцию 15.11.2010г.

УДК 532.526

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ В КАНАЛЕ

Г. А. КАМАЛОВА, Г. И. РАМАЗАНОВА, Т. М. УСЕНОВА

Институт математики МОиН РК
050100 Алматы Пушкина, 125 ked@math.kz

С помощью численной модели плоского дозвукового турбулентного течения аэросмеси (многокомпонентный газ-твердые частицы) при наличии динамического и теплового взаимодействий проводится расчет выхода летучих газов из твердых частиц. Исследуется взаимодействие турбулентных течений между газом и дисперсными частицами. Изучается влияние отношения температуры вдуваемой аэросмеси и вторичного воздуха на выделения летучих газов.

Интерес к процессам турбулентного переноса импульса и тепла в газодисперсных потоках обусловлен не только широким спектром практических приложений, но и относительной простотой диагностики большого количества характеристик при экспериментальном исследовании [1–5]. В литературе известно большое количество публикаций [6–7], посвященных влиянию турбулентной структуры на протекание гомогенных течений. При рассмотрении газодисперсного течения [8–9], где исследуется процесс выделения летучих газов, в основном проводятся тестовые расчеты и практически отсутствует теоретическое исследование влияния режимных параметров на процесс взаимодействия выделенных летучих газов и газов основного потока.

Целью данной работы является численный расчет течений газа с твердыми частицами в плоском канале, изучение влияния входного значения температуры вторичного воздуха на выделения летучих газов.

Постановка задачи. Рассматривается плоское двухфазное течение турбулентной струи (аэросмесь, состоящая из твердых частиц и первичного воздуха u_g, T_g), истекающей из сопла в прямоугольный канал с частично открытой границей (рис.1). Помимо этого через отдельные сопла подается вторичный воздух u_{air}, T_{air} .

В математической формулировке системы (1)–(12) приняты следующие допущения:

- несущая фаза – воздух, дисперсная фаза состоит из твердых частиц;
- твердые частицы имеют сферическую форму и состоят из твердого скелета, в порах которого содержится газ (далее будем называть летучими);
- частицы предполагаются сухими, т.е. влажность $RH = 0$.

Keywords: *Turbulence, multicomponent flow, volatile gases, secondary air.*

2010 Mathematics Subject Classification: 76F40

© Г. А. Камалова, Г. И. Рамазанова, Т. М. Усенова, 2010.

- лучистым теплообменом между частицами и поверхностью пренебрегаем.
- турбулентность замыкается $k - \varepsilon$ моделью турбулентности.

Исходной является система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса и система лагранжевых уравнений изменения масс, моментов и энергии частиц, записанных в безразмерной форме в общепринятых обозначениях:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \dot{\rho}^{dev}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{u}) = \frac{1}{ReSc} \nabla \cdot \left[\rho D \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}^{dev}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot \sigma(\vec{u}) - \frac{1}{\gamma M^2} \nabla P - \nabla \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\rho}{Fr} + \dot{F}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} I) = \nabla \cdot \vec{J} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} P \nabla \cdot \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{Q} + \dot{Q}^{dev}, \quad (4)$$

$$P = T \sum_m \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla k \right] - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \vec{u} + (\gamma - 1) M^2 \sigma : \nabla \vec{u} - \rho \varepsilon + \dot{W}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - \left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\varepsilon}{k} \left[(\gamma - 1) M^2 c_{\varepsilon 1} \sigma : \nabla \vec{u} - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W} \right], \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_p = \vec{u}_p, \quad (8)$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \dot{M}_p^{dev}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_p = D_p(\vec{u} + \vec{u}' - \vec{u}_p) + \frac{1}{Fr}, \quad (10)$$

$$m_p c_p \frac{dT_p}{dt} = \frac{1}{Re Pr_p} 2\pi r_p K_{conv} (T - T_p) Nu_p, \quad (11)$$

где p – индекс твердых частиц. Дополнительные члены, появляющиеся за счет межфазного обмена импульса, массы и энергии и сила сопротивления, имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= - \int f \dot{m}_p \left[\frac{\rho}{8\rho_p} (\vec{u} + \vec{u}' - \vec{v}) C_D + \vec{v} \right] d\vec{v} dm dT_d, \\ \dot{Q} &= - \int f \dot{m}_p \left\{ \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{u})^2 + \frac{1}{8} \frac{\rho}{\rho_p} C_D (\vec{u} + \vec{u}' - \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u} - \vec{v}') \right\} d\vec{v} dm dT_d, \\ \dot{W} &= - \int f \dot{m}_p C_D (\vec{u} + \vec{u}' - \vec{v}) \vec{v}' d\vec{v} dm dT_d. \end{aligned} \quad (12)$$

Выделение летучих газов вследствие конвективного теплообмена определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho^{dev} &= \int f \alpha \dot{m}_p d\vec{v} dm dT_d, \\ \dot{Q}^{dev} &= - \int f \{ \dot{m}_p \alpha T_p - m_p c_p \dot{T}_p \} d\vec{v} dm dT_d.\end{aligned}$$

Тензор напряжения и поток тепла имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{u}) &= \frac{\mu}{Re} \left(\left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \vec{E} \right), \\ \vec{J} &= - \frac{K}{Re Pr} \nabla T - \frac{\rho D}{Re Sc} \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right).\end{aligned}$$

Эффективная вязкость представлена как сумма молекулярной вязкости, выраженной формулой Сазерленда, и турбулентной вязкости определяемой через локальные значения k и ε :

$$\mu = \mu_{air} + \mu_t, \quad \mu_{air} = A_1 T^{3/2} / (A_2 + T), \quad \mu_t = \rho c_\mu k^2 / \varepsilon$$

Для описания суммарных напряжений сдвига, обусловленных молекулярной и турбулентной вязкостью, использована эффективная вязкость.

Здесь t – время, ρ_m – плотность m -го компонента, $c_{pm}(T)$, $h_m(T)$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении и энтальпия m -го компонента, определенные из таблицы JANAF, m_p – масса частицы, \vec{v} , m , T_d – скорость, масса и температура фиксированной "частицы", f – функция распределения частицы, c_μ , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, $c_{\varepsilon 3}$, Pr_k , Pr_ε , c_s , k – ε модели турбулентности в (6), (7) и (11) приведены в работе [11].

Граничные условия. Рассматриваемая задача решается со следующими постановками начальных и граничных условий. В начальный момент газ находится в состоянии покоя, задаются плотности компонентов, распределение температуры постоянно, кинетическая энергия турбулентности и масштаб турбулентности ($l = \frac{1}{M} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$) также постоянны:

$$u = w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_{air}, \quad T = 1, \quad k = 0, \quad l = 0. \quad (13)$$

На входе:

внутри сопла – аэрозоль (частицы и первичный воздух)

$$u = u_p = 1, \quad w = w_p = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_{air},$$

$$T = T_p = 1, \quad k = k_0, \quad l = l_0; \quad (14)$$

во внешней части сопла – вторичный воздух (O_2, N_2)

$$u = m_u, \quad w = 0, \quad \rho_m = (\rho_m)_{air}, \quad T = m_T, \quad k = k_0, \quad l = l_0,$$

где $m_u = \frac{u_{air}}{u_g}$ – отношение скорости вторичного воздуха к скорости аэрозоли, $m_T = \frac{T_{air}}{T_g}$ – отношение температуры вторичного воздуха к температуре аэрозоли. Далее m_u будем называть параметром спутности, а m_T – параметром температуры. На стенках для поля скорости и температуры задается турбулентный закон стенки, тангенциальный компонент скоростей

которого определяется приближенным соотношением, полученным с помощью логарифмического профиля и степенного закона аналогично [10], для кинетической энергии турбулентности, концентраций компонентов газа выполняется условие отсутствия потока через стенку. Для твердых частиц приняты условия прилипания $u_p = w_p = 0$.

На выходе: для газовой фазы задаются мягкие граничные условия $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $f = (\vec{u}, \rho_m, k, l)$. Частицы вблизи открытой границы покидают рассматриваемую область.

Метод решения. Детальное описание численного метода решения системы (1)–(12), а также тестирование построенного алгоритма изложено в работе [11], здесь приводятся вкратце основные этапы его решений. Дискретизация уравнений (1)–(11) осуществляется методом контрольного объема со вторым порядком точности по пространственным переменным. Построенные конечно-разностные уравнения решаются трехэтапной схемой расщепления по физическим процессам: влияние дисперсной среды на газовую фазу вычисляется явным образом; промежуточные значения скоростей, температуры и давления с учетом диффузии вычисляются методом предиктора-корректора и сопряженных разностей; конвективный перенос рассматриваемых величин определяется с использованием схемы донорной ячейки.

Результаты расчетов и их анализ.

Расчет производился на сетке по пространственным координатам размером 60×100 с шагами $\Delta x = 0.0165$, $\Delta z = 0.035$. Диаметр внутреннего сопла $d_0 = 1$, а внешнего $l_0 = 1$. Численные исследования проводились со следующими характерными параметрами: $m_u = 1$, $m_T = 0.33$.

Рассматривается течение в канале, в котором производится вдув аэрозольной смеси через отверстие размером $d_0 = 1$ с температурой $T_g = 1$. При этом расход частиц $G_p = 0.446$. Начальная температура в канале составляет $T = 1.44$. Движение частиц в канале является свободным, т.е. они попадают в рассматриваемую область случайным образом.

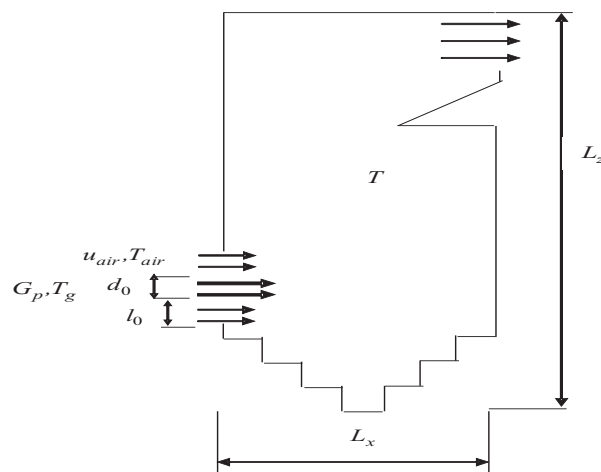


Рис. 1: Схема течения.

Изучено влияние температуры вторичного воздуха (для диапазона параметра $0.33 \leq m_T \leq 0.56$) на процесс выделения летучих компонентов. На рисунке 2 показаны вектор скоростей, распределение частиц и изменение температуры при разных параметрах температуры. С увеличением температуры вторичного воздуха потеря энергии за счет межфазного взаимодействия уменьшается, что способствует выделению летучих компонентов. Так, при увеличении температуры вторичного воздуха от 298К до 350К (в диапазоне $0.33 \leq m_T \leq 0.39$) максимум

концентрации окиси углерода CO составляет от 0,06 до 0,09 (рисунок 3Аа-б). Дальнейший рост температуры вторичного воздуха (для диапазона параметра температуры $0.44 \leq m_T \leq 0.56$) не приводит к заметному выделению газов, о чем свидетельствует рисунок 3Ав-д. Из графиков видно, что изолинии CO практически сохраняются). Картина образования концентрации конечного продукта CH_4 аналогична (рисунок 3Ба-д).

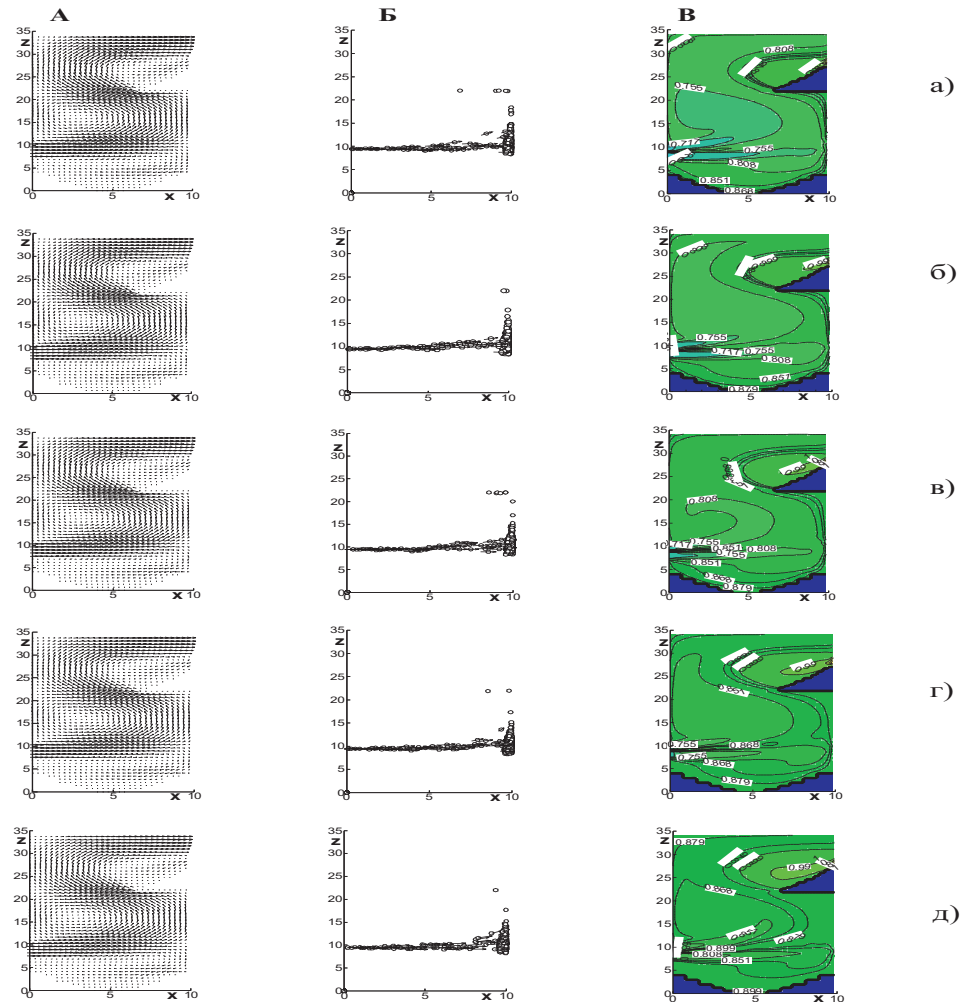


Рис. 2: Динамика скорости газа (А), распределения частиц (Б) и температуры (В) при разных температурах вторичного воздуха а) $m_T = 0.33$, б) $m_T = 0.39$, в) $m_T = 0.44$, г) $m_T = 0.5$, д) $m_T = 0.56$.

В заключение отметим, что в диапазоне параметра температуры $0.33 \leq m_T \leq 0.39$ поток ускоряется, значение концентрации летучих газов растет, дальнейшее увеличение температуры вторичного воздуха не требуется.

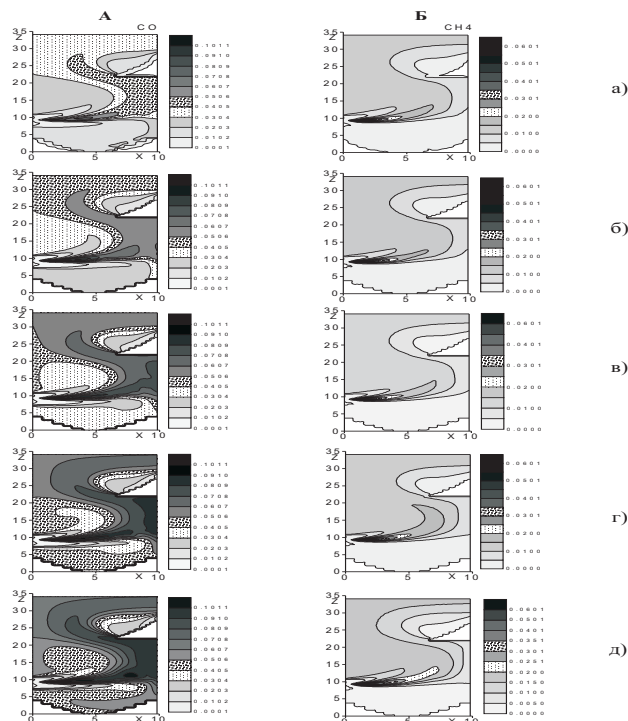


Рис. 3: Окись углерода (А) и метан (Б) при разных температурах вторичного воздуха а) $m_T = 0.33$, б) $m_T = 0.39$, в) $m_T = 0.44$, г) $m_T = 0.5$, д) $m_T = 0.56$.

Цитированная литература

1. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М., 1980.
2. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М., 1971.
3. Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М., 2003.
4. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газозвеси. Киев, 1987.
5. Гавин Л.Б., Шрайбер А.А. // Итоги науки и техники. Серия Механика жидкости и газа. М., 1991. Т. 25. С. 90–187.
6. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М., 1986.
7. Турбулентные течения реагирующих газов. Под ред. П.А. Либби и Ф.А. Вильямса. М., 1983.
8. Fan J.R., Zha X.D., Cen K.F. // Fuel. 2001. V. 80. P. 373–381.
9. Cho H.C., Shin H.D. // International Journal of Energy Research. 1999. V. 23. P. 1313–1324.
10. Amsden A.A., O'Rourke. P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos: Los Alamos National Laboratory report, 1989.
11. Камалова Г.А., Найманова А.Ж. // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 1. С. 52–66.

Поступила в редакцию 15.11.2010г.

УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ ЭРОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

С. Н. ХАРИН, А. Т. КУЛАХМЕТОВА, Ю.Р. ШПАДИ

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 kulakhmetova@mail.ru

В работе представлены математические модели, описывающие механизмы эрозии, и методы решения соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных в областях с неизвестными подвижными границами. Температурные поля и эрозионные характеристики определяются как функции режимов коммутации и свойств контактного материала.

Дуговая эрозия в размыкающихся электродах зависит от многих факторов, таких как диапазоны тока и напряжения, скорость размыкания, свойств материала и окружающей среды, параметров электрической цепи и т.д. Математические модели дуговой эрозии контактов при малых токах вследствие испарения материала рассмотрены во многих работах [1–4]. Расчетами и экспериментами было показано, что направление переноса контактного материала зависит от механизма электрической проводимости в столбе дуги и меняется с анодного на катодное при переходе от металлической фазы дуги к газовой фазе [5–9].

Информация о продолжительности каждой фазы дуги является крайне необходимой для обеспечения минимума дуговой эрозии вследствие испарения. Экспериментальное исследование динамики испарения наталкивается на значительные трудности из-за быстротечности процесса. Поэтому математическое моделирование эрозионных процессов представляется весьма важным. Некоторые из таких моделей, описывающих эрозию при переходе от металлической фазы дуги к газовой фазе, представлены в работах [10–11]. Однако, все они достаточно сложны для инженерного использования и нуждаются в упрощении.

Механизм эрозии, обусловленный газовым и электромагнитным давлением в жидком расплаве на поверхности электрода, был математически описан в работе [12], однако, без детального анализа и удобного для приложений метода решения. Некоторые оценки конвективных и электродинамических сил, а также термокапиллярных сил поверхностного натяжения получены в работах [13–15]. Механизм эрозии в твердой фазе, который наблюдался на карбиде циркония [16] и на вольфраме [17], был математически описан в работах [18–19], но разработка соответствующих практических методов решения остается весьма актуальной.

Keywords: *Mathematical model, arc erosion, arc phases*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A45

© С. Н. Харин, А. Т. Кулахметова, Ю.Р. Шпади, 2010.

Данная работа является дальнейшим развитием предыдущих математических моделей, описывающих различные типы эрозии электродов (испарение, капли, твердые частицы), и методов решения таких задач.

Испарение. Математическая модель. Математическая модель электроконтактной эрозии вследствие испарения должна описывать многообразные явления в низкотемпературной плазме, такие, как ионную и электронную бомбардировку поверхности электрода, электронную эмиссию из катода, поток обратных электронов и радиация из столба дуги, а также эволюцию во времени электромагнитного и температурного полей с учетом фазовых переходов плавления и испарения.

Динамика этих явлений должна быть исследована в зависимости от заданных значений тока, напряжения, скорости размыкания, индуктивности цепи, параметров электродного материала и свойств окружающей среды.

Общая математическая модель, описывающая динамику электрической дуги, была представлена в работе [10]. Однако, она довольно сложна для практического применения, поэтому задача ее упрощения без потери основных законов дуговой динамики представляется весьма нужной. Такое упрощение может быть достигнуто заменой дифференциальных уравнений для столба дуги, бесстолкновительной и ионизационной зон более простыми уравнениями баланса энергии, в то время как для описания процессов в электродах сохраняются дифференциальные уравнения с заданными потоками из дуги в качестве граничных условий.

В результате действия теплового потока дуги на поверхности электрода формируется осесимметричная зона жидкого металла $D_1(h_v(r, t) \leq z \leq h_m(r, t), 0 \leq r \leq \alpha(t))$, контактирующая с нерасплавленной твердой зоной $D_2(z \geq 0, r \geq 0) \setminus D_1$, которые показаны на рисунке 1. Уравнение теплопроводности для обеих областей может быть представлено в виде:

$$C_i \gamma_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \text{div}(\lambda_i \nabla T_i) + \rho_i j_i^2, \tag{1}$$

где через C_i , γ_i , λ_i , ρ_i , j_i , T_i и t обозначены соответственно теплоемкость, плотность, теплопроводность, электрическое сопротивление, плотность тока, температура и время, $h_v(r, t)$ и $h_m(r, t)$ – изотермы испарения и плавления, α и h_0 – радиус и глубина расплава, f – радиус дуги, индекс $i = 1$ относится к расплаву, а $i = 2$ – к твердой зоне.

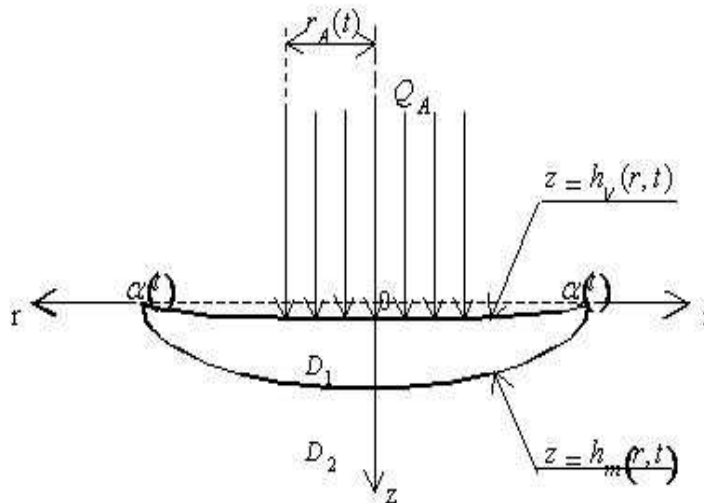


Рис. 1: Расплав (D_1) и твердая зона (D_2) электрода.

На изотерме поверхности испарения $z = h_v(r, t)$ условие Стефана имеет вид:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = Q_A + L_\nu \gamma_1 \frac{\partial h_\nu}{\partial t}, \quad (2)$$

где тепловой поток дуги определяется выражением:

$$Q_A = q_0(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_A(t)^2}\right), \quad (3)$$

в котором $q_0(t)$, L_ν , $r_A(t)$ и n означают соответственно магнитуду (максимум теплового потока в центре контактного пятна), скрытую теплоту испарения, эффективный радиус нормального распределения и нормаль к поверхности.

Скорость испарения может быть определена законом Ленгмюра:

$$\gamma_1 \frac{\partial h_\nu}{\partial t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{T_1}} \exp\left(A - \frac{B}{T_1}\right), \quad (4)$$

где $\Gamma = (2\pi R_T/M)^{1/2}$, R_T – газовая постоянная, M – молекулярный вес пара, A и B – константы испарения. Если предположить, что доля теплового потока, входящего в электрод, которая потребляется на фазовый переход испарения, имеет нормальное радиальное распределение

$$Q_\nu = q_\nu(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_\nu(t)^2}\right), \quad (5)$$

где $q_\nu(t)$ и $r_\nu(t)$ – магнитуда и эффективный радиус испарения, то можно опустить закон Ленгмюра (4) и рассматривать лишь одно условие Стефана (3) с заменой в нем Q_A на разность $Q_A - Q_\nu$. Эффективный радиус испарения может быть найден в этом случае из уравнения

$$T_1(r_\nu(t), 0, t) = T_b, \quad (6)$$

где T_b – температура кипения. Магнитуды $q_0(t)$ и $q_\nu(t)$ определяются из уравнения баланса энергии для столба дуги, анода и поверхности катода.

На поверхности перехода $z = h_m(r, t)$ между расплавом и твердой зоной задается еще одно условие Стефана

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + L_m \gamma_1 \frac{\partial h_m}{\partial t}, \quad (7)$$

дополняемое уравнением

$$T_1 = T_2 = T_m, \quad (8)$$

где L_m и T_m – скрытая теплота плавления и температура плавления соответственно.

Для замыкания системы граничных условий необходимо задать еще условие аксиальной симметрии

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad (9)$$

а также начальные условия

$$T_2(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad T_1(0, 0, 0) = T_m. \quad (10)$$

Выражение для $T_0(r, z)$ может быть найдено из решения уравнения теплопроводности на этапе, предшествующем плавлению. Оно приведено в работе [11].

Алгоритм решения. Для решения задачи Стефана (1)–(10) с двумя свободными границами $z = h_m(r, t)$ и $z = h_\nu(r, t)$ используется метод мажорантных тепловых потоков, представленный в работе [23]. В соответствии с этим методом время горения дуги $0 \leq t \leq t_A$ разбивается на элементарные интервалы (шаги). Для каждого такого шага реализуется следующая

итерационная процедура. Вначале строится известное решение стандартной задачи для уравнения (1) в цилиндрическом полупространстве $r > 0, z > 0$ с заданным тепловым потоком дуги $Q_A(r, t)$ на границе $z = 0$. Это решение $T^+(r, t)$ является верхней мажорантой и дает завышенные значения температуры, поскольку реальный тепловой поток $Q_A(r, t) - Q_m(r, t) - Q_\nu(r, t)$, учитывающий тепловые потери на фазовые переходы плавления и испарения, меньше потока дуги. Из этого решения определяются поверхности $z = h_m^+(r, t)$ и $z = h_\nu^+(r, t)$, соответствующие изотермам плавления и испарения, и вытекающие из них объемы расплава и испарения, которые также завышены. Затем вычисляется мощность $Q_{m+\nu}^+(r, t) = Q_m(r, t) + Q_\nu(r, t)$, затрачиваемая на фазовые переходы для найденных объемов, и снова решается стандартная задача теплопроводности, но уже для заниженного значения теплового потока $Q_A(r, t) - Q_{m+\nu}^+(r, t)$, в результате чего определяются нижние мажоранты температуры $T^-(r, z, t)$ и изотерм плавления и испарения $z = h_m^-(r, t)$ и $z = h_\nu^-(r, t)$. Такая процедура повторяется несколько раз до получения нужной точности.

Результаты расчета. Медные электроды. Расчет был проведен для *Cu* – электродов при токах $I = 100 \text{ A}, 300 \text{ A}, 500 \text{ A}$ и скоростях размыкания $V_0 = 0.5 \text{ m/sec}, 5 \text{ m/sec}, 20 \text{ m/sec}$. Результаты представлены на рисунках 2–4.

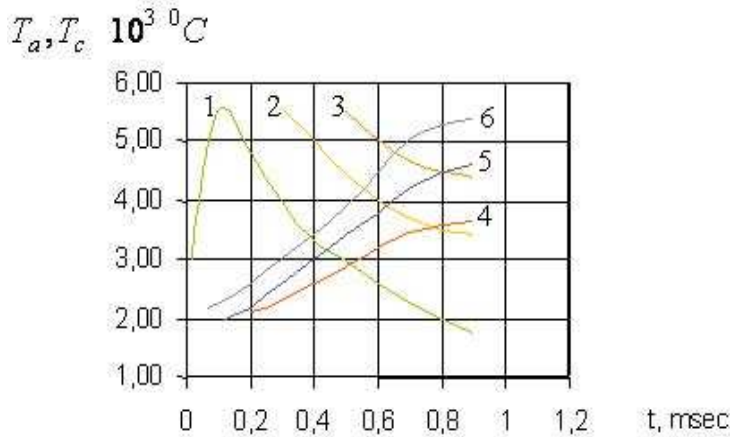


Рис. 2: Температура $T_a(0, t)$ и $T_c(0, t)$ в центре анода и катода в функции от времени t . *Cu* – контакты. Для анода: 1 – $I = 100 \text{ A}$, 2 – $I = 300 \text{ A}$, 3 – $I = 500 \text{ A}$. Для катода: 4 – $I = 100 \text{ A}$, 5 – $I = 300 \text{ A}$, 6 – $I = 500 \text{ A}$. Критическое время: $t_{cr} = 0.4 \text{ m sec}$ (300A), 0.65 m sec (500A), 0.8 m sec (500A).

Сразу же после разрыва мостика температура в центре анодного пятна $T_a(0, t)$ (Рисунок 2) резко возрастает до величины $6 \cdot 10^3 \text{ K}$, затем со временем уменьшаясь до значения $1 \cdot 10^3 \text{ } ^\circ\text{C}$, сравнимого с температурой группового катодного пятна $T_c = 4 \cdot 10^3 \text{ K}$. Вследствие этого испарение с анода резко сокращается и металлическая фаза дуги переходит в газовую фазу в критической точке t_{cr} пересечения анодной и катодной температур. Величина тока при этом весьма важна, так как меньшему току соответствует меньшее время существования анодной дуги. Снижение температуры в центре анодного пятна является результатом действия двух факторов: 1) уменьшения теплового потока в анод вследствие расхождения контактов и увеличения радиуса анодного пятна и 2) охлаждения анода вследствие интенсивного испарения.

Условия возникновения и эволюции газовой фазы дуги зависят от свойств электродного материала, таких как температура плавления и испарения, скрытая теплота испарения и т.д., которые должны быть учтены в математической модели короткой дуги.

Испарение материала в зоне основания короткой дуги является важнейшим фактором, определяющим ее эволюцию. Эффективный радиус испарения с катодного пятна $r_\nu(t)$ возрастает

тает вместе с током (рисунок 3), в то время как $r_\nu(t)$ для катода изменяется весьма медленно.

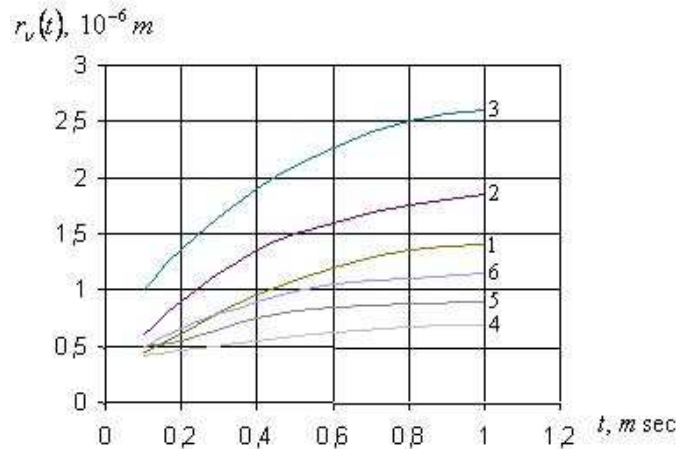


Рис. 3: Динамика эффективного радиуса r_{ev} испарения с анода (1 – $I = 100A$, 2 – $I = 300A$, 3 – $I = 500A$) и с катода (4 – $I = 100A$, 5 – $I = 300A$, 6 – $I = 500A$). (Cu – электроды).

Скорость роста радиуса анодного пятна $\frac{dr_{ev}}{dt}$ меняется от $0.1m/sec$ до $0.2m/sec$ и стремится к нулю в конце анодной фазы дуги.

Кривые анодных и катодных потерь на испарение $Q_{av}(t)$ и $Q_{cv}(t)$ представлены на рисунке 4. Анодные кривые потерь вначале быстро возрастают и достигают максимума при $t \approx 0.1 - 0.5msec$, а затем уменьшаются до нуля, пересекая катодные кривые в критических точках.

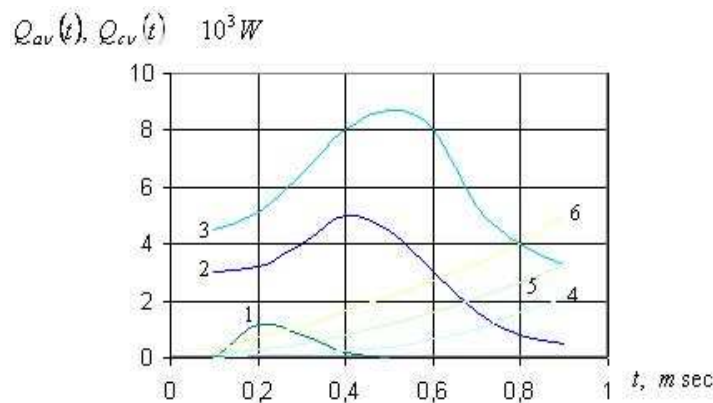


Рис. 4: Анодные потери на испарение $Q_{av}(t)$ (1 – $I = 100A$, 2 – $I = 300A$, 3 – $I = 500A$) и катодные потери на испарение $Q_{cv}(t)$ (4 – $I = 100A$, 5 – $I = 300A$, 6 – $I = 500A$) $V_0 = 0.2m/sec$. Co – контакты.

Максимум анодных потерь на испарение несколько смещается в сторону большего времени с возрастанием тока. Это смещение можно объяснить изменением соотношения между скоростью роста температуры и интенсивностью испарения в анодном пятне. В начальной стадии мощность испарения резко возрастает вместе с ростом анодной температуры. Быстро растущий радиус площадки испарения вызывает интенсивное испарение. После максимума температура

начинает уменьшаться вследствие охлаждающего действия парообразования и уменьшения теплового потока из дуги с ростом межконтактного расстояния. Скорость испарения весьма чувствительна к изменению температуры в силу экспоненциальной зависимости (4), равно как и к изменению величины тока. Из рисунка 4 можно заключить, что испарение анода практически заканчивается при $t = 5\text{ msec}$ для тока $I = 100\text{ A}$, тогда как за то же время при токе $I = 500\text{ A}$ интенсивность испарения достигает максимума.

Сравнение результатов этих вычислений с экспериментальными данными [20] показывает достаточно удовлетворительное согласование с ошибкой, не превышающей 10–15%.

Эрозия AgMeO электродов. Аналогичные вычисления были проведены для металлокерамики AgCdO и AgSnO_2 при условиях: токи $I = 20\text{ A}$ и $I = 40\text{ A}$, напряжение $U = 14\text{ V}$, скорость размыкания $V_0 = 0.2\text{ m/sec}$, индуктивность $L = 0$ and $L = 50\text{ mH}$. Эти условия типичны для размыкания тока в автомобильных реле и коммуникациях. Результаты расчета представлены на рисунках 5–7.

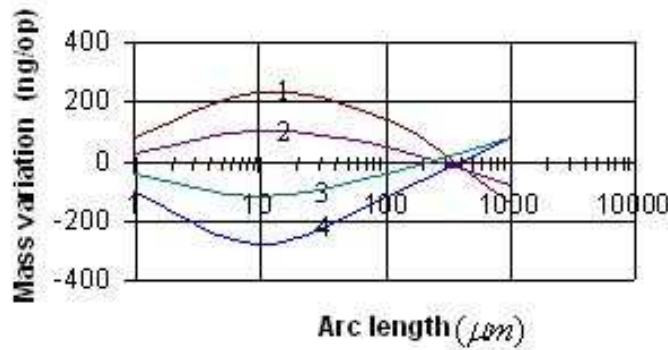


Рис. 5: Эрозия AgCdO электродов в зависимости от длины дуги. $L = 0$, 1 – $I = 40\text{ A}$ (катод), 2 – $I = 20\text{ A}$ (катод). 3 – $I = 20\text{ A}$ (анод), 4 – $I = 40\text{ A}$ (анод).

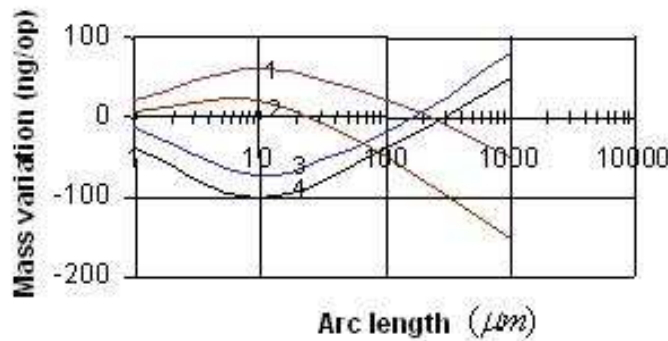


Рис. 6: Эрозия AgSnO_2 в зависимости от длины дуги. $L = 0$, 1 – $I = 40\text{ A}$ (катод), 2 – $I = 20\text{ A}$ (катод) 3 – $I = 20\text{ A}$ (анод), 4 – $I = 40\text{ A}$ (анод).

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [9, 22]. Их анализ позволяет заключить, что в металлической фазе короткой анодной дуги, которая характеризуется переносом материала с анода на катод, эрозия электродов AgSnO_2 значительно меньше, чем эрозия электродов AgCdO , как для резистивных, так и для индуктивных цепей, в то время

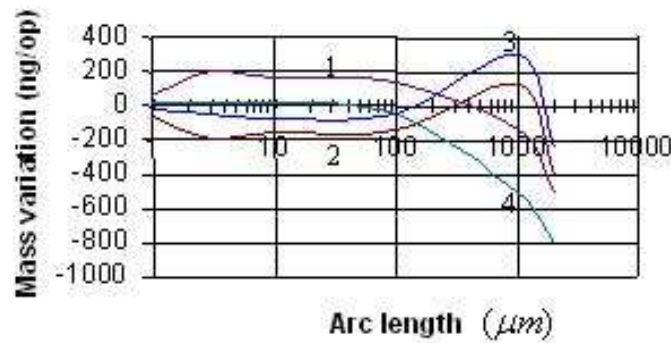


Рис. 7: Эрозия $AgCdO$ и $AgSnO_2$ в зависимости от длины дуги $L = 50mH$, $I = 40A$, 1 – $AgCdO$ катод, 2 – $AgCdO$ анод, 3 – $AgSnO_2$ анод, 4 – $AgSnO_2$ катод.

как в газовой фазе (длинная дуга) с обратным направлением переноса величина эрозии зависит от индуктивности цепи. Для резистивных цепей ($L = 0$) эрозия электродов $AgSnO_2$ значительно меньше по сравнению с эрозией в электродах $AgCdO$, однако, для индуктивных цепей ситуация меняется на обратную, поэтому использование электродов $AgCdO$ в случае длинных дуг, горящих в газовой фазе, более предпочтительно.

Эрозия в капельной фазе. Наряду с испарением в ряде случаев возможен и другой механизм эрозии, которая происходит в виде жидких капель и наблюдается в области средних и больших токов. Она обусловлена взаимодействием различных сил в жидкометаллической зоне, таких как электромагнитное и газокинетическое давление, поверхностное натяжение, а также взрывообразным разбрызгиванием газовых включений в жидком металле.

Математическая модель (1)–(10), представленная выше, должна быть скорректирована в этом случае с учетом тепло- и массопереноса в поверхностном слое жидкого металла. Уравнение движения для жидкого металла в области D_1 может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} = \frac{1}{\gamma_1} \nabla P + \nu \Delta \bar{V} + \bar{F}, \quad (11)$$

а уравнение неразрывности остается стандартным:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0. \quad (12)$$

Уравнение теплопроводности (1) для $i = 1$ должно быть заменено уравнением энергии

$$C_1 \gamma_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla T_1 \right) = \text{div}(\lambda_1 \nabla T_1) + \rho_1 j_1^2, \quad (13)$$

в то время как для $i = 2$ оно остается прежним. Здесь $\bar{V}(V_r, V_z)$ означает вектор скорости жидкого металла, P – газокинетическое давление, $\bar{F} = (\mu_0/\gamma_1) \bar{j} \times \bar{H}$ – электромагнитная сила, ν и μ_0 – вязкость и магнитная проницаемость.

Наряду с граничными условиями для температуры должны быть заданы аналогичные условия и для скорости:

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} = 0 \quad \text{на поверхности} \quad z = h_\nu(r, t), \quad (14)$$

$$V_r = V_z = 0 \quad \text{на поверхности} \quad z = h_m(r, t). \quad (15)$$

Для упрощения задачи примем радиальное распределение давления в виде:

$$P = P_0 \cdot (1 - r^2/\alpha^2). \quad (16)$$

Используя теорию подобия нетрудно показать, что характерное время процессов теплопереноса t_h много больше по сравнению с характерным временем гидродинамических процессов t_ν . Следовательно, гидродинамическая часть рассматриваемых уравнений может быть решена независимо от тепловой с использованием квазистационарной аппроксимации, т.е. в предположении, что T_1 , h_m и h_ν являются фиксированными для данного времени t .

Используя закон сохранения энергии, можно записать равенство

$$\frac{1}{2} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \|\bar{V}^2\| + \nu \|\nabla^2 \bar{V}\| = E_H + E_M, \quad (17)$$

где слагаемые в левой части соответствуют кинетической и потенциальной энергии, а правая часть есть сумма гидродинамической и электромагнитной сил. Интегрируя по времени, получаем следующее приближение:

$$\gamma_1 \|\bar{V}^2\| + \nu \int_0^{t_A} \|\nabla \cdot \bar{V}^2\| dt \cong W_M + W_V, \quad (18)$$

где t_A – время горения дуги. Выражения для E_M, E_H, W_M, W_V даны в работе [15].

Соотношение (18) дает возможность сравнить каждое слагаемое в правой части (18), не решая дифференциальные уравнения, и оценить таким образом, какая сила ответственна в основном за механизм эрозии.

Модель становится более эффективной, если заменить всю область D_1 пограничным слоем вблизи поверхности испарения $z = h_\nu(r, t)$. Тогда поля температуры и скорости при испарении могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \gamma_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}) + \rho_1 j_r^2, & \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}, & \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial F}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\mu_0}{\lambda_1} j_r H_\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которой численными методами не представляет трудности.

Динамика изотермы плавления медного катода в результате нагрева тепловым потоком дуги Q_A и джоулевыми источниками с плотностью тока j показаны на рисунке 8 для параметров:

$$\begin{aligned} Q_A = Q_0 \exp(-\alpha_i r^2), & \quad Q_0 = 2.2 \cdot 10^7 W/m^2, & \quad \alpha_i = 3.18 \cdot 10^4 m^{-2}, \\ j = j_0 \exp(-\alpha_j r^2), & \quad j_0 = 1.9 \cdot 10^6 A/m^2, & \quad \alpha_j = 1.3 \cdot 10^2 m^{-2}. \end{aligned}$$

Это позволяет оценить величину эрозии в форме жидких капель, кинетическая энергия которых больше энергии поверхностного натяжения.

Термокапиллярный механизм эрозии. В ряде случаев объяснить измеренные значения капельной эрозии как следствие движения жидкого металла от центра пятна к его периферии под действием электромагнитного и газокинетического давления не представляется возможным, особенно для таких тугоплавких металлов как вольфрам, молибден, цирконий и т.д. В этом случае эрозионный механизм можно объяснить действием термокапиллярного эффекта Марангони, который вызывает интенсивное конвективное течение в узком поверхностном слое жидкого расплава за счет температурной зависимости поверхностного натяжения жидкого металла. Чтобы учесть этот эффект, необходимо скорректировать представленную выше модель

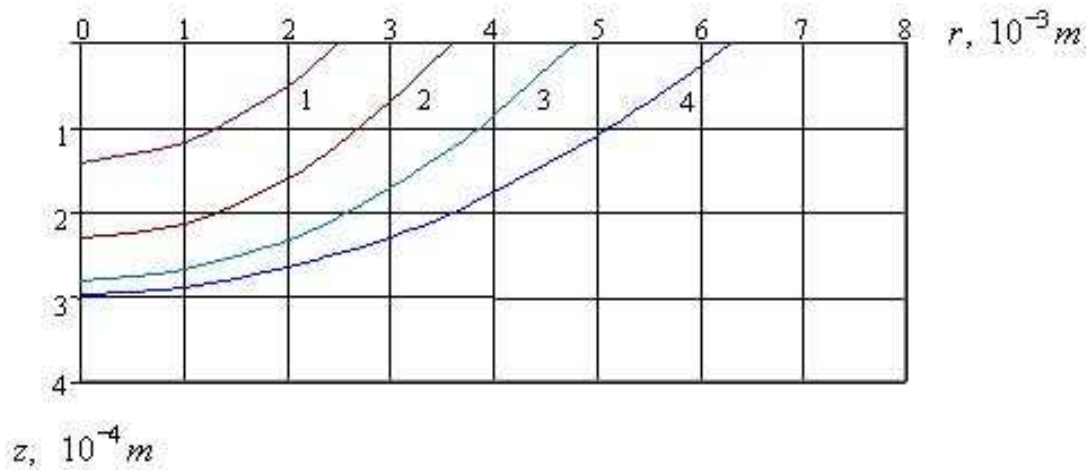


Рис. 8: Dynamics of melting isotherms of convective heat transfer during arcing. $I = 100 \text{ A}$ 1 – $t = 0.2 \text{ m sec}$, 2 – $t = 0.4 \text{ m sec}$, 3 – $t = 0.6 \text{ m sec}$, 4 – $t = 0.8 \text{ m sec}$.

конвективного тепло- и массообмена путем замены условия (14) специальным граничным условием, описывающим термокапиллярные силы, которые вызывают радиальные напряжения на поверхности жидкого металла:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = - \frac{d\sigma}{dT_1} \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad z = h_\nu(r, t), \quad (20)$$

где μ – динамическая вязкость, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Кроме этого, в правые части уравнений (17) и (18) должны быть добавлены слагаемые E_σ и W_σ , ответственные за термокапиллярный эффект.

В этом случае аналог термокапиллярного числа Рейнольдса $Re = W_{10} h_0 \gamma_1 / \mu$, $W_{10} = \left| \frac{d\sigma}{dT_1} \right| \frac{T_m - T_0}{\alpha \mu}$, числа Прандтля $Pr = \frac{\sigma \mu}{\lambda_1}$ и числа Марангоми $Ma = Re \cdot Pr$ играют ключевую роль.

Изотермы плавления для вольфрама при тех же условиях, что и выше, но с учетом термокапиллярной конвекции, представлены на рисунке 9.

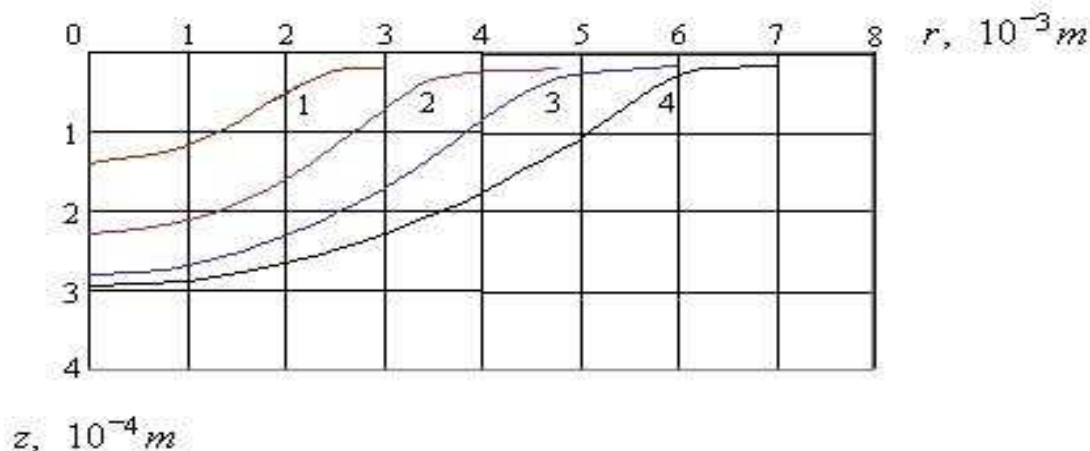


Рис. 9: Изотермы плавления термокапиллярной конвекции. $I = 100 \text{ A}$, $Ma = 2 \cdot 10^3$.

В работе [15] показано, что при плотности тока $j = 6.45 \cdot 10^7 A/m^2$ и тепловом потоке $Q_0 = 3.2 \cdot 10^8 W/m^2$ число Марангони для вольфрама равно $Ma = 1.13 \cdot 10^2$, вследствие чего скорость движения термокапиллярной конвекции V_r на поверхности расплава достигает $13 m/sec$, что достаточно для выброса жидкого металла из расплава только термокапиллярными силами без учета электродинамического и газокинетического давлений.

Эрозия в твердой фазе. В ряде случаев на поверхности электродов могут наблюдаться очаги пластической деформации и микротрещины. Это происходит тогда, когда коэффициент сосредоточенности теплового источника дугового разряда достаточно велик ($\alpha_i \geq 10^7 m^{-2}$), а длительность импульса мала. При этом вблизи контактной поверхности за весьма малые времена возникают очень большие градиенты температуры (тепловой удар), которые являются причиной возникновения в теле электрода термоупругой волны и напряжений, превышающих предел прочности контактного материала и вызывающих выброс частиц, отколотых от поверхности электрода [16–17].

Природа тепловых напряжений существенно зависит от плотности тока в контактной зоне. При плотности тока порядка $10^8 A/m^2$ и выше рост температуры обусловлен действием джоулевых источников тепла в зоне стягивания линий тока, в то время как при плотности $10^7 A/m^2$ и ниже превалирует поверхностный дуговой поток тепла. Температурное поле, создающее термоупругие напряжения вследствие джоулевого нагрева, может быть описано уравнением теплопроводности

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \nabla T) + \rho \cdot j^2, \quad r > 0, \quad z > 0. \quad (21)$$

Плотность тока в импульсном режиме определяется из решения уравнения Пуассона для электрического потенциала в виде [11]:

$$j(r, z, t) = \frac{\delta t}{4\pi f r} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right), \quad (22)$$

где δ – скорость роста тока, $f = f(t)$ – радиус дугового пятна, увеличивающегося во времени, и

$$\eta = \left[\frac{z^2 + (r - f)^2}{z^2 + (r + f)^2} \right]^{1/4}.$$

Решение уравнения (21) с граничным условием в виде теплового потока $P_0 t$, поступающего в электрод из дуги, хорошо известно [11]. Используя это решение и термоупругий потенциал, можно найти компоненты напряжений. Расчеты показывают, что термоупругие напряжения, соответствующие этой модели, существенны лишь при больших скоростях нарастания тока ($\beta \geq 10^7 A/sec$ для вольфрама и $\beta \geq 10^9 A/sec$ для меди). Максимум напряжений в этом случае возникает на краю контактного пятна ($z = 0, r = f(t)$), где плотность тока и тепловых источников также максимальны, в то время как в центре пятна напряжения значительно ниже, что видно из уравнения (22).

В случае преобладания поверхностных тепловых источников распределение напряжений носит обратный характер: их максимум находится в центре пятна. В этом случае для описания температурного поля в электроде может быть использована сферическая модель Хольма, более простая и удобная по сравнению с цилиндрической. Она состоит в замене плоского кругового контактного пятна радиуса f полусферой идеальной проводимости с радиусом $b = f\sqrt{2}$, что обеспечивает адекватность температурных полей в обеих моделях. Граничное условие на контактной полусфере записывается в виде:

$$-\lambda \frac{\partial T(b, t)}{\partial r} = P_0 t. \quad (23)$$

Главные компоненты тензора напряжений в квазистатическом приближении определяются выражениями:

$$\sigma_{rr} - \frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x,t) dx, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{E\alpha_0}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x,t) dx - T(r,t) \right]. \quad (24)$$

Решение уравнения (21) при условии (23) дается формулой:

$$T(r,t) = \frac{bP_0t\beta}{\lambda\alpha} [erf(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) \cdot ierfc(\alpha - \beta)] + 4\beta^2 \exp\{-(\alpha - \beta)^2 [\Omega(\alpha - \beta) - \Omega(\alpha - \beta + \frac{1}{2\beta})]\}, \quad (25)$$

где

$$\beta = \frac{b}{2a\sqrt{t}}, \quad \alpha = \frac{r}{2a\sqrt{t}}, \quad \Omega(z) = \exp(z^2) \cdot erfc z.$$

Подставляя выражение (25) в (24), можно найти компоненты тензора напряжений. Если σ_y – предел прочности материала электрода, то простейшее условие, исключающее растрескивание, имеет вид $|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| < \sigma_y$, т.е.

$$\frac{E\alpha_0}{1-\mu} \frac{P_0t_0b}{\lambda} \left| \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 - 4\beta^2 [1 - \Omega(1/2\beta)] \right| < \sigma_y, \quad (26)$$

где t_0 – время действия импульса.

Приведем пример расчета термоупругих напряжений на вольфрамовом электроде при условиях, описанных в эксперименте работы [17]. Для этих данных

$$I = \delta t_0 = 1000 \text{ A}, \quad t_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ sec}, \quad \pi f^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

тогда $b = 2.55 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\Omega(1/2\beta) = 0.94$, и, следовательно, $|\sigma_{\varphi\varphi}| = 2.2 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$, что превышает предел прочности вольфрама $\sigma_y = 1.3 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$. Экспериментально наблюдаемая эрозия в виде отколотых от поверхности твердых частиц подтверждает правильность неравенства (26).

Используя неравенство $\sigma_y \leq |\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$, можно вычислить характерный размер области l_0 , подверженной воздействию термоупругой волны до затухания и приводящей к выбросу материала электрода в твердой фазе.

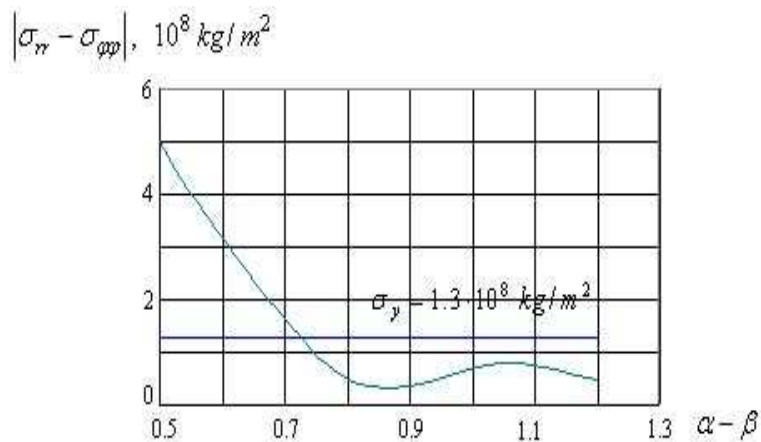


Рис. 10: Зависимость тензора напряжений $|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$ от $\alpha - \beta$.

Как видно из рисунка 10 неравенство $\sigma_y \leq |\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$ выполнено, если $\alpha - \beta \leq 0.65$, т.е. $r - b \leq 1.3a\sqrt{t}$, и разрушение электрода в твердой фазе происходит на глубину

$$l_0 = 1.3a\sqrt{t_0} = 1.67 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Таким образом, неравенство (26) представляется весьма полезным для расчета термических напряжений в электрических контактах, работающих в импульсном режиме.

Цитированная литература

1. **Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А.** // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С. 97–102.
2. **Ragnar Holm** // Electric Contacts, 4-th Edition, Springer Verlag, 1981, pp. 316–337.
3. **B. Bolanowski** // Proc. 6-th Int. Conf. of Switching Arc Phenomena, Lodz, Poland, 1985, pp. 279–285.
4. **P. Andanson and A. Lefort** // J. Appl. Phys. D. 17. 1984. P. 2377–2386.
5. **J. Swingler and J.W. McBride** // Proc. 41-th IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts, Chicago, USA. 1996. P. 105–114.
6. **J. Boddy and T. Utsumi** // J. Appl. Phys. 1971. V. 42, No. 9. P. 3369–3373.
7. **E.W. Gray** // IEEE Trans. Plasma. Sci. V. 1973. PS-1, No. 1. P. 30–33.
8. **H. Sone and T. Takagi** // IEEE Trans. CHMT. V. 13. 1990. P. 13–19.
9. **Z.K. Chen and K. Sawa** // J. Appl. Phys. 1994. V. 76. P. 3326–3331.
10. **N. Ben Jemaa, L. Nedelec, S. Benhenda** // Proc. 18-th Int. Conf. on Electrical Contacts, Chicago, USA. 1996. P. 70–74.
11. **S.N. Kharin** // Proc. 43rd IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts, Philadelphia, USA. 1997. P. 289–305.
12. **S.N. Kharin** // IEEE Transactions on CPMT. Part A. 1996. V. 19, No 3. P. 313–319.
13. **B. Bolanowski** // Int. Symposium On Electrical Discharges in Gases, Pasim, Poland. 1987. P. 115–121.
14. **J.P. Chabrerie et al.** // Proc. 13-th Int. Conf. on Electrical Contacts, Lausanne, Switzerland. 1986. P. 96–102.
15. **J. Ambier** // Proc. 15-th Int. Conf. of Electrical Contacts, Montreal, Canada. 1990. P. 117–125.
16. **S.N. Kharin** // Proc. 15-th Int. Conf. of Electrical Contacts, Montreal, Canada. 1990. P. 37–43.
17. **Б.Н. Золотых и др.** // В сб. "Электрические контакты", Москва, "Энергия", 1967. С. 32–51.
18. **В.И. Раховский** Коммутация электрического тока в вакууме. М., 1970.
19. **S.N. Kharin** // Proc. 16-th Int. Conf. on Electrical Contacts, Loughborough, England. 1992. P. 205–209.
20. **S.N. Kharin** // Invited Paper, Proceedings of the International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications, Nagoya, Japan. 1999. P. 133–140.
21. **В.П. Елагин, Ю.М. Долинский** Теоретическая оценка условия перехода короткой вакуумной дуги в диффузионную форму. Деп. В УкрНИИНТИ. 1987. Харьков. С. 1–15.
22. **М.Ф. Жуков и др.** Термохимические катоды, Институт теплофизики, СО АН СССР, Новосибирск, 1985.
23. **N. Ben Jemaa, L. Morin, L. Lehfaoui, L. Nedelec** // Proc. of the International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications, Nagoya, Japan. 1999. P. 173–179.
24. **С.Н. Харин** // Сб. "Методы и средства математического моделирования процессов переноса". Алма-Ата, Изд. КазГУ. 1985. С. 38–47.

Поступила в редакцию 31.01.2011г.

УДК 517.956.226

ОЦЕНКИ СПЕКТРА ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. Б. МУРАТБЕКОВ, М. М. МУРАТБЕКОВ, А. Б. ШЫРАКБАЕВ

Таразский инновационно-гуманитарный университет
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева
484041 Тараз Койгельды, 190 musahan_m@mail.ru
010008 Астана Мунайтпасова, 5 madimm@list.ru

В работе получены двусторонние оценки собственных и сингулярных чисел полупериодической задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений.

В этой статье рассматриваются спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов, соответствующих полупериодической задаче Дирихле. Достаточно полный обзор литературы, посвященной рассматриваемым нами вопросам, можно найти в [1–8].

Нам представляется, что следует детально изучать следующие четыре случая:

- 1) Оценки спектра, когда рассматриваемый оператор является самосопряженным оператором.
- 2) Оценки сингулярных чисел (s -чисел) несамосопряженного вырождающегося эллиптического оператора.
- 3) Оценки s -чисел вырождающегося эллиптического оператора с произвольным степенным вырождением на линии вырождения.
- 4) в пункте 4 исследуется случай, когда коэффициенты при старшей и младшей производных обращаются в нуль на линии вырождения.

Отметим, что результаты данной работы частично анонсированы в [11].

1. Оценки собственных чисел одного класса самосопряженных вырождающихся эллиптических операторов. В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(y)u, \quad (1)$$

где $\Omega = \{(x,y): -\pi < x < \pi, 0 < y < 1\}$.

Keywords: *Elliptic equation, Dirihlet problem, singular numbers, bilateral estimates*

2010 Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J70

© М. Б. Муратбеков, М. М. Муратбеков, А. Б. Шыракбаев, 2010.

Оператор (1) зададим на $C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$, где $C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$ – множество функций сколь угодно дифференцируемых на множестве $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющих условиям:

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y), \quad u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям:

i) $k(y) \geq 0$, $c(y) \geq \delta > 0$ – кусочно-непрерывные функции на $[0, 1]$;

ii) $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0, 1]} \frac{t^2}{[K_t^*(y)]^2} < C$, где $C > 0$ – некоторое фиксированное число и $K_t^*(y)$ – функция, определенная [9] равенством:

$$K_t^*(y) = \inf_{d > 0} \left\{ d^{-1} : d^{-1} \geq \int_{y - \frac{d}{2}}^{y + \frac{d}{2}} K_t(\tau) d\tau \right\}, \quad (4)$$

где $K_t(\tau) = t^2 k(\tau) + c(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, $-\infty < t < \infty$.

Ранее такого вида функции впервые введены М.Отелбаевым [9] при исследовании спектральных свойств эллиптических операторов.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие i). Тогда:

a) Оператор L положительно определен и существенно самосопряжен в $L_2(\Omega)$;

b) для всех $u \in D(L)$ справедлива оценка $\|u_{xx}\|_2 + \|u_{yy}\|_2 + \|u\|_2 \leq C \|Lu\|_2$, C – постоянное число.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия i) – ii). Тогда для собственных значений λ_k оператора L имеют места неравенства

$$C_1 k \leq \lambda_k \leq C_2 k, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ где } C_1 \text{ и } C_2 \text{ – постоянные числа, } 0 < C_1 \leq C_2.$$

Вспомогательные леммы и неравенства. Рассмотрим оператор, определенный равенством

$$l_t u = -u''(y) + (t^2 k(y) + c(y))u \quad (-\infty < t < \infty)$$

на множестве $C_0^\infty[0, 1]$, где $C_0^\infty[0, 1]$ – множество функций сколь угодно раз дифференцируемых и удовлетворяющих условию $u(0) = u(1) = 0$.

Нетрудно проверить, что данный оператор допускает замыкание.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Лемма 1.1. Пусть выполнено условие i). Тогда:

a) для всех $u \in D(l_t)$ справедлива оценка $\|l_t u\|_2 \geq \delta \|u\|_2$;

b) оператор l_t существенно самосопряжен.

Лемма 1.2. Пусть выполнено условие i). Тогда для любого $u \in D(l_t)$ справедливо равенство

$$\langle l_t u, u \rangle = \int_0^1 \left[|u'|^2 + (t^2 k(y) + c(y)) |u|^2 \right] dy.$$

Доказательство. Для любого $u \in C_{0,\pi}^\infty[0, 1]$ интегрируя по частям, имеем:

$$\langle l_t u, u \rangle = \int_0^1 [-u'' + (t^2 k(y) + c(y))u] \bar{u} dy = \int_0^1 \left[|u'|^2 + (t^2 k(y) + c(y)) |u|^2 \right] dy.$$

Последнее равенство, в силу непрерывности скалярного произведения, справедливо для всех $u \in D(L)$. Лемма 1.2 доказана.

Введем обозначения, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть $dy = [K_t^*(y)]^{-1}$, тогда $\Delta_{d(y)}(y)$ есть промежуток $(y - \frac{d(y)}{2}, y + \frac{d(y)}{2})$, $\Delta^{(k)} = \Delta_{d(y_k)}(y_k) = (y_k - \frac{d(y_k)}{2}, y_k + \frac{d(y_k)}{2})$.

Из приведенного выше определения функции $K_t^*(y)$ ясно, что она положительная. Но, кроме этого, функция $K_t^*(y)$ непрерывная. Доказательство этого утверждения приведено в работе [9, стр. 62] и поэтому здесь оно опускается.

Лемма 1.3. Для интервала $(0,1)$ существует не более чем счетное покрытие $\{\Delta^{(k)}\}$ непересекающимися интервалами $\Delta^{(k)}$, содержащимися в $(0,1)$ с точностью до счетного множества.

Лемма 1.4. Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для любого $u \in C_0^\infty(\Delta_{d(y)}(y))$, где $\Delta_{d(y)}(y) \subset (0,1)$, справедливо неравенство

$$\int_{\Delta_{d(y)}} [|u'| + (t^2 k(\tau) + c(\tau)) |u|^2] d\tau \geq C_0^{-1} \left(\int_{\Delta_{d(y)}} [|u'|^2 + d^{-2}(y) |u|^2] d\tau \right).$$

Для доказательства лемм 1.3–1.4 использованы выкладки и рассуждения, использованные в работе [9, стр. 64].

Лемма 1.5. Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда справедлива оценка

$$\|l_t u\|_2 \geq t^2 \|u\|_2, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5)$$

Доказательство. Согласно леммам 1.2–1.4 имеем, что

$$\langle l_t u, u \rangle \geq \int_0^1 [|u'|^2 + (t^2 k(y) + c(y)) |u|^2] dy \geq \sum_{\{k\}} \left(\int_{\Delta_{d_k}(y_k)} |u'|^2 + d_k^{-2}(y_k) |u|^2 dy \right),$$

где постоянную C_0 из леммы 1.4, не умаляя общности, приняли за единицу в каждом интервале $\Delta_{d_k}(y_k)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \langle l_t u, u \rangle &\geq \sum_{\{k\}} (d_k^{-2}(y_k) \int_{\Delta_{d_k}(y_k)} |u|^2 dy) \geq \inf_{y \in (0,1)} [K_t^*(y)]^2 \sum_{\{k\}} \int_{\Delta_{d_k}(y_k)} |u|^2 dy = \\ &= \inf_{y \in (0,1)} [K_t^*(y)]^2 \int_0^1 |u|^2 dy = \inf_{y \in (0,1)} [K_t^*(y)]^2 \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства, учитывая условия $ii)$, получаем, что

$$\|l_t u\|_2 \geq t^2 \|u\|_2, \quad -\infty < t < \infty.$$

Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда для любого $u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|Lu\|_2 \geq C \|u\|_2,$$

где $C > 0$ – постоянное число, независящее от $u(x, y)$.

Лемма 1.7. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда:

а) L симметричный оператор, т.е. $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$, $u, v \in D(L)$;

б) L положительно определенный оператор.

Доказательство теоремы 1.1. Известно, что симметричный оператор L будет существенно самосопряженным, если выполнены следующие условия: 1) $\|Lu\|_2 \geq C\|u\|_2$, $C > 0$, $u \in D(L)$; 2) $LD(L)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Первое условие следует из леммы 1.6.

Остается показать, что $LD(L)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Отсюда будет следовать, что оператор L имеет непрерывный обратный оператор L^{-1} . Это означает существование единственного сильного решения задачи (2)–(3) для уравнения $Lu = f$ при всех $f \in L_2(\Omega)$.

Здесь под сильным решением задачи (1)–(3) понимаем функцию $u \in L_2(\Omega)$, если существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$ такая, что $\|u_n - u\|_2 \rightarrow 0$, $\|Lu_n - f\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь, после такого разъяснения вопроса, мы в дальнейшем докажем существование и единственность сильного решения задачи (2)–(3) для уравнения $Lu = f$.

Из леммы 1.2 получаем, что

$$u_k = \sum_{n=-k}^k l_n^{-1} f_n e^{inx} \quad (6)$$

является решением задачи (2)–(3) для уравнения

$$Lu_k = f_k, \quad (7)$$

где $f_k \xrightarrow{L_2} f$, $f_k = \sum_{n=-k}^k f_n e^{inx}$, $l_n u = -u'' + (n^2 k(y) + c(y))u$ ($= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

В силу леммы 1.6 имеем, что

$$\|u_k\|_2 \leq \|f_k\|_2, \quad (8)$$

где $C > 0$ – постоянное число. Так как $f_k \xrightarrow{L_2} f$, то из (8) следует, что

$$\|u_k - u_m\|_2 \leq \|f_k - f_m\|_2 \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, в силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ следует, что существует единственная функция $u \in L_2(\Omega)$ такая, что

$$u_k \rightarrow u \in L_2(\Omega) \quad k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\|u_k - u\|_2 \rightarrow 0, \quad \|Lu_k - f\|_2 \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty.$$

Последние неравенства дают, что $u \in L_2(\Omega)$ является сильным решением задачи (2)–(3) при любом $f \in L_2$, а из (6) имеем

$$u = L^{-1}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n^{-1} f_n e^{inx}. \quad (10)$$

Следовательно, множество $LD(L)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Отсюда из лемм 1.6–1.7 следует, что оператор L – положительно определенный и существенно самосопряженный оператор. Пункт а) теоремы 1.1 доказан. Докажем пункт б) теоремы 1.1.

Пользуясь оценкой (5) из равенства (10) имеем, что

$$\|D_x^2 u_k\|_2^2 = \left\| \sum_{n=-k}^k n^2 u_n e^{inx} \right\|_2^2 = \sum_{n=-k}^k n^4 \|u_n\|_2^2 \leq \sum_{n=-k}^k \|l_n u_n\|_2^2 \leq \|f_k\|_2^2,$$

где $D_x^2 u_k = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, $f_k \xrightarrow{L_2} f$, $f_k = \sum_{n=-k}^k f_n \cdot e^{inx}$.

Отсюда следует, что

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq \|f(x, y)\|_2^2. \quad (11)$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\|k(y)u_{xx}\| \leq \bar{C}\|f(x, y)\|_2$, где $\bar{C} = \max_{y \in [0,1]} k(y)$.

Далее, используя лемму 1.6, получаем $\|c(y)u\| \leq \bar{C}_0\|f(x, y)\|_2$, где $\bar{C}_0 = \max_{y \in [0,1]} c(y)$.

Из этих неравенств следует, что

$$\|-u_{yy}\|_2 = \|Lu + k(y)u_{xx} - c(y)u\|_2 \leq \|Lu\|_2 + \|k(y)u_{xx}\|_2 + \|c(y)u\|_2 \leq C\|f\|_2,$$

где $C = \max\{1, \bar{C}, \bar{C}_0\}$.

Отсюда и из (11) получаем, что

$$\|u_{xx}\|_2 + \|u_{yy}\|_2 + \|u\|_2 \leq C\|f\|_2,$$

где $C > 0$ – не зависит от $u(x, y)$ и $f(x, y)$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Из теоремы 1.1 следует, что область определения оператора L совпадает с пространством $W_2^2(\Omega)$.

Для поперечников по Колмогорову единичного шара пространства $W_2^2(\Omega)$ имеет место следующая двусторонняя оценка [12]

$$C^{-1}\lambda^{-1} \leq N(\lambda) \leq C\lambda^{-1},$$

где $N(\lambda)$ – количество поперечников d_k единичного шара в $W_2^2(\Omega)$ больших $\lambda > 0$, C – постоянное число. Из последнего неравенства и из свойств $N(\lambda)$ имеем:

$$C^{-1}\frac{1}{k} \leq d_k \leq C\frac{1}{k}, \quad (12)$$

где $C > 0$ – постоянное число.

Далее, учитывая самосопряженность оператора L и справедливость равенства $\lambda_k(L^{-1}) = d_k$ [10, стр. 51], из неравенства (12) находим

$$C^{-1}k \leq \lambda_k \leq Ck, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $C > 0$ – постоянное число. Теорема 1.2 доказана.

2. Оценки s -чисел (сингулярных чисел) несамосопряженного вырождающегося эллиптического оператора. В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u, \quad (1)$$

где $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, 0 < y < 1\}$. Оператор (1) зададим на $C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$. Нетрудно проверить, что оператор допускает замыкание.

Предположим, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям:

i) $k(y) \geq 0$, $a(y) \geq \delta_0 > 0$, $c(y) \geq \delta > 0$ – кусочно непрерывные функции на $[0, 1]$;

ii) $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t^2}{[K_t^*(y)]^2} < C$, где $C > 0$ – некоторое фиксированное число и $K_t^*(y)$ – функция,

определенная равенством (4), где $K_t(\tau) = t^2k(\tau) + |t|a(\tau) + (\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, $-\infty < t < \infty$.

Напомним определение сингулярных чисел (s -чисел).

Пусть A – линейный вполне непрерывный оператор и пусть $|A| = \sqrt{A^*A}$. Собственные числа оператора $|A|$ называются s -числами оператора.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие i). Тогда оператор L непрерывно обратим в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия $i)$ – $ii)$. Тогда для s - чисел оператора L^{-1} имеют места неравенства

$$C^{-1}k^{-1} \leq s_k \leq Ck^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где C – постоянное число.

Повторяя выкладки и рассуждения, которые использованы в предыдущем пункте, получаем доказательство теорем 2.1–2.2.

3. Оценки s -чисел полупериодической задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений с произвольным степенным вырождением. Рассмотрим оператор

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u, \quad (1)$$

первоначально определенный на множестве $C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$.

Через $C([0, 1], L_2(-\pi, \pi))$ обозначим пространство, полученное пополнением множества непрерывных на промежутке $[0, 1]$ функций со значениями в $L_2(-\pi, \pi)$ относительно нормы

$$\|u\|_{C([0,1],L_2)} = \sup_{y \in [0,1]} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x,y)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие $i)$: $k(y) \geq 0, |a(y)| \geq \delta_0 > 0, c(y) \geq \delta > 0$ – кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$. Тогда:

$a)$ оператор L непрерывно обратим в $L_2(\Omega)$;

$b)$ для всех $u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C([0,1],L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C_0 \|f\|_2, \quad (3)$$

где $C_0 > 0$ – постоянное число, $\|\cdot\|_{2,1,\Omega}$ – норма в $W_2^1(\Omega)$.

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедлива оценка

$$C^{-1} \frac{1}{k} \leq s_{k1} \leq C \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

где $C > 0$ – постоянное число, s_k – сингулярные числа оператора L^{-1} .

Лемма 3.1. Для всех $u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|Lu\|_2 \geq C \|u\|_2, \quad (5)$$

где $C > 0$ – постоянное число.

Доказательство. Эта лемма доказывается точно также как лемма 2.2.

Через l_n обозначим замыкание в норме пространства $L_2(0, 1)$ оператора

$$l_n u(y) = -u'' + (n^2 k(y) + i n a(y) + c(y))u \quad (n = 0, +1, \pm 2, \dots),$$

определенного на множестве $C_0^\infty[0, 1]$.

Лемма 3.2. Для всех функций $u \in D(l_n)$ справедливы следующие оценки:

$$\|l_n u\|_{L_2(0,1)} \geq 1 \left(\|u'\|_{L_2(0,1)} + \|u\|_{L_2(0,1)} \right), \quad (6)$$

$$\|l_n u\|_{L_2(0,1)} \geq 2\|u\|_{C[0,1]}, \quad (7)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – постоянные числа, независимые от $u(y)$ и n .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $(l_n u, u)$, $u \in C_0^\infty[0, 1]$. Интегрируя по частям получим, что

$$|(l_n u, u)| = \left| \int_0^1 (l_n u) \bar{u} dy \right| = \left| \int_0^1 \left[|u'|^2 + (n^2 k(y) + i n a(y) + c(y)) |u|^2 \right] dy \right|.$$

Отсюда, используя неравенство Коши с " $\varepsilon > 0$ " и условие i), имеем $\|l_n u\|_{L_2(0,1)}^2 \geq 1 \|u\|_{W_2^1(0,1)}^2$, где $C_1 > 0$ – постоянная, независимая от $u(y)$ и n .

Полученная оценка остается верной для всех $u \in D(l_n)$, в силу непрерывности нормы.

Далее, известно, что оператор вложения пространства $W_2^1(0, 1)$ в $C[0, 1]$ ограничен. Отсюда следует, что $\|l_n u\|_{L_2(0,1)} \geq 2\|u\|_{C[0,1]}$, где $C_2 > 0$ – постоянное число. Оценка (7) доказана.

Непосредственно можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.3. Пусть выполнено условие i). Тогда:

- а) оператор l_n непрерывно обратим в $L_2(0, 1)$;
- б) справедлива оценка

$$\|l_n^{-1}\|_{L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)} \leq \frac{1}{|n|\delta_0}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Доказательство теоремы 3.1. В самом деле, пункт а) теоремы 3.1 непосредственно следует из теоремы 2.1. Далее, нетрудно установить, что

$$u_k(x, y) = \sum_{n=-k}^k l_n^{-1} f_n \cdot e^{inx}$$

является решением полупериодической задачи Дирихле для уравнения $Lu_k = f_k(x, y)$, где $f_k(x, y) = \sum_{n=-k}^k f_n(y) e^{inx}$, $\|f_k(x, y) - f\|_2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу оценок (6)–(8) имеем, что

$$\|u_k(x, y) - u_m(x, y)\|_{C([0,1], L_2)} + \|u_k(x, y) - u_m(x, y)\|_{2,1,\Omega} \leq C \|f_k(x, y) - f_m(x, y)\|_2 \rightarrow 0,$$

при $k, m \rightarrow \infty$. Отсюда $\|u\|_{C([0,1], L_2)} + \|u\|_{2,1,\Omega} \leq C \|f\|_2$, где $C > 0$ – постоянное число. Теорема 3.1 доказана.

Введем множества:

$$M = \{u \in L_2(\Omega) : \|Lu\|_2 + \|u\|_2 \leq 1\};$$

$$\tilde{M}_C = \left\{ u \in C([0, 1], L_2(-\pi, \pi)) : \left(\|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C \right\};$$

$$\tilde{M}_{C^{-1}} = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \left(\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C^{-1} \right\},$$

где $C > 0$ – постоянное число.

Лемма 3.4. Пусть выполнено условие i). Тогда справедливы включения $\tilde{M}_C^{-1} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_C$, где $C > 0$ – постоянная, независимая от $u(x, y)$.

Лемма 3.5. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$-1\tilde{d}_k \leq d_k \leq C\tilde{d}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

$$-1\tilde{\tilde{d}}_k \leq s_{k+1} \leq C\tilde{\tilde{d}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

где $C > 0$ – постоянное число из леммы 3.4, $\tilde{d}_k, d_k, \tilde{\tilde{d}}_k$ – k - поперечники по Колмогорову соответствующих множеств $\tilde{M}_C, M, \tilde{\tilde{M}}_{C^{-1}}$.

Эти леммы 3.4–3.5 доказываются точно так же как леммы 4–5 работы [8].

Доказательство теоремы 3.2. Для функций $\tilde{N}(\lambda) = \sum_{\tilde{d}_k > \lambda} 1$, $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum_{\tilde{\tilde{d}}_k > \lambda} 1$ справедли-

вы оценки [12]:

$$C^{-1}\lambda^{-2} \leq \tilde{N}(\lambda) \leq C\lambda^{-2}, \quad C^{-1}\lambda^{-1} \leq \tilde{\tilde{N}}(\lambda) \leq C\lambda^{-1}.$$

Отсюда и учитывая (10), имеем:

$$C^{-1}\frac{1}{k} \leq s_k \leq C\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 3.2 доказана.

4. Оценки s -чисел когда коэффициенты при старшей и младшей производных обращаются в нуль на линии вырождения. На $C_{0,\pi}^\infty(\bar{\Omega})$ рассмотрим вырождающийся эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u, \tag{1}$$

где $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, 0 < y < 1\}$.

Оператор L допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и замыкание также обозначим через L .

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $k(y), a(y), c(y)$ удовлетворяют условиям:

i) $k(y) \geq 0, a(y) \geq 0, c(y) \geq \delta > 0$ – кусочно непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$ и $k(0) = 0, a(0) = 0$.

Обозначим через $N(\lambda)$ количество $s_k(L^{-1})$, больших $\lambda > 0$, т.е. $N(\lambda) = \sum_{s_k > \lambda} 1$.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие *i*). Тогда оператор L непрерывно обратим в $L_2(\Omega)$.

Теорема 4.2. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-1/2} \text{mes}(y \in (0, 1) : Q_n^*(y) \leq C_1 \lambda^{-1/2}) &\leq N(\lambda) \leq \\ &\leq C_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-1} \text{mes}(y \in (0, 1) : K_n^*(y) \leq C_2 \lambda^{-1}), \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – постоянные числа,

$$Q_n^*(y) = \inf_{d>0} \left\{ \frac{1}{d} : d^{-3} \geq \int_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}} |k(x)n^2 + ina(x) + c(x)|^2 dx \right\},$$

$$K_n^*(y) = \inf_{d>0} \left\{ \frac{1}{d} : d^{-1} \geq \int_{y-\frac{d}{2}}^{y+\frac{d}{2}} |k(x)n^2 + |n|a(x) + c(x)| dx \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вспомогательные леммы. Рассмотрим оператор

$$l_n u = -u'' + (k(y)n^2 + ina(y) + c(y))u, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

определенный на множестве функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u \in C_0^\infty[0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

В качестве следствия из предыдущих теорем 2.1, 3.1 и лемм 2.1, 2.3 получаем следующие предложения.

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие *i*). Тогда существует непрерывный обратный оператор l_n^{-1} , определенный в $L_2(\Omega)$, где l_n^{-1} – обратный оператор к замкнутому оператору l_n .

Лемма 4.2. Пусть выполнено условие *i*). Тогда существует непрерывный обратный оператор L^{-1} , определенный в $L_2(\Omega)$, где L^{-1} – обратный оператор к замкнутому оператору L .

Лемма 4.3. Пусть выполнено условие *i*). Тогда для любого $u \in D(l_n)$ справедлива оценка

$$C \cdot \|l_n u\|^2 \geq \left(\int_0^1 [|u'|^2 + (n^2 k(y) + |n|a(y) + c(y))|u|^2] dy \right), \quad C > 0 - \text{постоянное число.}$$

Введем следующие множества:

$$M = \left\{ u \in L_2(0, 1) : \|l_n u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq 1 \right\};$$

$$\tilde{M} = \left\{ u \in L_2(0, 1) : \int_0^1 [|u'|^2 + (n^2 k(y) + |n|a(y) + c(y))|u|^2] dx \leq 1 \right\};$$

$$\tilde{M}_{C^{-1}} = \left\{ u \in L_2(0, 1) : \int_0^1 [|-u''|^2 + (n^2 k(y)|u|)^2 + (|n|a(y)|u|)^2 + (c(y)|u|)^2] dy \leq C^{-1} \right\},$$

где $C > 0$ – постоянное число.

Следующие утверждения доказываются дословным повторением доказательств из работы [8].

Лемма 4.4. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедливы следующие включения:

$$\tilde{M}_{C^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_C, \quad \text{где } C > 0 - \text{постоянное число.}$$

Лемма 4.5. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$C^{-1} \tilde{d}_k \leq s_{k+1}(l_n^{-1}) \leq C \tilde{d}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

с постоянной $C > 0$, где s_{k+1} – сингулярные числа оператора l_n^{-1} , d_k , \tilde{d}_k , $\tilde{\tilde{d}}_k$ – поперечники множеств M , \tilde{M} , $\tilde{\tilde{M}}$ соответственно.

Лемма 4.6. Пусть выполнено условие *i*). Тогда верна оценка

$$\tilde{\tilde{N}}(C\lambda) \leq N(\lambda) \leq \tilde{N}(C^{-1}\lambda),$$

где $N(\lambda) = \sum_{s_{k+1}(l_n^{-1}) > \lambda} 1$, $\tilde{N}(\lambda) = \sum_{\tilde{d}_k > \lambda} 1$, $\tilde{\tilde{N}}(\lambda) = \sum_{\tilde{\tilde{d}}_k > \lambda} 1$, $C > 0$ – постоянное число.

Лемма 4.7. Пусть выполнено условие *i*). Тогда справедлива оценка

$$C_1 \lambda^{-1/2} \text{mes}(y \in (0, 1) : Q_n^*(y) \leq C_1 \lambda^{-1/2}) \leq N(\lambda) \leq C_2 \lambda^{-1} \text{mes}(y \in (0, 1) : K_n^*(y) \leq C_2 \lambda^{-1}),$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянное число.

Доказательство. Через $L_{2,k(y),a(y),c(y)}^2$ и $L_{2,k(y),a(y),c(y)}^1$ обозначим пространства, полученные пополнением $C_0^\infty[0, 1]$ относительно норм

$$\left| u, L_{2,k(y),a(y),c(y)}^2 \right| = \left(\int_0^1 \left[|u''|^2 + |n^2k(y) + ina(y) + c(y)|^2 |u|^2 \right] dy \right)^{1/2},$$

$$\left| u, L_{2,k(y),a(y),c(y)}^1 \right| = \left(\int_0^1 \left[|u'|^2 + |n^2k(y) + |n|a(y) + c(y)| |u|^2 \right] dy \right)^{1/2}.$$

Ясно, что $\tilde{M} \subset L_{2,k(y),a(y),c(y)}^2$, $\tilde{M} \subset L_{2,k(y),a(y),c(y)}^1$.

Теперь доказательство леммы 4.7 следует из лемм 4.5 и 4.6 и из результатов работы [5].

Доказательство теоремы 4.1. Из леммы 4.2 легко следует доказательство теоремы 4.1.

Доказательство теоремы 4.2. Из теоремы 4.1 следует, что

$$L^{-1}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n^{-1} f_n(y) \cdot e^{inx}, \quad f(x, y) \in L_2(\Omega). \quad (2)$$

Из (2) следует, что если s – сингулярная точка оператора L^{-1} , то s – является сингулярным числом одного из операторов l_n^{-1} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и, наоборот, если s – сингулярное число одного из операторов l_n^{-1} , то s – является сингулярной точкой оператора L^{-1} . Отсюда и из леммы 4.7 следует доказательство теоремы 4.2.

Цитированная литература

1. Моисеев Е.И. // ДАН СССР. 1978. Т. 242. С. 48–51.
2. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. Кальменов Т.Ш. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425.
4. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. М., 1979.
5. Отелбаев М. // Тр. матем. ин-та им. Стеклова. 1979. Т. 150. С. 265–305.
6. Молчанов А.М. // Тр. мос. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 169–200.
7. Бойматов К.Х. // Труды семинара им И.Г.Петровского. МГУ. 1981. № 7. С. 50–100.
8. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М. // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 1. С. 135–137.
9. Мынбаев К.Т, Отелбаев М. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М., 1988.
10. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
11. Муратбеков М.Б., Шыракбаев А.Б., Мауленова М. // Материалы Межд. научно-практ. конф. "Качественное знание и наука: Фактор конкурентоспособности в современной системе образования". Тараз, 2008. С. 156–160.
12. Исмагилов Р.С. // Функциональный анализ. 1968. Т. 2, № 2. С. 32–39.

Поступила в редакцию 22.06.2010г.

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ. I.

И. Н. ПАНКРАТОВА

Институт математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 irina.pankratova@math.kz

Определены условия, при которых система из конечного числа лучей является инвариантным относительно линейного оператора \mathbf{A} множеством в \mathbb{R}^n . Установлены свойства инвариантных подпространств, представляющих собой теоретико-множественное объединение систем лучей.

Введение. Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел \mathbb{R} ($n \geq 1$). При $n > 1$ рассмотрим отображение F пространства \mathbb{R}^n в себя следующего вида [1]:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Fy = \Phi(y)Ay, \quad (1)$$

где $\Phi(y)$ – скалярная функция, A – матрица n -го порядка. Пусть $\|\cdot\|$ – векторная норма в \mathbb{R}^n и X – множество вида:

$$X = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0, \|y\| \leq a, \}, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, \quad (2)$$

такое, что $F : X \rightarrow X$. Отображение F порождает на X динамическую систему (ДС) $\{F^m, X, Z^+\}$; X – фазовое пространство ДС, Zp – множество целых неотрицательных чисел. Зафиксируем в \mathbb{R}^n некоторый базис $\Delta = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Вектор $y = (\xi_1, \dots, \xi_n)' \in \mathbb{R}^n$ – неотрицательный (положительный), если в базисе Δ $\xi_i \geq 0$; ($\xi_i > 0$) для всех $i = \overline{1, n}$ (соответствующая запись $y \geq 0$ ($y > 0$)). Матрицу $A = (a_{ij})_1^n$ назовем неотрицательной (положительной) ([2], с. 332) и запишем $A \geq 0$ ($A > 0$), если $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$) для всех $i, j = \overline{1, n}$. Пусть $\|A\|$ – норма матрицы A , согласованная с векторной нормой пространства \mathbb{R}^n .

Условия инвариантности множества X относительно отображения F , т.е. выполнение включения $FX \subseteq X$, сформулируем в виде следующего предложения, доказательство которого не вызывает затруднений.

Теорема 1. Для того, чтобы множество X было инвариантным относительно отображения F , необходимо и достаточно выполнения условий: $\Phi(y) \geq 0$ непрерывна на X ; $A \geq 0$; $\|A\| \leq a\tilde{C}^{-1}$, где $\tilde{C} = \max_{y \in X} \Phi(y)\|y\|$.

Keywords: *Dynamical system, nonnegative matrix, invariant set, typical property*

2010 Mathematics Subject Classification: 74J05

© И. Н. Панкратова, 2010.

Изучение асимптотического движения ДС $\{F^m, X, Z^+\}$ приводит к необходимости определения инвариантных множеств системы, содержащих все ее нетривиальные ω -предельные множества. Эти инвариантные множества состоят из конечного числа отрезков лучей, циклически переходящих друг в друга под действием отображения F и названы циклами отрезков лучей конечного периода (см., например, [1]). Очевидно, что инвариантные множества ДС $\{F^m, X, Z^+\}$ расположены в инвариантных подпространствах линейного оператора \mathbf{A} , заданного матрицей $A \geq 0$. Целью работы является определение инвариантных множеств оператора \mathbf{A} в виде систем лучей, включая подпространства, являющиеся теоретико-множественным объединением систем лучей, изучение их свойств и определение условий их пересечения с фазовым пространством X системы $\{F^m, X, Z^+\}$. В части I статьи определяются условия, при которых система из конечного числа лучей является инвариантным относительно оператора \mathbf{A} множеством, и условия, при которых теоретико-множественное объединение систем лучей является инвариантным подпространством в \mathbb{R}^n .

1. Циклы лучей конечного периода. Замкнутое множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *клином*, если из $x, y \in K$ следует $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$ ($\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$). Клин K называется *конусом*, если $K \cap -K = \{0\}$. Примером клина, несовпадающего с подпространством, является множество

$$\text{con } y = \{\alpha y \mid y \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0\} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, y \neq 0), \quad (3)$$

которое называется *полупрямой* или *лучом* (конус размерности 1). Примером конуса является *положительный гипероктант*, определяемый относительно выбранного базиса Δ как множество

$$K_+ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0\}. \quad (4)$$

Положительный конус K_+ порождает в \mathbb{R}^n отношение порядка (\geq): $x \geq y$ ($y \leq x$) тогда и только тогда, когда $x - y \in K_+$. Пространство \mathbb{R}^n с выбранным конусом K_+ является *упорядоченным* пространством. Множество линейных операторов в \mathbb{R}^n есть $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, где $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – множество всех гомоморфизмов (непрерывных отображений) из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n ([3], с. 88). Множество $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ также является линейным пространством. Обозначим это пространство через $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$. Отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *монотонным*, если $Fx \geq Fy$ при $x \geq y$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$). Для монотонности произвольного линейного оператора \mathbf{A} необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{A}x \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$). Последнее означает, что конус K_+ инвариантен относительно оператора \mathbf{A} ([4], с. 355): $\mathbf{A}K_+ \subseteq K_+$. Множество монотонных линейных операторов обозначим через $\mathbf{K}(\mathbb{R}^n)$. Оно является конусом в $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ и порождает в $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ порядок \geq , т.е. пространство $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ также упорядочено. В пространстве \mathbb{R}^n с выделенным конусом K_+ монотонность линейного оператора \mathbf{A} , рассматриваемого как элемент пространства $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, равносильна его *неотрицательности*, т.е. $\mathbf{A} \geq 0$. Оператор $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^n)$, если и только если его матрица $A \geq 0$ ([4], с. 17). Отсюда следует, что отображение F вида (1) с матрицей $A \geq 0$ является монотонным, т.е. $F \geq 0$.

Обозначим через $K = \{K_1, \dots, K_p\}$ (теоретико-множественное) объединение ($K = \cup K_i$) клиньев (конусов) $K_i, i = \overline{1, p}$. Множество K есть *упорядоченная линейным оператором \mathbf{A} система* клиньев (конусов), если для любого $y \in K_i$ следует $\mathbf{A}y \in K_{i+1}, i = \overline{1, p-1}$. Следующие теоремы определяют один из видов множеств в \mathbb{R}^n , инвариантных относительно оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, заданного матрицей A .

Теорема 2. Пусть для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ ($y \neq 0$) существуют $r > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$A^p y = r y. \quad (5)$$

Тогда упорядоченные системы лучей

$$K = \{\text{con } y, \text{con } Ay, \dots, \text{con } A^{p-1}y\} \quad (6)$$

и $-\mathbf{K}$ (при $-\mathbf{K} \neq \mathbf{K}$) являются инвариантными множествами относительно оператора \mathbf{A} . Если p – наименьшее число в (5) и $p > 1$, то в системах \mathbf{K} и $-\mathbf{K}$ все лучи различны.

Доказательство. Отметим, что векторы $y, Ay, \dots, A^{p-1}y$ в общем случае не предполагаются линейно независимыми. Однако, $A^j y \neq 0$ для любого $j = \overline{1, p-1}$, т.к. в противном случае, полагая $A^j y = 0$ при некотором $1 \leq j \leq p-1$, имеем $A^m y = 0$ для всех $m \geq j$, в том числе, при $m = p$, что невозможно в силу (5). Равенство (5) означает, что

$$A^p y \in \text{con } y; \quad A^p(\beta y) \in \text{con } y \quad (\beta \geq 0, \beta \in \mathbf{R}).$$

Из этих равенств следует, что

$$\text{con } A^p y \equiv \text{con } y. \quad (7)$$

Обе части равенства (5) умножим слева на матрицу A^m , $m \in N$. В результате получим

$$A^p(A^m y) = r(A^m y), \quad (8)$$

т.е. вектор $A^m y$ является собственным вектором матрицы A^p , соответствующим собственному значению r . В частности, векторы $A^j y$, $j = \overline{0, p-1}$, являются собственными векторами матрицы A^p , соответствующими значению r . Возьмем произвольный $x \in \mathbf{K}$, $x \neq 0$. Тогда $x \in \text{con } A^j y$ при некотором j , $0 \leq j \leq p-1$, и его можно записать в виде $x = \alpha A^j y$ ($\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$). Если $0 \leq j < p-1$, то $Ax \in \text{con } \alpha A^{j+1} y \equiv \text{con } A^{j+1} y$ и $A(\beta x) \in \text{con } A^{j+1} y$; при $j = p-1$ согласно (7) $Ax \in \text{con } y$ и $A(\beta x) \in \text{con } y$ для любого $\beta \geq 0$, откуда следует, что

$$\mathbf{AK} = \mathbf{K}. \quad (9)$$

Согласно (8) луч $\text{con } A^j y$ инвариантен относительно оператора \mathbf{A}^p :

$$\mathbf{A}^p(\text{con } A^j y) = \text{con } A^j y, \quad j = \overline{0, p-1}. \quad (10)$$

Пусть p – наименьшее число, при котором для выбранного y имеет место (5). Докажем, что в системе (6) все лучи различны. Предположим противное, т.е. при некоторых i, j ($i > j$), $0 \leq i, j \leq p-1$, $\text{con } A^j y = \text{con } A^i y$. Тогда найдется число $\alpha > 0$ такое, что $A^j y = \alpha A^i y$. Положим $s = p-i$. Умножив обе части последнего равенства (слева) на матрицу A^s , с учетом (5) получим $A^{s+j} y = \alpha r y$, т.е. y является собственным вектором матрицы A^t , $t = s+j < p$, соответствующим собственному значению $\alpha r > 0$. Это противоречит тому, что p – наименьшее число, при котором для y существует $r > 0$ и имеет место (5). Равенства (5) и (9) сохраняются, если обе части этих равенств умножить на -1 , откуда следует утверждение теоремы для системы лучей $-\mathbf{K}$.

Теорема 3. Пусть для некоторого $y \in \mathbf{R}^n$ ($y \neq 0$) существуют $r > 0$ и $p \in N$ такие, что

$$A^p y = -r y. \quad (11)$$

Тогда упорядоченная система лучей

$$\mathbf{K} = \{\text{con } y, \text{con } Ay, \dots, \text{con } A^{2p-1} y\} \quad (12)$$

является инвариантным множеством относительно оператора \mathbf{A} . Если p – наименьшее число, при котором выполнено (11), то в системе \mathbf{K} все лучи различны.

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2. Выделим в \mathbf{R}^n инвариантное относительно оператора \mathbf{A} множество – цикл лучей конечного периода, введя следующее определение.

Определение 1. Луч $\text{con } y$ ($y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$) назовем периодическим периода $p \geq 1$ относительно оператора \mathbf{A} , если

$$A^p(\text{con } y) = \text{con } y \quad (13)$$

и при $p > 1$

$$\text{con } y \cap \text{con } A^j y = \{0\}, \quad j = \overline{1, p-1}. \quad (14)$$

Упорядоченную систему лучей $K = \{\text{con } y, \text{con } Ay, \dots, \text{con } A^{p-1}y\}$ назовем циклом лучей (оператора \mathbf{A}) периода p .

Вектор y луча $\text{con } y$ является образующим вектором цикла лучей K . Так как αy также является образующим вектором цикла лучей K , $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, можно полагать $\|y\| = 1$. Из условия (14) следует, что период есть наименьшее из всех p , при котором выполнено (13). Определим условия, при которых произвольная упорядоченная система лучей вида (6) оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, где $y \neq 0$, является циклом лучей периода p . Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Для того, чтобы упорядоченная система лучей K вида (6) была циклом лучей оператора \mathbf{A} периода $p \geq 1$, необходимо и достаточно, чтобы p было наименьшим числом, при котором для образующего вектора y системы K существует $r > 0$ и выполнено (5).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть упорядоченная система лучей K вида (6) есть цикл лучей периода $p \geq 1$. В (13) луч $A^p(\text{con } y)$ запишем в виде $\text{con } A^p y$, при этом (13) примет вид

$$\text{con } A^p y = \text{con } y.$$

Последнее равенство означает, что найдется число $r > 0$, при котором выполнено (5). Условие (14) при $p \neq 1$ означает, что все лучи цикла лучей K различны. Действительно, если предположить, что при некоторых i, j ($i > j$), $0 \leq i, j \leq p-1$, лучи $\text{con } A^i y$, $\text{con } A^j y$ пересекаются, то это означает, что

$$\text{con } A^i y = \text{con } A^j y.$$

Запишем это равенство в операторном виде следующим образом:

$$\mathbf{A}^i(\text{con } y) = \mathbf{A}^j(\text{con } y).$$

Действие оператора \mathbf{A}^s , где $s = p - i$, на обе части последнего равенства приводит с учетом (13) к следующему равенству

$$\text{con } y = \mathbf{A}^{j+s}(\text{con } y),$$

где $j + s < p$; это противоречит тому, что луч $\text{con } y$ периодический периода p . Таким образом, цикл лучей K согласно теореме 2 является инвариантным множеством, при этом число p является наименьшим, при котором выполнено (5).

Достаточность. Пусть для вектора $y \neq 0$ упорядоченной системы лучей K вида (6) имеет место (5) и число p является наименьшим. Тогда система (6) удовлетворяет условиям теоремы 2 и K – инвариантное множество. Из (5) следует выполнение (13). Так как все лучи системы (6) различны, то имеет место (14), т.е. K – цикл лучей периода p . \square

Векторы $A^j y$ ($y \neq 0$), $j = \overline{0, p-1}$, цикла лучей K вида (6) являются собственными векторами матрицы A^p , соответствующими собственному значению $r > 0$. Поэтому выполнение условий (13), (14) определения 1 для цикла лучей K эквивалентно выполнению следующих условий:

$$\mathbf{A}(\text{con } A^j y) = \text{con } A^{j+1} y, \quad \text{con } A^p y = \text{con } y, \quad j = \overline{0, p-1} \quad (y \neq 0), \quad (15)$$

и при $p > 1$

$$\text{con } A^i y \cap \text{con } A^j y = \{0\} \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{0, p-1}. \quad (16)$$

Для произвольной системы векторов цикл лучей оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ определяется следующей теоремой, доказательство которой основано на выполнении условий (15), (16).

Теорема 5. Пусть y_1, \dots, y_p – произвольная система ненулевых векторов в \mathbb{R}^n . Для того, чтобы упорядоченная система лучей $K = \{\text{con } y_1, \dots, \text{con } y_p\}$ была циклом лучей оператора \mathbf{A} периода $p \geq 1$, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\mathbf{A}(\text{con } y_j) = \text{con } y_{j+1}, \quad \mathbf{A}(\text{con } y_p) = \text{con } y_1, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (17)$$

и при $p > 1$

$$\text{con } y_i \cap \text{con } y_j = \{0\}, \quad i \neq j; \quad i, j \in \{1, \dots, p\}. \quad (18)$$

2. Инвариантные подпространства, содержащие циклы лучей. Пусть для ненулевых векторов $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ при некоторых $p \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ выполнено равенство (5). Тогда для векторов αy ($\alpha \in \mathbb{R}$), $y_1 + y_2$ равенство (5) также имеет место. Таким образом, векторы, удовлетворяющие (5), образуют линейное подпространство в \mathbb{R}^n размерности $\leq n$. Рассмотрим множества в \mathbb{R}^n (включая подпространства), которые содержат циклы лучей оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ конечного периода и представляют собой (теоретико-множественное) объединение циклов лучей. Так как циклы лучей являются инвариантными относительно оператора \mathbf{A} множествами, то их объединение инвариантно относительно оператора \mathbf{A} . Обозначим через $\text{Ker } \mathbf{A}$ инвариантное относительно оператора \mathbf{A} подпространство

$$\text{Ker } \mathbf{A} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}y = 0\} \quad (19)$$

– ядро оператора \mathbf{A} . Образующие векторы циклов лучей K вида (6) удовлетворяют равенству (5) при некотором r (> 0). Поэтому выделим в \mathbb{R}^n подпространства вида $\text{Ker}(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$. Определим условия, при которых подпространство $\text{Ker}(\mathbf{A}^p - r\mathbf{E})$ содержит циклы лучей оператора $\mathbf{A} \geq 0$ конечного периода. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случай, когда r представимо в виде:

$$r = \mu^p \quad (\mu \in \mathbb{R}) \quad (20)$$

(исключается случай комплексного числа μ , при котором имеет место (5)). Обозначим

$$\mathcal{P}(\rho) = \rho^p - \mu^p, \quad \mathcal{P}_1(\rho) = \rho - \mu, \quad \mathcal{P}_2(\rho) = \sum_{i=1}^p \mu^{p-i} \rho^{i-1}$$

– скалярные полиномы от $\rho, \mu \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^p - \mu^p \mathbf{E}, \quad (21)$$

$$\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mu \mathbf{E}, \quad (22)$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \mu^{p-1} \mathbf{E} + \mu^{p-2} \mathbf{A} + \dots + \mu \mathbf{A}^{p-2} + \mathbf{A}^{p-1}, \quad (23)$$

где \mathbf{E} – тождественный оператор, которому соответствует единичная матрица $E \geq 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть для оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$. Тогда имеет место разложение подпространства

$$\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) + \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \quad (24)$$

и, если в (21) $\mu \neq 0$, то сумма (24) прямая.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что при $p = 1$

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$$

и при $p > 1$ полином $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ разложим на множители:

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathcal{P}_1(\mathbf{A})\mathcal{P}_2(\mathbf{A}). \quad (25)$$

Для этого достаточно разделить полином $\mathcal{P}(\rho)$ на один из полиномов $\mathcal{P}_i(\rho)$, $i = 1, 2$. Из (25) следует разложение (24), причем

$$\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \quad (p = 1). \quad (26)$$

Пусть $\mu \neq 0$. Тогда при $p > 1$ полиномы $\mathcal{P}_1(\rho)$, $\mathcal{P}_2(\rho)$ взаимно просты. Действительно, при $p = 2$ полином $\mathcal{P}_2(\rho) = \rho + \mu$ имеет первую степень и нацело не делится на $\mathcal{P}_1(\rho)$ (и наоборот, $\mathcal{P}_1(\rho)$ нацело не делится на $\mathcal{P}_2(\rho)$). При $p > 2$

$$\mathcal{P}_2(\rho) = \mathcal{P}_1(\rho)\mathcal{P}_3(\rho) + p\mu^{p-1},$$

где

$$\mathcal{P}_3(\rho) = \rho^{p-2} + 2\mu\rho^{p-3} + \dots + j\mu^{j-1}\rho^{p-(j+1)} + \dots + (p-1)\mu^{p-2}.$$

Поэтому сумма в (24) прямая и $\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \cap \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \{0\}$. Вектор $y \in \text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$ представим в виде

$$y = x + z \quad (x \in \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}), z \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})), \quad (27)$$

и представление (27) единственно. \square

Перечислим свойства подпространств $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$ (их доказательство не составляет труда).

Свойство 1. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$. Для того, чтобы $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \neq \{0\}$.

Свойство 2. Для оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^n)$ при $\mu > 0$

$$\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \text{K}_+ = \{0\}. \quad (28)$$

Отметим, что любая гиперплоскость в \mathbb{R}^n делит пространство \mathbb{R}^n на три непересекающихся выпуклых множества: саму гиперплоскость и два открытых полупространства. Для произвольного оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ в общем случае $\dim \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \geq 1$, где $\dim L$ – размерность подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$. Рассмотрим случай $\dim \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = 1$. Тогда

$$\dim \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) - 1.$$

Значит, $\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ разделяет $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ на два открытых полуподпространства. Для оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^n)$ при $\mu > 0$ эти полуподпространства вида

$$\{y \in \text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \mid \mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = \tilde{y} \neq 0\} \cup \{0\} \quad (29)$$

обозначим через $\text{Se}^\pm \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ (от слова *semi - полу*). Из $y \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ ($y \neq 0$) следует, что $-y \in \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, т.е.

$$\text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = -\text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}), \quad (30)$$

и имеют место равенства

$$\text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \{0\}, \quad (31)$$

$$\text{Se}^\pm \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \{0\}, \quad (32)$$

из которых следует представление подпространства $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$:

$$\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cup \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cup \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A}). \quad (33)$$

Если

$$\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}_+ \neq \{0\},$$

то согласно лемме 2 конус \mathbf{K}_+ содержится в одном из множеств $\text{Se}^\pm \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Условимся считать в этом случае, что $\text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}_+ \neq \{0\}$ (соответственно $\text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}_+ = \{0\}$ и $\text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \cap -\mathbf{K}_+ \neq \{0\}$).

Лемма 1. При $\mu > 0$ множества в (33) инвариантны относительно оператора $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Множества $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$, $\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ инвариантны относительно оператора \mathbf{A} , как собственные подпространства операторов \mathbf{A}^p , $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, соответствующие собственным значениям μ^p и $\mathcal{P}_2(\mu) = p\mu^{p-1}$. Докажем инвариантность $\text{Se}^\pm \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Пусть $y \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ ($y \neq 0$). Согласно представлению (27)

$$Ay = Ax + Az = \mu x + Az.$$

Так как $x = \mathbf{P}_{\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A})} y$, то $x \neq 0$ (иначе в (27) $y \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$) и $x \in \text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, где через $\text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ обозначена часть подпространства $\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ такая, что $\text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subseteq \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Из $x \in \text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ и $z \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ следует, что $Ax \in \text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ и $Az \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, откуда следует, что $Ay \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, т.е. $\mathbf{A}\text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}) \subseteq \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$. Инвариантность множества $\text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ следует из (30). \square

Обозначим

$$\text{Ker}^- \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = -\text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \subseteq \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}).$$

Сформулируем основные свойства множеств $\text{Se}^\pm \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, $\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ в виде утверждения.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{P}(\mathbf{A})$, $\mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ – полиномы вида (21), (22), (23) соответственно с $\mu > 0$. Для множеств в представлении (33) справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \text{Ker}^+ \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \setminus \{0\} \quad (y \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}), y \neq 0), \quad (34)$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \text{Ker}^- \mathcal{P}_1(\mathbf{A}) \setminus \{0\} \quad (y \in \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}), y \neq 0), \quad (35)$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = 0 \quad (y \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})). \quad (36)$$

Доказательство. Для любого $y \in \text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$ обозначим

$$\tilde{x} = \mathcal{P}_2(\mathbf{A})y. \quad (37)$$

Согласно представлению (27) $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = \mathcal{P}_2(\mathbf{A})x + \mathcal{P}_2(\mathbf{A})z = \mathcal{P}_2(\mathbf{A})x$. Вектор x является собственным вектором оператора $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})$, соответствующим собственному значению $p\mu^{p-1}$, поэтому

$$\tilde{x} = \mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = \alpha x \quad (\alpha = p\mu^{p-1} > 0). \quad (38)$$

Значит, $\tilde{x} \in \text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$. При $x = 0$ ($y \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$) $\tilde{x} = 0$; при $x \neq 0$ \tilde{x} расположен в одном из множеств $\text{Ker}^\pm \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$, в котором расположен вектор x . \square

Пусть $y \in \text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$ ($y \neq 0$), где $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ – полином вида (21) с $\mu > 0$. Согласно теореме 2 период луча $\text{con } y$ меньше p (при $p > 1$), если p не является наименьшим числом, при котором выполнено (5); точнее, период в этом случае является делителем числа p . Поэтому в подпространстве $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$ в общем случае возможно существование циклов лучей одного и более, чем один, периодов $\leq p$. Для того, чтобы среди инвариантных подпространств $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A} \geq 0$ выделить подпространства, которые содержат циклы лучей, все или хотя бы почти все (по мере подпространства $\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A})$) имеющие один и тот же период, рассмотрим частный случай линейного оператора \mathbf{A} , заданного *неразложимой матрицей*

$A \geq 0$ индекса непримитивности n ([2], с. 334). Согласно общей теории неразложимая матрица $A \geq 0$ всегда имеет максимальное собственное значение $\lambda > 0$, которому соответствует собственный вектор $e > 0$ (можно полагать $\|e\| = 1$); других неотрицательных собственных векторов матрица A не имеет. Если A имеет h собственных чисел, по модулю равных λ , то эти числа все различны между собой и являются простыми корнями характеристического уравнения ([2], с. 334)

$$\rho^h - \lambda^h = 0, \quad 1 \leq h \leq n, \quad (39)$$

т.е. эти числа имеют вид

$$\lambda_j = \lambda \varepsilon^{j-1}, \quad j = \overline{1, h}, \quad (40)$$

где $\varepsilon = \exp(2\pi i/h)$, $i = \sqrt{-1}$. При $h = n$ все n собственных чисел матрицы A различны между собой и A с помощью матрицы перестановок приводима к "циклическому" виду ([2], с. 335)

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Теорема 8. Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица индекса непримитивности n и $\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \lambda^{n-i}\mathbf{E} + \lambda^{n-2}\mathbf{A} + \dots + \lambda\mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{A}^{n-1}$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \text{con } e \setminus \{0\} \quad (y \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A}), y \neq 0), \quad (42)$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in -\text{con } e \setminus \{0\} \quad (y \in \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A}), y \neq 0), \quad (43)$$

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = 0 \quad (y \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})) \quad (44)$$

и для почти всех (с точностью до множества нулевой меры) $y \in \mathbb{R}^n$ система лучей

$$\mathbb{K} = \{\text{con } y, \text{con } Ay, \dots, \text{con } A^{n-1}y\} \quad (45)$$

есть цикл лучей периода n .

Доказательство. Для матрицы A значение $\lambda > 0$ единственно. Из равенства $\mathbf{A}^n = \lambda^n \mathbf{E}$, где $\lambda^n = \prod_1^n a_j$, следует, что $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n - \lambda^n \mathbf{E} = 0$, т.е. $\mathcal{P}(\rho) = \rho^n - \lambda^n$ – аннулирующий многочлен оператора \mathbf{A} . Согласно разложению (25) $\mathcal{P}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$, $\mathcal{P}_2(\mathbf{A}) = \lambda^{n-i}\mathbf{E} + \lambda^{n-2}\mathbf{A} + \dots + \lambda\mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{A}^{n-1}$. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{P}(\mathbf{A})y = 0$, следовательно, в (33)

$$\text{Ker } \mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n. \quad (46)$$

Ввиду единственности собственного вектора e , соответствующего значению λ , (положим $\|e\| = 1$) подпространство $\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ является одномерным. Полагая в (38) $p = n$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$ имеем $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = n\lambda^{n-1}x$. Согласно (34) – (36), если $y \in \text{Se}^+ \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ ($y \neq 0$), то $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in \text{con } e \setminus \{0\}$; если $y \in \text{Se}^- \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ ($y \neq 0$), то $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y \in -\text{con } e \setminus \{0\}$, и для $y \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ $\mathcal{P}_2(\mathbf{A})y = 0$.

Обозначим через e_j собственный вектор матрицы $A \geq 0$, соответствующий собственному значению λ_j вида (40), $j = \overline{1, n}$, где $e_1 \equiv e$ ($\lambda_1 = \lambda$). Пусть $y \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор. Представим его в виде:

$$y = \sum_1^n \alpha_j e_j \quad (47)$$

(т.к. паре комплексно-сопряженных собственных значений соответствует пара комплексно-сопряженных собственных векторов матрицы A , то представление (47) вещественного вектора y всегда возможно). Согласно (47) вектор $A^m y$ запишется следующим образом:

$$A^m y = \lambda^m \sum_1^n \alpha_j \exp(2\pi i(j-1)m/n) e_j, \quad m \in N. \quad (48)$$

Если в представлении (47) все $\alpha_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то для любого $1 \leq m \leq n-1$ из (48) следует, что $A^m y \neq \lambda^m y$, т.к. множество $\{\exp(2\pi i m/n), m \in \mathbb{Z}^+\}$ содержит n различных чисел, которые одновременно равны единице только при m , кратных n . Следовательно, система лучей (45) с образующим вектором y является циклом лучей периода n . Если в представлении (47) $\alpha_{j_i} = 0$ для некоторых j_1, \dots, j_q , $q < n$, то y принадлежит одному или нескольким (инвариантным) собственным подпространствам матрицы A , соответствующим собственным значениям λ_j , $j \neq j_i$, $i = \overline{1, q}$, размерности $< n$. Тогда возможно существование чисел $p < n$, для которых в (48) $A^p y = \lambda^p y$, т.е. система лучей (6) с образующим вектором y из этих подпространств является циклом лучей периода $p < n$. Подпространство $\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ имеет размерность $n-1$, т.е. является множеством нулевой меры в пространстве \mathbb{R}^n . Для любого $z \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ согласно представлению (27) $z = \sum_2^n \alpha_j e_j$ и цикл лучей с образующим вектором z имеет период n или $< n$. Если в представлении вектора $z \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ все $\alpha_j \neq 0$ ($j = \overline{2, n}$), то множество $\{\exp(2\pi i m/n), m \in \mathbb{N}\}$ снова содержит n различных чисел, которые одновременно равны единице только при m , кратных n . Значит, система лучей (45) с образующим вектором z для почти всех (с точностью до множества нулевой меры относительно меры множества $\text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$) $z \in \text{Ker } \mathcal{P}_2(\mathbf{A})$ является циклом лучей периода n . Кроме того, подпространство $\text{Ker } \mathcal{P}_1(\mathbf{A})$ содержит циклы лучей периода 1. Отсюда получаем вторую часть утверждения теоремы. \square

Заключение. Основные результаты, полученные в статье, состоят в следующем. В пространстве \mathbb{R}^n выделены инвариантными относительно линейного оператора множества, состоящие из конечного числа попарно различных лучей – циклы лучей конечного периода. Определены условия, при которых система из конечного числа $p \geq 1$ лучей является циклом лучей периода p . Определены некоторые свойства инвариантного подпространства, являющегося теоретико-множественным объединением циклов лучей. Установлено, что для линейного оператора, заданного неразложимой неотрицательной матрицей индекса импримитивности n , для почти всех (по мере) $y \in \mathbb{R}^n$ циклы лучей с образующими векторами y имеют период n .

Цитированная литература

1. Панкратова И.Н. // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 1. С. 132–145.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
3. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М., 1969.
4. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М., 1985.

Поступила в редакцию 26.01.2011г.

УДК 531.36:534.1

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. Т. ТУРЕШБАЕВ

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата
120014 Кызылорда Айтеке Би, 29А aturesh@mail.ru

Рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел с двумя излучающими массами. Устанавливается, что при достаточно малом эксцентриситете e орбиты основных тел в окрестности компланарных точек могут существовать периодические движения с периодом, равным периоду вращения основных тел друг относительно друга. Доказывается, что в круговом варианте задачи, при равных массах основных тел, в окрестности начала координат возникают пространственные прямолинейные периодические движения.

Как известно, ограниченная фотогравитационная задача трех тел, также как и классическая задача, других интегралов, кроме интеграла Якоби, не имеет. Следовательно, по этой причине, исследование периодических движений вблизи точных частных решений системы дифференциальных уравнений фотогравитационной задачи является одной из актуальных проблем современной небесной механики. Приложения фотогравитационной задачи трех тел более убедительны и многочисленны, чем классическая задача. Особенно при изучении движения микрометеоритных частиц и частиц газопылевых облаков в гравитационно-репульсивном поле двойных звездных систем и космических аппаратов с солнечным парусом фотогравитационная задача является единственной их адекватной математической моделью.

1. Периодические движения частицы вблизи компланарных точек либрации в эллиптической задаче трех тел. В эллиптическом варианте задачи (когда орбиты звездной пары эллиптические) уравнения движения частицы во вращающейся вместе со звездами прямоугольной системе координат с началом в барицентре системы и осями Ox и Oy , расположенными в орбитальной плоскости звездной пары, имеют вид [1–2] (точка означает производную по истинной аномалии ν орбитального движения звездной пары, выполняющую роль времени):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (1.1)$$

где x, y, z – безразмерные, отнесенные к расстоянию $r = \frac{p}{(1+e \cos \nu)^{-1}}$ между звездами (p и e – фокальный параметр и эксцентриситет относительного орбитального движения звездной пары)

Keywords: *Periodic movements, a particle, points libration, a photogravitational circular problem of three bodies, a field of a double star, экцентриситет орбит, spatial and rectilinear movements*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F15

© А. Т. Турешбаев, 2010.

прямоугольные координаты частицы (координаты Нехвила), а W – силовая функция системы, равная

$$W = (1 + e \cos \nu)^{-1} [(x^2 + y^2 - z^2 e \cos \nu)/2 + Q_1(1 - \mu)/R_1 + Q_2\mu/R_2,$$

$$R_1 = [(x + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}, \quad R_2 = [(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Здесь μ и $1 - \mu$ – безразмерные массы звезд, отнесенные к их общей массе, а Q_1 и Q_2 – коэффициенты редукции их массы, представляющие отношения разности гравитационной и репульсивной сил к гравитационной силе. В ряде работ [1–3, 4] отмечалось, что в отличие от треугольных и коллинеарных точек либрации, существующих как в круговой, так и в эллиптической задаче трех тел, компланарные точки либрации существуют лишь в круговой задаче. Однако при достаточно малом эксцентриситете e орбит основных тел в окрестности компланарных точек могут существовать периодические решения с периодом, равным периоду вращения основных тел относительно друг друга.

Считая эксцентриситет орбиты e достаточно малым, разложим правые части системы (1.1) в ряды по степеням e и возмущений

$$\xi = x - x^*, \quad \eta = y - y^*, \quad \zeta = z - z^*,$$

где x^*, y^*, z^* – прямоугольные координаты компланарных точек либрации при $e = 0$. Тогда учитывая, что значения x^* и z^* удовлетворяют состоянию равновесия системы (1.1), получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= c_{xx}^* \xi + c_{\delta\sigma}^* \eta + c_{\delta z}^* \zeta + e c_{ex}^* + \dots, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= c_{xy}^* \xi + c_{yy}^* \eta + c_{yz}^* \zeta + e c_{ey}^* + \dots, \\ \ddot{\zeta} &= c_{xz}^* \xi + c_{yz}^* \eta + c_{zz}^* \zeta + e c_{ez}^* + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь точкой обозначена производная по истинной аномалии ν , а коэффициенты $\tilde{n}_{xx}^*, \dots, \tilde{n}_{ez}^*$ есть частные производные второго порядка от силовой функции W , умноженные на $(1 + e \cos \nu)^{-1}$ и взятые при $x = x^*, z = z^*, y = 0$ (в выражениях c_{ex}^*, c_{ey}^* и c_{ez}^* , кроме того, положено $e = 0$) и равные

$$\begin{aligned} c_{xy}^* &= c_{yz}^* = 0, \quad c_{yy}^* = (1 + e \cos \nu)^{-1}, \\ c_{xx}^* &= (1 + e \cos \nu)^{-1} \left\{ 1 + 3x^* \left[\left(\frac{x^* - x_1}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{x^* - x_2}{R_2} \right)^2 \right] \right\}, \\ c_{xz}^* &= (1 + \cos \nu)^{-1} \left\{ 3x^* z^* \left[\frac{x^* - x_1}{R_1^2} - \frac{x^* - x_2}{R_2^2} \right] \right\}, \\ c_{zz}^* &= (1 + \cos \nu)^{-1} \left\{ 1 + 3x^* \left[\left(\frac{z^*}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{z^*}{R_2} \right)^2 \right] - e \cos \nu \right\}, \\ c_{ex}^* &= c_{ey}^* = 0, \quad c_{ez}^* = -z^* \cos \nu. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Выпишем аналогично коэффициенты для круговой задачи, вычисленные при $e = 0$ как вторые частные производные от силовой функции W :

$$\begin{aligned} c_{xy}^* &= c_{yz}^* = 0, \quad c_{yy}^* = 1, \\ c_{xx}^* &= 1 + 3x^* \left[\left(\frac{x^* - x_1}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{x^* - x_2}{R_2} \right)^2 \right], \\ c_{xy}^* &= 3x^* z^* \left(\frac{x^* - x_1}{R_1^2} - \frac{x^* - x_2}{R_2^2} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$c_{zz}^* = 3x^* \left[\left(\frac{z^*}{R_1} \right)^2 - \left(\frac{z^*}{R_2} \right)^2 \right].$$

Сравнивая (1.4) с (1.5), видим, что справедлива запись в виде:

$$\begin{aligned} c_{xx}^* &= c_{xx} + e \varphi_{xx}(x^*, z^*, \cos \nu), \quad c_{xz}^* = c_{xz} + e \varphi_{xz}(x^*, z^*, \cos \nu), \\ c_{zz}^* &= c_{zz} + e \varphi_{zz}(x^*, z^*, \cos \nu), \quad c_{yy}^* = c_{yy} + e \varphi_{yy}(\cos \nu), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\varphi_{xx}, \dots, \varphi_{yy}$ представляют собой аналитические функции эксцентриситета e , а c_{xx}, \dots, c_{yy} даются выражениями (1.5).

Таким образом, уравнения (1.3) теперь могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \tilde{n}_{xx}\xi + c_{xz}\zeta + \Xi^* + e F_1(\xi, \eta, \zeta, \cos \nu), \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= c_{yy}\eta + H^* + e F_2(\xi, \eta, \zeta, \cos \nu), \\ \ddot{\zeta} &= c_{xz}\xi + c_{zz}\eta + Z^* + e F_3(\xi, \eta, \zeta, \cos \nu), \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь Ξ^* , H^* и Z^* – аналитические функции переменных ξ, η, ζ , разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка, а F_1, F_2, F_3 – 2π -периодические по ν и аналитические относительно e, ξ, η, ζ функции. Областью аналитичности функций $\Xi^*, H^*, Z^*, F_1, F_2, F_3$ относительно переменных ξ, η, ζ является некоторая окрестность начала координат.

Задача заключается в отыскании периодических движений частицы вблизи исследуемых положений относительного равновесия. Для решения этой задачи в правых частях дифференциальных уравнений (1.6) можно выделить некоторую группу членов ($eF_1, \dot{a}F_2, \dot{a}F_3$), которые при $e \ll 1$ можно считать малыми по сравнению с остальными членами. При $e = 0$ полученные выше уравнения обращаются в уравнения возмущенного движения компланарных точек либрации. Таким образом, согласно общей теории периодических решений систем с малым параметром [5] система (1.6) будет иметь 2π -периодическое решение, аналитическое по малому параметру e и обращающееся при $e = 0$ в тривиальное решение $\xi = \eta = \zeta = 0$, если ее характеристическое уравнение не имеет корней вида $\pm im$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Это решение можно искать как:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} e^k \xi_k(\nu), \quad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} e^k \eta_k(\nu), \quad \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} e^k \zeta_k(\nu), \quad (1.8)$$

где ξ_k, η_k, ζ_k и являются 2π -периодическими функциями истинной аномалии ν .

2. Пространственные прямолинейные периодические движения. В уравнениях (1.1) рассматривая случай равных масс $\mu = 1 - \mu = 0, 5$, будем искать их частное решение как:

$$x = \dot{x} = y = \dot{y} = 0, \quad z \neq 0.$$

При этом два первых уравнения системы (1.1) удовлетворяются тождественно. Тогда уравнение движения изучаемой частицы примет вид:

$$\ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{4(q_1 + q_2)z}{\sqrt{(1 + 4z^2)^3}}, \quad (2.1)$$

где $W = -\Pi = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{1 + 4z^2}}$ – силовая функция, соответствующая $\mu = 0, 5$.

Из (2.1) видно, что $z = 0$ соответствует состоянию равновесия системы, а само уравнение имеет очевидный первый интеграл:

$$\frac{1}{2}(\dot{z})^2 + \Pi(z) = h, \quad (2.2)$$

представляющий собой интеграл энергии, из которого мы находим

$$\dot{z} = \pm\sqrt{2(p - \Pi)}. \quad (2.3)$$

Потенциальная энергия $\Pi(z)$ в точке $z = 0$ при $q_1 + q_2 > 0$ имеет изолированный минимум. Нетрудно убедиться в том, что фазовые траектории частицы в достаточно малой окрестности положения равновесия (начала координат) представляют собой замкнутые кривые. Таким образом, движения, которые описывают частицы, являются периодическими. Следовательно, и все решения уравнения (2.1) в окрестности минимума потенциальной энергии будут периодическими.

Из (2.3) определим период

$$\tau = \int_0^\alpha \frac{\sqrt{1 + 4z^2}}{\sqrt{2[q_1 + q_2 + h\sqrt{1 + 4z^2}]}} dz, \quad (2.4)$$

где α корень уравнения $q_1 + q_2 + h\sqrt{1 + 4z^2} = 0$ относительно z .

Итак, полученное нами решение имеет место при условии $x = y = 0$. Однако теорема Ляпунова позволяет доказать существование периодических движений в окрестности начала координат, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Для этого надо быть уверенным в существовании голоморфного первого интеграла и в отсутствии у системы корней вида $\pm 2mi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Таким интегралом системы является

$$H = T - W = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \delta W + \dots = \bar{h}. \quad (2.5)$$

Теперь составим уравнения возмущенного движения в окрестности положения равновесия $x^* = y^* = z^* = 0$. Для этого в системе (1.1) полагая (при $e = 0$)

$$\xi = \delta - \delta^*, \quad \eta = \sigma - \sigma^*, \quad \zeta = z - z^*,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0 z + \dots, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 z + \dots, \\ \ddot{z} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_0 z + \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где индекс "0" означает результат подстановки $x = y = z = 0$. Вычислим вторые производные (все смешанные равны нулю):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 x &= -c_1 = 1 + 8(q_1 + q_2), \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 x &= -c_2 = 1 - 4(q_1 + q_2), \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_0 x &= -c_3 = -4(q_1 + q_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь c_1, c_2, c_3 – коэффициенты устойчивости.

Тогда уравнение возмущенного движения системы в вариациях имеет вид:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 8(q_1 + q_2))x = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - (1 - 4(q_1 + q_2))y = 0, \quad (2.8)$$

$$\ddot{z} + 4(q_1 + q_2)z = 0.$$

Характеристическое уравнение системы равно

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - (1 + 8(q_1 + q_2)) & -2\lambda & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1 - 4(q_1 + q_2)) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4(q_1 + q_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

или

$$\lambda^4 + 2(1 - 2a)\lambda^2 + 1 + 4a - 32a^2 = 0,$$

$$\lambda^2 + 4a = 0,$$

где $a = q_1 + q_2$, $q_1, q_2 \in (-\infty, 1]$.

Как видим из (2.9), при определенных значениях параметров q_1 и q_2 система может допускать пару чисто мнимых простых корней. Следовательно, условия теоремы Ляпунова [6], гарантирующие существование периодических по t , аналитически зависящих от одного параметра (начального отклонения, например, величины x) решений выполнены.

Цитированная литература

1. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. // Письма в Астрон. журн. 1983. Т. 9, № 7. С. 432–435.
2. Kunitsin A.L., Tureshbaev A.T. // Celest. Mech. 1985. V. 35. P. 105–112.
3. Турешбаев А.Т. // Письма в Астрон. журн. 1986. Т. 12, № 9. С. 722–725.
4. Лукьянов Л.Г. // Астрон. журн. 1988. Т. 65, № 2. С. 422–432.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.
6. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1981.

Поступила в редакцию 14.07.2010г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.956

2010 MSC: 35R12

Aldashev S.A. **Ill-posedness of a mixed problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 4 – 12.

In the paper a mixed problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations is studied. We show that the homogeneous problem has infinitely many solutions, while the non-homogeneous problem is solvable non-uniquely.

References – 10.

УДК: 517.956

2010 MSC: 35R12

Алдашев С.А. **Көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге аралас есептің қисынды еместігі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 4 – 12.

Мақалада көп өлшемді гиперболо-параболалық теңдеулерге аралас есептің шешімдерінің көп екендігі дәлелденген. Бір текті есептің сансыз көп шешімі бар екендігі, бір текті емес есеп бір қатарлы емес шешімділігі көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 10.

УДК: 517.925.5:519.216

2010 MSC: 34K29, 60H10

Beibitbaeva A.E., Tleubergenov M.I. **On the inverse stochastic problem with indirect control** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 13 – 18.

Two inverse problems in the class of stochastic differential Ito's equations by given properties of motion, dependent from partial variables, and with the control by first derivative (problem 1) and with the control by second derivative (problem 2) are considered. The set of regulator's equations, which ensures the sufficient conditions of existence of given integral manifold is defined in these problems.

References – 5.

УДК: 517.925.5:519.216

2010 MSC: 34K29, 60H10

Бейбітбаева А.Е., Тілеубергенов М.Ы. **Тікелей емес басқарумен кері стохастикалық есебіне** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 13 – 18.

Бірінші туындысымен (1 есеп) және екінші туындысымен (2 есеп) басқарылатын берілген қасиеттері бойынша айнымалы бөлігіне тәуелді Ито типтес стохастикалық дифференциалды теңдеулер класында қалпына келтіру есебі қарастырылады. Бұл есептерде берілген интегралды көпбейненің бар болуының жеткілікті шарттарын қамтамасыз ететін регулятор теңдеулерінің басқару жиыны анықталады.

Әдебиеттер тізімі – 5.

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Beketaeva A.O. **A spatial supersonic air flow with Jet cross injection** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 19 – 27.

The interaction problem of the supersonic free flow with a jet cross injection through a round hole on a wall is numerically simulated. The governing equations are the system of Navier-Stokes equations in 3D case. The turbulent dynamic viscosity coefficient was determined by Baldwin-Lomax model. Comparison of results of numerical experiments of flat and spatial problems perpendicular Jet injection in a supersonic stream is made. Additional features of a three-dimensional flow of a round stream are revealed, reduction of intensity of jumps of consolidation and pressure distribution by a wall as a result of a lateral overflowing of a running stream in particular is shown.

References – 14.

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Бекетаева А.О. **Көлденең ағыншадан үрленетін кеңістіктегі дыбыс жылдамдығынан жоғары газды сандық зерттеу** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 19 – 27.

Турбуленттіліктің Болдуин-Ломакс алгебралық моделі арқылы тұйықталған үш өлшемді Навье-Стокс теңдеулер жүйесіне негізделген дөңгелек ағыншаны орағытудың ерекшеліктері зерттелген. Жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағысқа көлденең жіберілген ағыншаның жазықтық және кеңістік есептерінің алынған шешімдері салыстырылған. Үш өлшемді ағыстың қосымша ерекшеліктері анықталған - ағынның жанынан орағыту әсерінен төменгі шекарадағы қысым мәндерінің төмендеуі көрсетілген.

Әдебиеттер тізімі – 14.

УДК: 517.9

2010 MSC: 42A10

Bilal Sh., Siirbaev E.D. **About the boundedness and separation of the operator Sturm-Liouville** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 28 – 36.

Necessary and sufficient conditions for boundedness and separation of the operator Sturm-Liouville are obtained.

References – 3.

УДК: 517.9

2010 MSC: 42A10

Билал Ш., Сийрбаев Е.Д. **Штурм–Лиувиль операторының шектелгендігі мен бөліктенгіштігі туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 28 – 36.

Штурм–Лиувиль операторының шектелгендігі мен бөліктелгендігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

Әдебиеттер тізімі – 3.

УДК: 517.51

2010 MSC: 42C10, 46E25

Bimendina A.U., Smailov E.S. **The unimprovability of the embedding theorem of different metrics for classes $E_{p\theta}(\lambda)$ in Lorentz space by weak metric parameter** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 37 – 46.

In the work the necessary and sufficient condition ensuring the embedding of the function classes $E_{p\theta}(\lambda)$, defined by means of Price multiplication system, in Lorentz space $L_{p\tau}[0, 1]$ by weak metric parameter is considered provided that $1 < p < +\infty, 1 < \tau < \theta < +\infty$.

References – 23.

УДК: 517.51

2010 MSC: 42C10, 46E25

Бимендина А.У., Смаилов Е.С. $E_{p\theta}(\lambda)$ кластарының Лоренц кеңістігіне әлсіз метрикалық параметрі бойынша енгізілуінің жақсартылмайтын шарты // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 37 – 46.

Жұмыста $1 < p < +\infty, 1 < \tau < \theta < +\infty$ шарттары орындалған жағдайда мультипликативті Прайс жүйесі арқылы анықталған $E_{p\theta}(\lambda)$ функциялар класының $L_{p\tau}[0, 1]$ Лоренц кеңістігіне әлсіз параметрі бойынша енгізілуінің қажетті және жеткілікті шарты қарастырылған.

Әдебиеттер тізімі – 23.

УДК: 517.968.7

2010 MSC: 45K05, 35L20

Kabdrakhova S.S. **Criterion of correct solvability semiperiodical boundary value problem for linear hyperbolic equation** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 47 – 51.

Necessary and sufficient conditions of correct solvability of semiperiodical boundary value problem for linear hyperbolic equation with two independent variables are received.

References – 4.

УДК: 517.968.7

2010 MSC: 45K05, 35L20

Кабдрахова С.С. **Сызықты гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің корректілі шешілімділігінің нышаны** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 47 – 51.

Екі тәуелсіз айнымалылы сызықты гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есептің корректілі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Kamalova G.A., Ramazanova G.I., Ussenova T.M. **Numerical calculation of the plane turbulent multicomponent flow of gas with solid particles in the channel** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 52 – 57.

By the numerical model of the plane subsonic turbulent flow of a mixture (multicomponent gas - solid particles) at the presence of dynamic and thermal interactions is calculated of an production of volatile gases from particles. The influences of the relation of the temperature of the mixture and the temperature of the secondary air on the production of volatile gases are studied.

References – 11.

УДК: 532.526

2010 MSC: 76F40

Камалова Г.А., Рамазанова Г.И., Усенова Т.М. **Каналдағы қатты түйіршіктермен берілген газдың екі өлшемді турбуленттік көпкомпонентті ағынын сандық есептеу** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 52 – 57.

Динамикалық және жылулық өзара әсерлермен берілген аэроқоспаның (көпкомпонентті газ-қатты түйіршіктер) екі өлшемді жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан төмен турбулентті ағынның сандық моделінің көмегімен қатты түйіршіктерден ұшпалы газдардың бөлініп шығу есептері жүргізілді. Газ және дисперстік түйіршіктердің арасындағы турбулентті ағындардың өзара әсерлері зерттелді. Үрленетін аэроқоспаның және қосымша ауаның температуралары қатынасының ұшпалы газдар бөлінуіне әсері зерттелді.

Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 517.958

2010 MSC: 34A45

Kulakhmetova A.T., Kharin S.N., Shpady Yu.R. **Mathematical model of electro-arc erosive process** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 58 – 69.

In the work mathematical models describing each of four mechanisms of erosion and methods of solution of corresponding boundary value problems for partial equations in domains with unknown mobile boundaries are presented. Temperature fields and erosive performances are defined as functions of conditions of switching and properties of contact material. Results of calculations are compared with experimental data.

References – 24.

УДК: 517.958

2010 MSC: 34A45

Құлахметова А.Т., Харин С.Н., Шпади Ю.Р. **Электродөңесті эрозиялық процесстердің математикалық сұлбесі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 58 – 69.

Жұмыста эрозияның төрт тетігінің әрқайсысын өрнектейтін математикалық сұлбе және белгісіз жылжымалы шекаралы облысында дербес туындылы теңдеулер үшін сәйкес шеттік есептерді шешу ұсынылады. Температуралық өріс және эрозиялық сыпаттамалар коммутация режимдері мен түйістік материалдар қасиеттерінің функциясы ретінде анықталды. Есептеудің нәтижелері тәжірибелік берілімдермен салыстырылады.

Әдебиеттер тізімі – 24.

УДК: 517.956.226

2010 MSC: 35J25, 35J70

Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Shyrakbaev A.B. **The estimations of the spectrum of semiperiodic problem Dirihlet for the one class the degenerating elliptic equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 70 – 79.

In the work bilateral estimations for eigenvalue and singular numbers of a semiperiodic problem of Dirihlet for the degenerating the elliptic equations are obtained.

References – 12.

УДК: 517.956.226

2010 MSC: 35J25, 35J70

Мұратбеков М.Б., Мұратбеков М.М., Шырақбаев А.Б. **Азынған эллипстік теңдеулердің бір класы үшін жартылайпериодты Дирихле есебінің спектрінің бағалаулары** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 70 – 79.

Жұмыста азынған эллипстік теңдеулер үшін жартылайпериодты Дирихле есебінің өзіндік және сингулярлық сандардың екі жақты бағалаулары алынған.

Әдебиеттер тізімі – 12.

УДК: 517.98

2010 MSC: 74J05

Pankratova I.N. **Invariant Sets of Nonnegative Linear Operators. I.** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 80 – 88.

Conditions under which the system of a finite number of rays is an invariant set with respect to linear operator in R^n are established. Properties of invariant space which is a set-theoretic union of systems of rays are stated.

References – 4.

УДК: 517.98

2010 MSC: 74J05

Панкратова И.Н. **Теріс емес сызықты операторлардың инварианттық жиындары** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 80 – 88.

Ақырлы сәулелерден тұратын жүйенің сызықты операторға қарағанда R^n -де жиын болатынын көрсететін шарттар анықталды. Жиындық теориялық бірігу болатын инварианттық кеңістікшелердің қасиеттері тағайындалды.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 531.36:534.1

2010 MSC: 70F15

Tureshbaev A.T. **On periodic movements in photogravitational restricted problem of three bodies** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 4 (38). P. 89 – 93.

A photogravitational limited problem of three bodies with two radiating mass is considered. It is established that for small eccentricity of main bodies orbits in a vicinity coplanar points can exist periodic movements with the period equal to the period of rotation of the main bodies around each other. It is proved that in a circular type of the problem, for equal weights of main bodies, there are spatial rectilinear periodic movements in a vicinity of the beginning of co-ordinates.

References – 6.

УДК: 531.36:534.1

2010 MSC: 70F15

Турешбаев А.Т. **Шектелген фотогравитациялық үш дене есебінің периодты қозғалыстары туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 4 (38). Б. 89 – 93.

Жарық шығаратын екі негізгі денеден тұратын фотогравитациялық шектелген үш дене есебі қарастырылады. Негізгі екі денелер орбитасының эксцентриситеті өте аз мәні үшін копланарлық нүктелер төңірегінде периодты қозғалыстар болатындығы көрсетілді. Негізгі денелердің массалары өзара тең болғанда және олар шеңбер бойымен қозғалған жағдайда координаттар басы арқылы өтетін кеңістіктік тұзусызықты периодты қозғалыстар болатындығы дәлелденген.

Әдебиеттер тізімі – 6.

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, логика, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

В соответствии с требованиями журнала статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Poleмические, описательные и методические статьи не публикуются. Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики МОН РК, их реферируют КазИНТИ (Казахстан), Реферативный журнал "Математика" ВИНТИ (Россия) и Zentralblatt Math. (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 12 журнальных страниц, краткие сообщения объемом до 4 страниц. Статьи объемом более 12 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на русском и английском языках.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе \LaTeX -2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде .tex и .pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, matzhurnal@gmail.com. Статья должна быть подписана всеми авторами.

Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов в алфавитном порядке, организацию, от которой направлена статья, ее адрес, а также электронные адреса авторов.

На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. На отдельном листе также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

[1]. Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О. *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*. М., "Наука", 1988. (для монографий)

[2]. Женсыкбаев А. А. *Монослайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы*, Успехи матем. наук. 1981, Т. 36, вып. (или №) 4, С. 107 – 159.

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

Адрес редакции "Математического журнала"

Институт математики МОН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32, 8 (727) 2 72 43 93, факс: 8(727) 2 72 70 24,

e-mail: zhurnal@math.kz, matzhurnal@gmail.com, web-site: <http://www.math.kz>

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 4 (38) 2010

Главный редактор:

М.Т.Дженалиев

Заместители главного редактора:

Д.Б.Базарханов, М.И.Тлеубергенов

Редакционная коллегия:

Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, Н.К.Блиев, В.Г.Войнов,
Н.Т.Данаев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, Т.Ш.Кальменов,
А.Ж.Найманова, М.О.Отелбаев, И.Т.Пак, М.Г.Перетяцкий, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
Ш.А.Балгимбаева (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.311
тел.: 8(727)2-72-43-93, zhurnal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 20.05.2011г.

Тираж 300 экз. Объем 100 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы

ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81

Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50

e-mail: print_express@bk.ru