

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

2006 том 6 № 4 (22)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 4 (22) 2006

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев, В.П.Добрица,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2006г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 6, № 4 (22), 2006

О порядках M - членного приближения классов периодических функций <i>Г. Акишев</i>	5
Об интегрировании линейных многозначных отображений в терминах h -выпуклости <i>С.Н. Амиргалиева</i>	12
О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием <i>А. Т. Асанова</i>	17
Восстановление оператора свертки в пространствах Никольского - Бесова по информации о спектре <i>Ш. А. Балгимбаева</i>	26
Функциональные пространства переменной смешанной гладкости. I <i>Д. Б. Базарханов</i>	32
Метод параметризации исследования линейной краевой задачи и алгоритмы нахождения ее решения <i>Д. С. Джумабаев, К. Ж. Назарова</i>	41
Погрешность сплайн-интерполяции на хаотической сетке для функций из класса, порожденного ядром Пеано <i>Е.Н. Иванова</i>	49
Напряженно - деформированное состояние упругой среды при действии сосредоточенных сверхзвуковых нагрузок <i>Г. К. Кайшибаева</i>	58
Термокапиллярная модель эрозии в электрических контактах <i>Ш. А. Кулахметова</i>	67
Гравитационная неустойчивость неньютоновской вязкопластической среды <i>Н. И. Мартынов, А. Г. Танирберген</i>	72
L_p - оценки одного класса вырождающихся эллиптических уравнений <i>М.Б. Муратбеков, Г.К. Рахимова</i>	81
О некоторых задачах теории приближений <i>Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова</i>	87
Особенности решения начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений метода сферических гармоник в p_1 -приближении <i>А. Сакабеков, Е. Аужани</i>	97

Показатели Ляпунова линейного дифференциального уравнения второго порядка как функции линейного параметра

А.О. Султанбекова 103

Начально-краевая задача для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью

А.Б. Тунгатаров, Г.К. Рзаева 108

Об одном алгоритме различения сигналов для гетерогенных сетей компьютерной телефонии

Ж.Ш. Шаршеналиев, Д.В. Янко 111

Рефераты 117

УДК 518.9

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕРМИНАХ H -ВЫПУКЛОСТИ

С.Н. АМИРГАЛИЕВА

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы
Алматы, пр. Толе-Би, 59 s.amirgalieva@kbtu.kz

В статье рассматриваются интегрирование линейных многозначных отображений с использованием различных свойств H -выпуклых множеств.

В евклидовом пространстве $X = E^n$ рассмотрим подмножество H единичной сферы $S^{n-1} = \{x \in E^n : \|x\| = 1\}$. Множество называется H -выпуклым, если оно представимо в виде пересечения полупространств вида $\{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq c(x^*)\}$, где $x^* \in H$. Понятие H -выпуклости широко используется в дифференциальных играх [1,2]. Первоначально оно было введено для решения различных задач комбинаторной геометрии [3].

Докажем некоторые леммы, используемые в дальнейшем.

Пусть H – произвольное подмножество единичных векторов из E^n , $A : E^n \rightarrow E^n$ – линейный оператор, $\text{con}H$ – выпуклая коническая оболочка (пересечение выпуклых конусов, содержащих H).

Лемма 1. Пусть оператор A имеет обратный и для любого $x^* \in H$ выполняется $A^*x^* \in \text{con}H$. Тогда, если M – H -выпуклое множество, то и $A^{-1}M$ – H -выпуклое множество.

Доказательство. Множество M имеет вид

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq c(x^*)\}, \quad (1)$$

где $c(x^*)$ может принимать значение $+\infty$.

Отсюда

$$A^{-1}M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle Ax, x^* \rangle \leq c(x^*)\} = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, A^*x^* \rangle \leq c(x^*)\}.$$

Из условия леммы $\frac{A^*x^*}{\|A^*x^*\|} \in H$. Поэтому

$$A^{-1}M = \bigcap_{x^* \in H} \left\{ x \in E^n : \left\langle x, \frac{A^*x^*}{\|A^*x^*\|} \right\rangle \leq \frac{c(x^*)}{\|A^*x^*\|} \right\}.$$

Keywords: *Differential game, H-convex set, convexity, return operator, compact set*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© С.Н. Амиргалиева, 2006.

Таким образом $A^{-1}M - H$ – выпуклое множество. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть оператор A имеет обратный и для всех $x^* \in H$ выполняется $A^*x^* = \lambda(x^*)x^*$, где $\lambda(x^*)$ – число, причем, если $x^* \in H$, то $(-x^*) \in H$. Тогда, если $M - H$ – выпуклое множество, то и $AM - H$ – выпукло.

Доказательство. Пусть M имеет вид (1), и для определенности $\lambda(x^*) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} AM &= \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle A^{-1}x, x^* \rangle \leq c(x^*)\} = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, (A^{-1})^*x^* \rangle \leq c(x^*)\} = \\ &= \bigcap_{x^* \in H} \left\{x \in E^n : \frac{1}{\lambda(x^*)} \langle x, x^* \rangle \leq c(x^*)\right\} = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq \lambda(x^*)c(x^*)\}, \end{aligned}$$

т.е. $AM - H$ – выпукло.

Если $\lambda(x^*) < 0$, то $AM = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, -x^* \rangle \leq -\lambda(x^*)c(x^*)\}$.

Лемма доказана.

Замечание. Условия леммы 1 вытекают из условий леммы 2.

Рассмотрим семейство операторов $\{A(t), t \in [0, \theta]\}$, где $A(t)$ – линейный оператор действующий в пространстве E^n , ограниченное и измеримое, где θ – фиксированное число, определено на интервале $[0, 1]$ ($\theta = 1$) и удовлетворяет условию [4]:

$$\int_0^1 A(t)dt = E. \tag{2}$$

Первое условие ($\theta = 1$) не является существенным, его можно убрать заменой переменной $t = \theta\tau, \tau \in [0, 1]$. Условие (2) или более общее условие, выражающееся в существовании обратного оператора к $\int_0^1 A(t)dt$, является более существенным. Рассмотрим случай, когда это условие может не выполняться.

Под H будем понимать множество единичных векторов $x^* \in E^n$, возможно не всех, для которых выполняются условия:

- а) $A^*(t)x^* = \lambda(t|x^*)x^*$ для любого $t \in [0, \theta]$, где $\lambda(t|x^*)$ – число;
- б) при фиксированном x^* числовая функция $\lambda(\cdot|x^*)$ не меняет знак на интервале $[0, \theta]$.

Обозначим $A = \int_0^\theta A(t)dt$.

Отметим, что для любого x^*

$$A^*x^* = \int_0^\theta \lambda(t|x^*)dt x^*.$$

Теорема 1. Пусть $M - H$ – выпуклое множество, $x(s), s \in [0, \theta]$, – измеримая и ограниченная функция со значениями в E^n . Тогда, если для каждого $s \in [0, \theta]$ выполняется включение

$$Ax(s) \in M, \tag{3}$$

то

$$\int_0^\theta A(t)dt \in M. \tag{4}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\theta = 1$. Рассмотрим случай, когда существует обратный оператор A^{-1} . Из (3) следует, что для всех $s \in [0, \theta]$

$$x(s) \in A^{-1}M.$$

Из леммы 2 и замечания следует, что множество $AM^{-1}H$ – выпукло. Из [4] и определения оператора A :

$$\int_0^1 A^{-1}A(t)dt = E. \quad (5)$$

Вытекает

$$\int_0^1 A^{-1}A(t)x(t)dt \in A^{-1}M.$$

Отсюда следует включение (4).

Рассмотрим случай, когда A может не иметь обратного оператора. Обозначим $A_\varepsilon(t) = a(t) + \varepsilon E$, $A_\varepsilon = \int_0^1 A_\varepsilon(t)dt = A + \varepsilon E$. Для достаточно малых положительных ε оператор A_ε имеет обратный. Поскольку $Ax(s) \in M$, то $A_\varepsilon x(s) = Ax(s) + \varepsilon x(s) \in M + \varepsilon DS$, где D – константа такая, что $\|x(s)\| \leq D$ для $s \in [0, 1]$. Предположим, что M имеет вид (1). Тогда $A_\varepsilon x(s) \in M + \varepsilon DS \subset M_\varepsilon$, где $M_\varepsilon = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n : \langle x, x^* \rangle \leq c(x^*) + \varepsilon D\}$.

Из первой части доказательства следует, что

$$\int_0^1 A_\varepsilon x(t)dt \in M_\varepsilon.$$

Отсюда поскольку $\left\| \int_0^1 x(t)dt \right\| \leq D$, то

$$\int_0^1 A(t)x(t)dt \in M_\varepsilon - \varepsilon \int_0^1 x(t)dt \subset M_\varepsilon + \varepsilon DS \subset M_{2\varepsilon}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем включение (4). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1; $0 \in M$ и $\tau \in [0, \theta]$ – произвольное фиксированное число. Тогда

$$\int_0^\tau A(t)x(t)dt \in M.$$

Доказательство. Введем функцию

$$x_1(s) = \begin{cases} x(s), & s \in [0, \tau], \\ 0, & s \in (\tau, \theta]. \end{cases}$$

Так как $0 \in M$, что $Ax_1(s) \in M$ для $s \in [0, \theta]$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что

$$\int_0^\tau A(t)x(t)dt = \int_0^\theta A(t)x_1(t)dt \in M.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1,2 вытекают следствия 1 и 2.

Следствие 1. Пусть $M - H$ – выпуклое множество и для множества $W \subset E^n$ выполняется $AW \subset M$.

Тогда

$$\int_0^\theta A(t)W dt \subset M.$$

Следствие 2. Пусть выполняются условия следствия 1, $0 \in M$. Тогда для любого $\tau \in [0, \theta]$

$$\int_0^\tau A(t)W dt \subset M.$$

Из леммы 2 и следствия 1 вытекает

Следствие 3. Если $M - H$ – выпуклое множество и оператор A имеет обратный, то

$$\int_0^\theta A(t)M dt = AM. \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть $M - H$ – выпуклое, компактное множество. Тогда выполняется (6).

Доказательство. Положим $B_\varepsilon = \varepsilon A + \varepsilon^2 E$. Векторы $x^* \in H$ являются собственными векторами оператора A^* , а значит, и оператора B_ε^* . Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ соответствующие собственные числа оператора B_ε^* имеют тот же знак, что и собственные числа оператора A^* , а значит, и операторов $A^*(t)$. (Считаем, что ноль имеет одинаковый знак с любым числом.)

Пусть $m \in M$. Тогда поскольку $0 \in M - m$, то

$$\int_0^\theta A(t)M dt = \int_0^\theta A(t)(M - m) dt + Am \subset \int_0^\theta A(t)(M - m) dt + B_\varepsilon(M - m) + Am.$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $A + B_\varepsilon$ имеет обратный. Отсюда и из следствия 2

$$\int_0^\theta A(t)(M - m) dt + B_\varepsilon(M - m) = (A + B_\varepsilon)(M - m).$$

В силу произвольности ε и компактности M получаем

$$\int_0^\theta A(t)M dt \subset A(M - m) + Am = AM.$$

Обратное включение очевидно. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Остапенко В.В. // Обозрение прикл. и промышл. математики. 1995. № 1. С. 43–48

2. Остапенко В.В., Остапенко Е.В., Амиргалиева С.Н. // Наукові вісті 2003. № 4. С. 140–144.

3. Болтянский В.У., Солтан П.С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. Кишинев, 1978. С. 9

4. Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В. Выпуклый анализ и дифференциальные игры. Алматы, 2005.

Поступила в редакцию 13.07.2006г.

УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Исследуется краевая задача для систем гиперболических уравнений второго порядка с нелокальным интегральным условием. На основе метода введения функциональных параметров установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и предложены алгоритмы его нахождения.

Оценка современного состояния качественной теории дифференциальных уравнений показывает, что особый класс задач в математической физике занимают нелокальные краевые задачи для уравнений в частных производных. Неуклонно возрастающий интерес к ним связан с тем обстоятельством, что нелокальные задачи появляются при исследовании различных процессов естествознания и техники. Важное место в теории нелокальных краевых задач занимают задачи с нелокальными интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия могут возникать в том случае, когда границы области протекания реального физического процесса недоступны для непосредственных измерений, а дополнительная информация об изучаемом явлении может быть получена в виде некоторых средних значений искомого решения. Тогда при математическом моделировании такую информацию удобно представить в виде интегралов от искомого решения. К задачам с нелокальными интегральными условиями также приводит математическое моделирование процессов, происходящих в турбулентной плазме, влагопереноса в капиллярно-пористой среде, при изучении теплопроводности, диффузионных процессов, задач математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

В настоящей работе изучаются вопросы существования, единственности классического решения краевой задачи с интегральным условием для системы гиперболических уравнений со смешанной производной.

На основе метода введения функциональных параметров устанавливаются коэффициентные достаточные условия классической разрешимости исследуемой задачи и предлагаются алгоритмы отыскания ее решения.

Keywords: *system of hyperbolic equations, boundary value problem, integral condition, method of functional parameter' introduction*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

© А. Т. Асанова, 2006.

В области $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с нелокальным интегральным условием

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x), \quad (1)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\int_0^T \left[P_2(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} + P_1(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} + P_0(\tau, x)u(\tau, x) \right] d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $P_2(t, x)$, $P_1(t, x)$, $P_0(t, x)$, n - вектор-функция $f(t, x)$ являются непрерывными в $\bar{\Omega}$, n - вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, n - вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, \omega]$,

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1, n} |u_i(t, x)|, \quad \|A(t, x)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|.$$

Пусть $C(J, R^n)$ – множество непрерывных на J ($J \subset R^1$ или $J \subset R^2$) функций $u : J \rightarrow R^n$. Функция $u(t, x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t, x) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Для решения задачи и нахождения классического решения применяется метод введения функциональных параметров [1], являющийся обобщением метода параметризации [2] на гиперболические уравнения с двумя независимыми переменными. Методом введения функциональных параметров были исследованы нелокальные краевые задачи [1, 3–8] для систем гиперболических уравнений второго порядка с данными на характеристиках в прямоугольной области. Для них установлены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения в терминах коэффициентов. Как видно из интегрального условия (3), подынтегральная функция является линейной комбинацией искомой функции и ее производных первого порядка. Некоторые типы задач с интегральным условием для гиперболических уравнений рассмотрены в работе [9], где для установления обобщенной разрешимости исследуемой задачи применяется метод Римана. Метод введения функциональных параметров позволяет наряду с установлением однозначной разрешимости задачи (1)–(3) предложить алгоритм нахождения ее решения без построения матрицы Римана. При этом от коэффициентов системы требуется только непрерывность на $\bar{\Omega}$, что дает возможность расширить класс разрешимых краевых задач для систем гиперболических уравнений.

Схема метода в случае отсутствия разбиения области. Через $\lambda(x)$ обозначим значение функции $u(t, x)$ при $t = 0$ и осуществим замену $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \lambda(x)$ в задаче (1)–(3). Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестной функцией $\lambda(x)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial t} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + C(t, x)\tilde{u} + f(t, x) + A(t, x)\lambda'(x) + C(t, x)\lambda(x), \quad (4)$$

$$\tilde{u}(t, 0) + \lambda(0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (6)$$

$$\int_0^T \left[P_2(\tau, x) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial x} + P_1(\tau, x) \frac{\partial \tilde{u}(\tau, x)}{\partial \tau} + P_0(\tau, x)\tilde{u}(\tau, x) \right] d\tau +$$

$$+ \int_0^T P_2(\tau, x) d\tau \cdot \lambda'(x) + \int_0^T P_0(\tau, x) d\tau \cdot \lambda(x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (7)$$

Задачи (4)–(7) и (1)–(3) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t, x)$ является решением задачи (1)–(3), то пара $(\lambda(x) = u(0, x), \tilde{u}(t, x) = u(t, x) - u(0, x))$ будет решением задачи (4)–(7), и наоборот, если $(\lambda(x), \tilde{u}(t, x))$, – решение задачи (4)–(7), то функция $\lambda(x) + \tilde{u}(t, x)$ будет решением задачи (1)–(3). Из (5) и (6) следует, что

$$\lambda(0) = \psi(0). \quad (8)$$

Таким образом, при фиксированных $\lambda'(x)$, $\lambda(x)$ получаем задачу Гурса на прямоугольнике $\bar{\Omega}$ с условиями (6) и

$$\tilde{u}(t, 0) = \psi(t) - \psi(0), \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

А соотношение (7) с условием (8) позволяют определить $\lambda'(x)$, $\lambda(x)$ при фиксированных значениях $\tilde{u}(t, x)$ и его производных.

Пусть $\tilde{v}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x}$, $\tilde{w}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}$, тогда из (6), (9) получаем $\tilde{v}(0, x) = 0$, $\tilde{w}(t, 0) = \dot{\psi}(t)$. Известно, что при фиксированных $\lambda'(x)$, $\lambda(x)$ задача Гурса на $\bar{\Omega}$ эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x) = \int_0^t [A(\tau, x)\tilde{v}(\tau, x) + B(\tau, x)\tilde{w}(\tau, x) + C(\tau, x)\tilde{u}(\tau, x) + \\ + f(\tau, x) + A(\tau, x)\lambda'(x) + C(\tau, x)\lambda(x)] d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t, x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x [A(t, \xi)\tilde{v}(t, \xi) + B(t, \xi)\tilde{w}(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{u}(t, \xi) + \\ + f(t, \xi) + A(t, \xi)\lambda'(\xi) + C(t, \xi)\lambda(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) = \psi(t) - \psi(0) + \int_0^t d\tau \int_0^x [A(\tau, \xi)\tilde{v}(\tau, \xi) + B(\tau, \xi)\tilde{w}(\tau, \xi) + C(\tau, \xi)\tilde{u}(\tau, \xi) + \\ + f(\tau, \xi) + A(\tau, \xi)\lambda'(\xi) + C(\tau, \xi)\lambda(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Вместо $\tilde{v}(\tau, x)$ подставим соответствующую правую часть (10) и, повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x) = \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) \tilde{v}(\tau_\nu, \xi) d\tau_\nu \dots d\tau_1 + \\ + \int_0^t [B(\tau_1, x)\tilde{w}(\tau_1, x) + C(\tau_1, x)\tilde{u}(\tau_1, x)] d\tau_1 + \dots + \\ + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} [B(\tau_\nu, x)\tilde{w}(\tau_\nu, x) + C(\tau_\nu, x)\tilde{u}(\tau_\nu, x)] d\tau_\nu \dots d\tau_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t f(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1 + \\
& + \left[\int_0^t C(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} C(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \lambda(x) + \\
& + \left[\int_0^t A(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \lambda'(x). \tag{13}
\end{aligned}$$

Введем обозначения
$$D_\nu(t, x) = \int_0^t A(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$\begin{aligned}
H_\nu(t, x, \tilde{w}, \tilde{u}) &= \int_0^t \left[B(\tau_1, x) \tilde{w}(\tau_1, x) + C(\tau_1, x) \tilde{u}(\tau_1, x) \right] d\tau_1 + \dots + \\
& + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} \left[B(\tau_\nu, x) \tilde{w}(\tau_\nu, x) + C(\tau_\nu, x) \tilde{u}(\tau_\nu, x) \right] d\tau_\nu \dots d\tau_1,
\end{aligned}$$

$$G_\nu(t, x, \tilde{v}) = \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) \tilde{v}(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$F_\nu(t, x) = \int_0^t f(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$E_\nu(t, x) = \int_0^t C(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_0^t A(\tau_1, x) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_0^{\tau_{\nu-1}} C(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1.$$

Подставляя соответствующее значение $\tilde{v}(t, x)$ из правой части (13) при $t = \tau$ в (7) и учитывая обозначения, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной

$$\begin{aligned}
Q_\nu(T, x) \lambda'(x) &= - \int_0^T [P_2(\tau, x) E_\nu(\tau, x) + P_0(\tau, x)] d\tau \cdot \lambda(x) - \int_0^T P_2(\tau, x) F_\nu(\tau, x) d\tau + \varphi(x) - \\
& - \int_0^T P_2(\tau, x) G_\nu(\tau, x, \tilde{v}) d\tau - \int_0^T [P_2(\tau, x) H_\nu(\tau, x, \tilde{w}, \tilde{u}) + P_1(\tau, x) \tilde{w}(\tau, x) + P_0(\tau, x) \tilde{u}(\tau, x)] d\tau, \quad x \in [0, \omega], \tag{14}
\end{aligned}$$

где $Q_\nu(T, x) = \int_0^T P_2(\tau, x) [D_\nu(\tau, x) + I] d\tau$, I - единичная $(n \times n)$ - матрица.

Соотношения (10)–(12) и (14) с условием (8) позволяют найти решение задачи (1)–(3) в $\bar{\Omega}$.

Введение одного функционального параметра разбивает на два этапа процесс нахождения неизвестных функций:

- 1) нахождение параметров $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$ из соотношений (14) с условием (8).
- 2) нахождение неизвестных функций $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$ из системы интегральных уравнений (10)–(12).

Если известны функции $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$, то, решая систему интегральных уравнений (10)–(12), найдем функции $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$ и, суммируя $\lambda(x) + \tilde{u}(t, x)$ получим решение исходной задачи. Если известны функции $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$, то, решая уравнение (14) при условии (8), найдем $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$ и, снова суммируя $\lambda(x) + \tilde{u}(t, x)$, найдем решение задачи (1)–(3).

Так как неизвестными являются как функции $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$, так и функции $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x)$, применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (10)–(12), (14) с условием (8) находится как пределы последовательностей $\{\lambda^{(k)}(x), \lambda^{(k)'}(x), \tilde{u}^{(k)}(t, x), \tilde{v}^{(k)}(t, x), \tilde{w}^{(k)}(t, x)\}$, определяемых по следующему алгоритму.

Шаг 0. Предполагая в правой части (14), что $\lambda(x) = \psi(0)$, $\tilde{u}(t, x) = \psi(t) - \psi(0)$, $\tilde{w}(t, x) = \dot{\psi}(t)$, $\tilde{v}(t, x) = 0$ из уравнения (14) найдем $\lambda^{(0)'}(x)$. Используя условия (8), находим функцию $\lambda^{(0)}(x)$: $\lambda^{(0)}(x) = \psi(0) + \int_0^x \lambda^{(0)' }(\xi) d\xi$. Из системы интегральных уравнений (10)–(12), где $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\lambda'(x) = \lambda^{(0)' }(\xi)$, определим функции $\tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$.

Шаг 1. Из уравнения (14), где в правой части $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(0)}(t, x)$, найдем $\lambda^{(1)' }(\xi)$. Вновь используя условия (8), находим $\lambda^{(1)}(x) = \psi(0) + \int_0^x \lambda^{(1)' }(\xi) d\xi$ и из систем интегральных уравнений (10)–(12), где $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $\lambda'(x) = \lambda^{(1)' }(\xi)$, определим функции $\tilde{u}^{(1)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(1)}(t, x)$, $\tilde{v}^{(1)}(t, x)$. И т.д.

Следующее утверждение обеспечивает осуществимость и сходимости предложенного алгоритма, а также существование единственного классического решения задачи (1)–(3).

Т е о р е м а 1. Пусть при некотором ν , $\nu = 1, 2, \dots$, $(n \times n)$ - матрица $Q_\nu(T, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства

$$a) \quad \| [Q_\nu(T, x)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(T, x),$$

$$b) \quad q(T, x, \nu) = \gamma_\nu(T, x) \cdot T\beta(x) \cdot \left[e^{\alpha(x)T} - 1 - \alpha(x)T - \dots - \frac{1}{\nu!} [\alpha(x)T]^\nu \right] \leq \delta < 1,$$

где $\gamma_\nu(T, x)$ - положительная, непрерывная по $x \in [0, \omega]$ функция, $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(t, x)\|$, $\beta(x) = \max_{t \in [0, T]} \|P_2(t, x)\|$, $\delta = const$.

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3).

Схема метода в случае разбиения области. Возьмем шаг $h > 0$: $Nh = T$ и произведем разбиение: $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh]$, $N \geq 2$. При этом область Ω разбивается на N частей. Через $u_r(t, x)$ обозначим сужение функции $u(t, x)$ на $[(r-1)h, rh] \times [0, \omega]$, $r = 1, 2, \dots, N$. От задачи (1)–(3) перейдем к краевой задаче с интегральными условиями

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial t} = A(t, x) \frac{\partial u_r}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u_r}{\partial t} + C(t, x) u_r + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega_r = [(r-1)h, rh] \times [0, \omega], \quad (15)$$

$$u_r(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} \left[P_2(\tau, x) \frac{\partial u_i(\tau, x)}{\partial x} + P_1(\tau, x) \frac{\partial u_i(\tau, x)}{\partial \tau} + P_0(\tau, x) u_i(\tau, x) \right] d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (17)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} \frac{\partial u_s(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{s+1}(sh, x)}{\partial x}, \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (18)$$

Здесь соотношения (18) являются условиями склеивания производных по x решений во внутренних линиях разбиения области Ω .

Решением задачи (15)–(18) является система функций $u([t], x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_N(t, x))'$, где каждая функция $u_r(t, x)$, имеет непрерывные частные производные первого порядка, смешанного второго порядка и ограничена на своей области определения Ω_r вместе с производными (в начальных отрезках определения $t = (r-1)h$ функция $u_r(t, x)$ имеет правосторонние частные производные $\frac{\partial u_r(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u_r(t, x)}{\partial x \partial t}$ и удовлетворяет системе (15) при всех $(t, x) \in \Omega_r$).

Из непрерывности и ограниченности функции $u_r(t, x)$ вместе с производными на Ω_r , $r = \overline{1, N}$, следует существование левосторонних пределов: $\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t, x)$, $\lim_{t \rightarrow rh-0} \frac{\partial u_r(t, x)}{\partial x}$, $\lim_{t \rightarrow rh-0} \frac{\partial u_r(t, x)}{\partial t}$, значения $\lim_{t \rightarrow sh-0} \frac{\partial u_s(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{s+1}(sh, x)}{\partial x}$, $s = \overline{1, N-1}$, удовлетворяют соотношениям (18).

Если $u^*(t, x)$ – решение задачи (1)–(3), то система его сужений $u^*([t], x) = (u_1^*(t, x), u_2^*(t, x), \dots, u_N^*(t, x))'$ является решением краевой задачи с интегральными условиями (15)–(18). И наоборот, если система вектор - функций $u^*([t], x) = (u_1^*(t, x), u_2^*(t, x), \dots, u_N^*(t, x))'$ – решение задачи (15)–(18), то функция $u^*(t, x)$, получаемая склеиванием систем функций, будет решением задачи (1)–(3).

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значения функции $u_r(t, x)$ при $t = (r-1)h$ и осуществим замену $\tilde{u}_r(t, x) = u_r(t, x) - \lambda_r(x)$, $r = 1, 2, \dots, N$, в задаче (15)–(18). Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_r(x)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial x \partial t} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}_r + f(t, x) + A(t, x) \lambda_r'(x) + C(t, x) \lambda_r(x), \quad (t, x) \in \Omega_r, \quad (19)$$

$$\tilde{u}_r(t, 0) + \lambda_r(0) = \psi(t), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$\tilde{u}_r((r-1)h, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r = \overline{1, N}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} \left[P_2(\tau, x) \frac{\partial \tilde{u}_i(\tau, x)}{\partial x} + P_1(\tau, x) \frac{\partial \tilde{u}_i(\tau, x)}{\partial \tau} + P_0(\tau, x) \tilde{u}_i(\tau, x) \right] d\tau + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} [P_2(\tau, x) \lambda_i'(x) + P_0(\tau, x) \lambda_i(x)] d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\lambda_s'(x) + \lim_{t \rightarrow sh-0} \frac{\partial \tilde{u}_s(t, x)}{\partial x} = \lambda_{s+1}(x), \quad x \in [0, \omega], \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (23)$$

Задачи (15)–(18) и (19)–(23) эквивалентны в том смысле, что если система функций $u([t], x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_N(t, x))'$ является решением (15)–(18), то система пар $(\lambda(x), \tilde{u}([t], x))$, где $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x))'$, $\tilde{u}([t], x) = (\tilde{u}_1(t, x), \tilde{u}_2(t, x), \dots, \tilde{u}_N(t, x))'$, $\lambda_r(x) = u_r((r-1)h, x)$, $\tilde{u}_r(t, x) = u_r(t, x) - u_r((r-1)h, x)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением (19)–(23), и наоборот, если $(\lambda_r(x), \tilde{u}_r(t, x))$, $r = \overline{1, N}$, – решение (19)–(23), то $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$, $r = \overline{1, N}$, будет решением (15)–(18).

При фиксированных $\lambda_r(x), \lambda_r'(x)$, $r = \overline{1, N}$, функции $\{\tilde{u}_r(t, x)\}$, $r = \overline{1, N}$, являются решениями задачи Гурса на Ω_r с условиями (21) и

$$\tilde{u}_r(t, 0) = \psi(t) - \psi((r-1)h), \quad t \in [(r-1)h, rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (24)$$

которые вытекают из условий $\lambda_r(0) = u_r((r-1)h, 0) = \psi((r-1)h)$, $r = \overline{1, N}$.

Снова введя обозначения $\tilde{v}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial x}$, $\tilde{w}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial t}$ из (21), (24) получим $\tilde{v}_r((r-1)h, x) = 0$, $\tilde{w}_r(t, 0) = \dot{\psi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(t, x) = \int_{(r-1)h}^t & \left[A(\tau, x)\tilde{v}_r(\tau, x) + B(\tau, x)\tilde{w}_r(\tau, x) + C(\tau, x)\tilde{u}_r(\tau, x) + \right. \\ & \left. + f(\tau, x) + A(\tau, x)\lambda'_r(x) + C(\tau, x)\lambda_r(x) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r(t, x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x & \left[A(t, \xi)\tilde{v}_r(t, \xi) + B(t, \xi)\tilde{w}_r(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{u}_r(t, \xi) + \right. \\ & \left. + f(t, \xi) + A(t, \xi)\lambda'_r(\xi) + C(t, \xi)\lambda_r(\xi) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(t, x) = \psi(t) - \psi((r-1)h) + \int_{(r-1)h}^t & d\tau \int_0^x \left[A(\tau, \xi)\tilde{v}_r(\tau, \xi) + B(\tau, \xi)\tilde{w}_r(\tau, \xi) + \right. \\ & \left. + C(\tau, \xi)\tilde{u}_r(\tau, \xi) + f(\tau, \xi) + A(\tau, \xi)\lambda'_r(\xi) + C(\tau, \xi)\lambda_r(\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

Снова вместо $\tilde{v}_r(\tau, x)$ подставив соответствующую правую часть (25) и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим

$$\tilde{v}_r(t, x) = D_{\nu, r}(t, x)\lambda'_r(x) + E_{\nu, r}(t, x)\lambda_r(x) + G_{\nu, r}(t, x, \tilde{v}_r) + H_{\nu, r}(t, x, \tilde{w}_r, \tilde{u}_r) + F_{\nu, r}(t, x), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\nu, r}(t, x) &= \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ H_{\nu, r}(t, x, \tilde{w}_r, \tilde{u}_r) &= \int_{(r-1)h}^t \left[B(\tau_1, x)\tilde{w}_r(\tau_1, x) + C(\tau_1, x)\tilde{u}_r(\tau_1, x) \right] d\tau_1 + \dots + \\ &+ \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} \left[B(\tau_\nu, x)\tilde{w}_r(\tau_\nu, x) + C(\tau_\nu, x)\tilde{u}_r(\tau_\nu, x) \right] d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ G_{\nu, r}(t, x, \tilde{v}_r) &= \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu, x)\tilde{v}_r(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ F_{\nu, r}(t, x) &= \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ E_{\nu, r}(t, x) &= \int_{(r-1)h}^t C(\tau_1, x) d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^t A(\tau_1, x) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}, x) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} C(\tau_\nu, x) d\tau_\nu \dots d\tau_1. \end{aligned}$$

Определяя соответствующее значение $\tilde{v}_r(t, x)$ при $t = \tau$ в (28), $r = \overline{1, N}$, а также переходя в правой части (28) к пределу при $t \rightarrow rh - 0$, находим $\lim_{t \rightarrow rh - 0} \tilde{v}_r(t, x)$, $r = \overline{1, N - 1}$, $x \in [0, \omega]$, и подставляя их в (22), (23), для неизвестных вектор - функций $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, получаем систему N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производных,

$$Q_\nu(h, x)\lambda'(x) = -E_\nu(h, x)\lambda(x) - F_\nu(h, x) - G_\nu(h, x, \tilde{v}) - H_\nu(h, x, \tilde{w}, \tilde{u}), \quad (29)$$

где

$$Q_\nu(h, x) = \begin{vmatrix} L_{\nu,1}(x) & L_{\nu,2}(x) & L_{\nu,3}(x) & \dots & L_{\nu,N-1}(x) & L_{\nu,N}(x) \\ I + D_{\nu,1}(h, x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu,2}(2h, x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu,N-1}((N-1)h, x) & -I \end{vmatrix},$$

$$E_\nu(h, x) = \begin{vmatrix} M_{\nu,1}(x) & M_{\nu,2}(x) & M_{\nu,3}(x) & \dots & M_{\nu,N-1}(x) & M_{\nu,N}(x) \\ E_{\nu,1}(h, x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\nu,2}(2h, x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_{\nu,N-1}((N-1)h, x) & 0 \end{vmatrix},$$

$$L_{\nu,i}(x) = \int_{(i-1)h}^{ih} P_2(\tau, x)[I + D_{\nu,i}(\tau, x)]d\tau, \quad M_{\nu,i}(x) = \int_{(i-1)h}^{ih} [P_2(\tau, x)E_{\nu,i}(\tau, x) + P_0(\tau, x)]d\tau, \quad i = \overline{1, N},$$

$$F_\nu(h, x) = \left(\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} P_2(\tau, x)F_{\nu,i}(\tau, x)d\tau - \varphi(x), F_{\nu,1}(h, x), \dots, F_{\nu,N-1}((N-1)h, x) \right)',$$

$$H_\nu(h, x, \tilde{w}, \tilde{u}) = \left(\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} [P_2(\tau, x)H_{\nu,i}(\tau, x, \tilde{w}_i, \tilde{u}_i) + P_1(\tau, x)\tilde{w}_i(\tau, x) + P_0(\tau, x)\tilde{u}_i(\tau, x)]d\tau, \right. \\ \left. H_{\nu,1}(h, x, \tilde{w}_1, \tilde{u}_1), \dots, H_{\nu,N-1}((N-1)h, x, \tilde{w}_{N-1}, \tilde{u}_{N-1}) \right)',$$

$$G_\nu(h, x, \tilde{v}) = \left(\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)h}^{ih} P_2(\tau, x)G_{\nu,i}(\tau, x, \tilde{v}_i)d\tau, G_{\nu,1}(h, x, \tilde{v}_1), \dots, G_{\nu,N-1}((N-1)h, x, \tilde{v}_{N-1}) \right)'$$

Вектор-функции $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, удовлетворяют условиям

$$\lambda_r(0) = \psi((r-1)h), \quad r = \overline{1, N}. \quad (30)$$

Если известны функции $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, то решая систему интегральных уравнений (25)–(27), найдем функции $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$ и, склеивая вдоль характеристик $t = (r-1)h$, $r = \overline{1, N}$, системы функций $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$, получим решение исходной задачи. Если известны функции $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$, то, решая уравнение (29) при условии (30) найдем $\lambda'_r(x)$, $\lambda_r(x)$ и, снова склеивая систему функций $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$, найдем решение задачи (1)–(3).

Здесь неизвестными являются как функции $\lambda_r(x)$, $\lambda'_r(x)$, так и функции $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$. Поэтому снова применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (25)–(27), (29) с условием (30) находится как пределы последовательностей $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{\lambda_r'^{(k)}(x)\}$, $\{\tilde{u}_r^{(k)}(t, x)\}$, $\{\tilde{w}_r^{(k)}(t, x)\}$, $\{\tilde{v}_r^{(k)}(t, x)\}$, определяемых по следующему алгоритму. Шаг 0. Предполагая в правой части (29) $\lambda_r(x) = \psi((r-1)h)$, $\tilde{u}_r(t, x) = \psi(t) - \psi((r-1)h)$, $\tilde{w}_r(t, x) = \psi(t)$, $\tilde{v}_r(t, x) = 0$ и считая, что матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$, из уравнения (29) найдем $\{\lambda_r^{(0)}(x)\}$, $r = \overline{1, N}$. Используя условия (30), находим функции

$\lambda_r^{(0)}(x)$: $\lambda_r^{(0)}(x) = \psi((r-1)h) + \int_0^x \lambda_r^{\prime(0)}(\xi) d\xi$. Из системы интегральных уравнений (25)–(27), где $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $\lambda_r'(x) = \lambda_r^{\prime(0)}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $r = \overline{1, N}$.

Шаг 1. Из системы (29), где в правой части $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, $\tilde{u}_r(t, x) = \tilde{u}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x) = \tilde{w}_r^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x) = \tilde{v}_r^{(0)}(t, x)$, $r = \overline{1, N}$, в силу обратимости $Q_\nu(h, x)$ при $x \in [0, \omega]$ найдем $\{\lambda_r^{(1)}(x)\}$, $r = \overline{1, N}$. Вновь используя условия (30) находим $\lambda_r^{(1)}(x)$: $\lambda_r^{(1)}(x) = \psi((r-1)h) + \int_0^x \lambda_r^{\prime(1)}(\xi) d\xi$. Из систем интегральных уравнений (25)–(27), где $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, $\lambda_r'(x) = \lambda_r^{\prime(1)}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(1)}(t, x)$, $\tilde{w}_r^{(1)}(t, x)$, $\tilde{v}_r^{(1)}(t, x)$, $r = \overline{1, N}$. И т.д.

Метод введения функциональных параметров процесс отыскания неизвестных функций делит на два этапа:

- 1) нахождение параметров $\lambda_r(x)$, $\lambda_r'(x)$ из соотношения (29) с условием (30).
- 2) нахождение неизвестных функций $\tilde{u}_r(t, x)$, $\tilde{w}_r(t, x)$, $\tilde{v}_r(t, x)$ из системы интегральных уравнений (25)–(27).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1)–(3).

Т е о р е м а 2. Пусть при некоторых $h > 0$: $Nh = T$, $N = 2, 3, \dots$, и ν , $\nu \in \mathbb{N}$, $(nN \times nN)$ - матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства

a) $\| [Q_\nu(h, x)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(h, x)$, где $\gamma_\nu(h, x)$ - положительная, непрерывная по $x \in [0, \omega]$ функция,

$$b) \quad q(h, x, \nu) = \gamma_\nu(h, x) \cdot \max(T\beta(x), 1) \cdot \left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \alpha(x)h - \dots - \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right] \leq \delta < 1.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3).

Доказательство теорем 1 и 2 проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1 из [5] и теоремы 1 из [9] соответственно на основе предложенных алгоритмов.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д. С., Асанова А. Т. // Известия МОН и НАН РК. Сер. физ.-матем. 2001. № 1. С. 23 – 29.
2. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
3. Асанова А. Т. // Вестник МОН и НАН РК. 2002. № 1. С. 81 – 88.
4. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1673 – 1685.
5. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343 – 1354.
6. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Известия МОН и НАН РК. Сер. физ.-матем. 2002. № 3. С. 18 – 24.
7. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295 – 297.
8. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337 – 346.
9. Голубева Н. Д., Пулькина Л. С. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 3. С. 326 – 329.
10. Асанова А. Т. // Математический журнал. 2003. Т. 3. № 3. С. 18 – 22.

Поступила в редакцию 02.10.2006 г.

УДК 517.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ НИКОЛЬСКОГО - БЕСОВА ПО ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ

Ш. А. БАЛГИМБАЕВА

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина,125 sholpan@math.kz

Получены точные порядковые оценки для погрешности восстановления оператора свертки с гладкой функцией в пространствах Никольского - Бесова по информации о спектре (преобразовании Фурье) функции.

1. Введение. Постановка задачи.

Напомним общую постановку задачи восстановления. Пусть C — некоторое множество в векторном пространстве X . Про каждый элемент $x \in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I — (однозначное) отображение (называемое информационным) из C в другое векторное пространство Y . Информация об элементах из C может быть задана неточно, и потому I , вообще говоря, — многозначное отображение. Пусть далее Z — нормированное пространство и $\Lambda : X \rightarrow Z$ — линейный оператор. Задача заключается в том, чтобы восстановить по возможности наилучшим образом оператор Λ на классе C в метрике пространства Z по имеющейся информации I . Любое отображение $\varphi : Y \rightarrow Z$ будем называть методом восстановления. Погрешностью этого метода называется величина

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) = \sup_{x \in C} \|\Lambda x - \varphi(I(x))\|_Z.$$

Введем некоторые обозначения. Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , — множества натуральных, целых, вещественных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых, $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, как обычно, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^n x_i y_i$ — скалярное произведение.

Запись $A \asymp B$ означает, что существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $A \leq C_1 B \leq C_2 A$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстроубывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на \mathbb{R}^n соответственно, $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω .

Keywords: *wavelet, convolution operator, spectral information*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

© Ш. А. Балгимбаева, 2006.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mathcal{F}(f)$. В частности, если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(x,\xi)} dx.$$

Обратное преобразование Фурье обозначим через $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

Для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим сужение $\mathcal{F}(f)$ на $[-\sigma, \sigma]^n$, как сужение обобщенной функции, т.е. как линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}((-\sigma, \sigma)^n)$. Обозначим данное сужение через $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma, \sigma]^n}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда, как обычно, имеем

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Определим пространства Никольского - Бесова $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [1, 2]).

Определение. Функция f принадлежит пространству $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta < \infty$, $s > 0$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и для нее конечна полунорма ($\bar{s} = [s]$)

$$\|f\|_{B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t^{-1-\theta s} \|\Delta_j^{\bar{s}+1}(t)f\|_p^\theta dt \right)^{1/\theta}.$$

При этом полагаем

$$\|f\|_{B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|f\|_{B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь Δ_j^m — оператор m -й разности по j -й переменной.

Мы будем рассматривать задачу восстановления оператора $G = f * g$ свертки с фиксированной гладкой функцией $g \in B_{p_1\theta}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$.

Будем использовать в качестве информации о функциях $f \in B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ сужение преобразования Фурье $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma, \sigma]^n}$. Таким образом, будем предполагать известными значения функционала $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma, \sigma]^n}$ на любых функциях из $\mathcal{D}((-\sigma, \sigma)^n)$.

Следует заметить, что в работе В.В. Арестова [3] дан весьма полный и детальный анализ проблематики, связанной с задачей Стечкина о приближении (вообще говоря неограниченного) оператора ограниченными и родственными экстремальными задачами. В частности, подробно исследована задача о наилучшем приближении операторов, инвариантных относительно сдвига, в пространствах $L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq \gamma \leq \infty$. Отметим, что оператор свертки, задаче восстановления которого посвящена данная работа, также является инвариантным относительно сдвига.

Задача оптимального восстановления оператора по информации о спектре (в одномерном случае), по-видимому, впервые рассматривалась Г.Г. Магарил - Ильевым и К.Ю.Осипенко (см. подробнее Замечание 1 ниже).

Известно, что для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ее разложение в ряд Фурье по всплескам Мейера сходится к f в топологии $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (см. [4, 5]).

В качестве (линейного) метода приближенного восстановления оператора G , использующего информацию $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma, \sigma]^n}$ о функции $f \in B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$, будем рассматривать свертку с функцией g специальной "частной суммы" ее разложения в ряд по всплескам Мейера.

2. Предварительные сведения. Здесь сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе.

1. Как известно ([1], стр. 295), функция

$$D_N(t) = \prod_{j=1}^n \frac{\sin Nt_j}{t_j}$$

называется ядром Дирихле порядка N в n -мерном непериодическом случае.

Ее преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}(D_N(t)) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n (\chi)_{\Delta_N}, \quad \Delta_N = \{|x_j| < N, j = \overline{1, n}\}.$$

Отметим, что $D_N(z)$ обладает следующими свойствами, которые будут использованы ниже.

1) $D_N(z)$ — целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной z_j ($j = \overline{1, n}$), принадлежит L_p , $1 < p \leq \infty$.

2) Свертка

$$S_N(f, x) = D_N * f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_N(x-t)f(t)dt$$

для $f \in L_p$ есть целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной и принадлежит L_p . При этом

$$\|D_N * f\|_p \leq \varkappa \|f\|_p,$$

где \varkappa зависит только от n и от p , $1 < p < \infty$.

3) $S_N(f) \rightarrow f$ слабо при $N \rightarrow \infty$.

Тогда регулярную в смысле L_p функцию f можно разложить в (слабо сходящийся) ряд

$$f = S_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[S_{2^k}(f) - S_{2^{k-1}}(f) \right].$$

Верна теорема (см. [1]).

Теорема А. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, s — произвольное действительное число. Тогда $f \in B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда f регулярна в смысле L_p и ее (сходящийся к ней слабо) ряд

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j,$$

$\beta_0 = S_{2^0}(f)$, $\beta_j = S_{2^j}(f) - S_{2^{j-1}}(f)$, $j = 1, 2, \dots$, таков, что

$$\|f\|_{B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js\theta} \|\beta_j\|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

(с естественной метрикой при $\theta = \infty$).

Далее будем использовать обозначение $f^\sigma := \sum_{j=\sigma+1}^{\infty} \beta_j$.

2. В работе [6] получена следующая важная

Теорема В. Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Тогда для любых функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in B_{p_1\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ существует свертка $f * g$, причем

$$\|f * g\|_{B_{p_2\theta}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_p \|g\|_{B_{p_1\theta}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

3. Здесь определим кратную систему одномерных всплесков Мейера (см., например, [4] или [7]). Сначала напомним определение.

Пусть $\theta(\xi)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \xi > \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4}, & \xi < -\frac{\pi}{3} \end{cases},$$

$\lambda(\xi)$ — четная функция такая, что

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\xi - \pi), & \xi \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}], \\ \frac{\pi}{4} - \theta(\frac{\xi}{2} - \pi), & \xi \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}], \\ 0, & \xi \in [0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{8\pi}{3}, \infty]. \end{cases}$$

Преобразование Фурье масштабной функции Мейера φ определяется как

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \begin{cases} \cos(\lambda(\xi)), & |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & |\xi| > \frac{4\pi}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(t\xi) \cos(\lambda(\xi)) d\xi.$$

Тогда

$$\mathcal{F}(\psi)(\xi) = e^{-i\xi/2} \sin(\lambda(\xi))$$

или

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos((t - \frac{1}{2})\xi) \sin(\lambda(\xi)) d\xi.$$

С помощью операций сдвига и растяжения определяем функции

$$\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Из определения видно, что

$$\text{supp } \mathcal{F}(\psi)(\xi) \subset \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right],$$

поэтому

$$\text{supp } \mathcal{F}(\psi_{jk})(\xi) \subset \left[-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3} \right].$$

Ясно также, что всплески Мейера — это целые функции экспоненциального типа, принадлежащие $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Теперь введем n -мерную систему всплесков Мейера $\Psi := \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}^e\}_{e \neq \emptyset, j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}^n}$ следующим образом:

$$\left\{ \varphi_{0k}(x) := \prod_{\nu=1}^n \varphi_{0k_\nu}(x_\nu), \quad \psi_{jk}^e(x) := \prod_{\nu \in e'} \varphi_{jk_\nu}(x_\nu) \prod_{\nu \in e} \psi_{jk_\nu}(x_\nu) \right\}_{e \neq \emptyset, j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}^n};$$

здесь e пробегает все непустые подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, $e' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus e$. Известно, что система всплесков Ψ образует безусловный базис в пространстве $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ (см., например, [4]).

Верна теорема (см. [8]).

Теорема С. Для любой \bar{h} ограниченной целой функции экспоненциального типа 2^{j+1} справедливо соотношение $P_j(\bar{h}) = \bar{h}$.

Здесь P_j — проекционный оператор на подпространство $\text{span} \left\{ \varphi_{0k}(x), \psi_{ik}^e(x) \right\}_{e \neq \emptyset, i=0, j, k \in \mathbb{Z}^n}$.

4. Имеет место всплесковая характеристика пространства $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [7]).

Теорема Д. Функция

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \beta(k) \varphi(x - k) + \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \alpha(\lambda) \psi_\lambda(x)$$

принадлежит пространству $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\{\beta(k)\} \in l_p(\mathbb{Z}^n)$ и $\left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\alpha(\lambda)|^p \right)^{1/p} = 2^{-nj(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} 2^{-js} a_j$, где $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in l_\theta(\mathbb{N})$.

Здесь

$$\alpha(\lambda) := (f; \psi_\lambda), \quad \beta(k) := (f; \varphi_{0k}), \quad \Lambda_j := \{\lambda = (l, j, k) : 1 \leq l \leq 2^{n-1}, k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

3. Основной результат. В качестве метода приближенного восстановления оператора G рассмотрим следующий оператор S_σ :

$$S_\sigma[\mathcal{F}(f)]|_{[-\sigma, \sigma]^n} = G \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) \varphi_{0k} + \sum_{e \neq \emptyset} \sum_{j=0}^{j\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_{jk}^e(f) \psi_{jk}^e \right),$$

где

$$c_k(f) = (f, \varphi_{0k}), \quad c_{jk}^e(f) = (f, \psi_{jk}^e)$$

— коэффициенты Фурье f по системе Ψ , а $j_\sigma = [\log_2 \frac{3\sigma}{4\pi}]$.

По формуле Планшереля для любых $h \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$

$$(h, \phi) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}(h), \mathcal{F}(\phi)).$$

Из определения следует, что $\Psi \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; ясно также, что

$$\text{supp } \mathcal{F}(\psi_{jk}^e)(\xi) \subset \left[-2j \frac{4\pi}{3}, 2j \frac{4\pi}{3} \right]^n,$$

$$\text{supp } \mathcal{F}(\varphi_{0k})(\xi) \subset \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]^n.$$

Таким образом, метод S_σ использует информацию только об $\mathcal{F}(f)|_{[-\sigma, \sigma]^n}$.

Основной результат настоящей статьи содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1 + \frac{1}{p_2}$, $s > 0$, q таково, что $0 < \frac{n}{p_2} - \frac{n}{q} < s_1$. Пусть далее $g \in B_{p_1\theta}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда для метода восстановления S_σ справедливы оценки

$$\sup_{\|f\|_{B_{p\theta}^s} \leq 1} \|G(f) - S_\sigma[\mathcal{F}(f)]|_{[-\sigma, \sigma]^n}\|_{B_{p_2\theta}^{s_1}} \asymp \|g^\sigma\|_{B_{p_1\theta}^{s_1}} 2^{-j\sigma s},$$

$$\sup_{\|f\|_{B_{p\theta}^s} \leq 1} \|G(f) - S_\sigma[\mathcal{F}(f)]|_{[-\sigma, \sigma]^n}\|_q \asymp \|g^\sigma\|_{B_{p_1\theta}^{s_1}} 2^{-j\sigma(s + s_1 - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{q})}.$$

Доказательство. Оценка сверху получается последовательным применением теорем А, В, С и неравенства разных метрик С.М. Никольского (см., например, [1], гл.3).

При получении оценок снизу строятся "плохие" функции из единичного шара пространства $B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n)$, на которых реализуется этот порядок, комбинированием теорем представления А, В и D.

Замечание 1. По-видимому, впервые задачи оптимального восстановления операторов на функциональных классах на основе информации о спектре рассматривались в [9]. А именно, в [9] рассматривается задача оптимального восстановления функций и их производных по информации о спектре:

восстанавливается оператор дифференцирования $\Lambda : \Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $0 \leq k \leq n-1$, на классе $C_p^n = \{x(\cdot) \in X_p^n : \|x^{(n)}\|_2 \leq 1\}$, где $X_p^n = \{x \in \mathcal{S}' \mid \mathcal{F}x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}), x^{(n)} \in L_2(\mathbb{R})\}$, в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ по следующей информации об элементе $x(\cdot) \in C_p^n$, $1 \leq p < \infty$. Оператор информации $I = I_\sigma^p : C_p^n \rightarrow L_p((-\sigma, \sigma)) : I_\sigma^p x(\cdot) = \mathcal{F}x(\cdot)|_{(-\sigma, \sigma)}$; рассматривается также оператор I с погрешностью, т.е. $I_{\delta, \sigma}^p := I_\sigma^p + \delta BL_p((-\sigma, \sigma))$, где $BL_p((-\sigma, \sigma))$ – единичный шар в $L_p((-\sigma, \sigma))$.

Отметим, что в работе [9] получены точные решения задачи оптимального восстановления: при $p = 2, p = \infty$ найдены точные значения для погрешности оптимального восстановления и указаны явные оптимальные методы восстановления. При $2 < p < \infty$ получена оценка снизу погрешности оптимального восстановления.

Цитированная литература

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1997.
2. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М., 1986.
3. Арестов В. В. // Успехи мат. наук. 1996. Т.51, вып.6 (312). С. 89-124.
4. Meyer Y. Wavelets and operators. Cambridge Univ. Press, 1992.
5. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М., 1999.
6. Буренков В. И. // Труды МИАН. 1989. Т.187. С. 31–38.
7. Стечкин С. Б., Новиков И. Я. // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып.6(324). С. 54–128
8. Новиков И. Я. // Мат. заметки. 1992. Т.52, вып.5. С. 88–92
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. // Функ. анализ и его приложения. 2003. Т. 37, вып.3. С. 51–64.

Поступила в редакцию 01.12.2006г.

УДК 517.5

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ. I

Д. Б. БАЗАРХАНОВ

Институт математики МО и Н РК

050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Для функций из банаховых функциональных пространств типа Никольского-Бесова $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и Лизоркина-Трибеля $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$, $p \in (1, \infty)^d$, $q \in (1, \infty)^n$, переменной смешанной гладкости $s = s(x)$, определенных на декартовом произведении $G = G_1 \times \dots \times G_n \subset \mathbb{R}^d$ областей $G_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ с липшицевой границей, получена теорема о ретракции, кроме того, в случае $G = \mathbb{R}^d$ установлена эквивалентная нормировка в терминах весовых норм гладких двоичных разложений их преобразований Фурье.

1. Введение. В последнее десятилетие интенсивно развивается теория функциональных пространств переменной гладкости, обобщающих классические шкалы пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля (здесь укажем лишь недавние работы [1] и [2], в которых достаточно полно отражена история вопроса). В предлагаемой работе изучаются функциональные пространства переменной смешанной гладкости.

Введем некоторые обозначения.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, как обычно, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^d x_j y_j$ — скалярное произведение и $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ — длина вектора \mathbf{x} , кроме того, запись $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} < \mathbf{y}$) будет означать, что $x_i \leq y_i$ ($x_i < y_i$) для $j = 1, \dots, d$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим $|\alpha| = \sum_1^d \alpha_j$, $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$,

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Keywords: *function space, variable smoothness, mixed smoothness, (co)retraction, equivalent norms*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

© Д. Б. Базарханов, 2006.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца всех бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплекснозначных функций и медленно растущих распределений (обобщенных функций) на \mathbb{R}^d соответственно; $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ с компактными носителями.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}, n \leq d$; для произвольных $\epsilon \subset \epsilon_d = \{1, \dots, d\}$ ($\emptyset \neq \epsilon = \{j_1, \dots, j_{|\epsilon|}\}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{|\epsilon|} \leq d$; здесь $|\epsilon|$ — количество элементов ϵ) и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{x}(\epsilon) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{|\epsilon|}}) \in \mathbb{R}^{|\epsilon|}$. Далее фиксируем разбиение $\epsilon = \{\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(n)}\}$ множества ϵ_d (т.е. $\epsilon_d = \cup_{i=1}^n \epsilon^{(i)}$, $\epsilon^{(i)} \cap \epsilon^{(k)} = \emptyset$ при $i \neq k$, $\epsilon^{(i)} \neq \emptyset$, $d_i := |\epsilon^{(i)}|$, $1 \leq i \leq n$, $\sum_{i=1}^n d_i = d$). Для удобства для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ пишем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\epsilon^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $1 \leq i \leq n$, а также $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_n}$.

Для произвольных $\varepsilon \subset \varepsilon_n = \{1, \dots, n\}$ (включая \emptyset и само ε_n), $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^d$ положим $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_n \setminus \varepsilon$, $\mathbf{x}(\varepsilon) = (\mathbf{x}_1(\varepsilon), \dots, \mathbf{x}_n(\varepsilon))$, где $\mathbf{x}_i(\varepsilon) = \mathbf{x}_i$ при $i \in \varepsilon$ и $\mathbf{x}_i(\varepsilon) = \mathbf{0}$ ($\in \mathbb{R}^{d_i}$) при $i \in \bar{\varepsilon}$; иногда будет удобно считать $\mathbf{x}(\varepsilon)$ точкой $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{|\varepsilon|}})$ из $\mathbb{R}^{d_{i_1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i_{|\varepsilon|}}}$ и писать $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(\varepsilon), \mathbf{x}(\bar{\varepsilon}))$ (здесь $\varepsilon = \{i_1, \dots, i_{|\varepsilon|}\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{|\varepsilon|} \leq n$).

Для $p \in (0, \infty]$ пусть, как обычно, $l_p = l_p(\mathbb{N}_0)$ — пространство числовых (комплексных) последовательностей $\{b_j\} = \{b_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ с конечной стандартной (квази)нормой $\|\{b_j\} \| l_p$;

$L_p = L_p(\mathbb{R})$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых в p -й степени (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на \mathbb{R} , со стандартной (квази)нормой $\|f \| L_p$.

Для $\emptyset \neq \varepsilon = \{i_1, \dots, i_{|\varepsilon|}\}$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in (0, \infty]^n$ и $p = (p_1, \dots, p_d) \in (0, \infty]^d$ пусть $l_{q(\varepsilon)} = l_{q(\varepsilon)}(\mathbb{N}_0^{|\varepsilon|})$ — пространство кратных числовых (комплексных) последовательностей $\{b_{k(\varepsilon)}\} = \{b_{k(\varepsilon)}\}_{k(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0^{|\varepsilon|}}$ с конечной (квази)нормой

$$\|\{b_{k(\varepsilon)}\} \| l_{q(\varepsilon)} = \|\{\dots \|\{b_{k(\varepsilon)}\}_{k_{i_1} \in \mathbb{N}_0} \| l_{q_{i_1}} \|\dots\}_{k_{i_{|\varepsilon|}} \in \mathbb{N}_0} \| l_{q_{i_{|\varepsilon|}}}\|;$$

$L_p = L_p(\mathbb{R}^d)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной (квази)нормой $\|f \| L_p = \|\{\dots \|f \| L_{p_1} \|\dots\} \| L_{p_d}$ (здесь (квази)норма $\|\cdot \| L_{p_j}$ вычисляется по $x_j, j \in \epsilon_d$); $L_p(E)$ — пространство измеримых функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной (квази)нормой $\|f \| L_p(E) = \|f_E \| L_p$ (здесь $E \in \mathbb{R}^d$ — произвольное измеримое множество, $f_E : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ — продолжение f с E на \mathbb{R}^d нулем); для области $G \in \mathbb{R}^d$ $L_p(G, loc)$ — пространство измеримых функций $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $f \in L_p(F)$ для любых компактов $F \subset G$. $l_{q(\varepsilon)}(L_p(G))$ (соответственно $L_p(G, l_{q(\varepsilon)})$) — пространство всех кратных последовательностей $\{g_{k(\varepsilon)}(\mathbf{x})\} = \{g_{k(\varepsilon)}(\mathbf{x})\}_{k(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0^{|\varepsilon|}}$ измеримых функций $g_{k(\varepsilon)} : G \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой $\|\{g_{k(\varepsilon)}(\cdot)\} \| l_{q(\varepsilon)}(L_p(G)) = \|\{\|g_{k(\varepsilon)} \| L_p(G)\}\} \| l_{q(\varepsilon)}$ (соответственно, $\|\{g_{k(\varepsilon)}(\cdot)\} \| L_p(G, l_{q(\varepsilon)}) = \|\|\{g_{k(\varepsilon)}(\cdot)\} \| l_{q(\varepsilon)} \| \| L_p(G)$); $l_{q(\varepsilon_n)}(L_p(G)) =: l_q(L_p(G)), L_p(G, l_{q(\varepsilon_n)}) =: L_p(G, l_q)$.

2. Функциональные пространства на областях. В этом разделе рассмотрим банаховы функциональные пространства типа Никольского-Бесова $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и Лизоркина-Трибеля $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ переменной смешанной гладкости $s = s(x)$, определенные на области $G = G_1 \times \dots \times G_n$ d -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^d , являющейся декартовым произведением областей $G_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, где либо $G_i = \mathbb{R}^{d_i}$, либо $G_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ имеет вид (здесь $j_i \in \epsilon^{(i)}$)

$$G = \{\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}'_i, x_{j_i}) \in \mathbb{R}^{d_i} : \mathbf{x}'_i \in \mathbb{R}^{d_i-1}, x_{j_i} > \phi_i(\mathbf{x}'_i)\},$$

а функция ϕ_i удовлетворяет условию Липшица на \mathbb{R}^{d_i-1} :

$$\exists \Lambda_i > 0 : |\phi(\mathbf{x}'_i) - \phi(\mathbf{y}'_i)| \leq \Lambda_i |\mathbf{x}'_i - \mathbf{y}'_i| \quad \forall \mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i \in \mathbb{R}^{d_i-1}. \quad (1)$$

Здесь (кратная) функциональная последовательность $s = s(\mathbf{x}) = \{s_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ — переменная (смешанная) гладкость.

Определение 1. Пусть $m', m \in \mathbb{N}^n$, $m' < m$. Будем говорить, что гладкость $s \in S(G; m', m)$, если выполнены следующие условия для $s = \{s_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$:

- 1) функции $s_k : G \rightarrow (0, \infty)$ непрерывны на G , $k \in \mathbb{N}_0^n$;
- 2) существует такая постоянная c_0 , что

$$0 < s_k(\mathbf{x}) \leq c_0 s_k(\mathbf{y}) \quad \text{при } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| \leq 2^{-k_i}, i \in \varepsilon_n;$$

- 3) существуют такие числа c', c , что

$$0 < c' 2^{(l-k, m')} \leq \frac{s_l(\mathbf{x})}{s_k(\mathbf{x})} \leq c 2^{(l-k, m)} \quad \text{при } \mathbf{x} \in G, \quad k \leq l.$$

В этом разделе будем считать, что $s \in S(G; m', m)$.

Для $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ и $M = (M_1, \dots, M_n) \in \mathbb{N}^n$ введем (смешанные) конечные разности:

$$\Delta^{M_i}(\mathbf{y}_i, G_i) f(\mathbf{x}) = \Delta^{M_i}(\mathbf{y}_i) f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{M_i} (-1)^{M_i-j} \frac{M_i!}{j!(M_i-j)!} f(\mathbf{x} + j\mathbf{y}_i),$$

если $G_i = \mathbb{R}^{d_i}$ или $\text{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbb{R}^{d_i} \setminus G_i) > M_i |\mathbf{y}_i|$,

$$\Delta^{M_i}(\mathbf{y}_i, G_i) f(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{если } G \neq \mathbb{R}^d \text{ и } \text{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbb{R}^{d_i} \setminus G_i) \leq M_i |\mathbf{y}_i|,$$

$$\Delta^0(\mathbf{y}_i, G_i) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

$$\Delta^M(\mathbf{y}, G) f(\mathbf{x}) = \Delta^{M_n}(\mathbf{y}_n, G_n) \cdots \Delta^{M_1}(\mathbf{y}_1, G_1) f(\mathbf{x}).$$

Будем считать, что вектора $m, m', M \in \mathbb{N}^n$, $m' < m < M$, фиксированы.

Определение 2. При $p \in [1, \infty]^d, q \in [1, \infty]^n$ положим

$$MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G) = \{f : f \in L_p(G, \text{loc}), \|f \mid MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)\| < \infty\}$$

— пространство типа Никольского-Бесова переменной смешанной гладкости, здесь

$$\begin{aligned} \|f \mid MB\| &= \|f \mid MB_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)\| = \|s_0 f \mid L_p(G)\| + \\ &+ \sum_{\varepsilon \neq \emptyset} \sum_{k(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{|\varepsilon|}} \|\{ \sup_{|\mathbf{y}_i| \leq 1, i \in \varepsilon} \|s_{k(\varepsilon)} \Delta^{M(\varepsilon)}(2^{-k(\varepsilon)} \mathbf{y}(\varepsilon), G) f \mid L_p(G)\| \} \mid l_{q(\varepsilon)}\|. \end{aligned} \quad (2)$$

При $p \in (1, \infty)^d, q \in (1, \infty)^n$ положим

$$MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G) = \{f : f \in L_p(G, \text{loc}), \|f \mid MF_{p,q}^{s,\varepsilon}(G)\| < \infty\},$$

— пространство типа Лизоркина-Трибеля переменной смешанной гладкости, здесь

$$\|f\|_{MF} = \|f\|_{MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)} = \|s_0 f\|_{L_p(G)} + \sum_{\epsilon \neq \emptyset} \sum_{k(\epsilon) \in \mathbb{N}^{|\epsilon|}} \|\{s_{k(\epsilon)} \int_{|\mathbf{y}_i| \leq 1, i \in \epsilon} |\Delta^{M(\epsilon)}(2^{-k(\epsilon)} \mathbf{y}(\epsilon), G) f| d\mathbf{y}(\epsilon)\}\|_{L_p(G, l_{q(\epsilon)})}. \quad (3)$$

Приведем теперь интегральное представление определенных на G функций в виде суммы ряда из сверток специального вида, содержащее смешанные разности функций с шагами переменного направления, которое является "кратным" вариантом интегральных представлений из [2], [3, §30]. При $A, B \subset \mathbb{R}^d$ через $A + B$ будем обозначать арифметическую сумму множеств A и B .

Пусть V_i — конус вида

$$V_i = \left\{ \mathbf{x}_i : |x'_i| < \frac{1}{\Lambda_i} x_{j_i} \right\}, \quad (4)$$

где Λ_i — то же, что в (1). Тогда для области G_i

$$G_i + V_i \subset G_i. \quad (5)$$

Пусть $\omega_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_i})$, $\int \omega_i(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_i = 1$, $\text{supp } \omega_i \subset V_i$, $\delta_i > 0$ достаточно мало,

$$\tilde{\Omega}^i(\mathbf{x}_i) = \varkappa_i \sum_{j=0}^{M_i} \frac{(-1)^{M_i-j}}{(1+j\delta_i)^{d_i+1}} \omega\left(\frac{\mathbf{x}_i}{1+j\delta_i}\right),$$

где

$$\frac{1}{\varkappa_i} = (-1)^{M_i} \int_0^1 (1-u^{\delta_i})^{M_i} du = \sum_{j=0}^{M_i} \frac{(-1)^{M_i-j}}{(1+j\delta_i)} \binom{M_i}{j} \neq 0,$$

так что $\int \tilde{\Omega}^i(\mathbf{x}_i) d\mathbf{x}_i = 1$. Положим

$$\tilde{\Omega}_{k_i}^i(\mathbf{x}_i) = 2^{k_i d_i} \tilde{\Omega}(-2^{k_i} \mathbf{x}_i), \quad \Omega_{k_i}^i = \tilde{\Omega}_{k_i}^i * \tilde{\Omega}_{k_i}^i, \quad (k_i \in \mathbb{N}_0), \quad \Omega_{-1}^i \equiv 0,$$

$$\Omega_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \Omega_{k_i}^i(\mathbf{x}_i).$$

Для $f \in L_1(G, \text{loc})$ в силу положения $\text{supp } \omega_i$ и малости $\delta_i > 0$ определено усреднение $\Omega_k * \Omega_k * f$, причем

$$\Omega_k * \Omega_k * f \rightarrow f, \quad \min_{i \in \varepsilon_n} k_i \rightarrow \infty,$$

почти всюду на G и в смысле $L(G, \text{loc})$. Поэтому почти всюду на G справедливо представление

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \left[\prod_{i=1}^n (\Omega_{k_i}^i * \Omega_{k_i}^i - \Omega_{k_i-1}^i * \Omega_{k_i-1}^i) \right] * f$$

или в иной записи

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \prod_{i=1}^n (\Omega_{k_i}^i + \Omega_{k_i-1}^i) * f_k \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \Omega_k^+ * f_k, \quad (6)$$

где

$$f_k = \prod_{i=1}^n (\Omega_{k_i}^i - \Omega_{k_i-1}^i) * f, \quad k \in \mathbb{N}_0^n. \tag{7}$$

При $p \in [1, \infty]^d, q \in [1, \infty]^n$ будем использовать следующие (весовые) банаховы пространства (кратных) функциональных последовательностей:

$$l_q(L_{p,s_k}(G)) = \left\{ \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} : \|\{f_k\}\|_{l_q(L_{p,s_k}(G))} = \|\{s_k f_k\}\|_{l_q(L_p(G))} < \infty \right\},$$

$$L_p(G, l_{q,s}) = \left\{ \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n} : \|\{f_k\}\|_{L_p(G, l_{q,s})} = \|\{s_k f_k\}\|_{L_p(G, l_q)} < \infty \right\}.$$

Определение 3. Банахово пространство Y называется ретрактом банахова пространства X , если существуют линейные непрерывные отображения $\mathcal{R} : X \rightarrow Y$ (ретракция) и $\mathcal{S} : Y \rightarrow X$ (коретракция) такие, что $I_Y = \mathcal{S}\mathcal{R} : Y \rightarrow Y$ является тождественным оператором.

Имеет место следующая теорема о ретракции для пространств $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$.

Теорема 1. Пространство $B_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ при $p \in [1, \infty]^d, q \in [1, \infty]^n, s \in S(G; m', m)$ является ретрактом пространства $l_q(L_{p,s_k}(G))$.

Пространство $L_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ при $p \in (1, \infty)^d, q \in (1, \infty)^n, s \in S(G; m', m)$ является ретрактом пространства $L_p(G, l_{q,s})$.

При этом операторы \mathcal{S} (коретракция) и \mathcal{R} (ретракция) задаются формулами

$$(\mathcal{S}f)_k(x) = f_k(x), \quad k \in \mathbb{N}_0^n, \quad x \in G, \tag{8}$$

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} (\Omega_k^+ * h_k)(x) \quad x \in G. \tag{9}$$

Эта теорема является "кратным" аналогом теоремы 1 работы [2] и служит важным аналитическим аппаратом при изучении (во второй части работы) пространств $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ и $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$.

3. Функциональные пространства на \mathbb{R}^d . В этом разделе рассматриваются функциональные пространства переменной смешанной гладкости $\mathcal{ML}_r^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$, определяемые с декомпозиционной точки зрения. Здесь, как и выше, ϵ — (произвольное) разбиение множества индексов $\epsilon_d, s = s(x) = \{s_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ — переменная смешанная гладкость, а вектор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{n+d})$ образован смещением векторов $p \in (1, \infty)^d$ и $q \in (1, \infty)^n$ в (произвольно) фиксированном порядке, при котором p_j будет левее p_{j+1} ($1 \leq j < d$), а q_i — левее q_{i+1} ($1 \leq i < n$). Отметим, что пространства $\mathcal{ML}_r^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ являются, с одной стороны, естественным обобщением и развитием классических функциональных пространств смешанной гладкости (см., например, [4, 5, 6]), а с другой, — функциональных пространств переменной гладкости, изучавшихся в работе [1].

Далее нам понадобится ряд определений и обозначений из [5] (см. также [1]).

Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ совокупность всех функций $\omega : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ таких, что $\omega(\mathbf{x}) = \sigma(|\mathbf{x}|)$, где $\sigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — возрастающая непрерывная выпуклая вверх функция, для которой

$$\sigma(0) = 0, \quad \int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2} dt < \infty, \quad \sigma(t) \geq c + d \ln(1+t) \quad \text{при } t \geq 0,$$

где c — некоторое вещественное число, d — некоторое положительное число.

Будем писать $\omega \in \mathfrak{M}_E(\mathbb{R}^d)$, если $\omega \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ и соответствующая функция σ удовлетворяет дополнительно условию

$$e^{\sigma(t)} = \sum_0^\infty a_k t^k \quad \text{при } t \geq 0,$$

где $a_k \geq 0$ и $(k+l)!a_{k+l} \leq k!a_k l!a_l$ для $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Типичными примерами функций $\omega \in \mathfrak{M}_E(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ являются (см. [5, 1])

$$\omega(\mathbf{x}) = \ln(1 + |\mathbf{x}|^d) \quad \text{при } d > 0, \tag{10}$$

$$\omega(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\beta \quad \text{при } 0 < \beta < 1.$$

Символом D_ω обозначается совокупность всех комплекснозначных функций $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ таких, что

$$\|\phi\|_{\lambda\omega} = \int |F\phi(x)| e^{\lambda\omega(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad \forall \lambda > 0.$$

Символом S_ω обозначается совокупность всех комплекснозначных функций $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ таких, что ϕ и $F\phi$ бесконечно дифференцируемы и для каждого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и каждого $\lambda > 0$

$$p_{\alpha,\lambda}(\phi) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} e^{\lambda\omega(\mathbf{x})} |\partial^\alpha \phi(\mathbf{x})| < \infty, \tag{11}$$

$$\pi_{\alpha,\lambda}(\phi) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} e^{\lambda\omega(\mathbf{x})} |\partial^\alpha (F\phi)(\mathbf{x})| < \infty. \tag{12}$$

Символом \bar{D}_ω обозначается совокупность всех последовательностей $\phi(x) = \{\phi_j(x)\}_0^\infty$ функций $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ таких, что для каждого $\lambda > 0$

$$\|\phi\|_{\lambda\omega} := \sup_{j \geq 0} \|\phi_j(2^j \cdot)\|_{\lambda\omega} = \sup_{j \geq 0} \|\phi_j\|_{\lambda\omega(2^j \cdot)} < \infty. \tag{13}$$

Отметим, что если ω задается формулой (10), то $S_\omega = S$ — обычное пространство Шварца основных функций, $D_\omega = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — обычное пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Пространство S_ω , снабженное топологией, порожденной полунормами (11), (12), является полным локально выпуклым пространством $S_\omega \subset S$. Через S'_ω обозначается сопряженное к S_ω пространство; элементы S'_ω называются умеренными (ультра)распределениями. Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} задаются на S'_ω формулами ($f \in S'_\omega$):

$$(Ff, \phi) = (f, F\phi), \quad (F^{-1}f, \phi) = (f, F^{-1}\phi) \quad \forall \phi \in S_\omega.$$

Теперь введем "кратные" аналоги пространств S_ω и S'_ω .

Определение 4. Символом S_ω , где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_i \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{d_i})$, обозначается совокупность всех комплекснозначных функций $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ таких, что ϕ и $F\phi$ бесконечно дифференцируемы и для каждого $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ и каждого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$,

$$p_{\alpha, \lambda}(\phi) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} e^{(\lambda, \omega(\mathbf{x}))} |\partial^\alpha \phi(\mathbf{x})| < \infty, \quad (14)$$

$$\pi_{\alpha, \lambda}(\phi) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} e^{(\lambda, \omega(\mathbf{x}))} |\partial^\alpha (F\phi)(\mathbf{x})| < \infty. \quad (15)$$

Через S'_ω обозначается сопряженное к S_ω пространство.

Теперь для векторов p и q образуем вектор $r = (r_1, \dots, r_{n+d})$, расположив координаты векторов p и q в строку в (произвольно) фиксированном порядке, при котором p_j будет левее p_{j+1} ($1 \leq j < d$), а q_i — левее q_{i+1} ($1 \leq i < n$). Через \mathcal{L}_r обозначим пространство кратных последовательностей $\{f_k(\mathbf{x})\} = \{f_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ измеримых функций $f_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$, с конечной (квази)нормой

$$\|\{f_k(\mathbf{x})\} | \mathcal{L}_r\| = \|(\dots \|f_k(\mathbf{x}) | \mathcal{L}_{r_1}\| \dots) | \mathcal{L}_{r_{n+d}}\|$$

(здесь $\mathcal{L}_{r_l} = L_{p_j}(\mathbb{R})$ и (квази)норма $\|\cdot | \mathcal{L}_{r_l}\| \equiv \|\cdot | L_{p_j}\|$ вычисляется по переменной x_j при $r_l = p_j$, и $\mathcal{L}_{r_l} = l_{q_i}(\mathbb{N}_0)$ и (квази)норма $\|\cdot | \mathcal{L}_{r_l}\| \equiv \|\cdot | l_{q_i}\|$ вычисляется по индексу k_i при $r_l = q_i$).

Пусть $\omega \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi = \{\varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=0}^\infty$. Будем писать (см. [5, 1]) $\varphi \in \Phi_\omega$, если

- (i) $\varphi \in \bar{D}_\omega$;
- (ii) $\text{supp } \varphi_0 \subset \{\mathbf{x} | |\mathbf{x}| \leq 2\}$, $\text{supp } \varphi_j \subset \{\mathbf{x} : 2^{j-1} \leq |\mathbf{x}| \leq 2^{j+1}\}$, $j \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\omega : \omega_i \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{d_i})$; $\varphi^{(i)} = \{\varphi_j^{(i)}(\mathbf{x}_i)\}_{j=0}^\infty \in \Phi_{\omega_i}$. Положим $\varphi = \{\varphi_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$, где $\varphi_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \varphi_{k_i}^{(i)}(\mathbf{x}_i)$.

Пусть $\omega \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$. Символом (см. [1]) $\bar{R}(\omega)$ обозначим совокупность последовательностей $\rho(\mathbf{x}) = \{\rho_k(\mathbf{x})\}_{k=0}^\infty$ непрерывных на \mathbb{R}^d функций ρ_k таких, что при некоторой не зависящей от k постоянной $c_\rho > 0$

$$0 < \rho_k(\mathbf{x}) \leq c_\rho \rho_k(\mathbf{y}) e^{\omega(2^k(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \quad (16)$$

Пусть $\omega \in \mathfrak{M}_E(\mathbb{R}^d)$, $0 < m' \leq m < \infty$. Будем писать (см. [1]) $s = \{s_k(\mathbf{x})\}_0^\infty \in \bar{R}(\omega; m, m')$, если $s \in \bar{R}(\omega)$ и при некоторых постоянных $c > 0$, $c' > 0$

$$c' 2^{(l-k)m'} \leq \frac{s_l(\mathbf{x})}{s_k(\mathbf{x})} \leq c 2^{(l-k)m} \quad \text{при } l \geq k, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Определение 5. Пусть $p = (p_1, \dots, p_d) \in (1, \infty)^d$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in (1, \infty)^n$, $\omega : \omega_i \in \mathfrak{M}_E(\mathbb{R}^{d_i})$, $\varphi^{(i)} \in \Phi_{\omega_i}$, $m, m' \in \mathbb{R}^n : 0 < m'_i \leq m_i < \infty$, $s = \{s_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$, где $s_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n s_{k_i}^{(i)}(\mathbf{x}_i)$, а $s^{(i)} = \{s_k^{(i)}(\mathbf{x}_i)\}_0^\infty \in \bar{R}(\omega_i; m_i, m'_i)$. Пространство $\mathcal{ML} = \mathcal{ML}_r^{s, \epsilon} = \mathcal{ML}_r^{s, \epsilon}(\mathbb{R}^d)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'_\omega(\mathbb{R}^d)$, для которых конечна величина

$$\|f | \mathcal{ML}\| = \|f | \mathcal{ML}_r^{s, \epsilon}(\mathbb{R}^d)\| = \|\{s_k F^{-1} \varphi_k F f\} | \mathcal{L}_r\|.$$

Стандартные рассуждения показывают, что функционал $\|f\|_{\mathcal{ML}}$ является нормой, а пространство $\mathcal{ML}_r^{s,\epsilon}$, снабженное этой нормой, является банаховым. Если в определении 5 рассматривать случай $\mathcal{L}_r = l_q(L_p)$ (соответственно $\mathcal{L}_r = L_p(l_q)$), то получим пространство Никольского - Бесова $\mathcal{MB}_{p,q}^{s,\epsilon}$ (соответственно Лизоркина - Трибеля $\mathcal{MF}_{p,q}^{s,\epsilon}$) обобщенной переменной смешанной гладкости.

Пространства $\mathcal{ML}_r^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ в частном случае, когда $s \in (0, \infty)^n$, изучались в работе [7].

Здесь мы приведем следующую теорему, связывающую пространства $\mathcal{MB}_{p,q}^{s,\epsilon}$ (соответственно $\mathcal{MF}_{p,q}^{s,\epsilon}$) и пространства $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ (соответственно $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$) из раздела 2.

Теорема 2. Пусть $p = (p_1, \dots, p_d) \in (1, \infty)^d$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in (1, \infty)^n$, $\omega : \omega_i \in \mathfrak{M}_E(\mathbb{R}^{d_i})$, $m, m' \in \mathbb{R}^n : 0 < m'_i \leq m_i < \infty$, $\varphi : \varphi^{(i)} \in \Phi_{\omega_i, s} = \{s_k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$, где $s_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n s_{k_i}^{(i)}(\mathbf{x}_i)$, а $s^{(i)} = \{s_k^{(i)}(\mathbf{x}_i)\}_0^\infty \in \bar{R}(\omega_i; m_i, m'_i)$.

Тогда

- (i) $\mathcal{MB}_{p,q}^{s,\epsilon} = MB_{p,q}^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ и нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{MB}}$ и $\|\cdot\|_{MB}$ эквивалентны;
(ii) $\mathcal{MF}_{p,q}^{s,\epsilon} = MF_{p,q}^{s,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ и нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{MF}}$ и $\|\cdot\|_{MF}$ эквивалентны.

Эта теорема является "кратным" аналогом теоремы 3.2 работы [1].

Замечание 1. Доказательства теорем 1 и 2 вместе со вспомогательным аппаратом, а также теоремы вложения и продолжения для рассмотренных в этой части функциональных пространств переменной гладкости будут приведены в следующих частях работы

Цитированная литература

1. Бесов О. В. //Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. 2003. Т. 243. С. 87–95.
2. Бесов О. В. //Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 52–63.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1996.
4. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
5. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М., 1986.
6. Schmeisser Н.-Ж., Triebel Н. Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.
7. Базарханов Д. Б. //Труды МИ им. В.А.Стеклова РАН. 2005. Т. 248. С. 24–37.

Поступила в редакцию 12.11.2006г.

УДК 519.624

МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, К. Ж. НАЗАРОВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Рассматриваются два варианта введения дополнительных параметров при исследовании и решении линейных двухточечных краевых задач. Приводится сравнительный анализ этих вариантов метода параметризации и определяются классы краевых задач, где их применения позволяют установить простые признаки однозначной разрешимости.

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где $A(t), f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $\|x\| = \max_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max_{i=\overline{1, n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|$.

Если известна $X(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей (1) однородной системы, то необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2) является обратимость матрицы $D = BX(0) + CX(T)$.

Однако это утверждение применимо только в том случае, когда для дифференциального уравнения краевой задачи можно построить фундаментальную систему решений. Так как для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами фундаментальную систему решений удается построить в редких случаях, то возникает необходимость нахождения признаков однозначной разрешимости задачи (1),(2) в терминах исходных данных: $A(t), B, C, [0, T]$ без привлечения фундаментальной матрицы.

В [1] для этой цели был применен вариант метод параметризации, где после разбиения интервала $[0, T]$ на части с шагом $h > 0$ дополнительные параметры вводятся как значения искомого решения в начальных точках интервалов разбиения. Сведением задачи (1),(2) к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами предложено двухпараметрическое

Keywords: *differential equation, two-point boundary value problem, parameterization method, unique solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© Д. С. Джумабаев, К. Ж. Назарова, 2006.

семейство алгоритмов нахождения решения задачи (1),(2). Числовыми параметрами семейства алгоритмов являются $h > 0 : Nh = T$ – шаг разбиения и ν – число повторных интегралов, используемых при нахождении элементов матрицы $Q_\nu(h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$. Матрица $Q_\nu(h)$ составляется по исходным данным задачи (1), (2) и имеет блочно-ленточную структуру:

$$Q_\nu(h) = \begin{pmatrix} hB & 0 & 0 & \dots & 0 & hC[I + D_{\nu,N}(h)] \\ I + D_{\nu,1}(h) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu,N-1}(h) & -I \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица размерности n ,

$$D_{\nu,r}(h) = \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)\dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu\dots d\tau_1,$$

$r = \overline{1, N}$.

Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов: а) относительно введенных параметров решается система nN уравнений с матрицей $Q_\nu(h)$, б) на интервалах длины $h > 0$ при найденных значениях параметров решается задача Коши.

Осуществимость алгоритма обеспечивается обратимостью матрицы $Q_\nu(h)$ при выбранных h, ν . Специальная структура матрицы $Q_\nu(h)$ позволяет установить следующие утверждения.

Обратимость матрицы $Q_\nu(h)$ размерности $nN \times nN$ эквивалентна обратимости $n \times n$ матрицы $M_\nu(h) = B + C \prod_{s=N}^1 [I + D_{\nu,s}(h)]$.

При обратимости матрицы $M_\nu(h)$ обратная к $Q_\nu(h)$ матрица имеет вид $[Q_\nu(h)]^{-1} = (d_{r,j})$, $r, j = \overline{1, N}$, где $(n \times n)$ матрицы $d_{r,j}$ определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= \frac{1}{h}[M_\nu(h)]^{-1}, & d_{1,N} &= [M_\nu(h)]^{-1}C[I + D_{\nu,N}(h)], \\ d_{1,j} &= d_{1,j+1} \cdot [I + D_{\nu,j+1}(h)], & j &= 2, 3, \dots, N-1, \\ d_{r,r} &= [I + D_{\nu,r-1}(h)]d_{r-1,r} - I, & r &= 2, 3, \dots, N, \\ d_{r,j} &= [I + D_{\nu,r-1}(h)]d_{r-1,j}, & r &= \overline{2, N}, \quad j \neq r. \end{aligned}$$

Сходимость алгоритма обеспечивает неравенство

$$q_\nu(h) = \|[Q_\nu(h)]^{-1}\| \cdot \max\{1, h\|C\|\} \cdot \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] < 1, \quad (3)$$

где $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$.

Существование чисел $h > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, при которых матрица $Q_\nu(h)$ обратима и выполняется неравенство (3) являются необходимыми и достаточными условиями однозначной разрешимости. Причем в необходимую сторону справедливы два утверждения: а) если задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $h > 0 : Nh = T$ существует $\nu = \nu(h)$, при которых матрица $Q_\nu(h)$ обратима и $q_\nu(h) < 1$; б) если задача (1), (2) однозначно разрешима, то для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $h = h(\nu) : Nh = T$, при которых матрица $Q_\nu(h)$ обратима и $q_\nu(h) < 1$.

Однако несмотря на эти результаты вопросы, связанные с наилучшим выбором числовых параметров ν, h для сходимости алгоритма и выяснения однозначной разрешимости в зависимости от исходных данных задачи (1), (2), всесторонне не исследованы.

Как показывает опыт применения этих признаков однозначной разрешимости, если αh имеет большое значение, то ν – число используемых повторных интегралов – приходится брать достаточно большим, чтобы удовлетворить неравенство (3). Уменьшение $h > 0$, тем самым увеличение числа разбиения интервала N , приводит к возрастанию размерности матрицы $Q_\nu(h)$.

На отрезке $[0, 100]$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 10(t+1) \\ 10(t^2+1) & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad x \in R^2, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для этой задачи число α , ограничивающее матрицу системы на $[0, 100]$, будет порядка 10^5 . Имея ввиду (3), шаг разбиения интервала h обычно выбирается удовлетворяющим неравенству: $\alpha h \leq 1$. Тогда N – число разбиения интервала $[0, 100]$ – будет порядка 10^7 и определение $[Q_\nu(h)]^{-1}$ по рекуррентным формулам становится затруднительным из-за большой размерности этой матрицы.

В таких случаях, когда αT имеет большое значение, оказывается эффективным следующее

Утверждение 1. Если при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ найдется $h_0 = h_0(\nu) > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0]$: $Nh = T$ матрица $Q_\nu(h)$ обратима и выполняется неравенство

$$\|[Q_\nu(h)]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{h} \quad (6)$$

с независимой от h константой γ , то задача (1), (2) однозначно разрешима.

Применим это утверждение к задаче (4), (5). При $h > 0$ краевые условия (5) эквивалентны

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) - \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Отрезок $[0, 100]$ делим на N равных частей с шагом $h = 100 \cdot N^{-1}$ и для краевой задачи (4), (7) составляем матрицу $Q_1(h) : R^{2N} \rightarrow R^{2N}$. Через S обозначим блочно-диагональную $(2N \times 2N)$ – матрицу, где каждый диагональный блок состоит из неособой 2×2 – матрицы $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как

$$\begin{aligned} S_1 \int_{(r-1)h}^{rh} A(t) dt S_1^{-1} &= \int_{(r-1)h}^{rh} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10(t+1) \\ 10(t^2+1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_{(r-1)h}^{rh} \begin{pmatrix} -5t(t+1) - 10 & -5t(t-1) \\ 5t(t-1) & 5t(t+1) + 10 \end{pmatrix} dt, \quad r = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

то, построив матрицу перестановок $P = (p_{ij})$, $i, j = \overline{1, 2N}$, где в каждой строке ненулевым является только один элемент $p_{i, 2i-1} = 1$, $i = \overline{1, N}$, $p_{N+s2(s+1)} = 1$, $s = \overline{1, N-1}$, $p_{2N2} = 1$, получим, что в матрице $P\tilde{Q}_1(h)P^{-1} = PSQ_1(h)S^{-1}P^{-1}$ имеет место диагональное преобладание по строкам с константой $\theta = 10h$. Поэтому матрица $P\tilde{Q}_1(h)P^{-1}$ обратима и $\|[P\tilde{Q}_1(h)P^{-1}]^{-1}\| \leq \frac{1}{10h}$. Учитывая соотношения $\|P\| = \|P^{-1}\| = 1$, $\|S\| = 2$, $\|S^{-1}\| = 1$, $Q_1(h) = S^{-1}[P\tilde{Q}_1(h)P^{-1}]S$, получаем обратимость матрицы $Q_1(h)$ и оценку

$$\|[Q_1(h)]^{-1}\| = \|S^{-1}[P\tilde{Q}_1(h)P^{-1}]^{-1}S\| \leq \frac{1}{5h}.$$

Следовательно, неравенство (6) выполняется с независимой от h константой $\gamma = \frac{1}{5}$ и задача (4), (5) однозначно разрешима.

Заметим, что преобразования, приводящие систему к виду, где имеет место диагональное преобладание, широко применяется в качественной теории дифференциальных уравнений. Например, в [2] используется преобразование Ван-дер-Поля, приводящее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка к системе двух уравнений первого порядка с преобладанием диагональных элементов. Рассмотрим периодическую краевую задачу для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = q_1(t) \frac{dz}{dt} + q_2(t)z + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$z(0) = z(T), \quad \dot{z}(0) = \dot{z}(T), \quad (9)$$

где функции $q_i(t)$, $i = 1, 2$, $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$ и $q_2(t) \geq \delta > 0$ при всех $t \in [0, T]$. Используя преобразование Ван-дер-Поля, задачу (8), (9) сведем к периодической краевой задаче для систем двух уравнений первого порядка, где имеет место диагональное преобладание по строкам и аналогично задаче (4), (5) устанавливается ее однозначная разрешимость при любом $T > 0$.

В [3] задача (1),(2) исследована другим вариантом метода параметризации [4], где после разбиения $[0, T]$ на части с шагом $h = 2h > 0 : 2Nh = T$ дополнительные параметры вводятся как значения искомого решения при $t = (2r - 1)h$, $r = \overline{1, N}$. В этом варианте метода параметризации задача (1), (2) также (как и в первом варианте) сводится к эквивалентной краевой задаче с параметрами и предлагается двухпараметрическое семейство алгоритмов. Осуществимость алгоритма зависит от обратимости $(nN \times nN)$ - матрицы $Q_\nu(2h)$ при выбранных ν, h . Матрица $Q_\nu(2h)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2hB[I + D_{\nu,1}(0)] & 0 & 0 & \dots & 0 & 2hC[I + D_{\nu,N}(2Nh)] \\ I + D_{\nu,1}(2h) & -I - D_{\nu,2}(2h) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu,N-1}(2(N-1)h) & -I - D_{\nu,N}(2(N-1)h) \end{pmatrix},$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh], \quad r = \overline{1, N}.$$

При обратимости матриц $I + D_{\nu,s}(2sh)$, $s = 2, 3, \dots, N$, $(nN \times nN)$ - матрица $Q_\nu(2h)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n \times n)$ - матрица

$$M_\nu(2h) = B[I + D_{\nu,1}(0)] + C[I + D_{\nu,N}(2Nh)] \cdot \prod_{s=N}^2 [I + D_{\nu,s}(2sh)]^{-1} [I + D_{\nu,s-1}(2sh)].$$

Здесь также, как и при нахождении $[Q_\nu(h)]^{-1}$, матрицу $[Q_\nu(2h)]^{-1}$ можно определить по блочно на основе рекуррентных соотношений.

Сходимость алгоритма и однозначная разрешимость задачи (1), (2) обеспечивается неравенством

$$q_\nu(2h) = \|[Q_\nu(2h)]^{-1}\| \cdot 2 \max\{1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)\} \cdot \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] < 1. \quad (10)$$

Отсюда видно, что в этом варианте метода параметризации влияние показателя экспоненциального члена на $q_\nu(2h)$ уменьшается в два раза, так как при первом варианте мы имели бы $e^{\alpha\tilde{h}} = e^{2\alpha h}$. Доказано, что обратимость матрицы $Q_\nu(2h)$ при некоторых ν, h и выполнение неравенства (10) являются не только достаточными, но и необходимыми условиями однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Для сравнения эффективности применения этих вариантов метода параметризации рассмотрим следующие примеры.

Пусть на $[-0.5, 0.5]$ задана двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad x \in R^2, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(-0.5) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(0.5) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Применяя первый вариант метода параметризации при $\nu = 1, h = 1 (N = 1)$, получим матрицу $Q_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица обратима и $\| [Q_1(1)]^{-1} \| = 2$. Однако не выполняется неравенство (3): $q_1(1) = 1.44 > 1$ и при $\nu = 1, h = 1$ выяснить однозначную разрешимость задачи (11), (12) не удастся. При тех же $\nu = 1, \tilde{h} = 1 (N = 1)$ используем второй вариант метода параметризации. Матрица $Q_1(2 \cdot 0.5)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$ и $[Q_1(2 \cdot 0.5)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Причем выполняется неравенство (10): $q_1(2 \cdot 0.5) = 0.597 < 1$ и задача (11), (12) однозначно разрешима. Отметим, что первый вариант устанавливает однозначную разрешимость задачи (11), (12) при $\nu = 2, h = 1 (N = 1)$.

Применение метода параметризации к различным краевым задачам показывает преимущество второго варианта перед первым. Во втором варианте однозначную разрешимость (как и в случае задачи (11), (12)) удастся установить при меньших значениях ν, N , чем в первом варианте.

Как было отмечено выше, привлечение больших значений ν, N к исследованию краевой задачи приводит к возрастанию объема вычисления. Численные эксперименты также подтверждают эффективность второго варианта метода параметризации. При одинаковых ν, N через одинаковое количество шагов алгоритма погрешность, допускаемая во втором варианте оказывается меньше, чем погрешность первого варианта.

Теперь в задаче (4), (5) изменим граничное условие (5) и на $[0, 100]$ рассмотрим двухточечную краевую задачу (4), (5')

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5')$$

Используя замену $y(t) = S_1^{-1}x(t)$ с матрицей $S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4) можно свести к системе с диагональным преобладанием:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -5t(t+1) - 10 & -5t(t-1) \\ 5t(t-1) & 5t(t+1) + 10 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4')$$

Однако при этом граничное условие (5') примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

и не удается получить матрицу с диагональным преобладанием, применяя перестановки в матрице $Q_1(h)$.

В то же время легко установить однозначную разрешимость задачи (4), (5') на основе следующего

Утверждение 2. Если для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется $h_0 = h_0(\nu) > 0$ такое, что при всех $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$ матрица $Q_\nu(2h)$ обратима и выполняется неравенство

$$\| [Q_\nu(2h)]^{-1} \| \leq \frac{\gamma}{2h} \quad (14)$$

с независящей от h константой γ , то задача (1), (2) однозначно разрешима.

Делим обе части (13) на $2h > 0$:

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(100) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

и для задачи (4'), (15) составим матрицу $Q_1(2h) : R^{2N} \rightarrow R^{2N}$ ($2Nh = T$). Первый блочный элемент матрицы $Q_1(2h)$ имеет вид

$$\begin{aligned} 2hB[I + D_{1,1}(0)] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \int_h^0 [5t(t+1) + 10]dt & - \int_h^0 5t(t-1)dt \\ \int_h^0 5t(t-1)dt & 1 + \int_h^0 [5t(t+1) + 10]dt \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \int_h^0 [5t(t+1) + 10]dt + \int_h^0 5t(t-1)dt & 1 + \int_h^0 [5t(t+1) + 10]dt - \int_h^0 5t(t-1)dt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последним элементом первой блочной строки является матрица

$$\begin{aligned} 2hC[I + D_{1,N}(2Nh)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \int_{(2N-1)h}^{2Nh} [5t(t+1) + 10]dt & - \int_{(2N-1)h}^{2Nh} 5t(t-1)dt \\ \int_{(2N-1)h}^{2Nh} 5t(t-1)dt & 1 + \int_{(2N-1)h}^{2Nh} [5t(t+1) + 10]dt \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \int_{(2N-1)h}^{2Nh} [10t + 10]dt & 1 + \int_{(2N-1)h}^{2Nh} [10t^2 + 10]dt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В остальных $N - 1$ блочных строках матрицы $Q_1(2h)$ ненулевыми элементами являются

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 - \int_{(2s-1)h}^{2sh} [5t(t+1) + 10]dt & - \int_{(2s-1)h}^{2sh} 5t(t-1)dt \\ \int_{(2s-1)h}^{2sh} 5t(t-1)dt & 1 + \int_{(2s-1)h}^{2sh} [5t(t+1) + 10]dt \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} -1 + \int_{(2s+1)h}^{2sh} [5t(t+1) + 10]dt & \int_{(2s+1)h}^{2sh} 5t(t-1)dt \\ - \int_{(2s+1)h}^{2sh} 5t(t-1)dt & -1 - \int_{(2s+1)h}^{2sh} [5t(t+1) + 10]dt \end{pmatrix}, \quad s = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что в матрице $\tilde{Q}_1(2h) = PQ_1(2h)P^{-1}$ (где P – та же самая матрица перестановок, что и в задаче (4), (5)) имеет место диагональное преобладание по строкам с константой $\theta = 20h > 0$ при всех $h \in (0, 10^{-5}] : 2Nh = T$ и $\|[\tilde{Q}_1(2h)]^{-1}\| \leq \frac{1}{20h}$. Тогда при всех $h \in (0, 10^{-5}] : 2Nh = T$ обратима матрица $Q_1(2h)$, а норма ее обратной удовлетворяет неравенству (14) с независимой от h константой $\gamma = \frac{1}{10}$. Поэтому задача (4'), (13) (тем самым и задача (4), (5')) однозначно разрешима.

Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (8) рассмотрим задачу с краевыми условиями

$$\dot{z}(0) = 0, \quad \dot{z}(T) = 0. \tag{9'}$$

Введя новые функции $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \dot{z}(t)$, от задачи (8), (9') перейдем к двухточечной краевой задаче для двух систем уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= q_1(t)x_2 + q_1(t)x_1 + f(t), & t \in [0, T], \\ x_2(0) &= 0, & x_2(T) &= 0. \end{aligned}$$

Используя преобразование Ван-дер-Поля $x_1(t) = y_1(t) + y_2(t)$, $x_2(t) = K[y_1(t) - y_2(t)]$, получим двухточечную краевую задачу

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K + q_1(t) + \frac{q_2(t)}{K} & -[K + q_1(t) - \frac{q_2(t)}{K}] \\ K - q_1(t) - \frac{q_2(t)}{K} & -[K - q_1(t) + \frac{q_2(t)}{K}] \end{pmatrix} y + \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} f(t) \\ -f(t) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

При выборе $K = \max\{1, \max_{t \in [0, T]} [q_1(t) + q_2(t)]\}$ в матрице систем дифференциальных уравнений (16) имеет место диагональное преобладание по строкам

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| K + q_1(t) + \frac{q_2(t)}{K} \right| - \frac{1}{2} \left| K + q_1(t) - \frac{q_2(t)}{K} \right| &= \frac{q_2(t)}{K} \geq \frac{\delta}{K} > 0, \\ \frac{1}{2} \left| K - q_1(t) + \frac{q_2(t)}{K} \right| - \frac{1}{2} \left| K - q_1(t) - \frac{q_2(t)}{K} \right| &= \frac{q_2(t)}{K} \geq \frac{\delta}{K} > 0. \end{aligned}$$

Построив для задачи (16), (17) матрицу $Q_1(2h)$ и используя матрицу перестановок $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$, $i, j = \overline{1, 2N}$, где в каждой строке ненулевым является только один элемент $\tilde{p}_{12} = 1$, $\tilde{p}_{i \ 2i-1} = 1$, $i = \overline{2, N}$, $\tilde{p}_{N+1 \ 2(s+1)} = 1$, $s = \overline{1, N-1}$, $\tilde{p}_{2N \ 1} = 1$, получим, что в матрице $\tilde{Q}_1(2h) = \tilde{P}Q_1(2h)\tilde{P}^{-1}$ имеет место диагональное преобладание по строкам с константой $\tilde{\theta} = \frac{2h\delta}{K}$.

Так как неравенство (14) выполняется с независимой от h константой $\gamma = \frac{K}{\delta} > 0$, то задача (8), (9') и ей эквивалентная двухточечная краевая задача (16), (17) однозначно разрешимы при любом $T > 0$.

Если рассматривается периодическая краевая задача, то, как показывает проведенный анализ, лучше использовать вариант метода параметризации, где дополнительные параметры вводятся как значения решения в начальных точках интервалов разбиения.

При исследовании задач с краевыми условиями вида (13) или (17) эффективно применение второго варианта метода параметризации.

Таким образом, эффективность применения вариантов метода параметризации зависит не только от свойств правой части дифференциального уравнения, но и от вида граничных условий.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
2. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М., 1966.
3. Джумабаев Д. С. // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 3. С. 1- 5.
4. Назарова К. Ж. // Математический журнал. 2004. Т. 4, № 3. С. 58 – 67.

Поступила в редакцию 17.10.2006 г.

УДК 517.5

ПОГРЕШНОСТЬ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ХАОТИЧЕСКОЙ СЕТКЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА, ПОРОЖДЕННОГО ЯДРОМ ПЕАНО

Е.Н. ИВАНОВА

КазНУ имени аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47 genremi@yandex.ru

Получены точные оценки погрешности сплайн-интерполяции на классе истокообразных функций двух переменных, представленных в виде суммы константы и свертки с ядром Пеано.

1. Постановка задачи. Пусть $F_{1,p}(\alpha, \beta)$ — класс истокообразных функций двух переменных, заданных на прямоугольнике $\Omega = [a, b] \times [c, d]$:

$$F_{1,p}(\alpha, \beta) = \left\{ f(x, y) : f(x, y) = c_0 + \int \int_{\Omega} f_{\Omega}(u, v)(u - x)_+^{\alpha}(v - y)_+^{\beta} du dv \right\},$$

где $c_0 \in \mathbb{R}$, $f_{\Omega}(u, v) \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $t_+^l := \max\{0, t^l\}$, $l \geq 0$; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$.

На классе $F_{1,p}(\alpha, \beta)$ определим лагранжевый оператор информации $\mathbb{I}_n : F_{1,p}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_n$,

$$\mathbb{I}_n(f) = \{f(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\},$$

где $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ — фиксированный набор точек из Ω .

Рассмотрим интерполянт $s_f(x, y)$ функции $f(x, y)$ вида

$$s_f(x, y) = c_0(f) + \int \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^n c_j(f)(u - x_i)_+^{\alpha}(v - y_i)_+^{\beta} \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^n c_j(f)(u - x_i)_+^{\alpha} \times \right. \\ \left. \times (v - y_i)_+^{\beta} \right) (u - x)_+^{\alpha}(v - y)_+^{\beta} dudv, (1/p + 1/q = 1), \quad (1)$$

удовлетворяющий требованиям

$$\begin{cases} \mathbb{I}_n(s_f) = \mathbb{I}_n(f), \\ \sum_{i=1}^n c_i(f) = 0 \quad (c_i(f) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Keywords: *multivariate function, scattered data, spline, interpolation, error estimate, partition of unity*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A25, 41A05

© Е.Н. Иванова, 2006.

Существование такого интерполянта вытекает из необходимого и достаточного условия, приведенного в [1]. К тому же (см. [1]) он является одним из решений вариационной задачи минимизации функционала \mathcal{J} относительно оператора информации \mathbb{I}_n ,

$$\mathcal{J}(f) = \|f_\Omega\|_p := \left(\iint_\Omega |f_\Omega(u, v)|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \min, \quad f \in F_{1,p}(\alpha, \beta) :$$

$$f(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В [2] получена следующая поточечная оценка погрешности интерполяции функции $f(x, y)$ посредством $s_f(x, y)$:

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left(\iint_\Omega \left| (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta - \sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) (u-x_i)_+^\alpha (v-y_i)_+^\beta \right|^q dudv \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2)$$

где $c(p) \leq 2$; $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$ — любая вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Целью исследования в данной работе является поточечная оценка погрешности интерполяции в случае, когда в качестве $\psi(x, y)$ взята конкретная вектор-функция. При этом показывается, что для $\alpha = \beta = 0$, $p \in (1, \infty)$ полученный порядок сходимости является точным, а при $\alpha = \beta = 0$, $p = 2$ константа, присутствующая в оценке, является наименьшей.

2. Оценка погрешности интерполяции. Итак, приступим к реализации поставленной цели.

Введем следующие обозначения:

$$h_i(x, y) := |x - x_i| + |y - y_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$h(x, y) := \min_{j=1, \dots, n} h_j(x, y),$$

$$h := \sup_{(x, y) \in \Omega} h(x, y),$$

$$V := \{v_i\}_{i=1}^n, \quad \text{где } v_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 : h_i(x, y) \leq h\}.$$

Множество V является покрытием области Ω шарами радиуса h с центрами в узлах интерполяции (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

Возьмем в качестве $\psi(x, y)$ разбиение единицы, подчиненное покрытию V . Её компоненты зададим следующим образом:

$$\psi_i(x, y) = \chi_{T_i}(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$T_i := \{(x, y) \in \Omega : h_i(x, y) = h(x, y)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\chi_T(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом, если ближайших интерполяционных узлов к точке (x, y) больше одного, то есть

$$h_{k_i}(x, y) = h(x, y), \quad i = 1, \dots, m, \quad m > 1,$$

то полагаем

$$\psi_i(x, y) = \delta_{ik_1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

То есть значением вектор-функции $\psi(x, y)$ в каждой фиксированной точке $(x, y) \in \Omega$ является вектор из \mathbb{R}_n , у которого только одна из координат равна единице, а остальные равны нулю.

В дальнейшем, для удобства, под записью $(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2)$ подразумеваем покоординатные неравенства $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$.

Имеет место

Теорема 1. Для погрешности интерполяции функции $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$ посредством $s_f(x, y)$ при фиксированном $(x, y) \in \Omega$ справедлива оценка

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y), \quad (4)$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha, \beta, q, \Omega) \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Фиксируем $(x, y) \in \Omega$. Тогда $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} : h_k(x, y) = h(x, y)$. Поэтому согласно (3) $\psi_i(x, y) = \delta_{ik}, i = 1, \dots, n$ и, следовательно, неравенство (2) примет вид

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left(\iint_\Omega \left| (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta - (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta \right|^q dudv \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5)$$

Введём обозначения

$$T((x, y), (u, v)) := \left| (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta - (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta \right|,$$

$$L(x, y) := \|T((x, y), \cdot)\|_{L_q(\Omega)} = \left(\iint_\Omega T^q((x, y), (u, v)) dudv \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее разобьём Ω на четыре подобласти следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta > 0, (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta > 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : \max\{x_k, x\} < u < b, \max\{y_k, y\} < v < d \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta > 0, (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta = 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x_k, y_k) \right\} \setminus \Omega_1 \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x_k, y_k) \text{ и либо } x \geq u, \text{ либо } y \geq v \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta = 0, (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta > 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x, y) \right\} \setminus \Omega_1 \equiv \\ &\equiv \left\{ (u, v) \in \Omega : (u, v) > (x, y) \text{ и либо } x_k \geq u, \text{ либо } y_k \geq v \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_4 &:= \left\{ (u, v) \in \Omega : (u-x_k)_+^\alpha (v-y_k)_+^\beta = 0, (u-x)_+^\alpha (v-y)_+^\beta = 0 \right\} \equiv \\ &\equiv \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Omega = \cup_{i=1}^4 \Omega_i$, $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, 4$.

Разложив функцию $(u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta$ в окрестности точки (x, y) по формуле Тейлора при фиксированном (u, v) , получим

$$(u - x)^\alpha (v - y)^\beta - (u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta = - \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} \times \\ \times (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}, \quad \text{где } C_{w_1}^{w_2} = \frac{w_1!}{w_2!(w_1 - w_2)!}.$$

Тогда $T((x, y), (u, v))$ на Ω будет выглядеть следующим образом:

$$T((x, y), (u, v)) = \begin{cases} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \\ \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|, & (u, v) \in \Omega_1, \\ (u - x_k)^\alpha (v - y_k)^\beta, & (u, v) \in \Omega_2, \\ (u - x)^\alpha (v - y)^\beta, & (u, v) \in \Omega_3, \\ 0, & (u, v) \in \Omega_4. \end{cases}$$

Возможны следующие варианты расположения точек (x, y) , (x_k, y_k) относительно друг друга: $\{x \geq x_k, y \geq y_k\}$, $\{x \leq x_k, y \leq y_k\}$, $\{x \geq x_k, y \leq y_k\}$, $\{x \leq x_k, y \geq y_k\}$.

Для оценки $L(x, y)$ сверху достаточно рассмотреть один из вариантов, например, когда $x \geq x_k, y \geq y_k$. Для остальных вариантов оценка $L(x, y)$ устанавливается аналогичным образом.

Воспользовавшись неравенством (см., например, [3], гл.2)

$$(w_1 + w_2)^{\frac{1}{q}} \leq w_1^{\frac{1}{q}} + w_2^{\frac{1}{q}} \quad \forall w_1, w_2 \geq 0, \quad \forall q \geq 1,$$

оценим $L(x, y)$ следующим образом:

$$L(x, y) = \left[\iint_{\Omega_1} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|^q dudv + \iint_{\Omega_2} (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} \leq \\ \leq \left[\iint_{\Omega_1} \left| \sum_{\substack{0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha + \beta \\ \gamma_1 \leq \alpha, \gamma_2 \leq \beta}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} C_\alpha^{\gamma_1} C_\beta^{\gamma_2} (u - x)^{\alpha - \gamma_1} (v - y)^{\beta - \gamma_2} (x_k - x)^{\gamma_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (y_k - y)^{\gamma_2} \right|^q dudv \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\iint_{\Omega_2} (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} := I_1 + I_2.$$

В свою очередь, учитывая, что на Ω_1 функция $T((x, y), (u, v))$ является многочленом относительно степеней $(x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_1 \leq \alpha$, $\gamma_2 \leq \beta$. В частности, она содержит в себе $(x_k - x)^{\gamma_1} (y_k - y)^{\gamma_2}$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Причем ликвидировать данные степени за счет интегрирования по переменной (u, v) на Ω_1 нельзя, поскольку при расстановке пределов интегрирования по области Ω_1 будут одновременно задействованы числа $u = b$, $v = d$. С учетом соотношений $|u_1 - u_2| \leq b - a \quad \forall u_1, u_2 \in [a, b]$; $|v_1 - v_2| \leq d - c \quad \forall v_1, v_2 \in [c, d]$, очевидно $\forall (u, v) \in \Omega_1$ следующее неравенство:

$$T((x, y), (u, v)) \leq A_1 |x - x_k| + A_2 |y - y_k|,$$

где A_1, A_2 – некоторые положительные числа, величины которых зависят от геометрической характеристики области Ω .

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left[\iint_{\Omega_1} (A_1|x - x_k| + A_2|y - y_k|)^q dudv \right]^{\frac{1}{q}} \leq A_3 h_k(x, y) \left(\int_x^b \int_y^d dudv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq A_3 \sqrt[q]{(b-a)(d-c)} h_k(x, y) = Ah(x, y), \end{aligned}$$

где

$$A := \sqrt[q]{(b-a)(d-c)} \max\{A_1, A_2\}.$$

Ясно, что при $\alpha = \beta = 0$ $I_1 \equiv 0$.

Теперь оценим I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\int_{x_k}^x \int_{y_k}^d (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv + \int_x^b \int_{y_k}^y (u - x_k)^{\alpha q} (v - y_k)^{\beta q} dudv \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left[(x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - y_k)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \left\{ \frac{(b - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{(x - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[(x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - y_k)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{(b - x_k)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[(x - x_k)^{\alpha q + 1} \left\{ \frac{(d - c)^{\beta q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} + (y - y_k)^{\beta q + 1} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{(b - a)^{\alpha q + 1}}{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)} \right\} \right]^{\frac{1}{q}} \leq B_1 \left(|x - x_k|^{\alpha q + 1} + |y - y_k|^{\beta q + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq B_1 B_2 \left(|x - x_k| + |y - y_k| \right)^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} = Bh^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y), \end{aligned}$$

где $B = B_1 B_2$; $B_1 = \frac{\max\{(d-c)^{\beta + \frac{1}{q}}; (b-a)^{\alpha + \frac{1}{q}}\}}{\sqrt[q]{(\alpha q + 1)(\beta q + 1)}}$;

$$B_2 = \begin{cases} \max\{1; (d - c)^{\beta - \alpha}\}, & \text{если } \min\{\alpha, \beta\} = \alpha, \\ \max\{1; (b - a)^{\alpha - \beta}\}, & \text{если } \min\{\alpha, \beta\} = \beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$L(x, y) \leq Ah(x, y) + Bh^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y) \leq Ch^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}(x, y),$$

где

$$C = \begin{cases} \max\left\{A; B[2 \max(b - a, d - c)]^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} - 1}\right\}, & \text{если } \min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} = 1, \\ \max\left\{B; A[2 \max(b - a, d - c)]^{1 - \min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}\right\}, & \text{если } \min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\} = \\ & = \min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}. \end{cases}$$

Следовательно, для $(x, y) \in \Omega$ согласно (5) справедливо неравенство (4), где

$$A = c(p)C.$$

Следствие 1. Для погрешности интерполяции функции $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$ посредством $s_f(x, y)$ на $\partial_1\Omega := \{(x, y) \in \Omega : x = b, \text{ либо } y = d\}$ справедлива оценка

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A}_1 \|f_\Omega\|_p h^{\frac{1}{q} + \min\{\alpha, \beta\}},$$

где $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Если хотя бы один интерполяционный узел попадает на $\partial_1\Omega$, то выполняется равенство $f(x, y) - s_f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \partial_1\Omega$ и, следовательно, утверждение следствия 1 очевидно.

Считаем, что на $\partial_1\Omega$ не попадает ни один интерполяционный узел. Тогда $\forall (x, y) \in \partial_1\Omega$ выполняется $I_1 = 0$ и, следовательно,

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq Bh^{\min\{\alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} c(p) \|f_\Omega\|_p = \mathcal{A}_1 \|f_\Omega\|_p h^{\frac{1}{q} + \min\{\alpha, \beta\}},$$

где константа B определена при доказательстве теоремы 1, $\mathcal{A}_1 := c(p)B$.

Следствие 2. Для погрешности интерполяции функции $f(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$ посредством $s_f(x, y)$ на Ω справедливо неравенство

$$\|f - s_f\|_{L_r(\Omega)} \leq \mathcal{A}_2 \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}},$$

где $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{R}_+$, $0 < r \leq \infty$.

Доказательство. При $r = \infty$ утверждение следствия 2 очевидно. Пусть $0 < r < \infty$. Тогда согласно теореме 1

$$\begin{aligned} \|f - s_f\|_{L_r(\Omega)} &\leq c(p) \|f_\Omega\|_p \left(\iint_{\Omega} L^r(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p \left(\iint_{\Omega} dx dy \right)^{\frac{1}{r}} h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}} = \mathcal{A}_2 \|f_\Omega\|_p h^{\min\{1, \alpha + \frac{1}{q}, \beta + \frac{1}{q}\}}, \end{aligned}$$

где число \mathcal{A} определено в доказательстве теоремы 1, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A} \sqrt[r]{(b-a)(d-c)}$

Далее покажем, что оценка (4) для $f(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$ точна по порядку, а для $f(x, y) \in F_{1,2}(0, 0)$ константа, фигурирующая в этой оценке является наименьшей. Для этого нам придется провести некоторые конструктивные построения.

Будем работать с функциями $g(x, y) \in F_{1,p}(\alpha, \beta)$ вида

$$\begin{aligned} g(x, y) &= c_0(g) + \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right|^{q-1} \times \\ &\times \operatorname{sgn} \left((u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right) (u - x)_+^\alpha (v - y)_+^\beta dudv, \end{aligned} \quad (6)$$

удовлетворяющими требованиям

$$\begin{cases} g(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ 1 + \sum_{i=1}^m c_i(g) = 0 \quad (c_i(g) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m), \\ g(\bar{x}, \bar{y}) > 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m; (\bar{x}, \bar{y})\}$ – фиксированный набор точек из Ω .

Для функции $g(x, y)$ будет справедливо равенство

$$\|g_\Omega\|_p = \left(\sum_{i=1}^m c_i(g)g(x_i, y_i) + g(\bar{x}, \bar{y}) \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{g(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Распишем последнюю запись более детально:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}, \bar{y}) &= g(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^m c_i(g)g(x_i, y_i) = c_0(g) \left[1 + \sum_{i=1}^m c_i(g) \right] + \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^m c_j(g) (u - x_j)_+^\alpha (v - y_j)_+^\beta \left. \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left((u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{j=1}^m c_j(g) (u - x_j)_+^\alpha \times \right. \\ &\times (v - y_j)_+^\beta \left. \right) \left[(u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{i=1}^m c_i(g) (u - x_i)_+^\alpha (v - y_i)_+^\beta \right] dudv = \\ &= \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^\alpha (v - \bar{y})_+^\beta + \sum_{j=1}^m c_j(g) (u - x_j)_+^\alpha (v - y_j)_+^\beta \right|^q dudv = \|g_\Omega\|_p^p. \end{aligned}$$

То есть

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = \|g_\Omega\|_p^p. \tag{8}$$

Отметим, что данное равенство будет играть принципиальную роль в последующих изысканиях.

Итак, справедлива

Теорема 2. Для функции $f(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$ оценка на Ω

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_p \sqrt[q]{h}, \tag{9}$$

где $\mathcal{A} := c(p) \sqrt[q]{\max\{b - a, d - c\}}$, является точной по порядку. Более того, для $f(x, y) \in F_{1,2}(0, 0)$ константа $\mathcal{A} := \sqrt{\max\{b - a, d - c\}}$, присутствующая в оценке

$$|f(x, y) - s_f(x, y)| \leq \mathcal{A} \|f_\Omega\|_2 \sqrt{h} \quad \forall (x, y) \in \Omega, \tag{10}$$

является наименьшей.

Доказательство. Положим в (6) следующее:

$$(a, c) = (\bar{x}, \bar{y}) < (x_1, y_1) \leq (x_i, y_i), \quad i = 2, \dots, m, \quad \text{где } (x_i, y_i) \neq (x_j, y_j), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

причем $(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, m$ подобраны так, что выполняется равенство

$$h_1(\bar{x}, \bar{y}) = h, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} c_0(g) &= - \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left((u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - \right. \\ &- (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \left. \right) (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 dudv, \\ c_i(g) &= -\delta_{1i}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Тогда функция $g(x, y) \in F_{1,p}(0, 0)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \iint_{\Omega} \left| (u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right|^{q-1} \operatorname{sgn} \left((u - \bar{x})_+^0 (v - \bar{y})_+^0 - \right. \\ &- (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \left. \right) \left[(u - x)_+^0 (v - y)_+^0 - (u - x_1)_+^0 (v - y_1)_+^0 \right] dudv. \end{aligned}$$

Легко проверить, что она удовлетворяет требованиям (7) и, следовательно, для неё будет справедливо равенство (8). Распишем $g(x, y)$ более подробно. Для этого сначала введём обозначения:

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{(x, y) \in \Omega : (x, y) \geq (x_1, y_1)\}, \\ G_2 &= \{(x, y) \in \Omega : x \leq x_1, y \geq y_1\}, \\ G_3 &= \{(x, y) \in \Omega : x \geq x_1, y \leq y_1\}, \\ G_4 &= \{(x, y) \in \Omega : (x, y) \leq (x_1, y_1)\}. \end{aligned}$$

Итак,

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in G_1, \\ (x_1 - x)(d - y), & \text{если } (x, y) \in G_2, \\ (b - x)(y_1 - y), & \text{если } (x, y) \in G_3, \\ (b - x)(y_1 - y) + (x_1 - x)(d - y_1), & \text{если } (x, y) \in G_4. \end{cases}$$

При этом

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = (b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1). \quad (12)$$

Далее пусть $s_g(x, y)$ – сплайн вида (1), интерполирующий функцию $g(x, y)$ в узлах (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$. Очевидно, что

$$s_g(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

В силу (11),(12),(13) левая часть неравенства (9) в точке (\bar{x}, \bar{y}) для функции $g(x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}, \bar{y}) - s_g(\bar{x}, \bar{y})| &= |g(\bar{x}, \bar{y})| = (b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1) = \\ &= \tilde{c}_1 (|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|) = \tilde{c}_1 h, \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_1 \in \mathbb{R}_+$.

В свою очередь, с учетом (8),(11),(12) правая часть неравенства (9) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \|g_\Omega\|_p \sqrt[q]{h} &= \mathcal{A} \sqrt[q]{g(\bar{x}, \bar{y})} \sqrt[q]{h} = \mathcal{A} \sqrt[q]{(b - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_1 - \bar{x})(d - y_1)} \times \\ &\times \sqrt[q]{|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|} = \tilde{c}_2 (|x_1 - \bar{x}| + |y_1 - \bar{y}|) = \tilde{c}_2 h, \quad \text{где } \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\exists \tilde{c}_3 \in \mathbb{R}_+ : |g(\bar{x}, \bar{y}) - s_g(\bar{x}, \bar{y})| \geq \tilde{c}_3 \|g_\Omega\|_p \sqrt[q]{h}$. Следовательно первая часть утверждения теоремы 2 доказана, то есть оценка (9) для функций из класса $F_{1,p}(0, 0)$ точна по порядку.

Докажем вторую часть утверждения теоремы 2. Для этого покажем, что $\forall \varepsilon \in (0, \mathcal{A}^2) \exists g_\varepsilon(x, y), \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega :$

$$|g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) - s_{g_\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y})| > \|g_\varepsilon\|_2 \sqrt{(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)h(\varepsilon)}. \quad (14)$$

Пусть $(\bar{x}, \bar{y}), (x_1, y_1)$ удовлетворяют таким же требованиям, что были раньше, причем $x_1 - \bar{x} = y_1 - \bar{y} := \varepsilon$. Положим $b - a = d - c = \mathcal{A}^2$.

Очевидно, что $\forall \varepsilon \in (0, \mathcal{A}^2) \exists m(\varepsilon) : h_1 = 2\varepsilon = h(\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &:= \sup_{(x,y) \in \Omega} \min_{j=1, \dots, m(\varepsilon)} h_j(x, y); & (x_1, y_1) &\leq (x_i, y_i), \quad i = 2, \dots, m(\varepsilon) \\ & & ((x_i, y_i) &\neq (x_j, y_j), \quad i, j = 1, \dots, m(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Пусть далее

$$g_\varepsilon(x, y) = g(x, y), \text{ где } (x_1, y_1) = (\bar{x} + \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon),$$

$s_{g_\varepsilon}(x, y)$ – сплайн вида (1), интерполирующий функцию $g_\varepsilon(x, y)$ в узлах (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m(\varepsilon)$. Ясно, что

$$s_{g_\varepsilon}(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Поэтому левая часть неравенства (14) в точке (\bar{x}, \bar{y}) имеет вид

$$|g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) - s_{g_\varepsilon}(\bar{x}, \bar{y})| = |g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})| = (b - \bar{x})\varepsilon + (d - y_1)\varepsilon = 2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2. \quad (15)$$

Для правой же части этого неравенства в точке (\bar{x}, \bar{y}) имеем

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon\|_2 \sqrt{(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)h(\varepsilon)} &= \sqrt{g_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})} \sqrt{2\varepsilon(\mathcal{A}^2 - \varepsilon)} = \sqrt{(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)(2\mathcal{A}^2\varepsilon - 2\varepsilon^2)} = \\ &= \sqrt{(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)^2 - \varepsilon^2(2\mathcal{A}^2\varepsilon - \varepsilon^2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая соотношения (15), (16), приходим к выводу о справедливости неравенства (14). Таким образом константу \mathcal{A} в неравенстве (10) нельзя уменьшить.

Замечание 1. Утверждения теорем 1, 2 легко переносятся на случай, когда $f(x) \in F_{1,p}(\alpha)$, где $x \in \mathbb{R}_d$, $\alpha \in Z_+^d$, $d > 2$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zhensykbayev A.A. // East J. on Approx. 2004. V. 10, № 1-2, P. 7–65.
2. Иванова Е.Н. // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 3. С. 48–54.
3. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.

Поступила в редакцию 10.04.2006г.

УДК 517.5

НАПРЯЖЕННО -ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ НАГРУЗОК

Г. К. КАЙШИБАЕВА

Институт математики МОН РК
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 gkk@math.kz

В работе исследуются ядра граничных интегральных уравнений модельной краевой задачи о действии сверхзвуковых подвижных нагрузок в цилиндрических полостях, в упругой среде, и исследуются их особенности. Проведены расчеты ядер при разных числах Маха. Результаты расчетов представлены в виде графиков и векторных полей, иллюстрирующих динамику среды при действии сосредоточенных на оси сверхзвуковых нагрузок.

В в е д е н и е.

Исследование сейсмических воздействий на протяженные подземные сооружения (трубопроводы, тоннели и т.п.) приводит к модельным задачам о действии подвижных нагрузок в цилиндрических полостях, расположенных в сплошной среде [1],[2]. При дифракции сейсмических волн на сооружении скорость движения возмущений вдоль его оси выше звуковой, поэтому необходимо разрабатывать методы решения для сверхзвуковых скоростей нагрузок.

Математическое описание таких процессов приводит к решению краевых задач для уравнений и систем уравнений гиперболического типа с бегущими нагрузками по границе области вдоль ее образующей. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), развитый для решения стационарных динамических задач для класса бегущих нагрузок в цилиндрических областях в [3],[4] базируется на использовании фундаментальных решений гиперболической системы, обладающих слабыми и сильными особенностями не только в точках действия сосредоточенных источников, но и на некоторых подвижных поверхностях – волновых фронтах. Здесь исследуются ядра ГИУ – фундаментальные решения уравнений Ламе в подвижной системе координат в сверхзвуковом случае.

1. Постановка задачи дифракции плоских волн.

Пусть в изотропной упругой среде распространяется плоская волна, потенциалы Ламе [5] которой имеют вид: $\Phi^0((\mathbf{k}, \mathbf{x}) + c_1 t)$, $\Psi^0((\mathbf{k}, \mathbf{x}) + c_2 t)$, $\|\mathbf{k}\| = 1$: $u^0 = \text{grad}\Phi^0 + \text{rot}\Psi^0$.

Здесь \mathbf{k} – волновой вектор, характеризующий направление распространения волны, c_1 – скорость распространения объемных волн (сжатие-растяжение), c_2 – скорость сдвиговых волн,

Keywords: *Dynamics of elastic medium, Green tensor, fundamental solution, boundary integral equation, diffraction wave*

2000 Mathematics Subject Classification: 74J05

© Г. К. Кайшибаева, 2006.

$u(x, t)$ – перемещения среды. Если k перпендикулярен оси Z цилиндра, т.е. если $k_3 = 0$, то действующая нагрузка не зависит от z . В этом случае в среде реализуется состояние плоской или антиплоской деформации, либо их суперпозиция.

Как известно, они должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\Delta \Phi^0 - c_1^{-2} \partial_t^2 \Phi^0 = 0, \quad \Delta \Psi^0 - c_2^{-2} \partial_t^2 \Psi^0 = 0.$$

Поскольку задача дифракции плоских волн на отверстиях в упругой плоскости достаточно изучена ([1],[2]), здесь полагаем, что $k_3 \neq 0$, а также $k_3 \neq 1$.

В силу линейности задачи можно отдельно рассмотреть задачу дифракции волн объемной деформации ($\Psi^0 = 0$) и сдвиговой ($\Phi^0 = 0$). Тогда для отраженной волны на границе

$$\sigma_{ij}^S(x, t) n_j(x) = -\sigma_{ij}^0((k, x) + c_1 t) n_j(x) = P_i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + c_1 t), \quad x \in D, \quad i, j = 1, 2, 3$$

где $l = 1$ или $l = 2$ в зависимости от типа падающей волны. При $k_3 \neq 0$ граничная нагрузка P движется с постоянной скоростью $c = c_1/k_3$ вдоль D и ее компоненты представимы в виде

$$\sigma_{ij}^S(x, t) n_i(x) = p_i(x, x_3 + ct), \quad x = (x_1, x_2) \in S, \tag{1}$$

где по одноименным индексам в произведении всюду суммирование от 1 до 3.

Далее предполагаем, что p_i локально интегрируемы на D и $\exists \varepsilon$:

$$\|p(x, z)\| \leq O(|z|^{-\varepsilon}) \text{ при } z \rightarrow \infty. \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в подвижной системе координат: $(x_1, x_2, z) = (x_1, x_2, x_3 + ct)$ удовлетворяют следующим уравнениям движения :

$$\sigma_{ij,j} - \rho c^2 u_{i,zz} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (\text{закон Гука}) \tag{4}$$

где $\theta = \lambda u_{k,k}$, $\varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензора деформаций и напряжений соответственно, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, $(\partial / \partial x_3 = \partial / \partial z)$.

Подставляя (4) в (3), получаем уравнение динамики упругой среды в перемещениях

$$\left((M_1^{-2} - M_2^{-2}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \left(M_2^{-2} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta_i^j \right) u_i + c^{-2} F_i = 0, \tag{5}$$

где $u_i = u_i(x_1, x_2, z)$. Здесь введены числа Маха $M_j = c/c_j$, $j = 1, 2$.

Если скорость бегущей нагрузки не совпадает с c_2 или c_1 , то возможны три случая: дозвуковой ($c < c_2$), межзвуковой ($c_2 < c < c_1$) и сверхзвуковой ($c > c_1$). В первом случае ($M_1 < 1, M_2 < 1$) система (4) – эллиптического типа, во втором ($M_2 > 1, M_1 < 1$) система эллиптическая для объемной составляющей перемещений и гиперболична для сдвиговых деформаций. В сверхзвуковом случае ($M_2 > 1, M_1 > 1$) система строго гиперболична. В двух последних случаях в среде появляются ударные волны со следующими условиями на скачки на фронтах F , [4]:

$$[u_j]_F = 0, [h_z u_{i,j} - h_j u_{i,z}]_F = 0, [h_j \sigma_{ij} - \rho c^2 h_z u_{i,z}]_F = 0. \tag{6}$$

Поскольку $\|k\| = 1$, следовательно $k_3 \leq 1$, а потому $c \geq c_1$. Значит, при дифракции плоских волн на цилиндрической поверхности реализуется межзвуковой и сверхзвуковой случаи.

Таким образом, для построения решения дифракционной задачи требуется определить поле отраженных волн, а именно, перемещения $u^S(x, z)$, удовлетворяющие уравнениям движения

(5), условиям на скачки на фронтах отраженных ударных волн и условиям затухания волн на бесконечности: $u^S(x, z) \rightarrow 0$ при $\|(x, z)\| \rightarrow \infty$.

Для решения поставленной задачи далее используем метод граничных интегральных уравнений для сверхзвуковых бегущих нагрузок ($v > c_1$).

Верна следующая теорема, [4].

Теорема 1. При $c > c_1$ классическое решение $u(x, t)$ уравнений (5), удовлетворяющее условиям (1), (6) и предположению: $\exists \varepsilon > 0, \delta > 0$ такие, что

$$\|u(x, z)\| \leq O(|z|^{-\varepsilon}) \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$\|u_j(x, z) - u_j(y, t)\| \leq C \|(x, z) - (y, t)\|^\beta, \quad \text{при } (x, z) \in D,$$

можно восстановить в D^- по граничным значениям напряжений $p(x, y, z)$ и перемещений u по формуле

$$\begin{aligned} \rho u_i H_S^-(x) \theta(z) = & \sum_{k=1}^2 \int_{S_z^k(x)} \theta(z - m_k) dS(y) \int_0^{z - m_k r} \{U_i^j(x - y, z - \tau) p_j(y, \tau) - \\ & - H_i^{jd}(x - y, z - \tau, n(y)) u_{j,z}(y, \tau)\} d\tau - \\ & - V.P. \int_{S_z^k(x)} H_i^{js}(x - y, z, n(y)) u_j(y, z - m_k r) dS(y), \quad r = \|x - y\|, \\ S_z^k(x) = & \{y \in S : m_k \|x - y\| < z\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где последний интеграл в этих формулах для граничных значений (x, z) сингулярный, берется в смысле главного значения, $H_S^-(x)$ – характеристическая функция S^- , равная 1/2 на S .

Исследуем ядра этих интегралов U и H . Формула (7) на границе дает сингулярные ГИУ для решений краевой задачи (5), (6), (1).

2. Тензор Грина и его первообразная.

Ядро первого интеграла U – тензор Грина – фундаментальное решение уравнений движения, имеет следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^1 = & \frac{1}{2\pi c_2^2} \left[\frac{\theta_2}{V_2^-} + \frac{z^2 x_1^2}{\|x\|^4 M_2^2} \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-} \right] - \frac{x_2^2}{\|x\|^4 M_2^2} [\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-] \right], \\ \hat{U}_2^2 = & \frac{1}{2\pi c_2^2} \left[\frac{\theta_2}{V_2^-} + \frac{z^2 x_2^2}{\|x\|^4 M_2^2} \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-} \right] - \frac{x_1^2}{\|x\|^4 M_2^2} [\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-] \right], \\ \hat{U}_1^2 = \hat{U}_2^1 = & -\frac{x_1 x_2}{2\pi c^2 \|x\|^4} \left[z^2 \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-} \right] + [\theta_1 V_1^- - \theta_2 V_2^-] \right], \\ \hat{U}_3^3 = & \frac{1}{2\pi c^2} \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} + \frac{m_2^2 \theta_2}{V_2^-} \right], \\ \hat{U}_2^3 = \hat{U}_3^2 = & -\frac{x_2 z}{2\pi c^2 \|x\|^2} \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-} \right], \quad \hat{U}_1^3 = \hat{U}_3^1 = -\frac{x_1 z}{2\pi c^2 \|x\|^2} \left[\frac{\theta_1}{V_1^-} - \frac{\theta_2}{V_2^-} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

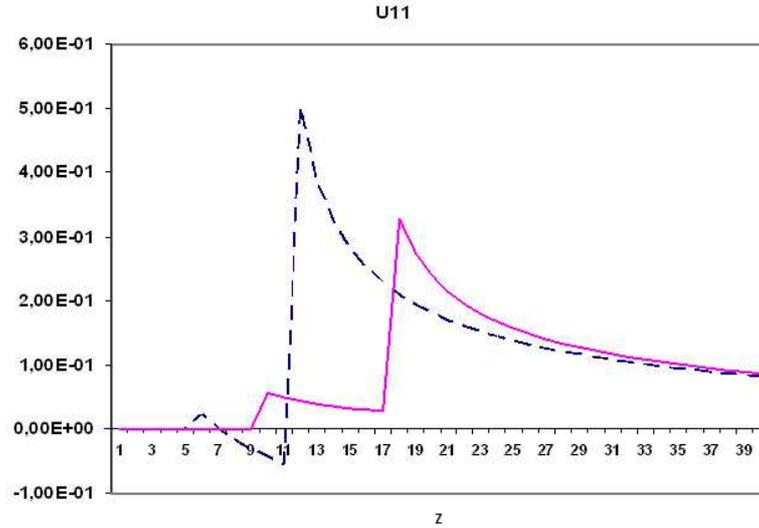


Рис. 1: Изменение (U_1^1) по оси z : $(M_1 = 1.5, M_2 = 2.5)$

где $V_k^- = (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{1/2}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $m_k = \sqrt{M_k^2 - 1}$, $\Theta_j = \Theta(z - m_j \|x\|)$, $\Theta(z)$ – функция Хэвисайда. На поверхностях конусов, волновых фронтах ударных волн ($z = m_k \|x\|$, $k = 1, 2$) тензор U_i^j имеет слабые интегрируемые особенности типа $(z^2 - m_j^2 \|x\|^2)^{-1/2}$. Перемещения и напряжения при приближении к фронтам стремятся к бесконечности, как $1/V_k^-$. Компоненты тензора (U_1^j, U_2^j, U_3^j) описывают перемещения упругой среды при действии силы $F^j = \delta(x, z)(\delta_1^j, \delta_2^j, \delta_3^j)$, направленной вдоль оси x_j и сосредоточенной в начале подвижной системы координат $x = 0, z = 0$.

Исследованы компоненты тензора Грина при разных скоростях нагрузки: $c = 1.5, 2.0, 3.0$ для упругой среды с безразмерными параметрами $c_1 = 1.0, c_2 = 0.8$. На рис.1 представлены изменения компонент тензора Грина по z . Здесь по горизонтальной оси отложен номер точки на отрезке с шагом $h_z = 0, 01$, пунктирной линией изображен график при $x_1 = -0.3, x_2 = -0.4$, сплошной для более удаленной от оси точки $x_1 = x_2 = 0.5$. Максимумы всплесков на графиках связаны с фронтами объемной и сдвиговой волн, где тензор Грина имеет особенности. По мере удаления от фронтов смещения быстро убывают.

При удалении от нагрузки зона объемной деформации расширяется, а перемещения внутри зон убывают. Чем дальше точка наблюдения находится от оси z , тем позднее в нее приходит ударная волна от движущейся сосредоточенной нагрузки. Поэтому на графиках им соответствуют более длинные нулевые (невозмущенные) начальные участки по оси z .

Удобно выделить объемную и сдвиговую составляющую и для тензора Грина: $\hat{U}_i^j = \hat{U}_{i1}^j + \hat{U}_{i2}^j$. Вне звуковых конусов $K_l^+ = \{(x, z) : z > m_l \|x\|\}$, $l = 1, 2$, компоненты тензоров \hat{U}_{il}^j равны нулю. На рис.2 представлено векторное поле компонент тензора Грина (U_1^1, U_3^1) . Видно, что вне зоны K_1^+ среда покоится. В зоне между звуковыми конусами деформация только объемная, а в зоне K_2^+ к объемной добавляется сдвиговая деформация.

На рис.3 в плоскости, перпендикулярной оси z , представлены перемещения (U_1^1, U_2^1) в области конусов K_1^+ и K_2^+ , вне зоны K_1^+ они нулевые. Внутри общей части конусов возмущений (за фронтом сдвиговой волны) перемещения u_1, u_2 выстраиваются в направлении действия силы x_j . В зоне между фронтами объемных и сдвиговых волн и вблизи фронта сдвиговой волны в K_2^+ перемещения завихряются.

При построении ядра ГИУ $H_i^j(x, z, n)$ используется тензор $W_i^j(x, z)$. Тензор \hat{W}_j^i , первообразная по z тензора U_i^j , непрерывен на фронтах K_j , не имеет сильных особенностей на оси

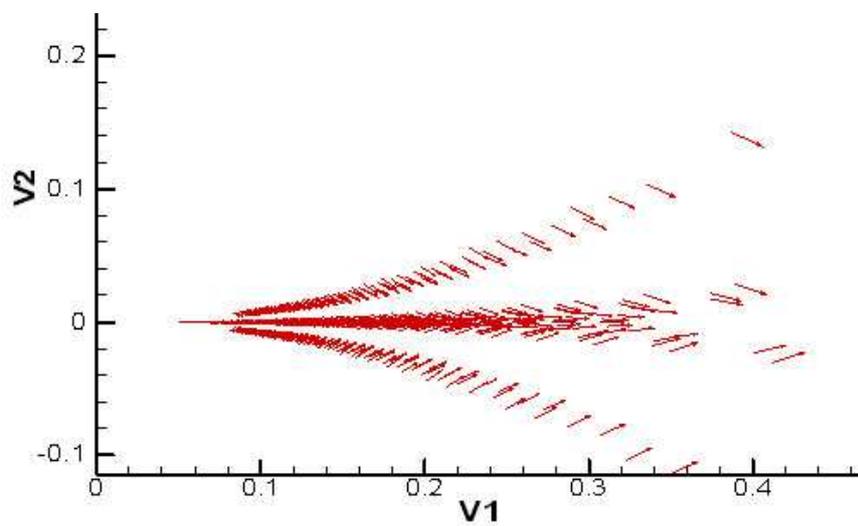


Рис. 2: Поле перемещений (U_1^1, U_3^1) в плоскости x_1, z : $z = 0.1$, $M_1 = 1.2$, $M_2 = 2.0$.

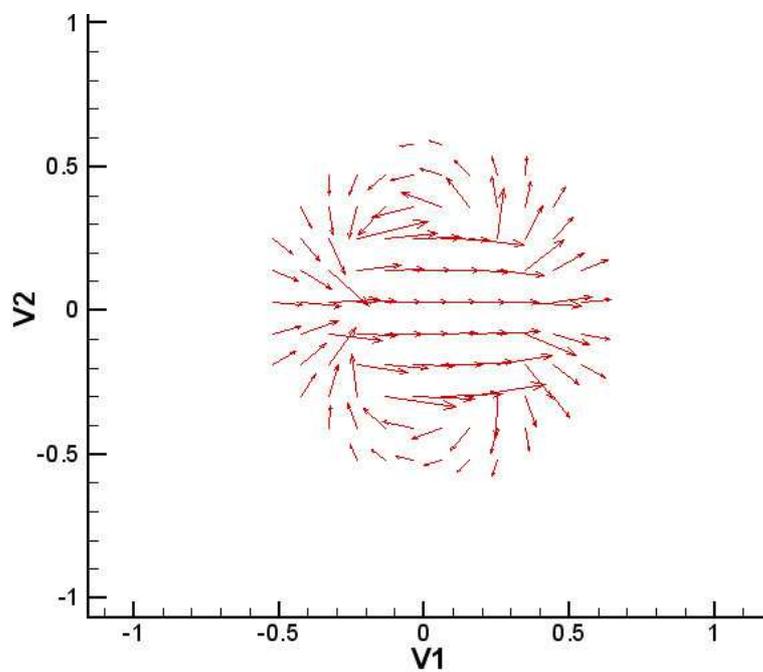


Рис. 3: Поле перемещений U_1^1, U_2^1 в плоскости x_1, x_2 : $z = 0.88$; $M_1 = 1, 5$; $M_2 = 2, 5$.

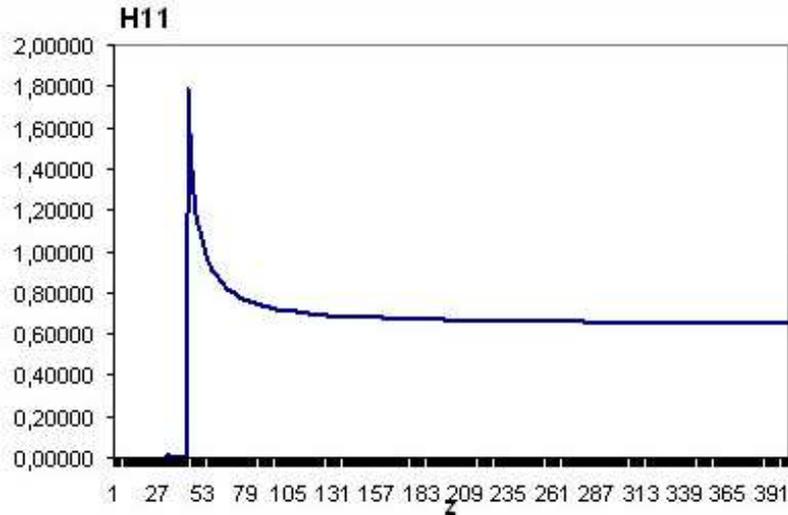


Рис. 4: Тензор (H_1^1) по оси z : $M_1 = 1.5$, $M_2 = 2.5$, $x_1 = x_2 = 0.5$.

z , однако имеет слабую логарифмическую особенность по $\|x\|$:

$$\hat{W}_j^i = \sum_{k=1}^2 \hat{W}_{ik}^j = \hat{U}_i^j * \delta(x_1, x_2)\theta(z) = \hat{U}_j^i * \theta(z). \tag{9}$$

Здесь $*$ это знак свертки. Например,

$$2\pi c^2 W_1^1 = \frac{z}{r^4}(x_1^2 - x_2^2)(\theta_1 V_1 - \theta_2 V_2) + 0,5m_1^2 \theta_1 \ln \frac{z + V_1}{m_1 r} + (M_2^2 - 0,5m_2^2)\theta_2 \ln \frac{z + V_2}{m_2 r}. \tag{10}$$

Выпишем W_j^i , выделяя логарифмическую особенность по $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

$$W_j^i(x, z) = W_j^{is}(x, z) + W_j^{id}(x, z) = \sum_{k=1}^2 \theta_k(z - m_k r)W_{jk}^{is}(x) + W_j^{id}(x, z),$$

$$2\pi c^2 W_{j1}^{is}(x) = -(\delta_{i3}\delta_{j3} + 0,5m_1^2(1 - \delta_{i3})\delta_{ij}) \ln m_1 r, \tag{11}$$

$$2\pi c^2 W_{j2}^{is}(x) = (\delta_{i3}\delta_{j3} + \delta_{ij}(0,5m_1^2(1 - \delta_{i3}) - M_2^2)) \ln m_2 r.$$

Тензор W описывает перемещения в среде при действии подвижной силы с компонентами $F_i = \delta_i^j \delta(x_1, x_2)H(z)$, сосредоточенной на полуоси $z > 0$, и направленной вдоль оси x_j . Он непрерывен на фронтах $z_k = m_k \|x\|$, $k = 1, 2$.

3. Тензор фундаментальных напряжений T и H .

Напряжения, порождаемые тензором U на площадке с нормалью n можно описать с помощью тензора T , который получаем, используя закон Гука (4)

$$-T_k^i(x, z, n) = \lambda \frac{\partial U_l^k}{\partial x_l} n_i + \mu n_l \left(\frac{\partial U_i^k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l^k}{\partial x_i} \right).$$

При сверхзвуковых скоростях ($c > c_1$) он имеет вид, [3]:

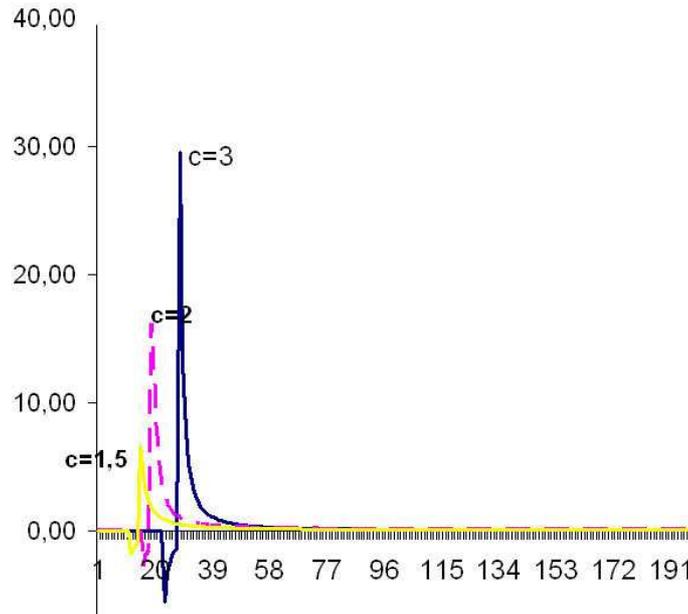


Рис. 5: Компоненты T_1^1 фундаментальных напряжений при различных значениях скорости распространения волны c .

$$\frac{2\pi c^2}{\mu} T_j^i(x, z, n) = (M_1^2 - M_2^2) n_j f_{01,i} - M_2^2 \left(\delta_j^i \frac{\partial f_{02}}{\partial n} + n_i f_{02,j} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial n} (f_{21,ij} - f_{22,ij}),$$

где

$$2\pi f_{0k}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k \|x\|) (z^2 - m_k^2 \|x\|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$2\pi f_{1k}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k \|x\|) \ln((z + V_k^-)/m_k \|x\|),$$

$$2\pi f_{2k}(\|x\|, z) = \theta(z - m_k \|x\|) (z \ln((z + V_k^-)/m_k \|x\|) - V_k^-),$$

$$2\pi f_{2k'ij} = \frac{\theta_k}{V_k^-} \left[\frac{z^2}{r^2} r_{,i} r_{,j} - \frac{z}{r} (\delta_{i3} r_{,j} + \delta_{j3} r_{,i}) + \delta_{i3} \delta_{j3} \right] - \frac{V_k^- \theta_k}{r^2} (\delta_{ij} \delta_{[i]3} - r_{,i} r_{,j}).$$

Компоненты этого тензора описывают напряжения, порождаемые сосредоточенной бегущей нагрузкой на площадке с единичной нормалью n . Тензор \hat{T}_j^i имеет сильные особенности на K_j типа $(z^2 - m_j^2 \|x\|^2)^{-3/2}$.

Соответствующие нормальные напряжения на площадках с нормалью $(1, 0, 0)$ представлены на рис.5, где максимумы напряжений находятся на фронтах волн, затем они резко падают в зоне объемной деформации и снова резко возрастают на фронте сдвиговой волны с последующим быстрым спадом по мере удаления от фронта волны. Нагрузки быстро убывают по мере удаления от точки приложения сил. Графики даны для $M_1 = 1.5, 2.0, 3.0$, ($x_1 = x_2 = 0.1$).

В отличие от дозвуковых бегущих нагрузок в сверхзвуковом случае в граничных интегральных уравнениях (7) используется ядро H_i^k , которое является первообразной тензора фундаментальных напряжений T :

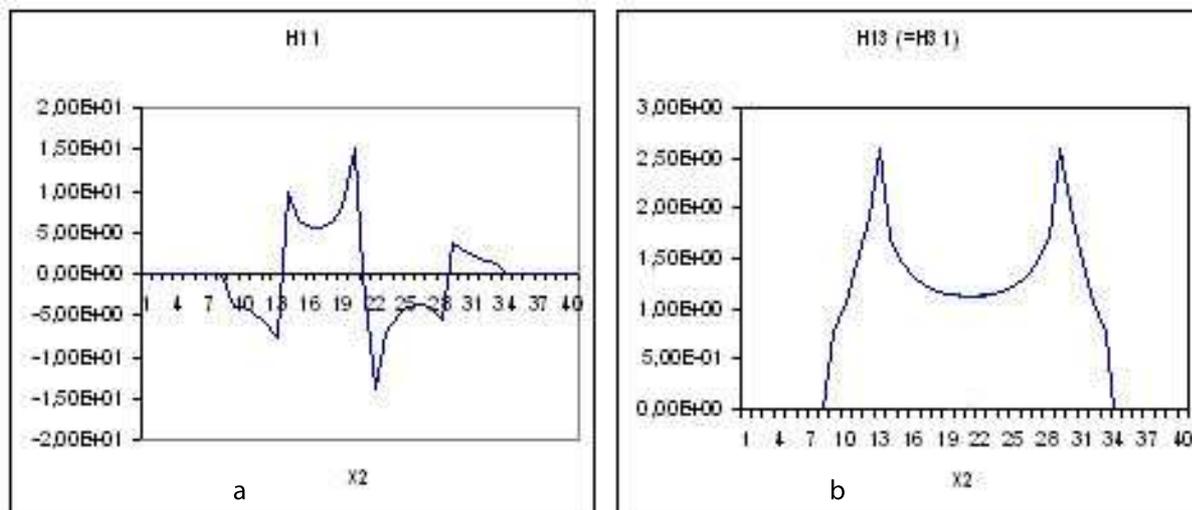


Рис. 6: Тензор (H_1^1) по оси x_2 на графике слева (рис.6а), (H_3^1) справа (рис.6б): $M_1 = 2.0$, $M_2 = 3.33$, $z = 0.25$.

$$\frac{c^2}{\mu} \hat{H}_i^j(x, z, n) = [2M_1^2 - M_2^2] n_j f_{11'i} - M_2^2 \left[\delta_{ij} \frac{\partial f_{12}}{\partial n} + n_i f_{12'i} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial n} [f_{31,ij} - f_{32,ij}], \quad (12)$$

где, вводя обозначение $\theta_k = \theta(z - m_k \|x\|)$:

$$f_{1k,i}(r, z) = \frac{\theta_k}{2\pi V_k^-} [\delta_{i3} - \frac{z r_{,i}}{r}], \quad f_{3k,ij}(r, z) = \frac{1}{(2\pi)} [a_{kij} \theta_k \ln \frac{z + V_k^-}{m_k \|x\|} - \frac{V_k^- \theta_k}{\|x\|} d_{ij}],$$

$$f_{3k,ijl}(r, z) = \frac{1}{2\pi} [a_{kij} \theta_k \frac{(\delta_{l3} + V_{k,l}^-)r - r_{,l}(z + V_{k,l}^-)}{m_k r^2} \frac{z + V_k^-}{m_k \|x\|} - \frac{\theta_k (V_{kl}^- r - r_{,l} V_k^-)}{(\|x\|)^2} d_{ij} - \frac{V_k^- \theta_k}{\|x\|} d_{ij,l}],$$

$$a_{kij} = (\delta_{i3} \delta_{j3} + 0.5 m_k^2 \delta_{ij} (1 - \delta_{[i]3})), \quad d_{ij} = [\delta_{i3} r_{,j} + \delta_{j3} r_{,i} + z(r_{,i} r_{,j} - 0.5 \delta_{ij} (1 - \delta_{[i]3})) / r],$$

$$d_{ij,l} = \delta_{i3} r_{,jl} + \delta_{(j3)} r_{,il} + (\delta_{l3} r - r_{,l} z) / z^2.$$

При построении ГИУ тензор H разбивают на два тензора:

$$H_j^i(x, z, n) = H_j^{is}(x, z, n) + H_j^{id}(x, z, n) = \sum_{k=1}^2 \theta_k (z - m_k r) H_{jk}^{is}(x, z, n) + H_j^{id}(x, z, n),$$

где

$$-H_{jk}^{is}(x, z, n) = \lambda \frac{\partial W_{lk}^j s}{\partial x_l} n_i + \mu n_l (\frac{\partial W_{lk}^j s}{\partial x_l} + \frac{\partial W_{lk}^j s}{\partial x_i}).$$

Тензор H_j^{id} имеет только интегрируемую особенность на фронтах типа $(z^2 - m_j^2 r^2)^{-1/2}$, а тензор H_j^{is} – более сильную особенность типа $1/r$ при $r = 0$, которая обуславливает сингулярность интегралов на границе в формуле (7).

Поведение компонент тензоров T и H представлено на рисунках 5, 6. Поскольку, как следует из (11), тензор W имеет логарифмическую особенность на оси z (при $z = 0$), тензор H в диагональных компонентах имеет особенность типа $1/r$ при $r \rightarrow 0$. Это наблюдаем на рисунке 6.а слева, где точке с номером 21 соответствует $r = 0$. Так как $W_j^{is} = 0$ при $i \neq j$, такие компоненты W_j^i непрерывны при переходе через ось z ($r = 0$). Соответственно H_j^i при $i \neq j$ также непрерывны на оси z (рис. 6.б). У этого тензора наблюдаем слабые особенности типа $1/V_2^-$ на фронте сдвиговой волны и конечный скачок на переднем фронте объемной волны.

Цитированная литература

1. **Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айтиалиев, Л.А. Алексеева** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989.
2. **А.Н. Гузь, В.Д. Черевко** Дифракция упругих волн. Киев, 1978.
3. **Алексеева Л.А.** // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. № 5. С. 840 – 848.
4. **Alexeeva L.A.** // Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998. V. 11. P. 37 – 44.
5. **Новацкий В.** Теория упругости. М, 1975.

Поступила в редакцию 25.12.2006г.

УДК 517.518.476

ТЕРМОКАПИЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ ЭРОЗИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТАКТАХ

Ш. А. КУЛАХМЕТОВА

Институт математики МОН РК
050010 Алматы, ул.Пушкина , 125

В настоящей статье оцениваются процессы эрозии в электрических контактах, которые происходят под влиянием термокапиллярных сил, имеющих эффективные величины при значительных градиентах температуры и существенной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры.

При взаимодействии электрической дуги с электродом под опорным пятном дуги образуется жидкометаллическая ванна, которая является основным источником эрозии. Известно, что в электрических контактах существует несколько видов дуговой эрозии: один из видов связан с испарением контактного материала и наиболее значителен при относительно небольших токах и скоростях протекания теплофизических процессов, второй вид эрозии обусловлен газокинетическим и электромагнитным давлениями на зону расплава.

Однако, в некоторых случаях экспериментально наблюдаемая капельная эрозия не поддается объяснению только лишь давлением. В связи с этим в работе [1] высказано предположение о влиянии термокапиллярных сил на выброс жидкого металла к периферии контактного пятна вследствие эффекта Марангони, который наблюдается при значительных градиентах температуры и существенной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. В [1] была сделана попытка оценить процессы эрозии в электрических контактах, происходящей под влиянием термокапиллярных сил. Однако в виду сложности общей постановки задачи численная реализация ее оказалась весьма затруднительной, а полученные априорные оценки этого процесса могут оказаться недостаточно точны.

Keywords: *electric contacts, thermocapillary erosion, nonstationary boundary value problem*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© Ш. А. Кулахметова, 2006.

Поэтому в данной работе эта задача рассматривается в более простой постановке с использованием приближения тонкого слоя Марангони. Именно: в тонком слое доминируют касательные напряжения, обусловленные силами поверхностного натяжения, дающие возможность развить радиальную скорость жидкого металла на поверхности ванны достаточно большую для эрозийного выброса его с периферии контактного пятна.

1. Математическая модель термокапиллярной конвекции .

Для того, чтобы описать процессы, происходящие в жидкой зоне, необходимо рассмотреть систему уравнений Навье-Стокса

уравнение энергии

$$c\gamma\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v}\nabla T\right) = \lambda\Delta T + q_T^0 + q_j^0, \quad (1)$$

уравнение движения

$$\nabla P + \nu\Delta\bar{v} + \bar{F}, \quad (2)$$

уравнение неразрывности

$$\nabla\bar{v} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{v} = v_r\bar{i} + v_z\bar{j}$ - скорость движения расплава; v_r, v_z - радиальная и аксиальная составляющие, P - давление, T - температура, c - удельная теплоемкость, λ - коэффициент теплопроводности, γ - плотность, q_T^0, q_j^0 - плотность томсоновых и джоулевых источников тепла,

$$q_T^0 = -\frac{\sigma_T}{\rho}\bar{j}\nabla T, \quad q_j^0 = \rho\bar{j}^2,$$

где σ_T - коэффициент Томсона, ρ - удельное электросопротивление, $\bar{j}(j_r, j_z)$ - плотность тока, $\bar{F} = \frac{\mu_0}{\gamma}(\bar{j} \times \bar{H})$ - электромагнитная сила, \bar{H} - вектор магнитной напряженности, μ_0 - магнитная проницаемость.

В цилиндрических координатах (осесимметрический случай):

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial r}e_r + \frac{\partial T}{\partial z}e_z,$$

$$\nabla\bar{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\text{grad}T = \Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Принимая во внимание (4), запишем уравнения (1)-(3) в цилиндрических координатах:

уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{c\gamma}\left[q_T^0 + q_j^0\right],$$

уравнения движения

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] + F_r^0,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + F_z^0,$$

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

2. Математическая модель термокапиллярной конвекции в слое Марангони.

Интенсивность термокапиллярного движения удобно характеризовать модифицированным числом Марангони $Ma = \frac{\beta T^* \alpha}{\gamma \nu^2}$ и числом Рейнольдса $Re = \frac{\alpha v}{\nu}$, где β - температурный градиент поверхностного натяжения, α - радиус расплава, $T^* = T_0 - T_m$ - разность температур в центре расплава и плавления, $T_0 = \frac{q_0 \alpha}{\lambda}$, q_0 - удельный поток в катод, $v = Ma \frac{\nu}{\alpha}$ - характерная скорость на свободной границе.

Уравнения погранслоя Марангони выводятся на базе следующих предположений: число $Re \gg 1$, отношение поперечного и продольного масштабов слоя жидкого металла

$$\frac{h_z}{\alpha} \rightarrow 0, \quad Re \rightarrow \infty, \quad v_z \ll v_r,$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial r} \ll \frac{\partial v_j}{\partial z}, \quad j = r, z.$$

Так как характерное время протекания тепловых процессов t_T много больше характерного времени гидродинамических процессов t_v для параметров, присущих электроконтактным дуговым процессам, то можно отдельно решать гидродинамическую задачу в квазистационарном тепловом приближении, т.е. считать температуру T и размер жидкометаллической ванны замороженными для данного значения времени t .

Переходя к безразмерным координатам и используя приближение тонкого слоя Марангони, запишем уравнения, описывающие гидродинамические и теплофизические процессы в зоне расплава.

Уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_j(r, z), \quad (5)$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + F_r(r, z), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Здесь H_φ - угловая составляющая вектора магнитной напряженности, а H_r и H_z равны нулю в осесимметрическом случае.

Начальные распределения температуры и радиальной скорости, а также их значения на границе $z = 1$ определяются из вспомогательной задачи Appendix, которая приводится несколько ниже, и задаются функциями

$$T(r, z, 0) = \frac{2\alpha q_0 \sqrt{t_m}}{T^* \lambda \sqrt{RePr}} \cdot ierfc \frac{z\sqrt{Pr}}{2\sqrt{t_m}}, \quad (8)$$

$$v_r(r, z, 0) = \frac{2}{\pi} \cdot e^{z^2} erfcz, \quad (9)$$

где t_m - время плавления, $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$.

На границе $z = 0$ имеем

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} \alpha q_0 / T^* \sqrt{Re}, & 0 < r \leq f, \\ 0, & r > f, \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{Ma}{Re^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (11)$$

- условие Марангони, которое отражает действие сил поверхностного натяжения в зависимости от температуры.

На нижней границе слоя при $z = 1$ температура и радиальная скорость выражаются функциями

$$T(r, 1, t) = \frac{2\alpha q_0 \sqrt{t + t_m}}{2} T^* \lambda \sqrt{RePr} \cdot ierfc \frac{\sqrt{Pr}}{2\sqrt{t + t_m}}, \quad (12)$$

$$v_r(r, 1, t) = v_r(r, 1, 0) + \frac{\pi}{2} erfc \frac{1}{2\sqrt{t}}. \quad (13)$$

Apendix. Известно, что решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

в области ($z > 0, t > 0$), удовлетворяющее начальному условию

$$T(z, 0) = 0,$$

и с заданным потоком на границе $z = 0$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha q_0}{T^* \sqrt{Re}}$$

имеет вид

$$T(z, t) = \frac{2\alpha q_0 \sqrt{t}}{T^* \lambda \sqrt{RePr}} ierfc \frac{z\sqrt{Pr}}{2\sqrt{t_m}}. \quad (14)$$

Задача (5 - 13) рассматривается с момента, когда температура в точке $z = 0$ достигнет температуры плавления. Этот момент, а также условия (8),(9),(12)и 13) находятся из формулы (14).

3. Численная реализация.

Аналитическое решение подобных задач весьма затруднительно, поэтому поставленную задачу (5 - 13) решаем приближенным методом граничных интегральных уравнений

[2] Этот метод выгодно отличается от метода конечных разностей и конечных элементов, где используется дискретное представление как самой области, так и ее границы, тем что он основывается на дискретном представлении лишь внешней границы. Он является синтезом аналитического и численного методов. Здесь с помощью аналитических методов задача сводится к граничным интегральным уравнениям, которые далее с помощью дискретизации границы решаются численным методом. Разработано программное средство "Magangoni" для вычисления радиальной скорости v_r жидкого вольфрама вблизи свободной границы. Расчет проводился для вольфрамового катода. Использовались экспериментальные данные работы [3], в соответствии с которыми при токе $I=300\text{A}$ и плотности тока $j = 6.45 * 10^7 \text{A}/\text{m}^2$ радиус пятна $f = 1.22 * 10^{-3}\text{m}$, удельный тепловой поток в вольфрамовый катод $q_0 = 3.2 * 10^8 \text{.}/\text{m}^3$, радиус расплава $\alpha = 2.9 * 10^{-3}\text{m}$. При этом число Марангони $Ma = 1.8 * 10^4$, характерная скорость на поверхности - $16\text{m}/\text{c}$.

Полученные результаты счета показали, что в начальный момент времени радиальная скорость жидкого вольфрама v_r с глубиной слоя уменьшается быстрее, чем в конце рассматриваемого процесса. Наибольшее значение v_r , принимаемое на поверхности слоя, достигает $11\text{m}/\text{c}$.

Из этого результата следует, что зависимость разности кинетической энергии слоя вольфрама и суммы его поверхностной и потенциальной энергий (DW) от времени близка к линейной. В начале процесса действия дуги на электрод эта разность увеличивается медленнее, чем в конце, т.е. со временем интенсивность эрозии электрода увеличивается.

Для полученной радиальной скорости выполняется неравенство

$$DW = \frac{mvR^2}{2} - \sigma S - 2mgR > 0,$$

где m , S , R – масса, площадь поверхности и радиус капли вольфрама, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Заключение. Из полученных результатов следует, что при вычисленной скорости кинетическая энергия слоя вольфрама превышает суммы его поверхностной и потенциальной энергий, что является подтверждением предположения о влиянии термокапиллярных сил на эрозию в электрических контактах.

Цитированная литература

1. S.N. Kharin. // Thermocapillary mechanism of contact erosion during arcing. Proc. of 15-th Int. Conf. of Electrical Contacts, 1990, Monreal, Canada. P. 37-43.
2. К.Бреббия, Ж.Теллес, Л.Вроубел. // Методы граничных элементов. М., 1987.
3. М.Ф.Жуков и др. // Приэлектродные процессы в дуговых разрядах. Новосибирск. 1982.

Поступила в редакцию 13.07.2006г.

УДК 539.3

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Н. И. МАРТЫНОВ, А. Г. ТАНИРБЕРГЕНОВ

Институт механики и машиноведения им.У.А. Джолдасбекова МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, nikmar50@mail.ru

Исследована релей-тейлоровская неустойчивость неньютоновской вязкопластической среды.

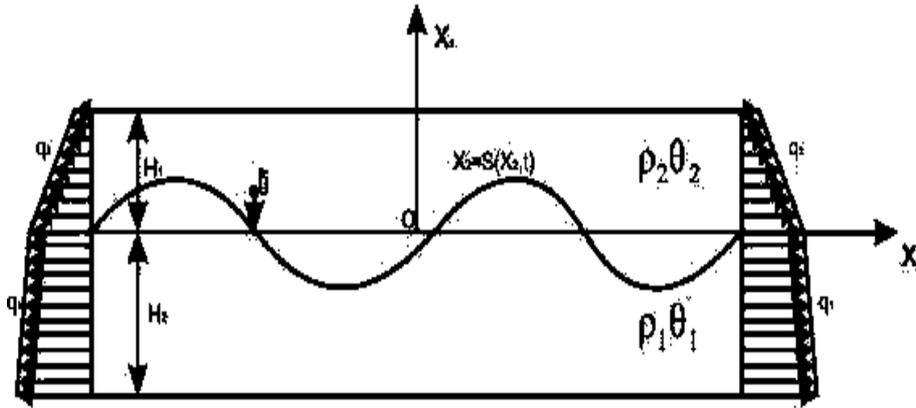
Введение. Линейная стадия диапиризма достаточно полно исследована аналитическими методами и экспериментально. Подробный анализ этих исследований дан в [1]. Аналитические исследования этого направления базировались на модельных уравнениях ползущих течений Стокса вязкой ньютоновской несжимаемой жидкости. Показано, что существует доминантная длина волны, при которой скорость роста границы возмущения слоёв максимальна. Влияние реологии слоёв, находящихся под действием тектонических сил, на развитие начального этапа диапиризма мало изучена. Исследованию в этой области посвящены работы [2-4]. В [2,3] рассмотрена устойчивость вязкопластического течения весомой слоистой среды, приведены основные соотношения для возмущений. Оценено влияние степени контрастности параметров вязкопластического слоя, заключённого между двумя вязкими слоями, на скорость роста возмущений. В [4] рассмотрена гравитационная неустойчивость идеально пластического слоя, покоящегося на слое вязкой жидкости. Показано, что реология слоёв является основной причиной неоднородного по пространству распределения диапиров. Следует отметить, что в целях упрощения исследования авторы вывели основные соотношения для возмущений из физически абсурдных утверждений, в результате чего потерял скачок касательных напряжений на границе раздела слоёв. Следовательно, эти результаты нуждаются в более строгом обосновании. В настоящей работе исследуется релей-тейлоровская неустойчивость неньютоновской вязкопластической жидкости. Выбранная реологическая модель позволяет обобщить и уточнить результаты работ [2-4].

Постановка задачи, основные соотношения. Рассмотрим в плоской постановке задачу о гравитационной неустойчивости двухслойной неньютоновской вязкопластической среды на жестком основании, подверженной действию горизонтальных тектонических усилий $q_1 = q_1(x_2), q_2 = q_2(x_2)$ (рис. 1).

Keywords: *Gravitational instability, viscousplastic, salt dome.*

2000 Mathematics Subject Classification: 86A60

© Н. И. Мартынов, А. Г. Танирбергенов, 2006.

Рис. 1: Схема двухслойной среды ($\rho_2 > \rho_1$).

Уравнения ползущих движений и уравнения состояния несжимаемой неньютоновской вязкопластической среды имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij,j} - \rho g \delta_{2i} = 0, \quad (1)$$

$$\nu_{i,i} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\theta e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\nu_{i,j} + \nu_{j,i}), \quad (3)$$

$$\theta = \eta + \frac{\tau_s}{H}, \quad \eta = \mu H^{n-1}, \quad H^2 = 2e_{ij}e_{ij}, \quad (4)$$

где σ_{ij}, e_{ij} , – соответственно тензоры напряжений, скоростей деформаций; p – давление; ν_i – компоненты вектора скорости; ρ – плотность; g – ускорение силы тяжести; τ_s – предел текучести при сдвиге; μ – реологический параметр; H – интенсивность скоростей деформаций. Параметр n в (4) – показатель нелинейности, характеризующий отклонение вязкой жидкости от ньютоновской. При $\tau_s = 0$ и $n = 1$ получим ньютоновскую жидкость ($\eta = \mu$ – динамическая вязкость); при $\tau_s = 0, n < 1$ имеем "псевдопластическую" а при $\tau_s = 0, n > 1$ – "дилатантную" жидкости. Поскольку осадочный чехол по своим реологическим свойствам ближе к "псевдопластическим" жидкостям, а галит хорошо аппроксимируется вязкопластической жидкостью [4], то в дальнейшем полагаем, что $0 \leq n \leq 1$. Соотношения (1) – (4) имеют место для каждого слоя со своими значениями физических параметров; индексы над ними мы опускаем, где это не вызывает недоразумений. Вязкопластическое течение в каждом слое возможно при условии

$$\sigma_n > \tau_s, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (5)$$

где σ_n – интенсивность касательных напряжений сдвига, S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений. К соотношениям (1) – (5) необходимо присоединить граничные условия. Они могут быть различными. Примем, что слои между собой сцеплены, поверхность верхнего слоя свободна от напряжений, а нижний слой может скользить по жесткому основанию без трения.

Рассмотрим однородное основное состояние, обусловленное действием боковых нагрузок, такое, что

$$\sigma_{11} \neq 0, \quad \sigma_{22} \neq 0, \quad \sigma_{12} \equiv 0. \quad (6)$$

Соответствующее решение, удовлетворяющее (1) – (4) и граничным условиям, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^{(1)} &= Ax_1, \nu_2^{(1)} = -A(x_2 + h_1), H_0 = 2A, \\ \sigma_{11}^{(1)} &= \rho_1 g x_2 + B_1, \sigma_{12}^{(1)} = 0, \sigma_{22}^{(1)} = \rho_1 g x_2 - \rho_2 g h_2, \\ B_1 &= 2\theta_1 H_0 - \rho_2 g h_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^{(2)} &= Ax_1, \nu_2^{(2)} = -A(x_2 + h_1), \sigma_{12}^{(2)} = 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \rho_1 g x_2 + B_2, \sigma_{22}^{(2)} = \rho_2 g(x_2 - h_2), \\ B_2 &= 2\theta_2 H_0 - \rho_2 g h_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На боковой границе распределение тектонических усилий, обеспечивающих однородное состояние (6) в каждом слое, будет

$$q_2(x_2) = \sigma_{11}^{(2)}, q_1(x_2) = \sigma_{11}^{(1)} \quad (8a)$$

а из условия

$$\frac{1}{2}(q_1(0) - q_2(0)) = (\theta_1 - \theta_2)H_0 \quad (8b)$$

определяется скорость деформации A , удовлетворяющая условию текучести (5). При $A > 0$ тектонические нагрузки, растягивающие мощности слоев, с течением времени уменьшаются; при $A < 0$ тектонические нагрузки – сжимающие и мощности слоев увеличиваются.

Наряду с основным течением (7) – (8б) возможно появление с течением времени малых возмущений, которыми обусловлено изменение формы границы между слоями $x_2 = \zeta(x_1, t)$. Представим компоненты вектора скорости, тензора напряжений в новом, возмущенном состоянии в виде суммы соответствующих компонентов основного состояния и малых возмущений:

$$\nu'_i = \nu_i^0 + \nu_i, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}. \quad (9)$$

Произведя линеаризацию соотношений (1)– (4), получим

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (10)$$

$$\nu_{i,i} = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = -p + 2n \overset{0}{\eta} \nu_{1,1}, \sigma_{22} = -p + 2n \overset{0}{\eta} \nu_{2,2}, \sigma_{12} = \overset{0}{\theta} (\nu_{1,2} + \nu_{2,1}), \quad (12)$$

где

$$\overset{0}{\theta} = \eta + \frac{\tau_s}{H_0}, \eta = \mu H_0^{n-1}, H_0^2 = 4A^2. \quad (13)$$

Влияние свободной поверхности и жёсткого основания на зарождение диапиризма мало, им можно пренебречь, поэтому на жёстком основании и свободной поверхности примем условие прилипания для возмущения скоростей. Компоненты нормали к поверхности $x_2 = \zeta(x_1, t)$ с точностью до малых второго порядка имеют вид: $\tau_1 = -\zeta_1, \tau_2 = 1$. Кроме того, за характерное время зарождения диапиризма ($t_0 = 25-30$ тыс. лет) изменением мощностей слоев в граничных условиях можно пренебречь [1,2]. Учитывая вышесказанное и удерживая в граничных условиях

члены до первого порядка малости (по возмущениям) включительно, получим

$$\left. \begin{aligned} a) x_2 = -h_1, \nu_1^{(1)} = \nu_2^{(1)} = 0, \\ b) x_2 = h_2, \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} = 0, \\ c) x_2 = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu_2^{(1)} = \nu_2^{(2)}, \nu_1^{(1)} = \nu_1^{(2)}, \\ \sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{(12)}^2 = (\sigma_{11}^0 - \sigma_{11}^0) \zeta_1, \\ \sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{(22)}^2 = (\sigma_{22}^0 - \sigma_{22}^0) = (\rho_2 - \rho_1) \rho \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

К соотношениям (14) для возмущений необходимо добавить начальное условие

$$\zeta(x_1, 0) = 0. \quad (14a)$$

Если рассматривать среду конечной длины, то для возмущений на боковых гранях выполняются в интегральном смысле условия шарнирного опирания [2]. В целях упрощения будем рассматривать бесконечные слои в горизонтальном направлении, требуя, чтобы возмущения и их производные по x_1 при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ обращались в нуль.

Таким образом, для возмущений справедлива линейная начально-краевая задача (10) – (14a) с условиями на бесконечности, для решения которой удобно воспользоваться совместным преобразованием Лапласа и Фурье:

$$\left. \begin{aligned} U(k, x_2, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u(x_1, x_2, t) \exp(-\sigma t - ikx_1) dx_1 dt, \\ u(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^\infty U(k, x_2, \sigma) \exp(\sigma t + ikx_1) dk d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя (12) в (10), (14) и учитывая (13), (14a), условия на бесконечности и выполняя преобразование Лапласа и Фурье, оставив прежние обозначения для изображения всех переменных, получим

$$\left. \begin{aligned} ikp^* &= D^2 \nu_1 + k^2(1 - 2\chi)\nu_1, \\ Dp^* &= -k^2 \nu_2 - k^2(1 - 2\chi)D^2 \nu_2, \\ ik\nu_1 + D\nu_2 &= 0, \\ p^* &= \frac{p}{\theta\sigma}, \chi = \frac{n\eta}{\theta}, D = \frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} a) x_2 = -h_1, \nu_1^{(1)} = \nu_2^{(1)} = 0, \\ b) x_2 = h_2, \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} = 0, \\ c) x_2 = 0, \zeta = \frac{\nu_2^{(1)}}{\sigma} = \frac{\nu_2^{(2)}}{\sigma}, \nu_1^{(1)} = \nu_1^{(2)}, \\ ik(\theta_1^0 - \theta_2^0)[\sigma - 2H_0]\nu_2^{(1)} + \sigma D(\theta_1^0 \nu_1^{(1)} - \theta_2^0 \nu_1^{(2)}) = 0, \\ p^{(2)} - p^{(1)} + 2D(n_1\eta_1\nu_2^{(1)} - n_2\eta_2\nu_2^{(2)}) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g\nu_2^{(1)}}{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Решение (16) ищем в виде

$$\nu_1 = kDf, \nu_2 = -ik^2f. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16) и исключая p^* , получим

$$(D^4 - 2k^2(2\chi - 1)D^2 + k^4)f = 0. \quad (19)$$

Так как $0 \leq n \leq 1$, то $0 \leq \chi \leq 1$, $-1 \leq 2\chi - 1 \leq 1$. Полагая

$$\alpha^2 = \chi, \beta^2 = (1 - \chi), \quad (20)$$

корни характеристического уравнения (19) можно представить в виде

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm(\alpha \pm i\beta), \quad (21)$$

а решение (19) как

$$f(x_2) = (c_1 \operatorname{ch} d_1 + c_2 \operatorname{sh} d_1) \sin d_2 + (c_3 \operatorname{ch} d_1 + c_4 \operatorname{sh} d_1) \cos d_2,$$

где $d_1 = k\alpha x_2$, $d_2 = k\beta x_2$; c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные. Записывая решение для каждого слоя и подставляя в (17), получим систему однородных линейных уравнений восьмого порядка относительно произвольных постоянных. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая его, получим квадратное уравнение относительно σ :

$$\varepsilon_0 \sigma^2 + \varepsilon_1 \sigma + \varepsilon_2 = 0, \quad (22)$$

где $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – коэффициенты, зависящие от физико-геометрических параметров слоёв. В силу (15), если существует хотя бы один корень (22), для которого $\operatorname{Re} \sigma > 0$, то система слоёв неустойчива. И наоборот.

Анализ численных расчетов. Прямой расчет показывает, что $\varepsilon_2 = 0$. Поэтому один корень (22) – нулевой, второй – действительный. Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= h_1 k, \bar{h} = h_2/h_1, \bar{\rho} = \rho_1/\rho_2, \bar{\theta} = \theta_1/\theta_2, \bar{x}_1 = \alpha_1 \bar{k}, \bar{y}_1 = \beta_1 \bar{k}, \\ \bar{x}_1 &= \alpha_2 \bar{k} \bar{h}, \bar{y}_2 = \beta_2 \bar{k} \bar{h}, a = (1 - \bar{\theta}) H_0 t_0, \bar{\sigma} = \sigma t_0, t_0 = 30 \text{ тыс. лет}, \\ h_1 &= h_2 = 5, d = \rho_2(1 - \bar{\rho}) g h_1 t_0 / \theta_2. \end{aligned}$$

На рис.2 – 8 представлены зависимости $\bar{\sigma}$ от \bar{k} для различных значений реологических параметров слоёв. Характерные значения плотностей надсолевых осадков и галита приняты: $\rho_2 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, а реологические параметры $n_1 = n_2 = 1$ выбраны как у ньютоновской жидкости.

Зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ скорости роста возмущений от волнового числа приведены на рис.2, из которого видно, что существует волновое число \bar{k}_* , при котором $\bar{\sigma}$ достигает максимального значения. Это согласуется с результатами работ [1,2].

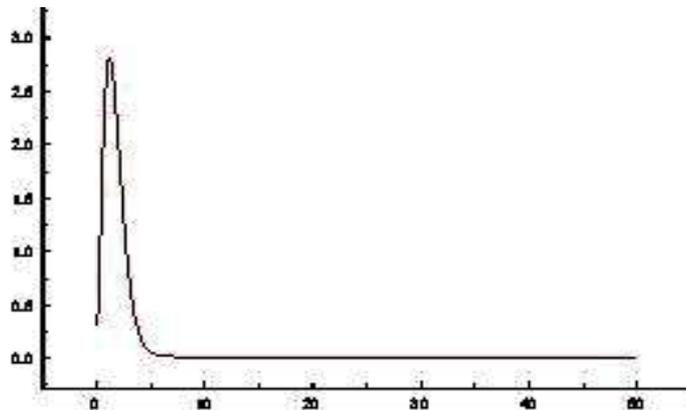


Рис. 2: Скорость роста возмущений в зависимости от волнового числа для вязких слоёв. $\eta_1 = 10^{18} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\eta_2 = 10^{20} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = \tau_{2S} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

Если оба слоя вязкопластичные и по реологическим параметрам одинаковы ($\eta_1 = \eta_2 = 10^{18} \text{Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = \tau_{2S} = 5 \cdot 10^7 \text{Па}$) или верхний слой – вязкий, а нижний – пластичный ($\eta_1 = 10^3 \text{Па}\cdot\text{с}$, $\eta_2 = 10^{20} \text{Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{Па}$, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^3 \text{Па}$), верхний слой более "жесткий" по реологическим параметрам, то картина аналогична. Изменяются только размеры кривой $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$, которые деформируются кривой $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ для двухслойной жидкости. Если оба слоя вязкопластичные и по реологическим параметрам верхний слой более "жесткий" (рис.3), то к основному максимуму $\bar{\sigma}$, обусловленному вязкой реологией, добавляется локальный максимум, обусловленный пластическими свойствами слоёв.

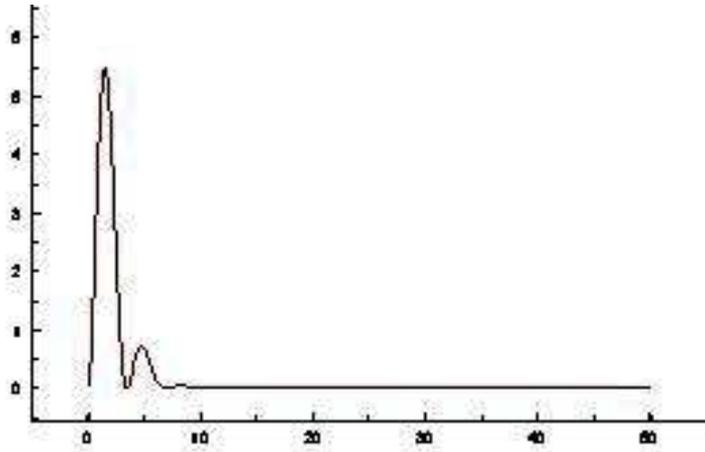


Рис. 3: Скорость роста возмущений в зависимости от волнового числа вязкопластических слоёв. $\eta_1 = 10^{18} \text{Па}\cdot\text{с}$, $\eta_2 = 10^{20} \text{Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{Па}$, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{Па}$.

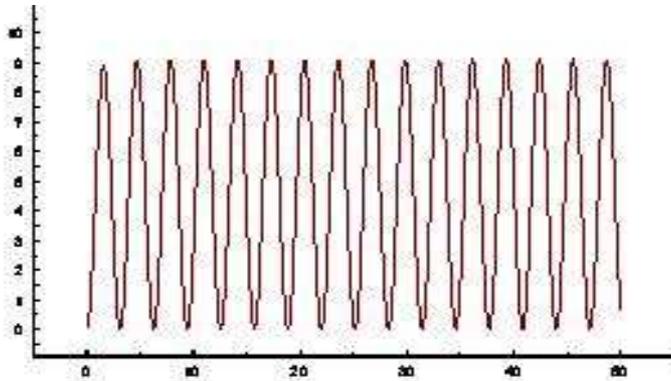


Рис. 4: Скорость роста возмущений в зависимости от волнового числа пластических слоёв. $\eta_1 = \eta_2 = 10^3 \text{Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^7 \text{Па}$, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^9 \text{Па}$.

На рис.4 приведена зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$, когда оба слоя пластичные и верхний слой более "жесткий". Здесь уже существует бесконечная серия одинаковых максимумов $\bar{\sigma}$, что связано с периодичностью собственных функций и отсутствием диссипации энергии для идеальной пластичности. Если оба слоя пластичные и нижний слой более "жесткий" ($\eta_1 = \eta_2 = 10^3 \text{Па}\cdot\text{с}$, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^9 \text{Па}$, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^7 \text{Па}$), то кривая $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ для этого случая совпадает с кривой $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ на рис.4. Если верхний слой пластичный и по реологическим параметрам более "жестче" нижнего слоя (рис.5), то серия максимумов начинает затухать. Это связано с диссипацией энергии вяз-

кого нижнего слоя.

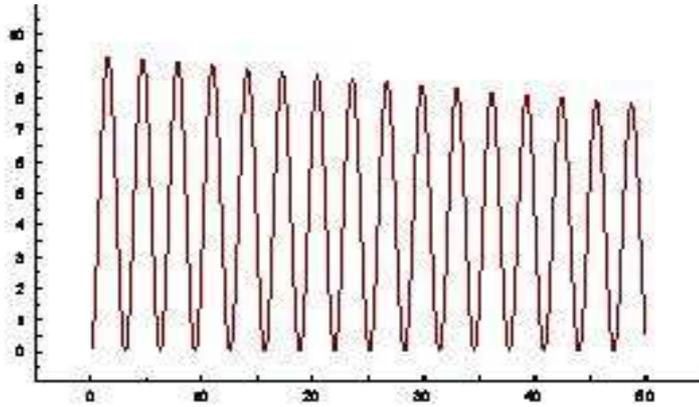


Рис. 5: Скорость роста возмущений в зависимости от волнового числа, когда верхний слой - пластичный, а нижний вязкий. $\eta_1 = 10^{18}$ Па·с, $\eta_2 = 10^3$ Па·с, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^3$ Па, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^9$ Па.

Для двух пластичных слоёв с одинаковыми реологическими параметрами наблюдается бесконечная серия локальных максимумов (рис.6).

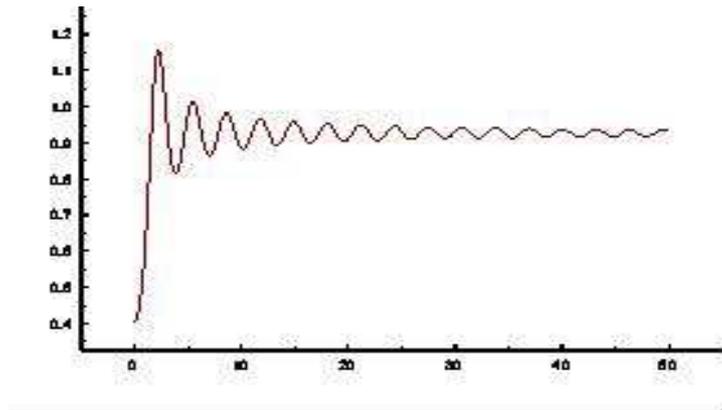


Рис. 6: Зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ для пластических слоёв. $\eta_1 = \eta_2 = 10^3$ Па·с, $\tau_{1S} = \tau_{2S} = 5 \cdot 10^5$ Па.

Амплитуда первого из этих максимумов примерно на 10 – 20 процентов больше амплитуд последующих. Это связано с тем, что длина волны, соответствующая первому максимуму, больше соответствующих длин волн последующих максимумов. Удельная работа на единицу длины волны гравитационных и тектонических сил, затрачиваемых на искривление слоёв, меньше для первого максимума, чем для остальных. Поэтому основная часть этой работы идет на формирование "первого максимума".

На рис.7,8 изображены зависимости $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$, когда реология слоёв разнородна, но их реологические параметры одного порядка. Природа первых максимумов заложена в чисто вязких, а вторых – в чисто пластических свойствах. Существенное значение имеет здесь реология верхнего слоя. Из рис.8 следует, что существует узкий диапазон волновых чисел, где потеря устойчивости не наблюдается ($\bar{\sigma} < 0$). Он является областью "точек возврата" реологических механизмов перестройки потери устойчивости. Другими словами это означает, что существует узкий диапазон длин волн, где зарождение и формирование диапиров невозможно. Пробные

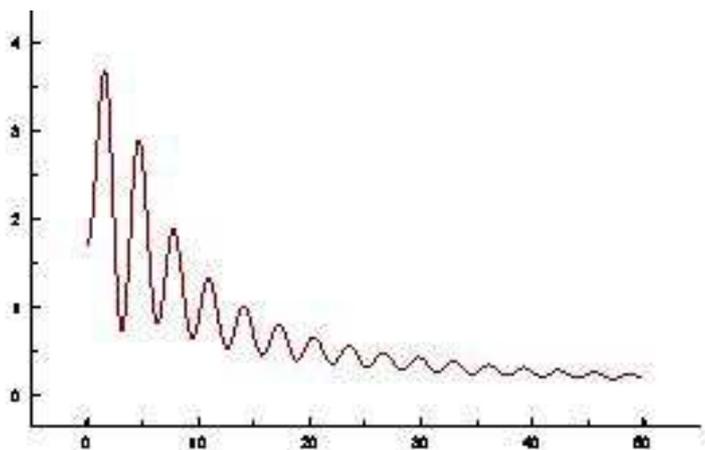


Рис. 7: Зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$. Верхний слой пластичный, нижний - вязкий. $\eta_1 = 10^{18}$ Па·с, $\eta_2 = 10^3$ Па·с, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^3$ Па, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^7$ Па.

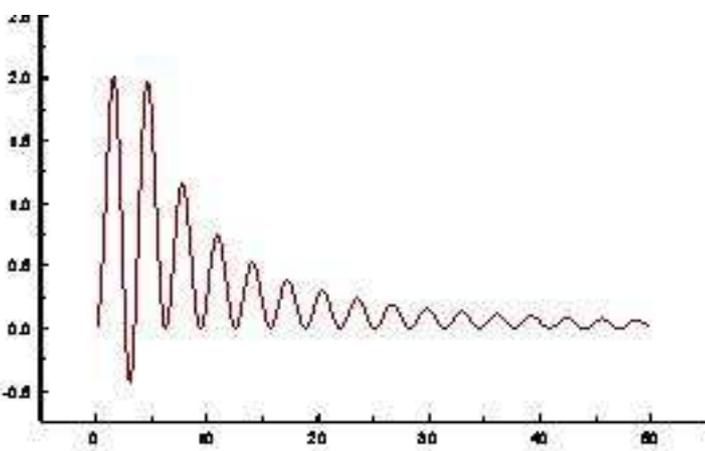


Рис. 8: Зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$. Верхний слой вязкий, нижний - пластичный. $\eta_1 = 10^3$ Па·с, $\eta_2 = 10^{18}$ Па·с, $\tau_{1S} = 5 \cdot 10^7$ Па, $\tau_{2S} = 5 \cdot 10^3$ Па.

расчёты для неньютоновских жидкостей показали, что вид зависимостей $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{k})$ примерно такой же, как и ньютоновских жидкостей. Эти вопросы будут обсуждены в отдельном исследовании. Из приведенного анализа следует, что на формирование начальной стадии диапиризма существенное влияние оказывает тектонические силы и реология слоёв. Соотношения (12), (13) говорят о том, что реология слоёв для возмущений обладает анизотропией. Поскольку осадочный чехол неоднороден по своему составу и реологическим свойствам, то зарождающееся семейство диапиров может иметь самую "причудливую форму". Это проявляется в неоднородном распределении диапиров по пространству и разномасштабностью их характерных размеров.

Цитированная литература

1. Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Гарагаш И.А., Искакбаев А., Коксалов К. Теория складкообразования в земной коре. М, 1975.
2. Ержанов Ж.С., Егоров А.К., Жантаев Ж. Ш. // Известие АН КазССР. Сер. Физ-мат. 1981. № 1. С. 17–23.

3. **Ержанов Ж.С., Егоров А.К.** Устойчивость неоднородного деформирования нелинейных тел. Алма-Ата, 1987.

4. **Исмаил-заде А.Г., Биргер Б.И.** // Физика Земли. 2001. № 7. С. 10–17.

5. **Ержанов Ж.С., Менцель В., Бергман Э.И., Аршинов Г.А., Вебер Д.** Основы расчета напряженного состояния полостей - газохранилищ в соляных отложениях. Алма-Ата, 1978.

Поступила в редакцию 11.12.2006 г.

УДК 517.984/984.68

L_p - ОЦЕНКИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.Б.МУРАТБЕКОВ, Г.К.РАХИМОВА

Таразский институт Международного Казахско-Турецкого университета имени Х.А.Яссауи
030000 Тараз, ул. Койгельды, 190 risbektaraz@mail.ru

В работе для решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений получена L_p – оценка.

1. Формулировка результатов

Пусть $\Omega = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, 0 < y < 1\}$ – прямоугольник. Будем рассматривать в этом прямоугольнике полупериодическую задачу Дирихле: требуется найти решения уравнения

$$Lu + \lambda u = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(y)u + \lambda u = f(x, y) \in L_p(\Omega), \quad (1)$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} u(-\pi, y) = u(\pi, y), \\ u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y), \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (3)$$

$f(x, y)$ – заданная функция из пространства $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Известно, что задача Дирихле для уравнения (1) со степенным вырождением методом функции Грина изучалась в работах Геллерстедта [1] и Бицадзе [2] и получены классические решения задачи. При $\lambda \gg 1$ О.А.Олейник и В.А.Радкевичем [3] установлена сильная разрешимость задачи Дирихле в $W_2^2(\Omega)$ для $f \in L_2(\Omega)$.

В случае, когда $k(y) = y^m$, $m \geq 2$, $f \in L_2(\Omega)$, в работе М.И.Вишика и В.В.Грушина [4] доказана разрешимость этой задачи в весовом пространстве. В работах Т.Ш. Кальменова и М. Отелбаева [5] в пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрен случай, когда $k(y)$ монотонно не убывает и удовлетворяет условию $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{k(2y)}{k(y)} \right\} < \infty$. Случай неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений и их коэрцитивная разрешимость в пространстве $L_2(\Omega)$ был рассмотрен М.Б. Муратбековым [6].

В настоящей работе изучена разрешимость задачи (1)–(3) в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Через $C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$ обозначим класс функций, сколь угодно дифференцируемых на множестве $\bar{\Omega}$, финитных по переменной y на $[0,1]$ и удовлетворяющих условию (2).

Keywords: *elliptic equation of degenerate type, semi-periodic problem of Dirichlet, coercive estimate*

2000 Mathematics Subject Classification: 34J70

© М.Б.Муратбеков, Г.К.Рахимова, 2006.

Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x, y) \in L_p(\Omega)$, для которой найдется последовательность $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty} \subset C_{0,\pi}^{\infty}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$\|u_k - u\|_p \rightarrow 0, \quad \|Lu_k - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

i) $k(y) \geq 0$ – кусочно-непрерывная функция на $[0, 1]$ и $k(0) = 0$;

ii) $c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$.

Тогда для любого $f \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, существует единственное решение задачи (1)-(3) такое, что

$$\|u\|_p \leq \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty. \quad (4)$$

Замечания.

1. Для оператора, определенного равенством (1) и граничными условиями Дирихле

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

при выполнении условий i) – ii) остается справедливой теорема 1.

2. Полученные выше результаты сохраняют силу и для задачи Дирихле в полосе

$$\Pi = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1\}.$$

2. Вспомогательные оценки и неравенства

Получим некоторые вспомогательные утверждения и оценки, связанные с оператором L .

Утверждение 2.1. Пусть выполнено условие

i) $k(y) \geq 0$ – кусочно-непрерывная функция на $[0, 1]$ и $k(0) = 0$.

Тогда оператор L положительно определен и существенно самосопряжен в $L_2(\Omega)$.

Утверждение 2.2. Пусть выполнено условие

i) $k(y) \geq 0$ – кусочно-непрерывная функция на $[0, 1]$ и $k(0) = 0$.

Тогда спектр оператора L дискретен.

Эти утверждения доказываются стандартными методами.

При доказательстве лемм 2.1 и 2.2 мы будем пользоваться рассуждениями и выкладками, использованными в работах [7-8].

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия i) – ii) теоремы 1. Тогда $\forall u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|Lu\|_{2k+2} \geq \|u\|_{2k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Доказательство. Поступим следующим образом. Пусть $u \in C_{0,\pi}^{\infty}(\Omega)$ и рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \langle Lu, u^{2k+1} \rangle &= \int_{\Omega} (-k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(y)u)u^{2k+1} dx dy = \\ &= - \int_{\Omega} k(y)u_{xx}u^{2k+1} dx dy - \int_{\Omega} u_{yy}u^{2k+1} dx dy + \int_{\Omega} c(y)u^{2k+2} dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим через J_1 интеграл $-\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u^{2k+1}dxdy$, а через J_2 интеграл $-\int_{\Omega} u_{yy}u^{2k+1}dxdy$, т.е.

$$J_1 = -\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u^{2k+1}dxdy, \quad J_2 = \int_{\Omega} u_{yy}u^{2k+1}dxdy.$$

Вычислим интеграл J_1 :

$$J_1 = -\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u^{2k+1}dxdy = -\int_0^1 k(y)(u^{2k+1}u_x|_{-\pi}^{\pi} - (2k+1)\int_0^1 (k(y))\int_{-\pi}^{\pi} u^{2k}(u_x)^2dxdy).$$

Отсюда в силу (2) имеем

$$J_1 = (2k+1)\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} k(y)(u^2)^k(u_x)^2dxdy \geq 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим интеграл J_2 :

$$J_2 = -\int_{\Omega} u_{yy}u^{2k+1}dxdy = -\int_{-\pi}^{\pi} (u^{2k+1}u_y|_0^1 - (2k+1)\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u^{2k}(u_y)^2dy)dx.$$

Учитывая условия (3), находим

$$J_2 = (2k+1)\int_{\Omega} (u^2)^k(u_y)^2dxdy \geq 0. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), имеем

$$\langle Lu, u^{2k+1} \rangle = (2k+1)\int_{\Omega} k(y)(u^2)^k(u_x)^2dxdy + (2k+1)\int_{\Omega} (u^2)^k(u_y)^2dxdy + \int_{\Omega} c(y)(u^2)^{k+1}dxdy.$$

Здесь, учитывая тот факт, что первые два интеграла неотрицательны, получаем

$$\langle Lu, u^{2k+1} \rangle \geq \int_{\Omega} c(y)(u^2)^{k+1}dxdy \geq \delta \int_{\Omega} (u^2)^{k+1}dxdy. \tag{9}$$

Из (9), используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\left(\int_{\Omega} |Lu|^{2k+2}dxdy\right)^{\frac{1}{2k+2}} \left(\int_{\Omega} |u|^{2k+2}dxdy\right)^{\frac{2k+1}{2k+2}} \geq \delta \left(\int_{\Omega} |u|^{2k+2}dxdy\right)^{\frac{2k+2}{2k+2}}.$$

Отсюда следует неравенство (5). В силу непрерывности нормы, неравенство (5) верно и для $u \in D(L)$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия i) – ii) теоремы 1. Тогда $\forall u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|Lu\|_p \geq \|u\|_p, \quad 1 < p \leq 2, \tag{10}$$

и существует непрерывный обратный оператор.

Доказательство. Для любого $u \in C_{0,\pi}^\infty(\Omega)$ рассмотрим функционал:

$$\int_{\Omega} (-k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(y)u)u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy = \int_{\Omega} Luu(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy, \quad (11)$$

где $\gamma > -1$.

Обозначим через J_1 интеграл $-\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy$, через J_2 – интеграл $-\int_{\Omega} u_{yy}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy$, т.е.

$$J_1 = -\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy, \quad J_2 = -\int_{\Omega} u_{yy}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy.$$

Вычислим интеграл J_1 :

$$\begin{aligned} J_1 &= -\int_{\Omega} k(y)u_{xx}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy = -\int_0^1 k(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx \right) dy = -\int_0^1 k(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} du_x \right) dy = \\ &= -\int_0^1 k(y) (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} u_x \Big|_{-\pi}^{\pi} dy + \int_0^1 k(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_x d(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} \right) dy = \int_0^1 k(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} [u_x u_x (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + u_x u^{\frac{\gamma}{2}} (u^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} 2u u_x] dx \right) dy = \int_0^1 k(y) \left[\int_{-\pi}^{\pi} u_x^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} + \gamma u_x^2 u^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} dx \right] dy = \\ &= \int_0^1 k(y) \left(\int_{-\pi}^{\pi} [u_x^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} + \gamma u_x^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}}] dx \right) dy = (\gamma + 1) \int_{\Omega} k(y) u_x^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее вычислим интеграл J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= -\int_{\Omega} u_{yy}u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy = -\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} du_y \right) dx = -\left[\int_{-\pi}^{\pi} (u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} u_y) \Big|_0^1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 u_y d(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dy \right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 [u_y^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} + \gamma (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} u_y^2] dy dx = \\ &= (1 + \gamma) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 [u_y^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}}] dy \right) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, пользуясь (12) и (13), из (11) имеем

$$(\gamma + 1) \int_{\Omega} [k(y)u_x^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} + u_y^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}}] dx dy + \int_{\Omega} c(y)u^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy = \int_{\Omega} Luu(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy.$$

Отсюда

$$\int_{\Omega} c(y)u^2 (u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy \leq \left| \int_{\Omega} Luu(u^2)^{\frac{\gamma}{2}} dx dy \right| \leq \int_{\Omega} |Lu| \cdot |u(u^2)^{\frac{\gamma}{2}}| dx dy.$$

Применяя к последнему неравенству неравенство Гельдера и учитывая, что $c(y) \geq \delta$, находим

$$\delta \int_{\Omega} (u^2)^{\frac{\gamma}{2}+1} dx dy \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p'} ((u^2)^{\frac{\gamma}{2}})^{p'} dx dy \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_{\Omega} |Lu|^p dx dy \right)^{1/p}$$

или

$$\delta \int_{\Omega} (u^2)^{\frac{\gamma}{2}+1} dx dy \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{(\gamma+1)p'} dx dy \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_{\Omega} |Lu|^p dx dy \right)^{1/p}. \tag{14}$$

Выберем γ следующим образом:

$$(\gamma + 1)p' = p, \quad \gamma + 2 = p.$$

В результате получим оценку

$$\delta \int_{\Omega} |u|^p dx dy \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx dy \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_{\Omega} |Lu|^p dx dy \right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p dx dy \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |Lu|^p dx dy \right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство в силу непрерывности нормы справедливо для любого $u \in D(L)$.

Неравенство (11) доказано.

Из общей теории сопряженных операторов имеем

$$R(L) = \{Lu \in L_p(\Omega), \langle Lu, v \rangle = 0, \text{ для любого } v \in N_q(L^*)\}, \tag{15}$$

где $N_q(L^*) = \{v \in L_q(\Omega), L^*v = 0\}$, $2 \leq q < \infty$.

Известно, что в случае ограниченной области

$$L_q(\Omega) \subseteq L_2, \quad 2 \leq q < \infty.$$

Следовательно, $N_q(L^*) \subseteq N_2(L^*)$. Отсюда, если $v \in N_q(L^*)$, то $v \in N_2(L^*)$.

Так как в силу утверждения оператор L в L_2 положительно определен и самосопряжен, $v \equiv 0$. Отсюда и из (15) следует, что

$$R(L) \equiv L_p, \quad 1 < p \leq 2. \tag{16}$$

Из неравенства (10) и из равенства (16) следует, что существует непрерывный обратный оператор L^{-1} . Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия *i) – ii)* теоремы 1 и пусть $1 < p \leq 2$. Тогда справедливо равенство

$$(L^{-1})^* = (L^*)^{-1},$$

где $D(L^*) \in L_q(\Omega)$, $2 \leq q < \infty$.

Доказательство общеизвестно.

Обозначим через L^+ замыкание оператора

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(y)u, \quad u \in D(L_0^+) = C_{0,\pi}^\infty(\Omega),$$

в пространстве $L_q(\Omega)$ ($2 \leq q < \infty$).

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия *i)* – *ii)* теоремы 1. Тогда для любого $u \in D(L^+)$ справедлива оценка

$$\|L^+u\|_q \geq \|u\|_q, \quad 2 \leq q < \infty, \quad (17)$$

и оператор L^+ непрерывно обратим.

Доказательство. Для удобства рассмотрим случай $q = 4$, т.е. $L_4(\Omega)$. Согласно (5) для произвольных $u \in D(L^+)$ имеет место

$$\|L^+u\|_4 \geq \|u\|_4. \quad (18)$$

Из леммы 2.3 следует, что существует сопряженный L^* , который непрерывно обратим в $L_4(\Omega)$ (L^* – сопряженный оператор к оператору L , определенному в $L_p(\Omega)$, $1 < p \leq 2$).

Нетрудно установить, что $L^+ \subset L^*$. Поэтому, если докажем, что $L^* \subset L^+$, то $L^+ = L^*$.

Последнее равенство доказывает лемму 2.4 в случае $q = 4$.

Известно, что $L_4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Согласно утверждению 2.1, оператор L^+ положительно определен и существенно самосопряжен в пространстве $L_2(\Omega)$. Поэтому $L^+ \subset D(L_0^+)$ плотно в $L_4(\Omega)$. Пусть $v \in D(L^*) \subset L_4(\Omega)$. Поскольку множество $L^+ \subset D(L^+)$ плотно в $L_4(\Omega)$, существует последовательность элементов $v_n \in D(L^+)$, $L^+v_n \rightarrow L^*v$ ($n \rightarrow \infty$). С другой стороны, в силу (8) из неравенства

$$\|L^+(v_n - v_m)\|_4 \geq \|v_n - v_m\|_4$$

следует $v_n \rightarrow h$.

Ясно, что $h \in D(L^+)$, покажем $h = v$. Для этого рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \langle Lu, v - h \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu, v - v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu, v \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Lu, v_n \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, L^*v \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, Lv_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы 2.2 Lu ($u \in D(L) \in L_p$) плотно, отсюда следует $v = h$. Это означает $L^* \subset L^+$. Таким образом, доказано равенство $L^+ = L^*$. Случай $q = 4$ доказан. Теперь доказываемая лемма следует из леммы 2.3 и интерполяционной теоремы Рисса-Торина [9].

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 непосредственно следует из лемм 2.2 и 2.4.

Цитированная литература

1. Gellerstedt S. // Arkiv Mat. Ast. Och. Fysik. 1937. V. 25 A, № 29. P. 54–60.
2. Бицадзе А.В. Уравнение смешанного типа. М., 1959.
3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки и техники. Мат.анализ. 1969.
4. Вишик М.И., Грушин В.В. // Матем. сборник. 1969. Т. 79, № 1. С. 34–40.
5. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 7. С. 1244–1255.
6. Муратбеков М.Б. // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ-матем. 1981. № 5. С. 71–73.
7. Муратбеков М.Б. // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, № 6. С. 1034–1044.
8. Отелбаев М. // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 181. С. 241–249.
9. Берг Й., Лефстрём Й. Интерполяционные пространства. М., 1980.

Поступила в редакцию 20.09.2006 г.

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Е. Д. НУРСУЛТАНОВ, Н. Т. ТЛЕУХАНОВА

КФ МГУ им.М.В.Ломоносова
010010, г.Астана, ул.Мунайтпасова, 7,
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
010008 Астана, ул.Мунайтпасова, 5

Рассматриваются вопросы восстановления интегралов, мультипликативных преобразований функции по конечной линейной информации. Исследованы связи данной задачи с другими задачами теории приближений. Для некоторых операторов восстановления выписаны их погрешности в терминах коэффициентов Фурье.

1. Приближение фиксированного множества \mathfrak{M} из линейного нормированного пространства Y семействами n -мерных подпространств $\langle e_1, \dots, e_N \rangle$ пространства Y – классическая задача теории аппроксимаций. Она сводится к вычислению (оценке) величин

$$d_N(\mathfrak{M}, Y) = \inf_{(e_1, \dots, e_N)} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{\lambda_i} \|x - \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\|_Y.$$

Эта величина называется N -мерным поперечником по Колмогорову множества \mathfrak{M} в Y . Поперечники характеризуют минимальную погрешность, которая возможна при приближении всевозможными n -мерными подпространствами.

Пусть $e^N = (e^1, \dots, e^N)$ – система независимых линейных функционалов из фиксированного множества $M_N \subset Y^*$. И.Ф. Шарыгиным [1] и С.А.Смоляком [2] введены величины

$$\lambda_N(M_N, \mathfrak{M}, Y) = \inf_{e^N \in M_N} \sup_{\substack{y, x \in \mathfrak{M} \\ e^N(x) = e^N(y)}} \|x - y\|_Y, \quad (1)$$

которые характеризуют минимальную погрешность при восстановлении элементов из \mathfrak{M} по некоторому классу линейной информации из M_N в пространстве Y . Известно [3], что когда \mathfrak{M} – центрально-симметрическое множество, верно соотношение $d_N(\mathfrak{M}, Y) \leq \lambda_N(M_N, \mathfrak{M}, Y)$.

Если минимизировать приближение множества \mathfrak{M} суммами Фурье по системам из M , то приходим к задаче вычисления величин (см. [4])

$$d_N^\perp(M_N, \mathfrak{M}, Y) = \inf_{e^N \in M_N} \inf_{e \in G(e^N)} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - \sum_{i=1}^N e^i(x) e_i\|_Y,$$

Keywords: *integrals, multiplicative transformations of functions, Furies coefficients*

2000 Mathematics Subject Classification: 41A05

© Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова, 2006.

здесь $G(\mathbf{e}^N)$ – множество всех дуальных базисов к $\mathbf{e}^N = (e^1, \dots, e^N)$.

В работах [5], [6] и других рассматривалась следующая задача.

Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на Ω и Ω_1 , соответственно. Пусть $\mathfrak{M} \subset X$ и отображение T действует \mathfrak{M} из Y .

Для каждого целого $N \geq 1$ через $\{\mathbf{e}^N = (e^1, \dots, e^N)\}$ обозначим множество всевозможных из наборов N линейных функционалов $e^j(\cdot) : X \rightarrow C, (j = 1, \dots, N)$ и $\{\varphi_N\}$ – множество функций $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y) : C^N \times \Omega_1 \rightarrow C$. Пусть $\epsilon > 0, D_N \subset \{\mathbf{e}^N\}$.

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величин

$$\delta_N(D_N; T, \mathfrak{M})_Y = \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \|Tf - \varphi_N(e^1(f), \dots, e^N(f); \cdot)\|_Y, \quad (2)$$

$$\delta_{N,\epsilon}(D_N; T, \mathfrak{M})_Y = \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \sup_{|e^j(f) - z_j| \leq \epsilon} \|Tf - \varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y.$$

Естественно возникает вопрос о связи этой задачи с классическими постановками. Следующее утверждение показывает эту связь.

Теорема 1. Пусть X – функциональное пространство, вложенное в банахово пространство Y , T – линейный непрерывный оператор из X в Y . Пусть $\mathfrak{M} \subset X, Z = \{f \in X : \|Tf\|_Y < \infty\}$, тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_N(D_N, \mathfrak{M}, Z) &= \frac{1}{2} \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \sup_{\substack{y, x \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{e}^N(g) = \mathbf{e}^N(f)}} \|f - g\|_Z \leq \delta_N(D_N; T, \mathfrak{M})_Y \leq \\ &\leq \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\mathbf{e} \in G(\mathbf{e}^N)} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - \sum_{i=1}^N e^i(f) e_i\|_Z = d_N^1(D_N, \mathfrak{M}, Z), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\|f\|_Z = \|Tf\|_Y$.

Если $Y = L_q[0, 1]^n, 2 \leq q \leq \infty, q' = q/q - 1, Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f, \psi_k) \psi_k(x)$ – мультипликативное преобразование по некоторой ортогональной системе $\{\psi_k\}_k$, ограниченной в совокупности, то

$$\begin{aligned} \delta_{N,\epsilon}(D_N; T, \|f\|_X \leq 1)_{L_q} &\leq \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{c_{kj}\}} \left(\sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Tf - \sum_{k=1}^N \mu_k \left(\sum_{j=1}^N e^j(f) c_{kj} \right) \psi_k\|_{L_q} + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \left(\sum_{k=1}^N \left(|\mu_k| \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \right)^{q'} \right)^{1/q'} \right). \end{aligned}$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 показывает, что поперечники (1), введенные И.Ф.Шарыгиным и С.А.Смоляком, более естественные в задачах восстановления.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$, из определения точной нижней грани найдутся $\mathbf{e}_0^N \in D_N, \varphi_N^0$, что

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), \dots, e_0^N(f); \cdot)\|_Y &\leq \\ &\leq \inf_{(\mathbf{e}^N, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N(e^1(f), \dots, e^N(f); \cdot)\|_Y + \epsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Если

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), \dots, e_0^N(f); \cdot)\|_Y \geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{e}_0^N(g) = \mathbf{e}^N(f)}} \|f - g\|_Z,$$

нижняя оценка (3) получена. Положим

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), \dots, e_0^N(f); \cdot)\|_Y \leq \frac{1}{2} \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ e_0^N(g) = e_0^N(f)}} \|f - g\|_Z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), \dots, e_0^N(f); \cdot)\|_Y &= \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ e_0^N(g) = e_0^N(f)}} \|Tf - Tg + Tg - \varphi_N^0(e_0^1(g), \dots, e_0^N(g); \cdot)\|_Y \geq \\ &\geq \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ e_0^N(g) = e_0^N(f)}} \|f - g\|_Z - \sup_{g \in \mathfrak{M}} \|Tg - \varphi_N^0(e_0^1(g), \dots, e_0^N(g); \cdot)\|_Y \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ e_0^N(g) = e_0^N(f)}} \|f - g\|_Z. \end{aligned}$$

Учитывая (4) и произвольность выбора $\varepsilon > 0$, получим нижнюю оценку в (3).

Верхняя оценка очевидна.

Проверим второе утверждение теоремы, используя неравенство Хаусдорфа Юнга.

$$\begin{aligned} \delta_{N, \varepsilon}(D_N; T, \|f\|_X \leq 1)_{L_q} &\leq \inf_{e^N \in D_N} \inf_{\{c_{kj}\}} \left(\sup_{\|f\|_X \leq 1} \sup_{|e^j(f) - z_j| \leq \varepsilon} \|Tf - \sum_{k=1}^N \mu_k \sum_{j=1}^N e^j(f) c_{kj} \psi_k\|_{L_q} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{k=1}^N \mu_k \sum_{j=1}^N (e^j(f) - z_j) c_{kj} \psi_k \right\|_{L_q} \right) \leq \\ &\leq \inf_{e^N \in D_N} \inf_{\{c_{kj}\}} \left(\sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Tf - \sum_{k=1}^N \mu_k \sum_{j=1}^N e^j(f) c_{kj} \psi_k\|_{L_q} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^N \left(|\mu_k| \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \right)^{q'} \right)^{1/q'} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В случаях, когда $D_N = L_N = \{e^N\}$ и T – мультипликативное преобразование тригонометрических рядов Фурье (см. [22]), а пространство Y есть одно из пространств C, L_q , пространство X есть одно из пространств $W_p^\beta, B_{p\theta}^\alpha, SW_p^\beta, SB_{p\theta}^\alpha, E^\alpha$, левые и правые величины в (3) при некоторых соотношениях параметров имеют одинаковый порядок и реализуются на линейных операторах соответствующих частичных сумм тригонометрических рядов Фурье, либо сумм Вале Пусена. Поэтому из теоремы 1 и известных результатов [1]-[4] следуют соответствующие результаты работ [5]-[14], [33]-[37].

Пример 1. Если $1 < p \leq q \leq 2, r > 1/p - 1/q$, тогда

$$\delta_N(W_p^r, L_q[0, 1]^n) \sim \left(\frac{\ln N}{N} \right)^{r-1/p+1/q}.$$

Действительно, известно (см. [3], [4])

$$\lambda_N(W_p^r, L_q) \geq d_N(W_p^r, L_q) \sim \left(\frac{\ln N}{N} \right)^{r-1/p+1/q},$$

а тогда, учитывая $d_N^{\perp}(W_p^r, L_q) \leq c \left(\frac{\ln N}{N_r}\right)^{r-1/p+1/q}$ (см. [4]), из (3) получим нужное утверждение.

В случае $p = q = 2$ получим соответствующее утверждение из [6].

2. Пусть F – некоторое функциональное пространство, являющееся собственным подпространством $C[a, b]^n$. Задача восстановления кратного интеграла сводится к нахождению таких $c_k \in \mathbb{R}^n, t_k \in [0, 1]^n, k = 1, 2, \dots, M$, чтобы соответствующая квадратура

$$\sum_{k=1}^M c_k f(t_k) \quad (5)$$

наилучшим образом приближала интеграл $I(f) = \int_{[0,1]^n} f(y) dy$ в классе F в смысле скорости убывания погрешности

$$\delta_M(F; c, t) = \sup_{\|f\|_F=1} \left| I(f) - \sum_{k=1}^M c_k f(t_k) \right|$$

при стремлении параметра M к бесконечности. Число M – количество слагаемых в (5), характеризует число элементарных операций, за которое можно вычислить это выражение. Во многих случаях число слагаемых по порядку совпадает с количеством различных узлов $\{t_k\}$, используемых в (5), тогда погрешность выражают в терминах количества узлов. В противном случае погрешность следует выражать в терминах количества слагаемых M .

В 2000 г. в работе [15] была построена квадратурная формула (см. также [16]- [20]). Пусть f – 1-периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье $\sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(r) e^{2\pi i r x}$. Тогда верно равенство

$$T_{2^m}(f) - \hat{f}(0) = \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = m \\ k_j \geq 0}} (-1)^{\sum_{j=1}^{l-1} k_j} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z}^l \\ r_l \neq 0}} \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1 + k_1), \dots, r_l 2^{k_l}, 0, \dots, 0), \quad (6)$$

где

$$T_{2^m}(f) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \geq 0}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j + k_j)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right).$$

Данная формула решила задачу построения квадратурной формулы, в которой узлы, коэффициенты и погрешность определялись в явном виде. Квадратура $T_{2^m}(f)$ точна для полиномов со спектром из гиперболического креста порядка 2^m , которые, как хорошо известно, наилучшим образом приближают функции из пространств с доминирующей смешанной производной.

Пусть $0 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$, $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$. Определим пространство $D_{\mathbf{p}}(\varphi)$, как множество функций f с абсолютно сходящимися рядами Фурье $\sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(r) e^{2\pi i r x}$ таких, что

$$\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)} = \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} |\varphi(k) \hat{f}(k)|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_n}} < \infty.$$

Здесь и далее при $q = \infty$ сумма $(\sum_k (b_k)^q)^{1/q}$ понимается, как $\sup_k |b_k|$.

Теорема 2. Пусть $1 \leq \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty, G = \{(2^{k_1-1}(2r_1 + k_1), \dots, 2^{k_l}r_l, 0, \dots, 0) : l = \overline{1, n}, k_1 + \dots + k_l = m, r \in \mathbb{Z}^l, r_l \neq 0\}, \chi_G$ - индикаторная функция множества G , тогда

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} |T_{2^m}(f; x) - \hat{f}(0)| = \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\chi_G(k)}{\varphi(k)} \right)^{p'_1} \right)^{\frac{p'_2}{p'_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p'_n}}.$$

Доказательство. В формуле (6) возьмем точную верхнюю грань по всем $f \in D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ с $\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)} = 1$, воспользуемся обратным неравенством Гельдера [21] и получим утверждение.

В работах [26]-[30] были введены пространства $U_s(\beta, \theta, \alpha, \psi), SW_p^\omega, F_p^\Omega, W_2^{\delta r \log^x \delta}$, которые являются частными случаями пространства $D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ и оценки погрешности для соответствующих пространств являются следствиями теоремы 2.

В тезисе [26] и работе [28] анонсировано

$$\Lambda_m(f; x) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \geq \nu_i^0}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1-1}} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n-1}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j-1)(k_j-\nu_j^0)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right). \quad (7)$$

В отличие от квадратуры $T_{2^m}(f)$ здесь введен параметр $\nu^0 \geq 0 : \nu_1^0 + \dots + \nu_n^0 \leq m$. К сожалению, если $\nu^0 \neq 0$, соответствующая квадратура ухудшается. Если хотя бы одно $\nu_i^0 > 0$, то формула (7) уже не будет точной для полиномов со спектром из гиперболического креста порядка 2^m . А если $\nu^0 = (\lfloor \frac{m}{n} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{m}{n} \rfloor)$, то для квадратуры (7) погрешность в классе Коробова $E_n^r = \{f : \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^r |\hat{f}(k)| \leq 1\}$ будет равна $O\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{r}m}}\right)$.

Действительно, пусть $m = \tau n, \tau \in \mathbb{N}, \nu_0 = (\tau, \dots, \tau)$, в качестве пробной функции достаточно рассмотреть $f(x_1, \dots, x_n) = 2^{-\tau r} e^{2\pi i 2^\tau x_1}$.

Данный пример показывает, что теорема 3 из [28] не верна.

Теорема (Теорема 3, [28]). Пусть даны числа $s(s = 1, 2, \dots), r > 1$. Тогда $(q = 2, 3, \dots)$

$$\sup_{f \in E_n^r} \left| \int_{[0,1]^n} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \asymp_{r,n} \frac{(\ln N)^{(r+1)(n-1)}}{N^r}, \quad (8)$$

где $\Lambda_q(f)$ есть квадратурная формула (7), а $N \equiv N(q) \asymp 2^q q^{n-1}$ - число узлов в ней.

Пусть $q = n\tau, \tau \in \mathbb{N}$. В качестве примера рассмотрим $\nu^0 = (\tau, \dots, \tau)$, заметим, что ν^0 удовлетворяет условию $\nu_1^0 + \dots + \nu_n^0 \leq q$. В этом случае квадратура (7) примет вид

$$\Lambda_q(f) = \frac{1}{2^q} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1^0-1}} \dots \sum_{k_n=0}^{2^{\nu_n^0-1}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1^0}}, \dots, \frac{k_n}{2^{\nu_n^0}}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(m_1 2^\tau, \dots, m_n 2^\tau).$$

Возьмем пробную функцию $f_0(x_1, \dots, x_n) = 2^{-\tau r} e^{2\pi i 2^\tau x_1}$, тогда

$$\left| \int_{[0,1]^n} f_0(x) dx - \Lambda_q(f_0) \right| = \frac{1}{2^{\tau r}},$$

что противоречит соотношению (8).

Пусть f - функция, тригонометрический ряд Фурье которой абсолютно сходится, U - произвольное подмножество \mathbb{Z}_+^n , тогда для функционала

$$T_U(f) = \sum_{k \in U, k_i \geq \nu_i^0} \frac{1}{2^{k_1 + \dots + k_n}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1-1}} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n-1}} (-1)^{\sum_{i=1}^n (r_i+1)(k_i-\nu_i^0)} f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) \quad (9)$$

имеет место

$$I(f) - T_U(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus U, k_i \geq \nu_i^0} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (k_i - \nu_i^0)} \times \\ \times \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1 + (k_1 - \nu_1^0)), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + (k_n - \nu_n^0))). \quad (10)$$

Эта формула при $\nu^0 = 0$ доказана в работе [20] как следствие формулы (6).

Замечание 2. Квадратура (9) хуже T_{2^m} даже в случае $\nu_0 = (0, \dots, 0)$ и множества U , соответствующего гиперболическому кресту. Погрешность для этих формул одна и та же, но количество слагаемых в (9) по порядку больше, чем в T_{2^m} , и соответственно количество элементарных операций для вычисления их – разная.

Аналогично имеет место

Теорема 3. Пусть $1 \leq \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$, $G = \{(2^{k_1-1}(2r_1 + (k_1 - \nu_1^0)), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + (k_n - \nu_n^0))) : k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus U, k_i \geq \nu_i^0, r \in \mathbb{Z}^n\}$, χ_G – индикаторная функция множества G , тогда

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} |T_{2^m}(f; x) - \hat{f}(0)| = \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\chi_G(k)}{\varphi(k)} \right)^{p'_1} \right)^{\frac{p'_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_n}}, \quad (11)$$

в частности, при $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} |T_{2^m}(f; x) - \hat{f}(0)| = \\ = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus U, k_i \geq \nu_i^0} \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{\varphi(2^{k_1-1}(2r_1 + (k_1 - \nu_1^0)), \dots, 2^{k_n-1}(2r_n + (k_n - \nu_n^0)))} \right)^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Доказательство. В формуле (10) возьмем точную верхнюю грань по всем $f \in D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ с $\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)} = 1$, воспользуемся обратным неравенством Гельдера [21] и получим (11).

Результаты работ [26]-[30] сразу следуют из соотношения (11). Отметим, что даже частная реализация соотношения (11) есть более точный результат, чем в упомянутых работах, т.к. в них приведены двусторонние, либо односторонние оценки вместо равенства.

3. Пусть $f \in L_1[0, 1]^n$, $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx}$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Определим мультипликативное преобразование

$$f\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Пусть (X, Y) – пара функциональных пространств 1-периодических функций, X вложено в $C[0, 1]^n$, последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором из пространства X в пространство Y , т.е. верно

$$\sup_{f \neq 0} \frac{\|f\lambda\|_Y}{\|f\|_X} < \infty.$$

Задача заключается в нахождении узлов $\{t_k\}_{k=1}^M$ и функций $\{\phi_k(x, \lambda)\}_{k=1}^M$, чтобы скорость убывания погрешности

$$\sup_{\|f\|_X=1} \|f\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k) \phi_k(x, \lambda)\|_Y$$

в метрике Y была возможно большей при возрастании M .

Данная постановка задачи объединяет задачи приближенного восстановления интегралов, коэффициентов Фурье, функций, дробных производных, дробных интегралов.

Так, если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{при } k \neq (0, \dots, 0), \end{cases}$$

то это – задача численного интегрирования.

Если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (\mu_1, \dots, \mu_n), \\ 0 & \text{при } k \neq (\mu_1, \dots, \mu_n), \end{cases}$$

то соответствующий оператор восстанавливает коэффициенты Фурье $\hat{f}(\mu)$.

Если $\lambda = \{\bar{k}^\beta\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\beta = 0$, то приходим к задаче восстановления функций, если $\beta > 0$ – дробной производной, если $\beta < 0$ – дробного интеграла.

В статьях [22]-[25] вводится оператор восстановления мультипликативных преобразований

$$F_{2^m}(f, \lambda; x) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m+1 \\ k_i \geq 0}} \sum_{0 \leq r < 2^k} f\left(\frac{r}{2^k}\right) \phi_{kr}\left(x + \frac{r}{2^k}; \lambda\right),$$

здесь

$$\phi_{kr}(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_n \leq m+1 \\ 0 \leq \nu_i \leq k_i}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j+1)(k_j-\nu_j)} \sum_{\mu \in \rho(\nu)} \lambda_\mu e^{2\pi i \mu x}.$$

Данный оператор восстановления является точным для полиномов со спектром из соответствующего гиперболического креста.

Теорема 4 ([23]). Пусть $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $f \in SW_p^\alpha[0, 1]^n$, $\alpha > \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ такова, что ряд

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_\mu \bar{\mu}^{-\alpha}|^r$$

сходится. Тогда имеет место оценка

$$\|f\lambda - F_{2^m}(f, \lambda; \cdot)\|_{L_q} \leq C_{q,\alpha} \left[\frac{1}{2^{\alpha m}} \left(\sum_{s=0}^m (m+1-s)^{\frac{(n-1)r}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n = s} \sum_{k \in \rho(\nu)} |\lambda_k|^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus G_m} |\lambda_\mu \bar{\mu}^{-\alpha}|^r \right)^{1/r} \right] \|f\|_{W_p^\alpha},$$

где $\rho(\nu) = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : (\nu_i - 1)2^{\nu_i-2} < |k_i| \leq 2^{\nu_i-1}, i = 1, \dots, n\}$.

В работах [5], [33]-[37] рассматриваются вопросы численного восстановления решений различных задач математической физики. Эти задачи сводятся к приближенному вычислению конкретных мультипликативных преобразований (степенного вида). Утверждения типа теоремы 4 (см. [23]) решают эти задачи в общем виде.

Пример 2. Пусть $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $r > \frac{1}{h} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $f \in W_p^r[0, 2\pi]$. Уравнение Лапласа в круге

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0, 0 \leq \alpha < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ U(\alpha, \theta)|_{\alpha=R} = f(\theta)$$

имеет решение

$$U(\alpha, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{|m|} \hat{f}(m) e^{im\theta}. \quad (12)$$

Как видим, это есть мультипликативное преобразование функции f с $\lambda_m = \left(\frac{\alpha}{R}\right)^m$. Из теоремы 5 имеем

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \alpha < R} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|U(\alpha, \theta) - F_{2^m}(f, \lambda)\|_{L_q} &\leq c_1 \sup_{0 < \alpha < R} \left[\frac{1}{2^{mr}} \left(\sum_{\nu=0}^m \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^h \right)^{\frac{1}{h}} + \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{\mu > 2^m} \left| \left(\frac{\alpha}{R}\right) \mu^{-r} \right|^h \right)^{\frac{1}{h}} \right] \|f\|_{W_p^r} = c_1 \left[\frac{1}{2^{mr}} \left(\sum_{\nu=0}^m 2^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{h}} + \left(\sum_{\mu > 2^m} \mu^{-rh} \right)^{\frac{1}{h}} \right] \approx \frac{1}{2^{rm - \frac{1}{h}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\delta_{2^m}(W_p^r)_{L_q}$ (см. [12]) – погрешности наилучшего метода приближения решения (12) по значениям в точках – верно

$$\delta_N(W_p^r)_{L_q} \leq c \frac{1}{2^{rm - \frac{1}{h}}}.$$

Снизу $\delta_{2^m}(W_p^r)_{L_q}$ оценивается поперечником $\lambda_{2^m}(M_{2^m} W_p^r, L_q) \sim \frac{1}{2^{rm - \frac{1}{h}}}$.

Из этого примера при $p = 2, q = \infty$ следуют результаты работы [12].

Из теоремы 4 следуют более сильные утверждения, чем соответствующие утверждения из [5], [33]-[37], т.к. здесь оператор приближения построен в явном виде и не требует дополнительных вычислений.

Позже были анонсированы работы [38]-[42], в которых также рассматривается задача восстановления функций, их мультипликативных преобразований и получены схожие результаты. К сожалению, сравнить эти результаты с имеющимися не представляется возможным, т.к. в этих работах оператор восстановления содержит компоненты, которые не определены, или вовсе отсутствует сам оператор восстановления. По-видимому, формат этих публикаций не позволил ее авторам сделать ссылки на ранее опубликованные с доказательствами работы [22]-[25].

Цитированная литература

1. Шарыгин И. Ф. // Оценки снизу теории интегрирования и приближения на классах функций. Автореф. канд. дис. МГУ, 1965.
2. Смоляк С. А. // Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Автореф. канд. дис. МГУ, 1965.
3. Тихомиров В. М. // Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
4. Темляков В. Н. // Труды МИРАН. 1986. 178.
5. Темиргалиев Н. // Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. // Вестн. ЕНУ. 1997. № 3. С. 90-144.
6. Темиргалиев Н. Ажгалиев Ш. // Математические заметки. 2003. Т. 73, вып. 6. С. 803-812.
7. Берикханова М. Г. // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 30-31.
8. Ажгалиев Ш. // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск 2003. С. 57-58

9. **Биахметов А., Бухарова А., Таугынбаева Г.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 63.
10. **Ибатулин И.Ж.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 65–66.
11. **Темиргалиев Н., Борушевский С.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 63–64.
12. **Берикханова М.Е.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 79.
13. **Берикханова М.Е.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 80.
14. **Баилов Е.А., Ажгалиев Ш., Ташатов Н.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 60.
15. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, вып. 6. С. 153–154.
16. **Тлеуханова Н.Т.** // Сб. докладов VI Сибирского Конгресса ИНПРИМ. 2000. Новосибирск, 2000. С. 238
17. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** // Кубатурные формулы и их приложения. Сб.тр. VI междунар.семинар-совещания. Уфа. 2001. С. 209
18. **Тлеуханова Н.Т.** // Совр. методы теории функций и смежные проблемы.:сб. докл. Саратовской зимней математической школы. Саратов, 2002. С. 162.
19. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** // Математический Сборник. 2003. Т.124, № 10. С. 133–160.
20. **Тлеуханова Н.Т.** // Евразийский математический журнал. Астана, 2004. № 1. С. 71–87.
21. **Бесов О.В., Ильин В.А., Никольский С.М.** // Интегральное представление функций и теоремы вложений. М., 1974.
22. **Тлеуханова Н.Т.** // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 3. С. 79–88.
23. **Тлеуханова Н.Т.** // Доклады РАН. 2003. Т. 390, № 2. С. 169–171.
24. **Тлеуханова Н.Т.** // Современные проблемы математики.:сб.трудов межд. конф. Астана, 2002. С. 55–58.
25. **Тлеуханова Н.Т.** // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып.1. С. 154–156.
26. **Темиргалиев Н.** // Симпозиум: Ряды Фурье и их приложения. Новороссийск, 2002. С. 51.
27. **Темиргалиев Н.** // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева. 2002. № 3-4. С. 222–272.
28. **Темиргалиев Н.** // Доклады РАН. 2003. Т.393, № 5, С. 605–608.
29. **Бекеманова А.А.** //Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 61–62.
30. **Бекеманова А.А.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С.74.
31. **Фролов К.К.** Квадратурные формулы на классах функций. Канд.дисс. ВЦ АН СССР. 1979.
32. **Шарыгин И.Ф.** // Ж. выч. матем и матем. физики. 1963. Т. 3. С. 370–376.
33. **Баилов Е.А.** Приближенное интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона. Канд.дисс. Алматы, 1998.
34. **Шерниязов К.Е.** Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределениями начальных температур из классов E, SW и B . Канд.дисс. Алматы, 1998.
35. **Ажгалиев Ш.У.** Приближенное восстановление по линейной информации функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов W, B, SW и E . Канд.дисс. Алматы, 2000.
36. **Шангиреев Е.И.** О восстановлении решений волнового уравнения. Канд.дисс. Алматы, 2001.
37. **Ташатов Н.** Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW . Канд.дисс. Алматы, 2001.

38. **Темиргалиев Н., Борушевский С.И., Шерниязов К.Е.** // Тезисы докладов межд. конф. „Проблемы современной математикм и механики“. 2005. С. 23–24.
39. **Темиргалиев Н., Кудайбергенов С., Санабаев К., Шерниязов К.Е.** // Тезисы докладов межд. конф. „Проблемы современной математикм и механики“. 2005.
40. **Темиргалиев Н.** // Межд. конф. „Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ“. Москва, 2005. С. 222.
41. **Темиргалиев Н.** //Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 251.
42. **Темиргалиев Н.** // Тезисы межд. конф. „Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры“. Актобе, 2006.

Поступила в редакцию 27.12.2006г.

УДК 517.958

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

А. САКАБЕКОВ, Е. АУЖАНИ

Казахстанско-Британский технический университет
050091 г.Алматы ул. Толе би, 59

Доказано существование единственного обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений метода сферических гармоник в P_1 - приближении в пространстве функций $W_2^1([0, T] \times G)$. Получена асимптотика решения рассматриваемой задачи в окрестности угловой точки границы.

Рассмотрим начально-краевую задачу для нестационарного односкоростного уравнения переноса излучения в двумерной области [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \sigma \varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} g(\mu_0) \varphi(t, x, \mu', \psi') d\mu' d\psi' +$$

$$+ f(t, x, \mu, \psi), \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in G \subset R_2, \quad (1)$$

$$\varphi|_{t=0} = \overset{\circ}{\varphi}(x, \mu, \psi), \quad x \in G, \quad (2)$$

$$\varphi(t, x_{\partial G}, \mu, \psi) = 0, \quad (\Omega, n) \equiv (\mu n_{x_1} + \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi n_{x_2}) < 0, \quad (3)$$

где $\varphi(t, x, \mu, \psi)$ – поток излучения в точке $x \in G$ в момент времени t ; $\mu = \cos \theta$, θ – угол между направлением излучения и осью Ox_1 , ψ – угол между проекцией направления движения излучения на плоскость x_1Ox_2 и осью Ox_2 ; $f(t, x, \mu, \psi)$ – источник излучения; $g(\mu_0)$ – индикатриса рассеяния, которая характеризует анизотропию рассеяния, $\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos(\psi - \psi')$; $\overset{\circ}{\varphi}(x, \mu, \psi)$ – начальная функция (заданная функция). Коэффициенты σ и σ_s в уравнении (1) связаны соотношением $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$, σ – полное сечение, σ_s – сечение рассеяния, σ_c – сечение захвата излучения.

Keywords: *non-stationary system of equations, spherical harmonic method, theory of transference and radiation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F30

© А. Сакабеков, Е. Аужани, 2006.

Граничное условие (3) означает отсутствие потока излучения извне в область G ($x_{\partial G} \in \partial G$ – граница области G , $n = (n_{x_1}, n_{x_2}, 0)$ – внешний единичный нормальный вектор границы ∂G области G).

Относительно функций σ , σ_g , $g(\mu_0)$ предположим, что $0 < \underline{\sigma} < \sigma \leq \bar{\sigma} < \infty$, $0 \leq \sigma_s \leq \bar{\sigma}_g < \infty$, $g(\mu_0) \geq 0$, $\sigma \geq \sigma_g$ и функции σ , σ_s – гладкие в области G .

Разложим функции $\varphi(t, x, \mu, \psi)$ и $f(t, x, \mu, \psi)$ в ряд по сферическим функциям

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, \mu, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \varphi_k^{(m)}(t, x) P_k^{(m)}(\mu) \cos m\psi, \\ f(t, x, \mu, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} f_k^{(m)}(t, x) P_k^{(m)}(\mu) \cos m\psi,\end{aligned}\tag{4}$$

$\delta_m^k = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$ а индикатрису рассеяния $g(\mu_0)$ разложим в ряд по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{4\pi} g(\mu_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) g_k P_k(\mu_0).$$

В этих разложениях коэффициенты определяются интегралами

$$\varphi_k^{(m)}(t, x) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \varphi(t, x, \mu, \psi) P_k^{(m)}(\mu) \cos m\psi d\mu d\psi,$$

$$f_k^{(m)}(t, x) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(t, x, \mu, \psi) P_k^{(m)}(\mu) \cos m\psi d\mu d\psi,$$

$$g_k = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 g(\mu_0) P_k(\mu_0) d\mu_0.$$

В разложениях(4) учтено, что функция $\varphi(t, x, \mu, \psi)$ четная относительно угла ψ . Используя эти разложения, сведем уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\varphi_k^{(m)}$:

$$\begin{aligned}& \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \frac{\partial \varphi_k^{(m)}}{\partial t} + \frac{1}{1+\delta_m^0} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{(k-m+1)!}{(k+m)!} \varphi_{k+1}^{(m)} + \frac{(k-m)!}{(k+m-1)!} \varphi_{k-1}^{(m)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{(k-m)!}{(k+m-2)!} \varphi_{k-1}^{(m-1)} - \frac{(k-m+2)!}{(k+m)!} \varphi_{k+1}^{(m-1)} + \frac{(k-m)!}{(k+m)!} (\varphi_{k+1}^{(m+1)} - \varphi_{k-1}^{(m+1)}) \right] + \\ & + \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} (\sigma - \sigma_s g_k) \varphi_k^{(m)} = \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} f_k^{(m)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, k.\end{aligned}\tag{5}$$

Рассмотрим нечетное P_{2N+1} - приближение системы уравнений метода сферических гармоник для уравнения (1), т.е.

$$\varphi^{(2N+1)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N+1} \sum_{m=0}^k \frac{2k+1}{1+\delta_m^0} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \varphi_k^{(m)} P_k^{(m)}(\mu) \cos m\psi,$$

где $0 \leq N$ – произвольное ограниченное целое положительное число. Тогда система (5) состоит из конечного числа уравнений $k = 0, 1, \dots, 2N + 1$, $m = 0, 1, \dots, k$. На границе ∂G области G поставим условия Владимирова - Маршака [1], аппроксимирующее условие (3) в виде

$$\int_{(\omega, n) < 0} (\omega, n) \varphi^{(2N+1)}(t, x_{\partial G}, \mu, \psi) P_{2k}^{(m)}(\mu) \cos m\psi d\mu d\psi = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, 2k. \quad (6)$$

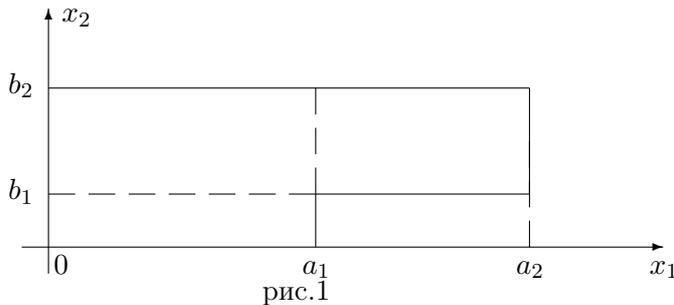
Запишем начально-краевую задачу для системы уравнений метода сферических гармоник в P_1 - приближении ($N = 0$) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_s g_0) \varphi_0^{(0)} &= \frac{1}{2} f_0^{(0)}, \\ \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{3}{2} (\sigma - \sigma_s g_1) \varphi_1^{(0)} &= \frac{3}{2} f_1^{(0)}, \\ \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{3}{2} (\sigma - \sigma_s g_1) \varphi_1^{(1)} &= \frac{3}{2} f_1^{(1)}, \quad t > 0, \\ x \in G = G_1 \cup G_2, \quad G_1 = \{x \in R_2 : 0 < x_1 < a_1, 0 < x_2 < b_2\}, \\ G_2 = \{x \in R_2 : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2\} \quad &(\text{см. рис. 1}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi_0^{(0)}|_{t=0} = \overset{\circ}{\varphi}_0^{(0)}(x), \quad \varphi_1^{(0)}|_{t=0} = \overset{\circ}{\varphi}_1^{(0)}(x), \quad \varphi_1^{(1)}|_{t=0} = \overset{\circ}{\varphi}_1^{(1)}(x), \quad x \in G, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\varphi_1^{(0)} \mp \varphi_0^{(0)})|_{x_1=a_1, 0} &= 0, \quad 0 < x_1 < b_1, \quad t > 0, \\ \frac{1}{2} (\varphi_1^{(0)} \mp \varphi_0^{(0)})|_{x_1=a_2, 0} &= 0, \quad b_1 < x_1 < b_2, \quad t > 0, \\ \frac{1}{2} (\varphi_1^{(1)} \mp \varphi_0^{(0)})|_{x_2=b_2, 0} &= 0, \quad 0 < x_1 < a_1, \quad t > 0, \\ \frac{1}{2} (\varphi_1^{(1)} \mp \varphi_0^{(0)})|_{x_2=b_2, b_1} &= 0, \quad a_1 < x_1 < a_2, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\overset{\circ}{\varphi}_0^{(0)}(x)$, $\overset{\circ}{\varphi}_1^{(0)}(x)$, $\overset{\circ}{\varphi}_1^{(1)}(x)$ – коэффициенты разложения начальной функции $\overset{\circ}{\varphi}(x)$ в ряд по сферическим функциям.



Пусть функция источников $f(t, x, \mu, \psi)$ – четная по угловым переменным. Тогда $f_1^{(0)} = f_1^{(1)} = 0$ и задачу (7) – (9) путем исключения можно свести к следующей начально - краевой задаче для гиперболического уравнения 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left[1 + \frac{1}{2\sigma_1} (\sigma - \sigma_s g_0) \right] \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_s g_0) u = \frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2} f_0^{(0)} \equiv F, \quad x \in G, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in G, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \pm \left(\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) \right]_{x_1=a_1,0} &= 0, & 0 < x_2 < b_1, & \quad t > 0, \\
\left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \pm \left(\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) \right]_{x_1=a_2,0} &= 0, & b_1 < x_1 < b_2, & \quad t > 0, \\
\left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \pm \left(\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) \right]_{x_2=b_2,0} &= 0, & 0 < x_1 < a_1, & \quad t > 0, \\
\left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \pm \left(\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) \right]_{x_2=b_2,b_1} &= 0, & a_1 < x_1 < a_2, & \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $u \equiv \varphi_0^{(0)}$, $u_0 \equiv \overset{\circ}{\varphi}_0^{(0)}(x)$, $u_1(x) \equiv \frac{1}{2}f_0^{(0)}|_{t=0} - \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}_1^{(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}_1^{(1)}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_s g_1)u_0$, $\sigma_1 \equiv \sigma - \sigma_s g_1$.

Для задачи (10) – (12) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $F, F_t^i \in L^2([0, T] \times G)$, $u_0 \in W_2^1(G)$, $u_1 \in W_2^1(G)$, то задача (10) – (12) имеет единственное обобщенное решение, принадлежащее пространству $W_2^1([0, T] \times G)$, причем

$$\|u\|_{W_2^1([0, T] \times G)} \leq C_1 \left(\|f_0^{(0)} + \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t}\|_{L^2([0, T] \times G)} + \|u_1\|_{L^2(G)} + \|u_0\|_{W_2^1(G)} \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W_2^1([0, T] \times G)} &\leq C_2 \left(\|f_0^{(0)} + \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t}\|_{L^2([0, T] \times G)} + \left\| \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_0^{(0)}}{\partial t^2} \right\|_{L^2([0, T] \times G)} + \right. \\
&\quad \left. + \|u_2\|_{L^2(G)} + \|u_1\|_{W_2^1(G)} \right), \tag{14}
\end{aligned}$$

где $u_2(x) \equiv \sigma_1 \left\{ \left(\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2}f_0^{(0)} \right) |_{t=0} - \left[1 + \frac{1}{2\sigma_1}(\sigma - \sigma_s g_0) \right] u_1(x) + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right] - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_s g_0)u_0 \right\}$, C_1, C_2 – постоянные, независимые от решения задачи (10) – (12), $0 < T < \infty$.

Теорема 2. Если $F, F_t^i \in L^2([0, T] \times G)$, то почти при всех t обобщенное решение u задачи (10) – (12) удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}
\int_{Q_t} \left\{ \frac{1}{4\sigma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_s g_0)u\eta - \left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2}f_0^{(0)} - \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \right. \right. \\
\left. \left. - \left(1 + \frac{1}{2\sigma_1}(\sigma - \sigma_s g_0) \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right] \eta \right\} dx = 0
\end{aligned}$$

для любой функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q_t)$ ($\overset{\circ}{W}_2^1(Q_t)$ – замыкание финитных бесконечно дифференцируемых функций, носители которых принадлежат Q_t , по норме $W_2^1(Q_t)$), где Q_t – сечение цилиндра $[0, T] \times G$ плоскостью, $t = const$.

Из теоремы 2 следует, что почти при всех $t \in [0, T]$ функция $u(t, x)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q_t)$ следующей краевой задачи для эллиптического уравнения:

$$\begin{aligned}
L(x, D)u \equiv -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_s g_0)u = \frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{2}f_0^{(0)} - \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\
- \left[1 + \frac{1}{2\sigma_1}(\sigma - \sigma_s g_0) \right] \frac{\partial u}{\partial t} \equiv q, \quad x \in Q_t, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x, D)u|_{x_1=a_1,0} &\equiv \left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \pm \left(u + \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_{x_1=a_1,0} = 0, & 0 < x_2 < b_1, \\
L_1(x, D)u|_{x_1=a_2,0} &= 0, & b_1 < x_1 < b_2, \\
L_2(x, D)u|_{x_2=b_2,0} &\equiv \left[\frac{1}{2\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \pm \left(u + \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_{x_2=b_2,0} = 0, & 0 < x_1 < a_1, \\
L_2(x, D)u|_{x_2=b_2,b_1} &= 0, & a_1 < x_1 < a_2,
\end{aligned} \tag{16}$$

Будем изучать поведение обобщенного решения задачи (15) – (16) в окрестностях угловых точек границы ∂G области G по методике работ [5-7]. Нетрудно убедиться в том, что в окрестностях точек $(0, 0)$, $(a_1, 0)$, (a_2, b_1) , (a_2, b_2) , $(0, b_2)$ обобщенное решение задачи (15) – (16) принадлежит пространству $W_2^2(Q_t)$ (см. [1]). Для исследования поведения обобщенного решения задачи (15) – (16) в окрестности точки (a_1, b_1) начало координат перенесем в эту точку. Тогда получим задачу

$$L^0\left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = q, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} L_1^0(0, 0, \frac{\partial}{\partial x_1})u|_{x_1=0} &= 0, & x_2 < 0, \\ L_2^0(0, 0, \frac{\partial}{\partial x_2})u|_{x_2=0} &= 0, & x_1 > 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где L^0 , L_1^0 , L_2^0 – главные части операторов L , L_1 , L_2 соответственно.

В задаче (17) – (18) сначала переходим к полярным координатам $x_1 = \rho \cos \omega$, $x_2 = \rho \sin \omega$, затем сделаем замену $\tau = \ln \frac{1}{\rho}$. Задача запишется в виде

$$L^0\left(\omega, \tau, \frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)u = q(\omega, \tau),$$

$$L_1^0\left(\omega, \tau, \frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)u|_{\omega=3\pi/2} = 0,$$

$$L_2^0\left(\omega, \tau, \frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)u|_{\omega=0} = 0,$$

которая после применения преобразования Фурье по τ

$$\tilde{q}(\omega, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} q(\omega, \tau) d\tau$$

сводится к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$L^0\left(\omega, \frac{d}{d\omega}, i\lambda\right)\tilde{u} = \tilde{q}, \quad 0 < \omega < 3\pi/2, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} L_1^0\left(\omega, \frac{d}{d\omega}, i\lambda\right)\tilde{u}|_{\omega=3\pi/2} &= 0, \\ L_2^0\left(\omega, \frac{d}{d\omega}, i\lambda\right)\tilde{u}|_{\omega=0} &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Из результатов работы [1-4] следует, что при достаточно больших по модулю λ существует оператор $R(\lambda)$, который действует из $L^2([0, 3\pi/2])$ в $W_2^2([0, 3\pi/2])$ и является мероморфной функцией λ такой, что

$$\left(L^0\left(\omega, \frac{d}{d\omega}, i\lambda\right), L_k^0\left(\omega, \frac{d}{d\omega}, i\lambda\right)\right)R(\lambda) = I,$$

где I – единичный оператор.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $u \in W_2^1(Q_t)$, $q \in L^2(Q_t)$ и на прямой $Im \lambda = 1$ нет полюсов функции $R(\lambda)$ для задачи (19) – (20), то обобщенное решение u задачи (10) – (12) вблизи угловой точки (a_1, b_1) представляется в виде

$$a(t)\rho^{2/3}\psi(\omega) + w, \tag{21}$$

где $w \in W_2^2$, $\psi(\omega)$ – собственная функция задачи (19) – (20), соответствующая собственному значению $2/3$.

Из представления (21) следует, что обобщенное решение задачи (15) – (16) в окрестности угловой точки (a_1, b_1) не может принадлежать пространству W_2^2 .

Цитированная литература

1. Султангазин У.М., Акишев А.Ш., Сакабеков А. и др. Математические проблемы кинетической теории переноса. Алма-Ата, 1986.
2. Сакабеков А., Султангазин У.М. К обоснованию вариационно-разностного метода для решения системы уравнений метода сферических гармоник в $X - Y$ - геометрии. // В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, 1981. С. 113–124.
3. Сакабеков А. Краевые задачи для одно-скоростного стационарного уравнения переноса излучения в P_{2N+1} - приближении. Автореф. дисс. ... канд. физ. - мат. наук. Алма-Ата, 1982.
4. Султангазин У.М., Сакабеков А., Краснов Я.А. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1984. № 3. С. 49–53.
5. Кондратьев В.А. // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
6. Наваль Сайед Ахмед Шериф // Вестник МГУ. Сер. 1 матем. и мех. 1980. № 3. С. 7–10.
7. Мельников И.И. // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37. № 1. С. 149–150.

Поступила в редакцию 30.10.2006 г.

УДК 517.938

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА

А.О. СУЛТАНБЕКОВА

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы, ул. Пушкина, 125 sultanbekova@math.kz

Исследуются показатели Ляпунова однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений второго порядка как бэровские функции скалярного параметра.

Целью настоящей работы является исследование вопроса классификации по Бэру [1] показателей Ляпунова дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{y} = \omega b(t)\dot{y} + a(t)y, \quad t \in R^+, \quad a(t), b(t) \in C^+, \quad \omega \in [0, 1], \quad (1)$$

где C^+ – пространство непрерывных и ограниченных на $R^+ = [0, +\infty)$ функций.

Показатели Ляпунова уравнения (1) $\lambda_1(\omega) \geq \lambda_2(\omega)$ определяются как показатели Ляпунова эквивалентной системы

$$\dot{x} = A(t, \omega)x, \quad x = \text{col}(x_1, x_2), \quad x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad A(t, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & \omega b(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Используемые здесь необходимые сведения из теории показателей содержатся в [2]. Для линейных систем произвольного вида (размерности не меньше двух) строгая принадлежность показателей Ляпунова второму классу Бэра следует из [3,4]. Однако для систем вида (2) этот результат неприменим, так как в данном случае рассматриваются системы специального вида. Для приведенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с линейной зависимостью коэффициента от параметра аналогичный результат установлен в [5]. Здесь изучается этот же вопрос при линейной зависимости от параметра коэффициента при первой производной искомой функции для уравнения общего вида.

Теорема. *Существуют такие функции $a(t), b(t) \in C^+$, что показатели Ляпунова $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)$ уравнения (1) принадлежат строго второму классу Бэра.*

Keywords: differential equation, Lyapunov's exponent

2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

© А.О. Султанбекова, 2006.

Доказательство. 1. Если мы покажем, что каждая точка полуинтервала $(0, 1]$ является точкой разрыва функций $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$, то в силу теоремы VI на стр. 243 из [6] это будет означать, что эти функции не принадлежат первому классу Бэра. Тогда, учитывая, что они входят во второй класс [3], мы установим, что они строго второго класса.

Определим сначала кусочно-постоянные функции $a(t)$, $b(t)$ следующим образом:

$$a(t) = \begin{cases} \pi^2, & \text{при } t \in [\zeta(2k), \zeta(2k+1)), \\ -\pi^2, & \text{при } t \in [\zeta(2k+1), \zeta(2k+2)), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [\zeta(2k), \zeta(2k+1)), \\ 2\pi, & \text{при } t \in [\zeta(2k+1), \zeta(2k+2)), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\zeta(0) = 0$, $\zeta(k) = \zeta(k-1) + 3^k$.

При фиксированном значении ω на каждом промежутке $[\zeta(2k), \zeta(2k+1))$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) матрица $A(t, \omega)$ принимает постоянное значение. При $t \in [\zeta(2k), \zeta(2k+1))$ обозначим это значение через $A_1(\omega)$, при $t \in [\zeta(2k+1), \zeta(2k+2))$ – через $A_2(\omega)$.

Пусть $X(t, \tau, \omega)$ – матрица Коши системы (2). Так как $\gamma_1 = \pi$, $\gamma_2 = -\pi$ – собственные значения матрицы $A_1(\omega)$, а $e_1 = (1, \pi)$, $e_2 = (1, -\pi)$ – соответствующие им собственные векторы, то при $t, \tau \in [\zeta(2k), \zeta(2k+1))$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$X(t, \tau, \omega)e_i = \exp(A_1(\omega)(t - \tau))e_i = \exp(\gamma_i(t - \tau))e_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Матрица $A_2(\omega)$ имеет чисто мнимые собственные значения $\pi\omega \pm i\pi\sqrt{1 - \omega^2}$, поэтому для $t, \tau \in [\zeta(2k+1), \zeta(2k+2))$ матрица $X(t, \tau, \omega)$ запишется в виде

$$X(t, \tau, \omega) = e^{\omega\pi(t-\tau)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \pi\psi(\omega)(t - \tau) + \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega)(t - \tau) & \frac{1}{\pi\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega)(t - \tau) \\ -\frac{\pi}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega)(t - \tau) & \cos \pi\psi(\omega)(t - \tau) - \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega)(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\psi(\omega) = \sqrt{1 - \omega^2}$.

2. Зададим на отрезке I два множества σ_1 и σ_2 . Выберем любое число $\omega \in I$ и запишем значение $\psi(\omega)$ в троичной системе $\psi(\omega) = \alpha_1 3^{-1} + \alpha_2 3^{-2} + \dots$, где $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, 2, \dots$

Образуем множество σ_1 значений ω , для которых $\psi(\omega)$ представимо в виде всевозможных конечных разложений, т.е. $\psi(\omega) = \alpha_1 3^{-1} + \dots + \alpha_r 3^{-r}$; $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, \dots, r$, $r \in N$, а множество σ_2 – из значений ω , для которых $\psi(\omega)$ представимо в виде бесконечных разложений $\psi(\omega) = \alpha_1 3^{-1} + \dots + \alpha_s 3^{-s} + 3^{-s-1} + 3^{-s-2} + \dots$; $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, \dots, s$, $s \in N$, с коэффициентами $\alpha_i = 1$ для всех $j \in N$, кроме, может быть, конечного числа.

Ясно, что так определенные множества σ_1, σ_2 плотны на I .

3. Фиксируем такое значение параметра ω , что $\psi(\omega) \in \sigma_1$. Так как в этом случае $\psi(\omega) = \alpha_1 3^{-1} + \dots + \alpha_r 3^{-r}$; $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, \dots, r$, $r \in N$, то при $2k \geq r$ число $\psi(\omega) \cdot 3^{2k+1}$ является целым. Значит, при $2k \geq r$ в силу (4) имеем

$$X(\zeta(2k+2), \zeta(2k+1), \omega) = e^{\omega\pi 3^{2k+2}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} + \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} & \frac{1}{\pi\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} \\ -\frac{\pi}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} & \cos \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} - \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k+2} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\omega\pi 3^{2k+2}} E^*, \quad (4)$$

где E^* есть либо единичная матрица E , либо $-E$.

Пусть k_0 – фиксированное целое число такое, что $2k_0 \geq r$, и пусть $x_i(t)$ – решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(\zeta(2k_0)) = e_i$.

С учетом (3), (4) для $k > k_0$ получаем

$$\begin{aligned} x_i(\zeta(2k+1)) &= X(\zeta(2k+1), \zeta(2k), \omega) \cdot X(\zeta(2k), \zeta(2k-1), \omega) \cdot \dots \\ &\dots \cdot X(\zeta(2k_0+2), \zeta(2k_0+1), \omega) \cdot X(\zeta(2k_0+1), \zeta(2k_0), \omega) \cdot e_i = \\ &= e^{\gamma_i 3^{2k+1}} \cdot e^{\omega\pi 3^{2k}} \cdot E^* \cdot \dots \cdot e^{\omega\pi 3^{2k_0+2}} \cdot e^{\gamma_i 3^{2k_0+1}} \cdot E^* e_i = \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \exp\left(\gamma_i 3^{2k+1} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2(k-k_0)}}\right)\right) \cdot \exp\left(\omega\pi 3^{2k} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2(k-k_0)-2}}\right)\right) \cdot E^* e_i.$$

Так как для любого $n > n_0$

$$\zeta(n) - \zeta(n_0) = 3^n + \dots + 3^{n_0+1} = 3^n \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-n_0-1}}\right), \quad (6)$$

то в силу (5), (6) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_i(\zeta(2k+1))\|}{\zeta(2k+1) - \zeta(2k_0)} = \frac{3\gamma_i}{4} + \frac{\pi\omega}{12}. \quad (7)$$

Аналогичным образом устанавливается существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_i(\zeta(2k))\|}{\zeta(2k) - \zeta(2k_0)} = \frac{\gamma_i}{4} + \frac{3\pi\omega}{4}. \quad (8)$$

Далее воспользуемся тем, что для вычисления характеристических показателей решений системы (2) с кусочно-постоянными функциями $a(t)$, $b(t)$ можно ограничиться последовательностями значений аргумента, которые принадлежат концам промежутков постоянства функций (см. [1], стр. 148-149). Отсюда согласно (7), (8) с учетом различия знаков γ_1, γ_2 следует, что решения системы (2) с условием $x_i(\zeta(2k_0)) = e_i$ имеют характеристические показатели, равные соответственно

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\omega}{12}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\omega}{12}, \omega \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \\ \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi\omega}{4}, \omega \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \end{array} \right.$$

Так как они различны, то они являются показателями нормального базиса, то есть показателями Ляпунова

$$\lambda_1(\omega) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\omega}{12}, \quad \lambda_2(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\omega}{12}, \omega \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \\ \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi\omega}{4}, \omega \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \end{array} \right.$$

4. Фиксируем теперь какое-либо значение параметра ω , такое что $\psi(\omega) \in \sigma_2$. Это означает, что для некоторого $s \in N$ имеет место равенство $\psi(\omega) = \alpha_1 3^{-1} + \dots + \alpha_s 3^{-s} + 3^{-s-1} + 3^{-s-2} + \dots$, где $\alpha_j \in \{0, 1, 2\}$, $j = 1, \dots, s$.

В этом случае при любом $r \geq s$ число $\psi(\omega) 3^r$ можно записать в виде $l_r + \frac{1}{2}$, где l_r – некоторое натуральное число. Поэтому, если $2k - 1 \geq s$, то

$$\begin{aligned}
X(\varsigma(2k), \varsigma(2k-1), \omega) &= e^{\omega\pi 3^{2k}} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \cos \pi\psi(\omega) 3^{2k} + \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k} & \frac{1}{\pi\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k} \\ -\frac{\pi}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k} & \cos \pi\psi(\omega) 3^{2k} - \frac{\omega}{\psi(\omega)} \sin \pi\psi(\omega) 3^{2k} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{e^{\omega\pi 3^{2k}}}{\psi(\omega)} E^* \cdot \begin{pmatrix} \omega & \frac{1}{\pi} \\ -\pi & -\omega \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что

$$X(\varsigma(2k), \varsigma(2k-1), \omega)e_1 = \frac{e^{\omega\pi 3^{2k}}}{\psi(\omega)} E^* (\omega+1) e_2,$$

$$X(\varsigma(2k), \varsigma(2k-1), \omega)e_2 = \frac{e^{\omega\pi 3^{2k}}}{\psi(\omega)} E^* (\omega-1) e_1.$$

Фиксируем целое число k_0 , такое что $4k_0 \geq s$, и пусть $x_i(t)$ – решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(\varsigma(4k_0)) = e_i$. Так как при любом $k > k_0$

$$\begin{aligned}
x_1(\varsigma(4k+4)) &= X(\varsigma(4k+4), \varsigma(4k_0), \omega) e_1 = \\
&= X(\varsigma(4k+4), \varsigma(4k), \omega) \cdot \dots \cdot X(\varsigma(4k_0+4), \varsigma(4k_0), \omega) e_1 = \\
&= \exp(\gamma_1 3^{4k_0+1}) \cdot \exp(\omega\pi 3^{4k_0+2}) \cdot \exp(\gamma_2 3^{4k_0+3}) \cdot \exp(\omega\pi 3^{4k_0+4}) \cdot \dots \\
&\dots \cdot \exp(\gamma_1 3^{4k+1}) \cdot \exp(\omega\pi 3^{4k+2}) \cdot \exp(\gamma_2 3^{4k+3}) \cdot \exp(\omega\pi 3^{4k+4}) \cdot E^* \cdot e_1 = \\
&= \exp(\gamma_2 3^{4k+3} + \gamma_1 3^{4k+1} + \dots + \gamma_2 3^{4k_0+3} + \gamma_1 3^{4k_0+1}) \cdot \\
&\cdot \exp(\omega\pi (3^{4k+4} + 3^{4k+2} + \dots + 3^{4k_0+4} + 3^{4k_0+2})) \cdot E^* \cdot e_1
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_1(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4) - \varsigma(4k_0)} = \frac{2\gamma_1}{5} + \frac{6\pi\omega}{5}.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x_2(\varsigma(4k+4))\|}{\varsigma(4k+4) - \varsigma(4k_0)} = \frac{2\gamma_2}{5} + \frac{6\pi\omega}{5}.$$

Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, получим, что $\frac{2\pi}{5} + \frac{6\pi\omega}{5}$, $-\frac{2\pi}{5} + \frac{6\pi\omega}{5}$ есть показатели системы (2) при $\psi(\omega) \in \sigma_2$.

В силу теоремы 29.2.1 из [1] для любого $d > 0$ существует система

$$\dot{x} = \tilde{A}(t) \cdot x, \tag{9}$$

с непрерывно дифференцируемой на R^+ матрицей $\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega \cdot \tilde{b}(t) & \tilde{a}(t) \end{pmatrix}$, обладающей тем свойством, что всякое решение системы (2) аналогично некоторому решению системы (9), причем их отклонение есть величина $o(e^{-dt})$ при $t \rightarrow \infty$.

Как следует из доказательства теоремы 29.2.1, такое построение достаточно провести для каждого коэффициента матрицы $A(t)$, в данном случае для $a(t), b(t)$.

Тем самым установлено, что существует система (2) с коэффициентами из C^+ такая, что функции $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)$ разрывны в каждой точке интервала $(0, 1]$. Поэтому они принадлежат второму классу Бэра. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Бэр Р. Теория разрывных функций. М., 1932.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. Миллионщиков В. М. // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408 – 1416.
4. Рахимбердиев М. И. // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925 – 931.
5. Султанбекова А. О. // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 91 – 95.
6. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М., 1937.
7. Рахимбердиев М. И. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1279 – 1281.

Поступила в редакцию 07.12.2005г.

УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А.Б. ТУНГАТАРОВ, Г.К. РЗАЕВА

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
010008, Астана ул. Мунайпасова, 5
Казахский национальный университет им.аль-Фараби
050012 Алматы ул. Масанчи, 39/47

В работе решена одна начально-краевая задача для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью.

Пусть $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.
Рассмотрим в G уравнение

$$\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{e^{-i\varphi}}{2r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + \frac{b(\varphi)}{4r^2} \bar{V} = 0, \quad (1)$$

где $b(\varphi) \in [0, 2\pi]$, $b(\varphi + 2\pi) = b(\varphi)$, λ – действительный параметр. Рассмотрим для уравнения (1) следующую краевую задачу.

Задача В: Требуется найти решение уравнения (1) из класса

$$C(G) \cap W_p^1(G), \quad 1 < p < 2, \quad (2)$$

удовлетворяющее условиям

$$V(r, 0) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} V(r, \varphi) = b_0 r^\mu,$$

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0, \varphi) = 0, \quad n = \overline{1, k-1}, \quad (3)$$

$$|V(r, \varphi)| = \underline{O}(r^k), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = [\mu], \quad (4)$$

где b_0 – заданное комплексное, μ – действительное числа.

Решение задачи B ищем в виде

$$V(r, \varphi) = r^\mu (\bar{c}_1 P_{\nu,1}(\varphi) + \bar{c}_2 Q_{\nu,1}(\varphi) + c_1 P_{\nu,2}(\varphi) + c_2 Q_{\nu,2}(\varphi)), \quad (5)$$

где $\nu = \mu - \frac{1}{2\lambda}$,

$$P_{\nu,1}(\varphi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\nu)^{2k-1}} J_{\nu,2k-1}(\varphi), \quad Q_{\nu,1}(\varphi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\nu)^{2k-1}} I_{\nu,2k-1}(\varphi),$$

$$P_{\nu,2}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\nu)^{2k}} J_{\nu,2k}(\varphi), \quad Q_{\nu,2}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\nu)^{2k}} I_{\nu,2k}(\varphi),$$

$$J_{\nu,0}(\varphi) = e^{\frac{i\varphi}{2\lambda}} \cos \nu\varphi, \quad I_{\nu,0}(\varphi) = e^{\frac{i\varphi}{2\lambda}} \sin \nu\varphi,$$

$$J_{\nu,k}(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{J_{\nu,k-1}(\gamma)} d\gamma, \quad I_{\nu,k}(\varphi) = \int_0^\varphi b(\varphi, \gamma) \overline{I_{\nu,k-1}(\gamma)} d\gamma \quad (k = \overline{1, \infty}).$$

Если $\lambda\mu \geq \frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$, то функция заданная по формуле (5), автоматически удовлетворяет условиям (3) и (4). Эту функцию подчиним теперь условиям

$$V(r, 0) = b_0 r^\mu, \quad (6)$$

$$V(r, 0) = V(r, 2\pi). \quad (7)$$

Подставив (5) в (6) и (7), с учетом

$P_{\nu,1}(0) = 0, Q_{\nu,1}(0) = 0, P_{\nu,2}(0) = 1, Q_{\nu,2}(0) = 0$ соответственно получим

$$c_1 = b_0, \quad (8)$$

$$c_1 = \bar{c}_1 P_{\nu,1}(2\pi) + \bar{c}_2 Q_{\nu,1}(2\pi) + c_1 P_{\nu,2}(2\pi) + c_2 Q_{\nu,2}(2\pi).$$

Отсюда

$$\bar{c}_2 Q_{\nu,1}(2\pi) + c_2 Q_{\nu,2}(2\pi) = (1 - P_{\nu,2}(2\pi))b_0 - P_{\nu,1}(2\pi)\bar{b}_0. \quad (9)$$

Если $\Delta = |Q_{\nu,2}(2\pi)|^2 - |Q_{\nu,1}(2\pi)|^2 \neq 0$, то из (9) следует

$$c_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = ((1 - P_{\nu,2}(2\pi))b_0 - P_{\nu,1}(2\pi)\bar{b}_0) \overline{Q_{\nu,2}(2\pi)} - ((1 - \overline{P_{\nu,2}(2\pi)})\bar{b}_0 - \overline{P_{\nu,1}(2\pi)}b_0) Q_{\nu,1}(2\pi),$$

$$\Delta = |Q_{\nu,2}(2\pi)|^2 - |Q_{\nu,1}(2\pi)|^2.$$

Таким образом, при

$$\Delta = |Q_{\nu,2}(2\pi)|^2 - |Q_{\nu,1}(2\pi)|^2 \neq 0$$

мы получим решение задачи B в виде

$$V(r, \varphi) = r^\mu \left(\bar{b}_0 P_{\nu,1}(\varphi) + \frac{\bar{\Delta}_1}{\Delta} \cdot Q_{\nu,1}(\varphi) + b_0 P_{\nu,2}(\varphi) + \frac{\Delta_1}{\Delta} Q_{\nu,2}(\varphi) \right). \quad (10)$$

Теорема 1. Если $\Delta \neq 0, \lambda\mu \geq \frac{1}{2}, \lambda \neq 0$, то задача B имеет единственное решение, которое находится по формуле (10).

Если $\Delta = 0, \lambda\mu \geq \frac{1}{2}, \lambda \neq 0$, то для разрешимости задачи B необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{Q_{\nu,1}(2\pi)}{Q_{\nu,2}(2\pi)} = \frac{(1 - P_{\nu,2}(2\pi))b_0 - P_{\nu,1}(2\pi)\bar{b}_0}{(1 - \bar{P}_{\nu,2}(2\pi))\bar{b}_0 - \bar{P}_{\nu,1}(2\pi)b_0}. \quad (11)$$

При выполнении этого равенства из (9) получим

$$c_2 = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(b_0(1 - P_{\nu,2}(2\pi)) - \bar{b}_0 P_{\nu,1}(2\pi)) + i(\overline{Q_{\nu,2}(2\pi)} + Q_{\nu,1}(2\pi))\alpha}{\operatorname{Re}(Q_{\nu,1}(2\pi) + Q_{\nu,2}(2\pi))}, & \text{если } \operatorname{Re} Q_{\nu,1}(2\pi) \neq -\operatorname{Re} Q_{\nu,2}(2\pi), \\ \frac{\operatorname{Re}(b_0(1 - P_{\nu,2}(2\pi)) - \bar{b}_0 P_{\nu,1}(2\pi)) - (\overline{Q_{\nu,2}(2\pi)} + Q_{\nu,1}(2\pi))\alpha}{\operatorname{Im}(Q_{\nu,1}(2\pi) - Q_{\nu,2}(2\pi))}, & \text{если } \operatorname{Im} Q_{\nu,1}(2\pi) \neq \operatorname{Im} Q_{\nu,2}(2\pi), \end{cases} \quad (12)$$

где α – произвольное действительное число. Таким образом, имеет место

Теорема 2. При $\Delta = 0, \lambda\mu \geq \frac{1}{2}, \lambda \neq 0$ для разрешимости задачи B необходимо и достаточно выполнения равенства (11). В этом случае задача B имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формулам (5), (8) и (12).

Цитированная литература

1. Усманов З.Д. // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw, 1984. V.12. P. 214 – 272.
2. Тунгатаров А.Б. // Док. АН СССР. 1991. Т. 319, № 3. С.570 – 573.
3. Тунгатаров А.Б. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26 № 10. С. 1805 – 1816.

Поступила в редакцию 14.09.2005 г.

УДК 681.518:004

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СЕТЕЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕЛЕФОНИИ

Ж.Ш. ШАРШЕНАЛИЕВ, Д.В. ЯНКО

Институт автоматики НАН КР
720071 г.Бишкек, пр.Чуй, 265

В данной работе рассматривается модифицированный алгоритм различения сигналов для гетерогенных сетей компьютерной телефонии, позволяющий учитывать равномерно распределенный шум, частотные, временные и амплитудные искажения сигналов.

В последнее время при разработке систем, основанных на технологиях компьютерной телефонии, возникает потребность в алгоритмах различения сигналов, позволяющих учитывать особенности, накладываемые гетерогенной телекоммуникационной сетью: частотно-временные искажения сигналов, сильный амплитудный разброс, помехи, местами соизмеримые с сигналом. Прямое использование существующих алгоритмов и методов не решает в полной мере поставленную задачу — требуется модификация существующих алгоритмов и создание улучшенного алгоритма различения сигналов.

Предлагается следующий алгоритм. Частота дискретизации сигнала составляет 8000 Гц. Известно, что максимальная частота частотного спектра сигналов телефонии имеет значение $f_B=3400$ Гц, следовательно, по теореме Котельникова-Найквиста [1] частота дискретизации должна удовлетворять соотношению $f_d = 2f_B$. Используем прямоугольные окна $w_k(j)$

$$w_k(j) = \begin{cases} 1, & k = j, \dots, j + window_width - 1, \\ 0, & k \neq j, \dots, j + window_width - 1, \end{cases}$$

где $window_width=80$ — ширина окна, $j = 1, 2, \dots, N - window_width$ — текущее положение окна. Алгоритм разбивает исходную последовательность данных $\{s_n\}, n = 1, 2, \dots, N$, на окна s_n^* :

$$s_n^* = s_n w_n(j), n = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N - window_width. \quad (1)$$

Исходная последовательность состоит из N равностоящих отсчетов с интервалом дискретности $\Delta t = 1/f_d$ секунд. Отсчеты отмечены моментами времени:

$$t_n = t_0 + n\Delta t, n = 1, 2, \dots, N.$$

Keywords: *Algorithm of distinguishing signals, heterogeneous networks, computer telephony*

2000 Mathematics Subject Classification: 68Q85, 68U35

© Ж.Ш. Шаршеналиев, Д.В. Янко, 2006.

Следует отметить, что момент времени t_0 выбирается произвольно. Таким образом,

$$s_n = s(t_0 + n\Delta t), n = 1, 2, \dots, N.$$

Шаг движения окна на частоте дискретизации 8000 Гц составляет 10 точек. Ширина окна во временном выражении соответствует $80/8000=0.01$ секунд = 10 мс. Шаг движения окна во временном выражении $10/8000=0.00125$ с = 1,25 мс, что позволяет в пределах ширины одного окна получать 8 реализаций исходных данных.

Для взвешенных окном данных (1) выполняется расчет среднего значения

$$\bar{s} = \frac{1}{window_width} \sum_{n=1}^{window_width} s_n^*,$$

затем из выделенных оконной функцией данных вычитается найденное среднее значение

$$s_n^{**} = s_n^* - \bar{s}, n = 1, \dots, window_width,$$

что удаляет постоянную составляющую из сигнала и приводит к повышению избирательной способности алгоритма на низких частотах.

Обработанные данные без постоянной составляющей дополняются нулями до 128 точек

$$s_n^{***} = 0, n = window_width + 1, \dots, 128, \quad (2)$$

что дает возможность использовать предложенный Кули-Тьюки алгоритм вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) [3].

Для последовательности (2) вычисляется БПФ. Напомним алгоритм быстрого преобразования Фурье [1–3]. Преобразование Фурье действительной или комплексной функции $x(t)$, заданной на бесконечном интервале, представляет собой комплексную величину

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \exp\{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t\} dt.$$

Ограничив интервал задания функции $x(t)$, можно получить конечное преобразование Фурье

$$X(f, T) = \int_0^T x(t) \cdot \exp\{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t\} dt. \quad (3)$$

Так как последовательность (2) дискретна, то $x_n = x(n \cdot \Delta t), n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Дискретной аппроксимацией (3) будет

$$X(f, T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \exp\{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot \Delta t\}. \quad (4)$$

Для расчета (4) выбираются дискретные значения частоты $f_k = k/T = k/(N\Delta t)$, тогда $X_k = X(f_k)/(\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \exp\{-2j2\pi kn/N\}, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Теперь, полагая $W(a) = \exp\{-2j\pi a/N\}$, будем иметь

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W(kn), k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Формулу (5) называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), для вычисления которого требуется примерно $4N^2$ операций умножения и сложения [1–3]. Идея быстрого преобразования Фурье сводится к разбиению N на составные множители и вычислению ДПФ для более коротких последовательностей. Поэтому в (5) индексы k и n представим в следующем виде

$$\begin{aligned} k &= \sum_{v=0}^{p-1} k_v \prod_{i=0}^v r_i, k_v = 0, 1, 2, \dots, r_{v+1} - 1, r_0 = 1, \\ n &= \sum_{v=0}^{p-1} n_v \prod_{i=0}^v r_{m+1-i}, n_v = 0, 1, 2, \dots, r_{p-v} - 1, r_{p+1} = 1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $p = \log_2 N$. Записывая формулы (6) в виде:

$$k = k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{p-1} (r_1 r_2 \dots r_{p-1}), \quad n = n_0 + n_1 r_p + \dots + n_{p-1} (r_p r_{p-1} \dots r_2),$$

(где $k_0 = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1; n_0 = 0, 1, 2, \dots, r_p - 1; k_1 = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1; n_1 = 0, 1, 2, \dots, r_{p-1} - 1; \dots; k_{p-1} = 0, 1, 2, \dots, r_p - 1; n_{p-1} = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1$.) для (5) будем иметь

$$X(k) = X(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^{r_p-1} \sum_{n_1=0}^{r_{p-1}-1} \dots \sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} x(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W(kn), \tag{7}$$

где

$$W(kn) = W(k[n_0 + n_1 r_p + \dots + n_{p-v} (r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) + \dots + n_{p-1} (r_p r_{p-1} \dots r_2)]), \tag{8}$$

а величина k определена равенством (6). Другой способ представления заключается в следующем [1]:

$$\begin{aligned} k &= (k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1}) + (r_1 r_2 + \dots + \\ &+ r_v)(k_v + k_{v+1} r_{v+1} + \dots + k_{p-1} r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1}). \end{aligned}$$

Откуда для (8) имеем

$$\begin{aligned} kn_{p-v} (r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) &= (k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1}) n_{p-v} (r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) + \\ &+ N n_{p-v} (k_v + k_{v+1} r_{v+1} + \dots + k_{p-1} r_{v+1} r_{v+2} \dots r_{p-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее величина W для любого аргумента, кратного N , равна 1, поэтому при $v = 1, 2, \dots, p$

$$W(kn_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}) = W[(k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1}) n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}].$$

Для $v=1$ имеем

$$W(kn_{p-1} r_p r_{p-1} \dots r_2) = W(k_0 n_{p-1} r_p r_{p-1} \dots r_2) = W(k_0 n_{p-1} N / r_1) = \exp\{-2j\pi k_0 n_{p-1} / r_1\}. \tag{10}$$

Учитывая, что $W(a + b) = W(a)W(b)$, можно показать, что при $v = 2, 3, \dots, p$ (9) запишется в виде

$$W[(k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-2} r_1 r_2 \dots r_{v-2}) n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}] \cdot W(k_{v-1} r_1 r_2 \dots r_{v-1} n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1}).$$

Здесь второй сомножитель содержит величину k_{v-1} , который представляется выражением

$$W(k_{v-1} n_{p-v} N / r_v) = \exp\{-2j\pi k_{v-1} n_{p-v} / r_v\}. \tag{11}$$

Заметим, что переменные k_{v-1} и n_{p-v} принимают значения от 0 до r_{v-1} . Это показывает, что для вычисления $X(k_{v-1})$ требуется r_v^2 операций умножения и сложения. Выражение (10) можно представить в виде

$$W(kn) = \prod_{v=1}^p T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) W(k_{v-1} n_{p-v} N / r_v), \tag{12}$$

где $T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) =$

$$= \begin{cases} 1, v = 1; \\ W[(k_0 + k_1 r_1 + \dots + k_{v-2} r_1 r_2 \dots r_{v-2})(n_{p-v} r_p r_{p-1} \dots r_{v+1})], v = 2, 3, \dots, p. \end{cases} \quad (13)$$

Выражения T (13) называют ориентирующими коэффициентами. Подставим (12) в (7):

$$\begin{aligned} X(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) &= \sum_{n_0=0}^{r_p-1} T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) W(k_{p-1} n_0 N / r_p) \sum_{n_1=0}^{r_{p-1}-1} T(k_0, k_1, \dots, k_{p-3}) \cdot \\ W(k_{p-2} n_1 N / r_{p-1}) &\sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} T(k_0) W(k_1 n_{p-2} N / r_2) \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} x(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W(k_0 n_{p-1} N / r_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно (14) преобразование Фурье может быть выполнено за p итераций. Для

$$A_1(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-1}=0}^{r_1-1} x(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) W(k_0 n_{p-1} N / r_1) \quad (15)$$

в [1] было показано, что (15) дает N/r_1 преобразований Фурье функции $x(n_{p-1})$, каждое из которых требует r_1^2 операций. Отсюда для

$$A_2(k_0, k_1, n_0, n_1, \dots, n_{p-3}) = \sum_{n_{p-2}=0}^{r_2-1} A_1(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) \cdot T(k_0) \cdot W(k_1 n_{p-2} N / r_2) \quad (16)$$

следует, что (16) требует N/r_2 преобразований Фурье функции $x(n_{p-2})$, каждое из которых требует r_2^2 операций. Зная, что $v = 2, 3, \dots, p-1$, можно показать, что

$$\begin{aligned} A_v(k_0, k_1, \dots, k_{v-1}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v-1}) &= \sum_{n_{p-v}=0}^{r_v-1} A_{v-1}(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v}) \cdot \\ &T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) \cdot W(k_{v-1} n_{p-v} N / r_v). \end{aligned} \quad (17)$$

И вновь получим N/r_v преобразований Фурье функции $x(n_{p-v})$, каждое из которых требует r_v^2 операций. На последнем шаге (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} X(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) &= A_p(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \\ &= \sum_{n_0=0}^{r_p-1} A_{p-1}(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}, n_0) \cdot T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) \cdot W(k_{p-1} n_0 N / r_p), \end{aligned} \quad (18)$$

где также имеем N/r_p преобразований Фурье функции $x(n_0)$, каждое из которых требует r_p^2 операций. Выше было показано, что исходная последовательность дополняется нулями до 128 (2^7) точек, что дает возможность использовать алгоритм Кули-Тьюки. Формула (7) теперь содержит p сумм, каждая из которых дает $N/2$ преобразований Фурье, для расчета каждого из которых требуется 4 итерации. Следовательно, общее количество итераций будет $2Np$ операций умножения и сложения комплексных чисел. Индексы k и n в (6) теперь запишутся как

$$\begin{aligned} k &= k_0 + 2k_1 + 2^2 k_2 + \dots + 2^{p-1} k_{p-1}, \\ n &= n_0 + 2n_1 + 2^2 n_2 + \dots + 2^{p-1} n_{p-1}, \end{aligned}$$

где в первой части уравнения k и n могут иметь только значения 0 или 1 для всех $v = 1, 2, \dots, p$. Следовательно, (11) можно представить как

$$W(k_{v-1} n_{p-v} N / r_v) = \exp\{-j \cdot \pi \cdot k_{v-1} \cdot n_{p-v}\},$$

где экспонента может принимать значения только 1 или -1 , следовательно, формулы (13) и (14) соответственно примут вид

$$T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) = \begin{cases} 1, v = 1 \\ W[(k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{v-2}k_{v-2})2^{p-v}n_{p-v}], v = 2, 3, \dots, p, \end{cases}$$

$$X(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \sum_{n_0=0}^1 \sum_{n_1=0}^1 \dots \sum_{n_{p-2}=0}^1 \sum_{n_{p-1}=0}^1 x(n_0, n_1, \dots, n_{p-1})W(kn),$$

где $W(kn) = \prod_{v=1}^p T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) \exp\{-j \cdot \pi \cdot k_{v-1} \cdot n_{p-v}\}$. Согласно (15) на первой итерации получим

$$A_1(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}) = \sum_{n_{p-1}=0}^1 x(n_0, n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}) \exp\{-j \cdot \pi \cdot k_0 \cdot n_{p-1}\}.$$

Если $v=2, 3, \dots, p-1$, то на v -м шаге (17) запишется как $A_v(k_0, k_1, \dots, k_{v-1}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v}) =$

$$= \sum_{n_{p-v}=0}^1 A_{v-1}(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}, n_0, n_1, \dots, n_{p-v}) \cdot T(k_0, k_1, \dots, k_{v-2}) \exp\{-j \cdot \pi \cdot k_{v-1} n_{p-v}\}.$$

На последней итерации (18) имеем

$$\begin{aligned} X(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) &= A_p(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}) = \\ &= \sum_{n_0=0}^1 A_{p-1}(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}, n_0) T(k_0, k_1, \dots, k_{p-2}) \exp\{-j \cdot \pi \cdot k_{p-1} \cdot n_0\}. \end{aligned}$$

Итерационный дискрет на частоте дискретизации 8000 Гц составляет 40 точек, по достижению которого выполняется когерентное усреднение [2] 4-х реализаций БПФ: $S_{n,1}^{***}, S_{n,2}^{***}, S_{n,3}^{***}, S_{n,4}^{***}$: $S_n^{****} =$

$$= \frac{S_{n,1}^{***} \cdot Re + S_{n,2}^{***} \cdot Re + S_{n,3}^{***} \cdot Re + S_{n,4}^{***} \cdot Re}{4} + j \frac{S_{n,1}^{***} \cdot Im + S_{n,2}^{***} \cdot Im + S_{n,3}^{***} \cdot Im + S_{n,4}^{***} \cdot Im}{4}.$$

По усредненным данным БПФ выполняется расчет энергетического спектра:

$$E_n = \sqrt{(S_n^{****} \cdot Re)^2 + (S_n^{****} \cdot Im)^2}.$$

Энергетический спектр E_n подвергается анализу в спектральном анализаторе, где при установлении факта доминирующего присутствия частот 1200 и 2100 Гц принимается решение о включении дополнительного алгоритма, основанного на автокорреляции [1], это связано с тем, что БПФ не подходит для анализа быстрых сигналов [4, 5].

Используется глубина автокорреляции, равная 4; как показывают эксперименты, при таком коэффициенте для декодирования FSK сигналов достигаются наилучшие результаты:

$$s_{2k} = s_k \cdot s_{k-n+1}, n = 4, N = 40, k = n \dots N - 1, s_{2j} = s_{2n}, j = 0, \dots, n - 1.$$

После автокорреляции данные подвергаются усреднению: $\bar{s}_0 = (5s_{20} + 2s_{21} - s_{22})/6$, $\bar{s}_i = (s_{2(i-1)} + s_{2i} + s_{2(i+1)})/3$, $i = 1 \dots N - 1$, $\bar{s}_N = (5s_{2N} + 2s_{2(N-1)} - s_{2(N-2)})/6$.

После усреднения автокорреляционных данных производится пороговый анализ, в результате чего на выходе получаем бинарную последовательность:

$$b_i = \begin{cases} 0, \bar{s}_i < l \\ 1, \bar{s}_i \geq l \end{cases}, \quad l = const, i = 0, \dots, N - 1.$$

Полученные в спектральном анализаторе флаги присутствия частот f_1, f_2, \dots, f_q , бинарная последовательность b_i , полученная в атокорреляторе, а также внешние управляющие сигналы s_1, s_2, \dots, s_r подаются на вход синтезатора символов, где производится анализ совокупности поданных сигналов и в случае наличия совпадений с частотно-временными параметрами, описываемыми протоколами, производится синтез символа, который затем помещается в буфер накопления "сырых" данных:

$$buffer = buffer + symbol(f_1, f_2, \dots, f_q, b_i, s_1, s_2, \dots, s_r),$$

где q — количество флагов присутствия частот, $i = 0, \dots, N - 1$, r — количество внешних управляющих сигналов.

С каждой процессинговой итерацией данные буфера накопления подвергаются обработке анализатором протоколов, на выходе которого в случае положительного исхода попадает извлеченная из сигналов информация $Info = Analyze(Buffer)$. В пределах длительности одного окна происходят 2 процессинговые итерации: 80 точек — итерационный дискрет. Алгоритм повторяется до наступления одного или нескольких событий завершения работы.

При необходимости повышения производительности вычислений разработанный алгоритм очень легко распараллеливается различными потоками выполнения.

Разработанный алгоритм был использован при создании программно-аппаратной системы Центрального Бюро Ремонта — ЦБР и Распределенной Системы Автоматического Информирования Абонентов — РСАИ [4, 5]. Эффективная работа разработанных систем подтвердила работоспособность, надежность и улучшенные различительные характеристики разработанного алгоритма.

Цитированная литература

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М. 1989.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М. 2006.
3. Гольденберг Б.А. Цифровая обработка сигналов. М. 1990.
4. Шаршеналиев Ж.Ш., Янко Д.В. Трехмерное представление спектров в базисе быстрого преобразования Фурье // Государственное агентство по интеллектуальной собственности при правительстве Кыргызской Республики (Кыргызпатент). Свидетельство № 126 от 22 июня 2006 года.
5. Шаршеналиев Ж.Ш., Янко Д.В. // Известия Кыргызского национального технического университета им И. Раззакова. 2005. № 7. С.3 – 10.

Поступила в редакцию 26.12.2006г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

A k i s h e v G . **On degree M – term approximation periodic function classes** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.5–11.

On order of M – term approximation of classes of periodic functions. M – term best approximation of Besov’s class in Lorentz space with anisotropic metric is valued.

References -17.

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

А қ ы ш е в Г . **Периодты функциялар класын M – мүшелі жуықтаудың реті туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.5–11.

Мақалада О.В.Бесов класын аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігінде M – мүшелі жуықтаудың реті анықталған.

Библ. — 17.

УДК: 518.9

2000 MSC: 42A16

A m i r g a l i y e v a C . H . **About interaction of linear multivalent maps in terms of H -convexity** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.12–16.

In this paper a problem of integration of linear multivalued maps is solving using special properties of H -convex.

References —4.

УДК: 518.9

2000 MSC: 42A16

Ә м і р г а л и е в а С . Н . **Сызықты көпмәнді бейнелерді H -дөңестік терминдерінде интегралдау** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.12–16.

Мақалада H -дөңес жиындардың әртүрлі қасиеттерін қолдана отырып, сызықты көпмәнді бейнелерді интегралдау қарастырылады.

Библ. — 4.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L20

A s a n o v a A . T . **On boundary value problem for systems of hyperbolic equations with non-local integral condition** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.17–25.

Boundary value problem for systems of second order hyperbolic equations with non-local integral condition is considered. Sufficient coefficient conditions of existence of a unique classical solution

of the problem are established as well as algorithm of its finding is proposed using a method of parameter's introduction.

References — 10.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L20

Асанова А.Т. **Гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокал интегралдық шарты бар шеттік есеп туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.17–25

Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокал интегралдық шарты бар шеттік есеп қарастырылады. Функционалдық параметрлер енгізу әдісінің көмегімен зерттеліп отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының коэффициенттік жеткілікті шарттары тағайындалған және оны табу алгоритмдері ұсынылған.

Библ. — 10.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45,26B40

Balgimbayeva Sh. A. **Recovery of convolution operator using spectral information in Nikol'skii - Besov spaces**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №o 4 (22). P.26–31.

In this paper exact order estimates for error of a recovery method using spectral information (Fourier transform) for convolution operator with the smooth function in the Nikol'skii - Besov spaces are obtained.

References — 9.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45,26B40

Балғыңбаева Ш. А. **Никольский - Бесов кеністіктерінде орама операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру.** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.26–31.

Никольский - Бесов кеністіктерінде тегіс функциямен орама операторын спектр туралы ақпар бойынша қалпына келтіру әдістерінің бірінің нақты реттік бағалаулары алынды.

Библ. — 9.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarhanov D. B. **Function spaces with variable mixed smoothness.I**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №o 4 (22). P.33–44.

For functions from Banach function spaces of Nikol'skii-Besov type $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ and of Lizorkin-Triebel type $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$, $p \in (1, \infty)^d$, $q \in (1, \infty)^n$, with variable mixed smoothness $s = s(x)$, defined on direct product $G = G_1 \times \dots \times G_n \subset^d$ of domains $G_i \subset^{d_i}$ with Lipschitzian boundaries the theorem on retraction is obtained as well as in the case of $G =^d$ equivalent norming in terms of weighted norms of smooth dyadic decompositions for their Fourier transforms is established.

References — 7.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Базарханов Д. Б. **Айнымалы аралас тегістікті функциялар кеңістіктері.I**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.33–40.

$G_i \subset^{d_i}$ Липшиц аудандарының $G = G_1 \times \dots \times G_n \subset^d$ декарт көбейтіндісінде анықталған айнымалы аралас $s = s(x)$ тегістікті Никольский-Бесов текті $MB_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$ және Лизоркин-Трибель

текті $MF_{p,q}^{s,\epsilon}(G)$, $p \in (1, \infty)^d$, $q \in (1, \infty)^n$ функциялар кеңістіктері үшін ретракция туралы теорема алынған, ал $G =^d$ жағдайында Фурье түрлендірулерінің тегіс екілік жіктеулерінің салмақтық нормалар терминдерінде эквивалентті нормалаулары табылған.

Библ. — 7.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Dzhumabaev D. S., Nazarova K. Zh. **Parameterization method for researching linear boundary value problem and algorithms for finding its solution** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.41–48.

Two variants of introducing additional parameters under investigating and solving of the linear two-points boundary value problems are considered. Comparative analysis of the variants of parameterization method is performed as well as the classes of boundary value problems in which their application allows to get simple criterions of a unique solvability are defined.

References — 4.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Жұмбабаев Д. С., Назарова К. Ж. **Сызықты шеттік есепті зерттеудің параметрлеу әдісі және оның шешімін табу алгоритмдері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.41–48.

Сызықты екі нүктелі шеттік есептерді зерттеудегі және шешудегі қосымша параметрлер енгізудің екі нұсқасы қарастырылады. Параметрлеу әдісінің осы нұсқаларының салыстырмалы талдауы келтіріледі және олардың қолданылуы бір мәнді шешілімділіктің қарапайым белгілерін тағайындауға мүмкіндік беретін шеттік есептер кластары анықталады.

Библ. — 4.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A25, 41A05

Ivanova E. N. **Error estimate of spline-interpolation for functions from class generated by Peano kernel on scattered data** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.49–57.

Some exact error estimate of spline-interpolation for information-sourcewise on the set of all sourcewise functions in two dimensions represented in the form of sum of a constant and a convolution with Peano kernel.

References — 3.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A25, 41A05

Иванова Е. Н. **Хаостық торда Пеано өзегі тудырылған функциялар тобындағы сплайн-интерполяциясының қателігі** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.49–57.

Тұрақты және Пеано өзегі бар иірткісіні қосындысы түрінде екі айнымалыдан тәуелді функциялар тобында сплайн-интерполяциясының қателігінің дәл бағалары алынған.

Библ. — 3.

УДК: 517.5

2000 MSC: 74J05

Kaishibayeva G. K. **Stress-strain state of the elastic medium under the action of concentrated supersonic loads** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.58–66.

Kernels of boundary integral equations of the model BVP problem are researched about action of the supersonic moving loads in cylindrical cavities, in elastic medium, and their particularities are investigated. Calculations of kernels with different Mach numbers have been performed. Vector fields of displacements are presented as illustrating dynamics of medium under the action concentrated on axis of supersonic loads.

References — 5.

УДК: 517.5

2000 MSC: 74J05

Қ а й ш ы б а е в а Г . К . **Шоғырланған дыбыстан жоғары жүктердің әсерімен серпінді ортаның кернеулі-өзгермелі жағдайы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.58–66.

Дыбыстан жоғары жылжымалы жүктенудің цилиндрлік жазықтықта әсер ететін моделді шектік есептің шектік интегралды теңдеулердің өзектерін және ерекшеліктері зерттелген. Мах санының әртүрлі мәндері үшін өзектер есептелген. Есептеудің қорытындылары оске қадалған дыбыстан жоғары жүктеменің әсерінен пайда болған орта динамикасының суреттейтін график және векторлық өрістер түрінде көрсетілген.

Библ. —5.

УДК: 517.518.476

2000 MSC: 42A16

К u l a k h m e t o v a S h . A . **Thermocapillar model of erosion in electric contacts**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №o 4 (22). P.67–71.

Erosion processes in electric contacts under the action of thermocapillar forces of affective value and heavy temperature gradients and essential dependence of a coefficient of surface tension on temperature are valued.

References — 3.

УДК: 517.518.476

2000 MSC: 42A16

Қ ұ л а х м е т о в а Ш . А . **Электрлік түйісулердегі эрозияның термокапилярлық моделі** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.67–71.

Электрлік түйісулердегі термокапилярлық күштердің әсерімен пайда болатын эрозиялық процесстердің бағалары алынған. Жеткілікті температура градиенттерінде және беттік тартылу коэффициенті температураға айрықша байланысты болғанда термокапилярлық күштер әсерлері мөлшерлерде болады.

Библ. —3.

УДК: 539.3

2000 MSC: 86A60

M a r t y n o v N . I . , T a n i r b e r g e n o v A . G . **Gravitational Instability of Nonnewton's Viscousplastic Medium**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. №o 4 (22). P.72–80.

Rayleigh-Taylor instability of nonnewton's viscousplastic medium is researched.

References — 5.

УДК: 539.3

2000 MSC: 86A60

М а р т ы н о в Н . И . , Т ә ц і р б е р г е н о в А . Г . **Ньютондық емес созылмалы-пластикалық ортаның гравитациялық қалыпсыздығы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.72–80.

Ньютондық емес созылмалы-пластикалық ортаның Релей-Тейлордың қалыпсыздығы зерттелді.

Библ. — 5.

УДК: 517.984/984.68

2000 MSC: 34J70

Muratbekov M.B., Rakhimova G.K. **L_p - estimates of one class of degenerating elliptic equations**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.81–86.

In this work for solutions of one class of degenerating elliptic equations L_p - estimates are received. References — 5.

УДК: 517.984/984.68

2000 MSC: 34J70

Мұратбеков М.Б., Рахимова Г.К. **Азынған эллипстік теңдеулердің бір класының L_p - бағалары** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.81–86.

Бұл жұмыста азынған эллипстік теңдеулердің бір класының шешімдері үшін L_p - бағасы алынған.

Библ. — 9.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A05

Nursultanov E.D., Tleuhanova N.T. **On some questions of the approximations theory** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.87–96.

The questions of reconstruction of integrals, of the multiplicative transformations of functions with use of restricted information. The connections of this problem are investigated with other ones of the approximations theory. For some reconstruction operators their inaccuracy are written in the terms of Furies coefficients

References — 42.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A05

Нұрсұлтанов Е.Д., Тілеуханова Н.Т. **Жуықтау теориясының кейбір есептері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.87–96.

Шекті сызықтық мәліметтер бойынша интегралдарды, мультипликативті түрлендіру функцияларын қапына келтіру сұрақтары қарастырылады. Берілген есептердің жуықтау теориясындағы басқа есептермен байланысы зерттелген. Кейбір қалпына келтіру операторлары үшін Фурье коэффициенттері бойынша олардың қателіктері жазылды.

Библ. — 42.

УДК: 517.958

2000 MSC: 35F30

Sakabekov A., Auzhani E. **Singularity of solution of initial boundary value problem for non-stationary system of equations of spherical harmonic method equations in P_1 approximation**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.97–102.

Existence of a unique generalized solution of initial boundary value problem for a system of equations of spherical harmonic method in P_1 approximation in function space $W_2^1([0, T] \times G)$ is proved. Asymptotic of the solution of the problem in the neighborhood of the angle point of a boundary of the set is obtained.

References — 7.

УДК: 517.958

2000 MSC: 35F30

Сақабеков Ә., Аужани Е. **Сфералық гармоника әдісінің стационар емес P_1 - жуықтау теңдеулер жүйесі үшін қойылған алғашқы - шеттік есептің шешуінің ерекшеліктері** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.97–102.

Сфералық гармоника әдісінің стационар емес P_1 - жуықтау теңдеулер жүйесі үшін қойылған алғашқы - шеттік есептің $W_2^1([0, T] \times G)$ кеңістігінде жалғыз жалпыланған шешуі бар екендігі дәлелденген. Шекараның бұрыштық нүктесі маңайында қарастырылған есептің жалпыланған шешуінің асимптотикасы алынған.

Библ. —7.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Sultanbekova A.O. **Lyapunov's exponents of linear second order differential equation as functions of linear parameter** // Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.103–107.

Lyapunov's exponents of one-parameter family of linear second order differential equations as Baire's functions of scalar parameter are investigated.

References — 7.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Сұлтанбекова А.О. **Екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің асимптотикалық қасиеттерінің сызықты параметрлі бірінші ретті туындысынан тәуелділігі туралы** // Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.103–107.

Параметрдің сызықты функциясы ретінде екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулердің бір параметрлі әулетінің Ляпунов көрсеткіштері зерттеледі.

Библ. —7.

УДК: 517.9

2000 MSC: 35F30

Tungatarov A.B., Rzaeva G.K. **Initial-boundary problem for one class of second order elliptic systems on the plane with polar particularity**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.108–110.

One initial-boundary problem for one class of second order elliptic systems on the plane with polar particularity is solved.

References — 3.

УДК: 517.9

2000 MSC: 35F30

Түнгатаров А.Б., Рзаева Г.К. **Полярлық ерекшелігі бар жазықтықтағы екінші ретті эллипстік жүйенің бір класы үшін алғашқы шеттік есеп**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.108–110.

Бұл жұмыста жазықтықтағы полярлық ерекшелігі бар екінші ретті эллиптикалық жүйенің бастапқы - шеттік есебі шешілген.

Библ. —3.

УДК: 681.518:004

2000 MSC: 68Q85, 68U35

Sharshenaliyev Sh., Yanko D. V. **On one algorithm of distinguishing signals for heterogeneous net-works of computer telephony**// Mathematical journal. 2006. Vol. 6. № 4 (22). P.111–116.

In this article modified algorithm of distinguishing signals for heterogeneous networks of computer telephony is considered.

References — 5.

УДК: 681.518:004

2000 MSC: 68Q85, 68U35

Шаршеналиев Ж. Ш., Янко Д. В. **Компьютерлік телефониясының әртүрлі торларында сигналдарды тану бір алгоритмы туралы**// Математикалық журнал. 2006. Т. 6. № 4 (22). Б.111–116.

Бұл жұмыста бірқалыпты үлестірмелі шу; жиілік, уақыттық және амплитудалық сигналдардың ауытқуларын ескеруді қамтамасыз ететін компьютерлік телефонияның әртүрлі торларында сигналдарды тану үшін арналған модификацияланған алгоритмы қарастырылады.

Библ. —5.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 6 № 4 (22) 2006

Главный редактор:

А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:

М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, В.П.Добрица,
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),
И.Н.Панкратова (технический секретарь)

Адрес редколлегии и редакции:

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(3272)-91-20-03, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Подписано в печать 17.05.2007г.

Тираж 300 экз. Объем 106 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: print_express@bk.ru