ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2007 том 7 № 1 (23)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 1 (23) 2007

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 7, № 1 (23), 2007

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 5 – 14*

УДК 517.518

О ПОРЯДКАХ M- ЧЛЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова
100024 г. Караганда ул. Университетская, 28 akishev@kargu.krg.kz

В статье изучен порядок M- членного приближения классов Бесова в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_m) \in R^m$, $\quad I^m = [0, 2\pi)^m$, $\quad m \in N$. Через $L_{\bar{p}}(I^m)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу, имеющих 2π – период по каждой переменной функций $f(\bar{x})$, для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int_0^{2\pi}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}|f(\bar{x})|^{p_1}dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}dx_m\right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$ (см [1],[2]);

$\overset{\circ}{L}_{\overline{p}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L_{\overline{p}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0, \ \ \forall j = 1, ..., m.$$

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in Z^m} \in l_{\bar{p}}$, если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in Z^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left\{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\bar{n}}|^{p_1}\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Keywords: $M-$ *term approximation, Lebesgue space, Besov's class*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Пусть даны векторы $\bar{r}=(r_1,...,r_n)$, $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $1\le\theta_j,p_j<+\infty$, $r_j>0$, $j=1,...,m.$. Рассмотрим класс О.В. Бесова

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}=\left\{f\in\overset{\circ}{L}_{\overline{p}}\left(I^m\right):\|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}}=\|f\|_{\overline{p}}+\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\left\|\delta_{\overline{s}}\left(f\right)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\overline{s}\in Z^m_+}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}\le1\right\}.$$

Здесь и в дальнейшем

$$\delta_{\overline{s}}\left(f,\overline{x}\right)=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}\left(f\right)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^{m}y_jx_j$, $\rho(\bar{s})=\{\bar{k}=(k_1,...,k_m)\in\mathbb{Z}^m:\quad 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},j=1,...,m\}$, $a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\bar{n}\in Z^m}$.

Пусть X,Y – нормированные пространства $2\pi-$ периодических функций многих переменных. Для функции $f\in X$ M - членным наилучшим приближением называется величина (см. [3],[4],[5])

$$e_M(f)_X=\inf_{\bar{k}^j,b_j}\|f-\sum_{j=1}^{M}b_je^{i\langle\bar{k}^j,\bar{x}\rangle}\|_X,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$ – система векторов $\bar{k}^j=(k^j_1,...,k^j_m)$ с целочисленными координатами, b_j – произвольные коэффициенты.

Если F – некоторый функциональный класс, то положим

$$e_M(F)_X=\sup_{f\in F}e_M(f)_X.$$

В случае $X=L_2$ величина $e_M(f)_{L_2}$ для функции одной переменной была введена С. Б. Стечкиным [3] при формулировке критетрия абсолютной сходимости рядов Фурье. Оценки порядка величины $e_M(f)_X$ исследовали Р.С. Исмагилов [4], В.Е. Майоров [5] при $X=L_p$ (одномерный случай), Э.С. Белинский [6] (многомерный случай когда, $Y=L_q(I^m),X=L_p(I^m),F=W^r_p$), В.Н. Темляков [7] ($Y=L_q(I^m),F=H^r_p$), А.С. Романюк [8], [9], Р. Девор , В.Н. Темляков [10] , В.Н. Темляков [11] при $Y=L_q(I^m),F=B^r_{p,\theta}$, Б.С. Кашин , В.Н. Темляков [12] ($X=L_1$) .

Отметим, что в случае $X=L_2$ оценку величины $e_M(f)_X$ по ортонормированным системам установил Б.С. Кашин [13].

Цель настоящей статьи – изучение порядка M – членного приближения классов Бесова в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Сначала приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Положим

$$Y^m(n,\bar{\gamma})=\{\bar{s}=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+:\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle\ge n\},$$

$$Y^m_1(n,\bar{\gamma})=\{\bar{s}=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+:\sum_{j=1}^{l}s_j\gamma_j\ge n-\sum_{l+1}^{m}s_j\gamma_j>0\},$$

$$Y^m_2(n,\bar{\gamma})=\{\bar{s}=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+:s_1,...,s_l>0\quad,\sum_{j=l+1}^{m}s_j\gamma_j\ge n\}.$$

Через $C(p,q,r,y)$ обозначим положительные величины зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах.

Запись $A\left(y\right)\asymp B\left(y\right)$ означает, что существуют положительные C_1, C_2 такие , что $C_1\cdot A\left(y\right)\le B\left(y\right)\le C_2\cdot A\left(y\right)$.

Лемма 1 ([14]). *Пусть дано целое неотрицательное число $l < \nu \le m$ и $\overline{\gamma} = (\gamma_{l+1}, ..., \gamma_m)$, $1 = \gamma_{l+1} = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le ... \le \gamma_m$ и $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = l+1, ..., m$, $\overline{\theta} = (\theta_{l+1}, ..., \theta_m)$. Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha\langle \bar{s}, \overline{\gamma}\rangle} \right\}_{\bar{s} \in Y^{m-l}(\overline{\gamma}, n)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма 2 ([14],[15]). *Пусть дано целое неотрицательное число $\bar{\tau} = (\tau_{l+1}, ..., \tau_m)$, $1 \le \tau_j < +\infty)$, $j = l+1, ..., m$ и $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ – характеристическая функция множества $\varkappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \ \ \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle = n\}$. Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ \chi_{\varkappa(n)}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m} \frac{1}{\tau_j}}.$$

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0, \kappa > 0$, $0 < \theta_j < +\infty, j = 1, ..., m$, $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', ..., \gamma_m')$, $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_m)$, $\gamma_j' = \tilde{\gamma}_j = 1, j = 1, ..., \nu$ и $\tilde{\gamma}_j < \gamma_j', j = \nu+1, ..., m$. Тогда*

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \le C(m, \alpha, \kappa, \theta) 2^{n\alpha\kappa} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Доказательство. Пусть $m = 2$. Тогда

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} = \left\{ \sum_{s_2=1}^{\frac{\alpha n}{\gamma_2'}} \left[\sum_{s_1=1}^{\alpha n - s_2\gamma_2'} \left(2^{\kappa\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Так как $\kappa > 0, \tilde{\gamma_1} = \gamma_1' = 1$, то

$$\sum_{s_1=1}^{\alpha n - s_2\gamma_2'} 2^{\kappa s_1 \tilde{\gamma_1}\theta_1} \le C(\theta, \kappa, \gamma) 2^{\kappa\theta_1(\alpha n - s_2\gamma_2')}.$$

Поэтому учитывая, что $\tilde{\gamma_2} - \gamma_2'$ будем иметь

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \le C(\theta, \kappa, \gamma) 2^{\alpha n} \left\{ \sum_{s_2=1}^{\frac{\alpha n}{\gamma_2'}} 2^{\kappa s_2\theta_2}(\tilde{\gamma_2} - \gamma_2') \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \le C(\theta, \kappa, \gamma) 2^{\alpha n}.$$

Этим доказано, что утверждение леммы верно при $m = 2, \nu = 1$. В случае $m > 2$ методом математической индукции можно убедиться в справедливости леммы как в [14],[15].

Замечание 1. *В случае $\theta_1 = ... = \theta_m$ лемма 3 доказана В.Н. Темляковым [7].*

Лемма 4. *Пусть $2 < q_j < +\infty, j = 1, ..., m$. Тогда для всякого тригонометрического полинома $P(\Omega_N)$ и для любого натурального числа $M < N$ найдется тригонометрический полином $P(\Omega_M)$, для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Omega_N) - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \le C_1(NM^{-1})^{\frac{1}{2}} \|P(\Omega_N)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$. Доказательство этой леммы следует из соответствующей леммы [8].

Теорема 1._Пусть_ $\bar{q}=(q_1,...,q_m)$, $1<q_j<\infty$ $j=1,...,m$, $\beta=min\{q_1,...,q_m,2\}$ _Тогда для любой функции_ $f\in L_{\bar{q}}(I^m)$ _имеет место неравенство_

$$\|f\|_{\bar{q}}\leq C(q,m)\left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{q}}^{\beta}\right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Эта теорема доказана в [16]. В случае $\beta=2$ ранее она доказана в [15].

Теперь изложим основные результаты статьи.

Теорема 2._Пусть_ $1\leq p_j<+\infty$, $j=1,...,m,\bar{p}=(p_1,...,p_m)$. _Для любой функции_ $f\in L_{\bar{p}}(I^m)$ _элемент_ $M-$ _членного наилучшего приближения существует._

Теорема 2 доказывается методом математической индукции по M, как в случае $p_1=...=p_m$ [11]. Далее положим $y_+=\max\{0,y\}$.

Теорема 3. _Пусть_ $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$, $\overline{r}=(r_1,...,r_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $1\leq p_j\leq 2<q_j$, $j=1,...,m$, $1\leq\tau_j<+\infty$, $0<r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}=...=r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu}<r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}}\leq ...\leq r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$.

Тогда

$$1)e_M\left(B_{\overline{p},\bar{\tau}}^{\overline{r}}\right)_{\overline{q}}\leq M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}$$

если $r_j>\frac{1}{p_j},j=1,...,m$.

2) Если $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j},q_j<\tau_j,j=1,...,m$, _то_

$$e_M\left(B_{\overline{p},\bar{\tau}}^{\overline{r}}\right)_{\overline{q}}\leq M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{q_1^{'}}{q_1}\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}}.$$

3) Если $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q}<r_j<\frac{1}{p_j},j=1,...,m,\tau\leq q$, _то_

$$e_M\left(B_{\overline{p},\bar{\tau}}^{\overline{r}}\right)_{\overline{q}}\leq M^{-\frac{q}{2}\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(q-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{q^{'}}{q}\frac{1}{\tau^{'}}\right)}.$$

Доказательство. Пусть $f\in B_{\overline{p},\bar{\tau}}^{\overline{r}}$. Для произвольного натурального числа M найдется натуральное число n такое, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$. Приближающий полином $P(\Omega_M,\bar{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M,\bar{x})=\sum_{\langle\bar{s},\overline{\gamma^{'}}\rangle<n}\delta_{\overline{s}}\left(f,\bar{x}\right)+\sum_{n\leq\langle\bar{s},\overline{\gamma^{'}}\rangle<\alpha n}P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x}),\tag{1}$$

где $\bar{\gamma}^{'}=(\gamma_1^{'},...,\gamma_m^{'}),\gamma_1^{'}=\gamma_1=...=\gamma_\nu^{'}=\gamma_\nu=1$, $1<\gamma_j^{'}<\gamma_j,j=\nu+1,...,m$, $\gamma_j=\left(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}\right)\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1},j=1,...,m$.

Полиномы $P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})$ будут построены для каждого блока $\delta_{\overline{s}}\left(f,\bar{x}\right)$ согласно лемме 3, а число $\alpha>1$ будет выбрано в процессе построения.

Предположим, что искомый полином построен. Тогда в силу равенства (1), теоремы О.В. Бесова [17] и неравенства Минковского будем иметь

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{\bar{q}}\leq C(q)\left\{\left\|\left(\sum_{n\leq\langle\bar{s},\overline{\gamma^{'}}\rangle<\alpha n}|\delta_{\overline{s}}\left(f,\bar{x}\right)-P(\Omega_{N_{\bar{s}}},\bar{x})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\bar{q}}+\left\|\sum_{\langle\bar{s},\overline{\gamma^{'}}\rangle\geq\alpha n}\delta_{\overline{s}}\left(f,\bar{x}\right)\right\|_{\bar{q}}\right\}=$$

$$=C(q)\cdot\{J_1(f)+J_2(f)\}.\tag{2}$$

Оценим $J_2(f)$. Из теоремы 1 [18] нетрудно получить

$$\|f\|_{\bar{q}} \leq C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{q}}}.$$

Пользуясь этим неравенством, получим

$$J_2(f) \leq C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{q}}} = C(p,q)J_3(f), \tag{3}$$

где $Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}') = \left\{ \bar{s} \in Z_+^m : \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle \geq \alpha n \right\}$.

Для оценки $J_3(f)$ рассмотрим различные случаи. Пусть $1 \leq \tau_j \leq q_j, j = 1, ..., m$. Тогда в силу неравенства Иенсена (см. [1], с. 125)

$$\left(\sum_k |a_k|^{\beta_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\beta_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1}}, 0 < \beta_1 \leq \beta_2 < +\infty. \tag{4}$$

Учитывая $\gamma_j' \leq \gamma_j$, имеем

$$J_3(f) \leq C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq$$

$$\leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\overline{p}} \cdot 2^{-\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle}(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}) \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{q}}} \times$$

$$\times 2^{-\alpha n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \|f\|_{B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}} \tag{5}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $\tau_j \leq q_j, j = 1, ..., m$.

Пусть $q_j < \tau_j, j = 1, ..., m$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{\tau_j}{q_j} > 1$ и лемму 1, будем иметь

$$J_3(f) \leq C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}\right)} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\epsilon}}} \leq C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\epsilon_j}} \leq$$

$$\leq C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{6}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, где $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, ..., \epsilon_m)$, $\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j}, j = 1, ..., m$.

Из неравенств (3), (5), (6) следует, что

$$J_2(f) \le C(p,q,m) 2^{-\alpha n (r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j})} \tag{7}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$.

Теперь оценим $J_1(f)$. Поскольку $q_j \in (2,+\infty), j = 1,...,m$, то по теореме О.В. Бесова [17] и свойству нормы имеем

$$J_1(f) \le \left(\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \| \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}) \|_{\bar{q}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{8}$$

Далее, пользуясь леммой 3 и неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [1], с. 133), из (8) получим

$$J_1(f) \le \left(\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \tag{9}$$

$$\le C(p,m) \left(\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Теперь отдельно рассмотрим случаи $r_j > \frac{1}{p_j}$ и $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $j = 1,...,m$.

Пусть $r_j > \frac{1}{p_j}$. Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} \cdot \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j (r_j - \frac{1}{p_j})} \right] + 1,$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Так как по условию теоремы $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j = \nu+1,...,m$, то $1 < \gamma_j' < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j = \left(r_j - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $j = \nu+1,...,m$. Поэтому в силу леммы B [7]

$$\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \le n^m + 2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} \sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j (r_j - \frac{1}{p_j})} =$$

$$= n^m + 2^{n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)} \sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}(r_1 - \frac{1}{p_1})} \le$$

$$\le C(m,p,r)(n^m + 2^n n^{\nu-1}) \le C(p,r,m) 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Пусть $2 < \tau_j < +\infty, j = 1,...,m$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателем $\beta_j = \frac{\tau_j}{2} > 1$ и пользуясь леммой 1, имеем

$$\left(\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p_1} + 1)\frac{1}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}}^{\frac{1}{2}} \le C(p,q,m,r,\tau) 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}\frac{1}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \qquad (10)$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, где $\bar{\beta}' = (\beta_1', ..., \beta_m')$, $\beta_m' = \frac{\tau_j}{\tau_j-2}, j = 1, ..., m$.

Поэтому из неравенств (9),(10) следует, что

$$J_1(f) \le C(p,q,m,r,\tau) 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}\frac{1}{2})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \qquad (11)$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $r_j > \frac{1}{p_j}, \tau_j > 2$.

Рассмотрим случай $1 < \tau_j \le 2, r_j > \frac{1}{p_j}$. Через e_j обозначим множество всех $s_j \in Z_+$, для которых $(s_1, ..., s_j, ..., s_m) \in Y^m(n, \alpha n, \bar{\gamma}')$ при всех фиксированных $s_k, k \ne j$.

Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)} n^{\nu-1} \cdot \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \left(2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p}} \right)^{\tau_1} \prod_{j=1}^{m-1} G_k^{\tau_{k+1}-\tau_k}(f,n)_{\bar{\tau}_k} \right] + 1,$$

где $\bar{s}_k = (s_1, ..., s_k), \bar{\tau}_k = (\tau_1, ..., \tau_k)$,

$$G_k(f,n)_{\bar{\tau}_k} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s}_k \in P_k} \right\|_{\bar{\tau}_k},$$

$P_k = e_1 \times ... \times e_k$.

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\beta_j = \frac{\tau_j}{2-\tau_j}, \beta_j' = \frac{\tau_j}{2\tau_j-2}$, получим

$$J_1(f) \le C(p,q,m,r) \left(\sum_{n\le\langle \bar{s},\bar{\gamma'}\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\frac{2}{p_j}} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C(p,q,m,r) \left(2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)} n^{\nu-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} ... \sum_{s_1=1}^{\infty} \kappa_Y(\bar{s}) \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \left(2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p}} \right)^{2-\tau_1} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{m-1} G_k^{\tau_k-\tau_{k+1}}(f,n)_{\bar{\tau}_k} \right\} \le C(p,q,m,r) \left(2^{n(r_1-\frac{1}{p_1}+1)} n^{\nu-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\| \left\{ \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s}\in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}^{\frac{2-\tau_m}{2}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \kappa_Y(\bar{s}) \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s}\in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}}^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

где κ_Y – характеристическая функция множества Y.

Так как $\gamma_j' < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j = \left(r_j - \frac{1}{p_j} \right) \left(r_1 - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}$, $j = \nu+1, ..., m, r_j > \frac{1}{p_j}$, то в силу леммы 1 имеем

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} \right\}_{n\le\langle \bar{s},\bar{\gamma'}\rangle<\alpha n} \right\|_{l_{\bar{\beta}'}} \le C(p,q,m,r) 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} 2(1-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Поэтому из оценки (12) следует, что

$$J_1(f) \le C(p,q,m,r)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{13}$$

при $r_j > \frac{1}{p_j}, 1 < \tau_j \le 2, j = 1,...,m$ для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$

Положим

$$\alpha = \left((r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}) - \frac{\ln n}{n}\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}) \right)(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})^{-1}.$$

Тогда

$$2^{-\alpha n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})} = 2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Так как $\tau_j \le 2 < q_j < +\infty$, то $\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\tau_j} < 0$. Поэтому из (7) следует

$$J_2(f) \le C(p,q,m,r,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}. \tag{14}$$

Следовательно, в силу (13) и (14) из (2) получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \le C(q,r,m,p,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{15}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $r_j > \frac{1}{p_j}, 1 \le \tau_j \le 2, j = 1,...,m.$

Если $2 < \tau_j < +\infty, j = 1,...,m$, то из оценок (2), (11),(14) следует

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \le C(q,r,m,p,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \tag{16}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $r_j > \frac{1}{p_j}, j = 1,...,m$. Этим пункт 1) доказан.

Теперь рассмотрим случай $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, j = 1,...,m$. Пусть $q_j < \tau_j, j = 1,...,m$. Положим

$$\alpha = \frac{q_1}{2} - (\frac{q_1}{2} - 1)(\nu - 1)\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j}\frac{1}{(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})}.$$

Тогда (см. (7))

$$J_2(f) \le C(p,q,m,r,\tau)2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}},$$

$$n^{(\frac{q_1}{2}-1)(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})} \asymp M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{q_1'}{q_1}\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \tag{17}$$

в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \tau_j, j = 1,...,m.$

Оценим $J_1(f)$ в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \tau_j, j = 1,...,m$. Положим

$$N_{\bar{s}} = \left[2^n 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}\right] + 1,$$

где координаты вектора $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma_1},...,\tilde{\gamma_m})$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_1' = \tilde{\gamma_1} = ... = \gamma_\nu' = \tilde{\gamma_\nu}$, $1 < \tilde{\gamma_j} < \gamma_j', j = \nu + 1,...,m.$

Тогда в силу леммы [7] справедлива оценка

$$\sum_{n\leq\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n} N_{\bar{s}} \leq C(p,r,m)M.$$

Подставив значения чисел $N_{\bar{s}}$ и пользуясь неравенством Гельдера и леммой 3 из (9), получим

$$J_1(f) \leq C(p,q,m,r,\tau)2^{-\frac{n}{2}}2^{-n(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{q_1}{2}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}\times$$

$$\times n^{(\frac{q_1}{2}-1)(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})} \asymp M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{q_1'}{q_1}\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \qquad (18)$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \tau_j, j = 1,...,m.$

В силу (17) и (18) из неравенства (2) будем иметь

$$\|f-P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \leq C(q,r,m,p,\tau)M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{q_1'}{q_1}\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j}} \qquad (19)$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\tau}}$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \tau_j, j = 1,...,m$,$\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{q_j} < \left(r_j-\frac{1}{p_j}\right)\frac{1}{q_1}$, $j = \nu+1,...,m$. Этим второй пункт доказан.

В случае $\tau_j < q = q_1 = ... = q_m$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $q_j < \tau_j$, $j = 1,...,m$ утверждение теоремы доказывается как в [9], [19]. Отметим, что теорема 3 анонсирована в [20].

Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

2. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата, 1976.

3. **Стечкин С.Б.** // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, №1. С. 37–40.

4. **Исмагилов Р.С.** // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. С. 161–173.

5. **Майоров В.Е.** //Докл. АН СССР. 1978. Т. 243 , №5, С. 1127–1130.

6. **Белинский Э.С.** Приближение периодических функций "плавающей"системой экспонент и тригонометрические поперечники// В кн.: Исслед. по теории функц. многих веществ. переменных, Ярославль, 1984, С. 10–24.

7. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178, С. 3–112.

8. **Романюк А.С.** // Изв. РАН., Серия матем. 2003. Т. 67. С. 61–100.

9. **Романюк А.С.** // Матем. замет. 2002. Т. 71, №1, С. 109–121.

10. **DeVore R.A., Temlyakov V.N.** //Journal of Fourier anal. and appl. 1995. V. 2, №1, P. 29–48.

11. **Temlyakov V.N.** // Constr. approx. 1998. V. 14. P. 569–587.

12. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** // Матем. замет. 1994. Т. 56. С. 57–86.

13. **Кашин Б.С.** // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 172. С.187–201.

14. **Акишев Г.** // Матем. сб. 2006. Т. 197. №8. С.17–40.

15. **Акишев Г.** // Вестник КарГУ. 2004. № 3, С.9–16.

16. **Акишев Г.** // Ученые записки Казанского гос. университета. Серия физ.- мат. кн. 2. 2006. Т. 148. С. 5–17.

17. **Бесов О. В.** // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 31–36.

18. **Потапов М.К.** // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 143–156.

19. **Акишев Г.** // Вестник КарГУ. Серия матем. 2004. № 2. С. 3–12.

20. **Акишев Г.** // Тезисы докладов IV межд. науч. конф. "Проблемы дифф. урав., анализа и алгебры". Актобе, 2006. С. 99–100.

Поступила в редакцию 04.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 15 – 24*

УДК 517.95

КРИТЕРИИ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ И НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. З. Алимагамбетова, Р. Ойнаров

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
030000 Актобе ул. Бр. Жубановых, 263 zhanatarman@ok.kz

Для полулинейного разностного уравнения второго порядка устанавливаются необходимые и достаточные признаки его осцилляторности и неосцилляторности.

1. Введение. Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(r_k\phi(\Delta x_k)) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$, $\phi(x)|x|^{p-2}x$, $p > 1$. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что c $r = \{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $c = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательности действительных чисел. Последовательность действительных чисел $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $k = 0, 1, \ldots$

Пусть N – множество натуральных чисел и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Приведем основные понятия, относящиеся к теме настоящей работы.

Говорят, что интервал $(m, m+1]$, $m \in N$, содержит обобщенный нуль решения $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m \neq 0$ и $r_m x_m x_{m+1} \leq 0$. Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечно много обобщенных нулей на дискретном интервале $[n, \infty)$, $n \in N$, в противном случае решение уравнения (1) называется неосцилляторным. Известно [1], что все решения уравнения (1) либо осцилляторны, либо неосцилляторны, и в соответствии с этим уравнение (1) называется осцилляторным или неосцилляторным. Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке $[0, n]$, если каждое его решение имеет не более одного обобщенного нуля на дискретном интервале $(0, n+1]$ и его решение x с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_1 \neq 0$ не имеет обобщенного нуля на $(0, n+1]$.

Уравнение (1) при $p = 2$ имеет вид

$$\Delta(r_k\Delta x_k) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Keywords: *half–linear difference equation, discrete oscillation theory, Hardy inequality*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

Уравнения (1) и (2) соответственно являются дискретными аналогами полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(r(t)\phi(x'(t)))' + c(t)\phi(x(t)) = 0 \tag{3}$$

и уравнения Штурма–Лиувилля

$$(r(t)x'(t))' + c(t)x(t) = 0. \tag{4}$$

Основные методы исследования и последние результаты, полученные для уравнения (3), хорошо изложены в работах [2, 3]. Методы исследования уравнения (3) перенесены и для уравнения (1) (см. [1, 4] и приведенные там ссылки). Основные свойства уравнений (1) и (3) соответственно схожи со свойствами уравнений (2) и (4). В частности, для уравнений (1) и (3) справедливы теоремы Штурма о разделении нулей и о сравнении.

2. Вспомогательные утверждения. Исследование уравнения (1) опирается на следующие утверждения, приведенные в работе [1].

Теорема А. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке* $[0, n]$, $n \in N$, *тогда и только тогда, когда*

$$F(x, 0, n) = \sum_{k=0}^{n} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k||x_{k+1}\} > 0$$

для всех нетривиальных $x = \{x_k\}_{k=0}^{n+1}$, *удовлетворяющих условию* $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Числовую последовательность $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ назовем финитной, если конечное число ее членов отлично от нуля, а множество $suppx = \{k : x_k \neq 0,\ k \geq 0\}$ – ее носителем.

Обозначим через $\mathring{X}(m, n)$, $0 \leq m < n \leq \infty$, совокупность всех финитных последовательностей x, у которых $supp\, x \subset (m, n)$.

Лемма 1. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале* $[0, \infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$F(x, 0, \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} > 0 \tag{5}$$

для всех нетривиальных $x \in \mathring{X}(0, \infty)$.

Лемма 2. *Уравнение (1) является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует* $m \in N$ *такое, что*

$$F(x, m, \infty) = \sum_{k=m}^{\infty} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} > 0 \tag{6}$$

для всех нетривиальных $x \in \mathring{X}(m, \infty)$.

Лемма 3. *Уравнение (1) является осцилляторным тогда и только тогда, когда для любого* $m \in N$ *существует нетривиальная последовательность* $\widetilde{x} \in \mathring{X}(m, \infty)$ *такая, что*

$$F(\widetilde{x}, m, \infty) = \sum_{k=m}^{\infty} \{r_k|\Delta \widetilde{x}_k|^p - c_k|\widetilde{x}_{k+1}|^p\} \leq 0. \tag{7}$$

Утверждения леммы 1 и 2 являются непосредственным следствием теоремы 1. Мы докажем лишь лемму 3.

Доказательство леммы 3. Пусть уравнение (1) осцилляторно, тогда на основании леммы 2 не существует $m \in N$ такого, что (6) выполнялось бы для всех нетривиальных $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m,\infty)$, т.е. для каждого $m \in N$ существует по крайней мере одна нетривиальная последовательность $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m,\infty)$, для которой выполняется (7).

Обратно, пусть для каждого $m \in N$ существует $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m,\infty)$ и имеет место (7). Так как последовательность $\widetilde{x}$ финитная, то существуют $n_1(m) \in N$, $n_2(m) \in N : \ m \leq n_1(m) < n_2(m)$ такие, что $x_k = 0$ при $0 \leq k \leq n_1(m)$, $k \geq n_2(m)$ и имеет место

$$F(x,m,\infty) = F(x,n_1(m),n_2(m)) = \sum_{k=n_1(m)}^{n_2(m)} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} \leq 0.$$

Тогда в силу теоремы А уравнение (1) имеет нетривиальное решение, имеющее на дискретном отрезке $[n_1(m),n_2(m)]$ по крайней мере два обобщенных нуля. Берем возрастающую последовательность $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ так, чтобы $n_2(m_{k-1}) < n_1(m_k) < n_2(m_k) < n_1(m_{k+1})$. Тогда мы имеем непересекающиеся отрезки $\{[n_1(m_k),n_2(m_k)]\}_{k=0}^{\infty}$, для каждого из которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, имеющее там по крайней мере два обобщенных нуля. Тогда на основании теоремы Штурма о разделении нулей существует ненулевое решение уравнения (1), имеющее на каждом отрезке $[n_1(m_k),n_2(m_k)]$, $k = 0,1,\ldots$, по крайней мере один обобщенный нуль. Следовательно, уравнение осцилляторно. Лемма 3 доказана.

Пусть $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\rho = \{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фиксированные, соответственно, неотрицательная и положительная последовательности. Для произвольной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{n} a_k|^p u_n\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

которое называется дискретным неравенством Харди [5].

Положим

$$A_1(n) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_2(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sum_{m=1}^{k} \rho_k^{1-p'}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$A_3(n) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{1-p'}\left(\sum_{m=k}^{\infty} u_m\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из результатов работы [6, 7] следует

Теорема В. *Неравенство (8) выполнено для всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна правая часть (8), тогда и только тогда, когда по крайней мере при одном значении $i = 1,2,3$ конечна величина $A_i = \sup\limits_{n\geq 1} A_i(n)$, при этом для наименьшей константы C в (8) имеют место оценки*

$$A_1 \leq C \leq (p)^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} A_1,$$

$$\frac{1}{p}^{\frac{1}{p}} A_2 \le C \le (p') A_2,$$

$$\frac{1}{p'}^{\frac{1}{p'}} A_3 \le C \le p A_3.$$

Пусть $\dot{X}$ – множество числовых последовательностей, у которых конечное число начальных членов равны нулю.

Пусть $W_p^1(r) \equiv W_p^1(r, 0, \infty)$ – множество всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{W_p^1} = |x_0| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

где $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Пусть $\dot{W}_p^1(r) \equiv \dot{W}_p^1(r, 0, \infty)$ и $\mathring{W}_p^1(r) \equiv \mathring{W}_p^1(r, 0, \infty)$ – соответственно замыкания множеств $\dot{X} \bigcap W_p^1(r)$ и $\mathring{X}(0, \infty)$ по норме (8). Очевидно, что $\dot{W}_p^1(r) \supset \mathring{W}_p^1(r)$.

3. Основные результаты.

3.1. Неосцилляторность. Предположим, что коэффициенты r_k уравнения (1) удовлетворяют условию $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, и для $m \in N$ имеем

$$\sum_{k=m}^{\infty} r_k^{1-p'} = \infty. \tag{10}$$

Введем следующие обозначения

$$B_1(m) \equiv B_1(m, r, c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_2(m) \equiv B_2(m, r, c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=m}^{n} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} r_k^{1-p'} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_3(m) \equiv B_3(m, r, c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k \right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} r_k^{1-p'} \left(\sum_{i=k}^{\infty} c_i \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_i \equiv B_i(r, c) = B_i(0),\ i = 1, 2, 3,$$

$$K_1(p) \equiv \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},\ K_2(p) = \frac{1}{p'},\ K_3(p) = \frac{1}{p},$$

$$k_1(p) = 1,\ k_2(p) = (p)^{\frac{1}{p}},\ k_3(p) = (p')^{\frac{1}{p'}},$$

$$c^+ = \{c_k^+\}_{k=0}^{\infty},\ c_k^+ = max\{0, c_k\},\ k = 0, 1, \ldots$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию (10) и $c_k \ge 0$, $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Тогда выполнение условий $B_i \le k_i(p)$ при всех $i = 1, 2, 3$ необходимо, а выполнение условий $B_i < K_i(p)$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ достаточно для того, чтобы уравнение (1) было уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0, \infty)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда выполнение условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \le k_i(p)$ *при всех* $i = 1,2,3$ *необходимо, а выполнение условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) < K_i(p)$ *по крайней мере при одном из значений* $i = 1,2,3$ *достаточно для неосцилляторности уравнения (1).*

Утверждение теоремы 2 вытекает из утверждения теоремы 1. Действительно, если уравнение (1) неосцилляторно, тогда существует $m \in N$ такое, что уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале $[m,\infty)$. Тогда по теореме 1 $B_i(m) \le k_i(p)$ при $i = 1,2,3$. Так как величины $B_i(m)$ не возрастают по m, то $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \le k_i(p)$, $i = 1,2,3$.

Обратно, пусть выполняется условие $\lim\limits_{m\to\infty} B_{i_0}(m) < K_{i_0}(p)$, $1 \le i_0 \le 3$. Тогда существует $m \in N$ такое, что $B_{i_0}(m) < K_{i_0}(p)$, $1 \le i_0 \le 3$. Следовательно, по теореме 1 уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале $[m,\infty)$, что означает неосцилляторность уравнения (1). Теорема 2 доказана.

На основании теоремы 2 и теоремы о сравнении вытекает

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r_k > 0$, $k = 0,1,\ldots$, *и выполнено условие (10). Если при некотором* $m \in N$ *выполнено одно из условий*

$$B_i(m,r,c^+) < K_i(p),\ \ i = 1,2,3,$$

то уравнение (1) неосцилляторно.

Например, условие $B_1(m,r,c^+) < K_1(p)$, $i = 1,2,3$, выполняется, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{11}$$

так как по определению верхнего предела существует $m \in N$ такое, что

$$B_1(m,r,c^+) \le \sup_{n\ge m} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Поэтому справедливо

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Если имеет место неравенство(11), то уравнение (1) неосцилляторно.*

Сравнение утверждения следствия 2 с утверждением следующей теоремы, полученной в работе [1], представляет интерес.

Теорема C [1]. *Пусть выполнены условия следствия 1, и кроме того, предположим, что*

$$\varphi_N = \left[\sup_{k\in N} \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} r_j^{1-p'}}{\sum\limits_{j=0}^{k-1} r_j^{1-p'}}\right]^{p(p-1)} < \infty, \quad \psi_N = \left[\sup_{k\ge N} \frac{r_k}{r_{k-1}}\right]^{1-p'} < \infty,$$

$$0 < \overline{\lim_{N\to\infty}} \,(1+\psi_N)\,\varphi_n = \psi < \infty.$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} c_j^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{\mu p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{\psi p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

то уравнение (1) неосцилляторно, где

$$\mu = \begin{cases} \sup\limits_{t>s>0} \frac{1}{t-s}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{t^p-s^p}{p(t-s)}\right)-s\right], \ p\geq 2 \\ \sup\limits_{t>s>0} \frac{1}{t-s}\left[t-\Phi^{-1}\left(\frac{t^p-s^p}{p(t-s)}\right)\right], \ p\leq 2. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 предварительно докажем два утверждения.

Лемма 4. *Пусть $1 < p < \infty$ и $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Тогда для любого $x \in \dot{W}^1_p(r, 0, \infty)$ имеем $x_0 = 0$ и функционал*

$$\|x\|_{\dot{W}^1_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k|\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

является нормой в пространстве $\dot{W}^1_p(r, 0, \infty)$.

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент пространства $\dot{W}^1_p(r)$.

Тогда по определению пространства $\dot{W}^1_p(r)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $y \in \dot{X} \bigcap W^1_p(r)$ такая, что

$$\|x-y\|_{W^1_p} = |x_0-y_0| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k|\Delta(x_k-y_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \tag{13}$$

Так как $y_0 = 0$ для $y \in \dot{X}$, то из (13) следует $|x_0| \leq \varepsilon$. Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $x_0 = 0$. Тогда из $x \in \dot{W}^1_p(r)$ и $\|x\|_{\dot{W}^1_p} = 0$ легко следует, что $x_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $1 < p < \infty$ и $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, и выполнено условие (10). Тогда*

$$\dot{W}^1_p(r) = \mathring{W}^1_p(r). \tag{14}$$

Доказательство. Так как $\dot{W}^1_p(r) \supset \mathring{W}^1_p(r)$, то для доказательства равенства (14) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in \dot{X} \bigcap W^1_p(r)$ существует $x_\varepsilon \in \mathring{X}$ такое, что $\|x - x_\varepsilon\|_{\dot{W}^1_p(r)} \leq \varepsilon$.

Пусть $x \in \dot{X} \bigcap W^1_p(r)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ существует $m \in N$ и

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k|\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \tag{15}$$

В силу (10) существует $n \in N$ такой, что $n > m$ и

$$|x_m|\left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Введем последовательность

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq m, \\ \left(\sum\limits_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} \sum\limits_{i=k}^{n} r_j^{1-p'}, & \text{при } m+1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{при } k \geq n+1. \end{cases}$$

Положим $x_\varepsilon = \{w_k x_k\}_{k=0}^{\infty}$. Очевидно, что $x_\varepsilon \in \overset{\circ}{X}$. Тогда

$$\|x - x_\varepsilon\|_{\dot W_p^1(r)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta(x_k - w_k x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |(1-w_k)\Delta x_k - x_{k+1}\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k (1-w_k)^p |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |x_{k+1}|^p |\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = I_1 + I_2. \tag{17}$$

Так как $(1-w_k) = 0$ при $1 \le k \le m$, $1 - w_k = 1$ при $k \ge n+1$ и $(1-w_k) \le 2$ при $m+1 \le k \le n$, то с учетом (15) имеем

$$I_1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k (1-w_k)^p |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\Delta w_k = 0$ при $0 \le k \le m-1$, $k \ge n+1$ и $\Delta w_k = -r_k^{1-p'} \left(\sum\limits_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1}$ при $m \le k \le n$. Поэтому

$$I_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |x_{k+1}|^p |\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'} |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1}. \tag{19}$$

Так как $x_{k+1} = \sum\limits_{i=m}^{k} \Delta x_i + x_m$ при $k \ge m$, то на основании неравенства Гельдера для $m \le k \le n$ получим

$$|x_{k+1}| \le \left(\sum_{i=m}^{n} r_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=m}^{n} r_i |\Delta x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |x_m|.$$

Подставляя полученную оценку в (19), с учетом (15) и (11) имеем

$$I_2 \le \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} \left(\sum_{i=m}^{n} r_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=l}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} |x_m| \le \left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |x_m| \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{20}$$

Из (17), (18) и (20) следует, что $\|x - x_\varepsilon\|_{\dot W_p^1(r)} \le \varepsilon$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0, \infty)$. Тогда по лемме 1 для всех ненулевых $x \in \overset{\circ}{X}(0,\infty)$ выполнено неравенство (5). В силу плотности множества $\overset{\circ}{X}(0,\infty)$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(r, 0, \infty)$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

для всех $x \in \mathring{W}_p^1(r,0,\infty)$ или в силу леммы 5 для всех $x \in \dot{W}_p^1(r,0,\infty)$. Так как в силу леммы 4 $x_0 = 0$ для всех $x \in W_p^1(r)$, то, полагая $\Delta x_k = a_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, получим $x_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ \forall k \in N$. В (21) выражая $\{x_k\}$ через $\{a_k\}$, имеем, что справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Big|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |a_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{22}$$

для всех $a \in l_{p,r}$, где $\tilde{r_k} = r_{k-1}$, $\tilde{c_k} = c_{k-1}$ $\forall k \in N$ и $l_{p,r}$ – пространство числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма $\|a\|_{l_{p,r}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Заметим, что соотношения

$$\Delta x_k = a_{k+1}, \ x_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \ k \ge 0, \tag{23}$$

устанавливают изометрию между пространствами $\dot{W}_p^1(r)$ и $l_{p,r}$, где полагаем $\sum\limits_{i=1}^{0} a_i = 0$.

Неравенство (22) – это дискретное неравенство Харди (см.(7)) с наименьшей константой $C \le 1$. Тогда по Теореме B $B_i \le k_i(p)$ при $i = 1, 2, 3$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено $B_{i_0} < K_{i_0}(p)$, $1 \le i_0 \le 3$. Тогда по теореме B выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $a \in l_{p,r}$. Переходя от последовательности $a \in l_{p,r}$ к последовательности $x \in \dot{W}_p^1(r)$, согласно (23) имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |\Delta x_{k-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{24}$$

для всех $x \in \dot{W}_p^1(r)$. Так как по условию $K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} < 1$, то из (24) имеем

$$F(x, 0, \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \{r_k |\Delta x_k|^p - c_k |x_{k+1}|^p\} > 0$$

для всех нетривиальных $x \in \dot{W}_p^1(r) = \mathring{W}_p^1(r)$, в частности для всех ненулевых $x \in \mathring{X}(0,\infty)$. Тогда по лемме 1 уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0, \infty]$. Теорема 1 доказана.

3.2. Осцилляторность.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r_k > 0$, $c_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, *и выполнено условие (10). Тогда выполнение условий* $\varliminf\limits_{m\to\infty} B_i(m) \ge K_i(p)$ *при всех* $i = 1, 2, 3$ *необходимо, а выполнение* *условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) > k_i(p)$ *по крайней мере при одном из значений* $i = 1, 2, 3$ *достаточно для осцилляторности уравнения (1).*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) осцилляторно. Тогда по лемме 3 для любого $m \in N$ существует ненулевой $\tilde{x} \in \mathring{X}(m, \infty)$ и выполняется неравенство (7) или равносильное ему неравенство

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k |\tilde{x_{k+1}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |\Delta\tilde{x_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{25}$$

Так как $\tilde{x_m} = 0$, то для последовательности $a_{k+1} = \Delta\tilde{x_k}$, $k \geq m$, выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum_{i=m+1}^{k} \tilde{a_i}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |\tilde{a_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{26}$$

Рассмотрим дискретное неравенство Харди

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum_{i=m+1}^{k} a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ a \in l_{p,r}. \tag{27}$$

Неравенство (26) показывает, что неравенство Харди (27) либо не выполняется, либо выполняется с наименьшей константой $C \geq 1$, так как

$$C = \sup_{a \in l_{p,r},\, a \neq 0} \frac{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum\limits_{i=m+1}^{k} a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum\limits_{i=m+1}^{k} \tilde{a_i}|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |\tilde{a_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq 1. \tag{28}$$

Если неравенство Харди (27) не имеет место, то по теореме B

$$B_i(m) = \infty, \ \ i = 1, 2, 3, \tag{29}$$

причем по определению $B_i(m)$, $i = 1, 2, 3$, соотношение (29) выполняется для всех $m \in N$, поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) > K_i(p)$, $i = 1, 2, 3$. Если неравенство Харди (27) выполняется, то по теореме B $B_i(m) < \infty$, $i = 1, 2, 3$, и имеет место оценка $K_i^{-1}(p) B_i(m) \geq C$, которая вместе с (28) дает

$$B_i(m) \geq K_i(p), \ \ i = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Если $B_i(m)$, $i = 1, 2, 3$, конечно при одном $m \in N$, то оно конечно при всех $m \in N$, поэтому неравенство (30) верно при всех $m \in N$. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \geq K_i(p)$, $i = 1, 2, 3$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} B_{i_0}(m) > K_{i_0}(p)$, $1 \leq i_0 \leq 3$. Если $B_{i_0}(m) = \infty$, то по теореме B неравенство Харди (27) не имеет места, т.е. для любого $C > 0$ найдется $a \in l_{p,r}$, при котором неравенство (27) имеет знак $\gg$". В частности, для $C = 1$ выполняется (26). Переходя от последовательности $\tilde{a} \in l_{p,r}$ к последовательности $\tilde{x} \in \dot{W}_p^1(r, m, \infty)$, получим неравенство (25). Так как по лемме 4 $\dot{W}_p^1(r) = \mathring{W}_p^1(r)$, то в $\mathring{X}(m, \infty)$ найдется последовательность, которую мы обозначим снова через $\tilde{x}$, и выполняется (25) или (7). Следовательно, по лемме 3 уравнение (1) осцилляторно.

Теперь рассмотрим случай, когда $B_{i_0}(m) < \infty$, $\forall m \in N$. По теореме B $\forall m \in N$ выполняется неравенство (27) с оценкой $C \geq k_{i_0}^{-1} B_{i_0}(m) > 1$ с наименьшей постоянной C в (27). Тогда в силу плотности $\overset{\circ}{X}(m,\infty)$ в $\dot{W}_p^1(r,m,\infty)$ существует $\tilde{x} \in \dot{X}(m,\infty)$, для которой выполняется (25) или то же самое неравенство (7). Следовательно, по лемме 3 уравнение (1) осцилляторно. Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнено условие теоремы 3. Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k \right)^{\frac{1}{p}} = \infty, \tag{31}$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Из следствия 3 вытекает, что, если наряду с условием (10) имеем $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k = \infty$, то уравнение (1) осциллятарно. Это утверждение при $p = 2$, т.е. для уравнения (2), доказано в [8].

Цитированная литература

1. **Dosly O., Rehak P.** // Comp. and Math. with Appl. 2001. V.42. P. 453–464.
2. **Dosly O.** // Czechoslovak Math.J. 2000. V.50(125). P. 657–671.
3. **Dosly O.** // Math.Bohemica. 2001. V.127. N 2. P.181–195.
4. **Marik R.** // Arch.Math. 2000. V.36. P. 513–518.
5. **Kufner A. Persson L.–E.** Weighted inequalities with weights of Hardy type. World Scientific. 2003.
6. **Bennett G.** // Quart.J.Math. Oxford Ser. 1987. V.38. N 2. P.401–425.
7. **Bennett G.** // Quart.J.Math. Oxford Ser. 1991. V.42. N 2. P.149–174.
8. **Dosly O.** // Arch. Math. 2000. V.36. P. 329–342.

Поступила в редакцию 11.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С.25 – 30*

УДК 517.948.34

ЗАДАЧА КОШИ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. С. Алимжанов, М. К. Дауылбаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 dauyl@kazsu.kz

В работе исследуются линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями в правой точке данного отрезка, когда наличие интегральных членов качественно изменит асимптотическое поведение решений соответствующих дифференциальных уравнений. Даются интегральное представление, оценки решений исходной задачи и оценки разности между решениями сингулярно возмущенной и измененной вырожденной задачи.

Рассмотрим на отрезке [0,1] линейное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t) \tag{1}$$

с начальными условиями в правой точке $t = 1$:

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1,\varepsilon) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, α_i, $i = \overline{0, n-1}$, – известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия.

I. Функции $A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $F(t)$ на отрезке $[0,1]$ являются достаточно гладкими.

II. $A_1(t) \geqslant \gamma = \mathrm{const} > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

Решение дифференциальной задачи (1), (2) при условии II, как известно из [1] (гл. 5, § 18, с. 236) и [2] (гл. 3, § 3.6, с. 12), уходит на бесконечность при $\varepsilon \to 0$ в полуинтервале $0 \leqslant t < 1$ и не имеет конечного предела. Добавим теперь в правую часть уравнения (1) интегральные члены вида

$$\int\limits_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]\,dx,$$

Keywords: *integro-differential equation, initial leap, singular deviation, initial problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

где $0 < a < 1$ и m — любое целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant m \leqslant n-3$. Тем самым, вместо дифференциального уравнения (1) получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t) + \\
+ \int\limits_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]\,dx.
\end{aligned} \tag{3}
$$

В данной работе для интегро-дифференциальной задачи (3), (2) доказываются теоремы существования, единственности и об интегральном представлении и оценке решений, а также о разности между решениями исходной сингулярно возмущенной и видоизмененной невозмущенной задачами. Показано, что решение задачи (3), (2) обладает явлением начального скачка любого порядка, т.е. в точке $t = a$ некоторые компоненты решения при $\varepsilon \to 0$ являются бесконечно большими разных порядков. Это свойство решения интегро-дифференциальной задачи существенным образом зависит от порядка производных, входящих под знаком интеграла в правую часть уравнения (3). Случай $a = 0$ рассмотрен в [3].

Для дальнейших исследований предположим выполнение следующих условий.

III. $H_i(t,x)$, $i = \overline{0, m+1}$ в области $D = (0 \leqslant t \leqslant 1,\ a \leqslant x \leqslant 1)$ являются непрерывными функциями вместе со своими производными до $(n-1)$–го порядка и $H_{m+1}(t,a) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$.

IV. Пусть число $\lambda = 1$ не является собственным значением ядра

$$
K(t,s) = \frac{1}{A_1(s)\bar W(s)} \int\limits_s^1 \sum_{j=0}^{m+1} H_j(t,x)\bar W_{n-1}^{(j)}(x,s)\,dx, \tag{4}
$$

где $\bar W(t)$ – вронскиан ф. с. р. $\bar y_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, однородного вырожденного дифференциального уравнения $L_0 \bar y = 0$, а $\bar W_{n-1}^{(j)}(t,s)$ – определитель, получаемый из вронскиана $\bar W(s)$ заменой его $(n-1)$–ой строки строкой $\bar y_1^{(j)}(t), \ldots, \bar y_{n-1}^{(j)}(t)$.

V.

$$
\bar\omega(1) = \begin{vmatrix}
T_{00}^{n-1,0}(1) & \ldots & T_{n-2,0}^{n-1,0}(1) & H_{m+1}(1) \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
T_{00}^{n-1,n-2}(1) & \ldots & T_{n-2,0}^{n-1,n-2}(1) & H_{m+1}^{(n-2)}(1) \\
\bar T_{00}^{n-1,n-1}(1) & \ldots & \bar T_{n-2,0}^{n-1,n-1}(1) & \bar H_{m+1}^{(n-1)}(1)
\end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}
$$

где функции $T_{i0}^{n-1,i}(t)$, $\bar T_{i0}^{n-1,n-1}(t)$, $H_{m+1}^{(i)}(t)$, $\bar H_{m+1}^{(n-1)}(t)$, $i,\ j = \overline{0, n-2}$, определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (3).

По теореме Нуайона [4] для ф.с.р сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$ получаем следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления (см., напр., [5]):

$$y_i(t,\varepsilon) = y_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{ij}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$y_i^{(k)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{ij}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m}), \quad i,k = \overline{1, n-1},$$

$$y_n(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \bar\mu(x)\,dx\right)\left(y_{n0}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j y_{nj}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})\right),$$

$$y_n^{(k)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^k}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \overline{\mu}(x)\,dx\right)\left(u_{n0}^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n-2-m} \varepsilon^j u_{nj}^{(k)}(t) + O(\varepsilon^{n-1-m})\right), \quad k = \overline{1, n-1},$$

где

$$\bar\mu(t) = -A_1(t), \qquad u_{nj}^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{j}\sum_{i=0}^{l} C_k^i h_{n,l-i}^{(k-i)}(t) y_{n,j-l}^{(i)}(t), \quad j = \overline{0, n-2-m}.$$

Здесь C_k^i – число сочетаний из k элементов по l, а $h_{nj}^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, определяются следующими рекуррентными формулами:

$$h_{nj}^{(k)}(t) = \begin{cases} \overline{\mu}^k(t), & j = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1-j} \overline{\mu}^i(t) \frac{d}{dt} h_{n,j-1}^{(k-1-i)}(t), & j = \overline{1, k-1}, \\ 0, & j \geqslant k. \end{cases} \qquad h_{nj}^{(l)}(t) = 0, \ \ l < 0.$$

Коэффициенты $y_{ik}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{0, n-2-m}$, последовательно определяются из линейных уравнений $(n-1)$–го порядка, причем функции $y_{i0}(t) \equiv \bar y_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, являются ф.с.р. однородного вырожденного дифференциального уравнения $L_0 y = 0$.

Пусть функции $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ являются решениями однородной сингулярно возмущенной дифференциальной задачи

$$L_\varepsilon K_i(t,s,\varepsilon) = 0, \qquad K_i^{(j)}(s,s,\varepsilon) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{0, n-1}. \tag{6}$$

Решения $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, задачи (6) называются функциями Коши и их можно представить в виде:

$$K_i^{(j)}(t,s,\varepsilon) = W_{i+1}^{(j)}(t,s,\varepsilon) W^{-1}(s,\varepsilon), \qquad i,j = \overline{0, n-1},$$

где $W_{i+1}^{(j)}(t,s,\varepsilon)$ – определитель, получаемый из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой его $(i+1)$–ой строки ф.с.р $y_1^{(j)}(t,\varepsilon), \ldots, y_n^{(j)}(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$.

Пусть функции $Q_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, и $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, являются решениями следующих однородных интегро-дифференциальных задач:

$$\begin{cases} L_\varepsilon Q_i(t,\varepsilon) = \int\limits_a^1 \Big[H_0(t,x)Q_i(x,\varepsilon) + dots + H_{m+1}(t,x)Q_i^{(m+1)}(x,\varepsilon)\Big]\,dx, \\ Q_i^{(j)}(a,\varepsilon) = \delta_{ij}, \qquad i,j = \overline{0, n-1}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon) = \int\limits_a^1 \Big[H_0(t,x)\Phi_i(x,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)\Phi_i^{(m+1)}(x,\varepsilon)\Big]\,dx, \\ \Phi_i^{(j)}(1,\varepsilon) = \delta_{ij}, \qquad i,j=\overline{0,n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Решения задач (7), (8) назовем граничными функциями задачи Коши (3), (2).

Лемма 1. *Если выполнены условия I–IV, то решение задачи (7) на отрезке $a \leqslant t \leqslant 1$ существует, единственно и выражается формулой*

$$Q_i(t,\varepsilon) = K_i(t,a,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)[h_i(s,a,\varepsilon) + \int\limits_a^1 R_\varepsilon(s,p)h_i(p,a,\varepsilon)\,dp]\,ds,$$

где

$$h_i(t,s,\varepsilon) = \int\limits_s^1 [H_0(t,x)K_i(x,s,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)K_i^{(m+1)}(x,s,\varepsilon)]\,dx, \quad i=\overline{0,n-1},$$

$K_i(t,s,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, – функции Коши, $R_\varepsilon(t,s)$ — резольвента ядра $K_\varepsilon(t,s) = K(t,s) + O(\varepsilon)$, где $K(t,s)$ имеет вид (4).

Составим теперь определитель

$$\omega(1,\varepsilon) = \det\{Q_j^{(i)}(1,\varepsilon)\}, \qquad i,j=\overline{0,n-1}, \tag{9}$$

где i – номер строки а j – номер столбца.

Вместо элементов этого определителя подставляем их асимптотические представления, а затем применяя к столбцам элементарные преобразования, для определителя (9) получим следующее асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление:

$$\omega(1,\varepsilon) = -\varepsilon^{n-1-m}(\Delta_0^{(n-1)}(0,0))^{n-1}\Delta_0^{(m)}(0,0)[\bar\omega(1) + O(\varepsilon)], \tag{10}$$

где $\Delta_0^{(j)}(0,0) = \bar\mu^{j-n+1}(0)$, а $\bar\omega(1)$ – главная, независящая от ε часть асимптотического представления (10), имеющая вид (5).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия I–V. Тогда граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, являющиеся решениями задачи (8), на отрезке $a \leqslant t \leqslant 1$ существуют, единственны и выражаются формулой*

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{\omega_{i+1}(t,1,\varepsilon)}{\omega(1,\varepsilon)}, \qquad i=\overline{0,n-1}, \tag{11}$$

где $\omega(1,\varepsilon)$ имеет вид (9), а $\omega_{i+1}(t,1,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, – определитель, получаемый из определителя $\omega(1,\varepsilon)$ заменой его $(i+1)$–ой строки строкой $Q_0(t,\varepsilon),\ldots,Q_{n-1}(t,\varepsilon)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I–V. Тогда решение задачи (3), (2) на отрезке $a \leqslant t \leqslant 1$ существует, единственно и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon) = (\alpha_0 - P(1,\varepsilon))\Phi_0(t,\varepsilon) + \cdots + (\alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(1,\varepsilon))\Phi_{n-1}(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon),$$

где граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, выражаются формулой (11), а функция $P(t,\varepsilon)$ является решением уравнения (3) с нулевыми начальными условиями в точке $t=a$ и выражается формулой

$$P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)[F(s) + \int\limits_a^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)\,dp]\,ds.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда для функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, при $a\leqslant t\leqslant 1$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления:*

$$\Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\frac{\bar\omega_{i+1}^{(j)}(t,1)}{\bar\omega(1)}+O(\varepsilon),\quad j=\overline{0,m-1},$$

$$\Phi_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\frac{\bar\omega_{i+1}^{(m)}(t,1)}{\bar\omega(1)}+\frac{\Delta_0^{(m)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\cdot\frac{A_{i+1,n}}{\bar\omega(1)}\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t\bar\mu(x)\,dx\right)+O(\varepsilon),$$

$$\Phi_i^{(m+1)}(t,\varepsilon)=\frac{\bar\omega_{i+1}^{(m+1)}(t,1)}{\bar\omega(1)}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\Delta_0^{(m+1)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\cdot\frac{A_{i+1,n}}{\bar\omega(1)}\cdot\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t\bar\mu(x)\,dx\right)+$$
$$+O\left(\varepsilon+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t\bar\mu(x)dx\right)\right),$$

$$\Phi_i^{(n-1)}(t,\varepsilon)=\frac{\bar\omega_{i+1}^{(n-1)}(t,1)}{\bar\omega(1)}+\frac{1}{\varepsilon^{n-1-m}}\cdot\frac{\Delta_0^{(n-1)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)}\cdot\frac{A_{i+1,n}}{\bar\omega(1)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits^t\bar\mu(x)\,dx\right)+$$
$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{n-2-m}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t\bar\mu(x)\,dx\right)\right),$$

где $\bar\mu(t)=-A_1(t)<0$, $\bar\omega(1)$ имеет вид (5), $\bar\omega_{i+1}^{(j)}(t,1)$, $i,j=\overline{0,n-1}$, – определитель, получаемый из $\bar\omega(1)$ заменой его $(i+1)$–ой строки строкой из элементов $T_{00}^{n-1,j}(t),\ldots,T_{n-2,0}^{n-1,j}(t)$, $H_{m+1}^{(j)}(t)$ для $j=\overline{0,n-2}$ и строкой из элементов $\bar T_{00}^{n-1,n-1}(t),\ldots,\bar T_{n-2,0}^{n-1,n-1}(t),\bar H_{m+1}^{(n-1)}(t)$ для $j=n-1$, а $A_{i+1,n}$, $i=\overline{0,n-1}$, – алгебраическое дополнение $(i+1)$–го элемента последнего столбца определителя $\bar\omega(1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I–V. Тогда на отрезке $[a,1]$ для решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (3), (2) при $\varepsilon\to 0$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon\to 0$ оценки:*

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\leqslant\frac{K}{\bar\omega(1)}(|\alpha_0|+\cdots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),\quad i=\overline{0,m-1},$$
$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\leqslant\frac{K}{\bar\omega(1)}\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{i-m}}\exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)(|\alpha_0|+\cdots+|\alpha_{n-1}|+\|F(t)\|),\quad i=\overline{m,n-1},$$

где $\bar\omega(1)$ имеет вид (5), а $K>0,\gamma>0$, – некоторые постоянные, независящие от ε.

Введем понятие порядка начального скачка.

Определение. *Будем говорить, что решение интегро-дифференциальной задачи (3), (2) обладает в точке $t=a$ явлением начального скачка k–го порядка, если оно в этой точке имеет следующий порядок роста:*

$$y^{(k+1)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad y^{(k+2)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\ldots,\quad y^{(n-1)}(a,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-k}}\right),\quad\varepsilon\to 0.$$

Из теоремы 2 следует, что значения $y^{(i)}(a,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, ограничены при $\varepsilon\to 0$, а значения $y^{(i)}(a,\varepsilon)$, $i=\overline{m+1,n-1}$, при $\varepsilon\to 0$ являются бесконечно большими порядка $O(1/\varepsilon^{i-m})$, т.е. решение задачи (3), (2) в точке $t=a$ обладает явлением начального скачка m–го порядка.

Пусть $\bar{y}(t)$ является решением видоизмененного невозмущенного уравнения

$$L_0\bar{y} = F(t) + \int\limits_0^1 [H_0(t,x)\bar{y}(x) + \cdots + H_{m+1}(t,x)\bar{y}^{(m+1)}(x)]\,dx + \Delta(t) \tag{12}$$

с начальными условиями

$$\bar{y}^{(i)}(1) = \alpha_i, \qquad i = \overline{0, n-1}, \tag{13}$$

где

$$\Delta(t) = \frac{\bar{\omega}_n(1)}{\bar{\omega}(1)} H_{m+1}(t,a). \tag{14}$$

Здесь $\bar{\omega}(1)$ имеет вид (5), $\bar{\omega}_n(1)$ — определитель, получаемый из $\bar{\omega}(1)$ заменой его n–го столбца столбцом $\alpha_0 - P(1), \ldots, \alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(1)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия I–V. Тогда для разности между решениями сингулярно возмущенной задачи (3), (2) и измененной невозмущенной задачи (12), (13) на отрезке* $a \leqslant t \leqslant 1$ *справедливы асимптотические оценки:*

$$\left| y^{(i)}(t,\varepsilon) - \bar{y}^{(i)}(t) \right| \leqslant K\varepsilon, \quad i = \overline{0, m-1},$$
$$\left| y^{(i)}(t,\varepsilon) - \bar{y}^{(i)}(t) \right| \leqslant K\varepsilon + \frac{K}{\varepsilon^{i-m}} \exp\left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon} \right), \quad i = \overline{m, n-1},$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ – некоторые постоянные, независящие от ε.

Из теоремы 3 следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной задачи (3), (2) при $\varepsilon \to 0$ имеет конечный предел $\bar{y}(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \bar{y}^{(i)}(t), & i = \overline{0, m-1}, \quad a \leqslant t \leqslant 1, \\ \bar{y}^{(i)}(t), & i = \overline{m, n-1}, \quad a < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Однако, оказывается, что $\bar{y}(t)$ не является решением обычного невозмущенного уравнения, получаемого из (3) при $\varepsilon = 0$, а удовлетворяет измененному невозмущенному уравнению (12) и начальным условиям (13), где $\Delta(t)$ — так называемый начальный скачок интегрального члена, выражаемый формулой (14).

Цитированная литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. 1973.

2. **Иманалиев М.И.** Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе 1972.

3. **Касымов К.А., Дауылбаев М.К.** // Известия ВУЗов. Математика. Казань 2003. № 7 (494). С. 70–75.

4. **Noaillon P.** Developpements asymtotiques dans les equations differentialles lineares a parametre variable. – Mem. Soc. Sci. Liege, 3, 11 (1912).

5. **Шабат А.Б.** // УМН, 1962. Т.XVII, Вып. 1(103), С. 235–241.

Поступила в редакцию 05.04.2007 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 31 – 35*

УДК 510.67

О-МИНИМАЛЬНЫЕ ОБОГАЩЕНИЯ И ОДНОМЕСТНЫЕ ФУНКЦИИ

Б. С. Байжанов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 baizhanov@ipic.kz, baizhanov@hotmail.com

Получен критерий существенности о-минимального обогащения моделей о-минимальных теорий с плотным линейным порядком, допускающих сокращение воображаемых элементов, в терминах частичных одноместных функций (Теорема 1).

Определение 1 ([1])**.** *Модель M сигнатуры Σ упорядочено минимальная (о-минимальная), если некоторая формула сигнатуры Σ задает линейный порядок и ее любое формульное множество, определимое с параметрами из M, есть объединение конечного числа открытых интервалов и элементов.*

Всюду в статье предполагается, что формульный линейный порядок плотный. Модель с формульным плотным линейным порядком будем называть плотной, а ее теорию — плотной. Формульно определимые множества, отношения, функции модели $M = \langle M, \Sigma\rangle$ будем называть M-определимыми или определимыми в M. Теория о-минимальная, если хотя бы одна из ее моделей о-минимальная. Теория сильно о-минимальная, если все ее модели о-минимальные. Доказано [2], [3], что классы о-минимальных и сильно о-минимальных теорий совпадают.

Определение 2. *(i) Говорят, $M^+ = \langle M, \Sigma^+\rangle$ есть обогащение M, если $M = \langle M, \Sigma\rangle$ и $\Sigma \subset \Sigma^+$. В этом случае теорию $T^+ = Th(M^+)$ назовем обогащением теории $T = Th(M)$.*
(ii) Обогащение M^+ модели M существенно, если существует $P^n \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$, что для любой формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, $l(\bar{x}) = n$ сигнатуры Σ, для любого кортежа элементов $\bar{a} \in M$ верно $P((M^+)^n) \neq \Phi(M^n, \bar{a})$.

Определение 3 ([4])**.** *Говорят, что теория T сигнатуры Σ допускает сокращение воображаемых элементов, если для всех $M \in Mod(T)$, для любой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры Σ, для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ существует $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in M^n$, такой что для любого элементарного расширения $M' \succ M$ и любого автоморфизма $f \in Aut(M')$ верно, что*

$$\forall \bar{c} \in M'[\phi(\bar{c}, \bar{a}) \Leftrightarrow \phi(f(\bar{c}), \bar{a})] \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} f(b_i) = b_i.$$

Keywords: *o-minimal, expansion, unary function, elimination of imaginaries*
2000 Mathematics Subject Classification: 03C64

Теорема 1. *Пусть T — о-минимальная плотная теория, допускающая сокращение воображаемых элементов, $M \in Mod(T)$, M^+ — о-минимальное обогащение модели M. M^+ является существенным обогащением модели M тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение D^+ модели M^+, что класс всех D^+-определимых частичных одноместных функций не совпадает с классом всех D-определимых частичных одноместных функций.*

Доказательство. Достаточность следует из определения.

Необходимость.

Лемма 1. *Пусть D^+ — ω-насыщенное элементарное расширение модели M^+. Если каждая одноместная D^+-определимая функция определима в D, то каждое D^+ – определимое множество определимо в D.*

Доказательство. Покажем индукцией по n:
$(1)_n$ Каждое определимое множество в $(D^+)^n$ определимо в D.
$(2)_n$ Каждая частичная D^+-определимая функция $f : (D^+)^n \to D$ определима в D.

Для $n = 1$, $(2)_1$ условие Леммы, $(1)_1$ следует из $(2)_1$ и о-минимальности D^+.

$(1)_{n+1}$ Пусть $R \subset (D^+)^{n+1}$ — определимое множество. Пусть S — проекция R на $(D^+)^n$.

$$\begin{aligned} S &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists y(R(\bar a, y))\}, \\ S_\infty &:= \{\bar a \in S : D^+ \models \exists^\infty y(R(\bar a, y))\}, \\ S_m &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R(\bar a, y))\}. \end{aligned}$$

S_∞ определимо в D^+ потому, что для плотной о-минимальной теории верна формульная определимость свойства бесконечности формульного множества, то есть для любой формулы $\phi(x, \bar y)$ существует $n_\phi < \omega$, что если $\forall \bar y \exists^{>n_\phi} x\phi(x, \bar y)$, то $\exists^\infty x\phi(x, \bar y)$. В противном случае по теореме компактности А.И. Мальцева [5] приходим к существованию бесконечного, дискретно упорядоченного, определимого множества в о-минимальной модели с плотным линейным порядком. Противоречие с о-минимальностью. Положим $l = n_R$.

По индукционному предположению $(1)_n$ $S, S_1, ..., S_l, S_\infty$ определимы в D. Определим для m $(1 \le m \le l)$

$$\begin{aligned} R_{i,m} := \{&(\bar a, b) \in R : \bar a \in S_m, 1 \le i \le m, b - i\text{-ый элемент,} \\ &\text{принадлежащий } R(\bar a, D^+)\}. \end{aligned}$$

Так как $R_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $R_{i,m}$ определим в D.

Рассмотрим $R' = S_\infty \times M - R$. R' определим в D^+. Пусть

$$\begin{aligned} P_m &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R'(\bar a, y))\}, \\ P_\infty &= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^\infty y(R'(\bar a, y))\}, \\ P_{i,m} &= \{(\bar a, b) : \bar a \in P_m, 1 \le i \le m, b - i\text{-ый элемент} \\ &\qquad \text{принадлежащий } R'(\bar a, D^+)\}. \end{aligned}$$

Пусть $N = n_{R'}$. Так как $P_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $P_{i,m}$ определим в D. Очевидно, $S_\infty = P_1 \dot\cup P_2 \dot\cup \ldots \dot\cup P_N \dot\cup P_\infty$.

Рассмотрим P_∞. Определяем формулу $\phi(\bar x, y)$ следующим образом: для любых $\bar a, b \in D^+$,

$$\models \phi(\bar a, b) \ \Leftrightarrow \models P_\infty(\bar a) \text{ и } b \text{ является граничной точкой } R(\bar a, D^+).$$

Число граничных точек для любого $\bar{a}$ не превышает $2k$, где $k = k_\phi < \omega$ — максимальное число $\neg\phi(\bar{a}, D^+)$-отделимых интервалов и изолированных точек, лежащих в множестве реализации $\phi(\bar{a}, D^+)$. Для любой формулы $\phi(\bar{y}, x)$ о-минимальной теории существование $k_\phi < \omega$ следует из теоремы компактности.

Рассмотрим функции $\phi_i,\ \psi_i,\ 0 \le i \le k-1$,

$$\begin{aligned} \phi_i(\bar{a}) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in P_\infty \text{и } b \text{ есть начальная точка } i\text{-ого интервала или} \\ & \qquad i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar{a}, D^+); \\ \psi_i(\bar{a}) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in P_\infty \text{ и } b \text{ есть концевая точка } i\text{-ого интервала или} \\ & \qquad i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar{a}, D^+). \end{aligned}$$

Очевидно, ϕ_i, ψ_i определимы в D^+ и, следовательно, определимы в D.
Обозначим

$$\begin{aligned} \theta_i(\bar{x}, y) \quad = \quad & P_\infty(\bar{x}) \wedge (\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \to \phi_i(\bar{x}) < y < \psi_i(\bar{x})) \wedge \\ & \wedge[(\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}, \phi_i(\bar{x}))) \to \phi_i(\bar{x}) \le y < \psi_i(\bar{x})] \wedge \\ & \wedge[(\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}, \psi_i(\bar{x}))) \to \psi_i(\bar{x}) < y \le \psi_i(\bar{x})] \wedge \\ & \wedge[(R(\bar{x}, \phi_i(\bar{x})) \wedge R(\bar{x}, \psi_i(\bar{x}))) \to \phi_i(\bar{x}) \le y \le \psi_i(\bar{x})]. \end{aligned}$$

Тогда

$$R(\bar{x}, y) = \bigcup_{1 \le m \le l,\ 1 \le i \le m} R_{i,m}(\bar{x}, y) \cup \bigcup_{i<k} \theta_i(\bar{x}, y) \cup \bigcup_{1 \le m \le N,\ 0 \le i \le m+1} Q_{i,m},$$

где

$$Q_{i,m}(\bar{x}, y) = P_m(\bar{x}) \wedge P_{i-1,m}(\bar{x}) < y < P_{i,m}(\bar{x}).$$

В нашем случае $P_{0,m}(\bar{x}) = -\infty,\ P_{m+1,m}(\bar{x}) = \infty$.

Таким образом, множество R представляется в виде конечного объединения попарно не пересекающихся D-определимых множеств и, следовательно, R есть D-определимое множество.

$(2)_{n+1}$ Пусть $f : (D^+)^{n+1} \to D^+$ — частичная определимая функция в D^+. Обозначим $H(x) = \exists\bar{z}\exists y(f(\bar{z}, x) = y)$. По $(1)_1$ H является D-определимой формулой и по $(2)_n$ для любого $a \in H(D^+)$ функция

$$f_a : (D^+)^n \to D^+,\ f_a(\bar{x}) = f(\bar{x}, a)$$

является D-определимой при помощи функции $G_a(\bar{c}, \bar{x}),\ \bar{c} \in D^k,\ G_a(\bar{y}, \bar{x})$ без параметров.

Предложение 1. *Существует конечное число функций $G_1(\bar{x}, \bar{y}_1), \ldots, G_m(\bar{x}, \bar{y}_m)$ таких, что $\forall a \in H(D^+)$ существует $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\exists \bar{c}_a \in D^{l(\bar{y}_i)}$, что*
$\forall\bar{x}[[G_i(\bar{x}, \bar{c}_i) = f(\bar{x}, a)] \wedge [G_i(\bar{x}, \bar{c}_i)$ неопределена $\Leftrightarrow f(\bar{x}, a)$ неопределена$]]$.

Доказательство. Предположим противное, то есть существует бесконечное число функций $\{G_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i \in J\}$, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $G_j(\bar{x}, \bar{c}_a)$, что $G_i(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$ и $\forall j \in J$ существует подходящая a_j, что $\forall j_1 \ne j,\ j_1 \in J$, верно

$$\models \forall\bar{y}[G_{j_1}(\bar{x}, \bar{y}) \ne f(\bar{x}, a_j)].$$

Тогда следующее множество локально совместно по отношению к $\mathrm{Th}(D^+, \bar{d})$, где $\bar{d} \in D^+$ — кортеж элементов, участвующих в определении $f(\bar{x}, x)$,

$$\{\forall y_j(G_j(\bar{x}, \bar{y}_j) \ne f(\bar{x}, x) : j \in J)\} \cup \{H(x)\}.$$

Так как D^+ является ω-насыщенной моделью, то существует $a \in D^+$, удовлетворяющий этому множеству формул. Последнее противоречит определению множества функций $G_i(\bar{x}, \bar{y}_i)$. Предложение доказано.

Без потери общности можно считать, что существует только одна функция $G(\bar{y}, \bar{x})$ (без параметров) сигнатуры модели D, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $\bar{c}_a \in D$, что $G(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$. Определим $\bar{c} \sim \bar{c}',\ \bar{c}, \bar{c}' \in D^k \Leftrightarrow \forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}'))$.

Существование D-определимой функции $h : D^k \to D^j$ такой, что $\forall \bar{c}, \bar{c}' \in D$

$$[h(\bar{c}) = h(\bar{c}') \Leftrightarrow G'(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}')],$$

следует из условия Теоремы 1 о сокращении воображаемых элементов.

Пусть $h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y})$ — функции такие, что $\forall \bar{c} \in D^k,\ h(\bar{c}) = \langle h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y}) \rangle$. Определим графики D^+-определимых одноместных функций:

$$K_i(x, z) = H(x) \wedge \exists \bar{y}(\forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, x) \wedge h_i(\bar{y}) = z)),\ i \in \{1, \ldots, j\}.$$

$K_i(x, z)$ являются D-определимыми по условию Леммы. Пусть $d_i(x) = z \Leftrightarrow K_i(x, z)$. Тогда следующая формула определяет график D-определимой $(n+1)$-местной функции:

$$H(x) \wedge \exists \bar{y}(h(\bar{y}) = \langle d_1(x), \ldots, d_j(x) \rangle \wedge G(\bar{x}, \bar{y}) = z),$$

которая совпадает с графиком f. Лемма доказана.

Замечание. Аналогичная теорема была доказана Е. Хрушовским для любого сильно минимального обогащения алгебраически замкнутого поля [6]. Можно отметить, что его доказательство проходит и для любой сильно минимальной теории, допускающей сокращение воображаемых элементов. Наше доказательство базируется на схеме его доказательства, только для другого класса теорий. Отметим, В.В. Вербовский доказал [7], что сильно минимальная нелокально модулярная теория, построенная Хрушовским, не допускает сокращение воображаемых элементов, и построил [8] не локально модулярную сильно минимальную теорию бесконечной сигнатуры, в которой не интерпретируется алгебраически замкнутое поле, и которая допускает сокращение воображаемых элементов. Принимая во внимание результаты Б. Пуаза [4], В.В. Вербовского [7]-[8], А. Пиллая [9], Тцубои [10], можно сформулировать

Гипотеза. *Пусть T — сильно минимальная теория конечной сигнатуры. T допускает сокращение воображаемых элементов тогда и только тогда, когда T есть обогащение теории алгебраически замкнутого поля.*

Цитированная литература

1. **Van den Dries L.** // **Logic Colloquim '82** (G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja, editors), North-Holland, Amsterdam, 1984. P. 97-121.

2. **Pillay A., Steinhorn Ch.** // Trans. Amer. Math. Soc. 300. 1988. P.469-476.

3. **Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch.** // Trans. Amer. Math. Soc. 295. 1986. P. 593-605.

4. **Poizat B.** // Journal of Symbolic Logic. V. 48. 1983. P. 1151-1171.

5. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика, М., Наука, 1979.

6. **Hrushovski E.** // Israel Journal of Mathematics. V.79. ????. P. 129-151.

7. **Вербовский В.В.** // Тезисы докладов 1-ого Съезда математиков Казахстана. Шымкент. 1996. С. 178-179

8. **Вербовский В.В.** // Депонирована в КазгосИНТИ 15 марта 2002. №8909-Ка 02.
9. **Pillay A.** // Journal of Symbolic Logic. V. 56. 1991. P. 1003-1011.
10. **Tsuboi A.** // Journal of Symbolic Logic. V. 58. 1993. P. 232-239.

Поступила в редакцию 14.05.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С.36 – 48*

УДК 517.51

МЕТОД МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
г.Караганда, ул. Университетская 28

В статье вводится метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств, изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Лебега. Показано, что результатом интерполяции пространств Лебега со смешанной метрикой относительно введенного метода является многопараметрическое анизотропное пространство Лебега.

Интерполяционные методы функциональных пространств являются одним из мощных аппаратов математического анализа. Исследованиям в данной области посвящены работы многих авторов, результаты которых отражены в монографиях Й. Берга, Й. Лефстрема [1], Х. Трибеля [2], Ю.А. Брудного, С.Г. Крейна, Е.М. Семенова [3].

Однако до сих пор остается много проблем в теории интерполяции анизотропных пространств. Исследованию данного вопроса посвящены работы Г. Спарра [4], Д.Л. Фернандеса [5] – [7], Ф. Кобоша и Ж. Петре [8], Крепкогорского [9] – [11] и других. В работе Е.Д. Нурсултанова [12] введен и изучен метод интерполяции для анизотропных пространств, который позволил описать пространства, полученные интерполированием пространств Лебега со смешанной метрикой.

Данная работа продолжает исследования в данном направлении.

В первой части работы вводятся анизотропные пространства Лебега, являющиеся обобщением пространств Лебега со смешанной нормой [13] и анизотропных пространств Лоренца [12], изучены их свойства.

Во второй части работы вводится метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств, изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Лебега относительно данного метода.

Keywords: *interpolation, multi parametric anisotropic Lebeg space, Lebeg spaces with mixed metrics*
2000 Mathematics Subject Classification: 46B70, 46M35

Анизотропные пространства Лебега.

Пусть $\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$, тогда $1/\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 1/p_{11} & \dots & 1/p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/p_{n1} & \dots & 1/p_{nm} \end{pmatrix}$. Выражение $\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}_1$ понимается как обычное сложение матриц. Отношения $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1$, $\vec{\mathbf{p}} \geqslant \vec{\mathbf{p}}_1$ и $\vec{\mathbf{p}} > \vec{\mathbf{p}}_1$ означают соответственно выполнение отношений $p_{ij} = p_{ij}^1$, $p_{ij} \geqslant p_{ij}^1$ и $p_{ij} > p_{ij}^1$ для всех i и j. Запись $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_m})$ означает, что $\mathbf{p_j} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$ для $j = 1, \dots, m$. Для вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots k_n)$ выражение $\mathbf{k}^{\mathbf{p_j}}$ означает $k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n}$.

Пусть $\{a\} = \{a_{k_1,\dots,k_n}\}$ – последовательность, определенная в $\mathbb{N}^m = \mathbb{N}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{m_n}$, $* = (*_1, \dots, *_n) = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, \dots, n\}$. Через $\{a^*\} = \left\{a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n}\right\}_{\mathbf{l=1}}^{\infty}$ обозначим последовательность, полученную применением невозрастающей перестановки к последовательности $\{a_{k_1,\dots,k_n}\}_{\mathbf{k=1}}^{\infty}$ последовательно по индексам $k_{j_1}, \dots, k_{j_n}$. Данную последовательность $\{a^*\}$ назовем невозрастающей перестановкой последовательности $\{a\}$, соответствующей вектору $* = (*_1, \dots, *_n)$.

Аналогично для измеримой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, заданной в $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n}$, через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ в $\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n}$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(\mathbf{t})$ будем называть *невозрастающей перестановкой функции f в* $\mathbb{R}^m = (\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n})$, соответствующей вектору $* = (*_1, \dots, *_n)$.

Пусть $0 < \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$, то есть $0 < p_{ij} \leqslant \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, при этом, если $p_{ij} = \infty$, то будем считать, что $p_{ij+1} = \dots = p_{im} = \infty$. Далее везде при $p = \infty$ выражения $\left(\int_b^a (f(t))^p\, dt\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{k=m}^{n} (a_k)^p\right)^{1/p}$ понимаем как $\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)$ и $\sup\limits_{m\leqslant k\leqslant n} a_k$ соответственно.

Дискретным анизотропным пространством Лебега $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ назовем множество всех последовательностей $\{a\}$, для которых конечна величина

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a),$$

где функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a) = \Phi^*_{\mathbf{p}_1\dots\mathbf{p}_m}(a)$ определяется следующим образом.

Пусть

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} |a_{k_1,\dots,k_n}|^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}} \dots\right)^{1/p_{n1}}.$$

Далее положим

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}(f) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\xi_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{12}}\right)^{p_{22}/p_{12}} \dots\right)^{1/p_{n2}},$$

где последовательность

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(a) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \dots \left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n}\right)^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}} \dots\right)^{1/p_{n1}}. \tag{1}$$

Положим

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_{m-1}}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}(\xi_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\dots\right)^{1/p_{nm-1}}. \qquad (2)$$

Тогда функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a) = \Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_m}(a)$ определяется следующим образом:

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_m}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}(\eta_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\dots\right)^{1/p_{nm-1}}, \qquad (3)$$

где последовательность

$$\eta_{k_1,\dots,k_n}(a) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\dots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1}\left(\xi^{*_1,\dots *_n}_{l_1,\dots,l_n}(a)\right)^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\dots\right)^{1/p_{nm-1}} \qquad (4)$$

и $\xi^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n}(a)$ – из представления (2).

Анизотропным пространством Лебега $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)$ назовем множество измеримых в $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{m_n}$ функций f, для которых

$$\|f\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)} = \Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(f) < \infty,$$

где функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(f)$ определяется следующим образом:

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1}(f) = \left(\int_0^{\infty}\dots\left(\int_0^{\infty}|f(t_1,\dots,t_n)|^{p_{11}}\,dt_1\right)^{p_{21}/p_{11}}\dots dt_n\right)^{1/p_{n1}},$$

а

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_m}(f) = \Phi^*_{\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_m}(\xi(f)),$$

где последовательность

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(f) = \left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}}\dots\left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}(f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)dt_1)^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}}\dots dt_n\right)^{1/p_{n1}} \qquad (5)$$

и функционал $\Phi^*_{\mathbf{p}_2\dots\mathbf{p}_m}(\cdot)$ определен равенством (3).

Пространство $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_1\times\dots\times\Omega_n, \Omega_j\subset\mathbb{R}^{m_j}$, определяется нормой

$$\|f\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)} = \|f_\Omega\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)},$$

где f_Ω – нулевое продолжение функции f с области Ω на все $\mathbb{R}^m$.

Пусть $0 < \vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m) \leqslant \infty$. Для $0 < \vec{\mathbf{h}} = (\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_{m-1}) \leqslant \infty$ определим функционал $\Phi^{\vec{\mathbf{h}}*}_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$ также, как и $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$, только $\eta_{k_1,\dots,k_n}(\cdot)$ в формуле (4) будут определяться, как

$$\eta^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\dots,k_n}(\cdot) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\dots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} l_1^{\frac{h_{1m-1}}{p_{1m-1}}-1}\dots l_n^{\frac{h_{nm-1}}{p_{nm-1}}-1}\left(\xi^{*_1,\dots *_n}_{l_1,\dots,l_n}(\cdot)\right)^{h_{1m-1}}\right)^{\frac{h_{2m-1}}{h_{1m-1}}}\dots\right)^{\frac{1}{h_{nm-1}}},$$

а $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(a)$ и $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(f)$ в формулах (1) и (5) соответственно:

$$\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(a)=\left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\ldots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1}l_1^{h_{11}/p_{11}-1}\ldots l_n^{h_{n1}/p_{n1}-1}\left(a^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}\right)^{h_{11}}\right)^{h_{21}/h_{11}}\ldots\right)^{1/h_{n1}},$$

$$\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(f)=\left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}}\ldots\left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}\left(t_1^{1/p_{11}}\ldots t_n^{1/p_{n1}}f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)\right)^{h_{11}}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{h_{21}/h_{11}}\ldots\frac{dt_n}{t_n}\right)^{1/h_{n1}}.$$

Лемма 1. *Для* $0<\vec{\mathbf{p}}=(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m)\leqslant\infty$ *и* $0<\vec{\mathbf{h}}=(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{m-1})\leqslant\infty$ *функционал* $\Phi^{\vec{\mathbf{h}}*}_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$ *определяет эквивалентную нормировку анизотропных пространств Лебега.*

Доказательство. Для последовательности $\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)$, невозрастающей по каждому индексу, имеем

$$C_1^1\sup_{\substack{2^{k_1}\leqslant l_n<2^{k_1+1}\\2^{k_n}\leqslant l_n<2^{k_n+1}}}l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)\leqslant\eta_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)\leqslant$$

$$\leqslant C_1^2\sup_{\substack{2^{k_1-1}\leqslant l_n<2^{k_1}\\2^{k_n-1}\leqslant l_n<2^{k_n}}}l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)$$

и

$$C_2^1\sup_{\substack{2^{k_1}\leqslant l_n<2^{k_1+1}\\2^{k_n}\leqslant l_n<2^{k_n+1}}}l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)\leqslant\eta^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)\leqslant$$

$$\leqslant C_2^2\sup_{\substack{2^{k_1-1}\leqslant l_n<2^{k_1}\\2^{k_n-1}\leqslant l_n<2^{k_n}}}l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot).$$

Аналогичные оценки получаем для $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(a)$ и $\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(a)$, $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(f)$ и $\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(f)$.

Замечание 1.*При* $m=1$ *пространства* $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ *представляют собой дискретные пространства Лебега* $l_{\mathbf{p}}$, *в случае* $m=2$ *– дискретные анизотропные пространства Лоренца* $l^*_{\mathbf{pq}}$, *а пространства* $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ *– пространства Лебега* $L_{\mathbf{p}}$ *и анизотропные пространства Лоренца* $L^*_{\mathbf{pq}}$ *соответственно (см. [13], [12]).*

Теорема 1. а) *Пусть* $\mathbf{0}<\vec{\mathbf{p}_1}\leqslant\vec{\mathbf{p}}\leqslant\infty$. *Тогда справедливо вложение*

$$l^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}\hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}.$$

б) *Пусть* $\mathbf{0}<\vec{\mathbf{p}_1}\leqslant\vec{\mathbf{p}}\leqslant\infty$ *и* $r=\min\{j:p^1_{ij}<p_{ij},i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m\}$. *Тогда при* $r\geqslant2$ *выполняется вложение*

$$L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega)\hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega),$$

а при $r=1$ *и meas* $(\Omega_i)=|\Omega_i|<\infty$ $(i=1,\ldots,n)$ *выполняется вложение*

$$L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)\hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega).$$

Доказательство. а) Пусть $\vec{\mathbf{p}_1}<\vec{\mathbf{p}}$. Положим сначала, что $p^1_{ij}=p_{ij}$ для всех $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m-1$, а $p^1_{im}<p_{im}$ для всех $i=1,\ldots,n$,. Тогда справедливость вложения

$$l^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}\hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$$

вытекает из неравенства $\left(\sum\limits_k |a_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum\limits_k |a_k|^{p_1}\right)^{1/p_1}$ при $0 < p_1 < p \leqslant \infty$.

Если же $p_{ik}^1 = p_{ik}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, j-1$ и $p_{ij}^1 < p_{ij}$ для некоторого $j = 1, \ldots, m-1$, то согласно предыдущему достаточно доказать вложение $l^*_{\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{j-1} \mathbf{p}_j^1 \infty} \hookrightarrow l^*_{\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{j-1} \mathbf{p}_j \mathbf{1}}$.

Используя эквивалентную нормировку пространства, имеем

$$\|a\|_{l^*_{\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{j-1} \mathbf{p}_j \mathbf{1}}} = \sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{1/p_{1j}-1} \ldots k_n^{1/p_{nj}-1} \eta^{*_1, \ldots, *_n}_{k_1, \ldots, k_n}(a) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{k_1 \geqslant 1 \\ k_n \geqslant 1}} k_1^{1/p_{1j}^1} \ldots k_n^{1/p_{nj}^1} \eta^{*_1, \ldots, *_n}_{k_1, \ldots, k_n}(a) \sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{1/p_{1j}-1/p_{1j}^1-1} \ldots k_n^{1/p_{nj}^1-1/p_{nj}-1} =$$

$$= C(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \|a\|_{l^*_{\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{j-1} \mathbf{p}_j^1 \infty}}.$$

В случае, если $\vec{\mathbf{p}_1} \leqslant \vec{\mathbf{p}}$, то вложение доказывается по той же схеме по тем параметрам, для которых $p_{ij}^1 < p_{ij}$.

б) Пусть $\vec{\mathbf{p}_1} < \vec{\mathbf{p}}$, тогда вложение $L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$ при $r \geqslant 2$ выполняется на основании пункта а), так как

$$\|f\|_{L_{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \cdots \vec{p}_m}(\Omega)} = \|\xi(f_\Omega)\|_{l_{\vec{p}_2 \cdots \vec{p}_m}}.$$

Докажем вложение $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega)$ при $r = 1$ и $|\Omega_i| < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. На основании первой части достаточно доказать вложение $L^*_{\mathbf{p}\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\mathbf{p}_1 \mathbf{1}}(\Omega)$.

Используя эквивалентность норм пространств в данном случае нормам анизотропных пространств Лоренца, имеем

$$\|f\|_{L^*_{\mathbf{p}_1 \mathbf{1}}(\Omega)} = \int_0^{|\Omega_n|} \ldots \int_0^{|\Omega_1|} t_1^{1/p_1^1} \ldots t_n^{1/p_n^1} f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{t_1 > 0 \\ t_n > 0}} t_1^{1/p_1} \ldots t_n^{1/p_n} f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) \int_0^{|\Omega_n|} \ldots \int_0^{|\Omega_1|} t_1^{1/p_1^1-1/p_1-1} \ldots t_n^{1/p_n^1-1/p_n-1} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= C(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \Omega) \|f\|_{L^*_{\mathbf{p}\infty}(\Omega)}.$$

В случае же $\vec{\mathbf{p}_1} \leqslant \vec{\mathbf{p}}$ применяются те же рассуждения, что и в пункте а).

Лемма 2. а) *Для последовательностей*

$$\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}} = \{a_{k_1, \ldots, k_n}\}_{k_1 \in \mathbb{N}^{m_1}, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^{m_n}} \text{ и } \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}} = \{b_{k_1, \ldots, k_n}\}_{k_1 \in \mathbb{N}^{m_1}, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^{m_n}}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{m}}} |a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}| \leqslant \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}} a^*_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}}.$$

б) *Для измеримых в* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n}$ *функций* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \ldots, x_n)$ *выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n_+} f^*(\mathbf{t}) g^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Доказательство. а) Для произвольных номеров $m_1, \ldots, m_n$ последовательным применением неравенства $\sum_k |a_k b_k| \leqslant \sum_k a_k^* b_k^*$ [14] и заменой порядков суммирования получаем

$$\sum_{k_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{m_1} |a_{k_1,\ldots,k_n} b_{k_1,\ldots,k_n}| \leqslant \sum_{k_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1} b_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1}} b_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1}} = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1}} b_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1},*_n} b_{k_1,\ldots,k_{n-1},k_n}^{*_1,\ldots,*_{n-1},*_n} = \sum_{k_n=1}^{m_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} b_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} b_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} = \sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} a_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} b_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n}.$$

Переходя к пределу при $m_1 \to \infty, \ldots, m_n \to \infty$ получаем требуемое неравенство.

б) Доказательство для простых функций вытекает из пункта а). В общем случае применяем предельный переход от последовательностей простых функций, приближающих функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$.

Теорема 2. *.[Неравенство Гельдера] Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{1}/\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{1}/\vec{\mathbf{p}'} = \mathbf{1}$. *Тогда*

а) *для* $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{m}}} \in l_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и* $b = \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{m}}} \in l_{\vec{\mathbf{p}'}}$ *последовательность* $ab = \{a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}\}$ *суммируема и выполняется неравенство*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{n}}} |a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}| \leqslant \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}'}}},$$

б) *для* $f(\mathbf{x}) \in L_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и* $g(\mathbf{x}) \in L_{\vec{\mathbf{p}'}}$ *функция* $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *интегрируема в* $\mathbb{R}^m$ *и выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}'}}}.$$

Доказательство. а) Согласно лемме 2 а) и неравенству Гельдера для $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ получаем

$$\sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} |a_{k_1,\ldots,k_n} b_{k_1,\ldots,k_n}| \leqslant \sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} a_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} b_{k_1,\ldots,k_n}^{*_1,\ldots,*_n} =$$

$$= \sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} \sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \cdots \sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} a_{l_1,\ldots,l_n}^{*_1,\ldots,*_n} b_{l_1,\ldots,l_n}^{*_1,\ldots,*_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \cdots \left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(a_{l_1,\ldots,l_n}^{*_1,\ldots,*_n} \right)^{p_{11}} \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \cdots \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \times$$

$$\times \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \left(\cdots \sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(b_{l_1,\ldots,l_n}^{*_1,\ldots,*_n} \right)^{p'_{11}} \right)^{\frac{p'_{21}}{p'_{11}}} \cdots \right)^{\frac{1}{p'_{n1}}} =$$

$$= \sum_{k_n\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{k_1\in\mathbb{N}} \xi_{k_1,\ldots,k_n}(a) \xi_{k_1,\ldots,k_n}(b) \leqslant \ldots \leqslant \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}'}}}.$$

б) Используя лемму 2 б), неравенство Гельдера для векторных $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ и далее неравенство, доказанное в пункте а), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^{m_n}} \ldots \int_{\mathbb{R}^{m_n}} |f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n)| dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \ldots \int_{\mathbb{R}_+} f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) g^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \ldots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \ldots \int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) g^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \ldots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(\int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \ldots \left(\int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} \left(f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n)\right)^{p_{11}} dt_1 \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \times$$

$$\times \left(\int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \ldots \left(\int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} \left(g^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n)\right)^{p'_{11}} dt_1 \right)^{\frac{p'_{21}}{p'_{11}}} \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{p'_{n1}}} =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \ldots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \xi_{k_1, \ldots, k_n}(f) \xi_{k_1, \ldots, k_n}(g) \leqslant \ldots \leqslant \|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}'}}.$$

Лемма 3. а) *Для последовательностей* $\{a_{k_1, \ldots, k_n}\}$ *и* $\{b_{k_1, \ldots, k_n}\}$ *справедливо неравенство*

$$(a+b)^{*_1, \ldots, *_n}_{l_1, \ldots, l_n} \leqslant a^{*_1, \ldots, *_n}_{[l_1/2], \ldots, [l_n/2]} + b^{*_1, \ldots, *_n}_{[l_1/2], \ldots, [l_n/2]}.$$

б) *Для функций* $f(x_1, \ldots, x_n)$ $g(x_1, \ldots, x_n)$ *справедливо неравенство*

$$(f+g)^{*_1, \ldots, *_n}(t_1, \ldots, t_n) \leqslant f^{*_1, \ldots, *_n}(t_1/2, \ldots, t_n/2) + g^{*_1, \ldots, *_n}(t_1/2, \ldots, t_n/2).$$

Доказательство получается последовательным применением неравенств

$$(a+b)^*_l \leqslant a^*_{[l/2]} + b^*_{[l/2]}, \qquad (f+g)^*(t) \leqslant f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

по каждому индексу и переменной.

Теорема 3 (Неравенство Минковского). *Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$. *Тогда*

а) *если последовательности* $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}}$ *и* $b = \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}}$ *принадлежат* $l_{\vec{\mathbf{p}}}$, *то последовательность* $a + b = \{a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}\}$ *также принадлежит* $l_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и выполняется неравенство*

$$\|a+b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \leqslant C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \right),$$

б) *если функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *принадлежат* $L_{\vec{\mathbf{p}}}$, *то функция* $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *также принадлежит* $L_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и выполняется неравенство*

$$\|f+g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \leqslant C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \right).$$

Доказательство. а) Согласно лемме 3 а) и неравенству Минковского для пространств $l_{\mathbf{p}}$ при $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ [13] имеем

$$\xi_{k_1, \ldots, k_n}(a+b) = \left(\sum_{l_n = 2^{k_n - 1}}^{2^{k_n} - 1} \left(\ldots \sum_{l_1 = 2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1} - 1} \left((a+b)^{*_1, \ldots, *_n}_{l_1, \ldots, l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \ldots \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{[l_1/2],\dots,[l_n/2]} + b^{*_1,\dots,*_n}_{[l_1/2],\dots,[l_n/2]} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{2^{1/p_1}} \left(\left(\sum_{l_n=2^{k_n-2}}^{2^{k_n-1}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-2}}^{2^{k_1-1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{l_n=2^{k_n-2}}^{2^{k_n-1}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-2}}^{2^{k_1-1}-1} \left(b^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} \right) =$$

$$= \mathbf{2^{1/p_1}} \left(\xi_{k_1-1,\dots,k_n-1}(a) + \xi_{k_1-1,\dots,k_n-1}(b) \right).$$

Аналогично получаем оценки и для $\eta_{k_1,\dots,k_n}(a+b)$.

В результате получим

$$\|a+b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(a+b))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_n m} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{2^{1/p_1}} \dots \mathbf{2^{1/p_{m-1}}} \left(\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_{nm}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(b))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_{nm}} \right) = C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \right).$$

б) Доказывается аналогично с использованием леммы 3 б) и неравенства Минковского для пространств $L_{\mathbf{p}}$ при $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

Метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств.

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 - значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ определяется индуктивно и называется *анизотропным пространством размерности n.*

Пусть $\mathbf{A_0} = (A_1^0, \dots, A_n^0)$ и $\mathbf{A_1} = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_1})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \| \dots \|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \dots \|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A_0} = (A_1^0, \dots, A_n^0)$ и $\mathbf{A_1} = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Пусть $* = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, \dots, n)$, вектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ сопоставим $\varepsilon^* = (\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}) \in E$. Определим K^* - функционал

$$K^*(\mathbf{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}) = \inf \left\{ \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} : a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon \right\},$$

где $\mathbf{t}^{\varepsilon} = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \vec{\mathbf{q}} \leqslant \infty$. Через $\mathbf{A}^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = (\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_{\varepsilon}$, для элементов которых верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \|\mathbf{t}^{-\theta} K^*(\mathbf{t}, a)\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})} < \infty,$$

здесь $L_{\vec{\mathbf{q}}}(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})$ определяется как пространство $L_{\vec{\mathbf{q}}}$ с выражением

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(f) = \left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}} \dots \left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}} (f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n))^{p_{11}} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/p_{n1}}.$$

Лемма 4. *Пусть* $(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})$ *– совместимая пара анизотропных пространств,*

$$E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}.$$

а) *Если* $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in E$ *такие, что* $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = 1$, *то* $(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = (\mathbf{A}_{\varepsilon_0}, \mathbf{A}_{\varepsilon_1})^*_{\eta\vec{\mathbf{q}}}$, *где* $\eta = (\mathbf{1} - \theta)\varepsilon_0 + \theta\varepsilon_1$.

б) *Если* $\vec{\mathbf{q_1}} < \vec{\mathbf{q}}$, *то* $(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q_1}}} \hookrightarrow (\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$.

в) *Пусть* $* = (j_1, \dots, j_n)$, $*_1 = (r_1, \dots, r_n)$ *– некоторые перестановки последовательности* $(1, \dots, n)$, *тогда выражение* $* \circ *_1 = (r_{j_1}, \dots, r_{j_n})$ *определяет перестановку последовательности* $(r_1, \dots, r_n)$, *соответствующую вектору* $* = (j_1, \dots, j_n)$. *Если* T *– линейный оператор такой, что* $T : \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \to \mathbf{B}_{\varepsilon}$, *с нормой* M_{ε} *для любого* $\varepsilon \in E$, *то*

$$T : \mathbf{A}^{*\circ *_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \to \mathbf{B}^{*_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}, \mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}, \mathbf{0} < \vec{\mathbf{q}} \leqslant \infty$$

с нормой $\|T\| \leqslant \max_{\varepsilon \in E} M_{\varepsilon}$.

Доказательство. а) Не уменьшая общности, можно считать, что $* = (1, \dots, n)$. Пусть $a \in (\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$, тогда

$$\|a\|_{(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\| \mathbf{t}^{-\theta} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^{\varepsilon} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})} =$$

$$= \left\| \mathbf{t}^{(\mathbf{1}-\theta)\varepsilon_0 - \theta\varepsilon_1} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon \in E} \left(\mathbf{t}^{-(1-\varepsilon)\varepsilon_0 + \varepsilon\varepsilon_1} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})}.$$

Сделаем замену $\mathbf{t}^{\varepsilon_0} \to \mathbf{t}^{-\varepsilon_0}$, то есть если $\varepsilon_j^0 = 1$, то $t_j \to 1/t_j$ и если $\varepsilon_j^0 = 0$ – замену не делаем. Тогда учитывая инвариантность выражения $\displaystyle\int f(t) \frac{dt}{t}$ относительно данной замены, получим

$$\|a\|_{(\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\| \mathbf{t}^{(\mathbf{1}-\theta)\varepsilon_0 - \theta\varepsilon_1} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon \in E} \left(\mathbf{t}^{-(1-\varepsilon)\varepsilon_0 + \varepsilon\varepsilon_1} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})} =$$

$$= \left\| \mathbf{t}^{-\eta} \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon' \in E} \mathbf{t}^{\varepsilon'} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})} = \|a\|_{(\mathbf{A}_{\varepsilon_0}, \mathbf{A}_{\varepsilon_1})^*_{\eta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

б) Доказательство следует из теоремы 1.

в) Пусть $*_2 = * \circ *_1$, тогда

$$\|Tb\|_{(\mathbf{B_0},\mathbf{B_1})^{*_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\| \mathbf{t}^{\theta} \inf_{Ta=\sum_{\varepsilon\in E} b_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} \|b_{\varepsilon^{*_1}}\|_{\mathbf{B}_{\varepsilon^{*_1}}} \right) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \mathbf{t}^{\theta} \inf_{Ta=\sum_{\varepsilon\in E} b_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon} M_\varepsilon \|a_{\varepsilon^{*_2}}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^{*_2}}} \right) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant \max_{\varepsilon\in E} M_\varepsilon \|a\|_{(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^{*_2}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \vec{\mathbf{p_0}} = (\mathbf{p^0_1}, \ldots, \mathbf{p^0_m}), \vec{\mathbf{p_1}} = (\mathbf{p^1_1}, \ldots, \mathbf{p^1_m}) \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{p^0_1} \neq \mathbf{p^1_1}$,

$$\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}, 0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty.$$

Тогда

а) $(l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$,

б) $(L^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}(\Omega), L^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}(\Omega))^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$,

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p^0_1} + \theta/\mathbf{p^1_1}$.

Доказательство. а) Согласно теореме 1 а) достаточно показать вложение $(l^*_{\mathbf{p^0_1}\infty}, l^*_{\mathbf{p^1_1}\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i = t^{\gamma_i}$, $\gamma_i = \frac{p^0_i p^1_i}{p^1_i - p^0_i}$, $0 < t_i < \infty$. Для последовательности $a \in \sum_{\varepsilon\in E} l^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}$ рассмотрим представление $a = \sum_{\varepsilon\in E} a(\varepsilon)$, $a(\varepsilon) \in l^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}$. Тогда получим

$$\sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p^0_1} \ldots k_{j_n}^{1/p^0_n} a^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n} \leqslant \sum_{\varepsilon\in E} \sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p^0_1} \ldots k_{j_n}^{1/p^0_n} a^{*_1,\ldots,*_n}_{[k_1/2^n],\ldots,[k_n/2^n]}(\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varepsilon\in E} t_1^{\varepsilon_1} \ldots t_n^{\varepsilon_n} \sup_{\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_1^{1/p^0_1} \ldots k_n^{1/p^0_n} a^{*_1,\ldots,*_n}_{[k_1/2^n],\ldots,[k_n/2^n]}(\varepsilon).$$

В последнем соотношении использовалось $k_{j_i}^{1/p^0_i - 1/p^{\varepsilon_i}_i} \leqslant t_i^{\varepsilon_i}$ при $k_{j_i} \leqslant v_i = t_i^{\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, n$.
Из произвольности представления $a = \sum_{\varepsilon\in E} a(\varepsilon)$ имеем

$$\sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p^0_1} \ldots k_{j_n}^{1/p^0_n} a^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n} \leqslant C_1 K^*(\mathbf{t}/2^n, a; l^*_{\mathbf{p^0_1}\infty}, l^*_{\mathbf{p^1_1}\infty}).$$

Тогда

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \left\| \mathbf{k}^{1/\mathbf{p_1}} a^*_{\mathbf{k}} \right\|_{l^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{k})} \leqslant C_2 \left\| \mathbf{k}^{-\theta(1/\mathbf{p^0_1} - 1/\mathbf{p^1_1})} \sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} \mathbf{k}^{1/\mathbf{p^0_1}} a^*_{\mathbf{k}} \right\|_{l^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{k})} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \left\| \mathbf{t}^{-\theta} K^*(\mathbf{t}/2^n, a; l^*_{\mathbf{p^0_1}\infty}, l^*_{\mathbf{p^1_1}\infty}) \right\|_{L^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{t})} = C_3 \|a\|_{(l^*_{\mathbf{p^0_1}\infty}, l^*_{\mathbf{p^1_1}\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

Здесь учитывается инвариантность выражения $\displaystyle\int f(t)\frac{dt}{t}$ относительно замен $t^\alpha \to t$ и $at \to t$, где α и a – постоянные.

Пункт б) доказывается анологично.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \vec{\mathbf{p_0}} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_{r-1}}, \mathbf{p^0_r}, \ldots, \mathbf{p^0_m}), \vec{\mathbf{p_1}} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_{r-1}}, \mathbf{p^1_r}, \ldots, \mathbf{p^1_m}) \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{p^0_r} \neq \mathbf{p^1_r}$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty$. *Тогда*

а) $(l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$,

б) $(L^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}(\Omega), L^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}(\Omega))^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$,

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_{r-1}}, \mathbf{p_r}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_r} = (1-\theta)/\mathbf{p^0_r} + \theta/\mathbf{p^1_r}$.

Доказательство. а) Согласно теореме 1 а) достаточно показать

$$(l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}.$$

Из определения пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}$ следует, что последовательности функционалов $\{\xi^i_{\mathbf{k}}(a)\}$, $1 \leqslant i < r$, входящих в определение норм пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}$, совпадают, так как первые $r-1$ координаты $\vec{\mathbf{p_0}}$ и $\vec{\mathbf{p_1}}$ равны. Определим отображение T следующим образом:

$$T(a) = \{\xi^{r-1}_{\mathbf{k}}(a)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}.$$

Данное отображение квазилинейно и для $j = 0, 1$ справедливо равенство

$$\|a\|l^*_{\mathbf{p_1}\dots\mathbf{p_{r-1}}\mathbf{p_r^j}\infty} = \|Ta\|_{l^*_{\mathbf{p_r^j}\infty}}.$$

Тогда согласно леммы 4 в), теоремы 4 а) и определения пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ имеем

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \|Ta\|_{l^*_{\mathbf{p_r},\mathbf{q_1},\dots,\mathbf{q_s}}} \leqslant \|Ta\|_{(l^*_{\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} \leqslant \|a\|_{(l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}},$$

что и доказывает вложение.

Пункт б) доказывается аналогично.

Пусть $0 < r, v < \infty$. Рассмотрим преобразования типа Харди и Белмана для последовательностей

$$h_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{1/r}} \left(\sum_{l=1}^{k} \left(a^*_l l^{1/r}\right)^v \frac{1}{l} \right)^{1/v} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$b_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{1/r}} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \left(a^*_l (l-k)^{1/r}\right)^v \frac{1}{l-k} \right)^{1/v} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

и для функций

$$H_{rv}\left(f(t)\right) = \frac{1}{t^{1/r}} \left(\int_0^t \left(f^*(s) s^{1/r}\right)^v \frac{ds}{s} \right)^{1/v},$$

$$b_{rv}\left(f(t)\right) = \frac{1}{t^{1/r}} \left(\int_t^\infty \left(f^*(s)(s-t)^{1/r}\right)^v \frac{ds}{s-t} \right)^{1/v}.$$

Лемма 5 ([12])**.** *Пусть* $0 < v \leqslant q \leqslant \infty$.

а) *Если* $0 < p < r \leqslant \infty$, *то преобразование типа Белмана ограничено в* l_{pq}, *т.е.*

$$\|b_{rv}(a)\|_{l_{pq}} \leqslant C\|a\|_{l_{pq}}.$$

б) *Если* $1 \leqslant r < p$, *то преобразование типа Харди ограничено в* l_{pq}, *т.е.*

$$\|h_{rv}(a)\|_{l_{pq}} \leqslant C\|a\|_{l_{pq}}.$$

в) *Если* $0 < p < r \leqslant \infty$, *то преобразование типа Белмана ограничено в* $L_{pq}(\mathbb{R})$, *т.е.*

$$\|B_{rv}(f)\|_{L_{pq}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{R})}.$$

г) *Если* $1 \leqslant r < p$, *то преобразование типа Харди ограничено в* $L_{pq}(\mathbb{R})$, *т.е.*

$$\|H_{rv}(f)\|_{L_{pq}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{R})}.$$

Лемма 6 ([12]). *Пусть* $\mathbf{0} < \mathbf{p_0} = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p_1} = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, $0 < \sigma \leqslant \infty$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ *или* $\varepsilon_i = 1, \ \ i = 1, \dots, n\}$, $\mathbf{A}_\varepsilon = (l_{p_1^{\varepsilon_1}\sigma}, \dots, l_{p_n^{\varepsilon_n}\sigma})$. *Если* $a \in \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, *то для любого* $w = (w_1, \dots, w_n) > 0$ *найдется такое представление последовательности*

$$a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \ \ a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon,$$

что

$$\|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = w^{1/p_\varepsilon}(T_\varepsilon a)(w),$$

где $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1} \dots T_{\varepsilon_n}$ *- композиция операций, удовлетворяющих условиям:*
– $T_0 = h_{p_i^0 \sigma}$ – *преобразование типа Харди,*
– $T_1 = b_{p_i^0 \sigma}$ – *преобразование типа Белмана.*

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{0} < \mathbf{p_0} = (p_1^0, \dots, p_n^0) \neq \mathbf{p_1} = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, $0 < \sigma \leqslant 1$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \dots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty$, $* = (j_1, \dots, j_n)$ – *некоторая перестановка последовательности. Тогда*

а) *если* $\mathbf{A_0} = (l_{p_{j_1}^0 \sigma}, \dots, l_{p_{j_n}^0 \sigma})$, $\mathbf{A_1} = (l_{p_{j_1}^1 \sigma}, \dots, l_{p_{j_n}^1 \sigma})$, *то*

$$l_{\vec{\mathbf{p}}}^* \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta \vec{\mathbf{q}}}^*;$$

б) *если* $\mathbf{A_0} = (L_{p_{j_1}^0 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \dots, L_{p_{j_n}^0 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}}))$, $\mathbf{A_1} = (L_{p_{j_1}^1 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \dots, L_{p_{j_n}^1 \sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}})))$, *то*

$$L_{\vec{\mathbf{p}}}^* \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta \vec{\mathbf{q}}}^*.$$

Здесь $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \dots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

Доказательство. Используя утверждение а) из леммы 4, можем считать $\mathbf{p_0} < \mathbf{p_1}$, а так как пространства $\mathbf{A_i}$, $i = 0, 1$, расширяются при возрастании параметра σ, то также можно считать, что $\sigma < \min_{j=1,\dots,n} q_j$.

Пусть $0 < t < \infty$, $v_{j_i} = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = p_i^0 p_i^1/(p_i^1 - p_i^0)$. Из леммы 6 следует, что для любой последовательности $a \in (A_0, A_1)_{\theta \vec{\mathbf{q}}}^*$ имеет место представление

$$a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \ \ \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \mathbf{v}^{1/\mathbf{p}_\varepsilon}(T_\varepsilon a)(v),$$

где $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1} \dots T_{\varepsilon_n}$ - композиция операций, удовлетворяющих условиям:
– $T_0 = h_{p_i^0 \sigma}$ – преобразование типа Харди,
– $T_1 = b_{p_i^0 \sigma}$ – преобразование типа Белмана.
Тогда

$$\|a\|_{(L_{\mathbf{p_0}\sigma}, L_{\mathbf{p_1}\sigma})_{\theta \vec{\mathbf{q}}}} = \|\mathbf{t}^{-\theta} K^*(\mathbf{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon - \theta} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = \sum_{\varepsilon \in E} I_\varepsilon.$$

Оценим каждое слагаемое:

$$I_\varepsilon = \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon - \theta} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon - \theta} \mathbf{v}^{1/p_\varepsilon} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = C \left\| \mathbf{t}^{(\varepsilon - \theta)(\mathbf{1}/\mathbf{p_0} - \mathbf{1}/\mathbf{p_1})} \mathbf{t}^{1/p_\varepsilon} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})}.$$

Так как для любого $\varepsilon \in E$ верно

$$(\varepsilon - \theta)(1/\mathbf{p_0} - 1/\mathbf{p_1}) + 1/\mathbf{p}_\varepsilon = (1-\theta)/\mathbf{p_0} + \theta/\mathbf{p_1} = 1/\mathbf{p},$$

то

$$I_\varepsilon = C \left\| \mathbf{t}^{\mathbf{1}/\mathbf{p}} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant C_1 \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}^*},$$

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ и $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

В последнем соотношении использовалось неравенство Минковского и утверждение леммы 5.

Доказательство пункта б) проводится аналогично с использованием аналога леммы 6 для пространств функций.

Следствие 1. *Пусть* $l_{\mathbf{p_0}}$, $l_{\mathbf{p_1}}$, $L_{\mathbf{p_0}}$, $L_{\mathbf{p_1}}$ *– пространства Лебега (со смешанной метрикой),* $\mathbf{p_0} \neq \mathbf{p_1}$ *и* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}, 0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty$. *Тогда*

$$(l_{\mathbf{p_0}},\, l_{\mathbf{p_1}})_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = l_{\vec{\mathbf{p}}}, \quad (L_{\mathbf{p_0}},\, L_{\mathbf{p_1}})_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = L_{\vec{\mathbf{p}}},$$

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

Цитированная литература

1. **Берг Й., Лефстрем Й.** //Интерполяционные пространства. Введение. М., 1980.
2. **Трибель Х.** //Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференцируемые операторы. М., 1988.
3. **Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М.** // Итоги науки и техники, Математический анализ. 1986. Т 24. С. 3 - 163.
4. **Sparr G.** // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. V 99. P. 247 - 316.
5. **Fernandez D. L.** // J. Funct. Anai. 1977. V 25, № 2. P. 128 - 146.
6. **Fernandez D. L.** // Stud. Math. (PRL). 1979. V. 65, № 2. P. 175 - 201.
7. **Fernandez D. L.** // Proc. London Math. Soc. 1988. V. 56. P. 143 - 162.
8. **Cobus f., Peetre J.** // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. P. 371 - 400.
9. **Крепкогорский В.М.** // Деп. ВИНИТИ, № 2686-79.
10. **Крепкогорский В.М.** // Деп. ВИНИТИ, № 2963-80.
11. **Крепкогорский В.М.** // Изв. вузов. Матем. 1980. Т. 10. С. 75 - 78.
12. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН. Серия матем. 2000. Т. 64, № 1. С. 95 - 122.
13. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** // Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1970.
14. **Харди Г.Х., Литтлвуд Д. Э., Пойа Д.** //Неравенства. М., 1948.

Поступила в редакцию 27.10.2006 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С.49 – 54*

УДК 512.554.31

ДЕФОРМАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Ш. Ш. Ибраев, Г.А. Туретаева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 sherali@pochta.ru

Описаны группы локальных деформаций классических алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

Введение

Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$ и $\mathbf{g}$ – классическая алгебра Ли над k. Рассмотрим пространства $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ второй когомологии присоединенного модуля алгебры Ли $\mathbf{g}$. Оно интерпретируется как пространство классов эквивалентных локальных деформаций алгебры Ли $\mathbf{g}$. Если характеристика поля k нечетная, то рассматриваемое пространство тривиально кроме единственного случая, когда $p = 3$ и $\mathbf{g} = B_2$ [1-5]. Однако случай поля характеристики $p = 2$ до сих пор остается неизученным. Видимо, техника картановского продолжения, примененная в работе [3], в случае характеристики $p = 2$ сопряжена с трудностями технического характера.

Для обнаружения классических алгебр Ли, допускающих нетривиальные деформации, мы используем другую методику. Данная методика проходит для любой положительной характеристики поля. Она основана в использовании точной последовательности Хохшильда [6] и длинных точных когомологических последовательностей. При этом пространство $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ рассматривается как модуль над алгебраической группой G классической алгебры Ли $\mathbf{g}$.

В данной работе нами получено полное описание пространства $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g})$ для классических алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем k неспециальной характеристики $p = 2$. Напомним, что простое число p называется *специальной для* $\mathbf{g}$, если $p = 2$ и система корней алгебры Ли $\mathbf{g}$ имеет две различные длины корней или $p = 3$ и $\mathbf{g} = G_2$.

Под классической алгеброй Ли мы понимаем алгебру Ли полупростой связанной алгебраической группы. К классическим алгебрам Ли мы относим также простые факторалгебры Ли классических алгебр Ли по соответствующим центрам. Для классических алгебр Ли мы используем обозначение $\mathbf{g}$, а для простых факторалгебр Ли – $\overline{\mathbf{g}}$.

Keywords: *Lie algebra, Lie algebra cohomology, deformation of Lie algebra, algebraic group*
2000 Mathematics Subject Classification: 17B50, 17B56

§1. Обозначения и формулировка основного результата

1.1. Обозначения. Рассматривая G как групповую схему, обозначим ядро отображения Фробениуса F для G через G_1 и пусть T – максимальный тор G, $X(T)$ – группа характеров T, $R \subset X(T)$ – система корней. Нумерацию простых корней $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ выберем в соответствии таблице Бурбаки [7]. Далее пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ – фундаментальные веса, $X(T)_+$ – множество доминантных весов, $X_1(T)$ – множество ограниченных доминантных весов.

1.2. Индуцированные модули. Для любого $\lambda \in X(T)$ можно определить одномерный B-модуль k_λ с помощью изоморфизма $T \cong B/U$ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$, где B – подгруппа Бореля и U – унипотентный радикал B. $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in X(T)_+$. Если $V(\lambda)$ – модуль Вейля над G, то $H^0(\lambda) \cong V(-w_0\lambda)^*$. Следовательно, $H^0(\lambda)$ можно рассматривать как дуальный модуль Вейля со старшим весом $-w_0(\lambda)$. С модулями $H^0(\lambda)$ и $V(\lambda)$ связан неприводимый G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ. С одной стороны он – цоколь G-модуля $H^0(\lambda)$, с другой – фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю.

1.3. Степени Фробениуса. Пусть V – рациональный G-модуль и $t : V \to V \otimes A$ – комодульное отображение. Тогда комодульное отображение

$$V \xrightarrow{t} V \otimes_k A_0 \otimes_{F_p} k \xrightarrow{Id \otimes f_i \otimes Id} V \otimes_k A_0 \otimes_{F_p} k,$$

где $f_i : A_0 \to A_0, f_i(a) = a^{p^i}, a \in A_0$, определяет новое представление $\rho^{p^i} : G \to GL(V)$. Пространство представления ρ^{p^i} обозначается через $V^{(i)}$.

Если $\rho : G \to GL(V)$ – такое представление G, что $KerF^i \subset Ker\,\rho$, то существует единственное представление $\tau : G \to GL(V)$, удовлетворяющее условию $\rho = \tau^{p^i}$. Пространство представления τ обозначается через $V^{(-i)}$.

1.4. Весовое разложение стандартного коцепного комплекса. Пусть $C^*(\mathbf{g}, V)$ – стандартный коцепной комплекс алгебры Ли $\mathbf{g}$ с коэффициентами в V. Разложим $C^*(\mathbf{g}, V)$ в прямую сумму весовых подкомплексов относительно максимального тора T группы G:

$$C^*(\mathbf{g}, V) = \bigoplus_{\mu \in X(T)} C^*_\mu(\mathbf{g}, V).$$

Пусть $\Lambda(V) \in X(T)$ – множество весов $\mathbf{g}$ модуля V, $\Lambda_k(R) \in X(T)$ – множество весов $H^k(\mathbf{g}, V)$ относительно T, тогда

$$H^k(\mathbf{g}, V) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_k(R)} H^k_\mu(\mathbf{g}, V).$$

Выбирая базис из корневых векторов в $\mathbf{g}$ и базис $\{ v_\lambda, \cdots, u_\lambda : \lambda \in \Lambda(V) \}$ в V, получаем базис в $C^k(\mathbf{g}, V)$. Если $e^*_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\beta_k} \otimes v_\lambda \in C^k_\mu(\mathbf{g}, V)$, то $\mu(H) = (-(\beta_1 + \cdots + \beta_k) + \lambda)(H)$, где $H \in \mathbf{h}$.

1.5. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле неспециальной характеристики $p = 2$, $\mathbf{g}$ – классическая алгебра Ли над полем k, $\overline{\mathbf{g}}$ – простая факторалгебра по центру, если $\mathbf{g}$ непростая. Тогда*

$$(a)\ H^2(\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{g}}) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)}, & \text{если } \overline{\mathbf{g}} = \overline{A}_3, \\ H^2(\lambda_3)^{(1)}, & \text{если } \overline{\mathbf{g}} = \overline{A}_5, \\ H^0(\lambda_7)^{(1)}, & \text{если } \overline{\mathbf{g}} = \overline{E}_7, \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$(b)\ H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)} + H^0(\lambda_4)^{(1)}, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = D_4, \\ H^0(\lambda_1)^{(1)}, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = D_{2r}\ (r \geq 3), \\ 0\ \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$(c)\ dim\ H^2(\mathbf{g},\mathbf{g}) = \begin{cases} 24, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = D_4, \\ 4r, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = D_{2r}\ (r \geq 3), \\ 0\ \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$(d)\ dim\ H^2(\overline{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) = \begin{cases} 20, \ \textit{если}\ \overline{\mathbf{g}} = \overline{A}_3,\ \overline{A}_5, \\ 56, \ \textit{если}\ \overline{\mathbf{g}} = \overline{E}_7, \\ 0\ \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

§2. Доказательство теоремы 1

2.1. Доказательство утверждения (a). Переформулируем данное утверждение в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Имеют места следующие изоморфизмы* G *-модудей:*

(a) $H^2(\overline{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) \cong H^2(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})$;

$$(b)\ H^2(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)}, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = A_3, \\ H^0(\lambda_3)^{(1)}, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = A_5, \\ H^0(\lambda_7)^{(1)}, \ \textit{если}\ \mathbf{g} = E_7, \\ 0 \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 1. *Случай* (a). Пусть $\overline{\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{g}}_{-1} \otimes \overline{\mathbf{g}}_0 \otimes \overline{\mathbf{g}}_1$ – градуировка алгебры Ли $\overline{\mathbf{g}}$ (см., напр. [3]). В пространстве $\overline{\mathbf{g}}$ можно ввести структуру модуля над алгебрами Ли $C_{\mathbf{g}}$, $\mathbf{g}$ и $\overline{\mathbf{g}}$:

$C_{\mathbf{g}} \times \overline{\mathbf{g}} \longrightarrow \overline{\mathbf{g}}$, $(c,\bar{l}) \mapsto \lambda_i(c)\bar{l}$, $c \in C_{\mathbf{g}}$, $\bar{l} \in \overline{\mathbf{g}}$, где $\lambda_i \in C^*_{\mathbf{g}}$, и

$$\lambda_{\bar{l}}(c) = \begin{cases} -1, \ \text{если}\ \bar{l} \in \overline{\mathbf{g}}_{-1}, \\ 0, \ \text{если}\ \bar{l} \in \overline{\mathbf{g}}_0, \\ 1, \ \text{если}\ \bar{l} \in \overline{\mathbf{g}}_1, \end{cases}$$

$\mathbf{g} \times \overline{\mathbf{g}} \longrightarrow \overline{\mathbf{g}}$, $(l_1,\bar{l}_2) \mapsto \overline{[l_1,l_2]}$, $l_1 \in \mathbf{g}$, $\bar{l}_2 \in \overline{\mathbf{g}}$,
$\overline{\mathbf{g}} \times \overline{\mathbf{g}} \longrightarrow \overline{\mathbf{g}}$, $(\bar{l}_1,\bar{l}_2) \mapsto \overline{[l_1,l_2]}$, $(\bar{l}_1,\ \bar{l}_2) \in \overline{\mathbf{g}}$.

Тогда, рассматривая короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow (C^*(C_{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}),d) \longrightarrow (C^*(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}),d) \longrightarrow (C^*(\overline{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}),d) \longrightarrow 0,$$

получаем длинную точную когомологическую последовательность

$$\cdots \longrightarrow H^1(C_{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow H^2(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow H^2(C_{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow \cdots .$$

Так как $H^k(C_{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) = 0$ при $k \geq 0$ ([8], 4.2), то из последней точной последовательности следует, что

$$H^2(\overline{\mathbf{g}},\overline{\mathbf{g}}) \cong H^2(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}).$$

Случай (b). Для коприсоединенного $\mathbf{g}$-модуля $\mathbf{g}^*$ имеет место следующая короткая точная последовательность,

$$0 \longrightarrow \overline{\mathbf{g}} \longrightarrow \mathbf{g}^* \longrightarrow \mathbf{g}^*/\overline{\mathbf{g}} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Рассмотрим длинную точную когомологическую последовательность $\mathbf{g}$-когомологии

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow H^i(\mathbf{g},\mathbf{g}^*) \longrightarrow H^i(\mathbf{g},\mathbf{g}^*/\overline{\mathbf{g}}) \longrightarrow \cdots . \tag{2}$$

Хорошо известно, что в характеристике 2 (не специальный случай) [9]

$$\mathbf{g}^*/\overline{\mathbf{g}} = \begin{cases} k \oplus k, \text{ если } \mathbf{g} = D_n \, (n = 2r, \, r > 1), \\ k \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$0 = H^1(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*/\overline{\mathbf{g}}) = \begin{cases} H^1(\mathbf{g}, k \oplus k), \text{ если } \mathbf{g} = D_n \, (n = 2r, \, r > 1), \\ H^1(\mathbf{g}, k) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя это для (2), имеем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow H^2(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) \xrightarrow{\phi} H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \longrightarrow H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*/\overline{\mathbf{g}}). \tag{3}$$

Когомологические группы $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ вычислены авторами ранее в работе [10], согласно которой

$$H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \cong \begin{cases} H^0(\lambda_1)^{(1)} + 3H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)}, \text{ если } \mathbf{g} = A_3, \\ H^0(\lambda_3)^{(1)}, \text{ если } \mathbf{g} = A_5; \\ H^0(\lambda_1)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)} + H^0(\lambda_4)^{(1)}, \text{ если } \mathbf{g} = D_4, \\ H^0(\lambda_1)^{(1)}, \text{ если } \mathbf{g} = D_n \, (n > 4), \\ H^0(\lambda_7)^{(1)}, \text{ если } \mathbf{g} = E_7, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, доказательство утверждения (b) леммы 1 сводится к вычислению прообраза первого отображения ϕ точной последовательности (3). Для этого достаточно найти размерности прообразов старших векторов композиционных факторов группы $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$. Другими словами, следует вычислить размерности весовых подпространств пространства $H^2(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}})$, образами которых являются весовые подпространства старших векторов композиционных факторов $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$. Согласно (4), группа $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*)$ нетривиальна только в следующих случаях: A_3, $A_5, D_n \, (n > 3)$, E_7. Более подробно рассмотрим случай алгебры Ли A_3. Все остальные случаи вычисляются аналогично.

Случай $\mathbf{g} = A_3$. Так как $H^2(\mathbf{g}, \mathbf{g}^*) \cong H^0(\lambda_1)^{(1)} + 3H^0(\lambda_2)^{(1)} + H^0(\lambda_3)^{(1)}$ и $G-$модули $H^0(\lambda_1)$, $H^0(\lambda_2)$, $H^0(\lambda_3)$ неприводимы, то достаточно доказать, что $dim\, H^2_{4\lambda_1}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) = 1$, $dim\, H^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) = 2$ и $dim\, H^2_{4\lambda_3}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) = 1$.

Докажем, что $dim\, H^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) = 2$. Другие два одномерных случая проверяются тривиально.

Для алгебры Ли $\mathbf{g}$ выберем базис Шевалле $\{e_i, h_j, f_i \; : \; i = 1, ..., 6, \; j = 1, 2, 3\}$ и для факторалгебры Ли $\overline{\mathbf{g}}$ базис $\{\overline{e}_i, \overline{h}_j, \overline{f}_i \; : i = 1, ..., 6, \; j = 1, 2\}$.

$dim\, C^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}) = 28$ и оно порождается векторами

$$\begin{array}{llll}
\psi^1_{2\lambda_2} = h^*_1 \wedge f^*_2 \otimes \overline{f}_6, & \psi^2_{2\lambda_2} = h^*_1 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_5, & \psi^3_{2\lambda_2} = h^*_1 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_4, & \psi^4_{2\lambda_2} = h^*_1 \wedge f^*_6 \otimes \overline{f}_2, \\
\psi^5_{2\lambda_2} = h^*_2 \wedge f^*_2 \otimes \overline{f}_6, & \psi^6_{2\lambda_2} = h^*_2 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_5, & \psi^7_{2\lambda_2} = h^*_2 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_4, & \psi^8_{2\lambda_2} = h^*_2 \wedge f^*_6 \otimes \overline{f}_2, \\
\psi^9_{2\lambda_2} = h^*_3 \wedge f^*_2 \otimes \overline{f}_6, & \psi^{10}_{2\lambda_2} = h^*_3 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_5, & \psi^{11}_{2\lambda_2} = h^*_3 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_4, & \psi^{12}_{2\lambda_2} = h^*_3 \wedge f^*_6 \otimes \overline{f}_2, \\
\psi^{13}_{2\lambda_2} = e^*_1 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_6, & \psi^{14}_{2\lambda_2} = e^*_1 \wedge f^*_6 \otimes \overline{f}_4, & \psi^{15}_{2\lambda_2} = e^*_3 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_6, & \psi^{16}_{2\lambda_2} = e^*_3 \wedge f^*_6 \otimes \overline{f}_5, \\
\psi^{17}_{2\lambda_2} = f^*_1 \wedge f^*_2 \otimes \overline{f}_5, & \psi^{18}_{2\lambda_2} = f^*_1 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_2, & \psi^{19}_{2\lambda_2} = f^*_2 \wedge f^*_3 \otimes \overline{f}_4, & \psi^{20}_{2\lambda_2} = f^*_2 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_3, \\
\psi^{21}_{2\lambda_2} = f^*_2 \wedge f^*_5 \otimes \overline{f}_1, & \psi^{22}_{2\lambda_2} = f^*_2 \wedge f^*_6 \otimes \overline{h}_1, & \psi^{23}_{2\lambda_2} = f^*_2 \wedge f^*_6 \otimes \overline{h}_2, & \psi^{24}_{2\lambda_2} = f^*_3 \wedge f^*_4 \otimes \overline{f}_2, \\
\psi^{25}_{2\lambda_2} = f^*_4 \wedge f^*_5 \otimes \overline{h}_1, & \psi^{26}_{2\lambda_2} = f^*_4 \wedge f^*_5 \otimes \overline{h}_2, & \psi^{27}_{2\lambda_2} = f^*_4 \wedge f^*_6 \otimes \overline{e}_1, & \psi^{28}_{2\lambda_2} = f^*_5 \wedge f^*_6 \otimes \overline{e}_3.
\end{array}$$

Из условия коцикличности следует, что размерность подпространства $Z^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}})$ равна пяти и порождается векторами

$$\Psi^1_{2\lambda_2} = \psi^1_{2\lambda_2} + \psi^2_{2\lambda_2} + \psi^3_{2\lambda_2} + \psi^4_{2\lambda_2} + \psi^9_{2\lambda_2} + \psi^{10}_{2\lambda_2} + \psi^{11}_{2\lambda_2} + \psi^{12}_{2\lambda_2} +$$

$$+\psi^{13}_{2\lambda_2}+\psi^{14}_{2\lambda_2}+\psi^{19}_{2\lambda_2}+\psi^{21}_{2\lambda_2}+\psi^{24}_{2\lambda_2}+\psi^{25}_{2\lambda_2}+\psi^{28}_{2\lambda_2},$$

$$\Psi^2_{2\lambda_2}=\psi^1_{2\lambda_2}+\psi^2_{2\lambda_2}+\psi^3_{2\lambda_2}+\psi^4_{2\lambda_2}+\psi^9_{2\lambda_2}+\psi^{10}_{2\lambda_2}+\psi^{11}_{2\lambda_2}+\psi^{12}_{2\lambda_2}+\psi^{15}_{2\lambda_2}+$$

$$+\psi^{16}_{2\lambda_2}+\psi^{17}_{2\lambda_2}+\psi^{18}_{2\lambda_2}+\psi^{20}_{2\lambda_2}+\psi^{25}_{2\lambda_2}+\psi^{27}_{2\lambda_2},$$

$$\Psi^3_{2\lambda_2}=\psi^1_{2\lambda_2}+\psi^2_{2\lambda_2}+\psi^3_{2\lambda_2}+\psi^4_{2\lambda_2}+\psi^9_{2\lambda_2}+\psi^{10}_{2\lambda_2}+\psi^{11}_{2\lambda_2}+\psi^{12}_{2\lambda_2}+$$

$$+\psi^{13}_{2\lambda_2}+\psi^{15}_{2\lambda_2}+\psi^{18}_{2\lambda_2}+\psi^{24}_{2\lambda_2}+\psi^{26}_{2\lambda_2},$$

$$\Psi^4_{2\lambda_2}=\psi^{13}_{2\lambda_2}+\psi^{15}_{2\lambda_2}+\psi^{17}_{2\lambda_2}+\psi^{19}_{2\lambda_2}+\psi^{20}_{2\lambda_2}+\psi^{21}_{2\lambda_2}+\psi^{23}_{2\lambda_2},$$

$$\Psi^5_{2\lambda_2}=\psi^1_{2\lambda_2}+\psi^2_{2\lambda_2}+\psi^3_{2\lambda_2}+\psi^4_{2\lambda_2}+\psi^5_{2\lambda_2}+\psi^6_{2\lambda_2}+\psi^7_{2\lambda_2}+\psi^8_{2\lambda_2}+\psi^9_{2\lambda_2}+\psi^{10}_{2\lambda_2}+\psi^{11}_{2\lambda_2}+$$

$$+\psi^{12}_{2\lambda_2}+\psi^{13}_{2\lambda_2}+\psi^{14}_{2\lambda_2}+\psi^{15}_{2\lambda_2}+\psi^{16}_{2\lambda_2}+\psi^{20}_{2\lambda_2}+\psi^{21}_{2\lambda_2}+\psi^{22}_{2\lambda_2}.$$

Пусть $\psi_{2\lambda_2}=\sum_{i=1}^5 a_i\Psi^i_{2\lambda_2}\in Z^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})$, где $a_i\in k$. Тогда из условия $\psi_{2\lambda_2}=d\omega_{2\lambda_2}$, $\omega_{2\lambda_2}\in C^1(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})$, следует, что $a_1=a_2+a_3$, $a_5=0$, где $a\in k$. Это означает, что линейно независимых коциклов веса $2\lambda_2$ – два. В качестве линейно независимых нетривиальных коциклов можно выбрать следующие два коцикла: $\Psi^3_{2\lambda_2}$, $\Psi^5_{2\lambda_2}$.

Таким образом, доказано, что подпространство $H^2_{2\lambda_2}(\mathbf{g},\mathbf{g}^*)$ двумерно.

Доказательство утверждения (b) леммы 2 завершено.

2.2. *Доказательство утверждения* (b). Заметим, что если $\mathbf{g}$ простая, то единственной классической алгеброй Ли, допускающей нетривиальную деформацию, является алгебра Ли B_2 в характеристике $p=3$ [13]. Поэтому будем считать, что $\mathbf{g}$ не являетяся простым. Тогда для присоединенного $\mathbf{g}$-модуля $\mathbf{g}$ имеет место следующая короткая точная последовательность:

$$0\longrightarrow C_{\mathbf{g}}\longrightarrow \mathbf{g}\longrightarrow \overline{\mathbf{g}}\longrightarrow 0, \tag{5}$$

где $C_{\mathbf{g}}$ – центр алгебры Ли $\mathbf{g}$.

Рассмотрим соответствующую длинную точную когомологическую последовательность $\mathbf{g}$-когомологии:

$$\cdots\longrightarrow H^1(\mathbf{g},C_{\mathbf{g}})\longrightarrow H^1(\mathbf{g},\mathbf{g})\longrightarrow H^1(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})\longrightarrow H^2(\mathbf{g},C_{\mathbf{g}})\longrightarrow H^2(\mathbf{g},\mathbf{g})\longrightarrow H^2(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})\longrightarrow\cdots. \tag{6}$$

Структура следующих членов данной точной последовательности хорошо известна:

$$[11],\ H^1(\mathbf{g},C_{\mathbf{g}})=0; \tag{7}$$

$$[11],\ H^1(\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}})\cong\begin{cases} k,\ \text{если } \mathbf{g}=A_n\,(n=2r-1,\,r>1),\,E_7,\\ H^0(\lambda_2)^{(1)}\oplus k,\ \text{если } \mathbf{g}=A_3,\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus k,\ \text{если } \mathbf{g}=D_n\,(n=2r+1,\,r>1),\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus k\oplus k,\ \text{если } \mathbf{g}=D_n\,(n=2r,\,r>2),\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_3)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_4)^{(1)}\oplus k\oplus k,\ \text{если } \mathbf{g}=D_4,\\ 0 \text{ в остальных случаях;}\end{cases} \tag{8}$$

$$[12],\ H^2(\mathbf{g},C_{\mathbf{g}})\cong\begin{cases} H^0(\lambda_2)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_2)^{(1)},\ \text{если } \mathbf{g}=A_3,\\ H^0(\lambda_1)^{(1)},\ \text{если } \mathbf{g}=D_n\,(n=2r+1,\,r>1);\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_1)^{(1)},\ \text{если } \mathbf{g}=D_n\,(n=2r,\,r>2),\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_3)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_4)^{(1)}\oplus\\ H^0(\lambda_1)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_3)^{(1)}\oplus H^0(\lambda_4)^{(1)},\ \text{если } \mathbf{g}=D_4,\\ 0 \text{ в остальных случаях;}\end{cases} \tag{9}$$

$$[13],\ H^1(\mathbf{g},\mathbf{g}) \cong \begin{cases} k \oplus k, \text{ если } \mathbf{g} = D_n\,(n = 2r,\, r > 1), \\ k, \text{ если } \mathbf{g} = A_n\,(n = 2r-1,\, r > 1),\, D_n\,(n = 2r+1,\, r > 1),\, E_7, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{10}$$

Используя формулы (7) – (10) и утверждение (b) леммы 1 в точной последовательности (6), получим требуемое утверждение (b) теоремы 1.

2.3. Доказательство утверждений (c), (d). Размерности групп когомологий легко вычисляются по формуле Вейля для размерностей неприводимых комплексных $G-$ модулей, так как согласно (a) и (b) все они непрводимы и в положительной характеристике.

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

Цитированная литература

1. **Кострикин А. И., Кузнецов М. И.** // Докл. РАН. 1995. Т. 343, №3. С. 299 – 301.

2. **Кириллов С. А., Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г.** // Изв. вузов. сер. матем. 2000. Т. 44, №3. С. 31 – 36.

3. **Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г.** // Мат. сборник. 2000. Т. 191, №8. С. 69 – 88.

4. **Рудаков А. Н.** // Изв. АН СССР. сер. матем. 1971. Т. 35. С. 1113 – 1119.

5. **Джумадильдаев А. С.** // УМН. 1976. Т. 31, №3. С. 211 – 212.

6. **Hochschild G.** // Amer. J. Math. 1954. V. 76. P. 555 – 580.

7. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. 4-6. М., 1972.

8. **Williams F. L.** // Trans. AMS. 1978. V. 240. P. 115 – 127.

9. **Вейсфеллер Б. Ю., Кац В. Г.** // Изв. АН СССР Сер. мат. Т. 35. С. 762 – 788.

10. **Ибраев Ш. Ш., Туретаева Г. А.** // Матер. межд. научно-практ. конф. "Валихановские чтения-10". Кокшетау, 2005. Т. 6. С. 75 – 79.

11. **Jantzen J. C.** // Progress in Math. 1991. V. 95. P. 289 – 315.

12. **Kallen van der W.L. J.** Infinitesimally central extensions of Chevalley groups. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

13. **Ибраев Ш. Ш.** // Сб. научных трудов унив. "Болашак". 2004. С. 15-19.

Поступила в редакцию 13.02.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 55 – 66*

УДК 523.98, 530.182

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ДИНАМИКИ ФОТОСФЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛНЦА

Л. М. Каримова, О. А. Круглун

Институт Математики МОиН РК
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 chaos@math.kz

В статье исследуется проблема существования мультифрактальных характеристик в структуре магнитного поля Солнца на основе магнитограмм с высоким разрешением. Мы излагаем основные понятия канонического и микроканонического мультифрактального формализма и описываем вариант, адаптированный для цифровых изображений. Приводятся оценки мультифрактальных спектров для магнитограмм, полученные с помощью емкостей Шоке.

Вопрос о существовании масштабной инвариантности в геометрии магнитных структур на уровне солнечной фотосферы представляет большой теоретический интерес для проверки современных моделей альфа-омега динамо [1]. Статистическое самоподобие может возникать из динамо-процессов, проявляющихся на различных пространственных масштабах и/или при взаимодействии поля с конвективным движением плазмы [2, 3]. С другой стороны, существуют предпосылки поиска предикторов сильных хромосферных вспышек в скейлинговой структуре магнитограмм: согласно теоретическим рассмотрениям вспышке должно предшествовать всплытие магнитного потока из конвективной зоны под солнечным пятном [4]. Предполагается, что этот поток может привести к изменению статистики скейлинговых показателей и, следовательно, к деформации формы мультифрактального спектра. Поэтому экспериментальному обнаружению мультифрактальных свойств по магнитограммам, полученным с высоким разрешением, посвящено значительное количество публикаций [2, 3, 5-9]. Техника, применяемая авторами, меняется в довольно широком диапазоне: от оценки простых зависимостей типа площадь-периметр [9] до вычисления обобщенных размерностей Реньи [2] на основе оценки моментов меры или Колмогоровских структурных функций (вариограмм) [6, 8]. Сравнение полученных результатов можно найти в [10, 11]. Популярные варианты формализма, разработанные для скалярных временных рядов, и их трансляция на цифровые изображения, которыми являются магнитограммы, сопряжены с рядом трудностей. Существуют и теоретические ограничения на выбор подходящего варианта. Они связаны с предположениями о природе

Keywords: *Multifractal formalism, Choquet capacity, multifractal spectra, Solar magnetogramm*
2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

носителя сингулярной меры. Обычно полагают, что носитель, которым в нашем случае является компактное подмножество из $\mathbb{R}^2$, имеет ненулевую Лебегову меру. В этом случае, в принципе, можно использовать методы оценки сингулярной меры, основанные на статистическом усреднении показателей регулярности по различным пространственным масштабам [6, 8]. Однако, если сам носитель мультифрактальной меры имеет фрактальные свойства, т.е. нулевую меру Лебега, вариограммы и структурные функции могут приводить к неоднозначным степенным асимптотикам, так как оператор математического ожидания следует определять в смысле интегрирования по мере Хаусдорфа [12]. Поскольку нельзя исключить, что магнитное поле распределено на фрактальной структуре конвективных ячеек, разумно использовать не статистические, а локальные оценки сингулярностей меры.

Мы приводим основные понятия канонического и микроканонического мультифрактального формализмов и вариант, основанный на обобщениях Борелевых мер до емкостей Шоке. Именно этот последний вариант используется для анализа магнитограмм. Целью работы является оценка мультифрактальных спектров мелкозернистого магнитного поля. Мы пытаемся ответить при этом на два вопроса: (1) существует ли статистическая масштабная инвариантность в распределении напряженности радиальной компоненты магнитного поля и (2) можно ли обнаружить предвестник хромосферной вспышки по спектру сингулярной меры, построенной на значениях напряженности?

Статья имеет следующую структуру. В начале описываются традиционные методы оценки сингулярных мер с помощью канонического и микроканонического формализмов. Затем рассмотрены их варианты, адаптированные для изображений, в том числе формализм, основанный на емкостях Шоке. Далее приведены примеры мультифрактальных спектров для магнитограмм полного диска Солнца и выводы на основе проделанного анализа.

Элементы мультифрактального формализма.

Мультифрактальный анализ, введенный первоначально для описания полностью развитой турбулентности [13, 14], описывает локальное сингулярное поведение мер или функций в геометрическом или статистическом аспектах. Основой послужили пионерские работы А.Н. Колмогорова [15].

Определим линейное приращение $\delta_r v(\mathbf{x})$ скорости жидкости в точке $\mathbf{x}$, как

$$\delta_r v(\mathbf{x}) = |\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{r})|,$$

где $v(\mathbf{x})$ — поле скоростей, а $\mathbf{r}$ — вектор смещения. В предположении масштабной инвариантности распределение линейных приращений $\delta_r v(\mathbf{x})$ должно зависеть от смещения $\mathbf{r}$ по степенному закону. С другой стороны, в силу инвариантности относительно трансляций, это распределение должно совпадать в любых двух точках по меньшей мере в отсутствие перемежаемости. Наконец, в изотропном случае можно заменить вектор $\mathbf{r}$ его модулем r. Колмогоров предложил характеризовать вероятностное распределение линейных приращений так называемой *структурной функцией*

$$S_q(r) \equiv \langle \delta_r v^q \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по реализациям. Теория развитой турбулентности предсказывает, что поведение структурной функции статистически удовлетворяет условию масштабной инвариантности

$$S_q(r) \sim r^{\tau_q}.$$

Такая зависимость называется *мультискейлингом, статистическим самоподобием или мультифрактальностью* [16]. В простейшем линейном варианте функциональная зависимость скейлингового показателя τ_q от номера момента q задается соотношением $\tau_q = -(d-D)q + \tau_0$, которое означает, что вся энергия d-мерного потока сосредоточена на единственном фрактальном множестве с емкостью (бокс-размерностью) D. В более общей ситуации τ_q является *выпуклой* функцией q, и энергия полностью развитой турбулентности распределена на множестве фрактальных множеств с *различной* размерностью D_q. Мультифрактальный формализм как раз и создан для описания этой более общей ситуации.

Напомним [17], что *локальной размерностью* конечной меры Бореля μ в R^n или *локальной экспонентой Гельдера* меры в точке x называют предел, если он существует,

$$\dim_{loc}\mu(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\mu(B_\varepsilon(x))/\ln\varepsilon), \tag{1}$$

где $B_\varepsilon(x) = \{y \in R^n : |y-x| \le \varepsilon\}$ — замкнутый шар с центром в x и $\mu(B)$ — мера Бореля внутри шара. Для каждого $\alpha \ge 0$ рассмотрим множество E_α точек x, в которых $\dim_{loc}\mu(x)$ существует и равна $\alpha \pm \Delta\alpha$. Для некоторых мер μ множества E_α непусты и фрактальны (т.е. имеют дробное значение размерности Хаусдорфа) в некотором диапазоне α. Тогда можно определить мультифрактальный спектр или спектр сингулярности меры как $f(\alpha) = \dim E_\alpha$, где под размерностью понимается размерность Хаусдорфа или бокс-размерность (емкость).

Существует множество вариантов мультифрактального анализа, которые обычно принято делить на *канонический* (CF) и *микроканонический* формализмы (μCF), в зависимости от способа описания сингулярности меры: статистического или геометрического. В первом из них (CF) гельдеровские экспоненты получают процессом усреднения некоторых подходящих операторов по различным масштабам [14]. В μCF экспоненты оцениваются локально в каждой точке носителя меры. Приведем основные идеи этих формализмов.

Канонический формализм CF основан на разбиении носителя меры на N боксов и использовании выражения [17]

$$\Phi(q,\tau) = E(\sum_{i=1}^{N} p_i^q \varepsilon_i^{-\tau}), \tag{2}$$

где E — математическое ожидание, q и τ — вещественные числа, p_i, ε_i — случайные величины, характеризующие меру и размер боксов, соответственно. Определенная таким образом функция Φ связывает q-й момент меры и $(-\tau)$-й момент размера бокса. Было показано [14, 17], что для случая мер, полученных с помощью итераций, значения q и τ удовлетворяют условию $\Phi(q,\tau) = 1$. Тогда выражение (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^q \varepsilon_i^{-\tau} = 1. \tag{3}$$

Существуют два возможных варианта представления экспериментальной меры. Первый получается для случая боксов одинакового размера $\varepsilon_i = const$; во втором фиксируется значение меры $p_i = const$ в боксах различных размеров.

Если $\varepsilon_i = \varepsilon$, то размер бокса можно вынести из-под знака суммы. Тогда из (2) мы получим

$$E\{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} p_i^q\} \sim \varepsilon^\tau, \tag{4}$$

где N_ε — число непустых боксов размера ε, необходимых для покрытия носителя, на котором определена мера, а отношение эквивалентности в (4) понимается в смысле существования предела: $X \sim Y \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|X|)/(\ln|Y|) = 1$. Здесь X — левая часть, Y — правая часть выражения (4). Для вычисления среднего в (2) можно использовать величины p_i в качестве весов и тогда

$$\langle p_i^{q-1}\varepsilon^{-\tau}\rangle_p \sim const, \tag{5}$$

где $\langle\rangle_p$ означает среднее значение, вычисленное в соответствии с распределением вероятностей p_i.

Теперь, если положить $p_i = const$, выражение (5) приобретет вид

$$\langle \varepsilon^{-\tau} \rangle_p \sim p^{1-q}. \tag{6}$$

Таким образом получаются два альтернативных представления мультифрактальных индексов, использующих в качестве фундаментальных моментов q или τ.

Часто усреднение в (4) не используют и называют меру μ *мультифрактальной*, если

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \mu_i^q \sim \varepsilon^{\tau(q)} \tag{7}$$

в пределе малых ε. Напомним, что бокс-размерностью компактного множества X называют предел [17]

$$D(X) = -\lim_{\varepsilon \to 0} (\ln N_\varepsilon / \ln \varepsilon), \tag{8}$$

если он существует. Выделим на носителе точки, для которых Гельдеровские показатели имеют фиксированное значение $\alpha \approx \alpha_i \pm \delta$. Очевидно, что число непустых боксов, необходимое для покрытия множества E_α согласно (8) будет:

$$N_\varepsilon(\alpha_i) \approx \varepsilon^{-f(\alpha_i)}, \tag{9}$$

где $f(\alpha_i)$ — бокс-размерность множества. Рассмотрим теперь *функцию разбиения* (7), т.е. сумму мер, взятых по всем непустым ε-боксам и $q \in [-\infty, \infty]$:

$$\sum_i \mu_i^q \propto \int d\alpha\ w(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha)} \varepsilon^{q\alpha} = \int d\alpha\ w(\alpha) exp[\ln \varepsilon (q\alpha - f(\alpha))], \tag{10}$$

где $w(\alpha)$ — весовой множитель [14]. Полагая, что (10) справедливо лишь в пределе исчезающих ε ($\varepsilon \to 0$), $\ln \varepsilon \to -\infty$, можно оценить интеграл в правой части *методом перевала*. Очевидно, что основной вклад в интеграл дают члены с α, соответствующие максимальному показателю экспоненты, т.е.

$$q = f'(\alpha),\ f''(\alpha) < 0. \tag{11}$$

Поэтому

$$\sum_i \mu_i^q \approx exp[\ln \varepsilon (q\alpha - f(\alpha))] = \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} \sim \varepsilon^{D_q(1-q)}. \tag{12}$$

Здесь использовано определение (1) и (7), в котором функция $\tau(q)$ выбрана в виде $\tau(q) = D_q(q-1)$, для того чтобы учесть условие нормировки вероятностной меры $\Sigma_i \mu_i = 1$. Величины D_q называют обобщенными размерностями Реньи [14, 18, 19]. Множество значений (q, D_q) для $q \in [-\infty, \infty]$ описывает свойства мультифрактальной меры. Соотношения

$$\alpha = \frac{d}{dq}[D_q(1-q)],\ f(\alpha) = -(q-1)D_q + q\alpha \tag{13}$$

позволяют перейти от переменных (q, D_q) к *сопряженным* переменным $(\alpha, f(\alpha))$. Последняя формула в (13) известна как *преобразование Лежандра*. График $\{f(\alpha), \alpha\}$ является выпуклой функцией (см.(13)) и называется *лежандровским спектром* $f_l(\alpha)$ [19, 20]. Статистический смысл канонического мультифрактального спектра заключается в следующем [21]. Вероятность $Prob_\varepsilon[\alpha_i \approx \alpha]$ найти скейлинговый показатель $\alpha = \alpha_i \pm \delta$ ведет себя приблизительно как

$$Prob_\varepsilon[\alpha_i \approx \alpha] = N_\varepsilon(\alpha)/N_\varepsilon \approx \varepsilon^{d - f(\alpha)}, \tag{14}$$

где N_ε — общее число непустых боксов, покрывающих носитель меры, и d — топологическая размерность носителя.

Микроканонический формализм [22] μCF позволяет оценивать локальные масштабные свойства мультифрактальных мер *геометрически*, а не статистически. Пусть $s(t)$ — некоторый измеренный сигнал. Поставим в соответствие каждой точке t экспоненту сингулярности $h(t)$, которая будет определена ниже. В рамках микроканоническкго формализма μCF мы используем для экспоненты сингулярности обозначение h. Множество точек с одинаковым значением сингулярности образует многообразие сингулярностей F_h:

$$F_h \equiv \{t :\, h(t) = h\}. \tag{15}$$

Для сложных нелинейных сигналов многообразия F_h — очень нерегулярные и обычно фрактальные множества. В связи с этим многообразия сингулярностей F_h часто называют фрактальными компонентами мультифрактального разложения. Пусть $D(h)$ — фрактальная размерность (емкость) многообразия F_h. Рассматривая $D(h)$ как функцию от h, получаем спектр сингулярности сигнала.

Сигнал $s(t)$ анализируется посредством подходящего оператора $\mathbb{T}_r$, который действует на s и дает новую функцию $\mathbb{T}_r s(t)$. Оператор $\mathbb{T}_r$ зависит от масштабной переменной r, характеризующей область его действия. Чтобы приписать каждой точке t экспоненту сингулярности $h(t)$, должно выполняться следующее соотношение:

$$\mathbb{T}_r s(t) = a_{\mathbb{T}}(t) r^{h(t)} + o(r^{h(t)}). \tag{16}$$

В качестве оператора $\mathbb{T}_r$ можно использовать, например, линейные приращения $|\Delta_r s|$. Тогда $\mathbb{T}_r s(t) = |\Delta_r s|(t) \equiv |s(t + r) - s(t)| \sim r^{h(t)}$.

Говорят, что сигнал $s(t)$ является мультифрактальным в μCF-смысле, если существует функционал $\mathbb{T}_r$ такой, что выполняется уравнение (16), и вычисленный спектр сингулярности $D(h)$ является выпуклой кривой, а именно: $D''(h) < 0$ для всех h. Второе условие означает, что распределение $\mathbb{T}_r s$ непосредственно связано с существованием бесконечно делимого мультипликативного каскада [23]. Таким образом, спектр сингулярности фактически полностью характеризует статистику мультипликативного процесса. И наоборот, можно получить спектр сингулярности из статистики мультипликативного процесса так, что становится возможным установить двустороннюю связь между статистическим и геометрическим самоподобием. Если система является мультифрактальной в рамках микроканонического формализма, то она мультифрактальна в соответствии с каноническим подходом.

Для получения численных оценок в μCF анализе используются различные методы. Основными являются *метод локальной сингулярности* и *метод точечной сингулярности* [22]. Каждый из них имеет свои трудности и преимущества. Общим для этих методов служит определение вероятности $p_r(h)$ наблюдаемой сингулярности h на локальном масштабе r через фрактальную размерность $D(h)$ компоненты F_h:

$$p_r(h) \propto r^{d - D(h)}, \tag{17}$$

где d — топологическая размерность пространства вложения сигнала, причем $D(h) \leq d \forall h$. Очевидно, что эта формула аналогична выражению (14).

В *методе локальной сингулярности* экспонента сингулярности $h(t)$ в точке t находится с помощью линейной регрессии графика уравнения (16), построенного в двойной логарифмической шкале, на некотором интервале масштабов. Эмпирическое распределение вероятности $p_{r_0}(h)$ оценивается из гистограммы экспериментальных значений h при фиксированном разрешении r_0, которое соответствует шкале с наибольшим числом значений h в гистограмме $p_{r_0}(h)$.

С учетом уравнения (17) получаем спектр сингулярности

$$D(h) = d - \frac{\ln[p_{r_0}(h)/p_{r_0}(h_1)]}{\ln r_0}, \tag{18}$$

где $p_{r_0}(h_1) = const$, которая позволяет устранить скрытый в (17) нормировочный множитель. Можно показать, что нормировка тривиальна: следует просто нормировать гистограмму на ее максимум [22].

В *методе точечной сингулярности* экспоненты сингулярности $h(t)$ оцениваются грубо из поведения оператора в минимальном доступном масштабе r_0 вместо линейной регрессии. Предполагается, что r_0 так мало, что $\ln a_{\mathbb{T}}$ в выражении (16) пренебрежимо мал по сравнению с $\ln r_0$. Оценка экспоненты точечной сингулярности $\widetilde{h}(t)$ задается выражением

$$\widetilde{h}(t) \equiv \frac{\ln \mathbb{T}_{r_0} s(t)}{\ln r_0}. \tag{19}$$

Для большинства наблюдаемых сигналов с достаточно хорошим разрешением $\widetilde{h}(t)$ является хорошей оценкой $h(t)$. Далее поступаем как в предыдущем методе: вычисляем эмпирическое распределение $\widetilde{h}$, затем по формуле (18) получаем спектр значений сингулярностей $D(h)$.

Мультифрактальный анализ изображений.

При мультифрактальном анализе изображений значения уровней серого рассматриваются обычно как основная информация о мере. Двумерное полутоновое изображение $I(p)$, $p \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, можно представить как отображение $I : \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, где точка p определена целочисленными координатами на решетке пикселов $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, а $I(p)$ принимает значения в «уровнях серого». Обычно $I(p) \in [0, 255]$. Часто используют метод структурной функции [6, 7], который, однако, позволяет оценить только большие значения экспонент сингулярности [24]. Возможности *канонического* мультифрактального формализма весьма ограничены тем обстоятельством, что обычно меру μ определяют как сумму интенсивностей пикселов изображения (т.н. *sum*-мера). Она удовлетворяет условию аддитивности, однако крайне неудобна для вычислений по двум причинам. Во-первых, ее трудно усреднять для изображений с большой вариабельностью контраста. Во-вторых, нельзя увеличить окно, в котором подсчитывается *sum*-мера меньше, чем на один пиксел по каждому из четырех направлений решетки.

В рамках более предпочтительных методов микроканонического анализа изображение является сигналом $s(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Полагая, что $s(\mathbf{x})$ — дифференцируемый сигнал и его градиент $|\nabla s|(\mathbf{x})$ локально интегрируем, можно определить плотность меры как $d\mu(\mathbf{x}) = d\mathbf{x}|\nabla s|(\mathbf{x})$ [22]. Тогда мера малой области изображения A определяется как $\int_A d\mu(\mathbf{x})$. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с пикселизацией, обычно используют проекцию меры на подходящий вейвлет-базис [24]:

$$T_\psi \mu(\mathbf{x_o}, r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\mathbf{x})\, r^{-d} \psi\left(\frac{\mathbf{x_0} - \mathbf{x}}{r}\right), \tag{20}$$

где ψ — некоторый вейвлет, r — масштабная переменная.

К сожалению, для некоторых изображений не всегда удается хорошо определить градиент. Это может привести к ложным значениям экспонент [22]. Поэтому в этой работе мы используем в качестве меры так называемые *емкости Шоке* [25, 26]. Емкости Шоке являются обобщением меры с ослаблением условия аддитивности и известны из квази-байесовской теории [27].

Пусть E — некоторое множество, $\mathcal{P}(E)$ — совокупность всех подмножеств E. Замощением E является множество $\mathcal{E}$ подмножеств E, содержащее пустое множество, и устойчивое относительно конечного объединения и пересечения. Пара $(E, \mathcal{E})$ образует замощение пространства. $\mathcal{E}$-емкостью Шоке является функция

$$c : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$$

такая, что выполняются следующие условия:

- c — неубывающая функция,
- если $\{A_n\}$ — возрастающая последовательность подмножеств, то $c(\bigcup_n A_n) = \sup_n c(A_n)$,
- если $\{A_n\}$ — убывающая последовательность подмножеств, тогда $c(\bigcap_n A_n) = \inf_n c(A_n)$.

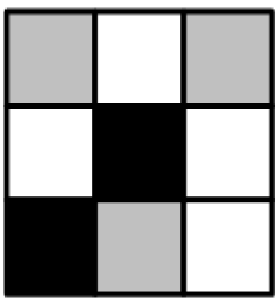
Ясно, что мультифрактальный анализ в этом случае сводится к выбору подходящей последовательности емкостей для описания изображения. Проблема нахождения оптимальной емкости при общих предположениях до сих пор не решена. На практике используются так называемые *миопические* емкости [28], т.к. они позволяют учесть пространственное разрешение изображения наиболее простым способом. Приведем некоторые из них.

Пусть изображение определено на $E = [0,1] \times [0,1]$. Обозначим через $(K_n)_{n\geq 1}$ последовательность конечных подмножеств из $\mathbb{N}$ и $\nu_n := card\, K_n$ ($card$ — мощность множества), причем $\nu_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, $\mathcal{P} := ((I_k^n)_{0\leq k<\nu_n})_{n\geq 1}$ — последовательность разбиений E и $(x_k^n,\, y_k^n)$ — любая точка в I_k^n. Каждый I_k^n образован целым числом пикселов. Пусть $L(I_k^n)$ обозначает сумму уровней серого в I_k^n; (x,y) — характерный пиксел в изображении и $L(x,y)$ — уровень серого в (x,y); $(p_n)_{n\geq 1}$ — фиксированная последовательность положительных целых чисел и Ω — область в изображении. Тогда [28]

- Sum-мера:
$$c^s(\Omega) = \sum_{(x,y)\in\,\Omega} L(x,y),$$

- Max-емкости:
$$c_n^m(\Omega) = max_{\tilde{\Omega}\in\,\Omega} L(I_k^{n+p_n}),$$
где $\tilde{\Omega} = I_k^{n+p_n}/(x_k^{n+p_n}, y_k^{n+p_n})$,
или
$$c^M(\Omega) = max_{(x,y)\in\,\Omega} L(x,y),$$

- Iso-емкости:
$$c_n^i = max_l\, \#\{k \,|\, L(I_k^{n+p_n}) = l,\; (x_k^{n+p_n}, y_k^{n+p_n}) \in \Omega\}$$
или
$$c^I = max_l\, \#\{(x,y) \,|\, L(x,y) = l,\; (x,y) \in \Omega\}.$$



$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 27 \\ 0 & 255 & 0 \\ 254 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 1: Фрагмент изображения 3×3 (слева) и численные значения уровней серого в пикселах (справа)

На практике разрешение конечное, все последовательности, описанные выше, тоже конечны (они фактически являются конечными вариантами миопических емкостей). Заметим, что

- $c^s(\Omega)$ зависит и от значений уровня серого, и от их распределения на Ω;
- $c^m_n(\Omega)$, $c^M(\Omega)$ зависят только от значений уровня серого;
- $c^i_n(\Omega)$, $c^I(\Omega)$ зависят только от распределения уровней серого.

Таким образом, (c^m_n, c^M) и (c^i_n, c^I) представляют информацию об изображении, дополняющую друг друга. Кроме того, можно показать, что они более робастные, чем c^s.

Поясним введенные определения на примере (Рис. 1). Слева показана область Ω, справа — численные значения $I(p)$. Очевидно, что $c^s(\Omega) = 586$ и $c^M(\Omega) = 255$. Для $l = 25$ получаем $c^I(\Omega) = 2$, что означает существование двух пикселов с уровнем серого 25.

Численные эксперименты.

Мы использовали так называемые *MDI-магнитограммы* (*Michelson Doppler Interferometer*), доступные на сайте [29] в специальном fits-формате. MDI данные получают с помощью высококачественных синоптических наблюдений полного диска Солнца на линии прямой видимости (радиовидимости) магнитного поля, свободного от атмосферных искажений, каждые 96 минут [29]. MDI чуствителен к трем основным классам осцилляций: акустическим волнам (p-моды), внутренним гравитационным волнам (g-моды) и поверхностным гравитационным волнам (f-моды). Каждая мода вморожена в свою область Солнца, и природа осцилляций принципиально зависит от структуры Солнца в этой области. Наиболее полезной является частотная мода, но измерения амплитуды мод, относительных фаз скорости и интенсивности также дают важную диагностическую информацию. Как и все данные, полученные на основе эффекта Допплера, измерения осцилляций являются искаженными из-за эффектов сильных магнитных полей в профиле спектральной линии. Информация о магнитном поле также важна, т.к. сильные поля значительно модифицируют физические условия, что отражается на спектре p-моды.

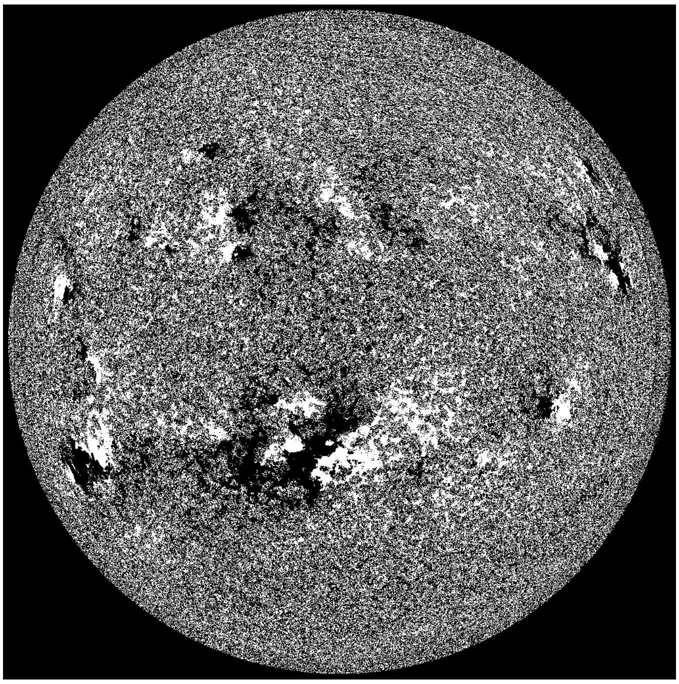


Рис. 2: MDI-изображение полного диска Солнца за 07.06.2000 г.

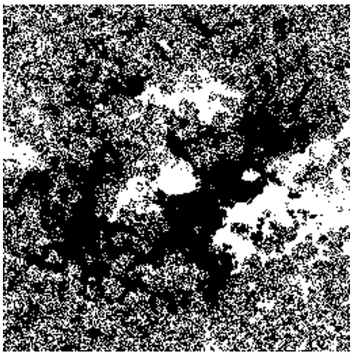


Рис. 3: Фрагмент изображения (256×256 пикселов) диска Солнца: активная область

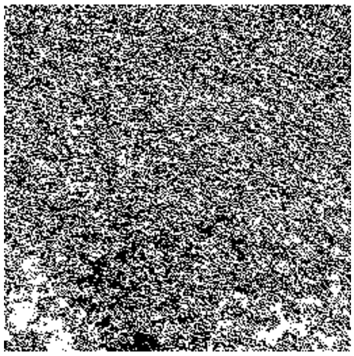


Рис. 4: Фрагмент изображения (256×256 пикселов) диска Солнца: вне активной области

Используемые данные представляют собой матрицы размера 1024×1024, состоящие из положительных и отрицательных значений радиальной компоненты напряженности магнитного поля Солнца. На Рис. 2 приведены такие данные в виде изображения в уровнях серого. Для случая, когда разрешение составляет две угловых секунды дуги ($2''$), одному пикселу соответствует линейный масштаб $\approx$ 1500 км. Светлые оттенки соответствуют положительной полярности, темные — отрицательной. На фоне мелкозернистой структуры видны солнечные пятна в виде черно-белых крупных объектов. Так называемые активные области Солнца (АО) содержат обычно несколько пятен разной полярности, которые на изображении видны, как кластеры темного и светлого цветов.

Для выявления свойств масштабной инвариантности выбирались фрагменты размером 256×256 как внутри активной области (АО) (Рис. 3), так и вне АО — фоновое поле (Рис. 4). Для обнаружения предвестника хромосферной вспышки анализировались магнитограммы, содержащие АО в интервале времени одни сутки до вспышки. Под предвестником понимались значительные отличия формы мультифрактальных спектров АО от спектров, полученных для фонового поля.

Для оценки спектров методом, основанным на емкостях Шоке, описанных в разделе «Мультифрактальный анализ изображений», использовался пакет FracLab 2.03 [30]. В процессе работы производилось сравнение спектров, полученных с помощью различных емкостей. Было обнаружено, что спектры, полученные с помощью *Sum*-меры, не отслеживают изменения структуры магнитного поля. Наиболее подходящим инструментом для проводимого анализа оказалась *Iso*-емкость.

Мультифрактальные спектры удалось получить во всех случаях по выборке из 46 магнитограмм как для фрагментов, содержащих АО, так и для фона. Таким образом, можно утверждать, что свойство статистической масштабной инвариантности является типичным для фотосферного магнитного поля.

Спектры, полученные для изображения вне АО, как правило, имеют гладкую форму с длинным правым хвостом. В большинстве случаев максимальное значение показателя Гельдера $h_{max} \approx 8$ (Рис. 5) и реже это значение приближалось к $h_{max} \approx 2$ (Рис. 6). Из Рис. 5 следует, что область вне АО характеризуется в основном резкими выбросами с показателями регулярности $h < 1.5$. Объекты с высоким показателем Гельдера $h > 1.5$ образуют множества с фрактальной

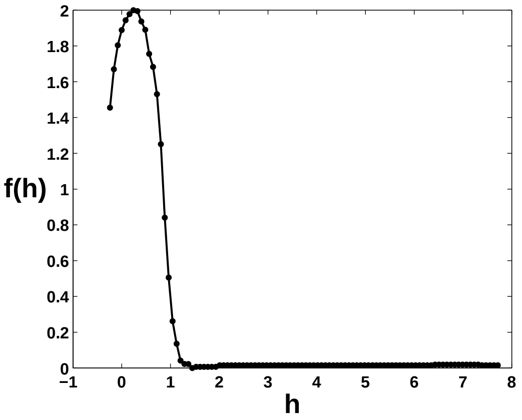


Рис. 5: Мультифрактальный спектр для фрагмента вне АО перед вспышкой

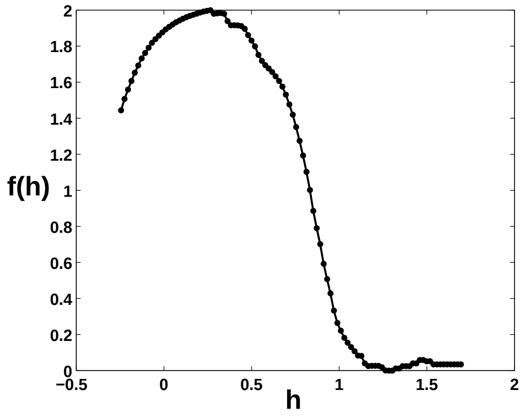


Рис. 6: Мультифрактальный спектр для фрагмента вне АО за 6 часов перед вспышкой

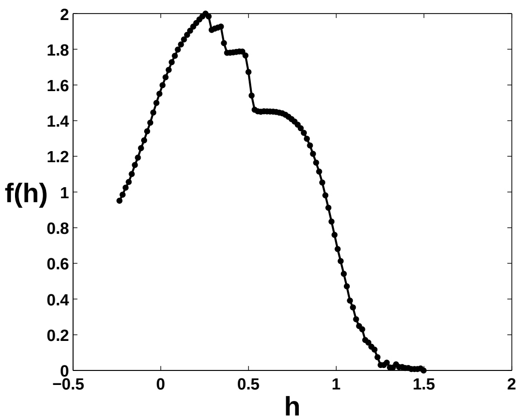


Рис. 7: Мультифрактальный спектр для активной области перед вспышкой

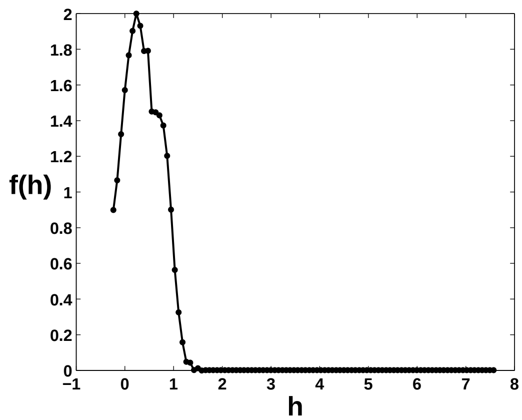


Рис. 8: Мультифрактальный спектр для активной области за 9 часов перед вспышкой

размерностью, не превышающей 0.1.

Мультифрактальные спектры для АО (Рис. 7) имеют ступенчатую форму справа от максимума. Этот эффект может быть вызван наличием нескольких «мод» в скейлинге. В некоторых случаях форма спектра АО меняется: становится более гладкой, появляются компоненты с высоким показателем Гельдера $h_{max} > 2$ (Рис. 8). Возможно, это вызвано эффектом дискретизации: динамический диапазон уровней серого для АО более бедный, нежели для фона. К сожалению, мы не можем утверждать, что описанное различие каким-либо образом вызвано будущей вспышкой: в анализируемой выборке имелись случаи, когда спектр изменялся и при отсутствии вспышки. Однако, во всех случаях значимые изменения наблюдались только для фрагментов, содержащих АО.

Заключение.

В работе получены оценки мультифрактальных спектров для магнитограмм Солнца. Численные результаты по выборке, содержащей 46 магнитограмм, показали, что

(1) мультифрактальные свойства мелкозернистого магнитного поля действительно существуют и могут быть обнаружены на магнитограммах методами, основанными на емкостях Шоке;

(2) формы мультифрактальных спектров устойчивы для фонового поля, т.е. фрагментов, не содержащих Солнечных пятен;

(3) мультифрактальные спектры фрагментов поля, содержащих АО, меняются. Эти изменения могут предшествовать вспышке, сопровождать ее, либо они вообще не связаны с ее будущей реализацией. Обнаруженный эффект может быть следствием транзиентной динамики магнитного поля АО;

(4) нам не удалось получить доводов в пользу построения вспышечного предиктора на основе оценок мультифрактального скейлинга. Возможно, что предполагаемое всплытие потока магнитного поля, провоцирующее вспышку, находится вне пределов анализируемого временного интервала, т.е. происходит ранее, чем за сутки. Не исключено, что разрешение магнитограмм недостаточно для выявления такого всплытия.

Благодарности.
Авторы благодарны Н.Г. Макаренко за постоянный интерес к проводимым исследованиям, полезные обсуждения и замечания.

Цитированная литература

1. **Charbonneau P.** // Living Rev. in Solar Phys. 2005. V. 2. http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-2
2. **Lawrence J.K., Ruzmaikin A.A., Cadavid A.C.** // Astrophys. J. 1993. V. 417. P. 805–811.
3. **Meunier N.** // Astroph. J. 1999. V. 515. Issue 2. P. 801–811.
4. **Neil R., Sheeley Jr.** // Living Rev. Solar Phys. 2005. V. 2. P. 5.
5. **Stark B., Adams M., et al.** // Solar Phys. 1997. V. 174, №1-2. P. 297–309.
6. **Abramenko V.I., Yurchyshyn V. B., et.al.** // Astroph. J. 2002. V. 577. Issue 1. P. 487–495.
7. **Abramenko V.I., Yurchyshyn V. B., et. al.** // Astrophys. J. 2003. V. 597. Issue 2. P. 1135–1144.
8. **Salakhutdinova I.I., Golovko A.A.** // Solar Physics. 2004. V. 225. Issue 1. P.59–74.
9. **Criscuoli S., Rast M., et al.** On the reliability of the fractal dimension measure of solar magnetic features and on its variation with solar cycle // astro-ph/0609748
10. **Georgoulis M.K.** Turbulence in the Solar Atmosphere: Manifestations and Diagnostics via Solar Image Processing // astro-ph/0511449
11. **Turiel A., Perez-Vicente C. J., Grazzini J.** // J. Comput. Physics. 2006. V. 216. P. 362–390.
12. **Li J., Nekka F.** // Physica A. 2007. V. 376. P. 147–157.
13. **Mandelbrot B.B.** // J. Fluid. Mech. 1974. V. 62. P. 331–358.
14. **Halsey T., Jensen M., Kadanoff L., et. al.** // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141–1151.
15. **Колмогоров А.Н.** // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 19–21.
16. **Arneodo A., et al.** // Europhys. Lett. 1996. V. 36. P. 411–416.
17. **Falconer K.** Techniques in fractal geometry. John Wiley & Sons, 1997.
18. **Федер Е.** Фракталы. М. Мир, 1991.
19. **Макаренко Н.Г.** // Нелинейные волны'2002. Нижний Новгород. 2003. С. 381–394.
20. **Jaffard S.** // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28, №4. P. 944–970.

21. **Riedi R., Scheuring I.** // Fractals. 1997. V. 5. P. 153–168.

22. **Pont O., Turiel A., Pérez-Vicente C.J.** // Physical Review E. 2006. V. 74. P. 061110(1)–061110(13)

23. **Novikov E.A.** // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. R3303–R3305.

24. **Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.** // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3515–3518.

25. **Lévy Véhel J., Berroir J-P.** Image analysis through multifractal description // Rapport de recherché, INRIA. http://www-rocq.inria.fr/rrrt/rr-1942.html

26. **Lévy Véhel J., Vojak R.** Multifractal analysis of Choquet capacities: Preliminary Results // Rapport de recherché, INRIA. http://www-rocq.inria.fr/rrrt/rr-2576.html

27. **Cozman F.** Introduction to the theory of sets of probabilities // http://www.cs.cmu.edu/~qbayes/

28. **Lévy Véhel J.** Introduction to the multifractal analysis of images // Rapport de recherché, INRIA. http://www-rocq.inria.fr/fractales

29. http://soi.stanford.edu/magnetic/index5.html

30. http://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/FracLab/

Поступила в редакцию 27.02.2007 г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 67 – 73*

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФИЛОМЕНТЫ НА ПРЕДДУГОВЫЕ ЭТАПЫ РАЗМЫКАНИЯ КОНТАКТОВ

А.Т. Кулахметова

Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 kulakhmetova@mail.ru

Решена задача стефановского типа в составных областях, описывающая нестационарные процессы в электрических контактах в преддуговой стадии

Рассмотрим задачу стефановского типа в составных областях, описывающую нестационарный нагрев в электрических контактах с температурным полем $\theta_1(z,t)$ для филоменты и $\theta_2(r,z,t)-$ для электрода. Будем считать, что температурное поле филомента-электрод описывается уравнениями

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} + (1+\alpha\theta_1)\,q_1, \tag{1}$$

$$-l < z < 0, \quad q_1 = \frac{\rho J^2}{\pi_2 r_0^4 c\gamma},$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\theta_2}{\partial r} + \frac{q_2}{r^4}\right), \tag{2}$$

$$0 < r, z < \infty, \quad q_2 = \frac{\rho J^2}{4\pi_2\lambda},$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\theta_1(-l,t)}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$-\lambda\frac{\partial\theta_1(0,t)}{\partial z} = -2\lambda\frac{\partial\theta_2(r,0,t)}{\partial z}, \tag{4}$$

Keywords: *mathematical model, temperature, electromagnetic field, electrical contact*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(r_0,t), \tag{5}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\theta_2(r,t) = 0, \tag{6}$$

и нулевыми начальными условиями. Здесь c – теплоемкость, γ – плотность, λ – теплопроводность, ρ_0 – электросопротивление для $\theta_1 = 0$, α – его температурный коэффициент. Равенство (5) означает симметричность температуры в центре филоменты.

Разобьем задачу на две, вводя функцию $-\lambda\frac{\partial\theta_1(0,t)}{\partial z} = \mu(t)$. Условие (5) оставим для сопряжения этих двух задач.

Решение задач записывается в виде:

$$\theta_1(z,t) = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha q_1 t} - 1\right) + \frac{1}{\alpha}e^{\alpha q_1 t}\left\{-\frac{a^2\alpha}{\lambda}\int\limits_0^t e^{\alpha q_1\tau}\mu(\tau)G(z,t,0,\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. -a^2\int\limits_0^t \left[\left(\alpha\theta(0,\tau)+1\right)e^{-\alpha q_1\tau} - 1\right]\frac{\partial G(z,t,0,\tau)}{\partial\eta}d\tau\right\}, \tag{7}$$

где

$$G(z,t,\eta,\tau) = \frac{exp\left(-\frac{(z-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + exp\left(-\frac{(z+\eta-2l)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}};$$

$$\theta_2(r,t) = \frac{a_2^2 r_0}{2\lambda_2 r}\int\limits_0^t \mu(\tau)H(r,t,r_0,\tau)d\tau + +\frac{a_2^2 q_2}{r r_0^2}\int\limits_0^t H(r,t,r_0,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{q_2}{2r^2}\int\limits_{r_0}^{\infty} H(r,t,\xi,0)d\xi, \tag{8}$$

где

$$H(r,t,\xi,\tau) = \frac{exp\left(-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + exp\left(-\frac{(r+\xi-2r_0)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} -$$

$$-\frac{1}{r_0}e^{\frac{r+\xi-2r_0}{r_0}+\frac{a_2^2}{r_0^2}(t-\tau)}\operatorname{erfc}\left(\frac{r+\xi-2r_0}{2a\sqrt{(t-\tau)}}\right).$$

Для нахождения функции $\mu(t)$ используем условие сопряжения температур на границе $z = 0$ и $r = r_0$. Применяя преобразование Лапласа, получим следующее выражение для $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{\lambda q_1}{4a^2}\left\{-\frac{r_0}{3} - \frac{4}{9r_0}\left[A\xi_1 e^{\xi_1^2 t}\operatorname{erfc}\xi_1\sqrt{t} + B\xi_2 e^{\xi_2^2 t}\operatorname{erfc}\xi_2\sqrt{t} - D\right] + \right.$$

$$+\frac{2}{3}r_0 exp(-\frac{\alpha q_1 t}{2})I_0((\frac{\alpha q_1 t}{2})) - \left(\frac{2N}{3r_0\sqrt{\pi}} - \frac{116a}{9\sqrt{\pi}}\right)\int\limits_0^{\sqrt{t}} e^{-\alpha q_1 x^2}dx -$$

$$\left. -\frac{exp(-\alpha q_1 t)}{3r_0}\left(P\int\limits_0^t \frac{\xi_1 e^{\xi_1^2\tau-\alpha q_1\tau}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\operatorname{erfc}\xi_1\sqrt{\tau}d\tau - Q\int\limits_0^t \frac{\xi_2 e^{\xi_2^2\tau-\alpha q_1\tau}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\operatorname{erfc}\xi_2\sqrt{\tau}d\tau - \right)\right\}, \tag{9}$$

где

$$A = \frac{D + C\xi_2}{\xi_1 - \xi_2}, B = \frac{-C\xi_1 - D}{\xi_1 - \xi_2},$$

$$C = \frac{8ar_0 - D(\xi_1 + \xi_2)}{\xi_1\xi_2}, D = \frac{7a^2 + r_0^2\alpha q_1}{\xi_1\xi_2},$$

$$M = \frac{1}{\xi_1\xi_2}\left\{N(\xi_1 + \xi_2) + \frac{4r_0}{9}(35a^2 - 2r_0^2\alpha q_1)\right\},$$

$$N = \frac{88a^3 + 4ar_0^2\alpha q_1}{9\xi_1\xi_2 r_0^2}, \quad P = \frac{N + M\xi_2}{\xi_1 - \xi_2}, \quad Q = \frac{M\xi_1 + N}{\xi_2 - \xi_1},$$

$$\xi_1 = \frac{-4a + \sqrt{4a^2 - 3r_0^2\alpha q_1}}{3r_0}, \quad \xi_2 = \frac{-4a - \sqrt{4a^2 - 3r_0^2\alpha q_1}}{3r_0}.$$

Разложим выражение $e^t \mathrm{erfc}\sqrt{t}$ по степеням t. Если ограничиться членами, содержащими t в спепени не выше первой, получим

$$e^t \mathrm{erfc}\sqrt{t} \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + t.$$

Используя это приближение и асимтотику $I_0(x)$, можно получить следующее выражение для $\mu(t)$:

$$\mu(t) \approx \frac{\lambda q_1}{36a^2}\left[1.8r_0 - 29.3a\sqrt{t} - 228\frac{a^2t}{r_0} + 4r_0\alpha q_1 t\right]. \tag{10}$$

Расчеты с использованием формулы (7) отличаются от расчетов, приведенных в [1] для соответствующих параметров (тока, теплоемкости, теплопроводности и т.д.) не более, чем на 5-8 %, что оправдывает допущение о представимости температуры филоменты с плотностью в форме (10).

Далее исследуем преддуговые стадии и влияние на них параметров филоменты. Электродуговые явления в начальный период размыкания электрических контактов в значительной степени зависят от параметров филоменты на преддуговом этапе размыкания контактов. Как известно [2], начальная стадия электрической дуги, зажигающейся в парах разрушившейся филоменты, характеризуется преимущественным переносом материала с анода на катод, нестационарным ростом напряжения, температуры и контактного промежутка (анодно-доминирующая переходная фаза дуги). Важнейшими факторами, определяющими продолжительность этой фазы, являются длина филоменты и время ее существования. Математические модели, базирующиеся на гипотезе о формировании мостика за счет вытягивания жидкого металла из расплава на поверхности контактов при их раздвижении, не всегда способны объяснить экспериментально полученные данные по параметрам филоменты. Поэтому целесообразно рассматривать также модели образования мостика за счет плавления микровыступов контактной поверхности (филаментные мостики). Простейшие варианты таких моделей рассмотрены в работах [1],[2].

Первый этап эволюции филоменты начинается с момента достижения температуры плавления $\theta_{\text{пл}}$ в сечении с максимальной температурой, затем граница между расплавленной и твердой частями филаменты движется вдоль оси z и в момент времени $t = t_0$, когда она достигает поверхности электрода, первый этап заканчивается. Второй этап ($t_0 \leq t \leq t_b$) сопровождается внедрением жидкого металла вглубь электрода с образованием жидкой зоны D_1 и D_2 ($-l(t) \leq z \leq \sigma(r,t)$) и твердой зоны D_3 ($z \geq \sigma(r,t)$ для $0 \leq r \leq r_1(t); z \geq l(t)$ для $r \geq r_1(t)$). Так как $t << t_b$, то на первом этапе увеличением межконтактного расстояния $l(t)$

за счет движения контактов можно пренебречь, т.е. $l(t) = l(0) = l_0$ для $0 \le t \le t_0$. На втором этапе

$$l(t) = l_0 + \frac{1}{2}Vt, \quad t_0 \le t \le t_b,$$

где $V-$ скорость размыкания контактов. Филомента (обл. D_1) представляет собой тело с переменным сечением, образованным вращением неизвестной функции $y(z,t)$.

Существующая между электродами филомента (твердый металлический стержень) является основой возникновения мостика. После разрыва расплавленного мостика в парах кипящего металла зажигается электрическая дуга и начинается металлическая фаза дуги. Если контактный промежуток мал, образуется металлическая короткая дуга. Это характерно для неподвижного катодного пятна и перенос контактного материала идет, главным образом, от анода к катоду. Эксперименты показывают [3], что продолжительность короткой дуги t_{a1} зависит от длины расплавленного мостика до его разрушения, скорости размыкания v и тока. Напряжение дуги в этот период изменяется от $12V$ до $19.5V$.

Это явление может быть объяснено следующим образом. После разрушения мостика промежуток между анодом и катодом очень мал, следовательно, анод подвергается существенному перегреву и становится паровым источником. Поток плазмы направлен от анода к катоду, поэтому существует некоторое критическое расстояние $d_{\text{кр}}$ в ходе размыкания контактов, когда плотность плазменного потока недостаточна для продолжения испарения. Если длина мостика $l < d_{\text{кр}}$, то появляется дуга, которая характеризуется экспериментально наблюдаемой неподвижностью катодного пятна, перегреванием анода по сравнению с катодом и переносом материала от анода к катоду. Следовательно, если $l > d_{\text{кр}}$, то дуга зажигается в парах катода и будет диффузионной, которая характеризуется катодным пятном высокой скорости движения и перемещением материала от катода к аноду с постоянным напряжением (около $20V$ для медных контактов). Будем считать, что первый период $0 \le t \le t_m$ нестационарного нагрева с температурным полем $\theta_1(z,t)$ для филоменты и $\theta_2(r,z,t)-$ для электрода удовлетворяет уравнениям

$$c\gamma\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} + \rho_0(1+\alpha\theta_1)\cdot j_1^2, \tag{11}$$

$$-l < z < 0,$$

$$c\gamma\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta_2}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}\right) + \ + \rho_0(1+\alpha\theta_2)\cdot j_2^2, \tag{12}$$

$$0 < r, \quad z < \infty,$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\theta_1(-l,t)}{\partial z} = 0, \quad -\lambda\frac{\partial\theta_1(0,t)}{\partial z} = \mu(t), \tag{13}$$

$$-\lambda\frac{\partial\theta_2(r,0,t)}{\partial z} = \begin{cases} \mu(t), & r < r_0 \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

$$\theta_2|_{r^2+z^2=\infty} = 0 \tag{14}$$

и нулевыми начальными условиями. Здесь $c-$ теплоемкость, $\gamma-$ плотность, $\lambda-$ теплопроводность, ρ_0- электросопротивление для $\theta_1 = 0$, $\alpha-$ его температурный коэффициент, $j_1 = J/\pi r_0^2$ – плотность тока в филоменте, $j_2 = j_2(r,z)$ – плотность тока в электроде, данная в [3], $\mu(t)$ – неизвестный тепловой поток, который должен быть найден. Первое из равенств (13) означает симметричность температуры в центре филоменты.

Кроме сопряжения потока $\mu(t)$ на круге $z=0, \quad 0 \le r \le r_0$ мы также имеем сопряжение температур θ_1 и θ_2 :

$$\theta_1(0,t) = \theta_2(0,0,t). \tag{15}$$

Вместо условия (15) можно использовать условие сопряжения

$$\theta_1(0,t) = \frac{2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0} \theta_2(r,0,t) r dr \tag{15'}$$

Вычисления показывают, что соотношения (15) и (15′) дают практически одинаковый результат.

Приближенное решение задачи (11)–(14) было найдено интегральным методом теплового баланса [5].

Найдем точное решение уравнения (12) с граничным условием (13) и сравним полученные результаты. Решение будем искать в виде

$$\theta_2(r,z,t) = \theta_{21}(r,z,t) + \theta_{22}(r,z,t), \tag{16}$$

где [6]

$$\theta_{21}(r,z,t) =$$

$$= \frac{1}{2a\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \int\limits_0^{r_0} \exp\left[-\frac{z^2+r^2+r_1^2}{4a^2(t-\tau)}\right] I_0\left(\frac{rr_1}{2a^2(t-\tau)}\right) r_1 dr_1 \tag{17}$$

соответствует нагреву электрода с потоком $\mu(t)$ из филоменты и

$$\theta_{22}(r,z,t) =$$

$$= \frac{1}{2a\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int\limits_0^\infty dz_1 \int\limits_0^\infty \left(\exp\left[-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + +\exp\left[-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(r^2+r_1^2)}{4a^2(t-\tau)}\right] I_0\left(\frac{rr_1}{2a^2(t-\tau)}\right) q_2(r_1,z_1) r_1 dr_1 \tag{18}$$

отвечает за джоулев нагрев электрода. Выражение для $q_2(r,z)$ дано в [3]. Если пренебречь джоулевым нагревом электрода по сравнению с нагревом филаменты ($q_2(r,z) \equiv 0$), тогда

$$\theta_2(0,0,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu(t)}{\sqrt{t-\tau}}\left[1-\exp\left(-\frac{k^2}{4(t-\tau)}\right)\right] d\tau,$$

где $k = r_0/a$.

Итак, условие (15) дает интегральное уравнение для $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{3\lambda}{\alpha l}\left(e^{\kappa t}-1\right) - \frac{3a^2}{l^2}\int\limits_0^t e^{\kappa(t-\tau)}\mu(\tau) d\tau +$$

$$+\frac{3a}{\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left(1-e^{-\frac{k^2}{4(t-\tau)}}\right) d\tau. \tag{19}$$

Следующее равенство дает величину теплового потока $\mu(t)$ для малого времени t:

$$\mu(t) = \frac{3\lambda q_1}{l} t + o(t), \tag{20}$$

итак, $\mu(t)$ может быть приближена выражением

$$\mu(t) = \mu_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\nu t}\right), \tag{21}$$

где $\nu = 3\lambda q_1/l$ и μ_0 — — стационарный тепловой поток

$$\mu_0 = \lim_{t\to\infty} \mu(t).$$

Величина μ_0 может быть найдена из решения стационарной задачи $\theta_1(x,\infty)$, $\theta_2(r,z,\infty)$ соответствующей задаче (11)–(15), когда $t \to \infty$ и $\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{\partial\theta_2}{\partial t} = 0$.

Это решение задается формулой

$$\theta_1(z,\infty) = \frac{\mu_0}{\varepsilon\lambda} \cdot \frac{\cos \varepsilon(z+l)}{\sin \varepsilon l} - \frac{1}{\alpha}, \tag{22}$$

$$\varepsilon = j_1 \sqrt{\frac{\alpha\rho_0}{\lambda}},$$

$$\theta_2(r,z,\infty) = \theta_{21}(r,z) + \theta_{22}(r,z), \tag{23}$$

где

$$\theta_{21}(r,z) = \frac{\mu_0 r_0}{\lambda} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-xz} J_0(xr) J_1(xr_0) \frac{dx}{x}$$

соответствует нагреву электрода потоком из филоменты и

$$\theta_{22}(r,z) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos\left(\frac{1}{2} r_0 \varepsilon \operatorname{arctg} \frac{\xi}{r_0}\right)}{\cos \pi r_0 \varepsilon/4} - 1 \right],$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s + \sqrt{|s|^2 + 4r_0^2 z^2}}, \quad s = z^2 + r^2 - r_0^2,$$

отвечает за джоулев нагрев в электроде.

Подставляя (22) и (23) в (15), находим

$$\mu_0 = \frac{\lambda\varepsilon}{\alpha \cos \pi r_0 \varepsilon/4} \cdot (\operatorname{ctg} \varepsilon l - \varepsilon r_0)^{-1}, \tag{24}$$

следовательно, температура на поверхности раздела между филоментой и электродом

$$\theta_1(0,\infty) = \theta_2(0,0,\infty) = \frac{\mu_0 r_0}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\left(\cos^{-1} \frac{\pi r_0 \varepsilon}{4} - 1\right), \tag{25}$$

но в центре филоменты

$$\theta_1(-l,\infty) = \frac{\mu_0}{\varepsilon\lambda} \sin^{-1} al - \frac{1}{\alpha}. \tag{26}$$

Таким образом, распределение температуры в филоменте найдено.

Сравним результаты вычислений по трем моделям.

1) Адиабатическая модель [1]

2) Модель с постоянной температурой θ_0 на поверхности раздела между филоментой и электродом [7], формула

$$\theta_1(z,t) = \theta_0 - \frac{\bar{\mu}(t)}{2\lambda l} z(z+2l), \tag{27}$$

которая может быть найдена также, как и формула (18), если второе граничное условие (13) будет заменено на $\theta_1(0,t) = \theta_0$.

Здесь

$$\bar{\mu}(t) = \frac{p}{\delta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\right),$$

$$p = \frac{3q_1\lambda}{2l}, \qquad \delta = aq_1 - \frac{3a^2}{2l^2}. \tag{28}$$

3) Основная модель дается выражением (18).

При вычислениях использованы данные из таблицы 1.

Таблица 1

$c = 3.9 \cdot 10^3 J/kg \cdot^0 C$	$\rho_0 = 1.55 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
$\gamma = 8.9 \cdot 10^3 kg/m^3$	$\alpha = 4 \cdot 10^{-3} 1/^0 C$
$\lambda = 3.8 \cdot 10^2 W/m^3 \cdot^0 C$	$J = 25A, t = t_m$

Время t_m, необходимое для плавления филоменты, для адиабатической модели дано в [1] и равно $1.4 \cdot 10^{-5}$ сек. За это время температура, соответствующая модели, описанной в [7], будет $\theta_1(-l,t) = 342^0 C$ в центре филоменты и $\theta_0 = 20^0 C-$ на ее концах. Согласно основной модели реальная температура $\theta_1(-l,t) = 740^0 C$, $\theta_1(0,t) = 336^0 C$. Т.е. расчеты по приведенной основной модели более соответствуют экспериментальным данным [3].

Нетрудно вычислить, используя основную модель (1)-(6), что только 54% диссипативной энергии $W = J \cdot U \cdot t_m$ расходуется для нагрева филоменты, а 46% рассеивается через поверхность электрода благодаря теплопроводимости.

Следовательно, радиус r_0 и длина l филоменты, вычисленная в [1] с использованием энергетического баланса, могут быть уточнены с использованием представленной модели.

Цитированная литература

1. **Haug R., Konakou T.,Doremieux J.L.** // Proc.36-th Holm Conf.on Electrical Contacts, Montreal. 1990, P. 543-549.

2. **Kharin S.N.** //Proc. 17th Int. Conf. on Electrical Contacts, Nagoya, Japan. 1994. P. 817-824.

3. **Елагин В.П.** // УкрНИИНТИ. Харьков, 1986, С. 1-16.

4. **Kharin S.N.** // Proc. 37-th Holm Conf. on Electrical Contacts. Chicago, 1991.P. 53-65.

5. **Харин С.Н., Шпади Ю.Р. , Кулахметова А.Т. , Кулахметова Ш.А., Лобанова В.В.** //Математический журнал. 2003. Т.3, №4(10).С.59-67

6. **Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н.** Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. Наука, Алма-Ата, 1977.

7. **Slade P.G.,Nahemov M.D.** //J. of Appl. Phys. 1971. V.42, № 9. P.3290-3297.

Поступила в редакцию 18.10.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 74 – 80*

УДК 517.927.25

О ПОНЯТИИ РЕГУЛЯРНОСТИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

М.А. Садыбеков, А.М. Сарсенби

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, abzhahan@ok.kz

В работе определено понятие регулярности краевых условий и установлены условия регулярности краевых условий для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом. Приведены примеры краевых условий, являющихся регулярными или нерегулярными в смысле введенного определения.

1. Введение. Теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом считают относительно молодым разделом теории обыкновенных дифференциальных уравнений. По-видимому, основные теоремы общей теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом впервые были сформулированы в докторской диссертации А.Д.Мышкиса [1] в 1952 году.

Асимптотике собственных значений и собственных функций краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом посвящена третья и четвертая главы монографии С.Б.Норкина [2]. Там же на стр. 113 даются ссылки на работы, посвященные вопросам полноты собственных функций и разложения по собственным (и присоединенным) функциям уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом другого вида.

Если для обыкновенных дифференциальных операторов порядка n еще Биркгофом (см., например, [3], §4, [4], с.197) были введены понятия регулярных краевых условий и получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, то для уравнений с отклоняющимся аргументом подобной классификации краевых условий в литературе не встречается, что может быть связано и с разнообразием видов уравнений с отклоняющимся аргументом.

Т.Ш.Кальменов заметил, что в то время как задача Коши для обыкновенного дифференциального оператора порядка n является несамосопряженной, вольтерровой, нерегулярной (в

Keywords: *differential equation, regularity, divergent argument*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B05

смысле Биркгофа) задачей (см., например, [4], с.188, [5], с.83), то эта же задача для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом оказывается самосопряженной, невольтерровой, регулярной краевой задачей (последняя следует из наших исследований, которые будут изложены ниже).

2. Понятие регулярности краевых условий. На отрезке $[-1,1]$ числовой оси рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$u''(x)+\rho^2 u(-x)=0. \tag{1}$$

Чрезвычайно легко проверить, что функции

$$u_1(x)=e^{\rho x}-e^{-\rho x},\quad u_2(x)=e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (1).

Как и в [3], (с. 13), линейные формы, порождающие краевые условия для уравнения (1), запишем в виде

$$\begin{aligned}U_1&=\alpha_1 u'(-1)+\alpha_{11}u(-1)+\beta_1 u'(1)+\beta_{11}u(1),\\ U_2&=\alpha_2 u'(-1)+\alpha_{21}u(-1)+\beta_2 u'(1)+\beta_{21}u(1).\end{aligned} \tag{2}$$

Линейные формы U_1 и U_2, определенные выражениями (2), перепишем для каждого линейно независимого решения u_1 и u_2 уравнения (1). Они имеют вид:

$$U_1(u_1)=(\alpha_1\rho+\alpha_{11}+\beta_1\rho-\beta_{11})\cdot e^{-\rho}+(\alpha_1\rho-\alpha_{11}+\beta_1\rho+\beta_{11})\cdot e^{\rho},$$

$$U_1(u_2)=(\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}-\beta_1 i\rho+\beta_{11})\cdot e^{-i\rho}+(-\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}+\beta_1 i\rho+\beta_{11})\cdot e^{i\rho},$$

$$U_2(u_1)=(\alpha_2\rho+\alpha_{21}+\beta_2\rho-\beta_{21})\cdot e^{-\rho}+(\alpha_2\rho-\alpha_{21}+\beta_2\rho+\beta_{21})\cdot e^{\rho},$$

$$U_2(u_2)=(\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}-\beta_2 i\rho+\beta_{21})\cdot e^{-i\rho}+(-\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}+\beta_2 i\rho+\beta_{21})\cdot e^{i\rho}.$$

Составим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ и приравняем его к нулю:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(u_1)U_1(u_2)\\ U_2(u_1)U_2(u_2)\end{vmatrix}=0.$$

Подставляя вместо $U_i(u_j)$ соответствующие значения, получим

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1\rho+\alpha_{11}+\beta_1\rho-\beta_{11})\cdot e^{-\rho}+ & (\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}-\beta_1 i\rho+\beta_{11})\cdot e^{-i\rho}+\\ +(\alpha_1\rho-\alpha_{11}+\beta_1\rho+\beta_{11})\cdot e^{\rho} & +(-\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}+\beta_1 i\rho+\beta_{11})\cdot e^{i\rho}\\ (\alpha_2\rho+\alpha_{21}+\beta_2\rho-\beta_{21})\cdot e^{-\rho}+ & (\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}-\beta_2 i\rho+\beta_{21})\cdot e^{-i\rho}+\\ +(\alpha_2\rho-\alpha_{21}+\beta_2\rho+\beta_{21})\cdot e^{\rho} & +(-\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}+\beta_2 i\rho+\beta_{21})\cdot e^{i\rho}\end{vmatrix}=0.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\rho+\alpha_{11}+\beta_1\rho-\beta_{11} & \alpha_1 i\rho+\alpha_{11}-\beta_1 i\rho+\beta_{11}\\ \alpha_2\rho+\alpha_{21}+\beta_2\rho-\beta_{21} & \alpha_2 i\rho+\alpha_{21}-\beta_2 i\rho+\beta_{21}\end{vmatrix}\cdot e^{-\rho}e^{-i\rho}+$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1\rho+\alpha_{11}+\beta_1\rho-\beta_{11} & -\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}+\beta_1 i\rho+\beta_{11}\\ \alpha_2\rho+\alpha_{21}+\beta_2\rho-\beta_{21} & -\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}+\beta_2 i\rho+\beta_{21}\end{vmatrix}\cdot e^{-\rho}e^{i\rho}+$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1\rho-\alpha_{11}+\beta_1\rho+\beta_{11} & \alpha_1 i\rho+\alpha_{11}-\beta_1 i\rho+\beta_{11} \\ \alpha_2\rho-\alpha_{21}+\beta_2\rho+\beta_{21} & \alpha_2 i\rho+\alpha_{21}-\beta_2 i\rho+\beta_{21} \end{vmatrix}\cdot e^{\rho}e^{-i\rho}+$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha_1\rho-\alpha_{11}+\beta_1\rho+\beta_{11} & -\alpha_1 i\rho+\alpha_{11}+\beta_1 i\rho+\beta_{11} \\ \alpha_2\rho-\alpha_{21}+\beta_2\rho+\beta_{21} & -\alpha_2 i\rho+\alpha_{21}+\beta_2 i\rho+\beta_{21} \end{vmatrix}\cdot e^{\rho}e^{i\rho}=0.$$

Далее каждый из определителей в последнем равенстве представим в виде суммы шести определителей

$$\Bigg[(1-i)\rho\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_{11} \\ \alpha_2\alpha_{21} \end{vmatrix}-2i\rho^2\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_{11} \\ \alpha_2\beta_{21} \end{vmatrix}+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_{11} \\ \beta_2\alpha_{21} \end{vmatrix}+$$

$$+2\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\beta_{11} \\ \beta_2\beta_{21} \end{vmatrix}\Bigg]\cdot e^{-\rho}e^{-i\rho}+\Bigg[(1+i)\rho\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_{11} \\ \alpha_2\alpha_{21} \end{vmatrix}+2i\rho^2\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}+$$

$$+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_{11} \\ \alpha_2\beta_{21} \end{vmatrix}+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_{11} \\ \beta_2\alpha_{21} \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\beta_{11} \\ \beta_2\beta_{21} \end{vmatrix}\Bigg]\cdot e^{-\rho}e^{i\rho}+$$

$$+\Bigg[(1+i)\rho\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_{11} \\ \alpha_2\alpha_{21} \end{vmatrix}-2i\rho^2\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_{11} \\ \alpha_2\beta_{21} \end{vmatrix}+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_{11} \\ \beta_2\alpha_{21} \end{vmatrix}-$$

$$-2\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\beta_{11} \\ \beta_2\beta_{21} \end{vmatrix}\Bigg]\cdot e^{\rho}e^{-i\rho}+\Bigg[(1-i)\rho\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_{11} \\ \alpha_2\alpha_{21} \end{vmatrix}+2i\rho^2\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix}+$$

$$+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_{11} \\ \alpha_2\beta_{21} \end{vmatrix}+(1+i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_{11} \\ \beta_2\alpha_{21} \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}+$$

$$+(1-i)\rho\begin{vmatrix} \beta_1\beta_{11} \\ \beta_2\beta_{21} \end{vmatrix}\Bigg]\cdot e^{\rho}e^{i\rho}=0. \tag{3}$$

Обозначим

$$B_1=\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_{11} \\ \alpha_2\alpha_{21} \end{vmatrix};\quad A_0=\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{vmatrix};\quad B_2=\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_{11} \\ \alpha_2\beta_{21} \end{vmatrix};\quad B_3=\begin{vmatrix} \beta_1\alpha_{11} \\ \beta_2\alpha_{21} \end{vmatrix};$$

$$C_0=\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix};\quad B_4=\begin{vmatrix} \beta_1\beta_{11} \\ \beta_2\beta_{21} \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$\big[(1-i)\rho B_1-2i\rho^2A_0+(1+i)\rho B_2+(1+i)^2\rho B_3+2C_0+(1-i)\rho B_4\big]\cdot e^{-\rho}e^{-i\rho}+$$

$$+\big[(1+i)\rho B_1+2i\rho^2A_0+(1-i)\rho B_2+(1-i)^2\rho B_3+2C_0+(1+i)\rho B_4\big]\cdot e^{-\rho}e^{i\rho}+$$

$$+\big[(1+i)\rho B_1-2i\rho^2A_0+(1-i)\rho B_2+(1-i)^2\rho B_3-2C_0+(1+i)\rho B_4\big]\cdot e^{\rho}e^{-i\rho}+$$

$$+\big[(1-i)\rho B_1+2i\rho^2A_0+(1+i)\rho B_2+(1+i)^2\rho B_3-2C_0+(1-i)\rho B_4\big]\cdot e^{\rho}e^{i\rho}=0. \tag{4}$$

Краевые условия, порожденные линейными формами (2), называются регулярными, если хотя бы одно из чисел θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, определяемых равенствами

$$\theta_1=(1-i)\rho B_1-2i\rho^2A_0+(1+i)\rho B_2+(1+i)\rho B_3+2C_0+(1-i)\rho B_4,$$

$$\theta_2=(1+i)\rho B_1+2i\rho^2A_0+(1-i)\rho B_2+(1-i)\rho B_3+2C_0+(1+i)\rho B_4,$$

$$\theta_3=(1+i)\rho B_1-2i\rho^2A_0+(1-i)\rho B_2+(1-i)\rho B_3-2C_0+(1+i)\rho B_4,$$

$$\theta_4 = (1-i)\rho B_1 + 2i\rho^2 A_0 + (1+i)\rho B_2 + (1+i)\rho B_3 - 2C_0 + (1-i)\rho B_4,$$

отлично от нуля во внешности некоторого круга ρ-плоскости.

Заметим, что введенное нами определение регулярных краевых условий может и не совпадать с классическим определением регулярных краевых условий по Биркгофу.

Здесь краевыми условиями мы называем равенства

$$U_1(u) = 0,\ \ U_2(u) = 0$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \alpha_2 u'(-1) + \beta_2 u'(1) + \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

которые определяются с помощью форм (2).

3. Условия регулярности краевых условий. Перейдем теперь к выяснению условий регулярности краевых условий (3), т.е. тех условий, которые обеспечивали бы выполнение соотношений $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 \neq 0$, $\theta_3 \neq 0$, $\theta_4 \neq 0$ для чисел θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, определенных в предыдущем пункте.

3.1. Считая ρ достаточно большим по модулю, обе части уравнения (4) разделим на величину $2i\rho^2$. Тогда выражения во всех четырех квадратных скобках примут один из следующих видов:

$$A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{или} \quad -A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

и уравнение (4) примет вид

$$\left[-A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \cdot e^{-\rho} e^{-i\rho} + \left[A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \cdot e^{-\rho} e^{i\rho} +$$

$$+ \left[-A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \cdot e^{\rho} e^{-i\rho} + \left[A_0 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \cdot e^{\rho} e^{i\rho} = 0.$$

Следовательно, числа θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 будут отличны от нуля, если определитель A_0 отличен от нуля:

$$A_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, краевые условия (5) регулярны, если

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0. \tag{6}$$

В этом случае значения коэффициентов α_{11}, β_{11}, α_{21}, β_{21} при младших членах не играют никакой роли для определения регулярности краевых условий.

3.2. Пусть теперь $A_0 = 0$, т.е. $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Тогда краевые условия (5) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$. Ради простоты коэффициенты мы снова обозначим, как и прежде.

В рассматриваемом случае в уравнении (4) $A_0 = 0$, а определители B_1, B_2, B_3, B_4 запишутся в виде

$$B_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix}, \quad B_4 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае вид определителя C_0 не играет особой роли, поэтому мы его не пишем.

Разделим обе части уравнения (4) на величину $-(i-1)\rho$ и учитывая, что $\dfrac{1+i}{1-i} = i$ $(A_0 = 0)$, приходим к тому, что выражения в квадратных скобках примут один из следующих двух видов:

$$iB_1 + B_2 + B_3 + iB_4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{или}$$

$$B_1 + iB_2 + iB_3 + B_4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Более подробно значения чисел θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, определяющих регулярность краевых условий вида (7), выглядят следующим образом:

$$\theta_1 = \theta_4 = B_1 + iB_2 + iB_3 + B_4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\theta_2 = \theta_3 = iB_1 + B_2 + B_3 + iB_4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= i\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{21} \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_{11} \\ 0 & \beta_{21} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

В полученных равенствах, вычисляя определители второго порядка, будем иметь

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_4 &= \alpha_1\alpha_{21} + i\alpha_1\beta_{21} + i\beta_1\alpha_{21} + \beta_1\beta_{21}, \\ \theta_2 = \theta_3 &= i\alpha_1\alpha_{21} + \alpha_1\beta_{21} + \beta_1\alpha_{21} + i\beta_1\beta_{21}. \end{aligned} \tag{8}$$

Выясним теперь, при каких условиях числа θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 отличны от нуля. С этой целью выражения (8) приравняем к нулю:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_{21} + i\alpha_1\beta_{21} + i\beta_1\alpha_{21} + \beta_1\beta_{21} = 0, \\ i\alpha_1\alpha_{21} + \alpha_1\beta_{21} + \beta_1\alpha_{21} + i\beta_1\beta_{21} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Умножая первое уравнение в (9) на величину i, затем поочередно складывая и отнимая друг от друга два уравнения системы (9), придем к следующей, эквивалентной ей, системе

$$\begin{cases} i(\alpha_1\alpha_{21} + \beta_1\beta_{21}) = 0, \\ \alpha_1\beta_{21} + \beta_1\alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы легко следует, что

$$\alpha_1^2 = \beta_1^2 \quad \text{и} \quad \alpha_{21}^2 = \beta_{21}^2.$$

Таким образом, краевые условия (7) регулярны, т.е. числа θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 отличны от нуля в том и только в том случае, когда коэффициенты указанных краевых условий связаны соотношениями

$$\alpha_1^2 \neq \beta_1^2 \text{ и } \quad \alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2.$$

3.3. Перейдем к выводу третьего условия регулярности краевых условий (5). Выше мы рассмотрели два случая: первый, когда оба краевых условия содержат значения производной, и второй, когда только одно краевое условие содержит значения производной, а второе краевое условие не содержит значения производной.

Теперь же рассмотрим случай, когда оба краевых условия не содержат значений производной, т.е. тот случай, когда в (5) $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда краевые условия (5) запишутся в виде

$$\begin{cases} \alpha_{11}u(-1) + \beta_{11}u(1) = 0, \\ \alpha_{21}u(-1) + \beta_{21}u(1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В этом случае все определители A_0, B_1, B_2, B_3, B_4 равны нулю и уравнение (4) имеет вид

$$C_0e^{-\rho}e^{-i\rho} + C_0e^{-\rho}e^{i\rho} - C_0e^{\rho}e^{-i\rho} - C_0e^{\rho}e^{i\rho} = 0.$$

Выпишем числа θ_1, θ_2, θ_3, θ_4

$$\theta_1 = \theta_2 = C_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}, \quad \theta_3 = \theta_4 = -C_0 = -\begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} \\ \alpha_{21}\beta_{21} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 будут отличны от нуля в том и только в том случае, когда определитель $C_0 \neq 0$, т.е.

$$\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0. \tag{11}$$

Полученное условие означает линейную независимость форм, порождающих краевые условия (10).

Таким образом, условие регулярности (11) позволяет записать краевые условия (10) в виде

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Итак, краевые условия (5) регулярны при выполнении следующих соотношений:
1) $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$;
2) $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1 + > 0$, $\alpha_1^2 \neq \beta_1^2$, $\alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2$;
3) $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$.

4. Примеры

4.1. Задача Коши. $u'(-1) = 0$, $u(-1) = 0$.

В этом случае $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{21} = 1$ и мы имеем краевые условия вида (7). Так как $\beta_1 = 0$, $\beta_{21} = 0$, то $\alpha_1^2 \neq \beta_1^2$, $\alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2$. Имеет место второе условие регулярности. Задача Коши регулярна.

Заметим, что задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-u''(x) = \lambda u(x)$$

является вольтерровой, нерегулярной в смысле Биркгофа задачей.

4.2. Условия периодического типа. Они имеют вид

$$\begin{cases} u'(-1) - u'(1) = 0, \\ u(-1) - u(1) = 0. \end{cases}$$

Выпишем коэффициенты краевых условий

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -1, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \beta_{11} = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \alpha_{21} = 1, \quad \beta_{21} = 1.$$

Мы имеем дело с краевыми условиями вида (7). В данном случае $\alpha_1^2 = \beta_1^2$, $\alpha_{21}^2 = \beta_{21}^2$, так что нарушено второе условие регулярности. Условия периодического типа не являются регулярными, хотя эти же условия в случае обыкновенного дифференциального уравнения относятся к типу регулярных по Биркгофу краевых условий (но не усиленно регулярных).

4.3. Условия типа Штурма. Так называют краевые условия вида

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \alpha_{11} u(-1) = 0, \\ \beta_2 u'(1) + \beta_{21} u(1) = 0. \end{cases}$$

Оба условия содержат значения производной, поэтому проверяем первое условие регулярности. В рассматриваемом случае $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, поэтому

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2 \neq 0.$$

Краевые условия типа Штурма регулярны. В случае же обыкновенных дифференциальных уравнений эти условия относятся к типу усиленно регулярных краевых условий.

Цитированная литература

1. **Мышкис А.Д.** // УМН. 1952. Т.7. Вып. 4(50). С.190–196.

2. **Норкин С.Б.** Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М., 1965.

3. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

4. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.

5. **Дезин А.А.** Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

Поступила в редакцию 04.12.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 81 – 85*

УДК 519.62: 517.982

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

З. И. Сулейменов

Акмолинский Университет технологии и бизнеса
г. Астана, ул.Пушкина, 166

Получены явные выражения функции Грина уравнения Лапласа для нескольких ранее нерассмотренных нестандартных областей и смешанных граничных условий.

Данная работа является продолжением опубликованной статьи [1].

1. Рассмотрим нахождение функции Грина уравнения Лапласа для трапеции (рис.1), как решение следующей краевой задачи:

$$\triangle G(M,P) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \tag{1}$$

$$G(M,P)\mid_{x=y\cdot\operatorname{ctg}\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$G(M,P)\mid_{x=a+y\cdot\operatorname{ctg}\beta} = 0, \tag{3}$$

$$k_1\frac{\partial G(M,P)}{\partial y} - h_1 G(M,P)\mid_{y=0} = 0, \quad k_2\frac{\partial G(M,P)}{\partial y} + h_2 G(M,P)\mid_{y=b} = 0, \tag{4}$$

где $M(x,y)$, $P(\xi,\eta)$ – произвольные точки области (рис.1), $G(M,P)$ – функция Грина, Δ – оператор Лапласа, $\delta(x-\xi)$, $\delta(y-\eta)$ – дельта-функции Дирака, k_1, h_1, k_2, h_2 – постоянные коэффициенты.

К уравнениям (1)–(4) по y применяем конечное интегральное преобразование Кошлякова–Гринберга по формуле [2–4]

$$\overline{G}(M,P) = \int\limits_0^b G(M,P)(k_1\lambda_n\cos\lambda_n y + h_1\sin\lambda_n y)dy,$$

где λ_n – корни уравнения

$$\operatorname{tg}\lambda b = \frac{\lambda(k_1h_2+k_2h_1)}{k_1k_2\lambda^2 - h_1h_2}.$$

Keywords: *Green function, Laplace equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25

В результате получим

$$\frac{d^2\overline{G}(M,P)}{dx^2} - \lambda_n^2\overline{G}(M,P) = (k_1\lambda_n \cos\lambda_n\eta + h_1\sin\lambda_n\eta)\delta(x-\xi), \tag{5}$$

$$\overline{G}(M,P)\mid_{x=\mu_n} = 0, \quad \overline{G}(M,P)\mid_{x=\rho_n} = 0, \tag{6}$$

где

$$\mu_n = \nu_n \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \tag{7}$$

$$\rho_n = a + \nu_n \operatorname{ctg}\beta, \tag{8}$$

$$\nu_n = b + \frac{k_1\lambda_n\cos\lambda_n b + h_1\sin\lambda_n b - (k_1 + bh_1)\lambda_n}{\lambda_n(k_1\lambda_n\sin\lambda_n b - h_1\cos\lambda_n b + h_1)}. \tag{9}$$

Функция Грина задачи (5), (6) имеет вид

$$\overline{G}(x,\xi,\lambda_n,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\xi)\cdot\operatorname{sh}\lambda_n(\mu_n-x)}{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\mu_n)}\cdot\dfrac{k_1\lambda_n\cos\lambda_n\eta + h_1\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n} & \text{при} \quad x<\xi, \\ \\ \dfrac{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-x)\cdot\operatorname{sh}\lambda_n(\mu_n-\xi)}{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\mu_n)}\cdot\dfrac{k_1\lambda_n\cos\lambda_n\eta + h_1\sin\lambda_n\eta}{\lambda_n} & \text{при} \quad x>\xi. \end{cases}$$

Переходя к оригиналу, получаем искомую функцию Грина задачи (1) – (4) в следующем виде:

$$G(x,\xi,y,\eta) = \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\xi)\cdot\operatorname{sh}\lambda_n(\mu_n-x)}{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\mu_n)}\cdot\frac{z_n(y)\cdot z_n(\eta)}{\lambda_n} & \text{при} \quad x<\xi, \\ \\ 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-x)\cdot\operatorname{sh}\lambda_n(\mu_n-\xi)}{\operatorname{sh}\lambda_n(\rho_n-\mu_n)}\cdot\frac{z_n(y)\cdot z_n(\eta)}{\lambda_n} & \text{при} \quad x>\xi, \end{cases} \tag{10}$$

где $z_n(y) = \dfrac{(k_2^2\lambda_n^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}(k_1\lambda_n\cos\lambda_n y + h_1\sin\lambda_n y)}{\left[(k_1h_2 + k_2h_1)(k_1k_2\lambda_n^2 + h_1h_2) + (k_1^2\lambda_n^2 + h_1^2)(k_2^2\lambda_n^2 + h_2^2)b\right]^{\frac{1}{2}}}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:
а) функцию Грина уравнения (1) для задачи Дирихле получаем из (10) при $k_1 = 0$, $h_1 = 1$, $k_2 = 0$, $h_2 = 1$ в следующем виде:

$$G(x,\xi,y,\eta) = \begin{cases} G_1(x,\xi)G_2(y,\eta) & \text{при} \quad x<\xi, \\ G_1(\xi,x)G_2(y,\eta) & \text{при} \quad \xi<x, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$G_1(x,\xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{b}\left(a + \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\beta - \xi\right)\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{b}\left(\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\alpha - x\right)}{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{b}\left[a + \frac{b}{2}\left(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha\right)\right]},$$

$$G_2(y,\eta) = \frac{\sin\frac{(2n-1)\pi y}{b}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi\eta}{b}}{2n-1},$$

б) $k_1 = 0$, $h_1 = 1$, $k_2 = 1$, $h_2 = 0$. В этом случае

$$G(x,\xi,y,\eta) = \begin{cases} G_3(x,\xi)G_4(y,\eta) & \text{при} \quad x<\xi, \\ G_3(\xi,x)G_4(y,\eta) & \text{при} \quad \xi<x, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$G_3(x,\xi)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{2b}\left(a+\frac{(-1)^{n-1}2b}{(2n-1)\pi}\operatorname{ctg}\beta-\xi\right)\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{2b}\left(\frac{(-1)^{n-1}2b}{(2n-1)\pi}\operatorname{ctg}\alpha-x\right)}{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi}{2b}\left[a+\frac{(-1)^{n-1}2b}{(2n-1)\pi}\left(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha\right)\right]},$$

$$G_4(y,\eta)=\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi\eta}{2b}}{2n-1}.$$

2. Формула (10) также является функцией Грина уравнения (1) при граничных условиях (4) и

$$G(M,P)\,|_{x=\frac{1}{2P_1}y^2}=0, \tag{13}$$

$$G(M,P)\,|_{x=a-\frac{1}{2P_2}y^2}=0 \tag{14}$$

для области представленной на рис.2. При этом ν_n, μ_n, и ρ_n определяются из следующих уравнений:

$$\nu_n=b(2k_2+h_2b)\cdot\frac{k_1\lambda_n\sin\lambda_nb-h_1\cos\lambda_nb}{h_2(k_1\lambda_n\sin\lambda_nb-h_1\cos\lambda_nb+h_1)}-\frac{2}{\lambda_n^2} \tag{15}$$

или

$$\nu_n=b(2k_2+h_2b)\cdot\frac{k_1\lambda_n\cos\lambda_nb+h_1\sin\lambda_nb}{h_2(k_1\lambda_n\cos\lambda_nb+h_1\sin\lambda_nb)+k_2\lambda_nh_1}-\frac{2}{\lambda_n^2}, \tag{16}$$

$$\mu_n=\frac{1}{2P_1}\nu_n, \tag{17}$$

$$\rho_n=a-\frac{1}{2P_2}\nu_n. \tag{18}$$

Остальные обозначения имеют прежний смысл. При условии Неймана или смешанных условиях на боковых границах данных областей появляются производные по переменной преобразования, что не дает возможность применения интегральных преобразований [2]. В таких случаях необходимо искать другие методы построения функции Грина.

Функция Грина задачи Дирихле для области, представленной на рис.2, имеет вид (11), при этом вместо $\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ необходимо положить $\left(\frac{b^2}{2}-\frac{2b^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{2P_1}$, а вместо $a+\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\beta$ положить $a-\frac{b^2}{2P_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$.

Учитывая (15) – (18), из (10) нетрудно получить выражения функции Грина и для других частных случаев.

3. Аналогичным образом находим функцию Грина уравнения (1) при граничных условиях (2), (4) для области, представленной на рис.3, которая имеет вид

$$G(x,\xi,y,\eta)=\begin{cases}2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n(\xi-x)}-e^{-\lambda_n(x+\xi)+2\lambda_n\mu_n}\right]\cdot\dfrac{z_n(y)\cdot z_n(\eta)}{2\lambda_n} & \text{при}\, x<\xi,\\[2ex] 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n(x-\xi)}-e^{-\lambda_n(x+\xi)+2\lambda_n\mu_n}\right]\cdot\dfrac{z_n(y)\cdot z_n(\eta)}{2\lambda_n} & \text{при}\, x>\xi,\end{cases} \tag{19}$$

где μ_n определяется из (7), а остальные обозначения имеют прежний смысл.

Рассмотрим частные случаи, вытекающие из (19):
а) $k_1 = 0$, $h_1 = 1$, $k_2 = 0$, $h_2 = 1$ (задача Дирихле).
В этом случае из (19) получаем

$$G(x,\xi,y,\eta) = \begin{cases} G_5(x,\xi)G_2(y,\eta) & \text{при}\, x < \xi, \\ G_5(\xi,x)G_2(y,\eta) & \text{при}\, x > \xi, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$G_5(x,\xi) = \frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{b}(\xi - x)\right\} - \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{b}(x+\xi) + (2n-1)\pi\operatorname{ctg}\alpha\right\}\right].$$

Учитывая, что

$$\sin\lambda_n\eta\cdot\sin\lambda_n y = \frac{1}{2}[\cos(y-\eta)\lambda_n - \cos(y+\eta)\lambda_n],$$

$$\frac{b}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(2n-1)\pi}{b}(\xi-x)}\cdot\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi}{b}(y-\eta)}{2n-1} = \frac{b}{2\pi}Re\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{-\frac{\pi}{b}(x_1-iy_1)}}{1-e^{-\frac{\pi}{b}(x_1-iy_1)}}\right\}$$

и аналогичное представление для других слагаемых в (20), из него найдем

$$G(x,\xi,y,\eta) = \frac{b}{8\pi}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{b} + \cos\frac{\pi y_1}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{b} - \cos\frac{\pi y_1}{b}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{b} - \cos\frac{\pi y_2}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{b} + \cos\frac{\pi y_2}{b}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(x_2-b\operatorname{ctg}\alpha)}{b} + \cos\frac{\pi y_2}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x_2-b\operatorname{ctg}\alpha)}{b} - \cos\frac{\pi y_2}{b}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(x_2-b\operatorname{ctg}\alpha)}{b} - \cos\frac{\pi y_1}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x_2-b\operatorname{ctg}\alpha)}{b} + \cos\frac{\pi y_1}{b}}\right], \tag{21}$$

где $x_1 = \xi - x$, $y_1 = y - \eta$, $x_2 = x + \xi$, $y_2 = y + \eta$,
б) $k_1 = 0$, $h_1 = 1$, $k_2 = 1$, $h_2 = 0$. В этом случае из (19) получаем следующее выражение:

$$G(x,\xi,y,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{2b} + \cos\frac{\pi y_2}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{2b} - \cos\frac{\pi y_2}{2b}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{2b} - \cos\frac{\pi y_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_1}{b} + \cos\frac{\pi y_1}{b}} +$$

$$+\frac{1}{8\pi}(e^{2\operatorname{ctg}\alpha} + e^{-2\operatorname{ctg}\alpha})\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_2}{2b} + \cos\frac{\pi y_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_2}{2b} - \cos\frac{\pi y_1}{2b}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x_2}{2b} - \cos\frac{\pi y_2}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x_2}{b} + \cos\frac{\pi y_2}{b}}. \tag{22}$$

4. Формула (19) является функцией Грина уравнения (1) при граничных условиях (4) и (13) для области, представленной на рис.4. При этом μ_n определяется из (15) – (17). Из формулы (19) нетрудно получить выражения для функции Грина для частных случаев.

Выбор рассмотренных областей (рис.1 – 4) связан с их адекватностью некоторым реальным ситуациям в гидротехнике и мелиорации.

Полученные в данной работе формулы (10)–(12), (19)–(22) могут использоваться как при теоретическом исследовании краевых задач уравнений математической физики, так и при решении практических задач теории фильтрации, теплопереноса и массопереноса.

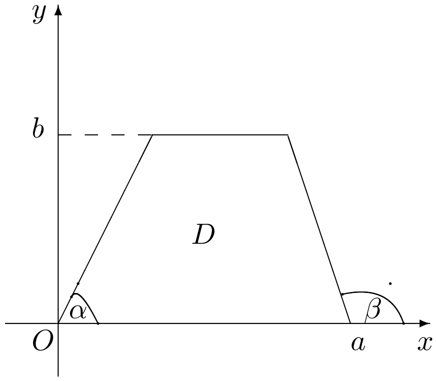


рис.1

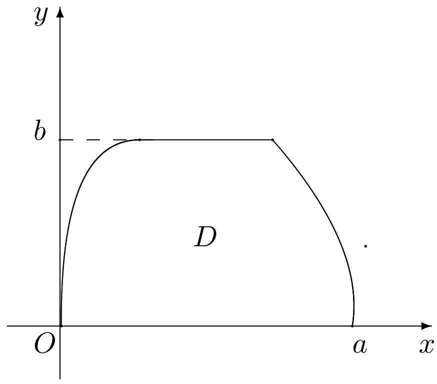


рис.2

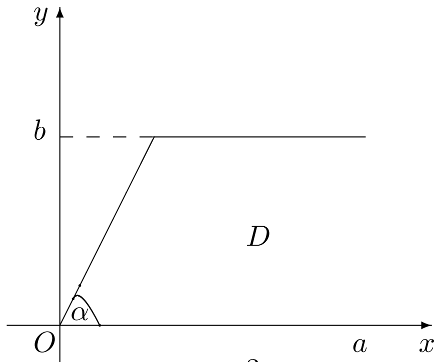


рис.3

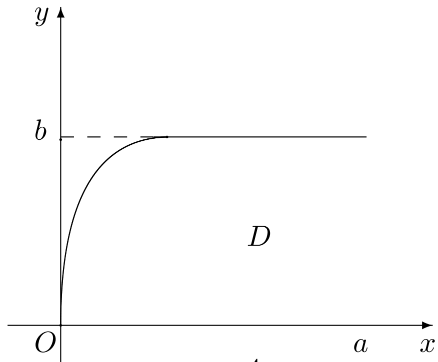


рис.4

Цитированная литература

1. **Сулейменов З.И.** //Вестник Евразийского Национального Университета. Серия технических наук. 2006. №4. С. 23 – 29.

2. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962.

3. **Гамаюнов Н.И.** Термодинамика неравновесных процессов и решения систем уравнений переноса. В кн.: Исследования в области поверхностных сил. М., 1967.

4. **Лыков А.В., Иванов А.В.** Конечные интегральные преобразования и их применение к решению задач теплопроводности. В кн.: Тепло- и массообмен в процессах испарения. М., 1958.

Поступила в редакцию 03.11.2006г.

УДК 517.956, 517.968.2

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Е. Туймебаева

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125 aknur@math.kz

Рассматриваются вопросы разрешимости обобщенной спектральной задачи для оператора теплопроводности. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции.

Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$. В области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ исследуется обобщенная спектральная задача для уравнения теплопроводности [1]:

$$u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=\sqrt{t}} \tag{1}$$

при условиях

$$u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр и функциональный класс $\mathscr{U}$ для собственных функций в спектральной задаче (1)–(2) определен следующим образом:

$$\mathscr{U} = \Big\{u |\, e^{-t}u,\ e^{-t}(u_t - u_{xx}) \in L_1(\mathbb{R}^t_+; L_\infty(\mathbb{R}^x_+)),\ e^{-t}\,u_{xx}(x,t)_{|x=\sqrt{t}} \in L_1(\mathbb{R}_+)\Big\}.$$

Задача А. Найти собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи (1)–(2).

Решение задачи А. Задачу (1)–(2) сведем к исследованию спектральных свойств некоторого интегрального оператора. Для этой цели, считая временно известной правую часть в уравнении (1), сведем задачу (1)–(2) к виду

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \mathscr{K}_0(x, t-\tau) u_{\eta\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\sqrt{\tau}} d\tau, \tag{3}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\},$$

Keywords: *spectral problem, eigenfunction, spectrum*
2000 Mathematics Subject Classification: 45D05

$$\mathscr{K}_0(x,t-\tau)=\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi=\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).$$

Действительно,

$$\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int\limits_0^\infty\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\right\}d\xi=$$

$$\left\|\eta=\frac{x\pm\xi}{2\sqrt{t-\tau}},z=\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right\|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\eta^2}d\eta-\int\limits_{z}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta\right\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\eta^2}d\eta=\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).$$

Теперь, дифференцируя соотношение (3) дважды по x, затем положив $x=\sqrt{t}$ и учитывая, что

$$\frac{\partial^2\mathscr{K}_0(x,t-\tau)}{\partial x^2}=-\frac{x}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right),$$

получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $u_{xx}(x,t)_{|x=\sqrt{t}}$:

$$u_{xx}(x,t)_{|x=\sqrt{t}}=\lambda\int\limits_0^t\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t}{4(t-\tau)}\right)\cdot u_{\eta\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\sqrt{\tau}}d\tau. \tag{4}$$

Если введём обозначения

$$\mu(t)=te^{-t}\cdot u_{xx}(x,t)\Big|_{x=\sqrt{t}},$$

$$\mathscr{K}(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(1-\tau/t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(1-\tau/t)}\right), \tag{5}$$

то из (4) получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t\mathscr{K}(t,\tau)e^{-(t-\tau)}\mu(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=0,\ \ t\in\mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Таким образом, исходная задача (1)–(2) сведена к спектральной задаче для интегрального оператора (6), то есть к нахождению характеристических чисел и соответствующих им собственных функций. Определив собственные функции для интегрального оператора (6), по формуле (3) можем найти собственные функции в задаче (1)–(2).

В свою очередь, спектральную задачу (6) сведем к следующей спектральной задаче (см. [2], с.183):

$$\mu_1(t)-\lambda\int\limits_0^t\mathscr{K}(t,\tau)\mu_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=0,\ \ t\in\mathbb{R}_+, \tag{7}$$

где $\mu_1(t)=e^t\mu(t)$.

Далее, введя функцию $k(z)$ по формуле

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \leqslant z < +\infty\,, \end{cases}$$

перепишем (7) в виде

$$\mu_1(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \mu_1(\tau) \cdot \frac{d\tau}{\tau} = 0, \;\; t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Применяя к нему преобразование Меллина ([3],с.161), с учетом теоремы о свертке получим

$$\widehat{\mu_1}(s) \cdot [1 - \lambda \widehat{k}(s)] = 0, \;\; s = s_1 + i s_2,$$

где

$$\widehat{\mu_1}(s) = \int\limits_0^\infty \mu_1(\tau) \tau^{s-1} d\tau, \;\; \operatorname{Re} s < 1,$$

— изображение функции $\mu_1(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1} dx, \;\; \operatorname{Re} s < 0. \tag{9}$$

Известно ([2], с.181), что наличие и вид собственных функций интегрального уравнения (7) определяются наличием и количеством корней следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра s :

$$1 - \lambda \widehat{k}(s) = 0, \;\; \operatorname{Re} s < 0 \;\; (s = s_1 + i s_2). \tag{10}$$

В частности, при $\lambda = (\operatorname{erfc}(1/2))^{-1}$ уравнение (10) имеет корень $s = -1$. Это в силу того, что

$$\widehat{k}(-1) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\,(1-z)}\right) dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{1/2}^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erfc}(1/2)\,.$$

А это означает, что однородное интегральное уравнение (6) при указанном значении λ имеет собственную функцию вида $\mu(t) = te^{-t}$.

Сформулируем вспомогательные результаты, установленные в [1].

Предложение 1. *Для того, чтобы уравнение (10) имело корни $s^{(k)}$ с $Re\, s^{(k)} < 0$, необходимо, чтобы значение спектрального параметра λ принадлежало правой полуплоскости, т.е. $Re\,\lambda > 0$. Если же $Re\,\lambda < 0$, то уравнение (10) не будет иметь корней $s^{(k)}$ с $Re\, s_k < 0$.*

Утверждение 1. *Каждому $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\lambda > 0\}$ соответствует единственный корень s уравнения (10), для которого $Re\, s < 0$. При $Re\,\lambda = 0$ и $Im\,\lambda \neq 0$ корень s уравнения (10) будет удовлетворять условиям $Re\, s = s_1 = 0$ и $Im\, s = s_2 \neq 0$. Если же $\lambda \to 0$, то и корень уравнения (10) $s \to 0$. В частности, каждому действительному значению $\lambda \in \mathbb{R}_+$ соответствует единственный корень $s \in \mathbb{R}_-$ уравнения (10).*

Итак, факт о существовании и виде собственных функций интегрального оператора в уравнении (6) показывает следующее предложение.

Предложение 2. *Если* $Re\,\lambda \geqslant 0,$ *то однородное интегральное уравнение (6) имеет собственные функции вида*

$$\mu_*(t) = t^{-s^*}e^{-t}, \tag{11}$$

где s^* *является корнем уравнения (10).*

Если же $Re\,\lambda < 0,$ *то однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение.*

Тогда основной результат работы, как следствие вышеуказанных утверждений, запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для интегрального оператора множество* $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda|\, \lambda \in \mathbb{C},\, Re\,\lambda \geqslant 0\}$ *является множеством характеристических чисел, а* $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ *— резольвентным множеством.*

Теперь, предполагая, что $\mathrm{Re}\,\lambda > 0,$ найдём собственные функции задачи (1)–(2) в явном виде, вспоминая (11), что

$$u_{\eta\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\sqrt{\tau}} = \tau^{-s^*-1},$$

где s^* – корень уравнения $1 - \lambda\widehat{k}(s) = 0,$ $\mathrm{Re}\, s < 0.$

Согласно (3) решение спектральной задачи (1)–(2) будет иметь вид

$$u_0(x,t) = \frac{\lambda}{s^*}\cdot t^{-s^*}\left\{1 - \sqrt{2/\pi}\cdot \exp\left(x^2/8t\right)\cdot 2^{-s^*}\Gamma(1-s^*)D_{-1-2s^*}\left(x/\sqrt{2t}\right)\right\},$$

здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $D_p(z)$ – функция параболического цилиндра.

Итак, полностью решена поставленная задача (1)– (2). Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Для оператора теплопроводности множество* $\sigma(L_0) \equiv \{\lambda|\, \lambda \in \mathbb{C},\, Re\,\lambda \geqslant 0\}$ *является спектром, а* $\mathbb{C} \setminus \sigma(L_0)$ *– резольвентным множеством.*

Цитированная литература

1. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Туймебаева А.Е.** Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40с.

2. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения. М., 1975.

3. **Полянин А.Д., Манжиров А.В.** Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.

4. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т.2. М., 1974.

5. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1969.

6. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.** Математический анализ. М., 1979.

7. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М., 1979.

8. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила в редакцию 11.06.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 90 – 100*

УДК 523.98, 530.182

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА И СЕМЕЙСТВО СКОТТА

Д.А. Тусупов

КазНУ им. аль-Фараби
050012 г. Алматы ул. Масанчи, 39/47 tusupov@gorodok.net

В данной работе построен пример вычислимо категоричной метабелевой группы, которая не имеет семейства семейство Скотта конечных формул.

Нас интересуют вопросы существования объектов из известных классов алгебраических структур, имеющие те или иные аналоги результатов из теории вычислимости.

Одной из проблематик теории вычислимости являются нахождение синтаксических условий, эквивалентных вычислимым свойствам. Примером таких исследований является независимый результат авторов Ash, Knight, Manasse и Slaman'a [1] и Chisholm'a [2]: вычислимая структура относительно вычислимо категорична $\Leftrightarrow$ когда она имеет в.п. семейство Скотта. С.С. Гончаров [5] построил пример вычислимой структуры, которая вычислимо категорична, но не относительно вычислимо категорична. С.С. Гончаров [4] показал, что любая вычислимая структура, двухкванторная диаграмма которой разрешима, является относительно вычислимо категоричной. О.В. Кудинов [8] доказал, что существует вычислимо категоричная структура однокванторная диаграмма которой разрешима, но не относительно вычислимо категорична. P. Cholak, S.S. Goncharov, Khoussainov B., Shore R.A. [6] и Hirschfeldt D.R., Khoussainov B., Shore R.A. [7] построили пример вычислимо категоричной структуры, которая не сохраняет это свойство при обогащении языка константами. В работе [3] получен негативный результат о возможности описания вычислимой стабильности с помощью семейства Скотта конечных формул.

Введение

Пусть $\mathcal{M}$ – счетная структура счетного языка, $|\mathcal{M}|$ – подмножество натуральных чисел ω. Степенью структуры $\mathcal{M}$, которая обозначается через $deg(\mathcal{M})$, называется тьюрингова степень атомной диаграммы структуры $\mathcal{M}$.

Вычислимая *структура* $\mathcal{M}$ называется *вычислимо категоричной*, если для любого вычислимого представления (т.е. изоморфная $\mathcal{M}$ структура) $\mathcal{N}$ существует вычислимый изоморфизм из $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$. Вычислимая *структура* $\mathcal{M}$ называется *относительно вычислимо категоричной*,

Keywords: *computable stable structure, metabel group, isomorphism*
2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

если для любого представления $\mathcal{N}$ существует $deg(\mathcal{N})$ вычислимый изоморфизм из $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$. Вычислимая *структура* $\mathcal{M}$ называется *вычислимо стабильной*, если для любого вычислимого представления $\mathcal{N}$ любой изоморфизм из $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ является вычислимым изоморфизмом.

Семейством Скотта для структуры $\mathcal{M}$ называется множество формул Φ с фиксированным конечным множеством констант из $|\mathcal{M}|$ таких, что 1) любой кортеж из $|\mathcal{M}|$ удовлетворяет некоторой формуле φ из Φ и 2) если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ удовлетворяют одной и той же формуле из Φ, тогда существует автоморфизм структуры $\mathcal{M}$, переводящий $\overline{a}$ в $\overline{b}$.

Теорема (Ash-Knight-Manasse-Slaman [1], Chisholm [2]). *Вычислимая структура относительно вычислимо категорична $\Leftrightarrow$ когда она имеет вычислимо перечислимое семейство Скотта конечных $\exists$-формул.*

Структура называется *жесткой*, если не существуют нетривиальных автоморфизмов. Семейство Скотта жесткой структуры называется *определимым семейством.*

Теорема 1 [3]. *Существует жесткий вычислимо категоричный граф $\mathcal{G}$, не имеющий семейство Скотта конечных формул.*

Перечислим несколько результатов, необходимых для дальнейшей работы.

Теорема 2 [3]. *Пусть $\mathcal{L}$ – счетный язык и $\mathcal{M}$ – бесконечная счетная $\mathcal{L}$ структура.*
1. Если $\mathcal{M}$ простая модель $Th(\mathcal{M})$, тогда существует семейство Скотта из конечных формул без новых констант для этой структуры.
2. Если $\mathcal{M}$ имеет семейство Скотта из конечных формул с новыми константами из $\bar{c}$, тогда $(\mathcal{M}, \bar{c})$ есть простая модель теории $Th((\mathcal{M}, \bar{c}))$.

Нам необходимо строить структуру $\mathcal{M}$, не имеющую простую модель ее теории ни в каком обогащении конечным множеством констант.

Теорема 3 [3]. Существует частично вычислимая функция ψ и семейство в.п. множеств A такие что
1. функция ψ есть однооднозначная нумерация семейства A, которая обозначается через $\{A_i : i \in \omega\}$, то есть $\psi(i, n)$ сходиться $\Leftrightarrow n \in A_i$,
2. семейство A имеет единственную однооднозначную нумерацию с точностью до вычислимой эквивалентности,
3. нумерации ψ имеет свойство (*): $\exists^\infty d \exists^\infty s \exists m \neq d (A_{d,s} \subseteq A_{m,s+1})$. В этом случае говорится, что A_d *вкладывается в* A_m на шаге s. Для каждого из индексов d, удовлетворяющих свойству (*), выполняются условия:
(а) A_d бесконечно,
(б) для каждого k существует шаг s_k такой, что для всех шагов $t > s_k$ и для всех индексов $m \neq d$, если $A_{d,t} \subseteq A_{m,t+1}$, то $A_{m,t}$ не содержит чисел, меньших k,
(в) для всех индексов z существует шаг s_z такой, что для всех шагов $t > s_z$ и для всех индексов $m \neq d$, если $A_{d,t} \subseteq A_{m,t+1}$, то $m > z$,
(г) для всех индексов $m \neq d$ существует шаг s такой, что как только мы добавим все элементы из $A_{d,s}$ к множеству $A_{m,s}$, то есть получим $A_{d,s} \subseteq A_{m,s+1}$, то получим $A_m = A_{m,s+1}$.

§ 1 Вычислимо категоричный граф

В работе [9] дано определение специального вида графа. Симметрический и иррефлексивный граф $\langle \mathcal{G}, F^2 \rangle$ называется *nice-графом*, если имеют место условия: (i) для любых неравных вершин x, y существует вершина z такая, что $F(x, z)$ и неверно $F(y, z)$; (ii) для любых неравных вершин x, y существует не более одной общей вершины; (iii) для любых связных вершин x, y не существует вершины z такой, что $F(x, z)$ и $F(y, z)$.

Предложение 1. *Для семейства S существует граф $\mathcal{A}$ такой, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации μ семейства S вычислимой нумерации ν_μ структуры $\mathcal{A}$, при этом*

1) нумерации ν_{μ_0} не автоэквивалентна ν_{μ_1} $\Leftrightarrow$ нумерации μ_0 и μ_1 не эквивалентны,
2) для любой вычислимой нумерации ν графа $\mathcal{A}$ существует вычислимая нумерации μ структуры S такие, что ν и ν_μ являются автоэквивалентны.

Пусть дано семейство множеств S с однозначной вычислимой нумерацией R. По данному семейству строим граф $\mathcal{G}$ следующим образом: рассмотрим множество вершин

$$\{d_i,\, c_i,\, x^k_{i,\,j}\,:\, i\,\in\,\omega\,\wedge\,R(i,\,k)\,\wedge\,1\,\leq\,j\,\leq\,7^{k+1}-1\}.$$

Определим отношение F на $|\mathcal{G}|$ следующим образом: Для всех $i\,\in\,\omega$ положим

а) $F(c_i,\,d_i)$,

б) если для $k\,\in\,\omega$ имеет место $R(i,\,k)$ и $n_k\,=\,7^{k+1}-1$, тогда $F(c_i,\,x^k_{i,\,1}),\ F(x^k_{i,\,1},\,x^k_{i,\,2}),\ F(x^k_{i,\,2},\,x^k_{i,\,3}),\ \ldots\ F(x^k_{i,\,n_k-1},\,x^k_{i,\,n_k}),\ F(x^k_{i,\,n_k},\,c_i)$.

Сразу отметим, что построенный нами граф есть nice-граф, то есть выполнены условия (i) - (iii).

Пусть $n_k\,=\,7^{k+1}-1$ и мы определим формульные множества и отношения

$$C(x)\,\rightleftharpoons\,\{x\,:\,\exists y_0,\,y_1,\,y_2\,(\bigwedge_{0\,\leq\,i\,\leq\,3} x\,\neq\,y_i\,\wedge \bigwedge_{0\,\leq\,i\,<\,j\,\leq\,3} y_i\,\neq\,y_j\,\wedge F(x,\,y_0)\,\wedge\,F(x,\,y_1)\,\wedge\,F(x,\,y_2))\},$$

$$H(y)\,\rightleftharpoons\,\{y\,:\,\exists x, y_1,\,y_2,\,\ldots\,y_{n_k}\,(\,C(x)\,\wedge\,F(x,\,y_1)\wedge \bigwedge_{1\,\leq\,i\,<\,j\,\leq\,n_k} y_i\,\neq\,y_j\,\wedge \bigwedge_{1\,\leq\,i\,<\,n_k} F(y_i,\,y_{i+1})\,\wedge\,F(y_{n_k},\,x)\,\wedge\,(\bigvee_{1\,\leq\,i\,\leq\,n_k} y\,=\,y_i))\},$$

$$\tilde{F}(x,\,y)\,\rightleftharpoons\,\{(x,\,y)\,:\,\exists y_1,\,y_2,\,\ldots\,y_{n_k}\,(F(x,y)\,\wedge\,(y\,=\,y_1)\wedge \bigwedge_{1\,\leq\,i\,<\,j\,\leq\,n_k} y_i\,\neq\,y_j\,\wedge\,C(x)\wedge \bigwedge_{1\,\leq\,i\,<\,n_k} F(y_i,\,y_{i+1})\,\wedge\,F(y_{n_k},\,x))\}.$$

Замечание. *При определении множества H, если для некоторого $x\,=\,c_i$ имеет место условие принадлежности к этому множеству для некоторого k, то есть $y\,=\,x^k_{i,\,1}$ или $y\,=\,x^k_{i,\,n_k}$, то добавляем в H только одно из значений: либо $x^k_{i,\,1}$, либо $x^k_{i,\,n_k}$.*

Пусть $\{d_i\,:\,i\,\in\,\omega\}$, как в определении графа $\mathcal{G}$. Тогда только элементы $x = d_i$ удовлетворяют формуле

$$\exists y(\,C(y)\,\wedge\,F(x,y)\,\wedge\,\forall z(F(x,z)\rightarrow z\,=\,y).$$

Ясно, что C, H, и F^2 являются внутренне вычислимымо перечислимыми и инвариантными.

Пусть $Iz(S,\,S')$ – множество одноознозначных отображений "на"из семейства S в семейство S', которое эквивалентно семейству S, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ – графы, построенные по S и S' соответственно.

Лемма 1: *Отображение из множества $Iz(S,\,S')$ на $Iz(\mathcal{G},\,\mathcal{G}')$ является биекцией.*

Доказательство: Пусть R' – некоторая вычислимая нумерация семейства S, тогда существует перестановка μ такая, что для всех $i\,\in\,\omega$ множества $R'_i\,=\,R_{\mu(i)}$. Рассмотрим условие

$$F(c_i,\,x^k_i)\,\Leftrightarrow\,F(c_{\mu(i)},\,x^k_{\mu(i)}),$$

где $x^k_i\,=\,x^k_{i,\,1}$ или $x^k_i\,=\,x^k_{i,\,n_k}$, которое определяет изоморфизм между графами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$, где $\mathcal{G}'$ – граф, построенный по нумерации R' семейства S.

Пусть $\mathcal{G}'$ – представление графа $\mathcal{G}$ и φ – изоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}'$. Рассмотрим одноoднозначное отображение μ из $C(\mathcal{G})$ на $C(\mathcal{G}')$ такое, что

$$F(c_{\mu(i)},\,x^k_{\mu(i)})\,\Leftrightarrow\,F'(c_i,\,x^k_i),$$

тогда семейство S с нумерацией R' такое, что для всех $i\,\in\,\omega$ $R'_i\,=\,R_{\mu(i)}$, является представлением S' семейства S с нумерацией R. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{d}$ – некоторая тьюрингова степень.

Лемма 2. *Для любого вычислимого графа* $\mathcal{G}_0$, $\mathbf{d}$ *изоморфного вычислимому графу* $\mathcal{G}$, *найдется вычислимая нумерация* R' *семейства* S *такая, что вычислимый граф* $\mathcal{G}'$, *соответствующий семейству* S *с нумерацией* R', *является* $\mathbf{d}$*-изоморфным графу* $\mathcal{G}$.

Доказательство. Пусть φ_0 есть ограничение $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма φ на множество $C(\mathcal{G})$. Пусть f_0 есть вычислимое одноoднозначное отображение из ω на $\{c_i : i \in \omega\}$, которое порождает граф $\mathcal{G}$. Рассмотрим одноoднозначное вычислимое отображение f_1 в.п. множества $C(\mathcal{G}_0)$ на ω. Вычислимую нумерацию R' семейства S определим из условия

$$R'(i,\,k) \Leftrightarrow F_0(c_i,\,x_i^k).$$

Отображение $\mu = f_1 \cdot \varphi \cdot f_0$ такое, что $R'_i = R_{\mu(i)}$ осуществляет $\mathbf{d}$-вычислимую эквивалентность между семейством S с нумерацией R и семейством S с нумерацией R'. Пусть $\mathcal{G}'$ – вычислимый граф, построенный по семейству S с нумерацией R'. Тогда существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм из $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}'$, продолжающий отображение μ. Лемма доказана.

Следствие 1. *Существует вычислимо категоричный граф.*

Доказательство. Граф $\mathcal{G}$, построенный в Предложении 1, является жестким вычислимо стабильным. Пусть $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ – две вычислимые копии графа $\mathcal{G}$. Пусть μ_0, μ_1 – две вычислимые нумерации семейства S, по которым построены вычислимые графы $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$. Так как семейство S по теореме 3 имеет единственную одноoднозначную вычислимую нумерацию, то существует вычислимая перестановка p множества ω такая, что $\mu_0(n) = \mu_1(p(n))$ для всех $n \in \omega$. Тогда отображение $c_i \mapsto c_{p(i)}$, где $c_i \in C(\mathcal{G})$ и согласованное на петлях одинаковой длины, связанных с этими точками, является вычислимым изоморфизмом. Следствие доказано.

§2. **Метабелева группа экспоненты** p

Пусть G – мультипликативная группа, $[g_1,\,g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$ – коммутатор. Центр группы G обозначим через $Z(G)$ и $Z(G) = \{\,g\,:\,\forall\, h\,\in\, G\,[g,\,h] = 1\}$. Если $X \subseteq G$, тогда $\langle\, X\,\rangle$ – подгруппа, порожденная множеством X. Подгруппа $G\,' = \langle\,[g_1,\,g_2]\,:\,g_1,\,g_2\,\in\,G\rangle$, называется коммутантом группы G. Группа G называется метаабелевой или 2-ступенно нильпотентной (2-ниль) группой, если коммутант $G\,'$ группы G содержится в ее центре $Z(G)$.

Перечислим некоторые свойства метаабелевой группы: $[[x,\,y],\,z] = [x,\,[y,\,z]] = 1$; $[xy,\,z] = [x,\,z]\,[y,\,z]$; $[x,\,yz] = [x,\,y]\,[x,\,z]$.

Пусть p – простое число. Группа G называется группой экспоненты p, если g^p p-степень любого элемента g группы равна единице. Обозначим через C_p циклическую группу порядка p, $Z(p)$ есть конечное поле мощности p, через $\mathcal{N}_2^p \prod\limits_{i\,\in\,\omega} < x_i >$ обозначим двуступенно нильпотентное (2-ниль) свободное произведение циклических групп $< x >$ порядка p.

Пусть $\mathcal{A} \rightleftharpoons \mathcal{G}$ – граф, построенный в § 1. Зафиксируем простое число p. Пусть даны сигнатуры $\sigma = < F^2 >$ и $\sigma_0 = < * >$, где F^2 – двуместный предикат и $*$ – двуместная функция.

Предложение. *Для любого счетного симметрического графа* $\mathcal{A}$ *существует 2-ниль группа* $\mathcal{A}_0$ *экспоненты* p *такая, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации* ν *графа* $\mathcal{A}$ *вычислимой нумерации* μ_ν *метаабелевой группы* $\mathcal{A}_0$*, при этом*

1) нумерации ν_{μ_0} *не* $\mathbf{d}$ *- автоэквивалентна* ν_{μ_1} $\Leftrightarrow$ *нумерации* μ_0 *и* μ_1 *не* $\mathbf{d}$ *- автоэквивалентны;*

2) для любой конструктивизации μ *группы* $\mathcal{A}_0$ *существует конструктивизация* ν *графа* $\mathcal{A}$ *такие, что* μ *и* μ_ν *являются* $\mathbf{d}$ *- автоэквивалентными.*

Доказательство: Пусть $\mathcal{A}$ – симметрический и иррефлексивный *nice*-граф со свойствами (i) - (i i i). Определим $A_0 = G(\mathcal{A})$ как 2-ниль группу экспоненты p, свободно порожденную множеством вершин графа $\mathcal{A}$, с условием, что из $F(x,\,y)$ следует $[x,\,y] = 1$.

Опишем конструкцию группы:

Пусть $A = |\mathcal{A}| = \{\, x_i \,:\, i \in \omega \,\}$, тогда $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{N}_2^p \prod\limits_{i \in \omega} < x_i >)/\mathcal{N}$, где $< x_i > \simeq C_p$ и $\mathcal{N} = \langle\, [x_i,\, x_j] \,:\, F(x_i,\, x_j),\ i,\, j \in \omega\rangle$. Известны факты [3]:
1). центр 2-ниль свободного произведения групп $\mathcal{N}_2^p \prod\limits_{i \in \omega} < x_i >$ является абелевой p-группой, порожденной множеством $\{\,[x_i,\, x_j] \,:\, i < j,\ i,\, j \in \omega\}$,
2) если множество $\{\,\bar{q}_i \,:\, i \in \omega\}$ является системой порождающих для группы $G/Z(G)$, тогда множество $\{q_i \,:\, i \in \omega\}$ является системой порождающих для группы G.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – два **d**-изоморфных вычислимых графа и φ – изоморфизм. Определим изоморфизм φ^* из $\mathcal{A}_0 = G(\mathcal{A})$ на $\mathcal{B}_0 = G(\mathcal{B})$ следующим образом:

$$\varphi^*\,(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i} * \prod_{j=1}^{k}[y_j,\, z_j]^{\beta_j}) \,=\, (\prod_{i=1}^{m}(\varphi(x_i))^{\alpha_i} * \prod_{j=1}^{k}[\varphi(y_j),\, \varphi(z_j)]^{\beta_j}),$$

где $x_i,\, y_j,\, z_j \in A;\ 0 < \alpha_i,\, \beta_j < p; 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le k$.

Обозначим через $\mathcal{A}_0'$ фактор-группу $\mathcal{A}_0/Z(\mathcal{A}_0)$. Пусть $\bar{a},\, \bar{b} \in \mathcal{A}_0'$, тогда отношение $\bar{a} \sim \bar{b}$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathcal{A}_0$ выполняется $[a,\, c] = 1 \Leftrightarrow [b,\, c] = 1$, то есть централизаторы элементов $a,\, b$ в группе $\mathcal{A}_0$ совпадают. Через $[\bar{a}]$ обозначим класс эквивалентности для элемента a. Для $[\bar{a}] \neq [\bar{b}]$ и $[\bar{a}],\, [\bar{b}] \neq [\bar{1}]$ определим отношение $\bar{F}(x,\, y)$ на множестве $(\mathcal{A}_0' - \{\bar{1}\})/\sim$ следующим образом: $\bar{F}([\bar{a}],\, [\bar{b}])$, если имеет место $[a,\, b] = 1$ в группе $\mathcal{A}_0$. Обозначим полученную структуру как $\mathcal{G}_1$, через $\mathcal{G}_2$ – множество $\{\,[\bar{a}] \,:\, \exists\, [\bar{b}] \in \mathcal{G}_1$ $(\bar{F}([\bar{a}],\, [\bar{b}]) \wedge |\,[\bar{a}]\,| = p-1)\}$, где $|\,[\bar{a}]\,|$ означает число элементов в классе $[\bar{a}]$.

Утверждение 1. *Граф $\mathcal{A}$ изоморфен графу $\mathcal{G}_2$.*

Доказательство: Для любого элемента $a \in \mathcal{A}_0 - Z(\mathcal{A}_0)$ вида $a = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, где $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathcal{A}$ и $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_m < p$ соответствует элемент $\bar{a} = \overline{x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}}$ из $\mathcal{A}_0'$. В силу этого условия будем рассматривать различные виды представления элемента $a \in \mathcal{A}_0 - Z(\mathcal{A}_0)$, а также их описания и свойства в графе $\mathcal{G}_1$.

Лемма 1. *Пусть $[\bar{x}] \neq [\bar{1}]$ и существует $[\bar{z}] \,:\, [\bar{z}] \neq [\bar{1}],\ [\bar{z}] \neq [\bar{x}]$ и $[z,\, x] = 1$. Тогда $|[\bar{x}]| = p-1$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{A}$.*

Доказательство: $(\Leftarrow)$ Пусть $a = x^{\alpha}$, где $0 < \alpha < p$ и $x \in \mathcal{A}$. Покажем, что $[\bar{x}] = \{\,\bar{x},\, \bar{x^2}, \ldots, \overline{x^{p-1}}\}$. Ясно, что любые два элемента из этого класса эквивалентны. Предположим, что $\bar{w} \sim \bar{x}$ и $w = x^{\alpha}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$. Полагаем, что x_i различны для разных i. Предположим, что $\alpha_i \neq 0\, mod\, p$. По свойству (i) графа $\mathcal{A}$ мы для пары вершин $x,\, x_i$ предположим, что имеется вершина x' такая, что $[x',\, x] = 1$ и $[x',\, x_i] \neq 1$. Тогда $[w,\, x'] = [x^{\alpha}\, x_i^{\alpha_i},\, x'] = [x^{\alpha},\, x']\,[x_i^{\alpha_i},\, x'] = [x_i^{\alpha_i},\, x'] \neq 1$. Получили противоречие условию $\bar{w} \sim \bar{x}$. Теперь для пары $x,\, x^{\alpha}$, которые неравны, пусть имеется x', неравный с x и x^{α}, с условием $[x',\, x] = 1$ и $[x',\, x^{\alpha}] \neq 1$. Такой элемент x' может существовать в силу свойства (i) исходного графа. Следовательно, централизаторы элементов $x,\, x'$ не совпадают. Таким образом, $\bar{x'} \nsim \bar{x}$ и $\bar{F}(\bar{x'},\, \bar{x})$. Положим $y = \bar{x}'$.

$(\Rightarrow)$ Предположим, что $x = x_1 x_2$, где $x_1,\, x_2$ – неравные элементы, $[x_1,\, x_2] = 1$ и существует элемент из $\mathcal{G}_1$, который не равен элементам $[\bar{x_1}]$ и $[\bar{x_2}]$, и представитель этого элемента коммутирует с $x_1 x_2$. Пусть $[x_3^{\alpha_3} \cdots x_m^{\alpha_m},\, x_1 x_2] = 1$, $\alpha_3 \neq 0\, mod\, p$ и x_i различные для разных i. Проведем вычисления только для $i = 3$: $[x_3^{\alpha_3},\, x_1 x_2] = [x_3,\, x_1]^{\alpha_3}\,[x_3,\, x_2]^{\alpha_3} = 1 \Leftrightarrow [x_3,\, x_1] = 1$ и $[x_3,\, x_2] = 1$, и кроме того $[x_1,\, x_2] = 1$. Это противоречит условию (iii) графа $\mathcal{A}$. Ясно, что элемент $x_1 x_2$ коммутирует с элементами x_1 и x_1. Тогда $\bar{F}$ $([\overline{x_1,\, x_2}],\, [\bar{x_1}]$ и $\bar{F}$ $([\overline{x_1,\, x_2}],\, [\bar{x_2}]$. Заметим, что $\overline{x^{\alpha} y^{\beta}} = \bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\beta}$ и $\bar{x}^{\alpha}\bar{y}^{\beta} \neq \bar{x}^{\alpha_1}\bar{y}^{\beta_1} \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha_1\, mod\, p \vee \beta \neq \beta_1\, mod\, p$. Тогда $|\,[\overline{x_1 x_2}]\,| = (p-1)^2)$. Противоречие. Для случая $x = x_1 x_2$, где $x_1,\, x_2$ – неравные элементы, $[x_1,\, x_2] \neq 1$. Предположим, что существует общая вершина y такая, что $[x_1,\, y] = 1$ и $[x_2,\, y] = 1$. Тогда простая проверка показывает, что $[x] = \{\overline{x^{\alpha} y^{\beta}} \,:\, (\alpha \neq 0) \wedge (\alpha,\, \beta < p)\,\}$ и элемент $[\bar{x}]$ связан только с $[\bar{y}]$ и $|\,[\bar{x}]\,| = p \cdot (p-1)$. В случае, когда нет общей вершины, элемент $[\bar{x}]$ не коммутирует ни с одним из неравных ему элементов из $\mathcal{G}_1$. Лемма доказана.

Следствие. *Граф $\mathcal{A}$ формульно определим в группе $\mathcal{A}_0$.*

Лемма 2. *Отображение из множества $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на множество $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$. Определим процедуру нахождения базисного элемента x_a группы $\mathcal{A}_0$ по элементу a из $\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$:

Пусть элемент $a \in \mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$ и $a = [\bar{x'}]$ для некоторого x'. Найдем наибольшее $\alpha \, mod \, p$ такое, что уравнение $x^\alpha = x'$ имеет решение в группе $\mathcal{A}_0$ и x есть искомое решение. Положим $x_a = x$.

Пусть $a \in \mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$ и $b \in \mathcal{G}_2^{\mathcal{B}_0}$ такие, что $a = [\overline{x_a}]$, $b = [\overline{\varphi^*(x_a)}]$ и $y_b = (\varphi^*(x_a))_b$. Тогда определим изоморфизм $\varphi(x_a) = y_b$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A}$ – $\mathbf{d}$-вычислимая структура. Тогда следующие структуры также будут $\mathbf{d}$-вычислимыми: $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0'$, $\mathcal{G}_1^{\mathcal{A}_0}$, $\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$.*

Доказательство: Пусть дана $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathcal{A}$. Тогда группа $\mathcal{A}_0$ есть 2-ниль группа, свободно порожденная вычислимым базисом $|\mathcal{A}|$, с условием $[x_i, x_j] = 1$, если $F(x_i, x_j)$, где F – $\mathbf{d}$-вычислимое отношение будет $\mathbf{d}$-вычислимой 2-ниль группой. Группа $\mathcal{A}_0'$, являющаяся фактор-группой $\mathbf{d}$-вычислимой группы $\mathcal{A}_0$ по $\mathbf{d}$-вычислимой абелевой подгруппе $\langle [x_i, x_j] : x_i, x_j \in \mathcal{A}; i < j \rangle$, есть $\mathbf{d}$-вычислимая группа. Перейдем к структуре $\mathcal{G}_1^{\mathcal{A}_0}$. Определим сложность отношения $\bar{a} \sim \bar{b}$ для элементов $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}_0'$. Отношение эквивалентности не имеет места, если существует элемент, который принадлежит одному из централизаторов элементов a и b, но не принадлежит другому. Так как централизаторы элементов в $\mathbf{d}$-вычислимой группе являются $\mathbf{d}$-вычислимыми множествами, тогда отношение $\bar{a} \sim \bar{b}$ является $\mathbf{d}$-негативным и, следовательно, фактор по данному отношению – структура $\mathcal{G}_1^{\mathcal{A}_0}$ будет $\mathbf{d}$-вычислимой. Структура $\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$ выделяется конструктивно из структуры $\mathcal{G}_1^{\mathcal{A}_0}$, следовательно, является $\mathbf{d}$-вычислимой структурой. Лемма доказана.

Пусть сигнатура σ_1 есть сигнатура симметрического графа $\mathcal{A}$, а σ_2 есть сигнатура 2-ниль группы $\mathcal{A}_0$.

Лемма 4. *Для любой $\mathbf{d}$-вычислимой структуры $\mathcal{A}_0'$ сигнатуры σ_2, $\mathbf{d}$-изоморфной $\mathbf{d}$-вычис лимой структуре $\mathcal{A}_0$, найдется $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathcal{A}'$ сигнатуры σ_1 такая, что $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathcal{A}_0''$, соответствующая $\mathcal{A}'$, есть структура сигнатуры σ_2 и является $\mathbf{d}$-изоморфной $\mathbf{d}$-вычислимой структуре $\mathcal{A}_0$.*

Доказательство Пусть $\mathcal{A}_0'$ – $\mathbf{d}$-вычислимая структуры сигнатуры σ_2 и φ – изоморфизм из $\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{A}_0'$. Рассмотрим $\mathbf{d}$-вычислимо перечислимое формульное подмножество $\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}'_0}$. Пусть $\mathbf{d}$-вычислимое одноодназначное отображение f множества $|\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}|$ на ω. Рассмотрим произвольное $\mathbf{d}$-вычислимое одноодназначное отображение f_1 множества $|\mathcal{G}_2^{\mathcal{A}'_0}|$ на ω. Пусть $\psi = \varphi \restriction \mathcal{G}_2^{\mathcal{A}_0}$. Тогда отображение μ такое, что $\mu = f_1 \cdot \psi \cdot f_0$, будет $\mathbf{d}$-вычислимой нумерацией графа $A' = \langle |A|, F' \rangle$ и имеет место соотношение $F(i, j) \Leftrightarrow F(\mu(i), \mu(j))$ и $F'(i, j) \rightleftharpoons F(\mu(i), \mu(j))$. Тогда группа A'', построенная описанным выше способом, имеет $\mathbf{d}$-вычислимую нумерацию ν_μ и $\mathbf{d}$-изоморфна группе $\mathcal{A}_0$. Данный изоморфизм индуцируется нумерацией μ. Лемма доказана.

Следствие 1. *Существует вычислимо категоричная двуступенно нильпотентная группа простой экспоненты p.*

Следствие 2. *Существует вычислимо категоричная двуступенно нильпотентная группа без кручения.*

Доказательство. Рассмотрим две вычислимые копии G_0, G_1 группы G. Пусть ν_0, ν_1 – две вычислимые нумерации графа $\mathcal{G}$, по которым построены вычислимые группы G_0 и G_1, то есть одноодназначные отображения на инвариантные формульные подмножества $C(G_0)$, $C(G_1)$, которые являются базисами групп G_0 и G_1. Так как граф $\mathcal{G}$ вычислимо категоричен, то существует вычислимая перестановка p множества ω такая, что $\nu_0(n) = \nu_1(p(n))$ для всех $n \in \omega$. Тогда структуры $\mathcal{C}_i \rightleftharpoons \langle C(G_i), F_i \rangle$ для $i \in \{0, 1\}$, где $F_i(x, y) \Leftrightarrow G_i \models ([x, y] = 1)$ изоморфны посредством вычислимой перестановки p следующим образом: для $i \in \{0, 1\}$, всех $n \in \omega$ определим отображение $x^i_{\nu_i(n)} \mapsto x_n^{C_i}$, где элементы $x_n^i \in \mathcal{G}_i$ и $x_n^{C_i}$ из структуры

$\mathcal{C}_i$. Изоморфизм структур $\mathcal{C}_i$ продолжается до изоморфизма групп G_i. При $p = 0$ построенная группа, является группой без кручения. Следствия доказаны.

§3. Семейство Скотта, состоящее из конечных формул

Напомним обозначения из предыдущего параграфа. Пусть $\mathcal{A}_0'$ – фактор-группа $\mathcal{A}_0/Z(\mathcal{A}_0)$. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}_0'$, тогда отношение $\bar{a} \sim \bar{b}$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathcal{A}_0$ выполняется $[a, c] = 1 \Leftrightarrow [b, c] = 1$. Через $[\bar{a}]$ обозначим класс эквивалентности для элемента a. Для $[\bar{a}] \neq [\bar{b}]$ и $[\bar{a}], [\bar{b}] \neq [\bar{1}]$ определим отношение $\bar{F}(x, y)$ на множестве $(\mathcal{A}_0' - \{\bar{1}\})/\sim$ следующим образом: $\bar{F}([\bar{a}], [\bar{b}])$, если имеет место $[a, b] = 1$ в группе $\mathcal{A}_0$. Данная структура обозначена как $\mathcal{G}_1$. Через $\mathcal{G}_2$ – множество $\{ [\bar{a}] : \exists [\bar{b}] \in \mathcal{G}_1 \, (\bar{F}([\bar{a}], [\bar{b}]) \wedge |\, [\bar{a}] \,| = p-1)\}$, где $|\, [\bar{a}] \,|$ означает число элементов в классе $[\bar{a}]$.

Мы уже показали, что структура $\mathcal{F} \rightleftharpoons \langle |\mathcal{G}_2|, \bar{F} \rangle$ изоморфна графу $\mathcal{A}$. Рассмотрим множество $C(\mathcal{A}_0)$ представителей a из каждого класса $[\bar{a}]$ элементов $\mathcal{G}_2$ и отношение $F^*(x, y)$ на элементах из $C(\mathcal{A}_0)$ следующим образом: $F^*(a, b) \Leftrightarrow \mathcal{A}_0 \models [a, b] = 1$. Пусть $G \rightleftharpoons \mathcal{A}_0$.

Лемма (о представлении)1. *Для любого элемента x, где $x \in \bar{x}$ и $\bar{x} \in G_0$, эффективно определяется его представление в виде $x = x_{i_0}^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\alpha_m}$, где элементы $x_i : 0 \leq i \leq m$ из базиса группы G и $0 < \alpha_0, \ldots, \alpha_m < p$.*

Доказательство. Пусть $A \rightleftharpoons \{x_i : i \in \omega\}$, где x_i – представитель $\bar{x}_i$, где $\bar{x}_i$ – представитель элемента $[\bar{x}_i]$ из $\mathcal{G}_2$ и для любого $y \in \bar{x}_i$ имеет место $y = x_i^{\alpha}$, где $0 < \alpha < p$. Данное множество является базисом группы G_A. Зафиксируем вычислимую нумерацию группы G_A с базисом A. Тогда по любому элементу группы можно эффективно определить его представление через элементы базиса. Используем результаты леммы 1 из предыдущего параграфа.

Случай 1. Пусть $|[\bar{x}]| = p - 1$ и существует y такой, что $[\bar{x}] \neq [\bar{y}]$ и $[x, y] = 1$. Тогда $x = x_i^{\alpha}$ для некоторого $\alpha : 1 \leq \alpha \leq p - 1$ и x_i принадлежит базису группы G_A.

Случай 2. Пусть $|[\bar{x}]| = (p-1)^2$, тогда существуют неравные элементы $x_0, x_1 : [x_0, x_1] = 1$ базиса группы G_A и числа $\alpha_0, \alpha_1 : 1 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq (p-1)$ такие, что $x = x_0^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1}$.

Случай 3. Пусть $|[\bar{x}]| = p \cdot (p-1)$, тогда существуют элементы x_0, x_1 и y из базиса группы G_A такие, что $x = x_0^{\alpha_0} \cdot x_1^{\alpha_1}$ и $[x_0, x_1] \neq 1$, $[x_0, y] = 1$, $[x_1, y] = 1$.

Случай 4. Пусть не имеют место случаи 1 - 3. Тогда для элемента x найдется элемент y из группы $G_A - Z(G_A)$ такой, что $[x, y] = 1$. В качестве представления элемента x через базис A рассмотрим уже известное представление элемента y группы G_A. Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению построенного выше графа. В работе [3] дано описание метода, позволяющего элиминировать кванторы формул языка графов. Далее мы используем понятия этого метода для элиминации кванторов формул языка групп. Рассмотрим неформальное описание графа. Особыми точками назовем точки $c_i : i \in \omega$, с каждой такой точкой связаны петли длины, кратной числу 7. С каждой точкой c_i связана петля длины $k + 1$ тогда и только тогда, когда $k \in A_i$, где $A_i \in S$. Каждая точка c_i выделяет связную компоненту графа $\mathcal{G}$. Расстоянием $d(x, y)$ между вершинами x, y из одной компоненты назовем наименьшую длину пути между ними. Если вершины x, y из разных компонент, тогда $d(x, y) = \infty$. При неявной ориентации петель компоненты графа по типу движения часовой стрелки будем различать отсчет от точки вправо (прямо) и отсчет от точки влево (обратно).

Введем конечные подструктуры графа вида $N_k(\bar{x})$, которые порождены конечным множеством $\bar{x}$ элементов из $\mathcal{G}$. Порожденное множество $N_k(\bar{x})$ состоит из

1) $\{y : d(x, y) \leq 7^k, x \in \bar{x}\}$, если между x, y не встречается особая точка,

2) когда при отсчете от точки x прямо или обратно на расстояние 7^k встречается особая точка c, тогда добавим в основное множество, определенное в пункте 1, все точки до c, включая саму точку c,

3) проводим процедуру, которую мы проводим для случая $c \in \bar{x}$, то есть добавим в определенное до этого момента в пунктах 1 и 2 множество еще множество петель длины $\leq 7^k$, связанных

с особой точкой c, а также не более k штук, исходящих из c и не содержащих $x \neq c : x \in \bar{x}$, лучей длины 7^k, и не более k штук, входящих в c и не содержащих $x : x \in \bar{x}$, лучей длины 7^k.

Если c-связная компонента конечна, то процедуру добавления лучей в основное множество проводим максимально до k – штук в одну и k штук в другую стороны.

Перечислим основные свойства структур $N_k(\bar{x})$ ([1]).

1. Каждая из структур содержит конечное множество особых точек.
2. Если c – особая точка и $c \in N_k(\bar{x})$, тогда $N_k(c) \subseteq N_{k+1}(\bar{x})$.
3. Если $d(a, x_i) < 7^k$ для некоторого $x_i \in \bar{x}$, тогда существует структура $N_k(\bar{x})$ из $\mathcal{N}_k(\bar{x})$ такая, что $a \in N_k(\bar{x})$.
4. Если $a \in N_k(\bar{x})$, тогда для некоторого $x_i \in \bar{x}$ имеет место $d(a, x_i) \leq 2 \cdot 7^k$.
5. Если $d(a, x_i) \leq 4 \cdot 7^k$ для некоторого $x_i \in \bar{x}$, тогда $N_k(a) \subseteq N_{k+1}(\bar{x})$.
6. Если $d(a, x_i) > 4 \cdot 7^k$ для всех $x_i \in \bar{x}$, тогда $N_k(a) \cap N_k(\bar{x}) = \emptyset$.
7. Если $N_k(a) \cap N_k(\bar{x}) \neq \emptyset$, тогда $a \in N_{k+1}(\bar{x})$.

Пусть дан конечный граф $\mathcal{G}(\bar{x})$, где $\bar{x}$ – конечное множество выделенных элементов x. Основное множество такого конечного графа описывается конечной Σ_2 формулой

$$\psi(y, \bar{x}) \rightleftharpoons \exists z_0 \ldots \exists z_k(\bigvee_{0 \leq i \leq k} y = z_i \wedge \bigwedge_{x \in \bar{x}} y \neq x \wedge \forall u((\bigwedge_{0 \leq i \leq k} u \neq z_i \wedge \bigwedge_{x \in \bar{x}} u \neq x) \to u \neq y)).$$

Для каждого числа k и пары $\bar{x}$, $\bar{y}$ одинаковой длины будем говорить, что структуры $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{x})$ изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : G(\bar{x}) \to G(\bar{y})$ такой, что $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$. Определим класс $\mathcal{N}_k(\bar{x})$ конечных подструктур графа вида $N_k(\bar{x})$, порожденных множеством $\bar{x}$.

Определим отношение эквивалентности следующим образом:
для каждого k и пары кортежей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одинаковой длины определим отношение $\bar{x}E_k\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $N_k(\bar{x}) \cong N_k(\bar{y})$.

Лемма 2 [3]. *Пусть $\bar{x}E_{k+1}\bar{y}$ и a произвольная вершина из графа $\mathcal{G}$, тогда существует вершина $b \in |\mathcal{G}|$ такая, что $\bar{x}aE_k\bar{y}b$.*

Лемма 3. *Для любых $k \geq 0$ и $n > 0$ число классов эквивалентности вида $\tilde{x} = \{\bar{y} : \bar{x}E_k\bar{y}\}$, где $n = ln(\bar{x})$, конечно.*

Доказательство. Обозначим через $e(x)$ число k такое, что $x = x^k_{i,j}$ для некоторых $i, j \in \omega$, а через $e(\bar{x}) = \{k_i : e(x_i) = k_i, x_i \in \bar{x}\}$. Из условия $\bar{x}E_k\bar{y}$ следует, что $e(\bar{x}) = e(\bar{y})$. Пусть существует бесконечно много $\bar{y}$ таких, что $e(\bar{x}) = e(\bar{y})$. Тогда из описания семейства S следует, что существует множество A_d из S, которое бесконечно и содержит $e(\bar{x})$, и существует бесконечная последовательность конечных множеств $\{A_{d_i} : i \in \omega\}$ из S, которые содержат $\bar{x}$. Пусть $\{\bar{y}_i : e(y)_i = e(\bar{x})\}$ и $\bar{y}_i$ содержатся в связных компонентах графа, определенных особыми точками c'_i.

Пусть $\bar{x} = \{x_0, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}\}$, $d(c_d, x_j) \leq 7^k$ и для всех $i > m$ имеет место $d(c_d, x_i) > 7^k$. Пусть $\bar{y}_i \subseteq A_{d_i}$, $\{(d_i, t_i) : A_{d,t_i} \subseteq A_{d_i, t_i+1}\}$ и для всех i имеет место $d_i < d_{i+1}$. С каждым c'_i, где $i < k$ связаны, кроме петель, лучей (исходящих, входящих) и интервалов, содержащих $y \in \bar{y}_i$, еще $i + 1$ штук петель длины $\leq 7^k$, исходящих лучей длины 7^k; затем к каждому исходящему лучу добавим входящий луч длины 7^k. Пусть m – наименьшее число такое, что с особой точкой c'_m связаны $2 \cdot k$ штук лучей длины 7^k, которые не содержат элементов из $\bar{y}_m$. Тогда для $0 \leq i < j \leq m$ имеем $N_k(\bar{y_i}) \ncong N_k(\bar{y_j})$, так как каждое из них содержит разное число петель и лучей, в которых нет точек из соответствующих $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$. Для всех $i \geq m$ мы имеем $N_k(\bar{x}) \cong N_k(\bar{y}_i)$. Таким образом, существует m неэквивалентных классов. Лемма доказана.

Пусть G' – произвольная конечная группа, тогда для каждого элемента g из G по лемме о представлении существуют базисные элементы для представления элемента g. Каждая такая группа описывается конечной Σ_2 формулой подобно записи формулы ψ для графа $\mathcal{G}(\bar{x})$. Пусть

$\bar{x}$ – множество всех базисных элементов, участвующих в записи выделенных элементов $\bar{y}$ группы G', тогда данную группу $(G', \bar{y})$ будем обозначать как $G'(\bar{x})$. Далее будем рассматривать конечные группы только с такой записью. Группа $H_k(\bar{x})$ строится как 2-ниль группа экспоненты p с базисным множеством $N_k(\bar{x})$ и множеством определяющих соотношений $\{[x_i, x_j] = 1 : F(x_i, x_j) \wedge x_i, x_j \in N_k(\bar{x})\}$.

Доказанное выше Предложение и Утверждение позволяют перенести свойства и понятия графов на группы, то есть связность вершин графа переходит в коммутативность произведений базисных элементов; на множестве базисных элементов сохраняются понятия петли, луча, расстояния между элементами, которые уже определяются через коммутаторы.

Введем отношение эквивалентности на конечных множествах элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из группы G следующим образом: для каждого k и пар кортежей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одинаковой длины определим отношение $\bar{x}\mathcal{E}_k\bar{y}$ тогда и только тогда, когда группы $H_k(\bar{x}) \cong H_k(\bar{y})$.

Замечание. *Лемма о представлении позволяет рассматривать только конечные множества элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из базиса группы G. В дальнейшем множества элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ выбираются из базиса группы.*

Лемма 4. *Пусть $\bar{x}\mathcal{E}_{k+1}\bar{y}$ и a – произвольный элемент группы G, тогда существует элемент b группы G такой, что $\bar{x}a\mathcal{E}_k\bar{y}b$.*

Доказательство. Определим формульные множества $C(\bar{x})$ и $C(\bar{y})$ групп $H_k(\bar{x})$, $H_k(\bar{y})$, которые изоморфны $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{y})$ соответственно. Из изоморфизма групп $H_k(\bar{x})$ и $H_k(\bar{y})$ следует изоморфизм $C(\bar{x})$ и $C(\bar{y})$, следовательно, структуры $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{y})$ также изоморфны. Это означает, что $\bar{x}E_k\bar{y}$. Пусть элемент $a \in \bar{a}$, $\bar{a} \in [\bar{a}]$,$[\bar{a}] \in C(\bar{x})$ и для любого $b \in \bar{a}$ существует $\alpha : 0 < \alpha < p$ такое, что $b = a^{\alpha}$, тогда a является вершиной графа $\mathcal{G}$. По лемме 2 для произвольной вершины a графа $\mathcal{G}$ из условия $\bar{x}E_{k+1}\bar{y}$ следует существование вершины $b \in |\mathcal{G}|$ такой, что $\bar{x}aE_k\bar{y}b$. Тогда в силу Предложения 1 группы, построенные по графам $\mathcal{G}(\bar{x}a)$ и $\mathcal{G}(\bar{y}b)$, изоморфны, то есть имеет место отношение $\bar{x}a\mathcal{E}_k\bar{y}b$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любых $k \geq 0$ и $n > 0$ число классов эквивалентности вида $\hat{x} = \{\bar{y} : \bar{x}\mathcal{E}_k\bar{y}\}$, где $n = ln(\bar{x})$, конечно.*

Доказательство. Группа $H_k(\bar{x})$ есть

$$(\mathcal{N}_2^p \prod_{m \in |N_k(\bar{x})|} < m >) / \mathcal{N}_k^*(\bar{x}), \text{где} < m > \simeq C_p, \mathcal{N}_k^*(\bar{x}) = \langle [m_i, m_j] : F(m_i, m_j) \rangle.$$

Пусть группа $H'_k(\bar{x}) \rightleftharpoons H_k(\bar{x})/Z(H_k(\bar{x}))$ – фактор-группа по центру. Рассмотрим отношение эквивалентности $\bar{a} \sim \bar{b}$ на множестве $H'_k(\bar{x}) - \bar{1}$ следующим образом: если для любого $c \in H_k(\bar{x})$ имеет место условие $H_k(\bar{x}) \models [a, c] = 1 \Leftrightarrow H_k(\bar{x}) \models [b, c] = 1$. Пусть $\bar{H}_k(\bar{x}) \rightleftharpoons (H'_k(\bar{x}) - \bar{1})/\sim$. Рассмотрим множество $H^*_k(\bar{x}) \rightleftharpoons \{[\bar{a}] : \exists [\bar{b}] \in \bar{H}_k(\bar{x})(H_k(\bar{x}) \models [a, b] = 1)\}$, тогда это множество формульно определимо и изоморфно множеству $N_k(\bar{x})$, как структура $\langle H^*_k(\bar{x}), F^* \rangle$, где $F^*([\bar{a}], [\bar{b}]) \Leftrightarrow H_k(\bar{x}) \models [a, b] = 1$. Пусть S – множество представителей $\{a : a \in \bar{a} \wedge a \in [\bar{a}] \wedge [\bar{a}] \in H^*_k(\bar{x})\}$, взятых по одному из каждого класса $[\bar{x}]$, тогда S является формульным множеством и базисом группы $H_k(\bar{x})$. Тогда утверждение леммы является следствием леммы 3. Лемма доказана.

Следующее понятие введено А.Д. Таймановым [10]. Дадим определение этого понятия по Hodges'у и расширенный вариант его леммы из работы [11].

Определение. *Пусть $\bar{c}$ – фиксированное конечное множество (возможно пустое) констант из G. Предположим, что $\mathcal{E}^{\bar{c}}_k$, где $k \in \omega$ есть произвольное семейство отношений эквивалентностей на конечных последовательностях элементов группы $(G, \bar{c})$, обогащенной константами из $\bar{c}$. Тогда $\{\mathcal{E}^{\bar{c}}_k : k \in \omega\}$ образуют ранжированную систему отношений эквивалентности для метода "перекидки"(back-and-forth) для $(G, \bar{c})$, если выполняются свойства: 1.если $\bar{x}\mathcal{E}^{\bar{c}}_0\bar{y}$, тогда для всех атомных формул $\psi(\bar{u})$ языка теории групп с выделенными кон-*

стантами $\bar{c}$ *имеет место условие* $(G,\bar{c}) \models \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow (G,\bar{c}) \models \psi(\bar{y})$,
2. если $\bar{x}\mathcal{E}^{\bar{c}}_{k+1}\bar{y}$ *и любого* a *из* G *существует* b *из* G *такой, что* $\bar{x}a\mathcal{E}^{\bar{c}}_{k+1}\bar{y}b$.

Лемма [11]. *Пусть* $\{\mathcal{E}^{\bar{c}}_k : k \in \omega\}$ *образует ранжированную систему для метода "перекидки"для* $(G,\bar{c})$ *и для каждого* k *и* n *отношение эквивалентности* $\mathcal{E}^{\bar{c}}_k$ *имеет конечное число классов эквивалентности относительно последовательностей элементов длины* n *в* G. *Предположим, что каждый из этих классов может быть определен формулой языка теории групп с новыми константами из* $\bar{c}$. *Пусть* $\Psi^{\bar{c}}$ *– множество таких формул. Тогда любая формула в языке теории групп с константами из* $\bar{c}$ *эквивалентна булевой комбинации формул из* $\Psi^{\bar{c}}$ *над* $(G,\bar{c})$.

Доказательство. Условие Предложения есть условие леммы из книги [4]. Проверим выполнение свойств ранжированной системы отношений для группы. Пусть $\bar{c}$ – пустой список констант. Тогда семейство $\{\mathcal{E}_k : k \in \omega\}$ удовлетворяет условиям определения ранжированной системы отношений для $(G,\bar{c})$. По определению $\bar{x}\mathcal{E}_0\bar{y}$ имеет место тогда и только тогда, когда группы с базисами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ изоморфны. Атомная формула языка теории групп утверждает только о том, что два элемента группы коммутируют или нет. Таким образом, первое условие определения имеет место. Второе условие выполняется в силу леммы 4.

Для любого конечного списка констант $\bar{c}$ мы через $\mathcal{E}^{\bar{c}}_k$ обозначим отношение $\bar{x}\mathcal{E}^{\bar{c}}_k\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x}c\mathcal{E}_k\bar{y}c$. Ясно, что таким образом определенное семейство $\{\mathcal{E}^{\bar{c}}_k : k \in \omega\}$ удовлетворяет условиям определения ранжированнй системы для $(G,\bar{c})$. По лемме 5 для каждого n и k число классов эквивалентости вида $\hat{x} = \{\bar{y} : \bar{x}\mathcal{E}_k\bar{y}\}$, где $n = ln(\bar{x})$ конечно и каждый такой класс описывается некоторой Σ_2 формулой языка теории групп с новыми константами из $\bar{c}$. Пусть $\Gamma^{\bar{c}}$ – множество всех формул, описывающих все эти классы. Лемма доказана.

Таким образом, мы доказали

Следствие. *Пусть* $\bar{c}$ *– конечное множество констант (возможно пустое) из* G. *Тогда любая формула* $\theta(\bar{x})$ *с константами из* $\bar{c}$ *эквивалентна в* G *булевой комбинации формул из* $\Gamma^{\bar{c}}$.

Теорема. *Существует вычислимо категоричная метаабелева группа экспоненты* p *без семейства Скотта, состоящего из конечных формул.*

Доказательство. Рассмотрим структуру $\mathcal{G} = \langle G_2, \bar{F}\rangle$, описание которой дана выше.

Предположим, что для группы G существует семейство Скотта Φ, состоящее из конечных формул языка теории групп. Тогда структура $\mathcal{G}_1$ имеет определимое семейство Скотта, состоящее из конечных формул языка структуры сигнатуры $\langle\bar{F}\rangle$, и следовательно, граф $\mathcal{A}$ также имеет определимое семейство Скотта, состоящее из конечных формул языка теории графов.

Пусть $\bar{c}$ фиксированное конечное множество констант из группы G. Покажем, что группа G не имеет семейства Скотта, состоящих из конечных формул с константами из $\bar{c}$. Пусть $\phi(x,\bar{c})$-булева комбинация формул из $\Gamma^{\bar{c}}$, которая записана дизьюнктивной нормальной форме и принадлежат семейству Скотта для группы $(G,\bar{c})$.

Пусть ϕ'- дизьюнктивный член вида:

$$\theta_0(x,\bar{c}) \wedge \theta_1(x,\bar{c}) \wedge \ldots \theta_n(x,\bar{c}) \wedge \neg\delta_0(x,\bar{c}) \wedge \ldots \neg\delta_m(x,\bar{c}),$$

где каждая из формул $\theta_i(x,\bar{c})$ и $\delta_j(x,\bar{c})$ описывает конечную группу вида $M_k(x\bar{c})$ для некоторого $k \in \omega$.

Каждой группе $M_k(x\bar{c})$ соответствует граф $N_k(x\bar{c})$, который описывается конечной формулой вида $\vartheta(x,\bar{c})$.

Пусть $\psi_\phi(x,\bar{c})$-булева комбинация формул вида $\vartheta(x,\bar{c})$, соответствующая формулам вида $\theta_i(x,\bar{c})$ и $\delta_j(x,\bar{c})$, описывающих $M_k(x\bar{c})$, тогда $\psi_\phi(x,\bar{c})$ является формулой из семейства Скотта для графа $(\mathcal{A},\bar{c})$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между формулами языка теории графов $\mathcal{A}$ и формулами языка структуры $\mathcal{G}_2$ сигнатуры $\langle\bar{F}\rangle$. Так как граф $\mathcal{A}$ не имеет в.п. семейства Скотта, то и структура $\mathcal{G}_2$ не имеет в.п. семейства Скотта, состоящее из конечных формул. Таким образом, группа G не имеет в.п. семейства Скотта, сосоящего из конечных формул. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Ash C.J., Knight J.F., Manasse M. and Slaman T.** Generic copies of countable structures// Annals of Pure and Applied Logic. 1989. V. 42. P.195–205.

2. **Chisholm J.** //J. Symbolic Logic. 1990. V. 55. P. 1168–1191.

3. **Cholak P., Shore R.A. and Solomon R.** A computable stable structure with no Scott family of finitary formulas.
Arch. Math. Logic. 2006. V.45. P.519–538.

4. **Goncharov S.S.** // Algebra and Logic. 1975. V.16. P.392–409.

5. **Goncharov S.S.** // Algebra and Logic. 1977. V.16. P. 257–282.

6. **P. Cholak, S.S. Goncharov, Khoussainov B., Shore R.A.** // Symbolic Logic. 1999. V.64. P.13–37.

7. **Hirschfeldt D.R., Khoussainov B., Shore R.A.** // Journal of Symbolic Logic. 2003. V.68. P.1199–1241.

8. **Кудинов О.В.** // Алгебра и Логика. 1996. Т.35, №4. С.458–467.

9. **Mekler A.H.** // Journal of Symbolic Logic. 1981. V. 46, №4. P. 534–562.

10. **Мальцев А.И.** Некоторые вопросы теории классов моделей. В кн. Избранные труды, М., 1976. С.339–274.

11. **Hodges W.** Model Theory.// Cambridge, 1993. V.42. P.821–865.

12. **Ershov Yu.L., Goncharov S.S.** Constructive Models.// Siberian school of Algebra and Logic. 2000. V.6.

13. **Ash C.J., Knight J.F.** Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy.// Publ. Elsevier. 2000.

Поступила в редакцию 04.09.2006г.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 101 – 106*

ХРОНИКА

Алексеева Людмила Алексеевна

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Алексеевой Людмиле Алексеевне, известному специалисту в области механики и математической физики, заведующей лабораторией волновой динамики Института математики МОН РК.

Л.А.Алексеева родилась 12 января 1947 года в г. Калининграде в семье врачей. Из трех дочерей Людмила – старшая. Детство прошло в частых переездах в связи с военной службой отца. В 1954 году поступила в советскую среднюю школу в г. Ютербоге (ГДР), в 1965 году окончила с золотой медалью среднюю школу в г. Муроме Владимирской области. В том же году она поступила на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, отделение механики, была ленинской стипендиаткой.

В октябре 1970 г. Л.А. поступила в аспирантуру этого же факультета, специализировалась на кафедре теоретической механики под руководством член-корр. АН СССР Д.Е. Охоцимского, который также заведовал отделом космических исследований в Институте прикладной математики АН СССР. Работа над диссертацией проходила в этом отделе в группе тогда еще кандидата, ныне д.ф-м.н. Ю.Ф. Голубева. Кандидатскую диссертацию на тему "Моделирование динамики и управления движением шагающего аппарата"по специальности 01.02.01.- теоретическая механика - защитила в МГУ в 1976 г. В теории шагающих систем эта была пионерская работа, вызвавшая большой интерес членов Совета при ее защите. Основные результаты диссертации опубликованы в виде препринта ИПМ АН СССР [4] и трех статей в Известиях АН СССР, серии "Техническая кибернетика"[6-8].

После окончания аспирантуры Л.А. по распределению была направлена на работу в Алма-Ату в Институт математики и механики АН КазССР, где начала работать инженером лаборатории механики горных пород (зав. акад. АН Каз ССР Ж.С. Ержанов). В июне 1974 г. у нее родилась дочь Рахимбердиева Марина. С организацией института сейсмологии АН КазССР в 1976 году она была переведена в лабораторию теории сейсмостойкости подземных сооружений (ЛТСПС), которой заведовал д.т.н., ныне академик НАН РК Ш. М. Айталиев, где работала до 1985 года, пройдя путь от младшего до старшего научного сотрудника. С 1986 по 1991 г. она – старший, а затем ведущий научный сотрудник той же лаборатории, но уже в ИММ АН КазССР, куда вновь были возвращены из ИС АН КазССР две лаборатории по механике.

В 1991 г. на Специализированном Совете по механике ИММ АН КазССР ею была защищена докторская диссертация на тему "Динамика протяженных подземных сооружений"по специальности 01.02.07- механика горных пород, грунтов и сыпучих сред. Ее оппоненты - известные ученые-механики СССР: П.И. Перлин (Москва, МФТИ), В.Д. Кубенко (Киев, Институт механики), Б.Д. Аннин (Новосибирск, ИГ СОРАН); ведущая организация - МГУ им.

М.В.Ломоносова. В 1992 году ВАК СССР присвоил ей звание профессора по специальности 01.02.04-механика деформируемого твердого тела.

В феврале 1992 г. в Институте теоретической и прикладной математики (ныне Институт математики) в отделе вычислительной математики по инициативе президента АН КазССР У.М. Султангазина была образована лаборатория вычислительных методов волновой динамики, которой Л.А. Алексеева заведует по сей день. В настоящее время она руководит работой по научно-исследовательской теме ПФИ РК "Краевые задачи дифракции волн в деформируемых твердых и электромагнитных средах"(2006-2008гг.).

Область научных интересов Л.А.Алексеевой: математическая физика, теория распространения и дифракции волн, теория поля, механика деформируемого твердого тела, механика горных пород, динамика подземных сооружений, что во многом было обусловлено потребностями развития механики горных пород и сейсмологии в Казахстане и влиянием казахстанской школы механиков, сформировавшейся в шестидесятые-семидесятые годы под руководством академика Ж.С. Ержанова. Активно занимается научно-исследовательской работой, она – автор более 170 научных публикаций, основная часть которых посвящена разработке и исследованию математических моделей динамики подземных сооружений, разработке теории и методов решения краевых задач для гиперболических уравнений и систем математической физики, систем уравнений смешанного типа и исследованию на их основе процессов распространения и дифракции волн в упругих, термоупругих, многокомпонентных и электромагнитных средах с концентраторами напряжений в виде полостей и включений различных форм, а также при действии подвижных нагрузок в до-, транс- и сверхзвуковом диапазоне скоростей и др.

Основные научные работы Л.А.Алексеевой опубликованы в известных периодических международных научных журналах: Прикладная математика и механика; Известия АН СССР (РАН), Техническая кибернетика, Механика твердого тела; Дифференциальные уравнения, Журнал вычислительной математики и математической физики, Computational Mechanics, Engineering Analysis in Boundary Elements и др., а также в республиканских изданиях: Известия АН КазССР и Известия НАН РК - серия физико-математическая, Вестники АН КазССР и НАН РК, Математический журнал и др., и трех монографиях [1-3] . Она – участник многих международных съездов, симпозиумов, конференций. Из последних зарубежных: ICMV-2000, Исламабад; ICDD-2002-Санкт-Петербург; ICDE-2003, Москва; HYP-2004, Осака; ICM-2006, Мадрид [66-73] и др.

Л.А.Алексеева активно занимается подготовкой научных кадров. Под ее руководством выполнены и защищены одна докторская и десять кандидатских диссертаций. На протяжении нескольких лет она работала по совместительству профессором в КазГУ им. аль-Фараби на механико-математическом факультете, читала спецкурсы по динамике упругих сред, теории обобщенных функций, методу сингулярных граничных интегральных уравнений. Руководит объединенным научным семинаром "Математические методы механики сплошных сред".

Большое место в ее работе занимает научная экспертиза проектов, диссертаций, статей, отчетов и др. С 1978 года она была членом различных Диссертационных Советов (по механике при ИС АН КазССР, при ИММ АН Каз ССР, при ИММаш НАН РК, при КазАТК, по математике при ИМ МОН РК в настоящее время), в 1995-96 гг. была членом Президиума ВАК РК, является постоянным экспертом госэкспертизы РК, член рабочей группы ВНТК при правительстве РК по космическим аппаратам, рецензент ряда республиканских научных журналов, член редколлегии "Математического журнала".

За активную научную работу и полученные результаты д.ф.-м.н., проф. Л.А.Алексеева неоднократно получала государственную научную стипендию для ученых и специалистов, внесших выдающийся вклад в развитие науки и техники (1998-2001гг., 2001-2003гг., 2003-2005гг.).

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Монографии

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов - Алма-Ата: "Наука". 1989. С.240.

2. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б., Дильдабаев Ш.А. Метод граничных интегральных уравнений в динамике упругих многосвязных тел -Алма-Ата: "Наука". 1991. С.228.

3. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Казахская домбра и ее акустические особенности - Алматы. 2003. С.188.

Препринты

4. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Управление динамической моделью шагающего аппарата - Препринт № 20. Институт прикладной математики АН СССР. Деп. ВИНИТИ №908. 1974. С.50.

5. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения краевых задач для класса стационарных бегущих решений волновых уравнений в цилиндрических областях - Препринт ИТПМ МН-АН РК Алматы. 1997. С.72.

Статьи

6. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Алексеева Л.А. Алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата / VI IFAC Symp. Control in Space. Papers. Session XI. Ереван. 1974. С.63-80.

7. Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф. Модель динамики шагающего аппарата // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. №3. С.50-58.

8. Алексеева Л.А., Голубев Ю.Ф. Адаптивный алгоритм стабилизации движения автоматического шагающего аппарата // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. №5. С.56-63.

9. Алексеева Л.А. Моделирование динамики и управления движением шагающего аппарата //Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. №6. С.78-86.

10. Ержанов Ж.С., Алексеева Л.А. Задачи дифракции и преломления сейсмических волн на подкреплениях полостей цилиндрических и сферических форм/ Труды IV Национального Конгресса по теоретической и прикладной механике. Болгария. Варна. 1981. С.77-82.

11.Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Расчет бетонной крепи цилиндрической выработки в в водопроницаемых грунтах на сейсмическое воздействие // Проблемы механики подземных сооружений. Сб. научн.тр. Алма-Ата:"Наука". 1982. С.82-91.

12. Алексеева Л.А., Шершнев В.В. О напряженно-деформированном состоянии окрестности круговой цилиндрической полости в упругих и многокомпонентных средах при рассеянии стационарных волн // Механика тектонических процессов. Сб. на-учн.тр. Алма-Ата:"Наука". 1983. С.122-132.

13.Алексеева Л.А. О колебаниях упругой полуплоскости при действии стационарного источника цилиндрических волн // Известия АН Каз ССР. Сер.физ.-мат. 1983. №5. С.1-5.

14. Алексеева Л.А. О колебаниях упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием // Изв. АН Каз ССР. Серия физ.-мат. 1984. №1. С.1-5.

15. Алексеева Л.А. Стационарная дифракция волн на круговом отверстии в упругой полуплоскости// Прикладная математика и механика (ПММ). 1985. Т.49. №2. С.211-218.

16. Алексеева Л.А. Упругая перфорированная полоса на неподвижном основании при стационарных колебаниях // Изв. АН Каз ССР. Сер.физ.-мат. 1985. №3. С.8-12.

17. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б. Граничные интегральные уравнения в динамических задачах теории упругости // Вестник АН Каз.ССР. 1985. №9. С.46-51.

18. Айталиев Ш.М.,Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. 1986. №5. С.75-80.

19. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1987. №4. С.156-162.

20. Алексеева Л.А. Влияние угла падения и контактных условий на напряженное состояние бетонной крепи тоннеля при дифракции стационарных волн // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. 1986. №3. С.59-63.

21. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения для упругой полуплоскости с отверстием при динамических нагрузках на его контуре // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. 1987. №3. С.57-62.

22. Алексеева Л.А. Дифракция волн на системе протяженных подземных выработок неглубокого заложения // Вестник АН КазССР. 1987. №2. С.46-52.

23. Алексеева Л.А. Дифракция волн в многосвязном полупространстве/ В сб. трудов "Динамика неоднородных сред и взаимодействие волн с элементами конструкций". Новосибирск. 1987. С.6-12.

24. Алексеева Л.А. Коротковолновая асимптотика дальнего поля источника упругих волн в полуплоскости // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-мат. 1988. №5. С.74-80.

25. Алексеева Л.А. Стационарные колебания упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью при действии периодической нагрузки // ПММ. 1987. Т.5 № 5. С.836-843.

26. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Напряженное состояние двухслойной обделки тоннеля от действия внутренних движущихся нагрузок // Сб.Механика подземных сооружений. Тула. 1988. С.24-33.

27. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.,Суюнчева Т. Асимптотика дальнего поля стационарного источника волн в составной вязко-упругой плоскости // Известия АН Каз ССР. Сер.физ-мат. 1989. №1. С.72-68.

28. Alexeyeva L.A. Analogues of Kirchhoff and Somigliana formulas in elastodynamics plane problems. Int. J. Applied Mathematics and Mechanics. 1991. V.55. №2. P.298-308.

29. Алексеева Л.А. Фундаментальные решения в упругом пространстве в случае бегущих нагрузок // ПММ. 1991. Т.55. №5. С.854-862.

30. Алексеева Л.А., Украинец В.Н., Жанабаев Б.А.Реакция тоннеля мелкого заложения на движущуюся периодическую нагрузку // Сб. Механика подземных сооружений. Тула. 1991. С 96-107.

31. Алексеева Л.А. Граничные интегральные уравнения начально-краевой задачи для волнового уравнения в $R^2 \times t$ // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. №8. С.1451-1453.

32. Алексеева Л.А. Формулы Сомильяны для решений уравнений эластодинамики в случае бегущих нагрузок // ПММ. 1994. Т.58. №1. С.103-109.

33. Алексеева Л.А., Шершнев В.В. Фундаментальные решения уравнений движения среды Био // Доклады НАН РК. 1994. №1. С.3-6.

34. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии // ПММ. 1994. Т.58. №2. С.170-175.

35. Алексеева Л.А. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса для решений волнового уравнения в $R^N \times t$ // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31. №11. С.1951-1953.

36. Alexeyeva L.A., Shershnev V.V. Somigliana's formula analogue in distribution space for dynamics of two-component mediums // Доклады НАН РК. 1995. №2. С.3-7.

37. Alexeyeva L.A., Dildabaev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakiryanova G.K. Boundary Integral Equation Method in two- and three dimensional problems of elastodynamics // Int. J. Computational Mechanics. 1996. V.18. №2. P. 147-157.

38. Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N. Boundary Element Method for transient problems of uncoupled thermoelastodynamic. Boundary Element XIX - Computational Mechanics Publication. 1997. P. 118-125.

39. Alekseyeva L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elasto-dynamics by Stationary Running Loads // Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998. № 11. P.37-44 .

40. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35. №1. С.125-127.

41. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // ПММ. 1999. Т.63. №5. С.853-859.

42. Alekseyeva L.A. Generalized functions method in the boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // Proceedings of II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. 25-28 Sept. 2000. P.231-243.

43. Alexeyeva L.A., Eskalieva A.Zh., Shershnev V.V. Stress - strain state in the neighbourhood of subways and pipe lines by the action of dynamic loads // Proc. Of II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. 25-28 Sept. 2000. P.286-300 .

44. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35. №1. С.125-127.

45. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т.40. №4. С.611-622.

46. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Музыкальный строй казахской домбры // Евразийское сообщество. 2000. №3. С.120-129.

47. Алексеева Л.А., Нажмеденов Ж. Домбра и ее амплитудно-частотные характеристики // Доклады НАН РК . 2001. №1. С.47-55.

48. Алексеева Л.А., Купесова Б.Н. Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // ПММ. 2001. Т.65. №2. С.334-345.

49. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач электродинамики // Математический журнал. Т.1. 2001. №1. С.3-13.

50. Алексеева Л.А. О единственности решений начально-краевых задач для уравнений Максвелла в случае ударных электромагнитных волн // Изв. НАН РК. Сер.физико-математическая. 2001. №5. С.63-68.

51. Алексеева Л.А. Модифицированные уравнения Максвелла и их обобщенные решения // Математический журнал. 2001. Т.1. №2. С.15-24.

52. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Фундаментальные решения гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. №4. С.488-494.

53. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т.42. №1. С.76-88.

54. Алексеева Л.А. Электромагнетизм и А-поле // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. 2002. Т.10. №2(34). С. 126-136.

55. Алексеева Л.А. Фундаментальные решения уравнений движения упругого полупространства при дозвуковых бегущих нагрузках // Изв. НАН РК. Сер.физ.-мат. 2002. №5. С.53-58.

56. Алексеева Л.А. О замыкании уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т.43. №5. С.759-766.

57. Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. №6. С.769-776.

58. Алексеева Л.А. Действие стационарных бегущих нагрузок в упругом полупространстве // Математический журнал. 2003. Т.3. №1. С.18-25.

59. Alexeyeva L. A. Hamilton form of Maxwell equations and their quaternions/ Материалы межд. конф. "Дифференциальные уравнения". Алматы. 2003 // Математический журнал. 2003. Т.3. №4. С.10-17.

60. Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2004. №3. С.45-53.

61. Алексеева Л.А. Об одной модели электро-гравимагнитного поля. Уравнения взаимодействия полей и законы сохранения // Математический журнал. 2004.Т.4. №2. С.20-32.

62. Alexeyeva L.A., Kaishybaeva G.K. Mathematical model of array dynamics in the vicinity of extended underground structures at action of moving loadings // Int.J. Mathematics and Computers in Simulation. 2004. V.67. №4. P.441-450.

63. Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K. Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2005. №4-5. P.259-267

64. Alexeyeva L.A. Time-dependent boundary value problems for Maxwell equations and their generalized solutions/ Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications. V.I /Tenth Int.Conf. in Osaka, September 2004. -2006. P. 239-245.

65. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. 2006. Т.6. №1. С.16-32.

Тезисы

66. Alexeyeva L.A. Generalized functions method in the boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Abstracts. Islamabad. 25-28 Sept. 2000. P.43.

67. Alexeyeva L.A., Eskalieva A.Zh., Shershnev V.V. Stress - strain state in the neighborhood of subways and pipe lines by the action of dynamic loads // II Int. Symp. Mechanical vibrations. Pakistan. Islamabad. Abstracts. 25-28 Sept. 2000. P.28-29.

68. Алексеева Л.А Об одной математической модели электро-гравимагнитного поля. Комплексная форма уравнений Максвелла и Ньютона // Int.Conf. "Mathematical ideas of P.L.Chebyshev and their application for modern problems of natural sciences". Abstracts. Obninsk, May 14-18, 2002. P.3-4.

69. Alexeyeva L.A. Boundary integral equations to time-dependent boundary value problems of diffraction of electromagnetic waves // Int. Seminar "Day on diffraction". Saint-Peterburg 2003. Abstracts. P.12-13.

70. Alexeyeva L.A., Kayshibaeva G.K. Waves diffraction on extended cylindrical concavities in elastic mediums // III International Conference on Mathematical Modeling and Comp.Meth. in Applied Sci. and

Engineering. Abstracts. Pilsen, Chech Rep. 2005. P.25-26.

71.Алексеева Л.А.Уравнения взаимодействия электро-гравимагнитных полей и законы сохранения // Межд. конф. "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы"посв. памяти И.Г.Петровского. Сб.тезисов. Москва, 2004. С.11.

72. Alexeyeva L.A. Time-dependent boundary value problems for Maxwell equations and their generalized solutions // Abstracts of X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications. Osaka, Japan. Sept. 2004. P.42-43.

73. Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations / Int. Congress of Mathematicians. Madrid, 2006. Abstracts. P.436.

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 107–112*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Дженалиеву Мувашархану Танабаевичу, известному специалисту в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложений к математическим задачам управления, заведующему лабораторией уравнений математической физики, исполняющему обязанности директора Института математики МОН РК.

М.Т.Дженалиев родился 25 января 1947 года в участке Актюбе Шуского района Жамбылской области в семье работников сельского хозяйства. В 1965 году закончил 11-й класс средней школы им.М.Горького в с.Новотроицкое. В этом же году М.Т.Дженалиев поступил в Казахский политехнический институт им. В.И.Ленина на факультет "Автоматики и вычислительной техники" и в 1971 году закончил его по специальности "Автоматика и телемеханика" с квалификацией "инженер-электрик". Будучи студентом 3-го курса, участвовал в научной конференции КазПТИ, посвященной 50-летию Октябрьской Революции, где его студенческая работа была отмечена именными часами.

После окончания ВУЗа в 1971–1976гг. М.Т.Дженалиев работал в Казахском отделении ГПИ "Проектмонтажавтоматика" (Алматы). В 1976–1980гг. обучался в очной аспирантуре факультета механики и прикладной математики КазГУ под научным руководством проф. С.А.Айсагалиева. Кандидатскую диссертацию на тему "Достаточные условия оптимальности одного класса систем с распределенными параметрами" по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения и математическая физика — Мувашархан Танабаевич защитил в Институте математики и механики АН КазССР в 1982г.; докторскую диссертацию на тему "Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений" по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения — в 1994г. в Институте теоретической и прикладной математики НАН РК. В 1984г. ему присваивается ученое звание "старший научный сотрудник", а в 1996г. — "профессор".

С 1980г. М.Т.Дженалиев работает в Институте математики и механики АН КазССР (впоследствии Институт математики ЦФМИ МОН РК) в лаборатории методов оптимизации (зав. Б.Р.Амангельдиев), а с 1985г. — в лаборатории уравнений математической физики (зав. Е.И.Ким, С.Н.Харин).

С 2001г. он зам.директора по научной работе и с 1 января 2007г. — исполняющий обязанности директора Института математики. В лаборатории уравнений математической физики под его руководством успешно проводятся исследования по темам "Программы фундаментальных исследований"(ПФИ) МОН РК. В настоящее время он является руководителем темы ПФИ "Граничные задачи для спектрально-нагруженных операторов и разностные схемы краевых задач математической физики"(2006–2008гг.). Область его научных интересов — граничные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений и их приложения к задачам управления.

Основными его научными достижениями являются следующие:

1. Теорема о достаточных условиях оптимальности и, разработанный на ее основе, алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления параболическим уравнением, что стало основой его кандидатской диссертации. Дальнейшее развитие этого результата нашло применение для задач математического моделирования оптимальных процессов управления в докторской диссертации К.С.Сматова (защищена в 1998г., научный руководитель проф. М.Т.Дженалиев).

2. Разрешимость краевых задач для линейных нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами. Эти результаты устанавливают разрешимость нагруженных уравнений с необязательно ограниченными коэффициентами при нагруженных слагаемых. Такие ситуации возникают при изучении задач оптимального управления коэффициентами уравнений.

3. Краевые задачи с производными по времени на границе для параболического и гиперболического уравнений. Здесь обнаружен эффект "переопределенности" при задании начальных условий на границе, отражающий тот факт, что начальные условия в области и на ее границе задаются из класса квадратично суммируемых функций (которые не обязательно согласованы по теореме о следах).

4. Критерий однозначной сильной разрешимости для нагруженных "времени" уравнений.

5. Вариационный принцип для нагруженных уравнений. Построены симметризующий оператор для существенно несимметрического оператора нагруженного параболического уравнения, соответствующее гильбертово пространство типа пространства К.Фридрихса и над последним квадратичный функционал, уравнение Эйлера для которого дает обобщенную постановку исходной граничной задачи.

6. Граничные и спектральные задачи для спектрально-нагруженного параболического оператора. В терминах (комплексного) спектрального параметра, являющегося коэффициентом нагруженного слагаемого, которое не подчинено главной части дифференциального оператора, получены описания резольвентного множества и спектра для спектрально-нагруженного параболического оператора. Дана характеристика кратности собственных функций в пространстве ограниченных и непрерывных функций в зависимости от значения модуля спектрального параметра. Для спектрально-нагруженного параболического оператора дано определение сопряженного оператора в терминах соответствующих интегральных операторов, доказана разрешимость соответствующей сопряженной граничной задачи в классах суммируемых функций. Показано, что граничная задача для спектрально-нагруженного параболического оператора является нетеровой. По данному направлению исследований М.И.Рамазанов защитил докторскую диссертацию (научный консультант М.Т.Дженалиев).

М.Т.Дженалиевым опубликовано более 150 научных работ, в том числе, две научные монографии: "К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений". Алматы, 1995. 269с.; "Математическое моделирование оптимальных процессов управления" (соавтор, К.С.Сматов). Алматы, 1997, 145с.

М.Т.Дженалиев активно занимается подготовкой научных кадров. Под его научным руководством защищены 2 докторские и 6 кандидатских диссертаций. С 1980г. по совместительству работает и читает спец.курсы на кафедре теории управления механико-математического факультета КазНУ им.аль-Фараби, а в 2001–2006гг. является профессором кафедры автоматизации и компьютерных наук КБТУ. Руководит научным семинаром "Уравнения математической физики" в Институте математики.

Большое место в его работе занимает научная экспертиза проектов, диссертаций, статей, отчетов и др. Он был членом специализированного совета К 14/А 01.03 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при КазГУ им. аль-Фараби (по специальности "Математическая кибернетика", 1991–1996гг.). В настоящее время, М.Т.Дженалиев — член докторских диссертационных советов при Институте математики МОН РК (Алматы) и при Институте автоматики НАН КР (Бишкек, с 1999г.), член Редколлегии научно-технического журнала "Проблемы автоматики и управления" (Институт автоматики НАН КР, Бишкек, с 2006г.). В разное время (1998–2004гг.) он был членом, зам.председателя и председателем экспертного совета по математике и информатике ВАК РК, членом Президиума ВАК РК. М.Т.Дженалиев — государственный стипендиат РК (1997–1999гг.), обладатель гранта Международного научного фонда Дж.Сороса (1993, 1994гг.). На посту зам.главного редактора "Математического журнала" вносит много труда в его издание. Им созданы стилевые файлы для "Математического журнала", а также реализация возможности использования казахского шрифта для LaTeX-а.

В работе Мувашархана Танабаевича отличает деловое, принципиальное и творческое отношение к своим обязанностям, трудолюбие, профессионализм и высокое чувство ответственности, пользуется заслуженным уважением друзей, коллег и научной общественности.

Редакционная коллегия

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ М.Т.ДЖЕНАЛИЕВА

1. Достаточные условия оптимальности для систем с распределенными параметрами// Сб. *Прикладная механика. Применение математических методов в естествознании.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1979, С.98–104 (соавтор, С.А.Айсагалиев).

2. Достаточные условия оптимальности для уравнения параболического типа// Сб. *Математическое моделирование и оптимальное управление.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1980, С.129–137.

3. Достаточные условия оптимальности одного класса систем с распределенными параметрами// *Кандидатская диссертация.* Алма-Ата, Институт математики и механики АН КазССР. 1981, С.151.

4. Об одной задаче оптимальной стабилизации решения параболического уравения// Сб. *Процессы управление и обработки.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1982, С.74–79.

5. Об одной задаче оптимального управления температурным режимом в химическом реакторе// Сб. *Численные методы решения задач математической физики и оптимизации.* Алма-Ата, Изд.Наука КазССР, 1983, С.99–106.

6. Об одном приближенном методе решения задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами// Сб. *Аналитические и численные методы решения задач математики и механики.* Алма-Ата, Изд.Наука КазССР, 1984, С.42–48 (соавтор, Ж.А.Караев).

7. Об одном алгоритме построения функции Беллмана-Кротова// Сб. *Динамика управляемых систем.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1985, С.80–85.

8. К обоснованию принципа оптимальности Кротова для многомерных вариационных задач// Сб. *Устойчивость и оптимизация управляемых систем.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1986, С.36–42.

9. Об условиях оптимальности для последовательности приближенных решений в задачах оптимального управления// Сб. *Обратные задачи динамики и их приложения.* Алма-Ата, 1986, С.22–26.

10. Начально-краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа// Сб. *Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений.* Караганда, Изд.КарГУ, 1986, С.70–76.

11. Об абсолютном экстремуме для задач оптимального управления в функциональных пространствах// Сб. *Управление динамическими системами.* Алма-Ата, Изд.КазГУ, 1987, С.36–42.

12. О достаточных условиях оптимальности для управляемых уравнений параболического типа// Сб. *Динамика нелинейных процессов.* Всесоюзный семинар (Таллин, 1987). М., Изд. ИПУ АН СССР, 1987, С.104–105.

13. Об абсолютном минимуме для задач управления// *Изв. АН КазССР. Серия физ.-матем.*, 1988, №3, С.14–19.

14. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями// *Дифференциальные уравнения*, 1989, 25, №4, С.641–651.

15. Об одной задаче оптимального управления параболическим уравнением// Сб. *Оптимальное управление процессами с распределенными параметрами.* Алма-Ата, 1989, Изд.КазГУ, С.35–40.

16. О разрешимости краевых задач для линейных нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами// *Дифференциальные уравнения*, 1991, 27, №9, С.1585–1595.

17. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями// *Дифференциальные уравнения*, 1991, 27, №10, С.1825–1827.

18. Краевые задачи и задачи оптимального управления для линейных нагруженных уравнений гиперболического типа// *Дифференциальные уравнения*, 1992, 28, №2, С.232–241.

19. Об одном классе нагруженных эллиптических уравнений// *Дифференциальные уравнения*, 1992, 28, №3, С.522–524.

20. Однородная задача Дирихле для нагруженного эллиптического уравнения 2m-порядка. I// *Изв.АН РК. Сер.физ.-мат.*, 1992, №1, С.35–38.

21. Однородная задача Дирихле для нагруженного эллиптического уравнения 2m-порядка. II// *Изв.АН РК. Сер.физ.-мат.*, 1992, №3, С.24–27.

22. Краевые задачи для нагруженного параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях// *Дифференциальные уравнения*, 1992, 28, №4, С.661–666.

23. Об одном приложении нагруженных параболических уравнений// *Изв.АН РК. Сер. физ.-мат.*, 1992, №5, С.3–7 (соавтор, А.П.Белогуров).

24. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений// *Докторская диссертация.* Алматы, Институт теоретической и прикладной математики. 1993. С.322.

25. On Boundary Value Problems for Loaded Equations// *Proc.Int.Conf.EQUADIFF'91*, Singapore, 1993, Vol.I, P.437–441.

26. Краевые задачи для нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядков// *Докл.НАН РК*, 1993, №3, С.8–14.

27. Краевые задачи для нагруженных эллиптических уравнений// *Докл.НАН РК*, 1993, №4, С.18–22.

28. О краевых задачах для нагруженного эволюционного уравнения нечетного порядка// *Изв.НАН РК. Сер.физ.-мат.*, 1993, №5, С.25–29.

29. О квадратичном функционале к задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка// *Докл.НАН РК*, 1993, №6, С.14–18.

30. Неоднородные граничные задачи для нагруженного эволюционного уравнения нечетного порядка с внутренне-краевыми условиями// *Дифференциальные уравнения*, 1993, 29, №4. С.617–626.

31. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка и нагруженные уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1993, 29, №8, С.1380–1389.

32. К обобщенной разрешимости нагруженного волнового уравнения// *Дифференциальные уравнения*, 1994, 30, №4, С.723–724.

33. О периодических решениях нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядков// *Докл.НАН РК*, 1994, №6, С.3–8.

34. К дифференциальным свойствам решений нагруженных уравнений// *Изв.НАН РК.Сер. физ.-мат.*, 1995, №1, С.55–59.

35. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений первого и второго порядков и их приложения// *Дифференциальные уравнения*, 1995, 31, №1, С.160–162.

36. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений// *Монография.* Алматы, Изд. Компьютерный центр ИТПМ НАН РК. 1995. С.270.

37. О нелокальных граничных задачах для нагруженных дифференциально-операторных уравнений первого порядка// *Дифференциальные уравнения*, 1995, 31, №11, С.1902–1906.

38. О периодических решениях нагруженного фиксированием пространственной переменной уравнения теплопроводности// *Изв.НАН РК*, 1995, №3, С.16–21 (соавторы, А.П.Белогуров, С.Б.Избасарова).

39. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. I// *Дифференциальные уравнения*, 1995, 31, №12, С.2029–2037.

40. Об однозначной разрешимости краевых задач для нагруженных уравнений с производными по времени в граничных условиях// *Докл.МН–АН РК*, 1996, №4, С.3–10.

41. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. II// *Дифференциальные уравнения*, 1996, 32, №4, С.518–522.

42. Об уравнении теплопроводности с интегральными усреднениями.I// *Изв.МН–АН РК. Сер.физ.-мат.*, 1996, №3, С.3–8 (соавторы, С.А.Айсагалиев, М.М.Дженалиева).

43. Об одном обобщении леммы Гронуолла// *Вестник КазГУ*, 1996, №5, С.186–190 (соавтор, С.Б.Избасарова).

44. Об уравнении теплопроводности с интегральными усреднениями.II// *Изв.МН–АН РК. Сер.физ.-мат.*, 1997, №1, С.24–32 (соавторы, С.А.Айсагалиев, М.М.Дженалиева).

45. Математическое моделирование оптимальных процессов// *Монография*, Алматы, Ғылым. 1997. С.144 (соавтор, К.Сматов).

46. Об алгоритме последовательного улучшения// *Вестн.Инж.акад. РК*, 1998, №3, С.147–153 (соавтор, К.Сматов).

47. The loaded differential equations and their applications// *Proc.Int.Conf."EQUADIF'99" (Aug.1–7, 1999, Berlin)*, Berlin, 2000, P.548–551.

48. On the boundary value problems for loaded differential equations// *J.Korean Math.Soc. (Seoul)*, 2000, 37, №6, P.1031–1042.

49. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями// *Дифференциальные уравнения*, 2001, 37, №1, С.48–54.

50. About the initial value problem for loaded nonlinear differential equation of first order// *Proc.Int.Sci. Seminar (Ufa, Sept. 2000)*, Ufa, 2002, P.68–73 (coauthor, M.I.Ramazanov).

51. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями// *Тр.Ин-та мат. НАН Беларуси*, 2001, 10, С.45–49 (соавтор, М.И.Рамазанов).

52. Loaded differential equations// *Abst.Short Comm.Post.Sess. "Int.Congr.Math.–2002"(20–28 Aug. 2002, Beijing)*, Beijing, 2002, P.215 (coauthors, M.M.Amangalieva and M.I.Ramazanov).

53. О нелокальной задаче для эллиптико-гиперболического уравнения// *Докл.АМАН (Нальчик)*, 2003, 6, №3, С.9–13 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов).

54. Об нелокальной задаче для уравнения смешанного типа// *Изв.НАН РК. Сер.физ.-мат.*, 2003, №5, С.9–16 (соавтор, М.И.Рамазанов).

55. Граничные задачи и задачи оптимального управления для нагруженных гиперболических уравнений// *Вест. Тамбовского ун-та*, 2003, 8, вып.3, С.340 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов).

56. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа// *Докл.АМАН (Нальчик)*, 2003, 6, №2, С.35–39 (соавтор, М.И.Рамазанов).

57. О краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2003. Т.3, № 2 (8), С.27–35 (соавтор, М.И.Рамазанов).

58. О граничных задачах для "существенно" нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях.I (одномерный случай)// *Докл.АМАН (Нальчик)*, 2004, 7, №1, С.32–36 (соавтор, М.И.Рамазанов).

59. О задаче Коши для "существенно" нагруженного параболического уравнения// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2004. Т.4, № 3 (13), С.22–26 (соавтор, М.И.Рамазанов).

60. О граничных задачах для "существенно" нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях.II (многомерный случай: круг и шар)// *Докл.АМАН (Нальчик)*, 2004, 7, №1, С.18–23 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов).

61. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2005, №4(18), С.61–67 (М.И.Рамазанов, А.Е.Туймебаева).

62. Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности и граничные задачи// *Неклассические уравнения математической физики*, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2005, С.22–29 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов).

63. Метод Беллмана для одной задачи оптимального управления// *Неклассические уравнения матем.физики*, Труды Института математики им.С.Л.Соболева СО РАН. Новосибирск, 2005, С.93–97 (соавтор, К.Б.Иманбердиев).

64. О гранично-начальной задаче для "существенно" нагруженного параболического уравнения// *Изв. НАН РК. Сер.физ.-мат.*, 2005, №5, С.36–43 (соавтор, М.И.Рамазанов).

65. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности// *Сибирский математический журнал*, 2006, 47, №3, С.527–547 (соавтор, М.И.Рамазанов).

66. Особое интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода. I. Однородный случай// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2006, №1 (19), С.33–46 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов, А.Е.Туймебаева).

67. О развитии математики и информатики в Казахстане. I// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2006, №1(19), С.5–15 (соавторы, М.З.Арсланов, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, В.П.Добрица, А.А.Женсыкбаев, М.И.Рахимбердиев).

68. Особое интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода. II. Неоднородный случай// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2006, №2 (20), С.37–44 (соавторы, М.М.Амангалиева, М.И.Рамазанов, А.Е.Туймебаева).

69. О развитии математики и информатики в Казахстане. II// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2006, №2(20), С.5–13 (соавторы, М.З.Арсланов, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, В.П.Добрица, А.А.Женсыкбаев, М.И.Рахимбердиев).

70. О развитии математики и информатики в Казахстане. III// *Математический журнал*, Институт математики МОН РК, 2006, №3(21), С.5–13 (соавторы, М.З.Арсланов, Г.И.Бижанова, Р.Г.Бияшев, В.П.Добрица, А.А.Женсыкбаев, М.И.Рахимбердиев).

71. Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I// *Дифференциальные уравнения*, 2007, 43, №4, С.498–508 (соавтор, М.И.Рамазанов).

72. Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. II// *Дифференциальные уравнения*, 2007, 43, №6, С.788–794 (соавтор, М.И.Рамазанов).

Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 113—115*

ХРОНИКА

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору Ойнарову Рыскулу, известному специалисту в области функционального анализа и его приложений.

Он родился 26 февраля 1947 года в селе Куль-Арык Казалинского района Кызылординской области. В 1964 году окончил одиннадцатилетнюю школу №19 поселка Аралтуз Аральского района Кызылординской области и в том же году поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета имени С.М.Кирова. Обучаясь в университете, он в течении трех лет получал именную стипендию, присуждаемую за высокие показатели в учебе. Начиная со второго курса Рыскул участвовал в работе научного кружка под руководством профессора В.А.Харасахала и в конце третьего курса написал курсовую работу, в которой изложил свои первые научные идеи. На четвертом курсе он совместно с Д.У.Умбетжановым опубликовал статью о существовании квазипериодического решения нелинейного дифференциального уравнения с малым параметром при производной, в которой использовал идеи курсовой работы.

В 1969 году Р.Ойнаров с отличием заканчил университет, и был направлен в аспирантуру при МГУ им. М.В.Ломоносова, но в связи с призывом в ряды Советской Армии в аспирантуру не поехал. В период с 1969 по 1971 гг. он служил офицером в городе Кушке Туркменской ССР. После службы в армии Р.Ойнаров работал учителем восьмилетней школы №64 г. Аральска Кызылординской области, а с осени 1972 года после переезда в Алма-Ату — ассистентом кафедры математического анализа КазГУ им. С.М.Кирова.

Через год он перешел в Институт математики и механики (ИММ) АН КазССР на должность старшего инженера лаборатории механики горных пород, где под руководством Ж.С.Ержанова занимался моделированием глобальных механических процессов в земной коре. В результате самостоятельных исследований им были опубликованы несколько статей по обратной задаче потенциала, которые привлекли внимание специалистов в области функционального анализа.

В ноябре 1979 года ему было предложено перейти на работу в лабораторию прикладного анализа ИММ АН КазССР. В этой лаборатории он проработал около двадцати лет, пройдя путь от старшего инженера до заведующего лабораторией.

В 1981 году под научным руководством доктора физико-математических наук М.Отелбаева им была защищена кандидатская диссертация на тему: "Непрерывность и липшицевость нелинейных интегральных операторов типа Урысона". В 1994 году Р.Ойнаров защитил докторскую диссертацию на тему: "Весовые оценки интегральных и дифференциальных операторов".

В 1997 году по приглашению ректора Южно-Казахстанского государственного университета, он переехал в г.Шымкент и работал там в должности заведующего кафедрой высшей математики.

С осени 2000 года и по настоящее время Рыскул Ойнаров живет в г.Астане и работает в Евразийском Национальном Университете имени Л.Н.Гумилева в должности заведующего кафедрой прикладной и вычислительной математики.

В течении последних 20 лет Р.Ойнаров руководит исследовательской тематикой в области функционального анализа по государственным научным программам. В настоящее время он является руководителем темы "Весовые функциональные пространства, весовые оценки операторов и характеризация поведения функций и операторов вблизи области сингулярности" в рамках программы фундаментальных исследований "Изучение свойств функциональных пространств, интегральных и дифференциальных операторов". Кроме этого, он руководит исследованиями по теме "Weighted inequalities for differential and integral operators and interpolation of function spaces", входящей в программу "Function spaces and applications to partial differential equations" по международному гранту INTAS.

Наиболее существенные научные результаты Р.Ойнаровым получены в следующих направлениях: свойства нелинейных интегральных операторов типа Урысона в функциональных пространствах; вопросы корректных расширений и сужений замкнутых операторов в банаховых пространствах и их применение к дифференциальным уравнениям; весовые оценки промежуточных производных и теоремы вложения весовых классов; установление критериев дискретности спектров сингулярных дифференциальных операторов; постановка корректных граничных условий в сингулярной части границы для вырождающихся дифференциальных операторов; оценки норм и установление критериев ограниченности, компактности интегральных операторов в весовых пространствах.

К основным его результатам относятся: необходимые и достаточные условия липшицевости нелинейного интегрального оператора Урысона в пространстве суммируемых функций, при этом дана формула для вычисления точного значения константы Липшица; доказано, что многомерный стационарный оператор Шредингера с локально суммируемым и ограниченным снизу потенциалом разделим в пространстве суммируемых функций (этот результат опубликован в 1985 году в докладах АН СССР, через два года был передоказан известным японским математиком Като); совместно с М. Отелбаевым найден критерий дискретности спектра оператора Штурма - Лиувилля, обобщающий известный результат Молчанова; в терминах весов получены необходимые и достаточные условия оценки весовой нормы функции через суммы, произведения весовой нормы ее производной и самой функции, при этом все веса – разные и локально суммируемые, метрики оцениваемой и оценивающей части могут быть разные; для различных классов интегральных операторов получены необходимые и достаточные условия их ограниченности в весовых пространствах; получены точные по порядку оценки норм интегральных операторов из введенного им же класса, включающего в себя все известные операторы дробного интегрирования. Им и его учениками была разработана теория функциональных пространств с мультивесовыми производными и рассмотрены приложения этой теории к сингулярным дифференциальным уравнениям.

По материалам научных исследований Р.Ойнаровым опубликовано более 80 научных работ в международных и республиканских изданиях, в том числе в таких ведущих математических журналах, как "Journal of London Mathematical Society", "Mathematical inequalities and applications", "Труды МИРАН", "Математические заметки", "Дифференциальные уравнения", "Сибирский математический журнал", "Доклады РАН" и др. Результаты этих исследований представлялись на многих международных математических съездах, симпозиумах и конференциях в России, Швейцарии, Греции, Республике Чехия. В 1997 и 2006 годах он получал научные гранты и приглашения Шведской Королевской Академии на проведение совместных научных исследований.

Помимо своей основной научной деятельности Р.Ойнаров принимает активное участие в общественной жизни. Более десяти лет он возглавлял профсоюзный комитет ИММ АН КазССР (ныне Институт математики МОН РК), был членом Республиканского комитета профсоюзов работников науки КазССР.

Р.Ойнаров уделяет большое внимание подготовке научно-педагогических кадров. Под его руководством защищены 2 докторские и 11 кандидатских диссертаций. За достигнутые успехи в области науки в декабре 2005 года Ойнаров Рыскул был награжден нагрудным знаком "За заслуги в развитии науки Республики Казахстан".

Коллеги, друзья и ученики искренне поздравляют Рыскула Ойнарова со знаменательной датой и от всей души желают ему крепкого здоровья, бодрости духа и новых творческих достижений.

Т.Ш.Кальменов, А.А.Женсыкбаев, С.Н.Харин,
И.Т.Пак, М.И.Рахимбердиев, Б.Л.Байдельдинов

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

Akishev G. **On order of $M-$ term approximation of function classes in Lebesgue spaces with mixed norm** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.5–14.

In this paper an order of $M-$ term approximation of Besov's class in Lebesgue space with mixed norm is studied.
References -20.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

Ақышев Ғ. **Функциялар класын аралас мөлшерлі Лебег кеңістігінде $M-$ мүшелі жуықтаудың реті туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.5–14.

Мақалада О.В. Бесов класын аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігінде M- мүшелі жуықтаудың реті анықталған.
Библ. — 20.

УДК: 517.95 2000 MSC: 34A45

Alimagambetova A.Z., Oinarov R. **Oscillation and nonoscillation criteria of semilinear second–order difference equation** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.15–24.

We consider a second–order semilinear difference equation

$$\Delta(r_k\phi(\Delta x_k)) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0,\ k = 0, 1, \ldots,$$

where $\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$, $\phi(x)|x|^{p-2}x$, $p > 1$, and obtain oscillation and nonoscillation conditions in the case, when $c_k \geq 0$, $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$
References —8.

УДК: 517.95 2000 MSC: 34A45

Алимағамбетова А.З., Ойнаров Р. **Жартылай сызықты екінші ретті айрымдық теңдеудің тербелімділігінің және тербелімсіздігінің критерилері** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.15–24.

Жартылай сызықты екінші ретті айрымдық теңдеуі

$$\Delta(r_k\phi(\Delta x_k)) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0,\ k = 0, 1, \ldots,$$

карастырылып, мұндағы $\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$, $\phi(x)|x|^{p-2}x$, $p > 1$, мынадай шарта $c_k \geq 0$, $r_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, оның тербелімді және тербелімсіз болатын жағдайлары алынған. Библ. — 8.

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 34B40

Alimzhanov Y.S., Dauylbayev M.K. **Cauchy problem with initial jumps of any order for linear integral differential equations** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.25–30.

In this work linear integral differential equations with initial conditions at the right point of the given segment are researched when given integral members change asymptotic behaviors of solutions of differential equations qualitatively. Integral formulas, estimations of solutions of given problems and estimations of difference between solutions of singular perturbed and changed non-perturbed problem are given.

References — 5.

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 34B40

Әлімжанов Е.С., Дауылбаев М.Қ. **Сызықты интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін кез-келген ретті бастапқы секірісті Коши есебі**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.25–30.

Жұмыста бастапқы шарттары берілген кесіндінің оң жақ шетінде қойылған, интегралдық мүшелері сәйкес дифференциалдық теңдеу шешімінің асимптотикалық сипатын сапалы түрде өзгертетін, сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды дифференциалдық теңдеу қарастырылған. Есеп шешімінің интегралдық формуласы, оның бағалауы және сингулярлы ауытқыған есеп пен өзгертілген ауытқымаған есеп шешімдерінің арасындағы айырымның бағалауы берілген.

Библ. — 5.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C64

Baizhanov B.S. **O-minimal expansions and unary functions**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.31 – 35.

A criteria of essentiality of an o-minimal expansion in terms of unary functions is proved.

References — 10.

УДК: 510.67 2000 MSC: 03C64

Байжанов Б.С. **O-минимальді толықтырылумар және бір орынды функциялар**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.31–35.

O-минимальді толықтырылудың бір орыды фуцкция терминінде болатындыны туралы критерий дәлелденді.

Библ. — 10.

УДК: 517.51 2000 MSC: 46B70, 46M35

Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. **Method of multi parametric interpolation for anisotropic spaces and interpolation of anisotropic Lebesgue spaces**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.36 – 48.

In this article we introduce a method of multi parametric interpolation for anisotropic spaces and study interpolation properties of anisotropic Lebesgue spaces. We show that multi parametric anisotropic of Lebesgue space is a result of interpolation of Lebesgue spaces with mixed metric according a method introduced.

References — 14.

УДК: 517.51 2000 MSC: 46B70, 46M35

Б е к м а ғ а н б е т о в Қ . А . , Н ұ р с ұ л т а н о в Е . Д . **Анизотроптық кеңістіктер үшін көппараметрлік интерполяция әдісі және анизотроптық Лебег кеңістіктерін интерполяциалау** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.36 – 48.

Мақалада анизотроптық кеңістіктер үшін көппараметрлік интерполяция әдісі еңгізілген, анизотроптық Лебег кеңістіктерінің интерполяциалық қасиеттері зерттелген. Аралас метрикалық Лебег кеңістіктерін еңгізілген әдіске сәйкес интерполяциалау нәтижесі көппараметрлік анизотроптық Лебег кеңістігі болатындығы көрсетілген.

Библ. — 14.

УДК: 512.554.31 2000 MSC: 17B50, 17B56

I b r a e v S h . S h . , T u r e t a e v a G . A . **Deformations of classical Lie algebras in characteristic 2**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.49 – 54.

Local deformation groups of classical Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic 2 are described.

References — 13.

УДК: 512.554.31 2000 MSC: 17B50, 17B56

И б р а е в Ш . Ш . , Т ө р е т а е в а Г . А . **Сипаттамасы 2 классикалық Ли алгебаларының деформациялары** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.49 – 54.

Жұмыста сипаттамасы 2-ге тең алгебралық тұйық өріс үстіндегі классикалық Ли алгебраларының локальді деформация группалары есептелді.

Библ. — 13.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

K a r i m o v a L . M . , K r u g l u n O . A . **Application of multifractal formalism for a diagnostics of dynamics in the photospheric Solar magnetic field.** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P. 55–66.

In this article we discuss existence problem of multifractal characteristics in the structure of Solar magnetic field basing on the high resolution magnetogramms. The basic concepts of the canonical and microcanonical multifractal formalism are stated and version adapted for digital images are described. The estimations of multifractal spectra for magnetogramms obtained with the help of Choquet capacities are given.

References — 30.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

К а р и м о в а Л . М . , К р у г л у н О . А . **Күннің фотосферасың магниттік динамикасын диагностикалау үшін мультифракталдық формализмді қолдану** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.55–66.

Мақалада жоғары анықтылық мүмкіндігі бар магнитограммалар негізінде Күннің магнитті өрісі құрылымындағы мультифракталдық сипаттауыштардаң бар болу мәселесі зерттеледі. Біз канондық және микроканондық мультифракталдық формализмнің басты ұғымдарын келтіреміз және олардың сандық кескіндер үшін бейімделген нұсқаларын сипаттаймыз. Шоке сыйымдылықтарының көмегімен асынған магнитограммалар үшін мультифракталдық спектрдің бағалаулары келтіріледі.

Библ. — 30.

УДК: 517.958:[536.2+539.219.3] 2000 MSC: 42A16

Kulakhmetova A.T. **Influence of filament parameters on Pre-Areing stages at the contact opening.** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P. 67–73.

Stephen problem in composite, regions which describes non stationary processes in electric contacts at pre-arcing stage.

References — 7.

УДК: 517.958:[536.2+539.219.3] 2000 MSC: 42A16

Кулахметова А.Т. **Филомента параметрлерінің түйісулерді ажыратудың доға алдылық кезеңдеріне әсері** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.67 – 73.

Эдектрлік түйісулердегі стационар емес үрдістерді суреттейтін құрамды облыстарда стефан түріндегі есеп шешіледі.

Библ. —7.

УДК: 517.927.25 2000 MSC: 34B05

Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. **On consept of regularity of boundary conditions for second order differential equation with divergent argument**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P. 74 – 80.

In this paper a consept of regularity of boundary conditions is defined and regularity condition of boundary conditions for second order differential equation with divergent argument is obtained.

References — 5.

УДК: 517.927.25 2000 MSC: 34B05

Садыбеков М.А., Сәрсенбі Ә.М. **Ауытқулы аргументті екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік шарттардың регулярлық тусінігі туралы**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.74–80.

Жұмыста ауытқулы аргументті екінші ретті дифференциалдық теңдеу үшін шеттік шарттардың регулярлық тусінігі анықтолды және шеттік шапттардың регуляреығының талаптары тағайыдалды. Енгізілген анықтама мағынасында регуларлы болмаса бейрегулярлы болатын шеттік шапттардың мысалдары келтірілі.

Библ. —5.

УДК: 519.62: 517.982 2000 MSC: 35J05, 35J25

Suleimenov Z.I. **Application of integral forms for construction of Green function of Laplace equation in non standard areas.**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.81–85.

Explicit form of Green function of Laplace equation has been get in unconsidered before non standard areas and mixed boundary conditions.

References — 4.

УДК: 519.62: 517.982 2000 MSC: 35J05, 35J25

С ү л е й м е н о в З . И . **Стандартты емес облыстар үшін Лаплас теңдеуінің Грин функциясын құруға интегралдық түрлендірулерді қолдану** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.81–85.

Бұрын қарастырылмаған стандартты емес бірқатар облыстар және аралас шекаралық шарттар үшін Лаплас теңдеуінің Грин функциясының айқын өрнегі алынды.
Библ. — 4.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 45D05

T u i m e b a y e v a A . E . **On one generalized spectral problem for heat conduction operator**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.86 – 89.
Some questions of solvability of generalized spectral problem for heat conduction operator are considered. Eigenvalues and corresponding them eigenfunctions are found.
References — 8.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 45D05

Т ү й м е б а е в а А . Е . **Жылуөткізгіштік оператор үшін жалпыланған спектралды бір есеп туралы**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.86 – 89.
Жылуөткізгіштік оператор үшін жалпыланған спектралды есептің шешімділігі қарастырылған. Меншікті мәндер және оларға сәйкес меншікті функциялар табылған.
Библ. —8.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

T u s s u p o v J . A . **Nilpotent Group Scott Family** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 1 (23). P.90–100.
In this paper is constructed metabel group which does not have a Scott family of finitary formulas
References — 13.

УДК: 523.98, 530.182 2000 MSC: 37N30

Т у с у п о в Д . А . **Нильпотент групасы және Скотт тобы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 1 (23). Б.90-100.
P.Cholak, R.A. Shore және R. Solomon қызық касиеттері бар санамалы жиындардан тұратын топ құрып, санама стабильдік граф бар екенін дәлелдеді. Ол графтың шекті формулалардан тұратын Скотт тобы жоқ екенін көрсеткен. Бұл мақаланың негізгі натижесі: Шекті формулалардан тұратын Скотт тобы жоқ санама стабильдік метаабел группасы бар екені дәлелденген.
Библ. —13.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 1 (23) 2007

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304
тел.: 8(3272)-91-20-03, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 17.05.2007г.
Тираж 300 экз. Объем 120 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru