

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

2001 ТОМ 1 № 1

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1 № 1 2001

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Б.Л.Байдельдинов,
Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев, Д.С.Джумабаев, А.Ж.Найманова,
И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, Ш.С.Смагулов, У.М.Султангазин,
М.А.Сахауева (ответственный секретарь).

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 205
Телефон 8-(3272)-91-19-04, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественно-согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2001г.

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Математические исследования в Казахстане имеют широкую географию. Они проводятся в большинстве вузов и ряде научных центров республики. Математика оказывает большое влияние на развитие других областей науки и техники и, в свою очередь, стимулируется новыми проблемами, стоящими перед народным хозяйством страны. Она тесно связана с задачами экономики и естествознания.

Исследования казахстанских математиков нашли признание на мировом уровне. Их результаты публикуются в ведущих научных журналах мира и монографиях, издаваемых в известных издательствах. В нашей стране математические труды публикуются в Докладах, Известиях и Вестнике НАН РК, а также в Вестниках вузов. И к сожалению у нас до сих пор не было специализированного математического периодического издания.

Институт математики в соответствии с пожеланиями его сотрудников, коллег из других научных учреждений и вузов с этого года издает периодический **"Математический журнал"** с регулярностью 4 номера в год. Перед Вами первый номер. Приглашаем математиков к сотрудничеству. Речь идет о Ваших научных статьях, кратких научных сообщениях и заслуживающей внимания информации о научных событиях. Мы также с благодарностью примем все Ваши пожелания, которые будут направлены на повышение качества журнала.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 1, № 1, 2001

Обобщенные решения нестационарных краевых задач электродинамики <i>Л. А. Алексеева</i>	3
Ограниченные на полосе решения систем гиперболических уравнений <i>А. Т. Асанова</i>	14
О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений <i>М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов</i>	21
Итерационные процессы с демпфирующими множителями и их применение <i>Д. С. Джумабаев</i>	30
Производные чебышевских систем и интерполяция <i>А. А. Женсыкбаев</i>	41
Точные оценки интегральных операторов вольтерровского типа <i>Р. Ойнаров</i>	52
Об алгоритмическом моделировании сложных динамических систем <i>И. Т. Пак, Н. Г. Макаренко, Л. М. Каримова, С. А. Ким</i>	62
Равномерная экспоненциальная разделенность семейства морфизмов векторного расслоения <i>М. И. Рахимбердиев</i>	72
Создание космического мониторинга и информационной базы данных для решения сельскохозяйственных и экологических задач <i>У. М. Султангазин</i>	77
Задача Гельмгольца для стохастических дифференциальных систем <i>М. И. Тлеубергенов</i>	84
Об одном классе эллиптических систем n -го порядка на плоскости с сингулярной точкой <i>А. Б. Тунгатаров</i>	94
Порядки убывания коэффициентов Фурье по ортогональным системам <i>Л. П. Фалалеев</i>	100
Математическая модель динамики электрической дуги на базе цилиндрической задачи Стефана с двумя свободными границами <i>С. Н. Харин</i>	104
Рефераты	115

УДК 538.3

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, alexeeva@math.kz

В пространстве обобщенных функций строятся обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла. На их основе получены интегральные представления векторов магнитной и электрической напряженностей через поверхностные электрические и магнитные токи. Построены сингулярные интегральные уравнения для решения двух краевых задач. Рассмотрены ударные электромагнитные волны со скачком электрической и магнитной напряженностей на фронтах, получены условия на фронтах. Показано, что скачок напряженностей касателен к фронту волны, т.е. ударные электромагнитные волны являются поперечными. Для классических постановок нестационарных краевых задач доказана единственность решений в том числе и для ударных волн.

Нестационарные электромагнитные процессы часто сопровождаются возникновением ударных электромагнитных волн, для которых характерно нарушение непрерывности поля на волновых фронтах, что препятствует при их изучении использованию классического аппарата математической физики либо накладывает повышенные требования на гладкость электромагнитных полей, а это существенно ограничивает класс решаемых задач. Введение понятия обобщенного решения уравнений Максвелла и использование методов теории обобщенных функций дают возможность справиться с этими трудностями. При решении краевых задач эти методы позволяют строить интегральные представления их решений и разрешающие граничные интегральные уравнения (ГИУ) и для разрывных решений. Ранее это было показано для упругих ударных волн в работе [1], а для решений волновых уравнений в [2, 3]. Для стационарных краевых задач электродинамики (для монохроматических полей) этот подход был развит в [4]. Заметим, что в этом случае поля гладкие, т.к. тип уравнений — эллиптический, поэтому метод ГИУ для таких задач на основе традиционных методов математической физики ранее был развит и в других работах (см. [5, 6]). Здесь строятся обобщенные решения для нестационарных краевых задач электродинамики.

1. Обобщенные решения уравнений Максвелла. Условия на фронтах. Рассмотрим систему уравнений Максвелла для однородной изотропной среды:

$$-\varepsilon \partial_t E + \operatorname{rot} H = j^E, \quad \mu \partial_t H + \operatorname{rot} E = j^H. \quad (1)$$

Keywords: *Generalized solution, electrodynamics, nonstationary boundary value problem, Maxwell equation*

2000 Mathematical Subject Classification: 35Q60

© Л. А. Алексеева, 2001.

Здесь электрические и магнитные проницаемости ε , μ постоянны, E , H — напряженности электрического и магнитного поля, $j^E(x, t)$, $j^H(x, t)$ — плотности электрических и магнитных токов, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Согласно полной системе уравнений Максвелла

$$\varepsilon \operatorname{div} E = \rho^E, \quad -\mu \operatorname{div} H = \rho^H, \quad (2)$$

ρ^E , ρ^H — объемные плотности электрических и магнитных зарядов и $\rho^H = 0$, $j^H = 0$. Далее последние два условия снимаем.

При заданных токах уравнения (1) достаточны для определения электромагнитного поля (E, H) . В этом случае равенства (2) служат для определения заряда.

Как известно, система (1) гиперболического типа. Следовательно, могут существовать характеристические поверхности F , на которых решения и их производные терпят скачки. В пространстве R^3 им соответствуют подвижные волновые фронты F_t , распространяющиеся со скоростью $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$, на которых электромагнитное поле терпит скачки [7].

Введем пространство обобщенных вектор-функций $D'_6(R^4) = \{\hat{f}(x, t) = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_6)\}$ — непрерывных линейных функционалов, определенных на пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $D_6(R^4) = \{\varphi(x, t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_6)\}$; $\hat{f}_k \in D'(R^4)$, $\varphi_k(x, t) \in D(R^4)$ (с.85, [8]):

$$(\hat{f}, \varphi) = \sum_{k=1}^6 (f_k, \varphi_k).$$

Обозначим $\mathbf{M}(\partial_x, \partial_t)$ — дифференциальный оператор системы (1):

$$M = \begin{pmatrix} -\varepsilon\partial_t I & \Phi \\ \Phi & \mu\partial_t I \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$u = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} j^E \\ j^H \end{pmatrix}.$$

Определение. Назовем решение системы (1) обобщенным решением на $D'_6(R^4)$, если

$$(M(\partial_x, \partial_t)\hat{u}, \varphi) \equiv (M_{ik}\hat{u}_k, \varphi_i) = -(\hat{u}_k, M_{ik}\varphi_i) = (j_k, \varphi_k), \quad \forall \varphi(x, t) \in D_6(R^4).$$

(По повторяющимся индексам всюду в произведении проводится суммирование от 1 до 3.)

Пространство обобщенных функций позволяет расширить класс решений уравнений Максвелла и естественным образом ввести в рассмотрение разрывные функции, описывающие ударные электромагнитные волны. В частности, верна следующая

Теорема 1. Для того чтобы решение уравнений (1), непрерывное и дифференцируемое всюду, за исключением волновых фронтов F_t , было его обобщенным решением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия на скачки

$$[E]_{F_t} = (\mu/\varepsilon)^{1/2} [H]_{F_t} \times m, \quad [H]_{F_t} = (\varepsilon/\mu)^{1/2} m \times [E]_{F_t}, \quad \|m\| = 1. \quad (3)$$

Здесь знак " \times " обозначает векторное произведение. Из этой теоремы легко получить ряд следствий.

Следствие 1. На фронтах ударных электромагнитных волн

$$([E]_{F_t}, m) = 0, \quad ([H]_{F_t}, m) = 0. \quad (4)$$

Т.е. ударные электромагнитные волны являются поперечными.

Следствие 2. Если $[E]_{F_t} = 0$, $[H]_{F_t} = 0$ и наоборот.
Т.е., если электрическое поле непрерывно, то магнитное тоже непрерывно и наоборот.

2. Постановка начально-краевых задач. Рассматривается электромагнитное поле (E, H) в ограниченной области $S^- \subset R^3$, порождаемое нестационарными электрическими и магнитными токами с заданной плотностью: $j^E(x, t) = \{j_1, j_2, j_3\}$, $j^H(x, t) = (j_4, j_5, j_6)$. Предполагается, что граничная поверхность S замкнутая, из класса поверхностей Ляпунова, n — единичный вектор внешней нормали к S . На граничной поверхности заданы поверхностные токи:

магнитные (*первая краевая задача*)

$$[n(x), E(x)] = j_S^H(x, t), \quad x \in S, \quad (5)$$

или электрические (*вторая краевая задача*)

$$[n(x), H(x)] = j_S^E(x, t), \quad x \in S. \quad (6)$$

В начальный момент времени поле известно:

$$E(x, 0) = E_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad x \in S^- + S. \quad (7)$$

Здесь и далее скалярное и векторное произведение обозначается соответственно (a, b) , $[a, b]$, или покомпонентно — $[a, b]_l = \epsilon_{lmk} a_m b_k$, где ϵ_{ijk} — кососимметричный единичный псевдотензор Леви-Чивита.

Замечание. Часто, вместо этих граничных условий задают касательные составляющие поля E или H на S . Легко видеть, что эти условия эквивалентны.

Если выполнены следующие условия согласования:

(*первая краевая задача*)

$$[n(x), E_0(x)] = j_S^H(x, 0), \quad x \in S, \quad (8)$$

(*вторая краевая задача*)

$$[n(x), H_0(x)] = j_S^E(x, 0), \quad x \in S, \quad (9)$$

и действующие токи непрерывны, то решение задачи, очевидно, будет непрерывным. Если условия согласования не выполнены или токи разрывны, то в среде возникают ударные волны.

3. Постановка задач в пространстве обобщенных функций. Рассмотрим уравнения Максвелла на $D'_6(R^4)$. Решения (1) из этого пространства будем называть *обобщенными* решениями. Сформулируем исходную краевую задачу в пространстве $D'_6(R^4)$.

Введем характеристическую функцию множества

$$h_S^-(x) = \begin{cases} 1, & x \in S^- \\ 0, & x \in S^+ \\ 0, 5, & x \in S \end{cases}. \quad (10)$$

Если $f \in C^1(S^-) \cap C(S + S^-)$, то $f_{,j} h_S^-$ — регулярная обобщенная функция и

$$\partial_j(f(x)h_S^-(x)) = f_{,j}(x)h_S^-(x) - n_j f(x)\delta_S(x), \quad (11)$$

где $\delta_S(x)$ — сингулярная обобщенная функция — простой слой на S (с.98, [8]), $f_{,j}$ — обычная производная от f по x_j .

Обозначим $R_+^4 = R^3 \times [0, \infty)$, $D'_6(R_+^4) = \{f \in D'_6(R^4) : f = 0, t < 0\}$, $D = S \times [0, \infty)$, $D^- = S^- \times [0, \infty)$, $\delta_D(x, t) = \delta_S(x)\theta(t)$ — простой слой на D , $h_D^-(x, t) = h_S^-(x)\theta(t)$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Пусть (E, H) — классическое решение краевой задачи. Доопределим его на всем пространстве, а именно, введем функции $\hat{E} = Eh_D^-$, $\hat{H} = Hh_D^-$. Аналогично строим продолжение на R^4 для токов \hat{j} , и будем их рассматривать как обобщенные функции на $D_6^l(R^4)$.

Используя (1), (3) и (11), получим

$$M(\partial_x, \partial_t) \begin{pmatrix} \hat{E} \\ \hat{H} \end{pmatrix} = \hat{j}(x, t) + \begin{pmatrix} [n, [H]] \\ [n, [E]] \end{pmatrix} \delta_D(x, t) + \begin{pmatrix} -\varepsilon E_0 \\ \mu H_0 \end{pmatrix} h_S^-(x) \delta(t). \quad (12)$$

Здесь в векторном произведении стоят скачки на поверхности S :

$$[E] = 0 - E^-(x, t) = -E(x, t), \quad [H] = -H(x, t), \quad x \in S. \quad (13)$$

Сравнивая вторые слагаемые в правой части с (1), видим, что они описывают поверхностные токи, а начальные условия работают как импульсные объемные токи.

Уравнения для зарядов в $D_6^l(R^4)$, с учетом (4), преобразуются к виду

$$\hat{\rho}^E = \varepsilon \operatorname{div} \hat{E} = \rho^E h_D^- + \varepsilon(n, [E]) \delta_D + \varepsilon(n, [E]_{F_t}) \delta_D = \rho^E h_D^- + \varepsilon(n, [E]) \delta_D.$$

Аналогично,

$$\hat{\rho}^H = -\mu \operatorname{div} \hat{H} = \rho^H h_D^- - \mu(n, [H]) \delta_D, \quad (14)$$

где первые слагаемые справа соответствуют объемным зарядам, а вторые — описывают поверхностные электрические и магнитные заряды.

Взяв дивергенцию в (12) с учетом (14), получим

$$-\hat{\rho}^E_{,t} = -\partial_t(\rho^E h_D^- + \varepsilon(n, [E]) \delta_D) = h_D^- \operatorname{div} j^E + (n, [j^E]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [H] \delta_D] - \rho_0^E h_S^- \delta(t) + \varepsilon(E_0, n) \delta(t) \delta_S,$$

$$-\hat{\rho}^H_{,t} = -\partial_t(\rho^H h_D^- - \mu(n, [H]) \delta_D) = h_D^- \operatorname{div} j^H + (n, [j^H]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [E] \delta_D] - \rho_0^H h_S^- \delta(t) - \mu(H_0, n) \delta(t) \delta_S.$$

Сворачивая обе части равенств с $\theta(t) \delta(x)$, пользуясь правилами дифференцирования свертки, получим закон сохранения заряда.

Теорема 2. (закон сохранения заряда)

$$\hat{\rho}^E = \rho_0^E h_D^- - (h_D^- \operatorname{div} j^E + (n, [j^E]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [H] \delta_D]) *_t \theta(t) + \varepsilon([E_0], n) \delta_D,$$

$$\hat{\rho}^H = \rho_0^H h_D^- - (h_D^- \operatorname{div} j^H + (n, [j^H]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [E] \delta_D]) *_t \theta(t) - \mu([H_0], n) \delta_D.$$

Здесь t под знаком свертки показывает, что свертка берется только по этой переменной. Сравнивая эти формулы с (14), получим

Следствие. (закон сохранения поверхностных зарядов)

$$\varepsilon(n, [E]) \delta_D = -((n, [j^E]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [H] \delta_D]) *_t \theta(t) + \varepsilon([E_0], n) \delta_D, \quad (15)$$

$$-\mu(n, [H]) \delta_D = -((n, [j^H]) \delta_D + \operatorname{div}[n, [E] \delta_D]) *_t \theta(t) - \mu([H_0], n) \delta_D. \quad (16)$$

Замечание. Формулы этого параграфа верны и тогда, когда S — поверхность с краем. В этом случае

$$[E] = (E^+ - E^-) \theta(t), \quad [H] = (H^+ - H^-) \theta(t), \quad h_S^-(x) \equiv 1.$$

Построим обобщенные решения уравнения (12).

4. Обобщенное решение краевых задач. Обобщенное решение (12) строится с помощью тензора Грина $U(x, t)$, который является фундаментальным решением уравнения Максвелла

$$\mathbf{M}(\partial_x, \partial_t)\mathbf{U} = \mathbf{I}_6 \delta(x)\delta(t) \quad (17)$$

и имеет вид [7]:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}\mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 \\ \mathbf{G}_0 & \mu^{-1}\mathbf{G}_1 \end{pmatrix} \psi, \quad \mathbf{G}_1 = -\varepsilon\mu\mathbf{I}_3\partial_t - \nabla^2\theta(t) \underset{t}{*},$$

$$\{G_0\}_{nm} = e_{nml}\partial_l, \quad \nabla^2 = \{\partial_n\partial_m\}, \quad n, m, l = 1, 2, 3.$$

Здесь I_m — единичная матрица порядка $m \times m$, $\psi(R, t)$ — простой слой на конусе $ct = \|x\|$ — является фундаментальным решением волнового уравнения [8]:

$$(\Delta - c^{-2}\partial_t\partial_t)\psi = \delta(x)\delta(t), \quad \psi = -(4\pi R)^{-1}\delta(t - R/c), \quad (18)$$

и действует по правилу

$$(\psi, \varphi) = (4\pi)^{-1} \int_{R^3} \|x\|^{-1} \varphi(x, \|x\|/c) dV(x), \quad \forall \varphi \in D(R^4).$$

Используя свойство тензора Грина, решение (12), с учетом (13), можно представить в виде свертки

$$\begin{pmatrix} \hat{E} \\ \hat{H} \end{pmatrix} = \mathbf{U} * \underset{x}{\hat{j}} - \mathbf{U} * \begin{pmatrix} [n, H] \\ [n, E] \end{pmatrix} \delta_D + \mathbf{U} * \underset{x}{\begin{pmatrix} -\varepsilon E_0 \\ \mu H_0 \end{pmatrix}} h_S^- \quad (19)$$

(здесь знак " $*_x$ " указывает неполную свертку только по x). Легко видеть, что при известных плотностях поверхностных токов на S эти формулы полностью определяют решение краевой задачи.

Свойства волновой функции ψ . Далее, для того чтобы записать эти свертки в интегральном виде, воспользуемся формулами, которые нетрудно доказать, пользуясь определением обобщенных функций и их свертки. Так для регулярных f —

$$\psi * f = -(4\pi)^{-1}\theta(t) \int_{r < ct} r^{-1} f(y, t - r/c) dV(y), \quad r = \|x - y\|, \quad (20)$$

для простого слоя с плотностью $\alpha(x, t)$, равной нулю при $t < 0$,

$$\psi * \alpha(x, t) \delta_S(x) = -(4\pi)^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-1} \alpha(y, t - r/c) dS(y), \quad S_t(x) = \{y \in S : r < ct\}. \quad (21)$$

Как следует из (18), при построении тензора Грина участвует первообразная по времени

$$\chi = \psi \underset{t}{*} \theta(t) = -(4\pi R)^{-1}\theta(t - R/c), \quad \partial_t \chi = \psi. \quad (22)$$

Градиент χ определяется выражением

$$\nabla \chi = \frac{x}{4\pi R^2} \left(\frac{\theta(t - R/c)}{R} + c^{-1}\delta(t - R/c) \right). \quad (23)$$

Для регулярных f —

$$\chi * f = -(4\pi)^{-1}\theta(t) \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^-(x)} r^{-1} f(y, t - \tau) dV(y), \quad S_\tau^-(x) = \{y \in S^- : r < ct\}, \quad (24)$$

$$\chi * \alpha(x, t) \delta_S(x) = -(4\pi)^{-1} \theta(t) \int_0^t d\tau \int_{S_\tau(x)} r^{-1} \alpha(y, t - \tau) dS(y). \quad (25)$$

Формулы для неполных сверток имеют вид

$$\psi *_x \beta(x) \delta_S(x) = -(4\pi)^{-1} \theta(t) \partial_t \int_{S_t(x)} r^{-1} \beta(y) dS(y) = -(4\pi t)^{-1} \theta(t) \int_{\{y \in S: r=ct\}} \beta(y) dl(y),$$

$$\chi *_x \beta(x) \delta_S(x) = -(4\pi)^{-1} \theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-1} \beta(y) dS(y).$$

В случае достаточной гладкости f при дифференцировании сверток можно, пользуясь ее свойством, воспользоваться формулой

$$\partial_i \psi * f = (4\pi)^{-1} \int_{r < ct} r^{-1} f_{,i}(y, t - r/c) dV(y) \quad (26)$$

(здесь под знаком интеграла стоит производная функции $f_{,i}(x, t)$ в указанной точке).

Чтобы избежать громоздких формул при интегральной записи сверток в (19), рассмотрим далее последовательно две краевые задачи, что не ограничивает общности в силу линейности исходной.

5. Обобщенное решение задачи Коши. В этом случае граница S отсутствует, заданы только токи и начальные условия (8). Ее обобщенное решение дает следующая

Теорема 3. Если $(E_0, H_0) \in D'_6(R^3)$, $(\hat{j}^E, \hat{j}^H) \in D'_6(R^4_+)$, то

$$\hat{E} = \mu \partial_t (\hat{j}^E * \psi) + \varepsilon^{-1} \nabla (\psi * \hat{\rho}^E) - [\nabla, \psi * \hat{j}^H] - c^{-2} (E_0 *_x \psi)_{,t} - \mu [\nabla, [H_0 *_x \psi]],$$

$$\hat{H}(x) = -\varepsilon \partial_t (\hat{j}^H * \psi) - \mu^{-1} \nabla (\psi * \hat{\rho}^H) - [\nabla, \psi * \hat{j}^E] - c^{-2} (H_0 *_x \psi)_{,t} + \varepsilon [\nabla, [E_0 *_x \psi]],$$

$$\hat{\rho}^E = \rho_0^E \theta(t) - \operatorname{div} (\hat{j}^E *_t \theta(t)), \quad \hat{\rho}^H = \rho_0^H \theta(t) - \operatorname{div} (\hat{j}^H *_t \theta(t)),$$

$$\rho_0^E = \varepsilon \operatorname{div} E_0, \quad \rho_0^H = -\mu \operatorname{div} H_0.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2 и формул (19) в отсутствии границы S с учетом вида $U(x, t)$, если покомпонентно взять все свертки и воспользоваться правилами ее дифференцирования. Все свертки существуют в силу полуограниченности по t носителей входящих в них функций и ограниченности по x при фиксированном t носителя волновой функции.

Для записи сверток в интегральном виде важно знать свойства гладкости начального поля (заряда) и токов. Если начальный заряд и токи только непрерывны или кусочно-непрерывны, и выполняются условия на фронтах (3), то формулы теоремы эквивалентны следующим интегральным равенствам:

$$4\pi E = -\mu \partial_t \int_{r < ct} r^{-1} j^E(y, t - r/c) dV(y) + [\nabla, \int_{r < ct} r^{-1} j^H(y, t - r/c) dV(y)] -$$

$$-\varepsilon^{-1} \nabla \int_{r < ct} r^{-1} \rho^E(y, t - r/c) dV(y) + c^{-2} \partial_t \int_{r=ct} r^{-1} E_0(y) dS(y) + \mu [\nabla, \int_{r=ct} r^{-1} H_0(y) dS(y)],$$

$$4\pi H = \varepsilon \partial_t \int_{r < ct} r^{-1} j^H(y, t - r/c) dV(y) + [\nabla, \int_{r < ct} r^{-1} j^E(y, t - r/c) dV(y)] + \\ + \mu^{-1} \nabla \int_{r < ct} r^{-1} \rho^H(y, t - r/c) dV(y) + c^{-2} \partial_t \int_{r=ct} r^{-1} H_0(y) dS(y) - \varepsilon [\nabla, \int_{r=ct} r^{-1} E_0(y) dS(y)].$$

Здесь заряды определяются формулами:

$$\rho^k = \rho_0^k(x) \theta(t) - \operatorname{div} \int_0^t j^k(x, t - \tau) d\tau, \quad k = E, H.$$

При достаточной гладкости функций, описывающих токи и заряды, можно воспользоваться формулой (26).

В случае нарушения условий гладкости начальных условий, следует учесть, что при дифференцировании сверток в формулах теоремы 5.1 появятся простые слои на поверхностях разрыва функций и их производных, где не выполняются условия (3).

6. Интегральное представление решений. Граничные интегральные уравнения.

Рассмотрим краевую задачу в ограниченной области с нулевыми токами и начальными условиями:

$$j^E = 0, \quad j^H = 0; \quad E(x, 0) = 0, \quad H(x, 0) = 0, \quad x \in S^- + S. \quad (27)$$

Предположим, что поверхностные токи непрерывны на S и дифференцируемы по времени.

Теорема 4. *Обобщенное решение краевой задачи представимо в виде*

$$\hat{E} = [\nabla \chi * [n, \dot{E}] \delta_D] - \mu \psi * [n, \dot{H}] \delta_D - \nabla \chi * (n, \dot{E}) \delta_D,$$

$$\hat{H} = [\nabla \chi * [n, \dot{H}] \delta_D] + \varepsilon \psi * [n, \dot{E}] \delta_D - \nabla \chi * (n, \dot{H}) \delta_D,$$

$$\hat{\rho}^E = \operatorname{div}([n, H] \delta_D) * \theta(t) = -\varepsilon (E, n) \delta_D.$$

Здесь $[\hat{f} * \hat{g}]_i = e_{ijk} f_j * g_k$, точка над функцией означает производную по t .

Доказательство. Из (27) и (1) следует, что

$$\hat{\rho}^H = \operatorname{div}([n, E] \delta_D) * \theta(t) = \mu (n, H) \delta_D \quad (28)$$

Представление для зарядов получим из теоремы 2. В силу (27)–(28), используя вид U , имеем

$$\hat{E} = [\nabla \psi * [n, E] \delta_D] - \mu \partial_t \psi * [n, H] \delta_D - \varepsilon^{-1} \nabla^2 \chi * [n, H] \delta_D, \quad (29)$$

$$\hat{H} = [\nabla \psi * [n, H] \delta_D] + \varepsilon \partial_t \psi * [n, E] \delta_D + \mu^{-1} \nabla^2 \chi * [n, E] \delta_D, \quad (30)$$

Последние слагаемые можно преобразовать:

$$\nabla^2 \chi * [n, H] \delta_D = \nabla \chi * \operatorname{div}([n, H] \delta_D) = -\nabla \chi * (\varepsilon \partial_t (n, E) \delta_D),$$

$$\nabla^2 \chi * [n, E] \delta_D = \nabla \chi * \operatorname{div}([n, E] \delta_D) = \nabla \chi * (\mu \partial_t (n, H) \delta_D).$$

Подставляя в (29), дифференцируя по времени и приводя подобные члены, получим

$$\hat{E} = [\nabla \psi * [n, E] \delta_D] - \mu \psi * [n, \dot{H}] \delta_D - \nabla \psi * (n, E) \delta_D,$$

$$\hat{H} = [\nabla \psi * [n, H] \delta_D] + \varepsilon \psi * [n, \dot{E}] \delta_D - \nabla \psi * (n, H) \delta_D.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} [\nabla\psi * [n, H] \delta_D] &= [\nabla\dot{\chi} * [n, H]] \delta_D = \left[\nabla\chi * [n, \dot{H}] \right] \delta_D + [\nabla\chi * [n, H_0] \delta_D], \\ -\nabla\psi * (n, H) \delta_D &= -\nabla\dot{\chi} * (n, H) \delta_D = -\nabla\chi * (n, \dot{H}) \delta_D - \nabla\chi * (n, H_0) \delta_D, \end{aligned}$$

последние слагаемые в этих равенствах равны нулю в силу (27). Отсюда следуют формулы теоремы.

При известных поверхностных токах, теорема 4 позволяет определять поле внутри области. Интегральные представления обобщенных решений и граничные интегральные уравнения для определения неизвестных поверхностных токов дает следующая

Теорема 5. *Классическое решение краевых задач представимо в виде*

$$\begin{aligned} 4\pi h_{\bar{D}} E &= \mu\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-1} [n(y), \dot{H}(y, t - r/c)] dS(y) - \\ &- c^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-2} \left([(x - y), [n(y), \dot{H}(y, t - r/c)]] - (x - y) (n(y), \dot{H}(y, t - \tau)) \right) dS(y) - \\ &- \theta(t) v.p. \int_{S_t(x)} r^{-3} ([(x - y), [n(y), E(y, t - r/c)]] - (x - y) (n(y), E(y, t - r/c))) dS(y), \\ 4\pi h_{\bar{D}} H &= -\varepsilon\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-1} [n(y), \dot{E}(y, t - r/c)] dS(y) - \\ &- c^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-2} \left([(x - y), [n(y), \dot{H}(y, t - r/c)]] - (x - y) (n(y), \dot{H}(y, t - \tau)) \right) dS(y) - \\ &- \theta(t) v.p. \int_{S_t(x)} r^{-3} ([(x - y), [n(y), H(y, t - r/c)]] - (x - y) (n(y), H(y, t - r/c))) dS(y). \end{aligned}$$

Доказательство. Если воспользоваться формулами (20)–(26), получим следующие интегральные представления свертков теоремы 4.

$$\begin{aligned} -\mu\psi * [n, \dot{H}] \delta_D &= \mu(4\pi)^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-1} [n(y), \dot{H}(y, t - r/c)] dS(y), \\ [\nabla\chi * [n, \dot{E}] \delta_D] &= \left[\frac{x}{4\pi R^2} \left(\frac{\theta(t - R/c)}{R} + c^{-1}\delta(t - R/c) \right) * [n, \dot{E}] \delta_S(x)\theta(t) \right] = \\ &= (4\pi)^{-1}\theta(t) \int_0^t d\tau \int_{S_\tau(x)} [(x - y), [n(y), \dot{E}(y, t - \tau)]] r^{-3} dS(y) - \\ &- (4\pi c)^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-2} [(x - y), [n(y), \dot{E}(y, t - r/c)]] dS(y), \\ -\nabla\chi * (n, \dot{E}) \delta_D &= -(4\pi)^{-1}\theta(t) \int_0^t d\tau \int_{S_\tau(x)} (x - y) r^{-3} (n(y), \dot{E}(y, t - \tau)) dS(y) + \end{aligned}$$

$$+(4\pi c)^{-1}\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-2}(x-y) \left(n(y), \dot{E}(y, t-\tau) \right) dS(y).$$

В двойных интегралах этих сверток поменяем порядок интегрирования и проинтегрируем по t . Так, например, первый интеграл, с учетом условий (27), преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-3} dS(y) \int_{r/c}^t \left([(x-y), [n(y), \dot{E}(y, t-\tau)]] - (x-y) \left(n(y), \dot{E}(y, t-\tau) \right) \right) d\tau = \\ & = -\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-3} \left([(x-y), [n(y), E(y, t-r/c)]] - (x-y) \left(n(y), E(y, t-r/c) \right) \right) dS(y) = \\ & = -\theta(t) \int_{S_t(x)} r^{-3} \left([(x-y), [n(y), E(y, t-r/c)]] - (x-y) \left(n(y), E(y, t-r/c) \right) \right) dS(y). \end{aligned}$$

В результате получим указанные формулы.

Заметим, что если $x \notin S$, то все подынтегральные функции не имеют особенностей и интегралы существуют. При $x \in S$ первые два интеграла имеют слабую интегрируемую особенность порядка r^{-1} . Последние интегралы имеют сильные неинтегрируемые особенности при $y = x$ порядка r^{-2} . Покажем, что формулы справедливы и на границе, если интегралы брать в смысле главного значения и учесть определение $h_S^-(x)$.

Введем обозначения $S^+ = R^3 - (S^- + S)$, $O_\varepsilon(x) = \{y : \|x-y\| < \varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon(x) = \{y : \|x-y\| = \varepsilon\}$, $S_\varepsilon(x) = S - O_\varepsilon(x)$. Соответственно знаку вводятся $S_\varepsilon^\pm(x) = S^\pm \cap O_\varepsilon^\pm(x)$, $O_\varepsilon^\pm = O_\varepsilon(x) \cap S^\pm$, $\Gamma_\varepsilon^\pm = \Gamma_\varepsilon(x) \cap S^\pm$.

Ясно, что формулы теоремы верны для внутренних точек области, ограниченной любой поверхностью, вложенной в $S^- + S$.

Пусть $x^* \in S$. Запишем эти формулы для области $S_\varepsilon^-(x^*)$. Они будут иметь аналогичный вид

$$\begin{aligned} & 4\pi h_{S_\varepsilon^+ \Gamma_\varepsilon^-}^-(x) E(x, t) = O(\varepsilon) + \mu \int_{S_\varepsilon^-(x^*)} \theta(ct-r) r^{-1} [n(y), \dot{H}(y, t-r/c)] dS(y) - \\ & - c^{-1} \int_{S_\varepsilon^-(x^*)} \theta(ct-r) r^{-2} \left([(x-y), [n(y), \dot{E}(y, t-r/c)]] - (x-y) \left(n(y), \dot{E}(y, t-\tau) \right) \right) dS(y) - \\ & - \int_{S_\varepsilon^-(x^*)} \theta(ct-r) r^{-3} \left([(x-y), [n(y), E(y, t-r/c)]] - (x-y) \left(n(y), E(y, t-r/c) \right) \right) dS(y) + \\ & + \int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} \theta(t-r/c) r^{-3} \left([(x-y), [n(y), E(x, t-r/c)]] - (x-y) \left(n(y), E(x, t-r/c) \right) \right) dS(y) \end{aligned}$$

Здесь через $O(\varepsilon)$ обозначены первые два интеграла по $\Gamma_\varepsilon^-(x^*)$.

Пусть $x = x^*$, $t > 0$, тогда левая часть этих формул обратится в ноль, так как $x^* \notin S_\varepsilon^-(x^*)$. А теперь сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Первые два интеграла стремятся к интегралам по S , в силу слабой особенности подынтегральных функций. Третий интеграл — к интегралу в смысле главного значения, который существует в силу антисимметричности $(x^* - y)/r$ и порядка особенности r^{-2} .

Рассмотрим подробнее последний интеграл, который обозначим I_4 . Выберем $\varepsilon < ct$. Тогда

$$I_4 = \varepsilon^{-3} \int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} \left([(x^* - y), [n(y), E(x^*, t - \varepsilon/c)]] - (x^* - y) \left(n(y), E(x^*, t - \varepsilon/c) \right) \right) dS(y)$$

Перейдем к сферической системе координат с центром в точке x^* , и вертикальной осью $n(x^*)$. На $\Gamma_\varepsilon^-(x^*)$ $\|x^* - y\| = \varepsilon$, $n(y) = (x^* - y)/\varepsilon$, $dS(y) = \varepsilon^2 ds(e)$, $\|e\| = 1$, $ds(e)$ — дифференциал площади единичной сферы.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\varepsilon e + x^*) \in \Gamma_\varepsilon^-(x^*)} ([e, [e, E(x^*, t - \varepsilon/c)]] - e(e, E(x^*, t - \varepsilon/c))) ds(e) = \\ &= \int_{(e, n(x^*)) < 0} ([e, [e, E(x^*, t)]] - e(e, E(x^*, t))) ds(e) = -2\pi E(x^*, t). \end{aligned}$$

Переноса $2\pi E(x^*, t)$ в левую часть, получим доказываемое утверждение. Доказательство второй формулы теоремы аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Ударные волны возникают, если не выполнены условия согласования: (первая краевая задача)

$$j_S^H(x, 0) = 0, \quad x \in S; \quad (31)$$

(вторая краевая задача)

$$j_S^E(x, 0) = 0, \quad x \in S. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что в случае ударных волн формулы и их доказательства сохраняются для точек границы, не попадающих на фронт волны, т.к. для таких точек условия гладкости позволяют сделать указанный предельный переход. Для точек на фронте волны значения напряженностей не определены, можно говорить только о предельных значениях с разных сторон фронта.

Заключение. Формулы теоремы 5 на границе дают ГИУ для решения поставленных краевых задач. Для этого следует подставить в интегральное представление решений известные значения поверхностных токов. В случае первой краевой задачи вначале решаются ГИУ для E . После определения E вычисляются поверхностные магнитные токи, после чего можно найти H на поверхности, а затем поле в области. Для второй краевой задачи — наоборот. Заметим, что тип уравнений резко отличается от подобных для стационарных задач. Полученные ГИУ в запаздывающих потенциалах неклассического типа, содержат, помимо граничных значений напряженностей (поверхностных токов), также и их производные по времени. Ясно, что для известных токов, они также известны. Однако наличие такой производной для неизвестных токов усложняет алгоритм численного решения ГИУ. Требуется вводить интерполяцию производных по времени от искомым функций при пошаговом по времени решении ГИУ. Это следует делать, используя значения функций и их производных на предыдущих временных шагах, начиная с нулевого момента времени, где скорость начальных функций задана начальными условиями. Кроме того, область интегрирования зависит от времени и лишь при больших временах ($t > L/c$, L — диаметр области) совпадает с S . Переменность по времени области интегрирования позволяет строить хорошо обусловленные околodiагональные матрицы разрешающей системы линейных алгебраических уравнений — дискретного аналога ГИУ при численном решении задач. Для этого можно передвигать начальный момент времени, что позволяет для любой фиксированной точки границы вводить в зону интегрирования ограниченное число точек контура. Это упрощает вид системы и повышает устойчивость численных процедур при численном решении краевых задач.

Цитированная литература

1. Алексеева Л. А. // Прикладная математика и механика. 1991. Т 55, №2. С. 298 – 308.

2. **Алексеева Л. А.** // Дифференц. уравнения. 1992. Т 28, № 8. С. 1451 – 1453.
3. **Алексеева Л. А.** // Дифференц. уравнения. 1995. Т 31, № 11ю С. 1951 – 1953.
4. **Алексеева Л. А., Саутбеков С. С.** // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 611 – 622.
5. Численные методы теории дифракции: Сб. статей "Математика. Новое в зарубежной науке". М. 1982. Вып. 29. С. 200.
6. **Колтон Д., Кресс Р.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. 1987. 312 с.
7. **Алексеева Л. А., Саутбеков С. С.** // Дифференц. уравнения. 1999. Т 35, № 1. С. 125 – 127.
8. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М. 1981. 512 с.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.956

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ПОЛОСЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. АСАНОВА

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, anar@math.kz

Методом параметризации установлены достаточные условия существования единственного ограниченного решения на полосе системы гиперболических уравнений в терминах блочно-ленточных двусторонних матриц, составляемых по исходным данным.

Метод параметризации (м.п.) исследования полупериодических краевых задач для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными был предложен в [1, 2]. В [3] этим методом получены достаточные условия существования и единственности ограниченного на полосе решения гиперболического уравнения. Применение метода параметризации к гиперболическим уравнениям позволяет свести исходную задачу к многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами, а соответствующий алгоритм нахождения решения задачи состоит из двух этапов: 1. Нахождение введенных функциональных параметров. 2. Нахождение решений задач Гурса на малых областях. Функциональные параметры определяются из задачи Коши, а решения задач Гурса на малых областях — из эквивалентных систем интегральных уравнений.

В настоящей статье метод параметризации применяется к следующей задаче для системы гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, y)u + f(x, y), \quad (x, y) \in (0, \omega) \times (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in R = (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right| \leq K, \quad K - const, \quad (x, y) \in (0, \omega) \times R, \quad (3)$$

где $(n \times n)$ — матрицы $A(x, y), C(x, y)$, n — вектор-функция $f(x, y)$ непрерывны и ограничены на $[0, \omega] \times R$, n — вектор-функция $\psi(y)$ непрерывно дифференцируема и ограничена на R вместе со своей производной. Пусть $\tilde{C}(J, R^n)$ — множество непрерывных и ограниченных на J ($J \subset R^1$ или $J \subset R^2$) функций $u : J \rightarrow R^n$. Функция $u(x, y) \in \tilde{C}([0, \omega] \times R, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \in \tilde{C}([0, \omega] \times R, R^n), \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \in \tilde{C}([0, \omega] \times R, R^n)$,

Keywords: *System of hyperbolic equation, bounded solution*

2000 Mathematical Subject Classification: 35L20

© А. Т. Асанова, 2001.

$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \in \tilde{C}((0, \omega) \times R, R^n)$ называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x, y) \in \Omega$ и выполнены условия (2), (3).

Задача заключается в нахождении классического решения уравнения (1) удовлетворяющего условиям (2), (3).

Введем следующие пространства: M — пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных на $[0, \omega]$ функций $q_r(x)$ с нормой

$$\|q(x)\|_M = \|(\dots, q_r(x), q_{r+1}(x), \dots)\| = \max_x \sup_r \|q_r(x)\|, \quad r \in Z,$$

$M(h)$ — пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных и ограниченных на $[0, \omega] \times [(r-1)h, rh]$ функций $u_r(x, y)$ с нормой

$$\|u(x, y)\|_{M(h)} = \|(\dots, u_r(x, y), u_{r+1}(x, y), \dots)\| = \max_x \sup_r \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \|u_r(x, y)\|, \quad r \in Z.$$

Возьмем шаг $h > 0$ и произведем разбиение: $R = \cup_{r=-\infty}^{\infty} [(r-1)h, rh]$. Через $u_r(x, y)$ обозначим сужение функции $u(x, y)$ на $[0, \omega] \times [(r-1)h, rh]$. Тогда задача (1)–(3) будет эквивалентна существованию решения $u(x, y) = (\dots, u_r(x, y), u_{r+1}(x, y), \dots) \in M(h)$ задачи

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y} = A(x, y) \frac{\partial u_r}{\partial x} + C(x, y) u_r + f(x, y), \quad (4)$$

$$(x, y) \in (0, \omega) \times [(r-1)h, rh],$$

$$u_r(0, y) = \psi(y), \quad y \in [(r-1)h, rh], \quad r \in Z \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow rh-0} \frac{\partial u_r(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_{r+1}(x, rh)}{\partial x}, \quad x \in (0, \omega], \quad r \in Z, \quad (6)$$

где (6) — условия склеивания производных по x решения во внутренних линиях разбиения. Так как эти линии являются характеристиками систем гиперболических уравнений (1), то из склеивания производных по x и условия $\lim_{y \rightarrow rh-0} u_r(0, y) = \psi(rh) = u_{r+1}(0, rh)$, следует склеивание вдоль этих линий значений решения и его производных по y . Отсюда вследствие непрерывности коэффициентов $A(x, y)$, $C(x, y)$, правой части $f(x, y)$ вытекает непрерывность $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и функция $u(x, y)$, получаемая склеиванием систем функций $u_r(x, y)$, удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x, y) \in (0, \omega) \times R$.

Через $q_r(x)$ обозначим значения функции $u_r(x, y)$ при $y = (r-1)h$ и в каждой области $(x, y) \in (0, \omega) \times [(r-1)h, rh]$ сделаем замену $\tilde{u}_r(x, y) = u_r(x, y) - q_r(x)$. Получим эквивалентную многохарактеристическую краевую задачу с неизвестными функциями $q_r(x)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial x \partial y} = A(x, y) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + C(x, y) \tilde{u}_r + f(x, y) + A(x, y) q'_r(x) + C(x, y) q_r(x), \quad (7)$$

$$(x, y) \in (0, \omega) \times [(r-1)h, rh],$$

$$\tilde{u}_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r \in Z, \quad (8)$$

$$\tilde{u}_r(0, y) + q_r(0) = \psi(y), \quad y \in [(r-1)h, rh], \quad r \in Z, \quad (9)$$

$$q'_r(x) + \lim_{y \rightarrow rh-0} \frac{\partial \tilde{u}_r(x, y)}{\partial x} - q'_{r+1}(x) = 0, \quad x \in (0, \omega], \quad r \in Z. \quad (10)$$

Если функция $u(x, y)$ является классическим решением задачи (1)–(3), то пара $(q(x), \tilde{u}(x, y))$, где $q(x) = (\dots, u_r(x, (r-1)h), u_{r+1}(x, rh), \dots)$, $\tilde{u}(x, y) = (\dots, u_r(x, y) - u_r(x, (r-1)h), u_{r+1}(x, y) - u_{r+1}(x, rh), \dots)$, принадлежит $M \times M(h)$ и будет решением (7)–(10), и наоборот, если пара $(q^*(x), \tilde{u}^*(x, y)) \in M \times M(h)$ — решение задачи (7)–(10), то функция $u^*(x, y)$, полученная

путем склеивания систем функций $(q_r^*(x) + \tilde{u}_r^*(x, y))$, $r \in Z$, принадлежит $\tilde{C}([0, \omega] \times R, R^n)$ и будет классическим решением задачи (1)–(3).

При фиксированных $q_r(x), q_r'(x) \in \tilde{C}([0, \omega], R^n)$ функции $\{\tilde{u}_r(x, y)\}$ являются решениями задачи Гурса на $[0, \omega] \times [(r-1)h, rh]$ с условиями (8) и

$$\tilde{u}_r(0, y) = \psi(y) - \psi((r-1)h), \quad y \in [(r-1)h, rh]. \quad (11)$$

Введя обозначения $\tilde{v}_r(x, y) = \frac{\partial \tilde{u}_r(x, y)}{\partial x}$, $\tilde{w}_r(x, y) = \frac{\partial \tilde{u}_r(x, y)}{\partial y}$ из (8), (11) получим $\tilde{v}_r(x, (r-1)h) = 0$, $\tilde{w}_r(0, y) = \dot{\psi}(y)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\tilde{w}_r(x, y) = \dot{\psi}(y) + \int_0^x \left[A(\xi, y) \tilde{v}_r(\xi, y) + C(\xi, y) \tilde{u}_r(\xi, y) + f(\xi, y) + A(\xi, y) q_r'(\xi) + C(\xi, y) q_r(\xi) \right] d\xi,$$

$$\tilde{v}_r(x, y) = \int_{(r-1)h}^y \left[A(x, \eta) \tilde{v}_r(x, \eta) + C(x, \eta) \tilde{u}_r(x, \eta) + f(x, \eta) + A(x, \eta) q_r'(\eta) + C(x, \eta) q_r(\eta) \right] d\eta, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(x, y) &= \psi(y) - \psi((r-1)h) + \\ &+ \int_{(r-1)h}^y d\eta \int_0^x \left[A(\xi, \eta) \tilde{v}_r(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) \tilde{u}_r(\xi, \eta) + f(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) q_r'(\xi) + C(\xi, \eta) q_r(\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Переходя в правой части (12) к пределу при $y \rightarrow rh - 0$, находим $\lim_{y \rightarrow rh - 0} \tilde{v}_r(x, y)$, $r \in Z$, $x \in [0, \omega]$ подставляя их в (10), для неизвестных функций $q_{ri}(x)$, $r \in Z$, $i = \overline{1, n}$, получаем двусторонне-бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных:

$$[I + D_r(h, x)] q_r'(x) - q_{r+1}'(x) = -E_r(h, x) q_r(x) - F_r(h, x) - G_r(h, x, \tilde{u}_r, \tilde{v}_r), \quad r \in Z, \quad (14)$$

где I — единичная матрица, $D_r(h, x) = \int_{(r-1)h}^{rh} A(x, \eta) d\eta$, $E_r(h, x) = \int_{(r-1)h}^{rh} C(x, \eta) d\eta$,

$$F_r(h, x) = \int_{(r-1)h}^{rh} f(x, \eta) d\eta, \quad G_r(h, x, \tilde{u}_r, \tilde{v}_r) = \int_{(r-1)h}^{rh} \left[A(x, \eta) \tilde{v}_r(x, \eta) + C(x, \eta) \tilde{u}_r(x, \eta) \right] d\eta.$$

Из условий (8) и (11) вытекает, что вектор-функции $q_r(x)$ удовлетворяют начальным условиям:

$$q_r(0) = \psi((r-1)h), \quad r \in Z. \quad (15)$$

Двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части системы (14), обозначим через $Q(h, x)$. В каждой блочной строке матрицы $Q(h, x)$ ненулевыми являются лишь $I + D_r(h, x)$ и $-I$. Поэтому при любом $h > 0$ матрица $Q(h, x)$ переводит элементы M снова в M и

$$\|Q(h, x)\| \leq 2 + \alpha(x)h, \quad \text{где } \alpha(x) = \sup_y \|A(x, y)\|.$$

Здесь и далее под нормой матриц понимается норма, согласованная с нормой исходного пространства. Систему дифференциальных уравнений (14) запишем в виде

$$Q(h, x) q'(x) = -E(h, x) q(x) - F(h, x) - G(h, x, \tilde{u}, \tilde{v}), \quad q'(x), q(x) \in M, \quad (16)$$

где $E(h, x) \in M$, $F(h, x) \in M$, $G(h, x, \tilde{u}, \tilde{v}) \in M$ для любых $h > 0$.

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0$ матрица $Q(h, x) : M \rightarrow M$ обратима при всех $x \in [0, \omega]$ и выполняется неравенство

$$\| [Q(h, x)]^{-1} \| \leq \frac{\gamma}{h}, \quad (17)$$

где γ — const и не зависит от h . Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим интегральные уравнения (12), (13), уравнение (16) с начальным условием (15). При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|E(h, x)\| &\leq h \sup_{y \in R} \|C(x, y)\|, & \|F(h, x)\| &\leq h \sup_{y \in R} \|f(x, y)\|, \\ \|G(h, x, \tilde{u}, \tilde{v})\| &\leq h \sup_{r \in Z} \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \left[\|A(x, y)\| \cdot \|\tilde{v}_r(x, y)\| + \|C(x, y)\| \cdot \|\tilde{u}_r(x, y)\| \right] \leq \\ &\leq hb_0(x) \sup_{r \in Z} \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \left[\|\tilde{v}_r(x, y)\| + \|\tilde{u}_r(x, y)\| \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где $b_0(x) = \max\{\sup_{y \in R} \|A(x, y)\|, \sup_{y \in R} \|C(x, y)\|\}$.

В силу условия (17) при фиксированных $\tilde{u}_r(x, y), \tilde{v}_r(x, y), r \in Z$, система функций $q(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dq}{dx} = -[Q(h, x)]^{-1} \left\{ E(h, x)q + F(h, x) + G(h, x, \tilde{u}, \tilde{v}) \right\}, \quad x \in (0, \omega], \quad q \in M, \quad (19a)$$

$$q_r(0) = \psi((r-1)h), \quad r \in Z. \quad (19b)$$

Задача Коши (19) имеет единственное решение и для него справедливы оценки

$$\|q(x)\| \leq \exp\left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi\right] \cdot \left\{ \sup_{r \in Z} \|\psi((r-1)h)\| + \frac{\gamma}{h} \int_0^x \left[\|F(h, \xi)\| + \|G(h, \xi, \tilde{u}, \tilde{v})\| \right] d\xi \right\}, \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \|q'(x)\| &\leq \frac{\gamma}{h} \left\{ \|E(h, x)\| \exp\left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi\right] \sup_{r \in Z} \|\psi((r-1)h)\| + \right. \\ &+ \|E(h, x)\| \exp\left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi\right] \frac{\gamma}{h} \int_0^x \|F(h, \xi)\| d\xi + \|F(h, x)\| + \\ &\left. + \|E(h, x)\| \exp\left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi\right] \frac{\gamma}{h} \int_0^x \left(\|G(h, \xi, \tilde{u}, \tilde{v})\| d\xi + \|G(h, \xi, \tilde{u}, \tilde{v})\| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (20b)$$

Для любого r ($r \in Z$) при фиксированных $q_r(x), q'_r(x)$ система интегральных уравнений (12) – (13) имеет единственное решение $\tilde{u}_r(x, y), \tilde{v}_r(x, y)$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \left[\|\tilde{v}_r(x, y)\| + \|\tilde{u}_r(x, y)\| \right] &\leq b_1(x) \left\{ \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \|\psi(y) - \psi((r-1)h)\| + \right. \\ &+ h \int_0^x \left(1 + \alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h} \right) \left[\sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \|f(\xi, y)\| + b_0(\xi) (\|q'_r(\xi)\| + \|q_r(\xi)\|) \right] d\xi \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$+he^{\alpha(x)h} \left[b_0(x)(\|q_r'(x)\| + \|q_r(x)\|) + \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \|f(x, y)\| \right], \quad (21)$$

где $b_1(x) = (1 + h \sup_{y \in R} \|C(x, y)\| e^{\alpha(x)h}) \exp \left[h \int_0^x (1 + \alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h}) \sup_{y \in R} \|C(\xi, y)\| d\xi \right]$.

Используем метод последовательных приближений. Нулевое приближение по функциональному параметру $q^{(0)'}(x) = (\dots, q_r^{(0)'}(x), q_{r+1}^{(0)'}(x), \dots)$, $q^{(0)}(x) = (\dots, q_r^{(0)}(x), q_{r+1}^{(0)}(x), \dots)$ определим решая задачу Коши (15) для уравнения (16), предполагая в правой части $\tilde{u}_r(x, y) = \psi(y) - \psi((r-1)h)$, $\tilde{v}_r(x, y) = 0$. Из системы интегральных уравнений (12)-(13), где $q_r(x) = q_r^{(0)}(x)$, $q_r'(x) = q_r^{(0)'}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(0)}(x, y)$, $\tilde{v}_r^{(0)}(x, y)$, $r \in Z$. В силу оценки (17) задача Коши (16), (15) имеет единственное решение $q^{(0)}(x) \in M$, $q^{(0)'}(x) \in M$. Тогда с помощью свойств интегральных уравнений нетрудно установить, что $\tilde{u}^{(0)}(x, y)$, $\tilde{v}^{(0)}(x, y) \in M(h)$. В правой части системы (16) предполагая, что $\tilde{u}_r(x, y) = \tilde{u}_r^{(0)}(x, y)$, $\tilde{v}_r(x, y) = \tilde{v}_r^{(0)}(x, y)$, и решая задачу Коши находим $q^{(1)'}(x), q_r^{(1)}(x) \in M$. Из систем (12)-(13), где $q_r(x) = q_r^{(1)}(x)$, $q_r'(x) = q_r^{(1)'}(x)$, определим функции $\tilde{u}_r^{(1)}(x, y)$, $\tilde{v}_r^{(1)}(x, y)$, $r \in Z$. Продолжая этот процесс, найдем $(q^{(k)}(x), \tilde{u}^{(k)}(x, y)) \in M \times M(h)$, $(q^{(k)'}(x), \tilde{v}^{(k)}(x, y)) \in M \times M(h)$, $k = 1, 2, \dots$.

Из систем интегральных уравнений (12)-(13) для последовательных разностей $\tilde{u}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{u}_r^{(k-1)}(x, y)$, $\tilde{v}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{v}_r^{(k-1)}(x, y)$, $r \in Z$, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \left[\|\tilde{v}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{v}_r^{(k-1)}(x, y)\| + \|\tilde{u}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{u}_r^{(k-1)}(x, y)\| \right] \leq h \left[e^{\alpha(x)h} b_0(x) + \right. \\ & \left. + b_1(x) \int_0^x (\alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h} + 1) b_0(\xi) d\xi \right] \max_{x \in [0, \omega]} (\|q_r^{(k)'}(x) - q_r^{(k-1)'}(x)\| + \|q_r^{(k)}(x) - q_r^{(k-1)}(x)\|), \quad (22) \end{aligned}$$

Для систем разности $q_r^{(k+1)'}(x) - q_r^{(k)'}(x)$, $q_r^{(k+1)}(x) - q_r^{(k)}(x)$, $r \in Z$, $k = 0, 1, 2, \dots$, с учетом неравенств (17), (20), (21) справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \|q_r^{(k+1)'}(x) - q_r^{(k)'}(x)\| + \|q_r^{(k+1)}(x) - q_r^{(k)}(x)\| \leq h \left[\left(\frac{\gamma}{h} \|E(h, x)\| + 1 \right) x \frac{\gamma}{h} \exp \left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi \right] + 1 \right] \times \\ & \times \max_{x \in [0, \omega]} \left\{ b_0(x) \sup_{y \in [(r-1)h, rh]} \left[\|\tilde{v}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{v}_r^{(k-1)}(x, y)\| + \|\tilde{u}_r^{(k)}(x, y) - \tilde{u}_r^{(k-1)}(x, y)\| \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставив сюда (22) имеем

$$\begin{aligned} & \|q_r^{(k+1)'}(x) - q_r^{(k)'}(x)\| + \|q_r^{(k+1)}(x) - q_r^{(k)}(x)\| \leq \\ & \leq h^2 \left[\left(\frac{\gamma}{h} \|E(h, x)\| + 1 \right) x \frac{\gamma}{h} \exp \left[\frac{\gamma}{h} \int_0^x \|E(h, \xi)\| d\xi \right] + 1 \right] \max_{x \in [0, \omega]} \left\{ b_0(x) \left[e^{\alpha(x)h} b_0(x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_1(x) \int_0^x (\alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h} + 1) b_0(\xi) d\xi \right] \right\} \max_{x \in [0, \omega]} (\|q_r^{(k)'}(x) - q_r^{(k-1)'}(x)\| + \|q_r^{(k)}(x) - q_r^{(k-1)}(x)\|). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0, \omega]} (\|q_r^{(k+1)'}(x) - q_r^{(k)'}(x)\| + \|q_r^{(k+1)}(x) - q_r^{(k)}(x)\|) \leq \\ & \leq \lambda(h) \max_{x \in [0, \omega]} (\|q_r^{(k)'}(x) - q_r^{(k-1)'}(x)\| + \|q_r^{(k)}(x) - q_r^{(k-1)}(x)\|), \quad (23) \end{aligned}$$

где $\lambda(h) = h \cdot \max_{x \in [0, \omega]} \left[x \gamma \left(\sup_{y \in R} \|C(x, y)\| + 1 \right) \cdot \exp \left\{ \gamma \int_0^x \sup_{y \in R} \|C(\xi, y)\| d\xi \right\} + h \right] \times$

$$\times \max_{x \in [0, \omega]} \left\{ b_0(x) \left[b_0(x) e^{\alpha(x)h} + b_1(x) \int_0^x (\alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h} + 1) b_0(\xi) d\xi \right] \right\}.$$

Тогда выбирая h таким образом, чтобы $\lambda(h) < 1$, получаем равномерную сходимость при $k \rightarrow \infty$ последовательностей $q_r^{(k+1)}(x) \rightarrow q_r^*(x) \in \tilde{C}([0, \omega], R^n)$, $q_r^{(k+1)'}(x) \rightarrow q_r^{*'}(x) \in \tilde{C}([0, \omega], R^n)$. Отсюда следует равномерная относительно $(x, y) \in [0, \omega] \times [(r-1)h, rh]$ сходимость при $k \rightarrow \infty$ последовательностей $\tilde{u}_r^{(k)}(x, y) \rightarrow \tilde{u}_r^*(x, y) \in C([0, \omega] \times [(r-1)h, rh], R^n)$, $\tilde{v}_r^{(k)}(x, y) \rightarrow \tilde{v}_r^*(x, y) \in C([0, \omega] \times [(r-1)h, rh], R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(x, y)$, получаемая склеиванием систем функций $\{q_r^*(x) + \tilde{u}_r^*(x, y)\}$ принадлежит $\tilde{C}([0, \omega] \times R, R^n)$ и является классическим решением задачи (1)–(3).

Докажем единственность решения (1)–(3). Пусть существует два классических решения $u^*(x, y)$ и $u^{**}(x, y)$. Тогда соответствующие им системы пар $(q_r^*(x) + \tilde{u}_r^*(x, y))$, $(q_r^{**}(x) + \tilde{u}_r^{**}(x, y))$, $r \in Z$ будут решениями многохарактеристической краевой задачи (7)–(10) и из оценок (23) для разностей получаем

$$\max_{x \in [0, \omega]} (||q_r^{*'}(x) - q_r^{**'}(x)|| + ||q_r^*(x) - q_r^{**}(x)||) \leq \lambda(h) \max_{x \in [0, \omega]} (||q_r^{*'}(x) - q_r^{**'}(x)|| + ||q_r^*(x) - q_r^{**}(x)||),$$

откуда с учетом, что $\lambda(h) < 1$ получим

$$||q_r^{*'}(x) - q_r^{**'}(x)|| = 0, \quad ||q_r^*(x) - q_r^{**}(x)|| = 0.$$

Отсюда следует, что $q_r^*(x) = q_r^{**}(x)$, $\tilde{u}_r^*(x, y) = \tilde{u}_r^{**}(x, y)$, т.е. $u^*(x, y) = u^{**}(x, y)$ при $(x, y) \in [0, \omega] \times R$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 сводит существование и единственность ограниченного решения задачи (1)–(3) к ограниченной обратимости матрицы $Q(h, x) : M \rightarrow M$ при некотором h и к выполнению оценки (17). Матрица $Q(h, x)$, хотя и является двусторонне-бесконечной, имеет специальную ленточную структуру, что позволяет получить условия разрешимости задачи (1)–(3) в терминах матрицы $A(x, y)$.

Следующее утверждение устанавливает коэффициентные условия существования, единственности ограниченного на полосе решения задачи (1)–(3).

Теорема 2. Пусть в матрице $A(x, y) = (a_{ij}(x, y))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ имеет место диагональное преобладание по строкам

$$|a_{ii}(x, y)| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}(x, y)| + \theta_i(x, y), \quad (24)$$

где $\theta_i(x, y) \geq \theta > 0$ непрерывны на $[0, \omega] \times R$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы 2. По условию при фиксированном $i : a_{ii}(x, y) \geq \theta > 0$ или $a_{ii}(x, y) \leq -\theta < 0$ для всех $(x, y) \in [0, \omega] \times R$. В каждой строке блочно-ленточной матрицы $Q(h, x)$ отличны от нуля лишь $n+1$ элементов. В i -ой строке r -го блока преобладающим элементом будет -1 , если $a_{ii}(x, y) < 0$ и $1 + \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ii}(x, \eta) d\eta$, если $a_{ii}(x, y) > 0$. Действительно, если $a_{ii}(x, y) > 0$, то при $r \in Z$ и $h > 0$

$$\begin{aligned} 1 + \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ii}(x, \eta) d\eta &\geq \sum_{j \neq i} \int_{(r-1)h}^{rh} |a_{ij}(x, \eta)| d\eta + 1 + \int_{(r-1)h}^{rh} \theta_i(x, \eta) d\eta \geq \\ &\geq \sum_{j \neq i} \left| \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ij}(x, \eta) d\eta \right| + 1 + \theta h, \end{aligned}$$

а если $a_{ii}(x, y) < 0$, то при $r \in Z$ и $h \in (0, 1/\max_{x \in [0, \omega]} \alpha(x))$

$$1 \geq \sum_{j \neq i} \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ij}(x, \eta) d\eta + 1 - \int_{(r-1)h}^{rh} |a_{ii}(x, \eta)| d\eta + \int_{(r-1)h}^{rh} \theta_i(x, \eta) d\eta \geq$$

$$\geq \sum_{j \neq i} \left| \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ij}(x, \eta) d\eta \right| + \left| 1 + \int_{(r-1)h}^{rh} a_{ii}(x, \eta) d\eta \right| + \theta h.$$

Тогда существует двусторонне - бесконечная матрица перестановок P^* ($\|P^*\| = \|[P^*]^{-1}\| = 1$), выводящая преобладающие элементы $Q(h, x)$ в диагональ и в матрице $P^*Q(h, x)$ имеет место диагональное преобладание с константой θh . По лемме Адамара [4] матрица $P^*Q(h, x)$ обратима и $\|[P^*Q(h, x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{\theta h}$. Отсюда следует, что

$$\|[Q(h, x)]^{-1}\| = \|[P^*]^{-1}P^*Q(h, x)]^{-1}\| \leq \|[P^*Q(h, x)]^{-1}\| \cdot \|P^*\| \leq \frac{1}{\theta h},$$

т.е. оценка (17) выполняется с константой $\gamma = 1/\theta$ для всех $h \in \max_{x \in [0, \omega]} \alpha(x)$. Из теоремы 1 следует существование единственного классического решения задачи (1)–(3). Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. Джумабаев Д. С., Асанова А. Т. // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2001. № 1. С. 17 – 23.
2. Джумабаев Д. С. // Труды межд. конф. "Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии". Алматы (26 – 28 октября 2000 г.). 2001. С. 24 – 28.
3. Асанова А. Т. // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2001. № 3. С. 73 – 79.
4. Стеценко В. Я. // Уч. зап. Таджикского ун-та. Сер. матем. 1963. Т 26, № 1. С. 43 – 48.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. И. РАМАЗАНОВ

Институт математики МОН РК, КарГУ МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, dzhenali@math.kz
480074 Караганды, Университетская ул., 28

Граничные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают и находят широкое применение во многих приложениях (см., например, [1 – 6] и др.). Известно, что нагрузка уравнения существенно влияет на корректность задачи и вследствие этого они не всегда оказываются поставленными корректно. В данной работе рассматриваются вопросы корректной постановки задач для нагруженных линейных дифференциально-операторных уравнений высокого порядка с периодическими граничными условиями, а также задача Коши для нагруженного нелинейного дифференциально-операторного уравнения первого порядка.

1. Постановки задач и основные результаты

Пусть Ω — n -мерный куб с ребрами длины 2π ; \mathcal{P}^∞ — линейное многообразие гладких периодических по всем переменным комплекснозначных функций, $H \equiv H(\Omega)$ — гильбертово пространство интегрируемых в квадрате на Ω функций, в котором множество \mathcal{P}^∞ плотно. Полиному

$$A(s) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha s^\alpha, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

с постоянными комплексными коэффициентами поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD)$, где $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j \equiv \partial/\partial x_j$, $i = \sqrt{-1}$, таким образом, что $A(-iD) \exp\{is \cdot x\} = A(s) \exp\{is \cdot x\}$, $s \cdot x = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n$.

Оператор $A : H \rightarrow H$ зададим как замыкание в H операции $A(-iD)$, определенной первоначально на функциях из \mathcal{P}^∞ . Следуя [7, с. 103 – 104], оператор A назовем Π -оператором.

Обозначим через \mathcal{S} множество n -мерных целочисленных векторов $\{s_1, \dots, s_n\}$, $s_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Совокупность экспонент $\{\exp\{is \cdot x\}, s \in \mathcal{S}\}$ образует, очевидно, ортогональный базис в H и является одновременно набором собственных элементов для оператора A , а каждое из чисел $A(s)$, $s \in \mathcal{S}$, — соответствующим собственным значением.

Задача 1. Исследовать вопросы разрешимости краевой задачи:

$$\begin{aligned} Lu \equiv (D_t^N + A)u(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(t_k) &= f(t) \quad \text{на } (0, 2\pi), \\ D_t^j u(0) &= D_t^j u(2\pi), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Keywords: Loaded equation, periodic boundary condition, Cauchy problem, a priori estimate

2000 Mathematical Subject Classification: 35B45, 35D05, 35F25, 35G15, 35R10

© М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, 2001.

где $D_t = \partial/\partial t$, $\alpha_{jk} \in \mathbf{C}$, $k = \overline{1, m}$, — (комплексные) постоянные, $0 < t_1 < \dots < t_m < 2\pi$.

Определение 1.1. Для задачи (1.1) функцию $u(t) \in L_2(0, 2\pi; H)$ назовем *сильным решением*, если существует последовательность $\{u_n(t)\} \subset \{C^N((0, 2\pi); \mathcal{P}^\infty) \cap C^{N-1}([0, 2\pi]; \mathcal{P}^\infty)$, $D_t^j u(0) = D_t^j u(2\pi)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, для которой имеют место соотношения: $Lu_n(t) \rightarrow f(t)$, $u_n(t) \rightarrow u(t)$ в $L_2(0, 2\pi; H)$.

Основные результаты работы по задаче 1 формулируются в виде следующих утверждений.

Теорема 1.1. Задача (1.1) при любом $f \in L_2(0, 2\pi; H)$ однозначно сильно разрешима в пространстве $L_2(0, 2\pi; H)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{Nk} + A(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad -A(s) \neq (iq)^N \quad \forall s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0, \quad (1.2)$$

где $q = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\mathcal{S}^0 = \{s | s \in \mathcal{S}, A(s) = 0\}$.

Теорема 1.2. Если $N = 3$, то задача (1.1) при любом $f \in L_2(0, 2\pi; H)$ однозначно сильно разрешима в пространстве $L_2(0, 2\pi; H)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{3k} + A(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad A(s) \neq iq^3 \quad \forall s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Утверждения теорем 1.1 и 1.2 показывают, что, во-первых, условия корректности задачи (1.1) не зависят от точек нагружения $\{t_k\}_{k=1}^m$, во-вторых, корректность задачи (1.1) не зависит также от коэффициентов α_{jk} , $j = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, m}$.

Переходим к формулировке второй задачи. Пусть заданы рефлексивное банахово и гильбертово пространства $\{V, \|\cdot\|\}$, $\{H, |\cdot|, (\cdot, \cdot)\}$ соответственно, и имеют место следующие плотные и непрерывные вложения $V \subset H \equiv H' \subset V'$. Пусть γ обозначает норму оператора вложения $V \subset H$.

Задача 2. Найти условия разрешимости в пространстве V задачи Коши для нагруженного нелинейного дифференциально-операторного уравнения [1, 2, 3, 11]:

$$L(t)u \equiv u'(t) + A(t)u(t) + \sum_{k=1}^m A_k u(t_k) = f(t) \text{ на } (0, 1), \quad (1.4)$$

с начальным условием

$$u(0) = \varphi, \quad (1.5)$$

где $u'(t) = du(t)/dt$, $A(t) : V \rightarrow V'$ — заданный нелинейный и $A_k : H \rightarrow H$, $k = 1, \dots, m$, — заданные линейные операторы, точки t_k , $k = 1, \dots, m$, из интервала $[0, 1]$ заданы и фиксированы, а также $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Полагаем, что функция $f(t) : (0, 1) \rightarrow V'$ и элемент $\varphi \in H$ заданы.

Пусть выполнены следующие условия:

Предположение 1.1. а). Функция $t \rightarrow \langle A(t)u, v \rangle$ измерима для любых фиксированных $u, v \in V$; б). функция $\lambda \rightarrow \langle A(t)(u + \lambda v), w \rangle$ непрерывна в нуле для почти всех $t \in (0, 1)$ и для любых фиксированных $u, v, w \in V$; в). оператор $A(t) : V \rightarrow V'$ является монотонным для почти всех $t \in (0, 1)$; г). существуют такие положительные числа α, β, θ, p ($p \geq 2$), что

$$\begin{cases} \langle A(t)v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^p - \theta, \quad \|A(t)v\|_{V'} \leq \beta(1 + \|v\|^{p-1}), \\ |A_k v| \leq \sqrt{a_{0k}} \cdot |v|, \quad k = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (1.6)$$

имеет место для любых $v \in V$ равномерно относительно $t \in (0, 1)$.

Мы будем говорить, что оператор L удовлетворяет условию $\Lambda(\varepsilon_1, a)$ обозначаемое как $L \in \Lambda(\varepsilon_1, a)$ тогда и только тогда, когда имеют место следующие неравенства

$$\frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon_1} \leq \delta_1 \dots \delta_{k-1} (1 - \delta_k) \chi_k, \quad 0 < \delta_k < 1, \quad (1.7)$$

$$\text{где } \chi_k = \begin{cases} a \cdot \exp(-at_k)/(1 - \exp(-at_k)), & a \neq 0, \\ 1/t_k, & a = 0, \end{cases} \quad k = 1, \dots, m.$$

Основным результатом по задаче 2 является следующая

Теорема 1.3. Пусть выполнено Предположение 1.1 и $L \in \Lambda(\varepsilon_1, m\varepsilon_1 - \eta(1 - \delta_0))$, $\eta = 2\alpha\gamma^{-1}$. Тогда задача (1.4)–(1.5) разрешима для любых $f \in L^q(0, 1; V')$, $\varphi \in H$ ($1/p + 1/q = 1$).

2. Доказательство теоремы 1.1

Используем метод Фурье, т. е. решение и правую часть уравнения (1.1) представим в виде

$$u = \sum_{s \in \mathcal{S}} u_s(t) \exp\{is \cdot x\}, \quad f = \sum_{s \in \mathcal{S}} f_s(t) \exp\{is \cdot x\}. \quad (2.1)$$

В задаче (1.1) для коэффициентов разложений (2.1) будем иметь

$$D_t^N u_s(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} u_s(t_k) = f_s(t) \quad \text{на } (0, 2\pi), \quad u_s(0) = u_s(2\pi), \quad \text{если } s \in \mathcal{S}^0; \quad (2.2)$$

$$D_t^N u_s(t) + A(s)u_s(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} u_s(t_k) = f_s(t) \quad \text{на } (0, 2\pi), \quad u_s(0) = u_s(2\pi), \quad \text{если } s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0. \quad (2.3)$$

Определение 2.1. Будем говорить, что задачи (2.2), (2.3) регулярно разрешимы, если для $f_s \in C((0, 2\pi))$ эти задачи разрешимы в классе $C^N((0, 2\pi)) \cap C^{N-1}([0, 2\pi])$.

Сформулируем аналог леммы из [7, с. 118].

Лемма 2.1. Утверждение теоремы 1.1 будет иметь место тогда и только тогда, когда каждая из задач (2.2), (2.3) однозначно регулярно разрешима и выполнены оценки

$$\|u_s(t)\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq C \|f_s(t)\|_{L^2(0, 2\pi)} \quad \text{для } \forall s \in \mathcal{S}, \quad (2.4)$$

где постоянная C не зависит от s .

Для задач (2.2), (2.3) справедливы следующие леммы.

Лемма 2.2. Задачи (2.2) при любом $f_s \in C((0, 2\pi))$ однозначно регулярно разрешимы и верны оценки (2.4) тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^m \alpha_{Nk} \neq 0$.

Лемма 2.3. Задачи (2.3) при любом $f_s \in C((0, 2\pi))$ однозначно регулярно разрешимы и справедливы оценки (2.4) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{Nk} + A(s) \neq 0, \quad -A(s) \neq (iq)^N \quad \forall s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

Доказательство леммы 2.2. Для случая $s \in \mathcal{S}^0$ из (2.2) мы получаем

$$D_t^{N-p}u_s(t) = \sum_{j=N-p}^{N-1} \frac{t^{j-N+p}}{(j-N+p)!} D_t^j u_s(0) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} f_s(\tau) d\tau - \frac{t^p}{p!} M_s, \quad p = 1, \dots, N; \quad (2.6)$$

где $M_s = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} D_t^{N-j} u_s(t_k)$. Мы получаем из (2.6) для $p = 1$, $t = 2\pi$:

$$M_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_s(t) dt. \quad (2.7)$$

Используя (2.7), из (2.6) для $p = 2$, $t = 2\pi$ мы находим $D_t^{N-1}u_s(0)$ и т.д. В (2.6) для $p = N$ мы должны найти только $u_s(0)$. Для этого, сперва фиксируя $t = t_k$, $k = 1, \dots, m$, в (2.6) для всех $p = 1, \dots, N$, и далее умножая соответственно полученные формулы на α_{pk} , мы сложим их по k от 1 до m . Таким образом, отсюда мы находим искомое значение $u_s(0)$, тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{Nk} \neq 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, для всех $s \in \mathcal{S}^0$ граничная задача (2.2) имеет единственное решение $u_s(t)$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.8).

Доказательство леммы 2.3. Случай $s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0$. Из (2.3) мы получаем

$$\prod_{j=1}^N (D_t^1 - \lambda_{js}) u_s(t) = f_s(t) - M_s, \quad t \in (0, 2\pi), \quad D_t^j u_s(0) = D_t^j u_s(2\pi), \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.9)$$

где λ_{js} являются корнями характеристического уравнения $\lambda^N + A(s) = 0$. Из (2.9) мы имеем

$$u_s(t) = F_{0s}(t) - M_s [A(s)]^{-1}; \quad D_t^j u_s(t) = D_t^j F_{0s}(t), \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (2.10)$$

где (мы принимаем $t_{N+1} = t$)

$$F_{0s}(t_{j+1}) = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_N f_s(t_1) \prod_{j=1}^N G_{js}(t_{j+1}, t_j) dt_j; \quad M_s = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} D_t^{N-j} u_s(t_k);$$

$$[A(s)]^{-1} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_N \prod_{j=1}^N G_{js}(t_{j+1}, t_j) dt_j; \quad G_{js}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\exp\{\lambda_{js}(t-\tau)\}}{1 - \exp\{\lambda_{js} \cdot 2\pi\}}, & 0 \leq \tau \leq t; \\ \frac{\exp\{\lambda_{js}(2\pi+t-\tau)\}}{1 - \exp\{\lambda_{js} \cdot 2\pi\}}, & t \leq \tau \leq 2\pi. \end{cases}$$

Заметим, что равенства (2.10) справедливы тогда и только тогда, когда

$$-A(s) \neq (iq)^N, \quad \forall q = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.11)$$

Далее, фиксируя $t = t_k$ в (2.10), умножая соответствующие формулы на $\alpha_{N-j,k}$ и складывая их по k от 1 до m и по j от 0 до $N-1$, мы получаем

$$\Delta_s M_s [A(s)]^{-1} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{N-j,k} D_t^j F_{0s}(t_k),$$

где $\Delta_s \equiv A(s) + \sum_{k=1}^m \alpha_{Nk}$. Следовательно, мы определим однозначно M_s , если и только если выполнено условие

$$\Delta_s \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0. \quad (2.12)$$

Таким образом, используя (2.10), мы получим решения (2.9)

$$u_s(t) = F_{0s}(t) - [\Delta_s]^{-1} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \alpha_{jk} D_t^{N-j} F_{0s}(t_k). \quad (2.13)$$

Заметим, что условия (2.8), (2.11) и (2.12) совпадают с условиями (1.2) теоремы 1.1.

Согласно вышеустановленным результатам для решений граничных задач (2.2)–(2.3) оценки (2.4) имеют место.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 необходимо показать замыкаемость оператора граничной задачи (1.1) в пространстве $L_2(0, 2\pi; H)$. Для этого мы используем следующее утверждение [10].

Предложение 2.1. *Оператор $T+E$ замкнут, если T замкнут и E ограничен в $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(E)$. Здесь $\mathcal{D}(X)$ – область определения оператора X .*

3. Доказательство теоремы 1.3

Мы используем метод Галеркина. Пусть $\{w_j\}$ является базисом в V . Мы ищем приближенное решение $u^N(t) = \sum_{i=1}^N g_i^N(t) w_i$, используя решения задачи Коши для нагруженной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(u_t^N(t), w_j) + (A(t)u^N(t) + \sum_{k=1}^m A_k u^N(t_k) - f, w_j) = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (3.1)$$

$$u^N(0) = \vartheta^N \equiv \sum_{i=1}^N \varphi_i^N w_i, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta^N \rightarrow \varphi. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1), (3.2) перепишем в виде следующей задачи Коши относительно $g_i^N(t)$:

$$L_j(t, g(t), g'(t)) = f_j(t) - \sum_{k=1}^N l_{kj} g(t_k), \quad g_j^N(0) = \varphi_j^N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.3)$$

Для задачи (3.3) имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Если $L \in \Lambda(\varepsilon_1, m\varepsilon_1 - \eta(1 - \delta_0))$, тогда задача (3.3) разрешима на интервале $(0, 1)$.*

Доказательство леммы 3.1. Умножая уравнение (3.3) на $g_j^N(t)$ и суммируя по j , мы получим

$$\frac{d}{dt} |u^N(t)|^2 + 2\alpha \|u^N(t)\|^p \leq \langle f(t) - \sum_{k=1}^m A_k u^N(t_k), 2u^N(t) \rangle + 2\theta.$$

Далее, используя неравенство Юнга для любого $\delta_0 \in (0, 1)$

$$\langle f(t), u^N(t) \rangle \leq \alpha \delta_0 \|u^N(t)\|^p + \|f(t)\|_{V', q}^q \varepsilon^{-q}, \quad \varepsilon^p = \alpha p \delta_0,$$

и следующее неравенство ($\varepsilon_1 > 0$)

$$2 \sum_{k=1}^m < A_k u^N(t_k), u^N(t) > \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^m a_{0k} |u^N(t_k)|^2 + m\varepsilon_1 |u^N(t)|^2,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u^N(t)|^2 + 2\alpha(1 - \delta_0) \|u^N(t)\|^p &\leq \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^m a_{0k} |u^N(t_k)|^2 + \\ & m\varepsilon_1 |u^N(t)|^2 + K(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $K(t) = \|f(t)\|_{V', q}^q \varepsilon^{-q} + 2\theta$. Полагая, что $y(t) = \max\{1, |u^N(t)|^2\}$, из (3.4) и (3.2) получаем

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq a \cdot y(t) + \sum_{k=1}^m a_k y(t_k) + b(t), \quad t \in (0, 1), \quad (3.5)$$

$$y(0) \leq b_0, \quad (3.6)$$

где $a = m\varepsilon_1 - \eta(1 - \delta_0)$, $a_k = a_{0k}/\varepsilon_1$, $b(t) = \eta(1 - \delta_0) + K(t)$, $b_0 = |\varphi|^2 + 1$.

Применяя лемму 1 из [8], мы получим следующие оценки

$$|y(t_k)| \leq C[|\varphi| + \|f(t)\|_{L^q(0,1;V')}], \quad k = 1, \dots, m,$$

используя которые можем установить следующую оценку равномерно относительно N

$$\|u^N(t)\|_{L^\infty(0,1;H) \cap L^p(0,1;V)} \leq \text{const}. \quad (3.7)$$

Эта оценка зависит от величин $\|f(t)\|_{L^q(0,1;V')}$, $|\varphi|$, m , δ_k , t_k , ($0 \leq k \leq m$, $t_0 = 0$), γ , α , p , θ . Оценка (3.7) эквивалентна утверждению о том, что любое решение $g(t) = \{g_i^N(t), \dots, g_N^N(t)\} : (0, 1) \rightarrow R^N$ задачи Коши (3.1)–(3.2) принадлежит сфере B с конечным радиусом

$$\|g(t)\|_{C([0,1];R^N)} < K. \quad (3.8)$$

Завершение доказательства леммы 3.1 основано на оценке (3.8) и использовании теоремы Лереша-Шаудера [12].

Действительно, в шаре B пространства $C([0, 1]; R^N)$, задаваемого формулой (3.8), рассмотрим семейство операторов $G_\lambda : B \rightarrow R^N$, $0 \leq \lambda \leq 1$, определенных следующим образом:

$$G_\lambda g_0 = -\lambda \sum_{k=1}^m c_k g(t_k) + g_0,$$

где $c_k = \{(A_k w_i, w_j)\}_{i,j=1}^N = \{l_{k1}, \dots, l_{kN}\}$ – матрица, $g : (0, 1) \rightarrow R^N$ – решение задачи Коши

$$L_j(t, g(t), g'(t)) = f_j(t) - g_{0j}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad g(0) = \varphi^N. \quad (3.9)$$

Здесь $g_0 = \{g_{01}, \dots, g_{0N}\}$. Локальное решение задачи (3.9), существующее по теореме Каратеодори, продолжимо на интервал $(0, 1)$ в силу оценки (3.8). Поэтому операторы G_λ определены.

Не уменьшая общности, можно считать, что $K \geq |g_0|$. Тогда уравнение $G_0 g_0 = g_0$ в шаре B имеет единственное решение g_0 , и преобразование $g_0 \rightarrow g_0 - G_0 g_0$ взаимно однозначно.

Очевидно, семейство G_λ равностепенно непрерывно по λ в \bar{B} , и для неподвижных точек оператора G_λ справедлива оценка (3.8).

Для завершения доказательства леммы 3.1 достаточно показать, что каждый оператор G_λ непрерывен на шаре \bar{B} . Имеем

$$G_\lambda g_{01} - G_\lambda g_{02} = -\lambda \sum_{k=1}^m c_k [g^{(1)}(t_k) - g^{(2)}(t_k)] + g_{01} - g_{02}.$$

Обозначим $u = u_1^N - u_2^N$, $u_p^N = \sum_{i=1}^N g_i^{(p)} w_i$, $-L_j(t, g^{(p)}(t), g^{(p)'(t)}) + f_j(t) = g_{0j}^{(p)}$ ($p = 1, 2$). Тогда

$$(u_t, w_j)_+ < A(t)u_1^N - A(t)u_2^N, w_j > + \sum_{k=1}^m (A_k u(t_k), w_j) = 0.$$

В силу монотонности оператора $A(t)$ из последнего равенства следует справедливость неравенства

$$\frac{d|u|^2}{dt} \leq \sum_{k=1}^m \sqrt{a_{0k}} \cdot |u(t_k)| \cdot |u| \leq m\varepsilon_1 |u|^2 + \sum_{k=1}^m \frac{a_{0k}}{\varepsilon_1} |u(t_k)|^2, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Откуда, следуя схеме получения оценки (3.8), получим непрерывность оператора G_λ . Лемма 3.1 доказана.

Далее, измеримость функции $t \rightarrow \langle A(t)u^N(t), w \rangle$ имеет место согласно Предположения 1.1 [12] об операторе $A(t)$. Отображение $t \rightarrow A(t)u^N(t) : R \rightarrow V'$ является также измеримым согласно сепарабельности V . Таким образом, согласно условия (1.6) и оценки (3.7) мы имеем следующую оценку

$$\|A(t)u^N(t)\|_{L^q(0,1;V')} \leq \text{const} \quad (3.10)$$

равномерно относительно N .

Далее для образа Фурье $\hat{u}^N(\tau)$ (продолжения $\bar{u}^N(t)$ из $(0, 1)$ в R нулем [13]) мы получаем равномерно по N следующую оценку

$$\int_R |\tau|^{2\sigma} |\hat{u}^N(\tau)|^2 d\tau \leq C(\sigma), \quad \sigma \in (0, 1/4), \quad (3.11)$$

которая показывает, что дробная производная $D_t^\sigma u^N(t)$ ограничена.

Оценки (3.7), (3.10), (3.11) показывают существование таких подпоследовательностей $u^N(t)$ (сохранено прежнее обозначение индекса), что

- (а) $u^N(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $L^p(0, 1; V)$, *-слабо в $L^\infty(0, 1; H)$;
- (б) $\sum_{k=1}^m A_k u^N(t_k) \rightarrow \xi$, $u^N(T) \rightarrow \xi_T$, $u^N(0) \rightarrow \xi_0$, слабо в H ;
- (в) $A(t)u^N(t) \rightarrow U(t)$ слабо в $L^q(0, 1; H)$;
- (г) $u^N(t) \rightarrow u(t)$ сильно в $L^2(0, 1; H)$.

Далее мы устанавливаем следующее соотношение (где знак $\bar{}$ обозначает продолжение из $(0, 1)$ в R нулем)

$$\frac{d}{dt} \bar{u}(t) + \bar{U}(t) + \xi = \bar{f}(t) + \xi_0 \delta(t) - \xi_T \delta(t - T), \quad (3.12)$$

и соответственно в $(0, 1)$

$$\frac{d}{dt} u(t) + U(t) + \xi = f(t) \text{ на } (0, 1) \quad (3.13)$$

$$u(0) = \varphi. \quad (3.14)$$

Следуя [14, 15], проводится доказательство следующего соотношения:

$$A(t)u(t) = U(t) \text{ в } L^q(0, 1; V').$$

Из свойства монотонности оператора A

$$X_N = \int_0^1 \langle Au^N - Av, u^N - v \rangle dt \geq 0 \quad \forall v \in L^p(0, 1; V), \quad (3.15)$$

слабой сходимости (б), т.е. $\liminf |u^N(T)|^2 \geq |u(T)|^2$, а также равенств (3.1) и (3.13), получим

$$\int_0^1 \langle U - Av, u - v \rangle dt \geq 0. \quad (3.16)$$

Согласно Предположения 1.1, полагая $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0, 1; V)$ и произвольным, из (3.16) следует, что

$$\int_0^1 \langle U - Au, w \rangle dt \geq 0 \quad \forall w, \quad \text{т.е. } U = Au.$$

Отсюда и из уравнения (3.13) следует $\sum_{k=1}^m A_k u(t_k) = \xi$ в H . Это совместно с (3.13)–(3.14) завершает доказательство теоремы 1.3.

4. Примеры

Пусть $Q = \{x, t \mid 0 < x, t < 2\pi\}$. (1). Для граничной задачи:

$$(D_t^3 - D_x^2)u + M_1 u = f \quad \text{на } Q; \quad (4.1)$$

$$D_x^j u(0, t) = D_x^j u(2\pi, t), \quad j = 0, 1; \quad D_t^j u(x, 0) = D_t^j u(x, 2\pi) \quad j = 0, 1, 2; \quad (4.2)$$

где $M_1 u \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^3 \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(x, t_k)$, следующее утверждение имеет место (в силу $-s^2 \neq iq^3 \forall s, q = \pm 1, \pm 2, \dots$):

Следствие 4.1. *Задача (4.1)–(4.2) для $\forall f \in L_2(Q)$ допускает единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$, если и только если*

$$\operatorname{sh} \left(\pi \left[\sum_{k=1}^m \alpha_{3k} \right]^{1/2} \right) \neq 0. \quad (4.3)$$

(2). Для граничной задачи:

$$D_t^3 u + D_x^2 u + M_1 u = f \quad \text{на } Q; \quad (4.4)$$

(4.2) следующее утверждение имеет место (в силу $s^2 \neq iq^3 \forall s, q = \pm 1, \pm 2, \dots$):

Следствие 4.2. *Задача (4.4), (4.2) для $\forall f \in L_2(Q)$ допускает единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$, если и только если выполнено условие*

$$\sin \left(\pi \left[\sum_{k=1}^m \alpha_{3k} \right]^{1/2} \right) \neq 0.$$

(3). Для граничной задачи:

$$D_t^4 u - D_x^2 u + M_2 u = f \quad \text{на } Q; \quad (4.5)$$

$$D_x^j u(0, t) = D_x^j u(2\pi, t), \quad j = 0, 1; \quad D_t^j u(x, 0) = D_t^j u(x, 2\pi) \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad (4.6)$$

где $M_2 u \equiv \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^4 \alpha_{jk} D_t^{N-j} u(x, t_k)$, следующее утверждение имеет место (в силу $s^2 + q^4 \neq 0 \forall s, q = \pm 1, \pm 2, \dots$):

Следствие 4.3. *Задача (4.5)–(4.6) для $\forall f \in L_2(Q)$ допускает единственное сильное решение $u \in L_2(Q)$, если и только если выполнено условие (4.3).*

Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 86 – 94.
2. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, №1. С. 92 – 101.
3. Ломов И. С. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №1. С. 80 – 93.
4. Dzhenaliev M. T. // Proceed. of the International Conference on DIFFERENTIAL EQUATIONS, Barcelona, 1991. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong. 1993. Vol. I. P. 437 – 441.
5. Дженалиев М. Т. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №9. С. 1585 – 1595.
6. Дженалиев М. Т. // Докл. НАН РК. 1993. №3. С. 8 – 14.
7. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
8. Дженалиев М. Т. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №12. С. 2029 – 2037; 1996. Т. 32, №4. С. 518 – 522.
9. Dzhenaliev, M. T. // J.Korean Math.Soc. 2000. Vol. 37, №6. P. 1031 – 1042.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
11. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
12. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
13. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М., 1980.
14. Гаевски Г. и др. Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. М., 1978.
15. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.948

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ С ДЕМПФИРУЮЩИМИ МНОЖИТЕЛЯМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Д. С. ДЖУМАБАЕВ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, anar@math.kz

Получены достаточные условия сходимости итерационных процессов с различными демпфирующими множителями при одинаковых начальных приближениях к одному и тому же решению неограниченного замкнутого операторного уравнения. Результаты применяются к нелинейным двухточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи, встречающиеся в приложениях, в основном являются нелинейными. Лишь при дополнительных предположениях о малости некоторых величин мы получаем линейную задачу. Естественно, что явления, связанные с нелинейностью описываемого процесса, невозможно объяснить на основе анализа линейных задач. Поэтому вопросы существования, единственности решения и построения конструктивных методов исследования нелинейных краевых задач остается актуальной проблемой качественной теории дифференциальных уравнений. Применение различных методов к исследованию краевых задач приводит к утверждениям, сформулированным в различных терминах. Библиографию и подробный анализ работ по основным группам методов исследования и решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в монографии А. М. Самойленко, Н. И. Ронто [1].

Итерационные методы являются основным методом решения нелинейных задач и находят широкое применение в различных вопросах нелинейного анализа. Наряду с достаточными условиями существования итерационные методы дают способы нахождения решений или их приближений. В монографии Дж. Ортега, В. Рейнболдта [2] содержится подробный анализ методов решения нелинейных уравнений со многими неизвестными и исследуются вопросы построения, сходимости различных итерационных процессов. Там же содержатся ссылки на большое количество работ, посвященных итерационным методам.

В работах Л. В. Канторовича [3, 4] установлены достаточные условия сходимости основного и модифицированного метода Ньютона для функциональных уравнений. Эти результаты были применены к нелинейным интегральным уравнениям, краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений, задачам конформного отображения и др. При этом рассматриваемая задача в соответствующих пространствах записывалась в виде функционального уравнения с ограниченным оператором и при линеаризации использовалась производная Фреше. Однако, как было отмечено в [4, с.713], при применении метода к краевым задачам возникают

Keywords: *Iterative process, damping multiplier, two-point boundary value problem, ordinary differential equation*

2000 Mathematical Subject Classification: 34A45, 65L20

© Д. С. Джумабаев, 2001.

трудности, связанные с оценкой нормы оператора, обратного к производной Фреше. В то же время для многих краевых задач можно избежать эту трудность, сведя их к уравнениям с неограниченным оператором. Одним из первых работ, посвященных итерационным процессам для функциональных уравнений с неограниченным оператором, по-видимому, является статья М. Н. Яковлева [5], где для уравнения, содержащего неограниченный линейный оператор, получены достаточные условия сходимости модифицированного метода Ньютона.

В статьях [6, 7] введено определение линейризатора, обобщающее производную Фреше на негладкие неограниченные операторы и с его помощью построены итерационные процессы для функциональных уравнений с замкнутым неограниченным оператором. Предложен способ доказательства сходимости итерационных процессов, учитывающий специфику неограниченных операторов и последовательно уменьшающий значения исходного оператора. Для этих уравнений установлены достаточные условия сходимости итерационных методов и в том числе модификации метода Ньютона-Канторовича. Сходимость итерационных методов к сильному решению функционального уравнения с неограниченным (вообще говоря, незамкнутым) оператором и их применение к краевым задачам для полулинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка рассмотрены в [8]. Скорость сходимости итерационных процессов для неограниченных операторных уравнений и их условия применимости к нахождению решений краевых задач для полулинейных параболических уравнений установлены в [9]. В статье [10] на основе итерационных процессов для функциональных уравнений с неограниченным оператором получены достаточные условия существования, изолированности решений сингулярных краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Там же установлены свойства решений сингулярных краевых задач и построена регулярная двухточечная краевая задача, позволяющая с любой точностью определить решение исходной сингулярной задачи.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$A(x) \equiv Hx + F(x) = 0. \quad (1)$$

где $H : X \rightarrow Y$ — линейный замкнутый оператор, $F : X \rightarrow Y$ в $S(x^0, \rho) = \{x \in X : \|x - x^0\|_1 < \rho\}$ имеет производную Фреше $F'(x)$; X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Через $D(A)$ и $R(A)$ обозначаются области определения и значения оператора A .

Определение 1. [6]. *Линейный оператор $C : X \rightarrow Y$ называется линейризатором оператора A в точке $x \in D(A)$, если $D(A) \subseteq D(C)$ и существуют числа $\varepsilon \geq 0, \delta > 0$, что*

$$\|A(\tilde{x}) - A(x) - C(x - \tilde{x})\|_2 \leq \varepsilon \|\tilde{x} - x\|_1$$

для всех $\tilde{x} \in D(A)$, удовлетворяющих неравенству $\|x - \tilde{x}\|_1 < \delta$.

Числа ε и δ , называемые константами линейризатора, показывают соответственно точность и радиус окрестности аппроксимации исходного оператора линейным оператором C в точке x . В нашем случае линейный оператор $[H + F'(x)] : X \rightarrow Y$ является линейризатором оператора A в точке $x \in D(A) = D(H) \cap S(x^0, \rho)$. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов из X в Y с индуцированной нормой.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $x^0 \in D(H)$ и для всех $x \in U^0 = \{x \in D(A) : \|A(x)\|_2 \leq \|A(x^0)\|_2\}$ линейризатор $H + F'(x)$ ограниченно обратим

$$\|[H + F'(x)]^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq \gamma,$$

2) производная Фреше $F'(x)$ равномерно непрерывна в $S(x^0, \rho)$,

$$3) \gamma \cdot \|A(x^0)\|_2 < \rho.$$

Тогда существует число $\alpha_0 \geq 1$, что для $\forall \alpha \geq \alpha_0$ последовательность элементов $\{x^{(n+1)}\} \subset U^0$, определяемая по итерационному процессу : $x^{(0)} = x^0$,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{1}{\alpha} [H + F'(x^{(n)})]^{-1} \cdot [Hx^{(n)} + F(x^{(n)})], \quad (2)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, сходится к $x^* \in S(x^0, \rho)$ — изолированному решению уравнения (1) и справедлива оценка

$$\|x^* - x^0\|_1 \leq \gamma \cdot \|A(x^0)\|_2. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 1. Из условия 3) следует существование чисел $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих неравенствам

$$\varepsilon_0 \gamma < 1, \quad \gamma \cdot \|A(x^0)\|_2 \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon_0 \gamma} + \varepsilon < \rho.$$

По условию 2) найдется $\delta_0 \in (0, \rho/2)$, что $\|F'(x) - F'(\tilde{x})\|_{L(X,Y)} < \varepsilon_0$, если только $\|x - \tilde{x}\|_1 < \delta_0$, $x, \tilde{x} \in S(x^0, \rho)$. Поэтому применяя теорему о среднем в интегральной форме имеем

$$\|A(x) - A(\tilde{x}) - [H + F'(x)](x - \tilde{x})\|_2 = \left\| \int_0^1 \{F'[x + t(x - \tilde{x})] - F'(x)\} dt (x - \tilde{x}) \right\|_2 < \varepsilon_0 \cdot \|x - \tilde{x}\|_1. \quad (4)$$

Так как $x^0 \in D(H)$, $[H + F'(x^0)]^{-1}[Hx^0 + F(x^0)] \in D(H)$, а $D(H)$ — линейное многообразие, то $x^{(1)} \in D(H)$. Из (2) и выбора числа α следует, что

$$\|x^{(1)} - x^0\|_1 \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|A(x^0)\|_2 \leq \delta_0 < \frac{\rho}{2} < \rho,$$

т.е. $x^{(1)} \in D(A) = D(H) \cap S(x^0, \rho)$. Тогда справедливо соотношение

$$A(x^{(1)}) = A(x^{(1)}) - A(x^0) - [H + F'(x^0)](x^{(1)} - x^0) + (1 - \frac{1}{\alpha})A(x^0). \quad (5)$$

Из (5) в силу неравенства (4) вытекает

$$\|A(x^{(1)})\|_2 \leq \beta_0 \cdot \|A(x^0)\|_2,$$

где $\beta_0 = 1 - \frac{1}{\alpha}(1 - \varepsilon_0 \gamma) < 1$. Аналогично устанавливается принадлежность $x^{(n+1)}$ при $n = 0, 1, \dots$ области $D(A)$ и оценки

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_1 \leq \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \|A(x^{(n)})\|_2, \quad \|A(x^{(n+1)})\|_2 \leq \beta_0 \cdot \|A(x^{(n)})\|_2.$$

Отсюда и из принципа выбора чисел $\varepsilon_0, \varepsilon$ следует, что все $x^{(n+1)}$ $n = 0, 1, \dots$ принадлежат U^0 и имеет место предельные соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$, $x^* \in S(x^0, \rho)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(x^{(n)})\|_2 = 0$.

Учитывая замкнутость оператора A в области $D(A)$ получим: $x^* \in D(A)$, $A(x^*) = 0$, т.е. x^* является решением уравнения (1). Покажем существование $\delta^* > 0$ при котором в $S(x^*, \delta^*) \subset S(x^0, \rho)$ уравнение (1) не имеет решения отличного от x^* . Так как x^* — внутренняя точка $S(x^0, \rho)$, то найдется $\delta_1 > 0$, при котором $S(x^*, \delta_1) \subset S(x^0, \rho)$. Возьмем $\delta^* = \min(\delta_0, \delta_1)$ и допустим, что в $S(x^*, \delta^*)$ существует решение \tilde{x} . Из равенств $x^* = x^* - [H + F'(x^*)]^{-1}A(x^*)$, $\tilde{x} = \tilde{x} - [H + F'(x^*)]^{-1}A(\tilde{x})$ следует

$$\begin{aligned} x^* - \tilde{x} &= x^* - \tilde{x} - [H + F'(x^*)]^{-1}[A(x^*) - A(\tilde{x})] = \\ &= -[H + F'(x^*)]^{-1} \cdot \left\{ A(x^*) - A(\tilde{x}) - [H + F'(x^*)]^{-1}[x^* - \tilde{x}] \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (4) имеем $\|x^* - \tilde{x}\|_1 \leq \varepsilon_0 \gamma \cdot \|x^* - \tilde{x}\|_1$, где $\varepsilon_0 \gamma < 1$, т.е. $\tilde{x} = x^*$. Одновременно с итерационным процессом (2) рассмотрим

$$\tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{x}^{(n)} - \frac{1}{\alpha + a} [H + F'(\tilde{x}^{(n)})]^{-1} \cdot [H\tilde{x}^{(n)} + F(\tilde{x}^{(n)})],$$

где $\tilde{x}^{(0)} = x^0$, $n = 1, 2, \dots$, $a > 0$ — некоторое число.

Несложно установить, что если $\|x^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_1 < \delta_0$, то

$$\begin{aligned} \|x^{(n+1)} - \tilde{x}^{(n+1)}\|_1 &\leq \beta_0 \cdot \|x^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_1 + \left(\gamma\varepsilon_0 + \frac{a}{\alpha}\right) \frac{\gamma}{\alpha + a} \cdot \|A(\tilde{x}^{(n)})\|_2 \leq \\ &\leq \beta_0^n \cdot \|x^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}\|_1 + n \cdot \beta_1^n \cdot \left(\gamma\varepsilon_0 + \frac{a}{\alpha}\right) \frac{\gamma \|A(x^0)\|_2}{\alpha + a}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta_0 = 1 - \frac{1}{\alpha}(1 - \varepsilon_0 \gamma) < \beta_1 = 1 - \frac{1}{\alpha + a}(1 - \varepsilon_0 \gamma) < 1$. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n \beta_1^n = 0$ и для $\forall \nu_1 > 0$, $\exists N_1$, что для всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $\beta_1^n \cdot n \leq \nu_1$. При выбранном N_1 , легко устанавливается оценка

$$\|x^{(n)} - \tilde{x}^{(n)}\|_1 \leq N_1 \cdot M \cdot \nu(a), \quad n = 1, 2, \dots, N_1,$$

где $\lim_{a \rightarrow 0} \nu(a) = 0$. Выбрав $\nu_1 > 0$ и $a_0 \in (0, 1]$, удовлетворяющими неравенству

$$N_1 \cdot M \cdot \nu(a_0) + \left(\gamma\varepsilon_0 + \frac{a}{\alpha}\right) \nu_1 \cdot \frac{\gamma \|A(x^0)\|_2}{\alpha + a} < \delta_0$$

получим, что $\|x^{(n+1)} - \tilde{x}^{(n+1)}\|_1 < \delta_0$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Переходя к пределу в (6) установим равенство $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{x}$.

Продвигаясь с шагом $a \in (0, 1]$ получим, что все итерационные процессы (2) при $\alpha \geq \alpha_0 \geq 1$ с одним и тем же начальным приближением $x^{(0)} = x^0$ сходятся к одному и тому же предельному элементу $x^* \in S(x^0, \rho)$. Причем для $\forall \varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|x^* - x^0\|_1 \leq \frac{1}{1 - \varepsilon \gamma} \|A(x^0)\|_2. \quad (7)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части неравенства (7) установим оценку (3). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Известно, что демпфирующие множители в итерационных процессах являются основным средством получения нелокальных условий сходимости. Доказанная теорема выделяет условия, при которых итерационные процессы с различными демпфирующими множителями и с одним и тем же начальным приближением сходятся к одному предельному элементу (решению уравнения (1)).

Доказанную теорему 1 применяем к исследованию нелинейной двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (8)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \quad (9)$$

где $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $g : R^{2n} \rightarrow R^n$ непрерывны.

Введем следующие обозначения:

$C([0, T], R^n)$ — пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x(t)\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \max_{i=1, n} |x_i(t)|, \quad S(x_0(t), \rho) = \{x(t) \in C([0, T], R^n) : \|x(t) - x_0(t)\|_1 < \rho\},$$

$$x_0(t) \in C([0, T], R^n), \quad G([0, T], x_0(t), \rho) = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - x_0(t)\| < \rho\},$$

$$G_0(\rho) = \{(y, v) : \|y - x_0(0)\| < \rho, \|v - x_0(T)\| < \rho\}, \quad H = \begin{bmatrix} I_n \frac{d}{dt} \\ O_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} -f(t, x(t)) \\ g[x(0), x(T)] \end{bmatrix},$$

где I_n — единичная матрица размерности n , $O_{n \times n}$ — $n \times n$ — матрица с нулевыми элементами.

Тогда в паре пространств $X = C([0, T], R^n)$, $Y = X \dot{+} R^n$ задача (8), (9) эквивалентна функциональному уравнению (1). Задача (8), (9) рассматривается при следующих предположениях

Условие А. Функции $f(t, x), g(y, v)$ соответственно в $G([0, T], x_0(t), \rho)$, $G_0(\rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x)$, $g'_y(y, v)$, $g'_v(y, v)$ и

$$\|f'_x(t, x)\| \leq L_1, \quad \|g'_y(y, v)\| \leq L_2, \quad \|g'_v(y, v)\| \leq L_3,$$

где $x_0(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ функция, L_i — const, $i = 1, 2, 3$.

С помощью операторов $J_0 : C([0, T], R^n) \rightarrow R^n$, $J_T : C([0, T], R^n) \rightarrow R^n$ определяемых равенствами: $J_0 x(t) = x(0)$, $J_T x(t) = x(T)$ построим $C_{\hat{x}}$ — линейризатор оператора $A(x)$ в точке $\hat{x}(t) \in S(x_0(t), \rho)$. Он имеет следующий вид

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} I_n \frac{d}{dt} \\ O_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f'_x(t, \hat{x}(t)) \\ g'_y[\hat{x}(0), \hat{x}(T)]J_0 + g'_v[\hat{x}(0), \hat{x}(T)]J_T \end{bmatrix}.$$

Разрешимость линейного уравнения

$$C_{\hat{x}} x = y, \quad x \in X, \quad (10)$$

где $y = \begin{bmatrix} \tilde{f}(t) \\ d \end{bmatrix} \in Y$ эквивалентна разрешимости линейной двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f'_x(t, \hat{x}(t))x + \tilde{f}(t), \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$g'_y[\hat{x}(0), \hat{x}(T)]x(0) + g'_v[\hat{x}(0), \hat{x}(T)]x(T) = d. \quad (12)$$

Линейная краевая задача (11), (12) называется корректно разрешимой с константой γ , если для любых $\tilde{f}(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$ задача (11), (12) имеет единственное решение $x(t)$ и справедливо неравенство

$$\max_{t \in [0, T]} \|x(t)\| \leq \gamma \max(\max_{t \in [0, T]} \|\tilde{f}(t)\|, \|d\|),$$

где γ — const, не зависящая от $\tilde{f}(t), d$.

Очевидно, что если задача (11), (12) корректно разрешима с константой γ , то

$$\|C_{\hat{x}}^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq \gamma.$$

Поэтому применяя теорему 1 получим следующее утверждение

Теорема 2. Пусть выполнено условие А и для любого $\hat{x}(t) \in S(x_0(t), \rho)$ линейная двухточечная краевая задача (11), (12) корректно разрешима с константой γ , удовлетворяющей неравенству

$$\gamma \max\left\{\max_{t \in [0, T]} \|\dot{x}_0(t) - f(t, x_0(t))\|, \|g[x_0(0), x_0(T)]\|\right\} < \rho.$$

Тогда нелинейная краевая задача (8), (9) в $S(x_0(t), \rho)$ имеет изолированное решение $x^*(t)$ и существует число $\alpha \geq 1$, что последовательность непрерывно дифференцируемых на $(0, T)$ и непрерывных на $[0, T]$ функций

$$x_{m+1}(t) = x_m(t) + \Delta x_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Delta x_m(t)$ — решение линеаризованной двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f'_x(t, x_m(t))x - \frac{1}{\alpha}[\dot{x}_m(t) - f(t, x_m(t))], \quad (13)$$

$$g'_y[x_m(0), x_m(T)]x(0) + g'_v[x_m(0), x_m(T)]x(T) = -\frac{1}{\alpha}g[x_m(0), x_m(T)] \quad (14)$$

по норме $C([0, T], R^n)$ сходится к $x^*(t)$.

В теореме 2 одним из основных требований является корректная разрешимость соответствующих линеаризованных двухточечных краевых задач (13), (14). Для установления корректной разрешимости линейных задач (11), (12) и оценки ее константы можно использовать метод параметризации (м.п.) [11]. Этот метод также относится к итерационным методам и одновременно с коэффициентными условиями корректной разрешимости задачи позволяет найти приближенное решение линейных двухточечных краевых задач. В то же время м.п. можно также непосредственно применить к нелинейным двухточечным краевым задачам (8), (9).

Возьмем шаг $h > 0$, который ровно N ($N = 1, 2, \dots$) раз укладывается на отрезке $[0, T]$, и по нему произведем разбиение $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh)$. Сужение функции $x(t)$ на r -й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t)$ — вектор-функция размерности n , определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[(r-1)h, rh)$. При этом задача (8), (9) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$g[x_1(0), \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t)] = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = 1, 2, \dots, N-1, \quad (17)$$

где (17) — условия склеивания решения во внутренних точках разбиения. Если $x(t)$ — решение краевой задачи (8), (9), то система его сужений $(x_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$, является решением многоточечной краевой задачи (15)–(17). И наоборот, если система функций $(\tilde{x}_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$, — решение задачи (15)–(17), то функция $\tilde{x}(t)$, получаемая склеиванием этих функций, будет решением исходной краевой задачи.

Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t = (r-1)h$ и на каждом интервале $[(r-1)h, rh)$ произведя замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ получим краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r), \quad u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (18)$$

$$g[\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t)] = 0, \quad (19)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, N-1. \quad (20)$$

Если система функций $(x_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ — решение задачи (15)–(17), то система пар $(\lambda_r = x_r[(r-1)h], u_r(t) = x_r(t) - x_r[(r-1)h])$, $r = 1, 2, \dots, N$ будет решением краевой задачи с параметром (18)–(20), и наоборот: если $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ — решение задачи (18)–(20), то $(\lambda_r + u_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ будет решением многоточечной краевой задачи без параметра (15)–(17). Краевая задача с параметром выгодно отличается от задачи (15)–(17) тем, что здесь появились начальные условия $u_r[(r-1)h] = 0$ и дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций $u_r(t)$ рассматриваются на интервалах длины h . Поэтому при

фиксированных значениях параметра λ_r функцию $u_r(t)$ можно определить из эквивалентных интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh]. \quad (21)$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставляя ему соответствующее выражение получим, что

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + u_r(\tau_2))d\tau_2)d\tau_1.$$

Повторяя этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз для функции $u_r(t)$ установим следующее соотношение

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu) \dots)d\tau_2)d\tau_1. \quad (22)$$

Переходя в правой части (22) к пределу при $t \rightarrow rh - 0$, находим

$$\lim_{t \rightarrow rh-0} u_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

Подставляя их в (19), (20) и умножая обе части (19) на $h > 0$, получаем систему уравнений относительно введенных параметров λ_r , $r = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} &hg[\lambda_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^T f(\tau_1, \lambda_N + \int_{(N-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_N + \dots + \\ &+ \int_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu))d\tau_\nu) \dots)d\tau_2)d\tau_1] = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1, \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_s + \dots + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu))d\tau_\nu) \dots)d\tau_2)d\tau_1] - \\ &-\lambda_{s+1} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что каждое уравнение системы (23), (24) содержит только двух неизвестных: λ_1, λ_N и λ_s, λ_{s+1} . Поэтому для непрерывно дифференцируемых функций g, f при линеаризации (23), (24) получим блочно-ленточную матрицу размерности $nN \times nN$. Систему уравнений (23), (24) запишем в виде одного операторного уравнения

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, для нахождения пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ имеем замкнутую систему уравнений (21), (25). Осуществляя обратный переход от задачи с параметром (18)–(20) к задаче без параметра (15)–(17) и склеивая систему функций $(\lambda_r + u_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ получим решение исходной задачи (8), (9).

Решение многоточечной краевой задачи с параметром (18)–(20) — систему пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = 1, 2, \dots, N$ — найдем по следующему алгоритму

Шаг 0. Начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}$ определяем из уравнения

$$Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0. \quad (26)$$

На отрезках $[(r-1)h, rh)$, решая задачу Коши (18) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим $u_r^{(0)}(t)$.

Шаг 1. Подставляя найденные $u_r^{(0)}(t)$ в (23), (24) из уравнения

$$Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0 \quad (27)$$

определяем $\lambda^{(1)}$. На отрезках $[(r-1)h, rh)$, решая задачу Коши (18) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t)$. И т.д.

Продолжая процесс, на k -м шаге получаем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$ $r = 1, 2, \dots, N$.

Каждый шаг алгоритма содержит два этапа:

- 1) Решение уравнения (25) относительно λ при фиксированном $u_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, N$.
- 2) Решение задачи Коши (18) на отрезках длины $h > 0$ при фиксированных значениях параметра λ .

Возьмем непрерывную на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемую на $(0, T)$ функцию $x_0(t)$. Сужение функции $x_0(t)$ на точки разбиения интервала $[0, T]$ при выбранном шаге $h > 0$ ($Nh = T$) обозначим через x_h^0 , т.е. $x_h^0 \in R^{nN}$ и $x_{hr}^0 = x_0[(r-1)h]$, $r = 1, 2, \dots, N$.

Введем следующие обозначения:

$$\|\lambda_r\| = \max_{i=1, n} |\lambda_{r,i}|, \quad S(x_h^0, \rho_{1,h}) = \{\lambda \in R^{nN} : \|\lambda_r - x_{hr}^0\| < \rho_{1,h}, r = \overline{1, N}\},$$

$$S_h(0, \rho_{2,h}) = \{(u_r(t)), r = \overline{1, N} : \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r(t)\| < \rho_{2,h}\},$$

Достаточные условия существования решения краевой задачи (1), (2), осуществимости и сходимости предложенного алгоритма, а также оценку разности между точным и приближенным (получаемым через k шагов) решениями устанавливает

Теорема 3. Пусть имеет место условие A и при некоторых $h > 0$: $Nh = T$, ν ($\nu = 1, 2, \dots$) матрица Якоби $\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)/\partial \lambda$ обратима для всех $(\lambda, u) \in S(x_h^0, \rho_{1,h}) \times S_h(0, \rho_{2,h})$.

Тогда при выполнении неравенств

$$1) \|\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)/\partial \lambda\|^{-1} \leq \gamma_\nu(h), \quad \gamma_\nu(h) - \text{const},$$

$$2) q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) [e^{L_1 h} - 1 - L_1 h - \dots - \frac{1}{\nu!} (L_1 h)^\nu] < 1,$$

$$3) \frac{1}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) \frac{(L_1 h)^\nu}{\nu!} e^{L_1 h} [L_1 h \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| + h \max_{r=1, n} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|f(t, x_{h,r}^0)\|] +$$

$$+ \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| < \rho_{1,h},$$

$$4) \frac{e^{L_1 h} - 1}{1 - q_\nu(h)} \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) \frac{(L_1 h)^\nu}{\nu!} e^{L_1 h} [L_1 h \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| + h \max_{r=1, n} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|f(t, x_{h,r}^0)\|] +$$

$$+ e^{L_1 h} [L_1 h \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| + h \max_{r=1, n} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|f(t, x_{h,r}^0)\|] < \rho_{2,h},$$

$$5) \rho_{1,h} + \rho_{2,h} \leq \rho$$

нелинейная двухточечная краевая задача (8), (9) в шаре $S(x_0(t), \rho)$ имеет изолированное решение $x^*(t)$ и справедлива оценка

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\|_1 \leq \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) \frac{(L_1 h)^\nu}{\nu!} e^{L_1 h} \frac{[q_\nu(h)]^k}{1 - q_\nu(h)} e^{L_1 h} \times$$

$$\times [L_1 h \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| + h \max_{r=1, n} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|f(t, x_{h,r}^0)\|], \quad (28)$$

где $x^{(k)}(t)$ — кусочно-непрерывно дифференцируемая функция на $[0, T]$, для которой функция $\lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$ является сужением на $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$.

Доказательство теоремы 3. При выполнении условия А матрица Якоби $\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)/\partial \lambda$ является производной Фреше оператора $Q_{\nu,h}(\lambda, 0)$ и она равномерно непрерывна в шаре $S(x_h^0, \tilde{\rho}_{1,h})$, где $\tilde{\rho}_{1,h} < \rho_{1,h}$. Поэтому согласно Теореме 1 уравнение (26) в $S(x_h^0, \tilde{\rho}_{1,h})$ имеет изолированное решение $\lambda^{(0)}$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(0)} - x_h^0\| \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(x_h^0, 0)\| \leq \\ & \leq \gamma_\nu(h) \max \left\{ h \left\| g[x_0(0), x_0(T-h) + \int_{T-h}^T f(\tau_1, x_0(T-h) + \dots + \int_{T-h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x_0(T-h)) d\tau_\nu) \dots] d\tau_1 \right\|, \right. \\ & \quad \max_{s=\overline{1, N-1}} \left\| x_0[(s-1)h] - x_0(sh) + \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1, x_0[(s-1)h] + \dots + \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, x_0[(s-1)h]) d\tau_\nu) \dots] d\tau_1 \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Решая интегральные уравнения (21) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ найдем функции $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$, определенные на интервалах $[(r-1)h, rh)$. Причем

$$\begin{aligned} \|u_r^{(0)}(t)\| & \leq \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, u_r^{(0)}(\tau) + \lambda_r^{(0)}) d\tau - \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| + \\ & + \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \leq L_1 \int_{(r-1)h}^t \|u_r^{(0)}(\tau)\| d\tau + \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\| \end{aligned}$$

и применяя лемму Гронуолла-Беллмана имеем

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \leq e^{L_1 h} \left\| \int_{(r-1)h}^t f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \right\|. \quad (30)$$

Вновь используя итерационный процесс теоремы 1 найдем $\lambda^{(1)}$ — решение уравнения (27) и установим оценку

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| & \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| = \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, 0)\| \leq \\ & \leq \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) \frac{(L_1 h)^\nu}{\nu!} \max_r \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|u_r^{(0)}(t)\|. \end{aligned} \quad (31)$$

Решая уравнения (21) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$ получим $u_r^{(1)}(t)$ и оценки

$$\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \leq (e^{L_1[t-(r-1)h]} - 1) \|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|. \quad (32)$$

Аналогично (31), (32) устанавливаются неравенства

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| & \leq \gamma_\nu(h) \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k-1)})\| \leq \gamma_\nu(h) \max(1, L_3 h) \times \\ & \times \max_{r=\overline{1, N}} \left\| \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau_1, \lambda_r^{(k)} + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(k)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(k)}(\tau_\nu)) d\tau_\nu) \dots] d\tau_1 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{(r-1)h}^{rh} f(\tau_1, \lambda_r^{(k)} + \int_{(r-1)h}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r^{(k)} + \dots + \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(k-1)}(\tau_\nu)) d\tau_\nu) \dots) d\tau_1 \leq \gamma_\nu(h) \times \\
& \times \max(1, L_3 h) \max_{r=\overline{1, N}} \int_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int_{(r-1)h}^{\tau_1} L_1 \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} L_1 \|u_r^{(k)}(\tau_\nu) - u_r^{(k-1)}(\tau_\nu)\| d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \leq (e^{L_1[t-(r-1)h]} - 1) \|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\|. \quad (34)$$

Подставляя (34) в правую часть неравенства (33) и вычисляя повторные интегралы получим основное неравенство

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \leq q_\nu(h) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|. \quad (35)$$

В силу условия $q_\nu(h) < 1$ и неравенств (31), (32), (34), (35) следует сходимость предложенного алгоритма и оценка (28).

Докажем изолированность решения $x^*(t) \in S(x_0(t), \rho)$. Возьмем число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющим неравенствам

$$\varepsilon \gamma_\nu(h) < 1, \quad q_\nu(h) < 1 - \varepsilon \gamma_\nu(h) \quad (36)$$

и по нему в силу равномерной непрерывности $\partial Q_{\nu, h}(\lambda, u)/\partial \lambda$ в $S(x_h^0, \rho_{1, h}) \times S_h(0, \rho_{2, h})$ найдем $\delta > 0$, при котором

$$\|\partial Q_{\nu, h}(\lambda, u)/\partial \lambda - \partial Q_{\nu, h}(\lambda^*, u^*)/\partial \lambda\| < \varepsilon$$

для всех $(\lambda, u) \in S(\lambda^*, \delta) \times S_h(u^*, \delta)$, где $\lambda_r^* = x^*[(r-1)h]$, $u_r^*(t) = x^*(t) - \lambda_r^*$, $r = \overline{1, N}$ и $S_h(u^*, \delta) = \{(u_r(t)), r = \overline{1, N} : \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r(t) - u_r^*(t)\| < \delta\}$.

Пусть $\tilde{x}(t) \in S(x^*, \delta) \subseteq S(x_0(t), \rho)$ решение задачи (8), (9). Тогда система пар $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{u}_r(t))$, $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}[(r-1)h]$, $\tilde{u}_r(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$ будет решением краевой задачи с параметром (18), (19). При нашем выборе чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ аналогично неравенствам (34), (35) устанавливаются оценки

$$\|\tilde{u}_r(t) - u_r^*(t)\| \leq (e^{L_1[t-(r-1)h]} - 1) \|\tilde{\lambda}_r - \lambda_r^*\|,$$

$$\|\tilde{\lambda} - \lambda^*\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon \gamma_\nu(h)} q_\nu(h) \|\tilde{\lambda} - \lambda^*\|.$$

Отсюда в силу неравенства (36) следует, что $\lambda_r = \lambda_r^*$, $\tilde{u}_r(t) = u_r^*(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 3 устанавливает достаточные условия применимости м.п. к нелинейной двухточечной краевой задаче (8), (9).

Алгоритм м.п. зависит от двух параметров:

- 1) шага разбиения — $h > 0$,
- 2) количества внутренних суперпозиций — ν .

Выбор этих параметров зависит от конкретных видов правой части дифференциального уравнения (8) и граничных условий (9).

Суть м.п. заключается в том, что интервал, где рассматривается дифференциальное уравнение разбивается на части с шагом $h > 0$ и исходная задача сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром. При этом дифференциальные уравнения с параметрами отдельно рассматриваются на интервалах длины $h > 0$, а склеивание решений, определенных на этих интервалах и выполнение краевых условий обеспечиваются с помощью введенных параметров.

Теорема 3 без доказательства была анонсирована в [12].

Цитированная литература

1. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев, 1992.
2. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва, 1975.
3. **Канторович Л. В.** // Доклады АН СССР. 1948. Т. 59, №. 6. С. 1237 – 1248.
4. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. Москва, 1977.
5. **Яковлев М. Н.** // Ученые записки ЛОМИ. 1980. Т. 102. С. 156 – 173.
6. **Джумабаев Д. С.** // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. №. 1. С. 31 – 34; Amer. Math. Soc. Transl. 1989. V. 142, №. 2. С. 91 – 94.
7. **Джумабаев Д. С.** // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. №. 3. С. 27 – 31; Amer. Math. Soc. Transl. 1989. V. 142, №. 2. С. 95 – 99.
8. **Джумабаев Д. С.** // Мат. заметки. 1987. Т. 41, Вып. 3. С. 637– 645.
9. **Джумабаев Д. С.** // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1988. №. 5. С. 24– 28.
10. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, №. 1. С. 156 – 173.
11. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №. 1. С. 50 – 66.
12. **Джумабаев Д. С.** // Известия МН – АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. №. 5. С. 17 – 23.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.5

ПРОИЗВОДНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

А. А. ЖЕНСЫКБАЕВ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, azh@math.kz

Найдены необходимые и достаточные условия того, что производные чебышевской системы являлись чебышевскими системами соответствующего типа. Получены условия разрешимости интерполяционной задачи биргоффова типа.

1. Определения. Приведем определения различных систем функций и их свойства, которые нам потребуются в дальнейшем. Систематическое изложение теории чебышевских систем можно найти, например, в монографиях С. Карлина и В. Стаддена [1], М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [2], Л. Л. Шумейкера [3].

Пусть $U_m = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ — некоторая система функций, заданных на множестве $M \subset \mathbb{R}$. Запись $U_m \subset \mathcal{M}$ означает, что $u_i \in \mathcal{M}$ ($i = 1 : m$), а

$$U_m^{(s)} = \{u_1^{(s)}(t), \dots, u_m^{(s)}(t)\}.$$

Определение 1. Система U_m непрерывных на M функций называется чебышевской или T -системой размерности m , если для любых $t_1 < \dots < t_m$ ($t_i \in M$)

$$U_m(t_1, \dots, t_m) := \begin{vmatrix} u_1(t_1) & \dots & u_1(t_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_m(t_1) & \dots & u_m(t_m) \end{vmatrix} > 0.$$

Определение 2. Система $U_m \subset C^{n-1}(M)$ называется обобщенной чебышевской или ET -системой порядка n размерности m ($1 \leq n \leq m$), если для любых $t_1 < \dots < t_m$ ($t_i \in M$) и натуральных чисел m_1, \dots, m_k ($m_i \leq n$, $\sum_{i=1}^k m_i = m$)

$$U_m \left(\begin{matrix} t_1, & \dots, & t_k \\ m_1, & \dots, & m_k \end{matrix} \right) := \begin{vmatrix} u_1(t_1) \dots u_1^{(m_1-1)}(t_1) \dots u_1(t_k) \dots u_1^{(m_k-1)}(t_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m(t_1) \dots u_m^{(m_1-1)}(t_1) \dots u_m(t_k) \dots u_m^{(m_k-1)}(t_k) \end{vmatrix} > 0.$$

Если $n = m$, то U_m называют просто ET -системой размерности m (при $n = 1$ мы получаем определение T -системы).

Определение 3. Система U_m ограниченных и линейно независимых на M функций называется слабой чебышевской или WT -системой размерности m , если для любых $t_1 < \dots < t_m$ ($t_i \in M$)

$$U_m(t_1, \dots, t_m) \geq 0.$$

Определение 4. Система U_m называется полной чебышевской, или системой Маркова, или CT -системой (ECT -, WCT -системой) размерности m , если для всех $k = 1 : m$ функции $\{u_1, \dots, u_k\}$ образуют T -систему (ET -, WT -систему) на M .

Определение 5. Конечномерное линейное пространство непрерывных на M функций называется чебышевским или T -пространством, если оно содержит базис, являющийся на M T -системой той же размерности.

Аналогичным образом определяются CT -, ET -, WT -пространства.

2. Свойства систем. Мы приведем сводку необходимых нам свойств введенных систем функций, а за доказательством отсылаем к упомянутым монографиям [1–3].

Из приведенных определений следует, что ET -система порядка k является ET -системой порядка $k - 1$ ($k > 1$), а T -система является WT -системой.

Любая WT -система всегда может быть преобразована в WCT -систему [3, §2.6].

Предложение 1. Для любой WT -системы U_m на M найдется система $V_m \subset \text{span } U_m$, являющаяся WCT -системой на M , и $\text{span } V_m = \text{span } U_m$ ($\text{span } G$ – линейная оболочка системы G).

Для T -систем это, вообще говоря, неверно. Примером тому является T -система $\{\sin t, \cos t\}$ на полуинтервале $[0, \pi)$. Она не может быть преобразована в CT -систему на $[0, \pi)$. Однако на интервале это сделать можно [3, §2.5].

Предложение 2. Для любой T -системы U_m на (a, b) найдется система $V_m \subset \text{span } U_m$, являющаяся CT -системой на (a, b) , и $\text{span } V_m = \text{span } U_m$.

Возникает вопрос: нельзя ли ввести понятие EWT -системы порядка k по аналогии с определением 2? Следующее утверждение показывает, что для заданных на отрезке функций это делать нецелесообразно [1, с.18].

Предложение 3. Если система U_m функций из $C^{n-1}[a, b]$ является слабой чебышевской на $[a, b]$, то для любых $a \leq t_1 < \dots < t_k \leq b$ и натуральных m_1, \dots, m_k ($m_i \leq n$, $i = 1 : k$; $\sum_{i=1}^k m_i = m$)

$$U_m \begin{pmatrix} t_1, & \dots, & t_k \\ m_1, & \dots, & m_k \end{pmatrix} \geq 0.$$

На $[0, 1]$ ECT -системы имеют следующее аналитическое представление [1, §11.1].

Предложение 4. ECT -система $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ на $[0, 1]$, удовлетворяющая условиям

$$u_i^{(j)}(0) = 0 \quad i = 2 : m, \quad j = 0 : i - 1, \quad (1)$$

представима в виде

$$u_1(t) = w_1(t),$$

$$u_2(t) = w_1(t) \int_0^t w_2(x_1) dx_1,$$

$$u_m(t) = w_1(t) \int_0^t w_2(x_1) dx_1 \dots \int_0^{x_{m-2}} w_m(x_{m-1}) dx_{m-1} \dots dx_1,$$

где $w_i \in C^{m-i}$ ($i = 1 : m$) строго положительны на $[0, 1]$.

Обратно, совокупность функций вида (2) образует ECT-систему на $[0, 1]$ при любых строго положительных на $[0, 1]$ $w_i \in C^{m-i}$ ($i = 1 : m$).

3. Аппроксимация WT-систем. Пусть функция f задана на множестве $M \subset \mathbb{R}$. Если $M \neq \mathbb{R}$, то доопределим ее на \mathbb{R} , положив $f(t) = 0$, $t \in \mathbb{R} \setminus M$.

Преобразованием Гаусса функции f называется свертка

$$G_\varepsilon(f, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(x-t)^2/\varepsilon} dt.$$

Естественно, мы рассматриваем те функции f , для которых эта свертка существует при всех $x \in \mathbb{R}$. Если, например, f локально интегрируема и $|f(t)| \leq ct^s$ при $|t| \geq a$ для некоторых c, s, a , то $G_\varepsilon(f, x)$ является аналитической функцией и в каждой точке x непрерывности f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_\varepsilon(f, x) = f(x).$$

Если же f имеет локально интегрируемую производную и $|f'(t)| \leq ct^s$ при $|t| \geq a$, то

$$G'_\varepsilon(f, x) = G_\varepsilon(f', x). \quad (3)$$

С помощью преобразования Гаусса можно аппроксимировать WT-системы ET-системами аналитических функций (см., например, [1, §3.4; 2, §2.3]).

Предложение 5. Если $U_m = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ есть WT-система на множестве $M \subset \mathbb{R}$, то преобразование Гаусса

$$G_\varepsilon(U_m) = \{G_\varepsilon(u_1), \dots, G_\varepsilon(u_m)\}$$

является ET-системой на \mathbb{R} и в каждой точке t непрерывности

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_\varepsilon(U_m, t) = U_m(t).$$

Если U_m непрерывна на $[a, b]$, то $G_\varepsilon(U_m)$ сходится равномерно к U_m на любом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$.

В связи с аппроксимацией WT-систем нам потребуется простая

Лемма 1. Пусть $U_m = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ — совокупность линейно независимых на $M \subset \mathbb{R}$ функций и последовательности $\{u_{in}\}$ ($i = 1 : m$) сходятся поточечно на M :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{in}(t) = u_i(t) \quad t \in M, \quad i = 1 : m.$$

Если последовательность $\{v_n\}$,

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^m a_{in} u_{in}(t),$$

равномерно ограничена на M ,

$$\sup (|v_n(t)| \mid t \in M) \leq K < \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то коэффициенты a_{in} ограничены в совокупности:

$$|a_{in}| \leq A < \infty, \quad i = 1 : m, n = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, из $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу из $\text{span } U_m$. Эта сходимостъ будет равномерной на M , если $\{u_{in}\} \Rightarrow u_i$ ($i = 1 : m$) на M .

Доказательство. Допустим противное: хотя бы одна из последовательностей a_{in} не ограничена. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad a_n = \max (|a_{1n}|; \dots; |a_{mn}|).$$

Не уменьшая общности рассуждений, предположим, что $a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и $a_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательности $\{b_{in} = a_{in}/a_n\}$ ограничены: $|b_{in}| \leq 1$. Поэтому из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности, причем так, что одна из них сходится к ± 1 . Пусть для простоты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{in} = b_i, \quad i = 1 : m; \exists i : |b_i| = 1.$$

В силу линейной независимости U_m найдется точка $t_0 \in M$, в которой

$$\sum_{i=1}^m b_i u_i(t_0) \neq 0.$$

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^m b_{in} u_{in}(t_0) = \infty,$$

что противоречит ограниченности последовательности $\{v_n(t_0)\}$. Лемма 1 доказана.

4. Интерполяционные свойства ET -пространств. Из определения 2 следует, что в ET -пространствах порядка n ($n \geq 1$) разрешима задача эрмитовой интерполяции.

Предложение 6. Для любых точек

$$0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$$

натуральных чисел m_1, \dots, m_k ($m_i \leq n$, $i = 1 : k$; $\sum_{i=1}^k m_i = m$) в ET -пространстве из C^{n-1} порядка n размерности m существует единственный элемент u , интерполирующий числа y_{ij} :

$$u^{(j)}(t_i) = y_{ij}, \quad i = 1 : k, j = 0 : m_i - 1. \quad (4)$$

Очевидно и обратное утверждение: если для любых точек $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$ и натуральных чисел m_1, \dots, m_k ($m_i \leq n$, $i = 1 : k$; $\sum_{i=1}^k m_i = m$) и любых y_{ij} в линейном m -мерном пространстве $X \subset C^{n-1}$ найдется элемент u , удовлетворяющий требованиям (4), то X есть ET -пространство порядка n размерности m .

Из предложения 1 следует, что если $U_m \subset C^{n-1}$ есть ET -система порядка n размерности m , то

$$z(u, [0, 1]) < m \quad \forall u \in \text{span } U_m, \quad (5)$$

где $z(f, M)$ — количество нулей функции f на множестве M с учетом их кратности.

Рассмотрим теперь интерполяционную задачу Эрмита-Биркгоффа. Пусть X — линейное m -мерное подпространство функций из C^{m-1} , A и B — заданные множества из \mathbf{Z}_n ,

$$\mathbf{Z}_r = \{0, \dots, r-1\}, \quad \mathbf{Z}_0 = \emptyset,$$

$|A| + |B| \leq m$ (они могут быть и пусты), где $|M|$ — количество элементов множества M ($|M| = 0 \Leftrightarrow M = \emptyset$). При $|A| + |B| < m$ зададим точки

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$$

и натуральные числа m_1, \dots, m_k ($m_i \leq n$, $i = 1 : k$),

$$m_1^k := \sum_{i=1}^k m_i = m - |A| - |B|.$$

Требуется указать условия, при которых в X существует элемент x , интерполирующий любые наперед заданные значения y_{ij} :

$$x^{(j)}(t_i) = y_{ij}, \quad i = 0 : k+1, \quad j \in J_i, \quad (6)$$

где $J_0 = A$, $J_{k+1} = B$, $J_i = \mathbf{Z}_{m_i}$ ($i = 1 : k$) (при $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$, или $|A| + |B| = m$ соответствующие требования в (6) снимаются).

Решение этой задачи очевидно: если $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ — базис в X , то задача (6) разрешима в X тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель

$$\Delta = U_m \begin{pmatrix} 0, & t_1, & \dots, & t_k, & 1 \\ A, & m_1, & \dots, & m_k, & B \end{pmatrix} \quad (7)$$

системы уравнений (6) относительно коэффициентов c_i , где

$$x(t) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(t).$$

Ниже мы укажем одно достаточное условие разрешимости задачи (6). Для этого докажем сначала разрешимость соответствующей интерполяционной задачи для алгебраических полиномов π_{m-1} степени не выше $m-1$.

Теорема 1. *Для того чтобы в π_{m-1} существовал многочлен, интерполирующий любые наперед заданные значения y_{ij} , необходимо и достаточно выполнение условий Поля:*

$$m_1^k + |A \cap \mathbf{Z}_j| + |B \cap \mathbf{Z}_j| =: z_j \geq j, \quad j = 1 : m. \quad (8)$$

Если условия (8) выполняются, то интерполяционный полином в π_{m-1} единствен.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняются условия (8). Тогда определитель Δ системы уравнений

$$P^{(j)}(t_i) = y_{ij}, \quad i = 0 : k+1, \quad j \in J_i, \quad P(t) = \sum_{s=0}^{m-1} c_s t^s \quad (9)$$

относительно коэффициентов c_s , отличен от нуля.

Действительно, если $\Delta = 0$ и $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_{m-1}$ — ненулевое решение соответствующей однородной системы уравнений, то многочлен

$$\bar{P}(t) = \sum_{s=0}^n \bar{c}_s t^s \neq 0, \quad n = \max(j : \bar{c}_j \neq 0),$$

имеет на $(0, 1)$ по меньшей мере m_1^k нулей с учетом кратности и $\bar{P}^{(a)}(0) = \bar{P}^{(b)}(1) = 0$ ($a \in A$, $b \in B$). Применяя к \bar{P} теорему Ролля, с учетом (8) заключаем, что производная $\bar{P}^{(n)}(t) \equiv n! \bar{c}_n$ должна обращаться в нуль в некоторой точке $\xi \in (0, 1)$. Полученное противоречие и показывает, что $\Delta \neq 0$.

Таким образом, при выполнении условий (8) во множестве π_{m-1} существует единственный многочлен, удовлетворяющий интерполяционным требованиям (6).

Необходимость. Пусть интерполяционная задача (6) разрешима для всех y_{ij} . Тогда соответствующая (9) однородная система уравнений ($y_{ij} = 0$) должна иметь лишь тривиальное решение $P(t) \equiv 0$.

Допустив, что условия (8) не выполняются, во множестве π_{m-1} найдем многочлен $\bar{P} \neq 0$, удовлетворяющий (9) при всех $y_{ij} = 0$.

Пусть \bar{n} — минимальное число, для которого нарушается соотношение (8). Так как (8) верно для $n = m_1^k$, то $\bar{n} > m_1^k$ и для $\bar{n} - 1$ условия (8) выполняются. Поэтому

$$\bar{n} > z_{\bar{n}} \geq z_{\bar{n}-1} \geq \bar{n} - 1,$$

и, следовательно, $z_{\bar{n}} = z_{\bar{n}-1} = \bar{n} - 1$ и $\bar{n} - 1 \notin A \cup B$. Многочлен $\bar{P} \in \pi_{\bar{n}-1}$ однозначно определим из условий

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(j)}(t_i) &= 0 \quad i = 1 : k, \quad j = 0 : m_i - 1 : \quad \bar{P}^{(\bar{n}-1)}(0) = 1, \\ \bar{P}^{(a)}(0) &= 0, \quad a \in A \cap \mathbf{Z}_{\bar{n}}; \quad \bar{P}^{(b)}(1) = 0, \quad b \in B \cap \mathbf{Z}_{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Существование многочлена \bar{P} в $\pi_{\bar{n}-1}$ следует из достаточности доказываемой теоремы: интерполяционные требования для \bar{P} удовлетворяют условиям (8), где вместо m взято \bar{n} . Так как $\bar{n} - 1 \notin A \cup B$, то $\bar{P}^{(j)}(t_i) = 0$ ($i = 0 : k + 1$, $j \in J_i$) и $\bar{P} \neq 0$. Полученное противоречие и доказывает необходимость выполнения условий (8). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условия (8) эквивалентны следующим требованиям:

$$m - 1 \notin A \cap B, \quad z_j > j, \quad j \in \mathbf{Z}_{m-3} \setminus (A \cup B).$$

Замечание 2. Условия (8) выполняются, если, в частности,

$$A = \mathbf{Z}_a, \quad B = \mathbf{Z}_b \quad (a, b \geq 0) \text{ или } m_1^k \geq m - 1.$$

Определение 6. WT -система $U_m \subset C^s$ (ET -система порядка n , $n > s$) называется WT_s -системой (ET_s -системой порядка n) размерности m , если $\text{span } U_m^{(s)}$ есть WT -пространство (ET -пространство порядка $n - s$) размерности $m - s$.

Ясно, что ET_s -система порядка n ($n \geq 1$) является WT_s -системой. Покажем сначала, что WT_s -пространство содержит множество многочленов π_{s-1} .

Лемма 2. Если U_m есть WT_s -система, то $\pi_{s-1} \subset \text{span } U_m$.

Доказательство. По предложению 5 преобразования Гаусса $G_\varepsilon(U_m)$ системы $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ есть ET -система, а $\text{span } G_\varepsilon(U_m^{(s)})$ есть ET -пространство размерности $m - s$.

Зафиксируем произвольно точки $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$. Согласно предложению 6, в $G_\varepsilon(U_m)$ существует единственный элемент

$$v_{j\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^m c_{ij}(\varepsilon) u_{i\varepsilon}(t), \quad u_i(t) = G_\varepsilon(u_i),$$

интерполирующий функцию t^j в точках t_i :

$$v_{j\varepsilon}(t_i) = t_i^j, \quad i = 1 : m, \quad 0 \leq j < s.$$

Если $h_{j\varepsilon}(t) = t^j - v_{j\varepsilon}(t) \neq 0$, то $z_m(h_{j\varepsilon}) \geq m$. По теореме Ролля $z_{m-s}(h_{j\varepsilon}^{(s)}) \geq m - s$, а в силу (3) $h_{j\varepsilon}^{(s)} \in \text{span } G_\varepsilon(U_m^{(s)})$. Поэтому согласно (5) $z_{m-s}(h_{j\varepsilon}^{(s)}) < m - s$. Полученное противоречие доказывает, что $h_{j\varepsilon}(t) \equiv 0$.

Итак, $v_{j\varepsilon}(t) \equiv t^j$ ($j = 0 : s - 1$). Положим $\varepsilon = 1/n$,

$$c_{jn} = \sum_{i=1}^m |c_{ij}(\varepsilon)|, \quad d_{ijn} = c_{ij}/c_{jn}, \quad v_{jn} = v_{j\varepsilon}/c_{jn}.$$

Согласно лемме 1 с учетом предложения 5 из $\{v_{jn}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть для простоты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{jn}(t) = v_j(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_{ijn} = d_{ij}.$$

Ясно, что $\sum_{i=1}^m |d_{ij}| \neq 0$. Поэтому и в силу линейной независимости системы U_m

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^m d_{ij}u_i(t) \neq 0.$$

С другой стороны,

$$v_j(t) = t^j / \lim_{n \rightarrow \infty} c_{jn}.$$

Следовательно, $t^j \in \text{span } U_m$ ($j = 0 : s - 1$). Лемма 2 доказана.

Теперь мы можем установить следующее достаточное условие разрешимости задачи (6).

Теорема 2. Пусть даны ET_s -система U_m порядка n размерности m на $[0, 1]$ ($1 \leq n \leq m$, $0 \leq s \leq n$), целые числа $s_1, s_2 \in [s, n]$ и множества $A_0, B_0 \subset \mathbf{Z}_s$ (они могут быть и пусты)

$$A = A_0 \cup (\mathbf{Z}_{s_1} \setminus \mathbf{Z}_s), \quad B = B_0 \cup (\mathbf{Z}_{s_2} \setminus \mathbf{Z}_s).$$

Для того чтобы в $\text{span } U_m$ существовал элемент x , удовлетворяющий требованиям (6) при любых наперед заданных y_{ij} , необходимо и достаточно выполнение условий Поля:

$$\sum_{i=1}^k m_j + |A_0 \cap \mathbf{Z}_j| + |B_0 \cap \mathbf{Z}_j| \geq j, \quad j = 1 : s. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть выполняются условия (8). Покажем, что определитель (7) системы уравнений (6) отличен от нуля. Положим противное: $\Delta = 0$. Тогда задача (6) с нулевой правой частью имеет ненулевое решение $u_0(t) \neq 0$, $u_0 \in \text{span } U_m$. Если $u_0^{(s)}(t) \equiv 0$, то $u_0 \in \pi_{s-1}$, и с учетом (8) по теореме 1 заключаем, что $u_0 \equiv 0$. Если же $u_0^{(s)} \neq 0$, то по теореме Ролля находим, что $z(u_0^{(s)}, [0, 1]) \geq m - s$. А так как $u_0^{(s)} \in \text{span } U_m^{(s)}$ и $\text{span } U_m$ есть ET -пространство порядка $n - s$ размерности $m - s$, то из (5) следует, что $z(u_0^{(s)}, [0, 1]) < m - s$. Таким образом, $\Delta \neq 0$.

Необходимость выполнения условий (10) вытекает из леммы 2 и необходимости условий (8) в теореме 1: при нарушении хотя бы одного из требований (10) в $\pi_{s-1} \subset \text{span } U_m$ найдется нетривиальный многочлен u , удовлетворяющий системе уравнений (7) с нулевой правой частью. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 2 $u^{(a)}(0) = u^{(b)}(1) = 0$ ($a \in A$, $b \in B$), $u \in \text{span } U_m$, то

$$z(u, [0, 1]) < m - |A| - |B|. \quad (11)$$

5. Критерии ET - и WT -пространств. Доказательство следующих двух утверждений можно найти, например, в [3, гл. 2].

Предложение 7. *Линейное m -мерное пространство $X \subset C^{n-1}$ ($X \subset \tilde{C}^{n-1}$) является ET -пространством порядка n размерности m , $1 \leq n \leq m$, тогда и только тогда, когда*

$$z(u, [0, 1]) < m \quad \forall u \in X. \quad (12)$$

Предложение 8. *Линейное m -мерное пространство X ограниченных на M функций является WT -пространством тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(u, M) < m \quad (\sigma(u) < m) \quad \forall u \in X, \quad (13)$$

где $\sigma(f, G)$ — количество перемен знака f на G :

$$\sigma(f, G) = \sup (n \mid \exists t_1 < \dots < t_{n+1} \in G : f(t_i)f(t_{i+1}) < 0, \quad i = 1 : n),$$

$$\sigma(f, G) = 0, \quad \text{если } f \text{ не меняет знак на } G.$$

Из предложения 4 очевидно вытекает критерий для ECT -пространств.

Предложение 9. *Линейное m -мерное пространство X функций из C^{m-1} является ECT -пространством размерности m тогда и только тогда, когда в X найдется совокупность функций $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$, представимых в виде (2).*

Действительно, если X является ECT -пространством, то в нем найдется базис $\{v_1, \dots, v_m\}$, образующий ECT -систему. Совокупность функций

$$u_1(t) = v_1(t), \quad u_k(t) = v_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik}v_i(t), \quad k = 2 : m, \quad (14)$$

где c_{ik} однозначно определяются из требований (1), образует ECT -систему, удовлетворяющую условиям предложения 4 и, следовательно, имеющую представление (2). То, что коэффициенты c_{ik} однозначно определяются из уравнений (14), следует из положительности определителя, соответствующего системе уравнений (14), ибо функции $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ образуют ET -систему размерности $k - 1$.

Определение 7. *Совокупность $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ заданных на M функций называется ECT_s -системой (WCT_s -системой), если $\{u_1, \dots, u_k\}$ есть ET_s -система (WT_s -система) размерности k для всех $k = s + 1 : m$.*

Теорема 3. *Для того чтобы m -мерное линейное пространство $X \subset C^{m-1}$ было ECT_s -пространством ($0 < s < m$), необходимо и достаточно существование в X базиса $E_m = \{e_1, \dots, e_m\}$, являющегося ECT -системой с $e_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$).*

Доказательство . Достаточность. Пусть $E_m = \{e_1, \dots, e_m\}$ — базис в X , являющийся ECT -системой размерности m с $e_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$). По аналогии с (14) его легко преобразовать в ECT -систему $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$, удовлетворяющую условиям (1), и $u_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$). Согласно предложению 4 элементы u_i имеют представление (2). А так как $u_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$), то $w_i(t) \equiv const$ ($i = 1 : s$). Поэтому

$$u_{s+1}^{(s)}(t) = cw_{s+1}(t),$$

$$u_{s+2}^{(s)}(t) = cw_{s+1}(t) \int_0^t w_{s+2}(x_1) dx_1,$$

.....

$$u_m^{(s)}(t) = cw_{s+1}(t) \int_0^t w_{s+2}(x_1) dx_1 \dots \int_0^{x_{m-2}} w_m(x_{m-1}) dx_{m-1} \dots dx_{s+1},$$

По второму утверждению предложения 4 производные $\{u_{s+1}^{(s)}, \dots, u_m^{(s)}\}$ образуют ECT -систему размерности $m - s$. Следовательно, X есть ECT_s -пространство.

Необходимость. Пусть X есть ECT_s -пространство размерности m . По лемме 8 $\pi_{s-1} \subset X$, ибо X является и WCT_s -пространством.

Через $\{v_1, \dots, v_{m-s}\}$ обозначим ECT -систему в пространстве производных $X^{(s)} = \{x^{(s)} : x \in X\}$. Тогда функции

$$u_j(t) = t^{j-1}, \quad u_i(t) = \frac{1}{s!} \int_0^1 v_{i-s}(y)(t-y)_+^{s-1} dy, \quad i = s+1 : m, \quad j = 1 : s, \quad (15)$$

лежат в X и линейно независимы. Покажем, что $\{u_{k+1}^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}\}$ является ECT -системой размерности $m - k$ ($k = 0 : s$).

Действительно, предположим противное: найдется такое j , что $U_{kj} = \{u_{k+1}^{(k)}, \dots, u_{k+j}^{(k)}\}$ не является ET -системой размерности j . Ясно, что $k + j > s$, ибо

$$u_{k+i}^{(k)} = t^{i-1}(k+i-1)!/(i-1)! \quad (i = 1 : s-k).$$

В силу предложения 7 в $\text{span } U_{kj}$ найдется элемент v такой, что $z_j(v, [0, 1]) \geq j$. По теореме Роля

$$z_{j-s+k}(v^{s-k}) \geq j - s + k.$$

С другой стороны, $v^{(s-k)} \in \text{span } \{v_1, \dots, v_{j-s+k}\}$, и по предложению 7

$$z_{j-s+k}(v^{s-k}) < j - s + k.$$

Полученное противоречие показывает, что U_{kj} является ET -системой при любых $k = 0 : s$ и $j = 1 : m - k$. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. Если $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ есть ECT -система на $[0, 1]$ размерности m и $u_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$; $s \leq m$), то производные $U_{m-k}^{(k)} = \{u_{k+1}^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}\}$ образуют ECT -систему размерности $m - k$ ($k = 1 : s$).

Доказательство. Пусть s фиксировано. При $m = s$ следствие 2 очевидно. Пусть оно верно для $m = s + n$. Докажем его справедливость при $m = s + n + 1$.

Функции $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ удовлетворяют условиям следствия, так как U_m есть ECT -система. Согласно предположению индукции производные $\{u_{k+1}^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}\}$ образуют ECT -систему размерности $m - 1 - k$ ($k = 1 : s$). С другой стороны, в силу теоремы 3 $\text{span } U_{m-k}^{(k)}$ есть ECT -пространство размерности $m - k$. Поэтому либо $U_{m-k}^{(k)}$, либо $\bar{U}_{m-k}^{(k)} = \{u_{k+1}^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}, -u_m^{(k)}\}$ является ECT -системой. В соответствии с определением 6 нам достаточно показать, что хотя бы для одного набора точек $t_1 < \dots < t_l$ и чисел m_1, \dots, m_l ($\sum_{i=1}^l m_i = m - k$) определитель $U_{m-k}^{(k)} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_l \\ m_1 & \dots & m_l \end{pmatrix}$ положителен.

Зафиксировав точку t , возьмем $l = 1$, $t_1 = t$, $m_1 = m - k$ и покажем, что $U_{m-k}^{(k)} \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix} > 0$.

Учитывая, что $u_j^{(i)} \equiv 0$ ($i = j : m - 1$, $j = 1 : s$), находим

$$U_{m-k}^{(k)} \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = k!(k+1)! \dots (s-1)! \Delta, \quad 1 \leq k < s,$$

$$U_{m-s}^{(s)} \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \Delta, \quad U_m \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = 1!2! \dots (s-1)! \Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{s+1}^{(s)}(t) & \dots & u_{s+1}^{(m-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_m^{(s)}(t) & \dots & u_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Определитель $U_m \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ положителен, ибо U_m есть ECT -система. Поэтому $\Delta > 0$ и, следовательно, $U_{m-k}^{(k)} \begin{pmatrix} t_1 \\ m_1 \end{pmatrix} > 0$. Следствие 2 доказано.

Теорема 4. Для того чтобы линейное m -мерное пространство $X \subset C^s$ было WT_s -пространством ($0 < s < m$), необходимо и достаточно существование в X базиса $E_m = \{e_1, \dots, e_m\}$, являющегося WCT -системой на $[0, 1]$ с $e_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$).

При этом $E_{m-k}^{(k)} = \{e_{k+1}^{(k)}, \dots, e_m^{(k)}\}$ есть WCT -система размерности $m - k$ ($k = 1 : s$).

Доказательство. Необходимость устанавливается точно так же, как в доказательстве теоремы 3. Докажем остальные утверждения.

Пусть E_m есть WCT -система с $e_j(t) = t^{j-1}$ ($j = 1 : s$). Положим

$$u_1(t) \equiv 1,$$

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e_i(1), & t > 1, \\ e_i(t) - e_i(0), & 0 \leq t \leq 1, \quad i = 2 : m. \end{cases}$$

Легко видеть, что $U_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ есть WCT -система размерности m на всей действительной прямой, $U_m \subset C(-\infty, +\infty)$. Поэтому преобразование Гаусса этой системы $G_\varepsilon(U_m)$ по предложению 5 есть ECT -система и $G_\varepsilon(u_1) \equiv 1$. Согласно теореме 3 $\text{span } G'_\varepsilon(U_m)$ есть ET -пространство размерности $m - 1$, а в силу следствия 2 совокупность производных $G'_\varepsilon = \{G'_\varepsilon(u_2), \dots, G'_\varepsilon(u_m)\}$ является ECT -системой на $[0, 1]$.

Покажем, что E'_{m-1} является WCT -системой на $[0, 1]$. Предположим противное: существует k такое, что $\{e'_2, \dots, e'_k\}$ не является WT -системой. Тогда $U'_{k-1} = \{u'_2, \dots, u'_k\}$ не является WT -системой на $[0, 1]$ и по предложению 11 найдется элемент $u' \in \text{span } U'_{k-1}$, который имеет перемен знака на $[0, 1]$ больше $k - 1$. Тогда $\sigma(G_\varepsilon(u')) \geq k$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но с другой стороны, $G_\varepsilon(u') = G'_\varepsilon(u) \in \text{span } G'_\varepsilon$, и по предложению 10 $\sigma(G_\varepsilon(u')) < k$. Полученное противоречие доказывает, что E'_{m-1} есть WCT -система на $[0, 1]$.

Итак, для $s = 1$ теорема 4 доказана. При $s > 1$ мы применим теорему 4 (для $s = 1$) последовательно к $X', \dots, X^{(s-1)}$, замечая каждый раз, что пространство $X^{(k)}$ содержит базис $\{\frac{1}{k!}e_{k+1}^{(k)}, e_{k+2}^{(k)}, \dots, e_m^{(k)}\}$, являющийся WCT -системой размерности $m - k$ и $e_{k+1}^{(k)}/k! \equiv 1$ ($k = 1 : s - 1$). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 при $s = 1$ другим методом получена в [4]. В связи с предложением 1 и теоремой 4 заметим, что не всякую WT -систему U_m можно преобразовать в WCT -систему V_m так, чтобы первый элемент системы V_m совпадал с наперед заданным неотрицательным элементом из $\text{span } U_m$ [2, с.72]. Примером тому служат функции (см. [5])

$$u_1(t) = (1 - t^2)t, \quad u_2(t) = (1 - t)(2t - 1), \quad u_3(t) = 1,$$

образующие WCT -систему размерности 3 на $[0, 1]$. Но ни при каком $u \in \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ функции $\{u_3, u\}$ не образуют WT -систему размерности 2 на $[0, 1]$, ибо $\sigma(u_1 - u_3/9) = 2$, $\sigma(u_2 - u_3/9) = 2$.

Цитированная литература

1. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
2. **Крейн М. Г., Нудельман А. А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
3. **Schumaker L. L.** Spline Functions: Basis theory. New York: Wiley and Sons, 1981. 553+14 p.
4. **Zwick D.** // J. Approx. theory. 1983. V. 38, №2. P. 188 – 191.
5. **Zielke R.** Discontinuous Čebyšev Systems// Lect. Notes. Math. 1979. №707.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.51

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Р. ОЙНАРОВ

Институт математики МОН РК
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, oinarov@math.kz
473021 Астана, Кенесары ул., 268

Строятся расширяющиеся классы $P_m, Q_m, m \geq 0$ неотрицательных функций $K(\cdot, \cdot)$. Когда ядра интегральных операторов

$$Kf(x) = \int_0^x K(x, s)f(s)ds, \quad Kf(s) = \int_s^\infty K(x, s)f(x)dx$$

принадлежат классам P_m, Q_m , даются необходимые и достаточные условия ограниченности оператора K из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$, $1 < p \leq q < \infty$. Классы P_m, Q_m включают в себя ядра многих известных операторов. Так, например, ядро оператора весового интегрирования принадлежит классу $P_0 \equiv Q_0$, а ядра операторов дробного интегрирования принадлежит $P_1 \cap Q_1$.

1. Постановка задачи. Основной целью работы является получение оценок

$$\|Kf\|_{q,\mu} \leq c\|f\|_p, \quad f \in L_p(I) \tag{1}$$

для широкого класса интегральных операторов вида

$$Kf(x) = \int_0^x K(x, s)f(s)ds, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$Kg(s) = \int_s^\infty K(x, s)g(x)dx, \quad s > 0 \tag{3}$$

с неотрицательным ядром $K(\cdot, \cdot)$.

Здесь и далее $1 < p, q < \infty$, $I = (0, +\infty)$, μ — борелевская мера на I , $L_{p,\mu}(I)$ — пространство функций $g : I \rightarrow R$ с конечной нормой

$$\|g\|_{p,\mu} = \left(\int_0^\infty |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

Keywords: *Volterra type integral operator, operator of fractional integration, dual inequality, Sharp estimate*

2000 Mathematical Subject Classification: 47B38, 47G10

© Р. Ойнаров, 2001.

причем $\|g\|_{p,\mu} \equiv \|g\|_p$ и $L_{p,\mu}(I) \equiv L_p(I)$ при $d\mu(x) = dx$.

В последние четверть века ведутся интенсивные исследования оценок вида (1) для интегральных операторов вольтерровского типа в связи с результатами полученными Томаселли, Таленти, Брэдди, Макенхауптом, Кокилашвили, Мазьей, Розиным и др. (см. обзор [1]) для оператора интегрирования с весом.

В работах [2–5] В. Д. Степанов установил точные оценки вида

$$\|K\varphi\|_{q,\mu} \leq c\|v\varphi\|_p \quad (4)$$

для оператора дробного интегрирования Римана - Лиувилля. Эти оценки дали новые импульсы для исследования аналогичных оценок для операторов вида (2), (3) (см. [6–11]).

Заметим, что оценки (1) и (4) эквивалентны. Полагая в (4) $v\varphi = f$, имеем оценку (1), где ядра операторов (2) и (3) соответственно имеют вид $K(x, s)v^{-1}(s)$, $K(x, s)v^{-1}(x)$.

В работах [9], [11], [12] нами рассмотрены операторы вида (2), (3) с ядром $K(\cdot, \cdot) \equiv K_1(\cdot, \cdot) \geq 0$, удовлетворяющим условию: существует постоянная d_1 такая, что

$$\frac{1}{d_1}(K_1(x, t) + K_1(t, s)) \leq K_1(x, s) \leq d_1(K_1(x, t) + K_1(t, s)) \quad (5)$$

при $x \geq t \geq s \geq 0$.

Этому условию удовлетворяют ядра всех известных операторов дробного интегрирования. В частности, и для этого класса операторов были установлены точные оценки вида (4), обобщающие результаты работ [6], [7], [8]. Класс интегральных операторов с ядром, удовлетворяющим условию (5), позже стал объектом исследования многих работ [13], [14], [15].

В работах [16], [17] в связи с теоремами вложения весовых пространств и с исследованием спектральных свойств сингулярных дифференциальных операторов полярного типа были исследованы оценки вида (4) для оператора кратного интегрирования с весами, ядро которого, вообще говоря, не удовлетворяет условию (5). Поэтому, чтобы охватить широкий класс интегральных операторов вольтерровского типа, встречающихся в различных задачах анализа, в частности, операторы типа кратного интегрирования с весами, в работе [18] были введены расширяющиеся классы $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ положительных ядер, где класс H_1 характеризуется условием (5), и для операторов (2), (3) с ядрами из класса H_n , $n \geq 1$ даны необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (4) при $1 < p \leq q < \infty$ с точной по порядку оценкой наименьшей постоянной в (4). Исследования операторов с ядрами из класса H_n продолжены в работах [19], [20].

Из принадлежности ядра $K(\cdot, \cdot)$ операторов (2), (3) к классам H_n , $n \geq 1$ вытекает, что функция $K(\cdot, \cdot)$, вообще говоря, не убывает по первому аргументу и не возрастает по второму аргументу, что ограничивает широту охвата исследования операторов вида (2), (3).

Здесь классы H_n расширены в двух направлениях, в зависимости от того, какой из операторов (2) или (3) рассматривается. В случае (2) полностью снимается условие невозрастания ядра $K(\cdot, \cdot)$ по второму аргументу, и не обязательно условие неубывания по первому аргументу. Аналогичные ослабления условий на ядра идут и в случае оператора (3). Кроме того, результаты оценки (1) выражены в терминах ядра, не отражая принадлежность ядра к классам H_n , как было в работе [18].

2. Необходимые понятия и обозначения. Для каждого $n \geq 0$ определим классы P_n , Q_n ядер операторов вида (2), (3) соответственно, и договоримся писать $K(\cdot, \cdot) \equiv K_n(\cdot, \cdot)$, если $K(\cdot, \cdot) \in P_n$ или $K(\cdot, \cdot) \in Q_n$.

Сначала определим индуктивным образом классы \bar{P}_n , $n \geq 0$. Обозначим через $\bar{K}(x, s)$ неотрицательную функцию, определенную при всех $x \geq s \geq 0$ и неубывающую по первому аргументу.

К классу \bar{P}_0 отнесем все ядра вида $\bar{K}_0(x, s) \equiv v(s) \geq 0$, $0 \leq s < \infty$. Пусть определены классы \bar{P}_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m \geq 1$. По определению, ядро $\bar{K}(\cdot, \cdot) = \bar{K}_m(\cdot, \cdot)$ принадлежит

классу \bar{P}_m тогда и только тогда, если существуют функции $\bar{K}_i(\cdot, \cdot) \in \bar{P}_i$ $i = 0, 1, \dots, m-1$ и число $d_m > 0$ такие, что:

$$\bar{K}_m(x, s) \leq d_m \left(\sum_{i=0}^{m-1} \bar{K}_{m,i}(x, t) \bar{K}_i(t, s) + \bar{K}_m(t, s) \right)$$

при $x \geq t \geq s \geq 0$, где

$$\bar{K}_{m,i}(x, t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \frac{\bar{K}_m(x, s)}{\bar{K}_i(t, s)}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (6)$$

В (6) и далее принимаем, что $\frac{0}{0} = \infty$, $\infty \cdot 0 = 0$. Из (6) следует, что функции $K_{m,i}(x, t)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 1, 2, \dots$ не убывают по первому аргументу и не возрастают по второму аргументу и справедливы неравенства:

$$\bar{K}_m(x, s) \geq \bar{K}_{m,i}(x, t) \bar{K}_i(t, s), \quad x \geq t \geq s \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где для удобства принято $K_{m,m}(\cdot, \cdot) \equiv 1$, $m = 0, 1, \dots$.

В дальнейшем нам нужно следующее неравенство:

Пусть $m > j > i \geq 0$. Тогда

$$\bar{K}_{m,i}(x, t) \geq \bar{K}_{m,j}(x, \tau) \bar{K}_{j,i}(\tau, t), \quad x \geq \tau \geq t \geq 0. \quad (8)$$

Действительно, в силу (7), для $x \geq \tau \geq t \geq 0$ имеем:

$$\bar{K}_{m,j}(x, t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \frac{\bar{K}_m(x, s)}{\bar{K}_j(t, s)} \geq \bar{K}_{m,i}(x, \tau) \inf_{0 \leq s \leq t} \frac{\bar{K}_i(\tau, s)}{\bar{K}_j(t, s)} = \bar{K}_{m,i}(x, \tau) \bar{K}_{j,i}(\tau, t).$$

Таким образом, каждый класс \bar{P}_m , $m \geq 0$ ядер $\bar{K}_m(\cdot, \cdot)$ характеризуются наличием оценки вида

$$\bar{K}_m(x, s) \leq d_m \sum_{i=0}^m \bar{K}_{m,i}(x, t) \bar{K}_i(t, s) \quad (9)$$

для всех $x, t, s : x \geq t \geq s \geq 0$, где $K_{m,i}(\cdot, \cdot)$ $i = 0, 1, \dots, m$ определены по формуле (6).

Теперь определим классы P_m , $m \geq 0$. Ядро $K_m(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу P_m тогда и только тогда, когда существует определенная в I функция $u(\cdot) \geq 0$, функция $\bar{K}_m(\cdot, \cdot) \in \bar{P}_m$, число $c_m > 0$ и имеет место соотношение:

$$c_m^{-1} u(x) \bar{K}_m(x, s) \leq K_m(x, s) \leq c_m u(x) \bar{K}_m(x, s) \quad (10)$$

для $x \geq s \geq 0$.

Как и выше для определения классов Q_m , $m \geq 0$ сначала определим классы \underline{Q}_m , $m \geq 0$. Неотрицательную функцию $K(\cdot, \cdot)$, определенную при всех $x \geq s \geq 0$ и не возрастающую по второму аргументу, обозначим через $\underline{K}(\cdot, \cdot)$. По определению, ядро $\underline{K}(\cdot, \cdot) \equiv \underline{K}_0(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу \underline{Q}_0 когда и только тогда, когда оно имеет вид $K_0(x, s) \equiv u(x) \geq 0$, $0 \leq x < \infty$. Пусть определены классы \underline{Q}_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m \geq 1$. Ядро $K(\cdot, \cdot) \equiv \underline{K}_m(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу \underline{Q}_m тогда и только тогда, когда существуют функции $\underline{K}_i(\cdot, \cdot) \in \underline{Q}_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ и число $d_m > 0$ такие, что:

$$\underline{K}_m(x, s) \leq d_m \sum_{i=0}^m \underline{K}_i(x, t) \underline{K}_{i,m}(t, s), \quad x \geq t \geq s \geq 0,$$

где $\underline{K}_{m,m}(t, s) \equiv 1$, $\underline{K}_{i,m}(t, s) = \inf_{t \leq x < \infty} \frac{\underline{K}_m(x, s)}{\underline{K}_i(x, t)}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Функции $\underline{K}_{i,m}(t, s)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 0, 1, \dots$ не убывают по первому аргументу и не возрастают по второму аргументу и для $m > i > j \geq 0$ и $t \geq \tau \geq s \geq 0$ удовлетворяют неравенству

$$\underline{K}_{j,m}(t, s) \geq \underline{K}_{j,i}(t, \tau) \underline{K}_{i,m}(\tau, s).$$

Определим классы Q_m , $m \geq 0$. Ядро $K(\cdot, \cdot) \equiv K_m(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу Q_m тогда и только тогда, когда существуют определенная в I функция $v(\cdot) \geq 0$, функция $\underline{K}_m(\cdot, \cdot) \in \underline{Q}_m$ и число $c_m > 0$ такие, что:

$$c_m^{-1} \underline{K}_m(x, s) v(s) \leq K_m(x, s) \leq c_m \underline{K}_m(x, s) v(s)$$

при $x \geq s \geq 0$.

Из определения классов P_m и Q_m , $m \geq 0$ вытекает, что $P_0 = Q_0$ и $K(\cdot, \cdot) = K_0(\cdot, \cdot) \in P_0$ тогда и только тогда, когда

$$c_0^{-1} u(x) v(x) \leq K_0(x, s) \leq c_0 u(x) v(x)$$

для всех $x \geq s \geq 0$. Следовательно, условие II из работы [11] характеризует принадлежность ядра классу P_0 . Легко можно показать, что ядра, удовлетворяющие условию III из [11] принадлежат $P_1 \cap Q_1$. Кроме того, H_m класс ядер из работы [18] содержится в $P_m \cap Q_m$.

Положим

$$A^+(z, \mu) \equiv A^+(z, \mu, K) = \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K^{p'}(x, s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^-(z, \mu) \equiv A^-(z, \mu, K) = \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty K^q(x, s) d\mu(x) \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$B^+(z, \mu) \equiv B^+(z, \mu, K) = \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty K^{p'}(x, s) dx \right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$B^-(z, \mu) \equiv B^-(z, \mu, K) = \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K^q(x, s) d\mu(s) \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. В случае, когда μ — мера Лебега, полагаем $A^+(z, \mu) \equiv A^+(z)$, $A^-(z, \mu) \equiv A^-(z)$, $B^+(z, \mu) \equiv B^+(z)$ и $B^-(z, \mu) \equiv B^-(z)$.

Напомним, что всюду в работе полагается $\frac{0}{0} = \infty$, $\infty \cdot 0 = 0$. Далее, соотношение $A \ll B$ означает $A \leq cB$, где константа $c > 0$ может зависеть от параметров суммирования и, возможно, константы эквивалентности в неравенствах типа (5). Мы пишем $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$. $\chi_{(a,b)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала (a, b) .

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (2) принадлежит классу P_m , $m \geq 0$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) для оператора (2) справедлива оценка (1);

$$2) \quad A^+(\mu) = \sup_{z>0} A^+(z, \mu) < \infty; \tag{11}$$

$$3) \quad A^-(\mu) = \sup_{z>0} A^-(z, \mu) < \infty . \quad (12)$$

При этом, для наименьшей константы c в (1) имеет место соотношение $A^+(\mu) \approx A^-(\mu) \approx c$.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (3) принадлежит классу Q_m , $m \geq 0$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) для оператора (3) справедлива оценка (1);

$$2) \quad B^+(\mu) = \sup_{z>0} B^+(z, \mu) < \infty ;$$

$$3) \quad B^-(\mu) = \sup_{z>0} B^-(z, \mu) < \infty .$$

При этом, для наименьшей константы c в (1) имеет место соотношение $B^+(\mu) \approx B^-(\mu) \approx c$.

Дуальное неравенство к неравенству (1) относительно формы $\int_0^\infty f(x)g(x)d\mu(x)$ будет:

$$\|K_\mu^*g\|_{p'} \leq c \|g\|_{q', \mu}, \quad g \in L_{q', \mu}(I), \quad (13)$$

где дуальный оператор K_μ^* к операторам (2), (3) соответственно имеет вид:

$$K_\mu^*g(s) = \int_s^\infty K(x, s)g(x)d\mu(x), \quad (14)$$

$$K_\mu^*g(x) = \int_0^x K(x, s)g(s)d\mu(s). \quad (15)$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} c &= \sup_{f \in L_p(I), f \neq 0} \frac{\|Kf\|_{q, \mu}}{\|f\|_p} = \sup_{f \in L_p(I), f \neq 0} \sup_{g \in L_{q', \mu}(I), g \neq 0} \frac{\int_0^\infty g(x)Kf(x)d\mu(x)}{\|g\|_{q', \mu} \|f\|_p} = \\ &= \sup_{g \in L_{q', \mu}(I), g \neq 0} \sup_{f \in L_p(I), f \neq 0} \frac{\int_0^\infty f(s)K_\mu^*g(s)ds}{\|f\|_p \|g\|_{q', \mu}} = \sup_{g \in L_{q', \mu}(I)} \frac{\|K_\mu^*g\|_{p'}}{\|g\|_{q', \mu}}, \end{aligned} \quad (16)$$

что показывает эквивалентность неравенств (13) и (1). Так как в силу (16) неравенства (1) и (13) выполняются одновременно или нет, то из теоремы 1 и 2 имеем:

Теорема 3. Пусть $1 < q' \leq p' < \infty$ и ядро оператора (14) принадлежит классу P_m , $m \geq 0$. Тогда утверждения 2), 3) теоремы 1 и утверждение

1') для оператора (14) справедлива оценка (13)

эквивалентны.

Теорема 4. Пусть $1 < q' \leq p' < \infty$ и ядро оператора (15) принадлежит классу Q_m , $m \geq 0$. Тогда утверждения 2), 3) теоремы 2 и утверждение

1') для оператора (15) справедлива оценка (13)

эквивалентны.

В случае, когда μ — мера Лебега, сравнивая условия и утверждения теоремы 3 при $q' = p$, $p' = q$ с условиями и утверждениями теоремы 1 и 2 соответственно, имеем:

Следствие 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (2) принадлежит классу Q_m , $m \geq 0$. Тогда утверждения :

1) оператор (2) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$;

$$2) \quad A^+ = \sup_{z>0} A^+(z) < \infty ;$$

$$3) \quad A^- = \sup_{z>0} A^-(z) < \infty .$$

эквивалентны, причем норма оператора (2) $\|K\|_{p \rightarrow q} \approx A^+ \approx A^-$.

Следствие 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (3) принадлежит классу P_m , $m \geq 0$. Тогда утверждения :

1) оператор (3) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$;

$$2) \quad B^+ = \sup_{z>0} B^+(z) < \infty ;$$

$$3) \quad B^- = \sup_{z>0} B^-(z) < \infty .$$

эквивалентны, причем норма оператора (3) $\|K\|_{p \rightarrow q} \approx B^+ \approx B^-$.

4. Доказательство основных результатов. Теорема 2 доказывается также как теорема 1. Поэтому мы докажем только теорему 1. Сначала докажем слабую форму теоремы 1.

Теорема 1'. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (2) принадлежит классу \overline{P}_m , $m \geq 0$. Тогда оценка (1) для оператора (2) справедлива тогда и только тогда, когда:

$$A_m \equiv A_m(\mu) = \max_{0 \leq i \leq m} \sup_{z>0} A_{m,i}(z, \mu) < \infty , \quad (17)$$

при этом $A_m \approx c$, где c – наименьшая константа в (1).

Здесь

$$A_{m,i}(z, \mu) = \left(\int_z^\infty \overline{K}_{m,i}^q(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z \overline{K}_i^{p'}(z, s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$

функции $\overline{K}_{m,i}(\cdot, \cdot)$, $\overline{K}_i(\cdot, \cdot)$ $i = 0, 1, \dots, m$ из оценки (9).

Доказательство теоремы 1'. Необходимость. Пусть ядро оператора (2) принадлежит классу \overline{P}_m , $m \geq 0$ и имеет место оценка (1). Полагая в (1) $f(\cdot) = \chi_{(0,z)}(\cdot)$, $z > 0$, получим:

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{p}} c &\geq \|K \chi_{(0,z)}\|_{q,\mu} \geq \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \overline{K}_m(x, s) ds \right)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \geq (7) \geq \\ &\geq \left(\int_z^\infty \overline{K}_{m,i}^q(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z \overline{K}_i(z, s) ds \right), \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Откуда вытекает, что $\overline{K}_{m,i}(\cdot, z) \in L_{q,\mu}(z, +\infty)$, $i = 0, 1, \dots, m$ для $z > 0$. Так как неравенства (1) и (13) выполняются одновременно, то в (13), полагая $g(\cdot) = \chi_{(z,\infty)}(\cdot) \overline{K}_{m,i}^{q-1}(\cdot, z)$, $0 \leq i \leq m$, имеем:

$$\left(\int_z^\infty \overline{K}_{m,i}^q(x, z) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} c \geq \|K_\mu^* g\|_{p'} \geq \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty \overline{K}_m(x, s) \overline{K}_{m,i}^{q-1}(x, z) d\mu(x) \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\geq (7) \geq \left(\int_0^z \overline{K}_i^{p'}(z, s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty \overline{K}_{m,i}^q(x, z) d\mu(x) \right).$$

Откуда

$$\infty > c \geq A_m. \quad (18)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть ядро оператора (2) принадлежит классу \overline{P}_m , $m \geq 0$ и имеет место (17). Пусть $m = 0$. По определению \overline{P}_0 ядро оператора (2) имеет вид $\overline{K}_0(x, s) \equiv v(s) \geq 0$. Тогда оператор (2) — оператор (K_0) интегрирования с весом v , а условие (17) дает оценку (см. обзор [2]):

$$\|K_0 f\|_{q,\mu} \ll A_0 \|f\|_p, \quad f \in L_p(I).$$

Пусть из условия (17) при $m = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$ вытекает оценка:

$$\|K_m f\|_{q,\mu} \ll A_m \|f\|_p, \quad f \in L_p(I), \quad (19)$$

где K_m оператор (2) с ядром $\overline{K}_m(\cdot, \cdot) \in \overline{P}_m$.

Покажем, что из (17) при $m = n$ следует справедливость оценки (19) и при $m = n$. Положим:

$$F(x) = \int_0^x \overline{K}_n(x, s) f(s) ds, \quad x > 0,$$

где f произвольная неотрицательная функция из $L_p(I)$, обращающаяся в нуль в некоторой правой окрестности нуля. Функция $F(\cdot)$ не убывает и обращается в нуль в некоторой окрестности нуля. Пусть $d \equiv d_n$, где d_n из (9) при $m = n$. Для любого целого $j \in Z$ определим:

$$x_j = \sup\{x : F(x) \leq (d+1)^j, x \in I\},$$

$$y_j = \inf\{x : F(x) \geq (d+1)^{j+1}, x \in I\},$$

причем считаем $y_j = +\infty$, если $\{x : F(x) \geq (d+1)^{j+1}, x \in I\} = \emptyset$.

Из определения точек x_j , y_j и из монотонности функции $F(\cdot)$ следует, что при каждом $j \in Z$

$$x_j \leq y_j \leq x_{j+1}, \quad (20)$$

$$F(x) < (d+1)^{j+1} \text{ при } x < y_j. \quad (21)$$

Пусть $I_j = [x_j, y_{j+1})$. В силу (20):

$$I \subset \bigcup_j I_j, \quad (22)$$

причем это покрытие не более чем трехкратное.

Используя неравенства $F(y_j) \geq (d+1)^{j+1}$, $F(x_{j-1}) \leq (d+1)^{j-1}$ и неравенство (9) при $x = y_i$, $t = x_{j-1}$ имеем:

$$\begin{aligned} (d+1)^{j-1} &= (d+1)^j - d(d+1)^{j-1} < F(y_j) - dF(x_{j-1}) \leq \\ &\leq \int_{x_{j-1}}^{y_j} \overline{K}_n(y_j, s) f(s) ds + d \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_{n,i}(y_j, x_{j-1}) K_i f(x_{j-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

На основании (21), (22) и (23) получим:

$$\int_0^\infty (K_n f(x))^q d\mu(x) \leq \sum_j \int_{I_{j+1}} F^q(x) d\mu(x) \ll \sum_j (d+1)^{q(j-1)} \mu(I_{j+1}) \ll$$

$$\begin{aligned} & \ll \sum_j \mu(I_{j+1}) \left(\int_{x_{j-1}}^{y_j} \bar{K}_n(y_j, s) f(s) ds \right)^q + \\ & + d \sum_{i=0}^{n-1} \sum_j \bar{K}_{n,i}^q(y_j, x_{j-1}) \mu(I_{j+1}) (K_i f(x_{j-1}))^q = I_n + d \sum_{i=0}^{n-1} I_i. \end{aligned} \quad (24)$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая кратность покрытия (22), а также неравенства (20), $q \geq p$ имеем:

$$\begin{aligned} I_n & \leq \sum_j \mu(I_{j+1}) \left(\int_{x_{j-1}}^{y_j} \bar{K}_n^{p'}(y_j, s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int_{I_{j-1}} |f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \leq \\ & \leq \sup_{y \in I} A_{n,n}^q(y) \left(\sum_j \int_{I_{j-1}} |f|^p ds \right)^{\frac{q}{p}} \ll (A_n)^q \|f\|_p^q. \end{aligned} \quad (25)$$

Выражение для I_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$ перепишем в виде:

$$I_m = \int_0^\infty \left(\int_0^t K_m(t, s) f(s) ds \right)^q d\mu_i(t) = \|K_m f\|_{q, \mu_i}^q,$$

где $d\mu_m = \sum_j \mu(I_{j+1}) K_{n,m}^q(y_j, x_{j-1}) \delta(t - x_{j-1}) dt$, $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака.

По нашему допущению для оператора K_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место оценка вида (19), следовательно:

$$I_m \ll A_m^q(\mu_m) \|f\|_p^q, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (26)$$

где

$$A_m(\mu_m) = \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{z > 0} \left(\int_z^\infty \bar{K}_{m,j}^q(x, z) d\mu_m(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z \bar{K}_j^{p'}(z, s) ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, поскольку:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \bar{K}_{m,j}^q(x, z) d\mu_m(x) & = \sum_{x_{j-1} \geq z} \mu(I_{j+1}) \bar{K}_{n,m}^q(y_j, x_{j-1}) \bar{K}_{m,j}^q(x_{j-1}, z) \leq (8) \leq \\ & \leq \sum_{x_{j-1} \geq z} \int_{I_{j+1}} d\mu(x) \bar{K}_{n,j}^q(y_j, z) \leq \int_z^\infty \bar{K}_{n,j}(x, z) d\mu(x), \end{aligned}$$

то $A_{m,j}(z, \mu_m) \leq A_{n,j}(z, \mu)$ для $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Тогда из (26) следует:

$$I_m \ll A_n^q \|f\|_p^q, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (27)$$

Из (24), (25) и (27) заключаем, что неравенство (19) имеет место и при $m = n$ для функции из $L_p(I)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности нуля. Но совокупность таких функций плотна в $L_p(I)$, поэтому неравенство (19) при $m = n$ выполнено для всех $f \in L_p(I)$. Следовательно, для любого $m \geq 0$ из (17) следует справедливость неравенства (1) с оценкой $c \ll A_m$ для наименьшей константы c в (1). Эта оценка вместе с (18) дает $c \approx A_m$. Теорема 1' доказана.

Теперь для доказательства теоремы 1 нам нужна

Лемма 1. Пусть ядро оператора (2) принадлежит классу \overline{P}_m , $m \geq 0$. Тогда для $z > 0$:

$$A^+(z, \mu, \overline{K}_m) \approx \max_{0 \leq i \leq m} A_{m,i}(z, \mu) \approx A^-(z, \mu, \overline{K}_m),$$

где константа эквивалентности не зависит от $z > 0$.

Доказательство леммы 1. В силу (7) $A^+(z, \mu, \overline{K}_m) \geq A_{m,i}(z, \mu)$ при $i = 0, 1, \dots, m$, следовательно:

$$A^+(z, \mu, \overline{K}_m) \geq \max_{0 \leq i \leq m} A_{m,i}(z, \mu). \quad (28)$$

Применяя (9), имеем:

$$A^+(z, \mu, \overline{K}_m) \ll \sum_{i=0}^m A_{m,i}(z) \leq (m+1) \max_{0 \leq i \leq m} A_{m,i}(z, \mu).$$

Откуда и из (28) следует: $A^+(z, \mu, \overline{K}_m) \approx \max_{0 \leq i \leq m} A_{m,i}(z, \mu)$. Точно также доказывается соотношение $A^-(z, \mu, \overline{K}_m) \approx \max_{0 \leq i \leq n} A_{m,i}(z, \mu)$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть ядро $K_m(\cdot, \cdot)$ оператора (2) принадлежит классу P_m , $m \geq 0$. Тогда по определению класса P_m существуют функции $u(\cdot) \geq 0$, $\overline{K}_m(\cdot, \cdot) \in \overline{P}_m$ и число $c_m > 0$ и имеет место соотношение (10). Тогда

$$\|K_m f\|_{q, \mu} \approx \|\overline{K}_m f\|_{q, \mu_u}, \quad (29)$$

где $d\mu_u \equiv u^q d\mu$, \overline{K}_m и K_m оператор (2), когда его ядро $K(\cdot, \cdot)$ соответственно равно $\overline{K}_m(\cdot, \cdot)$, $K_m(\cdot, \cdot)$.

Из (29) вытекает, что оценка (1) эквивалентна оценке:

$$\|\overline{K}_m f\|_{q, \mu_u} \leq \bar{c} \|f\|_p, \quad f \in L_p(I), \quad (30)$$

где $c \approx \bar{c}$ и c, \bar{c} — наименьшие константы в (1), (30) соответственно.

На основании теоремы 1' выполнение оценки (30) эквивалентно условию $A_m(\mu_u) < \infty$, причем $\bar{c} \approx A_m(\mu_u)$. В силу леммы 1 имеем:

$$A_m(\mu_u) \approx \sup_{z>0} A^+(z, \mu_u, \overline{K}_m), \quad A_m(\mu_u) \approx \sup_{z>0} A^-(z, \mu_u, \overline{K}_m). \quad (31)$$

На основании (10):

$$\begin{aligned} A^+(z, \mu_u, \overline{K}_m) &= \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \overline{K}_m^{p'}(x, s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} u^q(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \approx \\ &\approx \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K_m^{p'}(x, s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} = A^+(z, \mu, K_m). \end{aligned} \quad (32)$$

Точно также устанавливаем:

$$A^-(z, \mu_u, \overline{K}_m) \approx A^-(z, \mu, K_m). \quad (33)$$

Из (31), (32) и (33) и из эквивалентности неравенств (1) и (30), констант c и \bar{c} имеем, что выполнение неравенства (1) и условий (11), (12) эквивалентны, и имеет место соотношение $A^+ \approx A^- \approx c$. Теорема 1 доказана.

Покажем справедливость утверждения следствия 1.

Пусть $K_m(\cdot, \cdot) \in Q_m$. Положим $B_{p,q}^+(z) \equiv B^+(z)$, $B_{p,q}^-(z) \equiv B^-(z)$, $A_{p,q}^+(z) \equiv A^+(z)$, $A_{p,q}^-(z) \equiv A^-(z)$, указывая зависимость от параметров суммирования. Рассмотрим оператор (3) с ядром $K_m(\cdot, \cdot)$. На основании теоремы 2 оператор (3) ограничен из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$B_{q',p'}^+ \equiv \sup_{z>0} B_{q',p'}^+(z) < \infty, \quad B_{q',p'}^- \equiv \sup_{z>0} B_{q',p'}^-(z) < \infty, \quad (34)$$

причем $\|K^+\|_{q' \rightarrow p'} \approx B_{q',p'}^+ \approx B_{q',p'}^-$.

Но сопряженный к оператору (3) совпадает с оператором (2) с ядром $K_m(\cdot, \cdot) \in Q_m$, $m \geq 0$, поэтому ограниченность оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ и каждый из условий (34) эквивалентны. Так как $B_{q',p'}^+(z) \equiv A_{p,q}^-(z)$, $B_{q',p'}^-(z) \equiv A_{p,q}^+(z)$, то ограниченность оператора (2) с ядром $K_m(\cdot, \cdot) \in Q_m$, $m \geq 0$ эквивалентно каждому из условий $A^+ < \infty$, $A^- < \infty$ и при этом $\|K\|_{p \rightarrow q} \approx A^+ \approx A^-$. Следствие 1 доказано.

Утверждение следствия 2 доказывается аналогично.

Цитированная литература

1. Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. // Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ. 1983. Т. 21. С. 42 – 129.
2. Степанов В. Д. // ДАН СССР. 1988. Т. 302. С. 1059 – 1062.
3. Степанов В. Д. // Тр. МИАН СССР, 1989, т. 187, с. 178 – 190.
4. Степанов В. Д. // Изв. АН СССР, сер. физ. – мат. 1990. Т. 54, № 3. С. 645 – 655.
5. Степанов В. Д. // Сиб. мат. журнал. 1990. Т. 31, № 3. С. 186 – 197.
6. Степанов В. Д. // ДАН СССР. 1990. Т. 302, № 3. С. 544 – 545.
7. Martin – Reyes F. I., Sawyer E. // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 727 – 733.
8. Bloom S., Kerman R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. P. 135 – 141.
9. Ойнаров Р. // Деп. в КазНИИТИ. 1991, № 3354 – 1991 – Ка91, 21 с.
10. Бережной Е. Н. // Труды МИРАН. 1992. Т. 201. С. 14 – 26.
11. Ойнаров Р. // Труды МИРАН. 1993. Т. 204. С. 240 – 250.
12. Ойнаров Р. // ДАН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1076 – 1078.
13. Степанов В. Д., Едмундс Д. Е. // Доклады РАН. 1993. Т. 330, № 6.
14. Stepanov V. D. // Nonlinear analysis, functions spaces and applications, Prague. 1994. V. 5. P. 139 – 175.
15. Степанов В. Д., Ушакова Е. П. // Труды МИРАН. 2001. Т. 232. С. 298 – 317.
16. Байарыстанов А. О. // Деп. в КазНИИТИ. 1993, № 3975 – Ка93, 20 с.
17. Байарыстанов А. О. // Деп. в КазНИИТИ. 1996, № 7183 – 1996 – Ка96, 14 с.
18. Baideldinov V. L., Oinarov R. // Доклады НАН РК. 1996. № 6. С. 16 – 22.
19. Ойнаров Р, Сагиндыков Б. О. // Республиканский научный журнал "Наука и образование Южного Казахстана", сер. мет., информ. 1998, № 7. С. 53 – 60.
20. Сагиндыков Б. О. // Труды Международной научно–технической и учебной–методической конференции "Наука и образование: эффективные рычаги реализации стратегии Казахстан – 2030". Шымкент. 1998. С. 50 – 54.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.956

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Т. ПАК, Н. Г. МАКАРЕНКО, Л. М. КАРИМОВА, С. А. КИМ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, park@math.kz, makarenko@math.kz

В статье рассматриваются методы алгоритмического моделирования сложных природных систем на примере динамики уровня Каспийского моря. Этот водоем демонстрирует уникальные динамические сценарии на разных масштабах времени. Этапы регрессии перемежаются трансгрессией, следуя динамике детерминированного хаоса. Мы восстанавливаем диффеоморфную копию аттрактора универсальной гладкой модели по временным рядам уровня на разных масштабах времени. Оценки динамических характеристик, полученных по реконструкции (размерность аттрактора, Ляпуновские показатели) используются для схемы многомерного локального авторегрессионного прогноза. Прогноз реализован на искусственной нейронной сети. Мы тестируем этот подход для инструментального временного ряда уровня Каспия.

Введение. Известны два термина, описывающие различные по *modus operandi* подходы к построению математических моделей. *Математическим моделированием* называют аналитическое или численное описание процесса или системы. В этом случае модель - система дифференциальных или разностных уравнений, допускающих единственное аналитическое или численное решение. *Симуляцией (simulation)* называют модели, представленные в виде компьютерной программы. Такой программой является, например, искусственная нейронная сеть (ИНС), которая позволяет извлекать *явные знания* из таблиц данных [1].

Аналитическая модель не предполагает описание процесса в *наблюдаемых* переменных, и решение обычно дается в переменных, не допускающих проверку *in vivo*. Дополнительные трудности, которые возникают при интерпретации решений, связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, такая модель дает *возможные*, а не *практически реальные* варианты динамического сценария; для поиска последнего рекомендуется обращаться к эксперименту. Во-вторых, редукция исходной (обычно нелинейной и многомерной) системы уравнения к варианту, пригодному для интегрирования, приводит к варианту, который уже не в состоянии *salvare apparentices*. С другой стороны, численные решения обычно оставляют слишком много вопросов, связанных с устойчивостью и точностью выбранного алгоритма. В качестве паллиативы для сложных систем обычно ограничиваются моделью-метафорой (*toy model*), которая по построению, должна отследить наиболее существенные детали реального динамического сценария [2]. Конечно, такая модель не изоморфна реальности, но незаменима и полезна для моделирования нелинейных процессов. Наиболее известными примером служит модель "кучи песка", предложенная Баком

Keywords: *Embedology, fractals, forecasting, neural networks*

2000 Mathematical Subject Classification: 37D45, 74H65, 62M20, 62M45

© И. Т. Пак, Н. Г. Макаренко, Л. М. Каримова, С. А. Ким, 2001.

о Тонгом для описания метастабильной устойчивости в явлении самоорганизации критичности [3]. К сожалению, для ряда практически интересных проблем, вообще не существует корректных математических моделей. Хорошими примерами для нашего региона могут служить прогностические задачи сейсмологии и метеорологии, динамика колебаний уровня Каспия, диагностика структурированных радиационных полей ядерных полигонов, деградация Арала и т.д.

В этой ситуации хорошей стратегией является реконструкция модели непосредственно из наблюдательных данных. Этот подход, который активно развивается последние двадцать лет, называют алгоритмическим моделированием [1, 5–7]. В его основе лежит предположение о том, что временной ряд или измеренный сигнал является непрерывной нелинейной проекцией фазовой траектории неизвестной нам диссипативной динамической системы, обладающей компактным низкоразмерным аттрактором. Такое предположение позволяет реконструировать диффеоморфную копию аттрактора непосредственно из наблюдаемых данных в евклидовом пространстве подходящей размерности. Разумеется, такая копия сохраняет лишь наиболее универсальные (грубые) свойства оригинала, с точностью до предположения о типичности или превалентности [5, 6]. Такими свойствами являются обычно топологические и масштабные (скейлинговые) характеристики реальной динамики: размерность (емкость) аттрактора, ляпуновские показатели, топологическая и динамическая энтропии. Реконструкция *геометрии из временных рядов* представляет собой вложение временного ряда в R^n , поэтому сам метод иногда называют *эмбедологией*. Необходимая для этого процедура (алгоритм Такенса) конструктивна в том смысле, что позволяет по реконструкции оценить одновременно упомянутые выше динамические характеристики. Многомерная реконструкция позволяет не только диагностировать нелинейную динамику, но реализовать схему нелинейного авторегрессионного прогноза, основанную на поведении локальной окрестности фазовой точки. Для оптимальной аппроксимации предиктора — нелинейной непрерывной вектор-функции удобно использовать распределенную динамическую систему с ассоциативной памятью — искусственную нейронную сеть [1, 28]. В данной статье мы применяем приемы алгоритмического моделирования вместе с симуляцией для исследования динамики уровня Каспийского моря. Такой комплексный подход не использовался ранее.

Наблюдательные данные. Каспийское море представляет собой крупнейший внутриматериковый водоем. Его эволюция в геологическом масштабе времени представляла собой многократную смену трансгрессивных и регрессивных фаз [8–10]. В начале палеогена Каспий был открытым морем, связанным с Мировым океаном. В олигоцене, он вместе с Черным морем отделился от Средиземного, а затем и от Черного моря. Это было связано с крупномасштабным поднятием хребтов Малой Азии и Кавказа. Однако, временами образовавшееся бессточное озеро сообщалось с упомянутыми морями. Уровень древнего Каспия порой достигал 125 м в абсолютных отметках. Эта стадия сменилась глубокой трансгрессией (в поздеапшеронское время), когда Каспий впервые принял очертания, близкие к современным. В четвертичное время эти колебания продолжались. Максимальные фазы трансгрессии, имевшие место 480, 280, 170 и 60 тыс. лет назад, перемежались глубокими минимумами (500, 340 и 90 тыс. лет назад). Эпохи чрезвычайно низких уровней (до –60 м.) в 27–18 и 11–9 тысячелетиях были переломными в истории моря. За последние 10 тыс. лет максимальные уровни Каспия по видимому не превосходили отметки –21 м, а размах колебаний сократился до 10 м и менее. Разумеется, эти данные носят весьма условный характер. Наиболее достоверные сведения об уровне начинаются с начала нашей эры. Почти наверное, в начале первого века амплитуда колебаний достигала 12 м, вблизи средней отметки –28 м. В период с X по XVI век амплитуда уменьшилась до 7 м, что было связано, по-видимому, с прекращением стока Амударьи. В XV–XVI веках уровень находился на отметке –26 м, а затем стал резко повышаться, достигнув в 1804 году отметки –22.7 м. Начавшееся затем падение, к периоду инструментальных наблюдений, достигло отметки –25.8 м. Относительно стабильный уровень в 30-х годах нашего столетия начал резко

понижаться, продолжая падать до 1957 года (-29.4 м). После очередной стабилизации, снова началось падение, достигшее в 1977 году самой низкой за последние 700 лет цифры -29.1 м. С 1978 года уровень стремительно повышается и достиг в 1995 году отметки -26.7 м. Заметим, что это самый продолжительный подъем уровня после 1820 года [11], который в условиях стационарного климата, продолжается уже 18 лет (рисунок 1).

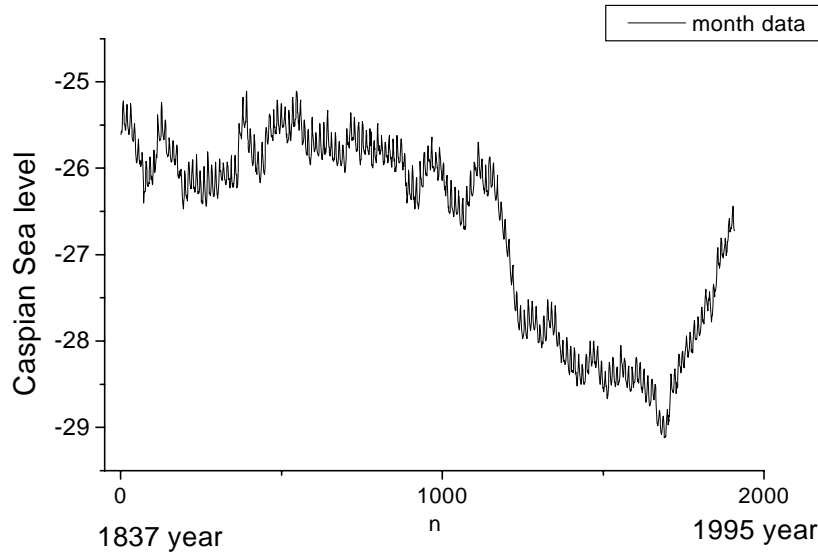


Рис. 1: Инструментальный период. Ежемесячные значения уровня Каспия.

К началу 1996 г. была достигнута отметка -26.6 м., а площадь моря увеличилась на 40000 кв.км. Эта ситуация, осложненная ветровыми нагонами, породила массу проблем. Экономика Рын-песков [12] оказалась в полной зависимости от ближайшего эпизода динамического сценария моря. На первый взгляд, проблема моделирования динамики бессточного водоема не представляет особых трудностей. Однако, простые схемы вероятностного прогноза [13–15], основанные на балансовой арифметике стока и испарения не привели к успеху: корреляционные связи слагаемых баланса слишком упрощены, а испарение, вообще не удается описать корректным образом [16–19]. Альтернативный подход к проблеме Каспия может быть основан на алгоритмическом моделировании и нейросетевых технологиях.

Фракталы, аттракторы и эмбедология.

Пусть K — компактное метрическое пространство с метрикой $d(x, y)$; тогда множество всех непустых замкнутых подмножеств $A_i \subset K$ образует компактное метрическое пространство H с метрикой Хаусдорфа h :

$$\forall A, B \in K, h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} \inf d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x, y) \right\}. \quad (1)$$

Пусть $w_n : K \rightarrow K, n \in \{1, 2, \dots, N\}$ липшиц-непрерывные сжимающие (гиперболические) отображения. Для $A \in H : w_n(A \equiv \{w_n(x) : x \in A\})$ определим систему W итеративных функций (IFS): $H \rightarrow H$:

$$W(A) = \bigcup_n w_n(A). \quad (2)$$

Очевидно, что последовательность итераций вида

$$W^{\circ m}(A), W^{\circ m}(A) = W(W^{\circ(m-1)}(A)) \quad (3)$$

сходится в $H(h)$ к аттрактору или фракталу [20]:

$$G = W(G) : G = \lim_{m \rightarrow \infty} W^{om}(A); G \subset H. \quad (4)$$

Пусть, например:

$$K \equiv [0, 1]; IFS = \{w_1, w_2\}; w_1 = (1/3)x; w_2 = (1/3)x + (2/3); W = \bigcup_{i=1,2} w_i. \quad (5)$$

Тогда аттрактор

$$G = \lim_{m \rightarrow \infty} W^{om} \quad (6)$$

— канторово множество.

Одним из тривиальных, но полезных приложений IFS является фрактальная интерполяция функций [21]. В этом случае, аттрактором является график, к которому IFS итерируют экспериментальные точки R^2 . Точнее, пусть $\{(x_i, y_i) \in I \times R : i = 0, 1, \dots, N\}$, где $I = [x_0, x_N] \subset R$ есть замкнутый интервал, содержащий аргументы экспериментальных точек. Предположим, что непрерывные функции:

$$f : I \rightarrow R; f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

интерполируют наши данные. Если ограничиться классом функций, графики которых

$$Gr = \{(x, f(x)) : x \in I\} \quad (8)$$

являются аттракторами некоторых IFS, то интерполяция сводится к нахождению набора непрерывных отображений $w_n : K \rightarrow K$ таких, что G — их единственный аттрактор, для компактного множества $K \subset I \times R$. Эти функции называются *фрактальными интерполирующими функциями* [21].

Для диссипативной динамической системы роль IFS выполняют динамические уравнения. Точнее, диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ в фазовом пространстве M , имеет аттрактор Λ , как предельное множество траекторий $Clos = \{f^i(x)\}_{i \geq 0}$, где $f^{i+1}(x) = f(f^i(x))$ для множества начальных точек B с положительной лебеговой мерой [22]. Для любого множества $S \subset M$ и точки $x \in B$ определим меру $\mu(x, S)$ как:

$$\mu(x, S) = \lim_{M \rightarrow \infty} (M)^{-1} \sum_{i=1}^M \chi(f^i(x) | S), \quad (9)$$

где $\chi(f^i(x) | S)$ — индикаторная функция S . Предел, определяющий $\mu(x, S)$ существует, по меньшей мере, для диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A [30] и тогда $\mu(S)$ (не зависящая от x) называется *натуральной мерой* аттрактора Λ .

Пусть такая мера существует, и траектории f^t порождают *наблюдаемую* (временной ряд) $x = \{x_i\}_{i=0}^N$, как липшиц-непрерывную функцию фазовых координат. Предположим, что емкость $c(\Lambda)$ аттрактора конечна, и начальная точка $y_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in B$ — типичная точка для меры $\mu(x, S)$. Теорема Такенса [5] утверждает, что предельное множество полутраекторий *дискретной* динамической системы в R^n :

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \dots, \quad (10)$$

при $n \geq 2c(\Lambda)$ является *вложением* Λ в R^n , с точностью до предположения о типичности. Алгоритм построения вложения (отображение сдвига) дает универсальную динамическую систему, продуцирующую ограниченную (т.е. возрастающую медленнее экспоненты) наблюдаемую как значение первой координаты вектора в пространстве вложения R^n [5–6]. Отображение сдвига называют часто *отображением запаздывающих координат*. Для оценки неизвестной емкости

аттрактора используют корреляционный интеграл [23] — статистику числа ε -близких пар векторов X_j^m :

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_j \sum_k \theta(|X_j^m - X_k^m| - \varepsilon), \quad (11)$$

где $\theta(s)$ — функция Хевисайда, а $|\cdot|$ — подходящая векторная норма. Асимптотика $C_m(\varepsilon) \propto \varepsilon^\nu$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ позволяет определить корреляционную размерность наблюдаемой $\nu \leq c(\Omega)$ как наклон прямолинейного участка графика корреляционного интеграла, построенного в двойной логарифмической шкале. Поскольку этот наклон различен для разных m , размерность определяют по минимальному m , для которого эта зависимость достигает насыщения [23]. Для гауссовского шума насыщение отсутствует и $\nu = m$.

Для "коротких" зашумленных рядов используют модифицированный корреляционный интеграл с Гауссовским ядром. При этом, в оценке близких пар участвуют все точки, с весами, распределенными по нормальному закону. Такой прием кроме корреляционной размерности позволяет одновременно оценить динамическую энтропию и уровень шума.

Фрактальная аппроксимация и эмбедология в применении к Каспию. Мы использовали фрактальную аппроксимацию для 100-летних палеоданных уровня с 13900 г. А.С., чтобы получить эквидистантный ряд с 10-летним разрешением (рисунок 2).

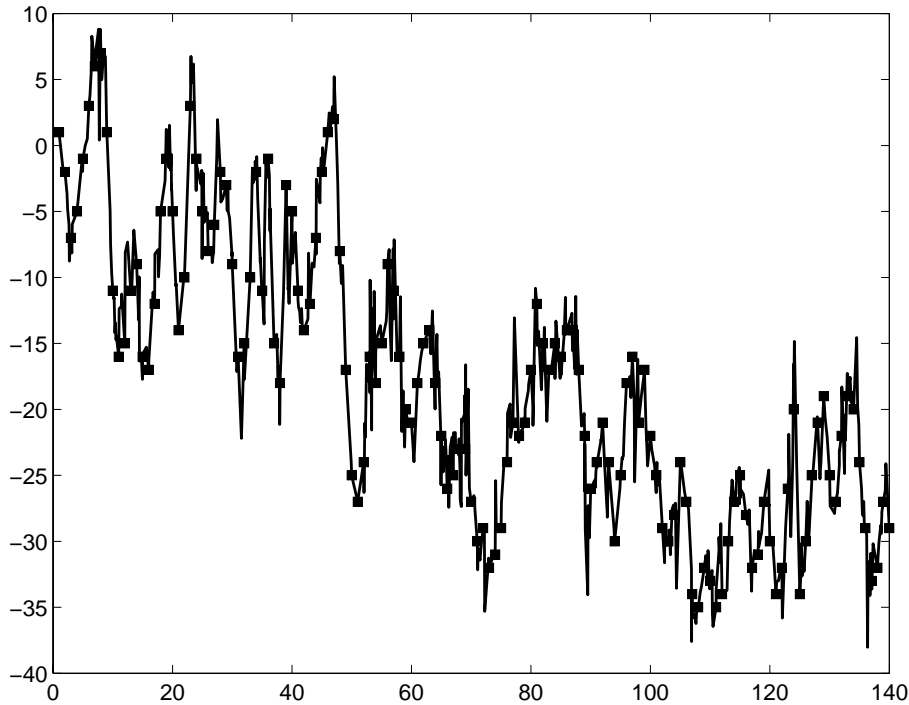


Рис. 2: График фрактальной аппроксимации 100-летнего ряда уровня. Квадраты-реальные значения, линия-аппроксимация со скейлинговым показателем в диапазоне $[-0.5, 0.5]$.

Разумеется, полученная аппроксимация содержит значительные метрические искажения, но они не столь существенны для топологической реконструкции аттрактора. На рисунках 3–4 приведены 3D реконструкции аттракторов с помощью алгоритма Такенса по временным рядам палеоданных [8]. Рисунки показывают, что на двух разных масштабах времени динамика уровня *бистабильна*: фазовые портреты демонстрируют спонтанные переходы между состояниями высокого и низкого уровня вдоль диагонали 3D реконструкции. Тот же эффект для наиболее короткого (инструментального) периода наблюдается на рисунке 1.

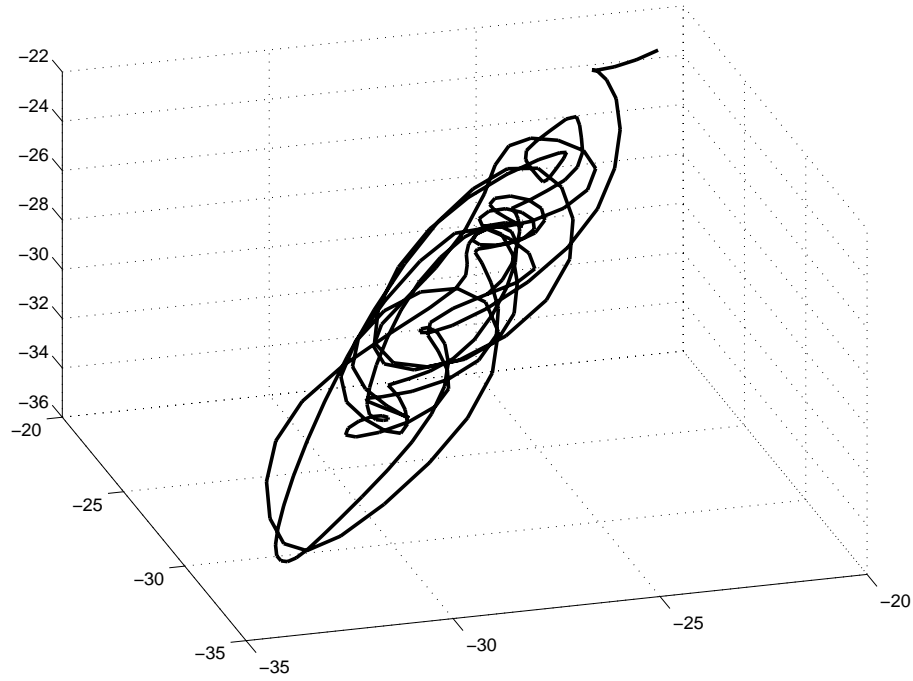


Рис. 3: 3D реконструкция фазового портрета временного ряда вариаций уровня на масштабах времени около 250 лет. Сглаженная выборка 10-летних данных.

На рисунке 5 приведены наклоны стандартных корреляционных интегралов для инструментального периода. Наблюдается хорошее плато вблизи $\ln \varepsilon \approx -3$. Корреляционная размерность $\nu = 2.9$; целая часть может быть объяснена существованием полугодовой и годовой моды, а дробная часть указывает на возможное присутствие детерминированного хаоса. Используя Гауссовское ядро, мы оценили размерность того же ряда, после сглаживания фильтром Уиттекера и нашли $\nu = 1.6 + 0.06$ и $K = 0.013$ для динамической энтропии. Эта оценка согласуется с предыдущей $\nu = 2.9$, поскольку после фильтрации исчезла сезонная мода. Оценки корреляционной размерности и положительная K энтропия не противоречат гипотезе о сценарии Динамического Хаоса [30] в колебаниях уровня Каспия.

Нейропрогноз. В простейшем случае *линейного прогноза* [24], предсказание $\hat{x}(n)$ отсчета $x(n)$ временного ряда $x(t = n\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ на один шаг является *линейной* функцией предшествующих значений:

$$\hat{x}(n) = a_1 x(n-1) + \dots + a_k x(n-k). \quad (12)$$

Порядок авторегрессии оценивают обычно пользуясь критерием Акайке. Веса a_i вычисляются так, чтобы ошибки предсказания

$$w(n) = x(n) - \hat{x}(n); \quad n = 1, 2, \dots, N-k, \quad (13)$$

были независимыми случайными переменными. Если ввести оператор сдвига отсчета на один шаг назад: $T^2 \equiv T(Tx(n)) = x(n-1)$, то получим:

$$\left(1 - a_1 T - \dots - a_k T^k\right) x(n) \equiv S_k[T] x(n) = w(n). \quad (14)$$

Таким образом, линейное предсказание эквивалентно действию авторегрессионного (AR) фильтра, на вход которого подается белый шум. Предсказание на p шагов достигается итерированием AR-фильтра. Среднеквадратическая ошибка предсказания, при $p \rightarrow \infty$, стремится

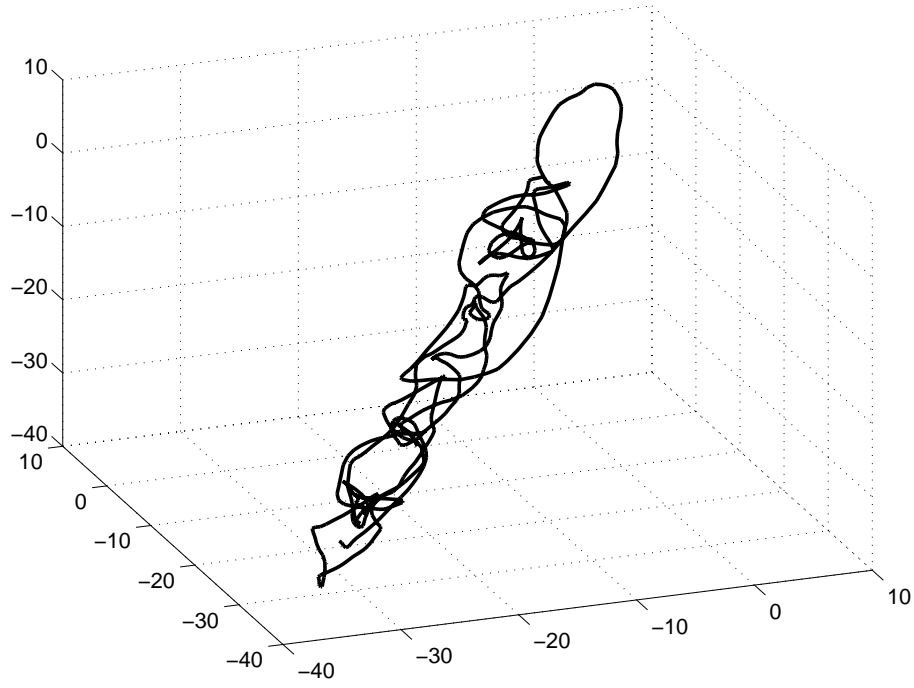


Рис. 4: 3D реконструкция динамики уровня данных, полученных после фрактальной аппроксимации 100-летних значений (13900г.А.С. - 1900г.А.Д.).

к постоянной (дисперсии σ_x^2), для стационарного временного ряда и резко возрастает с p для нестационарной модели.

В случае *локального многомерного прогноза* предполагается, что сигнал продуцируется автономной линейной динамической системой, которая описывается системой k уравнений, с решением:

$$\vec{q}(t) = \exp [At] \vec{q}(0), \quad (15)$$

где A — матрица коэффициентов, а $\vec{q}(0)$ — вектор начальных значений. Для дискретного случая $t = n\Delta t$ и:

$$\vec{q}(n\Delta t) = \exp [A\Delta t] \exp [A(n-1)\Delta t] \vec{q}(0) = \exp [A\Delta t] \vec{q}((n-1)\Delta t). \quad (16)$$

Теперь очевидно, что исходное решение удовлетворяет разностному уравнению первого порядка $n\Delta t = n$:

$$\vec{q}(n) = B\vec{q}(n-1), \quad B = \lim (\exp [A\Delta t]) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A\Delta t)^m}{m!}. \quad (17)$$

Исключая из этой системы $k-1$ переменную, получим, например, для $q_j(n)$:

$$\left(1 - c_{j1}T - c_{j2}T^2 - \dots - c_{jk}T^k\right) q_j(n) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, *детерминированная система* эквивалентна действию *линейного, безэнтропийного инвариантного относительно сдвига фильтра*.

Нелинейный локальный *AR*-прогноз сводится к поиску наилучшей аппроксимации непрерывной нелинейной функции:

$$\hat{x}(n) = \Phi(x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)). \quad (19)$$

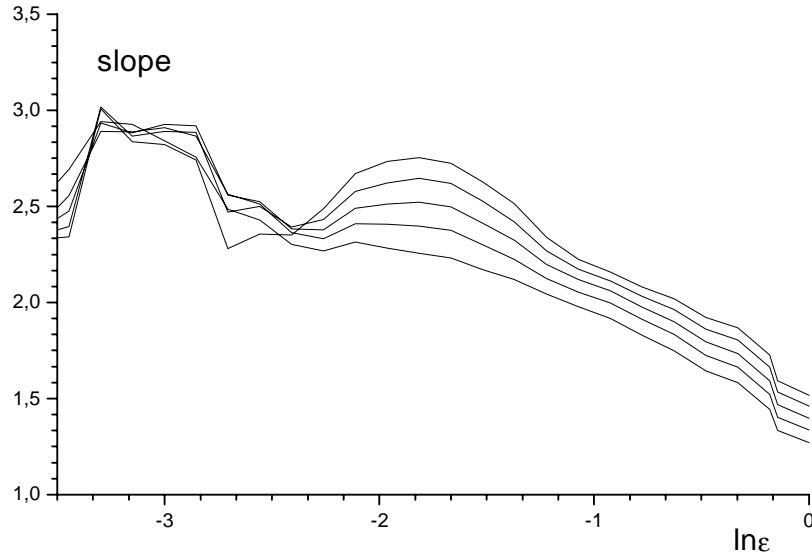


Рис. 5: Слопы корреляционного интеграла для массива месячных значений (1908 точек). Ряд стандартизован. $\tau = 3, \sigma = 1, 5$. Размерности погружения $m = 5 - 9$.

Здесь m — размерность вложения временного ряда в R^m , а аргументом Φ является вектор фазовой точки реконструкции. Существует несколько подходов для поиска такой аппроксимации. В данной работе для этого используется искусственная нейронная сеть [1, 25–29]. Последняя состоит из формальных нейронов, образующих слои: входной, на который подаются *примеры* обучающей выборки, скрытый (один или несколько) и выходной, где результат вычисления сети сравнивается с известным ответом, для оценки функции ошибки. Математически, каждый нейрон представляет собой адаптивный сумматор с нелинейным преобразователем. Например, если $n, s \geq 1$ целые числа, выход нейронной сети с одним скрытым слоем (т.н. *перцептрон*) содержащим n нейронов отображает входной вектор $\mathbf{x} \in R^s$, в скаляр вида:

$$z = \sum_{k=1}^n a_k \phi(\mathbf{w}_k^I \mathbf{x} + b_k), \quad (20)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{w}_k^I \in R^s$ — веса нейронов скрытого слоя, ϕ — функция активации нейрона, b_k — порог и a_k — вещественные числа. В качестве $\phi(*)$ обычно выбирают логистическую функцию $\phi(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ или другую *сигмоидальную* функцию, обеспечивающую хорошую дискриминацию в задачах классификации. Если существует второй скрытый слой, содержащий m нейронов, то промежуточные переменные z_j (выходные значения каждого j -го нейрона) из первого скрытого слоя подвергаются аналогичной обработке и на выходе формируются числа (*ответы*):

$$z = \sum_{l=1}^m c_l \phi(\mathbf{w}_l^{II} \mathbf{z} + d_l). \quad (21)$$

Полученные по всем примерам множество значений z сравнивается с известными ответами z_t и полученная ошибка используется для исправления весов. Коррекция весов происходит одновременно с обработкой входного сигнала при его передаче от входа к выходу, но в обратном направлении: сначала исправляются веса n -го слоя, затем $n-1$ и т.д. Поэтому, описанный метод обучения часто называют методом *обратного распространения ошибки*. Можно показать [27–

29], что такая схема, реализованная на многослойной сети, может равномерно аппроксимировать с произвольной точностью любую непрерывную функцию многих переменных, заданную в компактной области.

На практике для построения локального многомерного прогноза на входные нейроны последовательно подаются вектора Такенса

$$X_j^m \equiv (x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-m+1})$$

(m — размерность вложения), выходом служит известные прошлые значения временного ряда x_{j+1} . После обучения сети на известных примерах и тестирования на примерах с известными ответами, но не включенными в обучение, сеть вычисляет (предсказывает) $N+1$ значение ряда. Многошаговое предсказание, в простейшем варианте, сводится к итерации этого процесса. В общем случае многошаговое предсказание получают использованием оптимального лага, не равного единице. Горизонт прогноза T определяется максимальным Ляпуновским показателем $\lambda_m : T \propto \lambda_m^{-1}$. Мы использовали в этой работе базовый менеджер нейронных сетей MultiNeuron (Красноярск, ИВМ) в режиме предиктора и сети, написанные в пакете *MatLab* — 5.2.

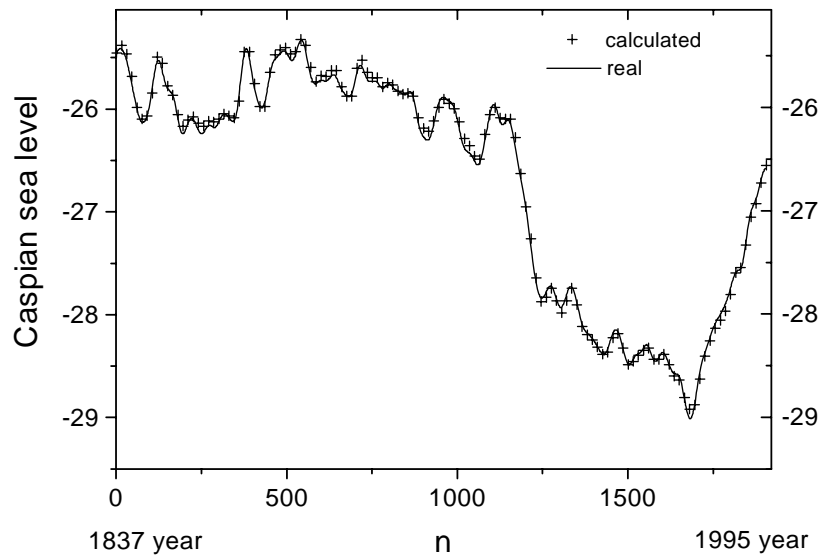


Рис. 6: График инструментального временного ряда уровня Каспия и значений, вычисленных нейронной сетью.

Для эксперимента был взят инструментальный временной ряд уровня Каспия. На рисунке 6 приведены результаты эпигноза (прогноза в прошлое) значений, полученных нейронной сетью, вместе с реальными отсчетами. Совпадение двух кривых очень хорошее. Полученные результаты показывают, что сочетание методов алгоритмического моделирования с нейросетевыми технологиями эффективны для получения практического прогноза динамики сложных природных систем.

Дальнейший прогресс в этой задаче предполагает использование векторных нейронных сетей (гипернейронов). В такой сети функциями активации является множество сжимающих отображений, наделенное вероятностной мерой. Гипернейрон позволяет получить аттрактор множества входных векторов и реализовать векторный прогноз.

Цитированная литература

1. Сб.под редакцией Новикова Е. А. // Нейроинформатика. Новосибирск, Наука, 1998. 296 с.
2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 364.
3. Mecke K. R. // in: Metapher und Modell, Wuppertaler Kolloquium zu literarischen und wissenschaftlichen Formen der Wirklichkeitskonstruktion, W. Bergem, L. Bluhm und F. Marx (Hg.) Wissenschaftlicher Verlag Trier. 1996. P. 225 – 252.
4. Rapp P. E., Schmah T. I., Mees A. I. // Physica D. 1999. V. 132. P. 133 – 149.
5. Takens F. // By Ed. G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. N.Y.: Pitman. 1983. P. 314 – 333.
6. Sauer T., Yorke J. A., Casdagli M. // J. Statist. Phys. 1991. V 65. №3/4. P. 579 – 616.
7. Makarenko N. G. //in Problems of Geospace 2, Proc.of the Inter. Conf. "Problems of Geospace", Verlag der Osterreichischen akad. Der Wissenschaften, Wien. 1999. P. 11 – 19.
8. Рычагов Г. И. // Комплексные исследования Каспийского моря. МГУ. 1974. Вып. 4. С. 18.
9. Садыков Ж. С., Голубцов В. В., Дуйсебаев Ж. Д., Ли В. И. // ДАН РК. 1995. Т. 6. С. 9 – 19.
10. Тренин В. А., Добровольский А. А. // Метеорология и гидрология. 1991. №11. С. 123 – 125.
11. Раткович Д. Я. // Водные ресурсы. 1993. Т. 20, № 2. С. 160 – 179.
12. Иванов И. В., Васильев И. В. Человек, природа и почвы рын-песков Волго-Уральского междуречья в голоцене. Москва. Интеллект. 1995.
13. Раткович Д. Я. // Водные ресурсы. 1986. №5. С. 3 – 23.
14. Будыко М. И., Ефимова И. А., Лобанов В. В. // Метереология и гидрология. 1968. № 5. С. 86 – 94.
15. Смирнова К. И. // Тр. Гидрометцентра СССР. 1972. Вып. 94. 123 с.
16. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. М.: МГУ. 1992. 395 с.
17. Раткович Д. Я. // Водные ресурсы. 1986. №5. С. 3 – 23.
18. Герман В. Х., Левиков С. П. Вероятностный анализ и моделирование колебаний уровня моря. Ленинград: Гидрометеиздат. 1988. 230 с.
19. Раткович Д. Я. // Водные ресурсы. 1988. №2. С. 30 – 39.
20. Grabb M. Notes on Fractals and Discrete Dynamical Systems// Dep of Math. Sc., Univ. Of Aberdeen, AB25 3UE, 2000.
21. Barnsley M. F. // Constructive approximation. 1986. P. 303 – 329.
22. Froyland G. Ergodic Theory of Differentiable Dynamical System. Notes for a Short Course //http:www-math.uni-paderbom.de/ froyland.
23. Ding M., Grebogi C. et al. // Physica D, 69, 1993, 404–424.
24. Serio C. // Il Nuovo Cimento. 1992. V. 107B. P. 681 – 701.
25. Elsner J.B. // J.Phys. A: Math. Gen. 1992. A(25). P. 843 – 480.
26. Kulkarni D. R., Pandya A. S., Parikh J. C. Dynamic prediction from time series data - An artificial Neural network approach// Sissa preprint. comp-gas/9707001.
27. Hornik K., White H. // Neural Networks. 1989. V. 2. P. 359 – 366.
28. Горбань А. Н. // Сиб.матем.ж. 1998. №1. С. 11 – 34.
29. Mhaskar H. N. // Neural networks for optimal approximation of smooth and analytic functions. 1996. V. 8. P. 164 – 177.
30. Eckman J. P. Ruelle D. // Rev.Mod.Phys. 1985. Vol. 57. No. 3. P. 617 – 656.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.938

РАВНОМЕРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ РАЗДЕЛЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВА МОРФИЗМОВ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

М. И. РАХИМБЕРДИЕВ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, marat@math.kz

Устанавливаются необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной разделенности линейного расширения динамической системы на векторном расслоении в терминах сильной положительности автоморфизма, порождающего динамическую систему.

Пусть (E, p, B) — метризованное векторное расслоение со слоем R^n (E — пространство расслоения, p — проекция, B — база, полное метрическое пространство), (X, χ) — автоморфизм этого векторного расслоения (см. [1]). Считаем, что автоморфизм (X, χ) удовлетворяет следующим условиям:

а) X — гомеоморфизм E на E , χ — гомеоморфизм B на B , сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X при всяком $b \in B$ есть невырожденное линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на слой.

б) $\sup_{b \in B} \max\{\|X[b]\|, \|(X[\chi b])^{-1}\|\} < +\infty$.

Пусть X^m — динамическая система на E , χ^m — динамическая система на B , $m \in Z$. Здесь Z — множество целых чисел. Динамическая система X^m называется линейным расширением динамической системы χ^m (см. [2]).

Определим согласно [2] гомоморфизм Ξ в группу целых чисел Z в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B) . В этом случае будем говорить, что семейство $(X^m, \chi^m)_{m \in Z}$ определяет гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(Z, \text{Aut}(E, p, B))$.

Определение 1. Гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(Z, \text{Aut}(E, p, B))$, порождаемый семейством (X^m, χ^m) , $m \in Z$, удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделенности с индексом $k \in \{1, \dots, n-1\}$, если существуют такие вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для всякого $b \in B$ пространство можно так разложить в прямую сумму подпространств R^k и R^{n-k} , что для любых $\xi \in R^{n-k}$, $\eta \in R^k$, $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ и любых $t \in Z^+$, $s \in Z^+$, $t \geq s$, имеет место неравенство

$$|X^t \xi| |X^s \xi|^{-1} \geq \alpha |X^t \eta| |X^s \eta| \exp(\beta(t-s)). \quad (1)$$

Keywords: *Dynamical system, morphism of vector bundle, exponential separation*

2000 Mathematical Subject Classification: 34D08

© М. И. Рахимбердиев, 2001.

Это определение есть модификация условия экспоненциальной разделенности семейства морфизмов векторного расслоения, данного в [3]. Отличие приведенного здесь определения состоит в том, что оно включает дополнительное требование о независимости констант α, β от выбора $b \in B$. Заметим также, что в упомянутом определении из [3] для каждого $b \in B$ подпространство R^k задается единственным образом, а R^{n-k} при этом может быть выбрано как любое алгебраическое дополнение к подпространству R^k в $p^{-1}(b)$. Заметим, что константа α зависит от выбора R^{n-k} , поэтому для включения условия равномерности по b требуем существования какого-либо разложения пространства $p^{-1}(b)$ в прямую сумму R^k и R^{n-k} , то есть R^{n-k} в этом случае уже не может быть любым алгебраическим дополнением к R^k . Чтобы подчеркнуть единственность подпространства для любого b будем его обозначать (как и в определении, данном в [3]) через $R_0^k(b)$.

Цель данной работы получить условия существования равномерной экспоненциальной разделенности, аналогичные полученным в [4, 5] для случая экспоненциальной разделенности семейства морфизмов в точке. Рассмотрим сначала случай экспоненциальной разделенности индекса $n - 1$.

Для данного векторного расслоения (E, p, B) определим следующим образом расслоение (E', p', B) (не векторное, в соответствии с определением на стр. 22 из [1]), которое является подрасслоением расслоения (E, p, B) .

Обозначим через конус в $p^{-1}(b)$. Под конусом K в мы будем понимать такое выпуклое замкнутое множество, что если $x \in K$, то $\tau x \in K$ для любого $\tau > 0$ и, если $x \in K$, $-x \in K$, то $x = 0$. Кроме того, будем считать, что конусы телесные (с непустой внутренностью).

Пусть $E' = \bigcup_{b \in B} K(b)$, $p' = p$ на $K(b)$. Такое расслоение назовем *конусным*.

Известное понятие положительности и сильной положительности линейного оператора распространим на автоморфизмы векторного расслоения.

Определение 2. Будем говорить, что автоморфизм $(X, \chi) : (E, p, B) \rightarrow (E, p, B)$ положителен в точке $b \in B$ относительно конусного подрасслоения векторного расслоения (E, p, B) , если $X[b]E'_b \subset E'_b$.

Если автоморфизм $(X, \chi) : (E, p, B) \rightarrow (E, p, B)$ положителен в точке $b \in B$, относительно некоторого конусного подрасслоения, то такой автоморфизм назовем *положительным в точке*, при этом предполагая, что такое подрасслоение существует. Если же автоморфизм положителен в любой точке, то его назовем просто *положительным*.

Определение 3. Автоморфизм $(X, \chi) : (E, p, B) \rightarrow (E, p, B)$ назовем *сильно положительным*, если существует такое $\Delta > 0$, что для каждой точки любые автоморфизмы $(Y, \chi) : (E, p, B) \rightarrow (E, p, B)$, удовлетворяющие условию

$$\|Y[b](X[\chi b])^{-1} - I\| + \|X[b](Y[\chi b])^{-1} - I\| < \Delta,$$

положительны в этой точке.

Теорема 1. Гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(Z, \text{Aut}(E, p, B))$, порождаемый семейством (X^m, χ^m) , $m \in Z$, равномерно экспоненциально разделен с индексом $n - 1$ тогда и только тогда, когда существует такое $s \in N$, что автоморфизм $(X^s, \chi^s) : (E, p, B) \rightarrow (E, p, B)$ сильно положителен.

Доказательство 1. Необходимость. Пусть гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(Z, \text{Aut}(E, p, B))$ удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделенности с индексом $n - 1$ ($n > 1$).

А. Докажем, что

$$\inf_{b \in B} \inf_{m \in N} \angle(X^m R^1, X^m R_0^{n-1}(b)) > 0,$$

где $\angle(\cdot, \cdot)$ — угол между векторными подпространствами, определяемый как *inf* углов между векторами из этих подпространств.

В силу условия б), наложенного на автоморфизм (X, χ) , существует такое число $a > 0$, что для любого $b \in B$ имеет место неравенство

$$\max\{\|X[b]\|, (\|X[\chi b]\|)^{-1}\} < a.$$

Следовательно, для любых $b \in B$, $m \in Z$ выполняется неравенство

$$\|X^m[b]\| \leq a^m \quad (2)$$

Фиксируем любую точку $b \in B$. Для произвольных единичных векторов $e_1 \in R^1$, $e_2 \in R_0^{n-1}(b)$ имеем

$$\begin{aligned} a^m \|e_1 - e_2\| &\geq \|X^m(e_1 - e_2)\| = \|X^m e_1 - X^m e_2\| \geq |\|X e_1\| - \|X e_2\|| = \\ &= \|X^m e_1\| |1 - \|X^m e_2\| \|X^m e_1\|^{-1}| \geq a^{-m} |1 - \alpha e^{-\beta m}|. \end{aligned}$$

Если выбрать такое m , что $\alpha e^{-\beta m} < 1/2$, то получаем $\|e_1 - e_2\| > 0, 5a^{-2m}$ (фиксируем m , удовлетворяющее этому неравенству, далее значение m будем уточнять).

Пусть γ — угол между векторами e_1, e_2 . Тогда в силу выбора m и равенства $2 \sin(\gamma/2) = \|e_1 - e_2\|$ получаем, что $\gamma > 2 \sin(a^{-m}/4)$. отсюда и из произвольности b вытекает справедливость утверждения п. А.

Б. Установим существование конусного подрасслоения расслоения (E, p, B) , инвариантного относительно автоморфизма (X, χ) .

Фиксируем $m \in N$, $b \in B$ и выберем в слое $p^{-1}(b)$ какой-либо ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , а в слое $p^{-1}(\chi^m b)$ — ортонормированный базис h_1, \dots, h_n . Пусть U — изометрическое линейное отображение из $p^{-1}(b)$ в $p^{-1}(\chi^m b)$, такое что $h_i = U e_i, i = 1, \dots, n$.

Обозначим: $S = U^{-1} X^m [b]$. Оператор S задает отображение слоя $p^{-1}(b)$ в себя. Поэтому имеем $(Sx, Sy) = (S^* Sx, y) = ((X^m [b])^* X^m [b]x, y)$. Данное скалярное произведение в базисе e_1, \dots, e_n пространства $p^{-1}(b)$ задается равенством $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \xi^i \eta^i$, где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n), \eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$.

Пусть x_1, \dots, x_n — ортонормированная система собственных векторов симметрического оператора $S^* S$, отвечающих собственным значениям $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Имеем

$$d_i = (S^* S x_i, x_i) = (S x_i, S x_i) = |X^m [b] x_i|^2, \quad i = 1, \dots, n;$$

причем, векторы x_1, \dots, x_n образуют ортонормированную систему в $p^{-1}(b)$, а векторы $X^m [b] x_1, \dots, X^m [b] x_n$ — ортогональную в $p^{-1}(\chi^m b)$.

Выберем $m \in N$ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha \exp(m\beta) > 1$, тогда, в силу (1), имеем $|X^m \xi| > |X^m \eta|$ для любых таких, что

$$\xi \in R^1, |\xi| = 1, \eta \in R_0^{n-1}(b), |\eta| = 1.$$

Так как

$$d_1 = \max_{x \in R^n, |x|=1} |X^m [b] x|, d_2 = \min_{R^{n-1} \in G_{n-1}(R^n)} \max_{x \in R^{n-1}, |x|=1} |X^m [b] x|,$$

то в силу условия экспоненциальной разделенности индекса $n - 1$ выполняется неравенство $d_1 > d_2$.

Докажем, что существует такое $\delta > 0$, что круговые конусы $K(b)$, оси которых направлены вдоль векторов $x_1(b)$ с углами между осью и образующими конуса, равными δ , образуют требуемое конусное подрасслоение.

Пусть

$$\inf_{b \in B} \inf_{m \in N} \angle(X^m R^1, X^m R_0^{n-1}(b)) = \gamma.$$

В силу п. А $\gamma > 0$.

Покажем, что существует такое $m \in N$, что угол между подпространством $R_0^{n-1}(b)$ и подпространством L — ортогональным дополнением к вектору $x_1(b)$ меньше $\gamma/2$.

Действительно, если это не так, то представив всякий единичный вектор $\eta \in R_0^{n-1}(b)$ в виде $\eta = \cos \theta x_1(b) + \sin \theta e_1$, где θ — угол между векторами η и $x_1(b)$, e_1 — единичный вектор из подпространства L , получаем

$$X^m[b]\eta = \cos \theta X^m[b]x_1(b) + \sin \theta X^m[b]e_1.$$

В силу ортогональности векторов в правой части равенства имеем

$$|X^m[b]\eta| \geq \cos \theta d_1 [\geq \cos(\pi/2 - \gamma/2)] d_1 \geq \sin(\gamma/2)d_1.$$

С другой стороны, учитывая принадлежность вектора η подпространству $R_0^{n-1}(b)$, приходим к неравенству

$$|X^m[b]\eta| \leq \alpha^{-1} \exp(-\beta m) d_1.$$

В результате при $m > -\beta^{-1} \ln(\alpha \sin(\gamma/2))$ получаем противоречивые неравенства. Следовательно, существует требуемое m , которое и выберем.

Теперь, полагая $\delta = \pi/2 - \gamma/2$, покажем, что конусы такого раствора образуют инвариантное конусное подрасслоение, удовлетворяющее всем необходимым требованиям.

Действительно, инвариантность конуса $K(b)$, вытекает из того, что $d_1 > d_2$, подпространство L пересекается с конусом $K(b)$ только в нуле. Далее, значение числа m уточняем так, чтобы оператор $X^m[b]$ был сильно положителен относительно конуса $K(b)$.

Этот факт доказан в теореме из [4]. Равномерность условия экспоненциальной разделенности и неравенство (2) позволяет распространить все рассуждения, проведенные для данной точки b на любую из B . И, наконец, максимальное из выбранных в процессе доказательства число m обозначим через s . Необходимость доказана.

2. Достаточность. Пусть существует конусное подрасслоение, удовлетворяющее условию теоремы. Тогда в соответствии с доказанным в [4] (из леммы и теоремы в части достаточности) имеет место экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов индекса $n - 1$ в точке b . Так как такое утверждение справедливо для любой точки $b \in B$, то остается показать, что константы α, β в условии экспоненциальной разделенности можно выбрать независимо от b .

Допустим, что требование равномерности по b не выполняется, тогда это означает, что существует такая последовательность $b_i \in B, i = 1, 2, \dots$, что экспоненциальная разделенность в каждой точке выполняется с постоянными α_i, β_i , причем так, что при по крайней мере одно из условий $\alpha_i \rightarrow 0, \beta_i \rightarrow 0$ имеет место. \Rightarrow тогда аналогично тому, как установлено при доказательстве достаточности теоремы в [4], существуют такие α_i, β_i , что для данных s, Δ автоморфизм (X^s, χ^s) не удовлетворяет условию сильной положительности в некоторой точке b . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь условие экспоненциальной разделенности с произвольным индексом. Обозначим $\xi = (E, p, B)$. Операция внешнего умножения, непрерывная на категории векторных пространств, определяет при $k \leq n$ для векторного расслоения его k -ю внешнюю степень $\bigwedge^k \xi = (\bigwedge^k E, p_k, B)$. Риманова метрика на ξ порождает риманову метрику на $\bigwedge^k \xi$. Отображение $\bigwedge^k X : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k E$ определяется с помощью послыоного отображения $(\bigwedge^k X)[b] = \bigwedge^k X[b]$ слоя $p_k^{-1}(b)$ на слой $p_k^{-1}(\chi b)$.

В [5] доказано, что гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(N, \text{Aut}(E, p, B))$, порождаемый семейством (X^m, χ^m) , экспоненциально разделен с индексом $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ в точке $b \in B$ тогда и только тогда, гомоморфизм $\Xi^{n-k} \in \text{Hom}(N, \text{Aut}(\bigwedge^{n-k} E, p_{n-k}, B))$, порождаемый семейством $(\bigwedge^{n-k} X^m, \chi^m)$, $m \in N$, экспоненциально разделен с индексом $n - 1$ в точке $b \in B$. Следовательно, применив теорему 1 к автоморфизму $(\bigwedge^{n-k} X, \chi)$ векторного расслоения $(\bigwedge^k E, p_k, B)$

можно получить аналог теоремы 1 для произвольного индекса экспоненциальной разделенности.

Теорема 2. Гомоморфизм $\Xi \in \text{Hom}(Z, \text{Aut}(E, p, B))$, порождаемый семейством (X^m, χ^m) , $m \in N$, равномерно экспоненциально разделен с индексом $k \in \{1, \dots, n-1\}$ тогда и только тогда, когда существует такое $s \in N$, что автоморфизм

$$\left(\bigwedge^{n-k} X^s, \chi^s\right) : \left(\bigwedge^{n-k} E, p_{n-k}, B\right) \rightarrow \left(\bigwedge^{n-k} E, p_{n-k}, B\right)$$

сильно положителен.

Цитированная литература

1. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 3. С. 431 – 468.
3. Миллионщиков В. М. // Мат. сборник. 1984. Т. 124 (166). С. 451 – 485.
4. Рахимбердиев М. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 233 – 240.
5. Рахимбердиев М. И. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 121 – 124.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 504.3

СОЗДАНИЕ КОСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА И ИНФОРМАЦИОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

У. М. СУЛТАНГАЗИН

Институт космических исследований МОН РК
480100 Алматы, Шевченко ул., 15

Излагаются основные положения разработки космического и подспутникового мониторинга Казахстана. Приведены примеры решения ряда задач, выполненных Институтом космических исследований Министерства науки и образования РК в этом направлении.

За последние десятилетия получили широкое развитие аэрокосмические измерения природной среды с использованием оптических и радарных систем, установленных на платформах спутников и специальных самолетов. Весь процесс получения информации от бортовых спутниковых систем называется дистанционным зондированием или «remote sensing».

Метод дистанционного зондирования основывается, главным образом, на регистрации с аэрокосмических аппаратов отраженного электромагнитного излучения Земли в различных областях спектра. При этом измерение проводится ультрафиолетовым, видимым, инфракрасным, микроволновом диапазонах спектра. Именно в этих диапазонах обеспечивается прозрачность атмосферы. Характеристики отраженной солнечной радиации в видимом спектре очень чувствительные, например, к таким физико-химическим и биологическим параметрам земных образований, как содержание хлорофилла в зеленой массе, влажность и состав почвы, соленость воды и её загрязненность химическими сбросами. В то же время следует отметить, что столь высокая чувствительность характеристик принимаемой радиации видимого диапазона обуславливает его низкую помехоустойчивость к различным факторам в частности к таким, как атмосферные эффекты и облачность. Видимый диапазон требует освещения Солнцем земной поверхности.

Области ближнего и теплового ИК излучений, с точки зрения радиационных характеристик, хорошо реагируют на температурные изменения природных образований. В частности, с помощью ИК приборов можно обнаруживать участки растительности, пораженные болезнями, которые, как известно, имеют более высокую температуру, выявлять выходы геотермальных вод, глубинные разломы земной коры. Вероятно, что различные ИК радиации разных сельскохозяйственных культур связана с типом, происходящего в них фотосинтеза. Волны ИК диапазона не свободны от поглощения аэрозолью и молекулами газа. Важнейшим достоинством теплового ИК диапазона является возможность видения как днем, так и ночью.

Keywords: *Comic and field-work monitoring, agricultural and ecological preoblem*

2000 Mathematical Subject Classification: 92D40

© У. М. Султангазин, 2001.

Микроволны в отличие от волн ИК и видимого диапазонов способны проникать сквозь большие толщи земных покровов и льда. Более того электромагнитные волны СВЧ диапазона очень чувствительны к геометрическим характеристикам поверхностей, т.е. к степени шероховатости, а также к содержанию влаги в почве. Например, пятна нефти на море вызывают локальное изменение степени волнения, хорошо видимому на экране радиолокатора. Другим примером является возможность индикации роста и созревания сельскохозяйственных культур за счет изменения геометрии. Породы деревьев можно различать, используя геометрию листьев и кроссполаризационный метод. К существующим недостаткам средств СВЧ диапазона относятся их большой вес, габариты и высокая энергопотребность.

Разнообразие видов и состояний земных образований в большинстве случаев не позволяет их обнаруживать и исследовать на основе измерения излучения в какой-либо одной зоне спектра. Поэтому развитие исследований Земли из космоса пошло по пути измерения излучения отраженных от исследуемых объектов одновременно в нескольких узких спектральных участках. Такие методы на практике носит название многоспектральных. Важным достоинством многоспектрального метода является реальная возможность автоматизации информации, полученной от спутников в цифровой форме. Важнейшими характеристиками, формируемого изображения является пространственная и радиометрическая разрешающие способности съемочной аппаратуры. Пространственная разрешимость зависит от длины волны принимаемого излучения, диаметра объектива (размеров антенны), высоты орбиты. Радиометрическая разрешающая способность определяется, прежде всего, шириной динамического диапазона, используемого датчика. Например, широко распространенный прибор AVHRR, применяемый на спутнике NOAA, имеет пространственное разрешение 1 км, а радиометрическое соответствует 1024 уровням яркости.

Прогресс в области космонавтики и высокий технический уровень современных средств приема, накопления, хранения, автоматизированной обработки и распределения космической спектрофотометрической информации позволяет ставить и решать разнообразные задачи в целях изучения, освоения и рационального использования природных ресурсов. Используя данные дистанционного зондирования, человечество расширило свои знания о глобальных изменениях климата, динамике изменения растительного покрова и биологической продуктивности океанов озоновом слое.

Современные космические системы дистанционного зондирования включают геостационарные, солнечно-синхронные и полярные орбитальные спутники. Они обеспечивают глобальные наблюдения и высокую оперативность передачи данных, которые используют для оперативного и долгосрочного прогноза погоды, наблюдения за озоновым слоем, изучения состояния сельскохозяйственных полей, изменения химического состава атмосферы, опустынивания и мониторинга за лесными массивами.

Однако, дистанционное измерение позволяет получить лишь часть необходимой информации для изучения глобальных экологических процессов. Помимо этого, в редких случаях, для более эффективного использования дистанционных измерений необходимо непосредственные контактные измерения на поверхности суши и океана.

Важнейшей частью исследований по космическому земледелию должны стать наземные измерения на специально выбранных тестовых участках. Даже при наличии адекватного финансирования разработок, по созданию наблюдательных систем, польза от реализации, соответствующих международных проектов будет ограниченной, если это не будет сообществом ученых и лиц, принимающих решения на разных уровнях.

Текущее состояние исследований по космическому земледелию характеризуется фрагментарностью, отсутствием единой методики решения, возникающих задач. Имеются отдельные разрозненные исследования по рассматриваемой проблематике. Научная база соответствующих исследований лишь только формируется.

Правильный выбор государственной политики в области сельского хозяйства, рационального использования природных ресурсов и управления территориями должны, главным образом,

опереться на объективную, оперативную и систематизированную информацию и состоянии природы, а также о динамике ее изменения в пространстве и времени под воздействием антропогенной нагрузки. Такую информацию можно получить в результате наземного, воздушного, космического мониторинга. Сегодня многие страны мира занимаются развертыванием национальных систем мониторинга. В 1992 году по заданию Министерства науки и новых технологий Институт космических исследований разработал техническое задание системы космического и подспутникового мониторинга территорий Казахстана.

Назначение и цель разработки:

1. Оперативный контроль экологической обстановки территории республики, регионов с повышенной антропогенной нагрузкой.
2. Контроль и оповещение о чрезвычайных происшествиях и катастрофах.
3. Оценка и контроль рационального использования природных ресурсов.

Мониторинг представляет собой трехуровневую иерархическую систему. Представленная система предусматривает реализацию следующих основных функций:

- Сбор экологических данных, т.е. проведение регулярных контактных и дистанционных измерений параметров окружающей среды с использованием средств космического, воздушного и наземного базирования.
- Передача данных с использованием спутниковых, радиолинейных, проводных и оптоволоконных каналов связи.
- Приема и первичной обработки данных различных систем наблюдения.
- Накопление и систематизация данных.
- Решение прикладных задач мониторинга.

Полная реализация (развертывание) предложенной схемы может осуществляться только лишь в рамках государственной программы. Определенная часть этой программы реализована уже сейчас в условиях Института космических исследований. В 1994 году введен в эксплуатацию Центр приема и обработки космической информации при Институте космических исследований. В настоящее время в этом Центре осуществляется прием информации в оперативном режиме со спутниковой серии NOAA (США), которые вращаются на орбите с высотой 850–1200 км с наклоном в 81–830 градуса. Они обеспечивают многозональную съемку поверхности Земли с шириной полосы обзора 3000 км и разрешением 1000 м с периодом повторения 12 часов. Передача информации с борта этих космических аппаратов (КА) на наземные пункты в пределах их зоны радиовидимости.

На сегодняшний день реально доступными для Казахстана являются данные спутников серии NOAA. Эти данные могут эффективно использоваться для мониторинга снежного покрова, засухи, анализа условий вегетации, оценки площадей посевов, оценки урожайности и условий посевных площадей и пастбищ.

1. Технология решения сельскохозяйственных задач

В Институте космических исследований разработаны технологии мониторинга сельскохозяйственных угодий Казахстана. Методы состояния растительности по данным AVHRR/NOAA основаны на использовании нормализованного дифференциального вегетационного индекса растительности (NDVI), который вычисляется по формуле:

$$VI = (Ch1 - Ch2)/(Ch2 + Ch1), \quad (1)$$

где *Ch1* — отраженное излучение в видимом (0,58–0,68 мкм), а *Ch2* — в ближнем инфракрасном (0,725–1,1 мкм) диапазонах.

Этот индекс связан с такими параметрами как площадь листьев, интенсивность фотосинтеза и биомасса. NDVI широко используется для картографирования растительности и является хорошим индикатором ее состояния.

US AID в 1994–95 годах финансировал совместные работы ученых США, Израиля и Казахстана по адаптации технологии оценки растительной биомассы и мониторинга засух с помощью индекса VCI для территории Казахстана.

Агроклиматические зоны увлажненности ранжируются по значениям показателя влажности — комплексного показателя, оценивающего баланс влаги в метровом слое почвы, кривая эволюции значений NDVI за вегетационный период отражает реакцию растений на температурно-влажностные условия их произрастания. В климатических условиях Казахстана фактор влажности является определяющим, поэтому значения NDVI в период максимального травостоя хорошо коррелировали с величиной показателя влажности. Используя имеющуюся базу данных, можно оценивать вариации показателя влажности, построить карты десятилетнего минимума, максимума, а также карты значений показателя влажности отдельных лет, оценка агроклиматических зон увлажненности. Средние значения NDVI за вегетационный период связаны с продуктивной способностью почв. Использование наземной картографической информации позволяет провести нормировку и после этого рассчитывать по спутниковым данным границы территорий, агроклиматические условия которых позволяют осуществлять земледелие. Соответственно, рассчитывать средние многолетние границы, их вариации для наиболее благоприятного или неблагоприятного года.

Спутниковая информация позволяет весьма точно фиксировать время начала бурного развития растений в весенний период. Цвет поверхности земли резко меняется. Опираясь на базу данных, осуществляется расчет сдвига начала вегетации в каждом минимальном полигоне (8×8 км) на территории Казахстана. Эта информация может использоваться для уточнения сроков сева. Кроме того, сдвиг начала вегетации является ранней характеристикой климатических особенностей текущего года. Если весна ранняя и теплая — велика вероятность сильной засухи по всей территории Республики. Если поздняя и холодная, то вероятность засухи минимальна. На сегодняшний день одной из важнейших проблем является резкое ухудшение экологической обстановки в Республике.

В связи со сложившейся обстановкой необходимы оперативные, периодические, прогнозные и базовые наблюдения за качественным и количественным состоянием земельных ресурсов, для современного выявления изменений, их оценки, предупреждения и устранения природных и антропогенных процессов с использованием космоснимков со спутников.

Значения индекса VCI и наземные наблюдения позволили адаптировать технологию, применяемую в США для оценки урожайности (биомассы) по спутниковым данным с NOAA, для территории Казахстана. В настоящий момент стоит задача развить эту технологию для получения более качественного прогноза. Аппаратура со спутников «Ресурс» и «Мир» с разрешением 10–14 метров в нескольких спектральных диапазонах, а также наземная почвенно-геоботаническая информация были использованы для оценки площадей посевов.

2. ГИС - технология

Наряду с построением математических и статистических моделей и мониторинга все большее значение приобретают разнообразные методы распознавания образов и экспертные системы, в особенности геоинформационные технологии (ГИС-технология).

Возможности современных ГИС-технологий при решении задач экологии и управления территориями огромные. Исследования в области экологии обычно связаны с привлечением специалистов различного профиля, в задачу которых входит эффективный анализ сложного комплекса процессов загрязнения. В связи с этим использование в этой области геоинфор-

мационных технологий требует применение модульного принципа, чтобы каждый специалист, используя общую достаточно разностороннюю базу данных, имел возможность независимо решать свою аналитическую задачу. Для экологической оценки территории по проведению природно-охранных мероприятий требуется использовать сложный комплекс пространственных и разновременных данных.

Очень часто приходится устанавливать пространственные и временные связи между источниками загрязнения, подземными полостями, гидрологическим режимом, условиями переноса и концентрации загрязнения и т.п. Необходимые для такой оценки данные могут иметь большой объем, возможно будут включать базовые карты, материалы космосъемок, карты инженерной инфраструктуры, схемы расположенных источников загрязнения, точки отбора пробы и прочее. Наряду с такими данными в работах экологической оценки огромное значение имеет динамическое моделирование условий разгрузки подземных вод и переноса загрязнения. Использование программного обеспечения и баз данных ГИС в принципе дает возможность непосредственно формировать точные инженерные планы реализации природно-охранных мероприятий. Кроме того, весь комплекс данных, описывающих в экологическом плане объект или территорию, необходимо увязывать с существующими нормативными документами и методами по контролю качества окружающей среды. В целом создание или адаптация существующей ГИС-технологии к условиям решения, рассматриваемого в проектах экологических проблем Казахстана, имеет целью обеспечение необходимыми современными информационно-вычислительными средствами обработки данных, их анализ и интерпретации в рамках экологической оценки и природно-охранных мероприятий. Возможность ГИС-технологий именно в плане решения экологической проблемы достаточно широки и включают следующие важные моменты:

- способность воспринимать, обеспечивать быстрый доступ и эффективную обработку огромных массивов данных различного типа и формата. К таким данным могут относиться цифровые аэро- или космические изображения, векторные картографические данные, цифровая семантическая информация, табличная и текстовая информация;
- система обеспечивает объединение разнохарактерных данных, позволяет реализовать необходимые связи между базами данных и средствами их анализа;
- система обеспечивает «открытость» для подключения необходимых прикладных моделей обработки, таких как оценка гидрогеологического режима, оценка изменений окружающей среды, анализ пространственных характеристик исследуемого участка, моделирование переноса загрязнения;
- важнейшая характеристика такой системы — ее доступность для пользователей, не являющихся узкими компьютерными специалистами. В качестве иллюстрации можно привести пример ГИС для решения конкретной экологической задачи, связанной с очисткой и оптимальным распределением водных ресурсов в бассейне реки Сыр-Дарья с учетом социально-экономических интересов республики в потребности Арала в водных ресурсах.

3. Прогноз динамики изменения состояния природных ресурсов северной части Приаралья с использованием данных дистанционного зондирования и наземного наблюдения.

Естественные кормовые угодья Казахстана занимают больше половины всей территории. Однако сильному антропогенному и экологическому воздействию подвержены районы Северного Приаралья, что в большей степени связано с общим уровнем Аральского моря. Одним из возможных путей улучшения экологической обстановки Южного Казахстана является отделение северной части Аральского моря от основной акватории в устье реки Сыр-Дарья. В связи

с этим возникает задача - прогноза влияния возможного изменения уровня Северной части Аральского моря на состояние прилегающего региона.

В настоящем проекте предлагается осуществить решение поставленной задачи, используя ретроспективный анализ данных дистанционного зондирования и наземные наблюдения по исследуемому региону.

Решение поставленной задачи предлагается провести в составе следующих основных этапов:

- установление современного состояния береговой линии Северной части Аральского моря и изучение состояния природных ресурсов прилегающего региона с использованием данных дистанционного зондирования и наземных измерений;
- проведение ретроспективного анализа влияния динамики изменения уровня Северной части Аральского моря на состояние природных объектов прилегающего региона;
- разработка прогнозных моделей влияния изменения уровня Северной части Аральского моря на состояние природных объектов прилегаемого региона;
- изучение выноса соли и пыли с высохшего дна Аральского моря;
- дальность полета аэрозолей и их распределение;
- распределение водных ресурсов двух рек Сыр-Дарья и Аму-Дарья с учетом.

4. Каспийские проблемы

Для эффективного использования природных ресурсов Каспийского моря необходимо, прежде всего, комплексное изучение физико-географических и геологических условий этого своеобразного по своей природе водоема.

Специфичность акватории Северо-восточного Каспия заключается в том, что в этой части шельфовое мелководье занимает площадь около 25% акватории Каспия. А объем сосредоточенной здесь воды составляет примерно 1% от объема всего моря.

Изучение шельфовой зоны Северо-восточного Каспия методами аэрокосмического зондирования и мониторинга с практической точки зрения имеет две приоритетные ценности. Во-первых, наиболее низкие восковые уровни моря совпали по времени с началом системного аэрокосмического изучения шельфа моря и материалы этих съемок позволяют «провести» акваторию моря вплоть до глубины 10 метров. Во-вторых, использование космоснимков акватории Северо-восточного Каспия и примыкающих к ней территорий, на данном этапе исследований является эффективным с экономической точки зрения по отношению к традиционным методам барометрического и геолого-геоморфологического картирования. Совместно с Аэрокосмическим агентством Республики Казахстан была проведена работа по построению батиметрической и геоморфологической крат шельфовой зоны Северо-Восточного Каспия с использованием космоснимков со спутника «Ресурс», а также судовых данных зондирования толщи воды.

Исходя из сказанного, целью исследования в рамках данной работы являлось изучение батиметрии, текстурного и структурного характера дна шельфовой зоны на основе обработки и анализа космической и наземной информации.

Цель исследований была сведена к следующим задачам:

1. Сбор, анализ и отбор наиболее представительных аэрокосмических и наземных данных материалов.
2. Разработка технологии, алгоритмов, программ и обработки методики дешифрования шельфовой зоны.

5. Перспектива развития методов информационной технологии и устойчивое развитие

В ближайшем будущем космические системы дистанционного зондирования Земли дадут информацию более глубокого понимания направления развития естественных и антропогенных процессов, что позволяет осуществить прогноз в отношении вулканической активности Земли, некоторых типов землетрясений и оценивать антропогенное воздействие на биосферу.

Этим целям служит, в частности, система EOS (Earth Observing Systems) — готовятся полярно-орбитальные станции. Концепция устойчивого развития предполагает экономическую сбалансированность и экологическую безопасность развития в глобальном масштабе. В этой связи методы космического земледелия приобретают важное звучание, определяя возможности использования глобальных систем наблюдения Земли, географических информационных систем и новых технологий оценки состояния природной среды и регионального развития.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.925.5:519.216

ЗАДАЧА ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М. И. ГЛЕУБЕРГЕНОВ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, marat207@math.kz

Рассматривается задача построения функционала по заданному стохастическому дифференциальному уравнению Ито второго порядка. Методом моментных функций строятся функционалы, принимающие стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнений лагранжевой структуры.

1. Введение. Постановка задачи. Классическая задача Гельмгольца [1] — это задача построения по заданным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка эквивалентных дифференциальных уравнений в форме Лагранжа. И уравнения, для которых такой переход возможен, называются системами Гельмгольца.

Решение задачи Гельмгольца в том или ином классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики.

Особое место по разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца и полноте изложения материала занимает двухтомная монография Р.М. Сантилли [2, 3], посвященная задаче представления обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа. В монографии А.С. Галиуллина [4] рассматривается обобщение гамильтоновых систем в смысле приводимости уравнений движения неконсервативных механических систем к классическим уравнениям динамики, и решается, в частности, задача гамильтонизации уравнений систем программного движения.

Задачу Гельмгольца в классе стохастических уравнений условно можно разбить на две взаимосвязанные подзадачи: **задачу 1** — по заданному стохастическому дифференциальному уравнению Ито второго порядка требуется построить эквивалентное ему стохастическое уравнение лагранжевой (гамильтоновой или биркгофиановой) структуры; и **задачу 2** — построить функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного уравнения лагранжевой структуры.

Вопросам разрешимости стохастической задачи 1 посвящены работы автора [5–12].

Пусть заданы уравнения

$$d\dot{y} = Y_1(y, \dot{y}, t)dt + Y_2(y, \dot{y}, t)d\xi, \quad (a)$$

$$d\dot{z} = Z_1(z, \dot{z}, t)dt + Z_2(z, \dot{z}, t)d\xi. \quad (b)$$

Keywords: *Helmholtz's problem, stochastic differential system, functional, Ito's equation*

2000 Mathematical Subject Classification: 37H10, 60H10

© М. И. Глеубергенов, 2001.

Определение 1. [13, с.153]. Будем говорить, что уравнения (а) и (б) эквивалентны п.н., если из $y(t_0) = z(t_0)$, $\dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0)$ п.н. следует $y(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = z(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = \dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ п.н. при всех $t \geq t_0$.

Определение 2. [13, с.153]. Будем говорить, что уравнения (а) и (б) d -эквивалентны (или эквивалентны по распределению), если для $(y(t_0)^T, \dot{y}(t_0)^T)^T$ и $(z(t_0)^T, \dot{z}(t_0)^T)^T$ с одинаковыми начальными распределениями на R^{2n} совпадают законы распределения процессов $(y(t)^T, \dot{y}(t)^T)^T$ и $(z(t)^T, \dot{z}(t)^T)^T$ в пространстве $W^{2n} = C([0, \infty) \rightarrow R^{2n})$.

Определение 3. [14, с.279]. Будем говорить, что уравнения (а) и (б) эквивалентны в среднем, если из $My(t_0) = Mz(t_0)$, $M\dot{y}(t_0) = M\dot{z}(t_0)$ следует $My(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $M\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ при всех $t \geq t_0$.

Определение 4. [14, с.282]. Будем говорить, что уравнения (а) и (б) эквивалентны в среднем квадратическом, если из $My^2(t_0) = Mz^2(t_0)$, $M\dot{y}^2(t_0) = M\dot{z}^2(t_0)$ следует $My^2(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $M\dot{y}^2(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ при всех $t \geq t_0$.

В [5] по заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные в смысле почти наверное (п.н.) стохастические уравнения лагранжевой структуры. Определяются условия прямого и непрямого аналитического представления лагранжиана при наличии случайных возмущений. В [6] получены необходимые и достаточные условия для построения по заданному уравнению Ланжевена-Ито или Ланжевена-Стратоновича эквивалентного в смысле п.н. уравнения лагранжевой структуры. Приводятся примеры на построение стохастического уравнения лагранжевой структуры, иллюстрирующие тот факт, что коэффициент при белом шуме играет существенную роль при построении функции Лагранжа по заданным стохастическим дифференциальным уравнениям типа Ито второго порядка. Работа [7] посвящена разрешению стохастической задачи Гельмгольца методом дополнительных переменных. И, в частности, методом Шульгина стохастические уравнения Ито второго порядка приводятся к стохастическим уравнениям лагранжевой структуры и соответственно стохастические уравнения Ито первого порядка методом Лиувилля — к эквивалентным стохастическим уравнениям канонической структуры. В работе [8] анализ разрешимости задачи Гельмгольца в отличие от [5–7], где эквивалентность уравнений понимается в смысле определения 1 об эквивалентности п.н., проводится в классе d -эквивалентных уравнений в смысле определения 2.

По заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся стохастические уравнения лагранжевой структуры с использованием методов преобразования фазового пространства по скоростям, абсолютно непрерывного преобразования меры и случайной замены времени.

Если в работах [5–7] задача Гельмгольца исследуется в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка и эквивалентность уравнений понимается в смысле эквивалентности почти наверное (п.н.), а в [8] — в смысле эквивалентности по распределению, то в [9] анализ разрешимости стохастической задачи Гельмгольца в отличие от работ [5–8] понимается, во-первых, в смысле эквивалентности уравнений в среднем и среднем квадратическом и, во-вторых, рассматривается линейная постановка задачи.

В работе [9] стохастическая задача Гельмгольца исследуется в смысле определений 3 и 4. А именно, по заданным линейным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся уравнения лагранжевой структуры как в пространстве моментных функций первого порядка, так и в пространстве моментных функций второго порядка. В рассматриваемых пространствах получены необходимые и достаточные условия прямого и непрямого представления лагранжиана.

В работе [10] решается задача представления уравнения Ито второго порядка в виде уравнения с заданной структурой сил. Определяются условия, при которых заданная система стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка представима в виде стохастических уравнений Лагранжа с непотенциальными силами определенной структуры.

Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа рассматривается в работе [11], где по заданному стохастическому уравнению Ланжевена-Ито в непрямом представлении строится как уравнение гамильтоновой структуры, так и уравнение биркгофиановой структуры. Методом моментных функций определяется функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения Биркгофа, в форме усредненного действия по Биркгофу. В [12] задача Гельмгольца рассматривается при дополнительном предположении, что на неголономную механическую систему помимо непотенциальных сил действуют также случайные возмущающие силы типа белого шума. По заданной стохастической системе строится в прямом и косвенном представлении эквивалентное почти наверное (п.н.) уравнение лагранжевой структуры в предположении, что на исходную систему наложены неголономные связи. Прямая задача Гельмгольца исследуется в классе как систем Чаплыгина, так и систем Воронца. Приводится вывод необходимых и достаточных условий косвенного представления стохастического уравнения Воронца в форме уравнения лагранжевой структуры. Полученные в [5–12] результаты по решению задачи 1 иллюстрируются на конкретных примерах.

В данной работе исследуется задача 2 (вторая часть стохастической задачи Гельмгольца)–задача построения функционала, принимающего стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения лагранжевой структуры, или, что эквивалентно, задача распространения принципа Гамильтона на класс натуральных механических систем, на который действуют случайные возмущающие силы типа белого шума.

Пусть задана механическая система, которая характеризуется функцией Лагранжа $L = L(q, \dot{q}, t)$, где q_ν и $\dot{q}_\nu (\nu = \overline{1, n})$ – соответственно обобщенные координаты и обобщенные скорости. Предположим, что система находится под действием обобщенных случайных возмущающих сил Q_ν так, что уравнения движения заданной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \quad (\nu = \overline{1, n}), \quad (1)$$

а случайные возмущающие силы Q_ν допускают представление $Q_\nu = \sigma_{\nu j}(q, \dot{q}, t) \xi_{\frac{1}{2}}^j$, ($j = \overline{1, m}$), где $\xi_{\frac{1}{2}}^j$ – белый шум в смысле Стратоновича[14].

Требуется построить функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного уравнения (1).

1. Принцип Гамильтона при наличии случайных возмущений. Для решения задачи 2 воспользуемся методом моментных функций. Применим к уравнению (1) операцию математического ожидания[14] и в силу свойства белого шума в форме Стратоновича $M[\sigma_{\nu j} \xi_{\frac{1}{2}}^j] = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right]$ приходим к уравнению относительно ML вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right], \quad (\nu = \overline{1, n}; i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Функции $\sigma_{\nu j} = \sigma_{\nu j}(q, t)$ не зависят от обобщенных скоростей. В этом случае $\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0$ и, следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = 0. \quad (3)$$

2. Функции $\sigma_{\nu j} = \sigma_{\nu j}(q, \dot{q}, t)$ зависят от обобщенных скоростей и удовлетворяют соотноше-

ниями

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right), \\ \frac{\partial}{\partial q_\nu} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Эти условия вытекают из работы Р.М.Сантilli [2, с. 194–195], где, в частности, проведено исследование в классе обыкновенных дифференциальных уравнений задачи приведения дифференциального уравнения первого порядка к уравнению в форме Лагранжа $F_\nu(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial q_\nu}$ и получены условия типа Гельмгольца, которые применительно к функциям $F_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij}$ эквивалентны соотношениям (4).

Условия (4) обеспечивают существование [2] функции Θ вида

$$\Theta(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} q_\nu \int_0^1 \frac{\partial \sigma_{\nu j}(\tau q, \tau \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij}(\tau q, \tau \dot{q}, t) d\tau. \quad (5)$$

Следовательно, в случае когда $\sigma_{\nu j} = \sigma_{\nu j}(q, \dot{q}, t)$ удовлетворяет условиям (4), уравнение (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (ML - \Theta)}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial (ML - \Theta)}{\partial q_\nu} = 0 \quad (6)$$

или, положив $\widetilde{ML} = ML - \Theta$, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{ML}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{ML}}{\partial q_\nu} = 0. \quad (7)$$

Замечание 1. Если исходное стохастическое уравнение с лагранжевой структурой задать не в форме рассмотренного выше Ланжевена-Стратоновича (1), а в форме Ланжевена-Ито

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \sigma_{\nu j}(q, \dot{q}, t) \xi_0^j, \quad (\nu = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}), \quad (8)$$

где ξ_0^j — белый шум в смысле Ито [13], то применение операции усреднения M к уравнению (8) приводит к следующему уравнению

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = 0, \quad (9)$$

где через $\frac{\overset{\circ}{d}}{dt}$ обозначено выражение $\frac{\overset{\circ}{d}}{dt}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}$ или, что тоже самое,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}. \quad (9')$$

И если предположить, что функция Лагранжа представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных скоростей, то вследствие $\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_\nu \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \equiv 0$ имеем $\frac{\overset{\circ}{d}}{dt}(\cdot) \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}$. Тогда в этом случае уравнение (9) можно записать в виде (3).

Рассмотрим теперь вопрос — какому уравнению с лагранжевой структурой удовлетворяет начальный момент второго порядка $\Gamma L = ML^2$, если исходное уравнение относительно L задано в виде (1).

Раскроем выражение $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu}$. С учетом того, что белый шум в исходном уравнении (1) задан в форме Стратоновича [14], действуем по "обычному" правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu} = 2 \left\{ \frac{dL}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + L \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} \right] \right\} = 2 \frac{dL}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + 2L \sigma_{\nu j} \dot{\xi}_{\frac{1}{2}}^j.$$

И т.к. $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ddot{q}_\mu$, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu} = \Phi_\nu + 2L \sigma_{\nu j} \dot{\xi}_{\frac{1}{2}}^j, \quad (10)$$

где $\Phi_\nu = 2 \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ddot{q}_\mu \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}$.

Полученное уравнение перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu} = a_{\nu k} \ddot{q}_k + b_\nu + 2L \sigma_{\nu j} \dot{\xi}_{\frac{1}{2}}^j, \quad (11)$$

где $a_{\nu k} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, $b_\nu = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu \right)$, и рассмотрим возможность представления

$$a_{\nu k} \ddot{q}_k + b_\nu \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \Theta_1}{\partial q_\nu}.$$

Если предположить, что функция L такова, что для b_ν и $a_{\nu k}$ выполнены условия Гельмгольца [2, с.65]

$$\begin{cases} a_{\nu k} = a_{k\nu}, \quad \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial \dot{q}_\nu}, \\ \frac{\partial b_\nu}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial b_k}{\partial \dot{q}_\nu} = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} a_{\nu k}, \\ \frac{\partial b_\nu}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial b_k}{\partial \dot{q}_\nu} \right), \quad (i, \nu, k = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (12)$$

то существует функция $\Theta_1 = \Theta_1(q, \dot{q}, t)$, которая допускает представление уравнения (11) вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L^2 - \Theta_1)}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial (L^2 - \Theta_1)}{\partial q_\nu} = \rho_{\nu j} \dot{\xi}_{\frac{1}{2}}^j, \quad (13)$$

где $\rho_{\nu j} = 2L \sigma_{\nu j}$. Далее, применим к уравнению (13) операцию математического ожидания и с учетом того, что [14, с.192] $M[\rho_{\nu j} \dot{\xi}_{\frac{1}{2}}^j] = 2M \left[L \frac{\partial (L \sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right]$ получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\Gamma L - M \Theta_1)}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial (\Gamma L - M \Theta_1)}{\partial q_\nu} = 2M \left[L \frac{\partial (L \sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right]. \quad (14)$$

Предположим, что правая часть уравнения (14) удовлетворяет условиям Гельмгольца, которые аналогичны условиям (4) и для уравнения первого порядка

$$L \frac{\partial (L \sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \theta_2}{\partial q_\nu}$$

эквивалентны условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(L \frac{\partial(L\sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu} \left(L \frac{\partial(L\sigma_{kj})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) \\ \frac{\partial}{\partial q_\nu} \left(L \frac{\partial(L\sigma_{kj})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(L \frac{\partial(L\sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(L \frac{\partial(L\sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right). \end{cases} \quad (15)$$

Тогда существует [2]

$$\Theta_2(q, \dot{q}, t) = -\frac{1}{2} q_\nu \int_0^1 L(\tau q, \tau \dot{q}, t) \frac{\partial(L(\tau q, \tau \dot{q}, t) \sigma_{\nu j}(\tau q, \tau \dot{q}, t))}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij}(\tau q, \tau \dot{q}, t) d\tau,$$

и, следовательно, при выполнении условий (15) уравнение (14) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\Gamma L - M\Theta_1 - M\Theta_2)}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial(\Gamma L - M\Theta_1 - M\Theta_2)}{\partial q_\nu} = 0, \quad (16)$$

или, обозначив $\widetilde{\Gamma L} = \Gamma L - M\Theta_1 - M\Theta_2$, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{\Gamma L}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{\Gamma L}}{\partial q_\nu} = 0. \quad (17)$$

Для вывода относительно дисперсии $DL = M(L - ML)^2$ уравнения лагранжевой структуры воспользуемся формулой $DL = \Gamma L - (ML)^2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \Gamma L}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (ML)^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) + \frac{\partial (ML)^2}{\partial q_\nu}.$$

И т.к. исходя из уравнения (13) имеют место

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \Gamma L}{\partial q_\nu} = M\Phi_\nu + 2M \left[L \frac{\partial(L\sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right]$$

и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = -2 \frac{dML}{dt} \cdot \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - 2M \left[L \frac{\partial(L\sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right],$$

то отсюда следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = M\Psi_\nu, \quad (18)$$

где

$$M\Psi_\nu = M\Phi_\nu - 2 \frac{dML}{dt} \cdot \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu}. \quad (19)$$

И если предположить, что Ψ_ν удовлетворяют как условиям (12), так и условиям Гельмгольца

$$\begin{cases} a'_{\nu k} = a'_{k\nu}, \quad \frac{\partial a'_{\nu i}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial a'_{ki}}{\partial \dot{q}_\nu}, \\ \frac{\partial b'_\nu}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial b'_k}{\partial \dot{q}_\nu} = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} a'_{\nu k}, \\ \frac{\partial b'_\nu}{\partial q_k} - \frac{\partial b'_k}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right\} \left(\frac{\partial b'_\nu}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial b'_k}{\partial \dot{q}_\nu} \right), \quad (i, \nu, k = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (20)$$

наложенным на функции $\phi_\nu = -2 \frac{dML}{dt} \cdot \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} = M[a'_{\nu k} \ddot{q}_k + b'_\nu]$ так, что имеет место представление

$$a'_{\nu k} \ddot{q}_k + b'_\nu \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta_3}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \Theta_3}{\partial q_\nu},$$

то в этом случае уравнение (18) будет эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{DL}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{DL}}{\partial q_\nu} = 0, \quad (21)$$

где $\widetilde{DL} = DL - M\Theta_1 - M\Theta_3$.

Замечание 2. Выведем уравнения относительно GL и DL в случае, когда исходное стохастическое уравнение с лагранжевой структурой задается в форме Ланжевена-Ито (8).

Предварительно заметим, что

1) из соотношений

$$dz_1 = X_1 dt + Y_1 d_0 \xi,$$

$$dz_2 = X_2 dt + Y_2 d_0 \xi$$

вытекает [14, с.182]

$$d(z_1 \cdot z_2) = z_1 dz_2 + z_2 dz_1 + Y_1 Y_2 dt; \quad (22)$$

2) уравнение (8), разрешенное относительно старшей производной имеет вид

$$\ddot{q}_\nu = \alpha_{k\nu}^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial q_\mu} \dot{q}_\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_\mu} \sigma_{ij} \sigma_{\mu j} \right) + \alpha_{k\nu}^{-1} \sigma_{kj} \dot{\xi}_0^j, \quad (23)$$

где $\alpha_{k\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\nu}$. При этом предполагается, что матрица $(\alpha_{k\nu})$ не вырождена и обратная матрица имеет вид $(\alpha_{k\nu}^{-1})$ или в дифференциалах

$$d\dot{q}_\nu = X_\nu dt + Y_{\nu j} d_0 \xi^j, \quad (23')$$

где

$$X_\nu = \alpha_{k\nu}^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial q_\mu} \dot{q}_\mu - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_\mu} \sigma_{ij} \sigma_{\mu j} \right), \quad (24)$$

$$Y_{\nu j} = \alpha_{k\nu}^{-1} \sigma_{kj}; \quad (25)$$

3) дифференциалы dL и $d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right)$ имеют соответственно вид

$$dL = A_1 dt + B_{1j} d_0 \xi^j, \quad (26)$$

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right) = a_\nu dt + b_{\nu j}, \quad (27)$$

где $A_1 = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} X_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\mu} \sigma_{kj} \sigma_{\mu j}$, $B_{1j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} Y_{\mu j}$.

На основании (22) и (27) вычислим выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) = 2 \frac{d}{dt} \left(L \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) = 2 \left[\frac{dL}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + L \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) + B_{1j} b_{\nu j} \right].$$

Следовательно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu} = 2 \left(\frac{dL}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \alpha_{\mu\nu}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{\nu j} \right) + 2L \sigma_{\nu j} \dot{\xi}_0^j.$$

Далее, на основании (26)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial q_\nu} &= 2 \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} (A_1 + B_{1j} \dot{\xi}_0^j) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \alpha_{l\mu}^{-1} \sigma_{lj} \sigma_{\nu j} \right] + 2L \sigma_{\nu j} \dot{\xi}_0^j = \\ &= 2 \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} A_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \alpha_{l\mu}^{-1} \sigma_{lj} \sigma_{\nu j} \right] + \left(2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} B_{1j} + 2L \sigma_{\nu j} \right) \dot{\xi}_0^j. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя операцию математического ожидания и учитывая, что $M \left[2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} B_{1j} + 2L \sigma_{\nu j} \right] \dot{\xi}_0^j = 0$, приходим к уравнению

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial \Gamma L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \Gamma L}{\partial q_\nu} = M R_\nu, \quad (28)$$

где $R_\nu = 2 \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} A_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \alpha_{l\mu}^{-1} \sigma_{lj} \sigma_{\nu j} \right)$.

Аналогично, если вместо L использовать $\overset{\circ}{L} = L - ML$, то справедливо относительно DL следующее уравнение

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = M \overset{\circ}{R}_\nu, \quad (29)$$

где $\overset{\circ}{R}_\nu = 2 \left(\frac{\partial \overset{\circ}{L}}{\partial \dot{q}_\nu} A_1 + \frac{\partial \overset{\circ}{L}}{\partial \dot{q}_\mu} \alpha_{l\mu}^{-1} \sigma_{lj} \sigma_{\nu j} \right)$.

Таким образом, если исходное уравнение Лагранжа при наличии случайных возмущений задается в форме Ланжевена-Стратоновича (1), то

1) усредненный лагранжиан ML удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial \sigma_{\nu j}}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right] \quad (\nu = \overline{1, n}; i = \overline{1, n}), \quad (2)$$

а при дополнительном предположении (4) относительно $\sigma_{\nu j}$ существует функция $\Theta(q, \dot{q}, t)$, что для $\widetilde{ML} = ML - \Theta$ имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{ML}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{ML}}{\partial q_\nu} = 0; \quad (7)$$

2) начальный момент второго порядка ΓL удовлетворяет, что следует из соотношения (10), следующему уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial \Gamma L}{\partial q_\nu} = M \Phi_\nu + 2M \left[L \frac{\partial (L \sigma_{\nu j})}{\partial \dot{q}_i} \sigma_{ij} \right], \quad (30)$$

а при выполнении дополнительных условий (12) и (15) существуют функции Θ_1 и Θ_2 , что относительно $\widetilde{\Gamma L} = \Gamma L - M\Theta_1 - M\Theta_2$ справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{\Gamma L}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{\Gamma L}}{\partial q_\nu} = 0; \quad (17)$$

3) дисперсия DL удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} \right) - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = M \Phi_\nu - 2 \frac{dML}{dt} \cdot \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad (18)$$

и, если выполнены условия (15) и (20), то существуют функции Θ_1 и Θ_3 , что обобщенная дисперсия $\widetilde{DL} = DL - M\Theta_1 - M\Theta_3$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{DL}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \widetilde{DL}}{\partial q_\nu} = 0. \quad (21)$$

Причем условия (12) и (20) — это дополнительные ограничения на функцию L , а условия (4) и (15) — некоторые дополнительные ограничения на функции $\sigma_{\nu j}$. И, следовательно, свойства (4), (12), (15) и (20) выделяют подкласс функций L и $\sigma_{\nu j}$, для которых существуют усредненные кинетические обобщенные потенциалы \widetilde{ML} , $\widetilde{\Gamma L}$ и \widetilde{DL} для уравнений Лагранжа в форме Ланжевена-Стратоновича (1).

Если же исходное уравнение Лагранжа при наличии случайных возмущений задается в форме Ланжевена-Ито (8), то используя оператор дифференцирования Ито $\frac{\overset{\circ}{d}}{dt}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}$ имеем

1₀) усредненный лагранжиан ML удовлетворяет уравнению

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial ML}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial ML}{\partial q_\nu} = 0, \quad (9)$$

и если функция $L = O(\dot{q}^2)$, то $\frac{\overset{\circ}{d}}{dt}(\cdot) \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}$ и уравнение (9) эквивалентно уравнению (3);

2₀) начальный момент второго порядка ΓL удовлетворяет уравнению

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial \Gamma L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \Gamma L}{\partial q_\nu} = MR_\nu; \quad (28)$$

3₀) дисперсия DL удовлетворяет уравнению

$$\frac{\overset{\circ}{d}}{dt} \frac{\partial DL}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial DL}{\partial q_\nu} = M \overset{\circ}{R}_\nu. \quad (29)$$

Теперь на основании выведенных уравнений с лагранжевой структурой относительно ML , ΓL и DL сформулируем принцип Гамильтона при наличии случайных возмущений на языке моментных функций.

Предварительно, по аналогии с классическим случаем, рассмотрим действие по Гамильтону $W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$ и введем следующие понятия: $M \int_{t_0}^{t_1} L dt$ — математическое ожидание действия по Гамильтону; $\int_{t_0}^{t_1} \Gamma L dt \equiv M \int_{t_0}^{t_1} L^2 dt$ — начальный момент второго порядка действия по Гамильтону; $\int_{t_0}^{t_1} DL dt \equiv M \int_{t_0}^{t_1} (L - ML)^2 dt$ — дисперсия действия по Гамильтону в расширенном конфигурационном пространстве $(q, t) \in R^{n+1}$ и пусть в моменты t_0 и t_1 заданы фиксированные гауссовы случайные величины $q_{0\nu}(\omega)$ и $q_{1\nu}(\omega)$.

Предложение 1. Для механической системы, которая допускает идеальные удерживающие связи между двумя состояниями ($q_{0\nu}(\omega)$ и $q_{1\nu}(\omega)$ — заданные гауссовы случайные величины) за один и тот же промежуток времени $[t_0, t_1]$ в потенциальном поле сил и при наличии случайных возмущений типа белого шума Стратоновича (в строгом смысле), действительный случайный процесс удовлетворяет условиям

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta ML + M \Phi_\nu^0 \delta q_\nu) dt = 0, \quad (31a)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \Gamma L + (M\Phi_\nu^1 + M\Phi_\nu^2)\delta q_\nu] dt = 0, \quad (31b)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta DL + (M\Phi_\nu^1 + M\Phi_\nu^3)\delta q_\nu] dt = 0. \quad (31c)$$

Замечание 3. Предложение 1 в отличие от классического принципа Гамильтона носит характер необходимых, но, вообще говоря, не достаточных условий.

Предложение 2. Если в предложении 1 предположить дополнительно, что функции L и $\sigma_{\nu j}$ удовлетворяют условиям (4), (12), (15) и (20), то для обобщенного математического ожидания \widetilde{ML} , обобщенного начального момента второго порядка $\widetilde{\Gamma L}$ и обобщенной дисперсии \widetilde{DL} действия по Гамильтону имеют место соотношения

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{ML} dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{\Gamma L} dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{DL} dt = 0. \quad (32)$$

Условия (31) предложения 1 выводятся вполне аналогично классическому выводу принципа Гамильтона из уравнения Лагранжа [15] из соответствующих уравнений лагранжевой структуры (2), (10) и (18), а условия (32) предложения 2 — из уравнений (7), (16) и (21).

Цитированная литература

1. Гельмгольц Г. // Вариационные принципы механики. М., 1959. С. 430 – 459.
2. Santilli R. M. Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1978.
3. Santilli R. M. Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1983.
4. Галиуллин А. С. Системы Гельмгольца. М., 1995.
5. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. №1. С. 53 – 62.
6. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. №3. С. 78 – 90.
7. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1996. №1. С. 49 – 54.
8. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1996. №3. С. 53 – 63.
9. Тлеубергенов М. И. // Вестник Росс. ун-та дружбы народов. Сер. "Прикл. мат. и информатика". М. 1999. №1. С. 44 – 48.
10. Тлеубергенов М. И. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1995. №3. С. 61 – 68.
11. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. №5. С. 84 – 92.
12. Тлеубергенов М. И. // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. №1. С. 80 – 85.
13. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
14. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.
15. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.-Л., 1937.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.956.2

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ n -ГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

А. Б. ТУНГАТАРОВ

Казахский экономический университет имени Т. Рыскулова
480035 Алматы, Жандосова ул., 55

Исследованы вопросы разрешимости обобщенной задачи Римана - Гильберта для одного класса эллиптических систем n -го порядка ($n \geq 2$) на плоскости с сингулярной точкой.

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в пространстве непрерывных функции одного класса эллиптических систем n -го порядка ($n \geq 2$) на плоскости с сингулярной точкой и задачи Римана-Гильберта для него. Эллиптические системы 1-го порядка на плоскости с сингулярной точкой и краевые задачи для них достаточно полно исследованы в работах И. И. Векуа [1], Л. Г. Михайлова [2], З. Д. Усманова [3], А. Б. Тунгатарова [4–6] и др. Системы уравнений в частных производных на плоскости с сингулярной точкой 2-го порядка изучены в работах А. Б. Тунгатарова, Е. И. Беркимбаева [7, 8], а 3-го порядка в работах А. Б. Тунгатарова, Н. М. Кисиковой [9, 10].

1. Пусть G — ограниченная область комплексной плоскости с границей $\Gamma \in C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), содержащая внутри точку $z = a$. $S(G)$ — пространство измеримых и существенно ограниченных в G функций $f(z)$ с нормой $\|f\|_{S(G)} = \operatorname{vraisup}_{z \in G} |f(z)|$; $S_\nu(G, a)$ — класс функций $f(z)$, для которых $f(z)|z - a|^\nu \in S(G)$, где ν — действительное число. Норма в $S_\nu(G, a)$ определяется по формуле $\|f\|_{S_\nu(G, a)} = \| |z - a|^\nu f(z) \|_{S(G)}$. Пусть $n \geq 2$ — целое число. Через $D_{\bar{z}, q}^n(G)$ обозначим класс функций, допускающих обобщенные производные по \bar{z} [11] до n -го порядка включительно, которые принадлежат пространству $L_q(G)$, $q > 2$, а через $D_{\bar{z}, q}^n(G, m)$ обозначим класс функций $f(z)$, представимых в G в виде $f(z) = z^m f_0(z)$, где $f_0(z) \in D_{\bar{z}, q}^n(G)$.

Рассмотрим в G уравнение

$$\frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z) \frac{\partial^{n-k} W}{\partial \bar{z}^{n-k}} + A_n(z)W + B(z)\bar{W} = F(z), \quad z \in G, \quad (1)$$

где

$$A_k(z) \in S_k(G, a), \quad (k = \overline{1, n}), \quad B(z) \in S_n(G, a), \quad F(z) \in S_\beta(G, a), \quad (0 < \beta < 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial \bar{z}^{k-1}} \right).$$

Keywords: *Generalized Riemann-Hilbert's problem, singular point elliptic system*

2000 Mathematical Subject Classification: 35Q15

© А. Б. Тунгатаров, 2001.

Пусть

$$\begin{aligned}
M_1(a) &= \sup_{z \in G} \frac{|z-a|^\beta}{\pi} \iint_G \frac{dG_\xi}{|\xi-z||\xi-a|^{1+\beta}}, \\
M_2(a) &= \sup_{z \in G} \frac{|z-a|^\beta}{\pi^2} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{|\xi_1-a||\xi_1-z|} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{|\xi_2-\xi_1||\xi_2-a|^{1+\beta}}, \dots \\
M_n(a) &= \sup_{z \in G} \frac{|z-a|^\beta}{\pi^n} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{|\xi_1-a||\xi_1-z|} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{|\xi_2-\xi_1||\xi_2-a|} \dots \\
&\dots \iint_G \frac{dG_{\xi_{n-1}}}{|\xi_{n-1}-\xi_{n-2}||\xi_{n-1}-a|} \iint_G \frac{dG_{\xi_n}}{|\xi_n-\xi_{n-1}||\xi_n-a|^{1+\beta}}.
\end{aligned}$$

Ограниченность чисел $M_k(a)$, ($k = \overline{1, n}$) доказывается с помощью неравенства Адамара [11]. Предполагаем, что

$$M = \sum_{k=1}^n M_k(a) \|A_k\|_{S_k(G,a)} + M_n(a) \|B\|_{S_n(G,a)} < 1. \quad (2)$$

Решения уравнения (1) из класса

$$S_{\beta-n}(G, a) \cap D_{\bar{z}, q}^n(G), \quad 2 < q < \frac{2}{\beta} \quad (3)$$

ищем в виде

$$W(z) = (T_{G,a}^n U)(z) + (z-a)^n \Phi(z), \quad (4)$$

где $\Phi(z) \in U_0(G)$, ($U_0(G)$ — класс голоморфных в G функций),

$$\begin{aligned}
(T_{G,a} U)(z) &= -\frac{z-a}{\pi} \iint_G \frac{U(\xi) dG_\xi}{(\xi-z)(\xi-a)}, \\
(T_{G,a}^2 U)(z) &= \frac{(z-a)^2}{\pi^2} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{(\xi_1-a)(\xi_1-z)} \iint_G \frac{U(\xi_2) dG_{\xi_2}}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-a)}, \dots \\
(T_{G,a}^n U)(z) &= \frac{(-1)^n (z-a)^n}{\pi^n} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{(\xi_1-a)(\xi_1-z)} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-a)} \dots \\
&\dots \iint_G \frac{dG_{\xi_{n-1}}}{(\xi_{n-1}-\xi_{n-2})(\xi_{n-1}-a)} \iint_G \frac{U(\xi_n) dG_{\xi_n}}{(\xi_n-\xi_{n-1})(\xi_n-a)}.
\end{aligned}$$

Здесь $U(z)$ — новая неизвестная функция из класса $S_\beta(G, a)$, $0 < \beta < 1$. В силу теоремы I.36 [11] пространство $D_{\bar{z}, q}^1(G)$ совпадает с пространством Соболева $W_q^1(G)$, для которого имеет место вложения $W_q^1(G) \subset C^\alpha(\bar{G})$, $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$. Из определения следует $D_{\bar{z}, q}^n(G) \subset D_{\bar{z}, q}^k(G)$ если $n > k$. Следует отметить, что в работах [8] и [10] соответственно доказаны, что $D_{\bar{z}, q}^2(G) \subset C^{1, \alpha}(G)$ и $D_{\bar{z}, q}^3(G) \subset C^{2, \alpha}(\bar{G})$. Поэтому $D_{\bar{z}, q}^n(G) \subset C^\alpha(\bar{G})$, $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$. Используя результаты работы [11], легко можно показать равенства

$$\frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} (T_{G,a}^k U)(z) = (T_{G,a}^{k-l} U)(z), \quad (l = \overline{1, k-1}), \quad (k = \overline{2, n}), \quad \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} (T_{G,a}^n U)(z) = U(z). \quad (5)$$

Если подставим (4) в (1), то в силу (5) получим уравнение

$$U(z) = (Q_1 U)(z), \quad (6)$$

где

$$(Q_1U)(z) = - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z)(T_{G,a}^k U)(z) - A_n(z)((T_{G,a}^n U)(z) + (z-a)^n \Phi(z)) - \\ - B(z)((\overline{T_{G,a}^n U})(z) + \overline{(z-a)^n \Phi(z)}) + F(z).$$

Используя определение нормы класса $S_\beta(G, a)$ и неравенство Адамара [11], получим

$$|(T_{G,a}^k U)(z)| \leq M_k(a)|z-a|^{k-\beta} \|U\|_{S_\beta(G,a)}, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (7)$$

В силу (7) оператор Q_1 переводит пространство $S_\beta(G, a)$ в себя и имеет место неравенство

$$\|(Q_1U)(z)\|_{S_\beta(G,a)} \leq \left(\sum_{k=1}^n \|A_k\|_{S_k(G,a)} M_k(a) + M_n(a) \|B\|_{S_n(G,a)} \right) \|U\|_{S_\beta(G,a)} + \\ + \|F\|_{S_\beta(G,a)} + (\|A_n\|_{S_n(G,a)} + \|B\|_{S_n(G,a)}) \|\Phi\|_{S_\beta(G,a)}.$$

Следовательно, оператор Q_1 ограничен в $S_\beta(G, a)$. Для любых $U_1, U_2 \in S_\beta(G, a)$ аналогично доказывается оценка

$$\|(Q_1U_1)(z) - (Q_1U_2)(z)\|_{S_\beta(G,a)} \leq M \|U_1 - U_2\|_{S_\beta(G,a)}.$$

Поэтому в силу (2) и принципа сжатых отображений существует единственное решение уравнения (6) из $S_\beta(G, a)$. Из (4) в силу (5) следует

$$\frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n} = U(z), \quad \frac{\partial^k W}{\partial \bar{z}^k} = (T_{G,a}^{n-k} U)(z), \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

Следовательно, в силу (7) функция $W(z)$, определяемая по формуле (4), принадлежит классу (3). В итоге получим теорему.

Теорема 1. *Если имеет место оценка (2), то уравнение (1) разрешимо в классе (3). Решения из (3) могут быть найдены по формуле (4), где $U(z)$ – решение уравнения (6) из класса $S_\beta(G, a)$, $0 < \beta < 1$.*

2. Пусть $R > 0$, $G = \{z : |z| < R\}$, $\Gamma = \{t : |t| = R\}$ и

$$M_k = M_k(0), \quad (k = \overline{1, n}), \\ M_{n+1} = M_n(0) + \sup_{z \in G} \frac{|z|^{n+1}}{\pi^n} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{|R^2 - \bar{\xi}_1 z| |\xi_1|} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{|\xi_2| |\xi_2 - \xi_1|} \cdots \\ \cdots \iint_G \frac{dG_{\xi_{n-1}}}{|\xi_{n-1}| |\xi_{n-1} - \xi_{n-2}|} \iint_G \frac{dG_{\xi_n}}{|\xi_n|^{1+\beta} |\xi_n - \xi_{n-1}|}.$$

В этом пункте мы ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее на Γ условию

$$Re[t^{-m} W(t)] = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

где m – целое число, $g(t) \in C^\alpha(\Gamma)$, $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$, $2 < q < \frac{2}{\beta}$. В зависимости от соотношения между m и n приходится нам сформулировать эту задачу в различном виде.

а) Пусть $m \geq n$. Тогда рассмотрим задачу.

Задача A_1 . *Требуется найти решение уравнения (1), где*

$$A_k(z) \in S_k(G, 0), \quad (k = \overline{1, n}), \quad B(z) \in S_n(G, 0), \quad F(z) \in S_\beta(G, 0), \quad 0 < \beta < 1,$$

из класса

$$S_{\beta-n}(G, 0) \cap D_{z,q}^n(G), \quad 2 < q < \frac{2}{\beta}, \quad (9)$$

удовлетворяющее граничному условию (8).

Решение задачи A_1 из класса (9) будем искать в виде

$$W(z) = (\Pi_{G,m}U)(z) + z^n \Phi(z),$$

где

$$\begin{aligned} (\Pi_{G,m}U)(z) = & (T_{G,0}^n U)(z) - \frac{(-1)^n z^{2m-n-1}}{\pi^n R^{2(m-n)}} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{\bar{\xi}_1(R^2 - \bar{\xi}_1 z)} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{\bar{\xi}_2(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1)} \\ & \iint_G \frac{dG_{\xi_3}}{\bar{\xi}_3(\bar{\xi}_3 - \bar{\xi}_2)} \cdots \iint_G \frac{dG_{\xi_{n-1}}}{\bar{\xi}_{n-1}(\bar{\xi}_{n-1} - \bar{\xi}_{n-2})} \iint_G \frac{\overline{U(\xi_n)} dG_{\xi_n}}{\bar{\xi}_n(\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_{n-1})}, \end{aligned}$$

$U(z)$ — новая неизвестная функция из $S_\beta(G, 0)$, а $\Phi(z) \in U_0(G)$.

Следуя [11], функцию $\Phi(z)$ представим в виде

$$\Phi(z) = (D_{m-n}g)(z) + \Phi_m(z), \quad (11)$$

где

$$(D_n g)(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t},$$

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=0}^{m-n-1} [\alpha_k (z^k - R^{2(k-m+n)} z^{2(m-n)-k}) + i\beta_k (z^k + R^{2(k-m+n)} z^{2(m-n)-k})] + i\beta_{m-n} z^{m-n},$$

если $n \geq m+1$, $\Phi_m(z) = i\beta_0$, если $n = m$. Здесь α_k, β_k ($k = \overline{0, m-n-1}$), β_{m-n} — произвольные действительные числа.

Если подставим (11) в (10), то функция $W(z)$, определяемая по формуле (10), автоматически удовлетворяет условию (8). Подставив эту функцию $W(z)$ в (1), получим для $U(z)$ уравнение

$$U(z) = (Q_2 U)(z), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} (Q_2 U)(z) = & - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z) (T_{G,0}^k U)(z) - A_n(z) ((\Pi_{G,m}U)(z) + z^n \Phi(z)) - \\ & - B(z) (\overline{(\Pi_{G,m}U)(z)} + \overline{z^n \Phi(z)}) + F(z). \end{aligned}$$

Оператор Q_2 переводит пространство $S_\beta(G, 0)$ в себя и имеет место неравенство

$$\|(Q_2 U)(z)\|_{S_\beta(G,0)} \leq M_{n+2} \|U\|_{S_\beta(G,0)} + (\|A_n\|_{S_n(G,0)} + \|B\|_{S_n(G,0)}) \|\Phi\|_{S_\beta(G,0)} + \|F\|_{S_\beta(G,0)},$$

где

$$M_{n+2} = \sum_{k=1}^{n-1} M_k(0) \|A_k\|_{S_k(G,0)} + M_{n+1} (\|A_n\|_{S_n(G,0)} + \|B\|_{S_n(G,0)}).$$

Для любых $U_1, U_2 \in S_\beta(G, 0)$ справедлива оценка

$$\|(Q_2 U_1)(z) - (Q_2 U_2)(z)\|_{S_\beta(G,0)} \leq M_{n+2} \|U_1 - U_2\|_{S_\beta(G,0)}.$$

Поэтому при $M_{n+2} < 1$ в силу принципа сжатых отображений существует единственное решение уравнения (12) из $S_\beta(G, 0)$. Как в случае пункта 1⁰ доказывается, что функция $W(z)$, определяемая по формуле (10), принадлежит классу (9). Функция $\Phi_m(z)$ является линейной комбинацией с произвольными вещественными коэффициентами $2(m-n)+1$ линейно-независимых функций. Следовательно, имеет место

Теорема 2. При $m \geq n$ и $M_{n+2} < 1$ неоднородная задача A_1 всегда имеет решение, а однородная задача ($F \equiv 0, g \equiv 0$) имеет ровно $2(m - n) + 1$ линейно-независимых решений. Эти решения могут быть найдены по формуле (10), (11), где $U(z)$ — решение уравнения (12) из $S_\beta(G, 0)$.

б) Пусть $m < n$. В этом случае формулу (10) мы не можем использовать сразу, так как тогда получится задача с отрицательным индексом. Поэтому сначала введем в рассмотрение функцию $V(z) = z^{n-m}W(z)$. Задача Римана-Гильберта теперь подставим в следующем виде.

Задача A_2 . Требуется найти решение уравнения (1), где

$$A_k(z) \in S_k(G, 0), \quad (k = \overline{1, n}), \quad B(z) \in S_n(G, 0), \quad F(z) \in S_{m-n+\beta}(G, 0), \quad 0 < \beta < 1$$

из класса

$$S_{\beta-m}(G, 0) \cap D_{\bar{z}, q}^n(G, m - n), \quad (13)$$

удовлетворяющее граничному условию (8).

Функция $V(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^n V}{\partial \bar{z}^n} + A_1(z) \frac{\partial^{n-1} V}{\partial \bar{z}^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(z) \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + A_n(z)V + B_{n-m}(z)\bar{V} = F_{n-m}(z), \quad z \in G, \quad (14)$$

где

$$B_k(z) = e^{-2ik\varphi}B(z), \quad F_k(z) = z^k F(z), \quad \varphi = \arg z$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re}[t^{-n}V(t)] = g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (15)$$

Задача (14), (15) соответствует задаче из а) при $m = n$. Поэтому решение этой задачи из класса (13) ищем в виде

$$V(z) = (\Pi_{G,n}U)(z) + z^n \Phi_0(z), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} (\Pi_{G,n}U)(z) &= (T_{G,0}^n)(z) - \frac{(-1)^n z^{n+1}}{\pi^n} \iint_G \frac{dG_{\xi_1}}{\bar{\xi}_1(R^2 - \bar{\xi}_1 z)} \iint_G \frac{dG_{\xi_2}}{\bar{\xi}_1(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1)} \iint_G \frac{dG_{\xi_3}}{\bar{\xi}_3(\bar{\xi}_3 - \bar{\xi}_2)} \dots \\ &\dots \iint_G \frac{dG_{\xi_{n-1}}}{\bar{\xi}_{n-1}(\bar{\xi}_{n-1} - \bar{\xi}_{n-2})} \iint_G \frac{\overline{U(\xi_n)} dG_{\xi_n}}{\bar{\xi}_n(\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_{n-1})}, \\ \Phi_0(z) &= (D_0 g)(z) + i\beta_0. \end{aligned}$$

Функция (16) автоматически удовлетворяет условию (15). Если (16) подставим в (14), то получим уравнение

$$U(z) = (Q_3 U)(z), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} (Q_3 U)(z) &= - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(z) (T_{G,0}^k)(z) - A_n(z) ((\Pi_{G,n}U))(z) + z^n \Phi(z) - \\ &- B_{n-m}(z) (\overline{(\Pi_{G,n}U)(z)} + \overline{z^n \Phi(z)}) + F_{n-m}(z). \end{aligned}$$

Очевидно, что $F_{n-m}(z) \in S_\beta(G, 0)$. Оператор Q_3 переводит пространство $S_\beta(G, 0)$ в себя и для любых U_1, U_2 из $S_\beta(G, 0)$ справедлива оценка

$$\|(Q_3 U_1)(z) - (Q_3 U_2)(z)\|_{S_\beta(G, 0)} \leq M_{n+2} \|U_1 - U_2\|_{S_\beta(G, 0)}.$$

Поэтому при $M_{n+2} < 1$ в силу принципа сжатых отображений существует единственное решение уравнения (17) из $S_\beta(G, 0)$. Как в случае пункта 1 доказываем, что функция $V(z)$, определяемая по формуле (16), принадлежит классу (9). Тогда из формулы $V(z) = z^{n-m}W(z)$ следует, что функция $W(z)$ принадлежит классу (13). Итак, доказана

Теорема 3. При $m < n$ и $M_{n+2} < 1$ неоднородная задача всегда имеет решение, а однородная задача ($F \equiv 0, g \equiv 0$) имеет одно независимое решение. Эти решения могут быть найдены по формуле $W(z) = z^{n-m}V(z)$, где $V(z)$ определяется из (16), (17).

Цитированная литература

1. Векуа И. Н. // ДАН СССР. 1962. Т. 145, №1. С. 24 – 26.
2. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Ирфон, 1963.
3. Усманов З. Д. // Сиб. матем. журнал 1973. Т. 14, №5. С. 1076 – 1087.
4. Тунгатаров А. Б. // Матем. сб. 1993. Т. 184, №3. С. 111 – 120.
5. Тунгатаров А. Б. // ДАН СССР. 1991. Т. 319, №3. С. 570 – 573.
6. Тунгатаров А. Б. // Матем. заметки. 1994. Т. 56, Вып. I. С. 105 – 115.
7. Беркембаев Е. Н., Тунгатаров А. Б. // Вестник КазГУ, серия мат., мех., инфор. 1997. №6. С. 147 – 152.
8. Беркембаев Е. Н. Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярной точкой выше первого порядка// Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Алматы, 1998.
9. Кисикова Н. М., Тунгатаров А. Б. // Вестник КазГУ, серия мат., мех., инфор. 1998. №10. С. 81 – 88.
10. Кисикова Н. М. Граничные свойства полигармонических функций с сингулярной точкой// Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Алматы, 2001.
11. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.:Физматгиз. 1959.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 517.51

ПОРЯДКИ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125, alex@math.kz

Установлены оценки порядков убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе, системе Хаара и системе типа Хаара функций $f(x) \in L_p$, $1 < p < 2$. Сходимость последовательности при этом понимается в смысле Чезаро, Рисса или Зигмунда.

Пусть a_n, b_n — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функции $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$. В [1]–[3] рассматривались порядки убывания коэффициентов Фурье в случае, когда сходимость последовательности понимается в смысле Чезаро с показателем $\alpha > 0$. Аналогичные вопросы изучались автором на более широких классах функций для других методов суммирования [4].

Напомним, что числовая последовательность S_ν называется суммируемой методом Чезаро (C, α) , $\alpha > 0$ к числу S , если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu = S, \quad (1)$$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Средние Рисса (R, α) и Зигмунда (Z, α) определяются сумматорными функциями

$$\phi_1(x, \alpha) = (1-x)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \phi_1(0, \alpha) = 1, \quad \phi_1(1, \alpha) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$\phi_2(x, \alpha) = 1 - x^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \phi_2(0, \alpha) = 1, \quad \phi_2(1, \alpha) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

Для $f(x) \in L_p[0, 1]$, $p > 1$ обозначим через c_n и d_n соответственно коэффициенты Фурье по системе Хаара и по системе типа Хаара с ограниченной образующей последовательностью. В заметке изучаются порядки убывания модулей коэффициентов Фурье по перечисленным ортогональным системам. Назовем для краткости методы (1)–(3) Λ -методами, а соответствующие виды сходимости — Λ -сходимостью. О сравнении этих методов см., например, [5, с.114].

Для Λ -методов и тригонометрической системы справедлива

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические оценки

1) $n^\beta |a_n| = o(1)$ в смысле Λ -сходимости при $\alpha > \frac{1}{p}$, $\beta \in (0, 1/q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < 2$;

2) $n^{1/q} |a_n| = o(1)$ в смысле Λ -сходимости при $\alpha = 1$, $1 < p < 2$.

Keywords: *Orthogonal system, Fourier coefficient*

2000 Mathematical Subject Classification: 42A16, 42A20, 42A55

© Л. П. Фалалеев, 2001.

Аналогичное утверждение справедливо для $|b_n|$.

Доказательство. Поставим в соответствие каждой $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$ ее тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{inx},$$

где \tilde{c}_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме. Проведем доказательство оценки 1) теоремы для (C, α) -средних. Оценка 2) и остающиеся вне рассмотрения методы (2), (3) могут быть получены по той же схеме.

Из определения (1) и неравенства Харди-Литтлвуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{c}_k|^p (k+1)^{p-2} \leq C \|f\|_p, \quad 1 < p \leq 2,$$

(здесь и далее $C > 0$, $C = const.$) следует

$$A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} |\tilde{c}_k| k^\beta \leq C A_n^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n (n-k)^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}} k^{\frac{p\beta+2-p}{p-1}} \right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

т.к. $|A_{n-k}^{\alpha-1}| = A_{n-k}^{\alpha-1} \asymp (n-k)^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Воспользовавшись теоремой об умножении степенных рядов и равенством

$$A_n^{\gamma+\delta+1} = \sum_{k=1}^n A_{n-k}^\gamma A_k^\delta, \quad \gamma, \delta, \gamma + \delta > -1,$$

получим, что при $\alpha > \frac{1}{p}$

$$A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} |\tilde{c}_k| k^\beta \leq C n^{-\alpha} \left(n^{\frac{(\alpha-1)p+p\beta+1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = C n^{\beta-1/q} \rightarrow 0 \quad \text{при } \beta < 1/q, n \rightarrow \infty.$$

Учитывая связь между \tilde{c}_n , a_n и b_n заключаем, что утверждение теоремы верно и для $|b_n|$.

Замечание 1. В [2] утверждается (сформулировано без доказательства), что при $p \in (1, 2]$, $n \rightarrow \infty$

$$n^{\frac{1}{q}} |a_n| \rightarrow 0 \quad \text{в смысле } (C, 1)$$

и что для $p > 2$ это соотношение не выполняется.

Пусть c_n — коэффициенты Фурье по системе Хаара функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, $p > 1$.

Теорема 2. Для Λ -методов справедливы оценки ($n \rightarrow \infty$)

1) $n^\beta |c_n| = o(1)$ в смысле Λ -сходимости при $\alpha > 1/p$, $\beta \in (0, 1/q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < 2$;

2) $n^{1/q} |c_n| = o(1)$ в смысле Λ -сходимости при $\alpha > 1/p$.

Аналогичное утверждение справедливо для $|d_n|$.

Доказательство. Аналог неравенства Харди-Литтлвуда (4) для системы Хаара получен в работе Luo-Cheng'a [6], в [7] приведено следующее усиление неравенства Харди-Литтлвуда: пусть $v_m > 0$, $v_m \uparrow$, $m \rightarrow \infty$ и $\sum_{m=1}^{\infty} (v_m m)^{-1} < C$, тогда для любого $1 < p \leq 2$ и всех $f(x) \in L_p[0, 1]$

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^p (v_m m)^{\frac{p}{2}-1} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_p. \quad (5)$$

Воспользовавшись неравенством (5), получим

$$\begin{aligned}
A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} k^\beta |c_k| &= A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n |c_k| k^{\frac{p-2}{2p}} v_k^{\frac{p-2}{2p}} k^{\beta-\frac{p-2}{2p}} |A_{n-k}^{\alpha-1}| v_k^{\frac{2-p}{2p}} \leq \\
&\leq C A_n^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n |c_k|^p (k v_k)^{\frac{p-2}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^n |A_{n-k}^{\alpha-1}|^q k^{(\beta-\frac{p-2}{2p})q} v_k^{\frac{2-p}{2p}q} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\leq C A_n^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{(\alpha-1)q} k^{\beta q - (\frac{1}{2}-\frac{1}{p})q} v_k^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})q} \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{6}$$

при $\alpha > 1/p$.

Полагая в (6) $v_k = k^\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ выбирается из неравенства $\varepsilon < \frac{2p}{2-p} \left(\frac{1}{2} - \beta \right)$, получим

$$A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} k^\beta |c_k| \leq C n^{\beta - \frac{1}{2} + \varepsilon(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда вытекает оценка 1) теоремы 2.

Положим в (6) $\beta = \frac{1}{q}$, тогда при $\alpha > \frac{1}{p}$

$$A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} k^{\frac{1}{q}} |c_k| \leq C n^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{(\alpha-1)q} k^{q/2} v_k^{q/2-1} \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Если в неравенстве (7) $v_k \equiv \ln^p k$, $p > 1$, то из асимптотического равенства

$$\sum_{k=1}^n k^\gamma \ln^\delta k \approx C n^{\gamma+1} \ln^\delta n, \quad \gamma > -1, \quad \delta \in (-\infty, \infty)$$

и полной регулярности Λ -методов получим ($n \rightarrow \infty$)

$$A_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\alpha-1} k^{\frac{1}{q}} |c_k| \leq C n^{\frac{p-2}{2p}} (\ln n)^{\frac{p}{2q}(q-2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha > \frac{1}{p}, \quad 1 < p < 2.$$

Таким образом теорема 2 доказана полностью.

Замечание 2. В [7] приведено утверждение 2:

$$\forall p > 2, \forall \{\eta_m\}_{m=0}^\infty \quad c \lim_{m \rightarrow +\infty} \eta_m = +\infty \exists f \in L_p[0, 1]$$

такая, что

$$\sum_{m=0}^\infty |c_m|^p (m+1)^{\frac{p}{2}-1} \eta_m = +\infty.$$

Выбирая η_m надлежащим образом (например, $\eta_m = m^{\frac{1}{q}+1-\frac{p}{2}}$) можем заключить, что в силу полной регулярности Λ -методов оценка 2) теоремы 2 не будет выполняться ни для каких $\alpha > 0$ при $p > 2$.

Цитированная литература

1. **Ready J.** // SIAM J. Math. Anal. 1986. Т. 17. P. 469 – 476.

2. **Куприков Ю. Е.** // Матем. заметки. 1990. Т. 48. С. 154 – 155.
3. **Куріков Ю. Е.** // Analysis Math. 1993. Т. 19. Р. 113 – 134.
4. **Фалалеев Л. П.** // Теория прил. и гармонический анализ. Тез. докл. Тула. 1998. С. 267.
5. **Харди Г.** // Расходящиеся ряды. М. Ин. лит. 1951.
6. **Luo Cheng** // J. Naugzhou Univ. Natur. Sci. Ed. 1982. Т. 9. Р. 269 – 284.
7. **Маслов А. В.** // Матем. сборник. 1985. Т. 126. С. 490 – 514.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

УДК 621.316

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ НА БАЗЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С. Н. ХАРИН

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, Пушкина ул., 125

В работе представлены математические модели, описывающие различные механизмы эрозии, и методы решения соответствующих краевых задач.

Введение. Дуговая эрозия в размыкающихся электродах зависит от многих факторов. Математические модели дуговой эрозии контактов при малых токах вследствие испарения материала рассмотрены во многих работах [1]–[4]. Расчетами и экспериментами было показано, что направление переноса контактного материала зависит от механизма электрической проводимости в столбе дуги и меняется с анодного на катодное при переходе от металлической фазы дуги к газовой фазе [5]–[9].

Информация о продолжительности каждой фазы дуги является крайне необходимой для обеспечения минимума дуговой эрозии вследствие испарения. Экспериментальное исследование динамики испарения наталкивается на значительные трудности из-за быстротечности процесса. Поэтому математическое моделирование эрозионных процессов представляется весьма важным. Некоторые из таких моделей, описывающих эрозию при переходе от металлической фазы дуги к газовой фазе, представлены в работах [10]–[11].

Механизм эрозии, обусловленный газовым и электромагнитным давлением в жидком расплаве на поверхности электрода, описан в работе [12], однако, без детального анализа. Некоторые оценки конвективных и электродинамических сил, а также термокапиллярных сил поверхностного натяжения получены в работах [13]–[15]. Механизм эрозии в твердой фазе, который наблюдался на карбиде циркония [16] и на вольфраме [17], был описан в работах [18]–[19], но разработка соответствующих практических методов решения остается весьма актуальной.

Испарение. Общая математическая модель, описывающая динамику электрической дуги, была представлена в работе [10]. Однако, она довольно сложна, поэтому ее упрощение без потери основных законов дуговой динамики может быть достигнуто заменой дифференциальных уравнений для столба дуги, бесстолкновительной и ионизационной зон более простыми уравнениями баланса энергии, в то время как для описания процессов в электродах сохраняются

Keywords: *electrical contacts, electrical arc*

2000 Mathematical Subject Classification: 74N20, 80A20, 80A22

© С. Н. Харин, 2001.

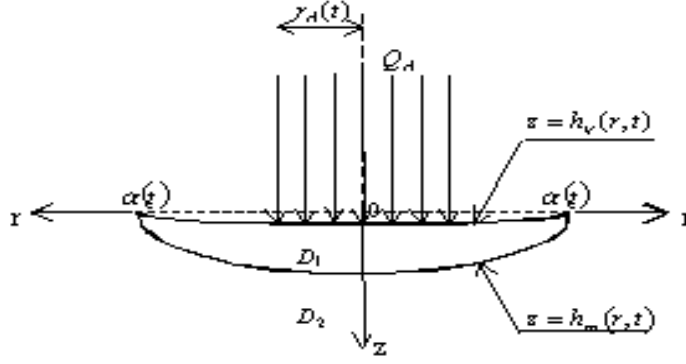


Рис. 1: Расплав (D_1) и твердая зона (D_2) электрода

дифференциальные уравнения с заданными потоками из дуги в качестве граничных условий. В результате действия теплового потока дуги на поверхности электрода формируется осесимметричная зона жидкого металла $D_1(h_\nu(r, t) \leq z \leq h_m(r, t), 0 \leq r \leq \alpha(t))$, контактирующая с не расплавленной твердой зоной $D_2((z \geq 0, r \geq 0) \setminus D_1)$, которые показаны на рис.1. Уравнение теплопроводности для обеих областей может быть представлено в виде

$$C_i \gamma_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \text{div}(\lambda_i \nabla T_i) + \rho_i j_i^2, \quad (1)$$

где через $C_i, \gamma_i, \lambda_i, \rho_i, j_i, T_i$ и t обозначены соответственно теплоемкость, плотность, теплопроводность, электрическое сопротивление, плотность тока, температура и время, $h_\nu(r, t)$ и $h_m(r, t)$ — изотермы испарения и плавления, α и h_0 — радиус и глубина расплава, f — радиус дуги, индекс $i = 1$ относится к расплаву, а $i = 2$ — к твердой зоне.

На изотерме поверхности испарения $z = h_\nu(r, t)$ условие Стефана имеет вид

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = Q_A + L_\nu \gamma_1 \frac{\partial h_\nu}{\partial t}, \quad (2)$$

где тепловой поток дуги определяется выражением

$$Q_A = q_0(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_A^2(t)}\right), \quad (3)$$

в котором $q_0(t), L_\nu, r_A(t)$ и n означают соответственно магнитуду (максимум теплового потока в центре контактного пятна), скрытую теплоту испарения, эффективный радиус нормального распределения и нормаль к поверхности.

Скорость испарения может быть определена законом Ленгмюра

$$\gamma_1 \frac{\partial h_\nu}{\partial t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{T_1}} \exp\left(A - \frac{B}{T_1}\right), \quad (4)$$

где $\Gamma = (2\pi R_T/M)^{\frac{1}{2}}$, R_T — газовая постоянная, M — молекулярный вес пара, A и B — константы испарения. Если предположить, что доля теплового потока, входящего в электрод, которая потребляется на фазовый переход испарения, имеет нормальное радиальное распределение

$$Q_\nu = q_\nu(t) \exp\left(-\frac{r^2}{r_\nu^2(t)}\right), \quad (5)$$

где $q_\nu(t)$ и $r_n u(t)$ — магнитуда и эффективный радиус испарения, то можно опустить закон Ленгмюра (4) и рассматривать лишь одно условие Стефана (3) с заменой в нем Q_A на разность $Q_A - Q_\nu$. Эффективный радиус испарения может быть найден в этом случае из уравнения

$$T_1(r_\nu(t), 0, t) = T_b, \quad (6)$$

где T_b — температура кипения. Магнитуды $q_0(t)$ и $q_\nu(t)$ определяются из уравнения баланса энергии для столба дуги, анода и поверхности катода.

На поверхности перехода $z = h_m(r, t)$ между расплавом и твердой зоной задается еще одно условие Стефана

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} + L_m \gamma_1 \frac{\partial h_m}{\partial t}, \quad (7)$$

дополняемое уравнением

$$T_1 = T_2 = T_m, \quad (8)$$

где L_m и T_m — соответственно скрытая теплота плавления и температура плавления.

Для замыкания системы граничных условий необходимо задать еще условие аксиальной симметрии

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad \text{если } r = 0, \quad (9)$$

а также начальные условия

$$T_2(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad T_1(0, 0, 0) = T_m. \quad (10)$$

Выражение для $T_0(r, z)$ может быть найдено из решения уравнения теплопроводности на этапе, предшествующем плавлению. Оно приведено в работе [11].

Алгоритм решения. Для решения задачи Стефана (1) — (10) с двумя свободными границами $z = h_\nu(r, t)$ и $z = h_m(r, t)$ используется метод мажорантных тепловых потоков, представленный в работе [23]. В соответствии с этим методом время горения дуги $0 \leq t \leq t_A$ разбивается на элементарные интервалы (шаги). Для каждого такого шага реализуется следующая итерационная процедура. Вначале строится известное решение стандартной задачи для уравнения (1) в цилиндрическом полупространстве $r > 0, z > 0$ с заданным тепловым потоком дуги $Q_A(r, t)$ на границе $z = 0$. Это решение $T^+(r, z, t)$ является верхней мажорантой и дает завышенные значения температуры, поскольку реальный тепловой поток $Q_A(r, t) - Q_m(r, t) - Q_\nu(r, t)$, учитывающий тепловые потери на фазовые переходы плавления и испарения, меньше потока дуги. Из этого решения определяются поверхности $z = h_m^+(r, t)$ и $z = h_\nu^+(r, t)$, соответствующие изотермам плавления и испарения, и вытекающие из них объемы расплава и испарения, которые также завышены. Затем вычисляется мощность $Q_{m+\nu}^+ = Q_m(r, t) + Q_\nu(r, t)$, затрачиваемая на фазовые переходы для найденных объемов, и снова решается стандартная задача теплопроводности, но уже для заниженного значения теплового потока $Q_A(r, t) - Q_{m+\nu}^+(r, t)$, в результате чего определяются нижние мажоранты температуры $T^-(r, z, t)$ и изотерм плавления и испарения $z = h_m^-(r, t)$ и $z = h_\nu^-(r, t)$. Такая процедура повторяется несколько раз до получения нужной точности.

Результаты расчета. Медные электроды. Расчет был проведен для Cu — электродов при токах $I = 100A, 300A, 500A$ и скоростях размыкания $V_0 = 0, 0,5m/c, 5m/c, 20m/c$. Результаты представлены на рис. 2 — 4.

Сразу же после разрыва мостика температура в центре анодного пятна $T_a(0, t)$ (рис. 2) резко возрастает до величины $6 \cdot 10^3 K$, уменьшаясь затем со временем до значения $1 \cdot 10^3 c$, сравнимого с температурой группового катодного пятна ($T_c = 4 \cdot 10^3 K$). Вследствие этого испарение с анода резко сокращается, и металлическая фаза дуги переходит в газовую фазу в критической точке t_{cr} пересечения анодной и катодной температур. Величина тока при этом весьма важна,

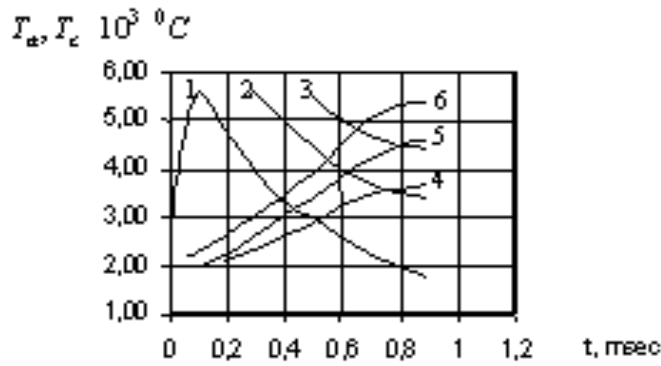


Рис. 2: Температура $T_a(0, t)$ и $T_c(0, t)$ в центре анода и катода в функции от времени t . Cu - контакты. Для анода: 1- $I = 100A$, 2- $I = 300A$, 3- $I = 500A$. Для катода: 4- $I = 100A$, 5- $I = 300A$, 6- $I = 500A$. Критическое время: $t_{cr} = 0,4мс(300A)$, $0,65мс(500A)$, $0,8мс(500A)$

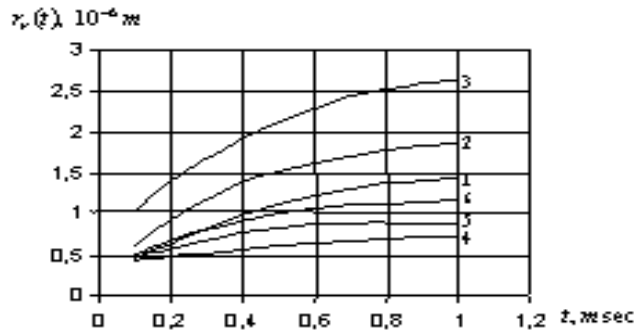


Рис. 3: Динамика эффективного радиуса испарения $r_{ev}(t)$ с анода (1 - $I = 100A$, 2 - $I = 300A$, 3 - $I = 500A$) и с катода (4 - $I = 100A$, 5 - $I = 300A$, 6 - $I = 500A$). (Cu -электроды)

так как меньшему току соответствует меньшее время существования анодной дуги. Снижение температуры в центре анодного пятна является результатом действия двух факторов: 1) уменьшения теплового потока в анод вследствие расхождения контактов и увеличения радиуса анодного пятна и 2) охлаждения анода вследствие интенсивного испарения.

Условия возникновения и эволюции газовой фазы дуги зависят от свойств электродного материала, таких как температура плавления и испарения, скрытая теплота испарения и т.д., которые должны быть учтены в математической модели короткой дуги.

Испарение материала в зоне основания короткой дуги является важнейшим фактором, определяющим ее эволюцию. Эффективный радиус испарения с катодного пятна $r_v(t)$ возрастает вместе с током (рис. 3), в то время как $r_m(t)$ для катода изменяется весьма медленно.

Скорость роста радиуса анодного пятна $\frac{dr_{av}}{dt}$ меняется от $0,1м/с$ до $0,2м/с$ и стремится к нулю в конце анодной фазы дуги.

Кривые анодных и катодных потерь на испарение $Q_{av}(t)$ и $Q_{cv}(t)$ представлены на рис. 4. Анодные кривые потерь вначале быстро возрастают и достигают максимума при $t \approx 0,1-0,5мс$, а затем уменьшаются до нуля, пересекая катодные кривые в критических точках.

Максимум анодных потерь на испарение несколько смещается в сторону большего времени с возрастанием тока. Это смещение можно объяснить изменением соотношения между скоро-

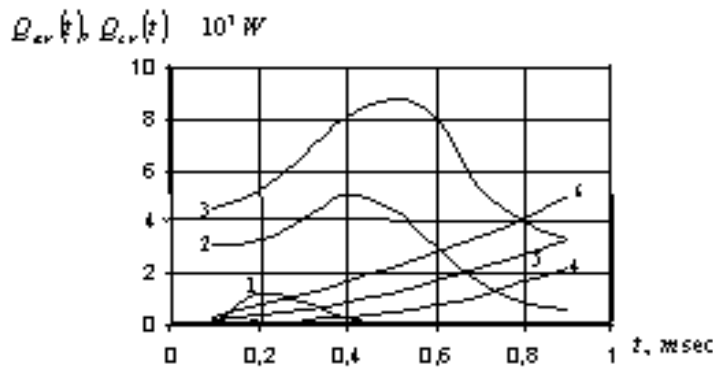


Рис. 4: Анодные потери на испарение $Q_{av}(t)$ (1 - $I = 100A$, 2 - $I = 300A$, 3 - $I = 500A$) и катодные потери на испарение $Q_{ev}(t)$ (4 - $I = 100A$, 5 - $I = 300A$, 6 - $I = 500A$), $V_0 = 0,2m/c$. Co — контакты

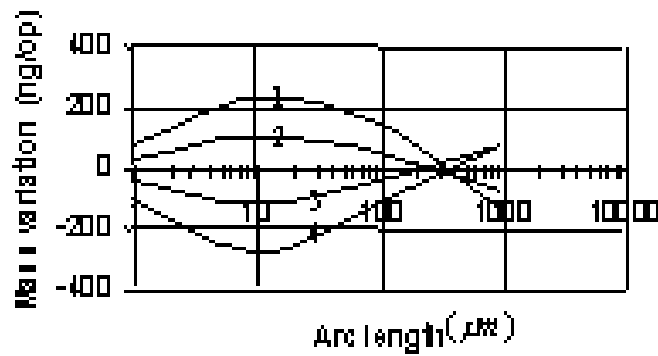


Рис. 5: Эрозия $AgCdO$ электродов в зависимости от длины дуги. $L = 0$ 1 - 40A (катод), 2 - 20A (катод). 3 - 20A (анод), 4 - 40A (анод).

стью роста температуры и интенсивностью испарения в анодном пятне. В начальной стадии мощность испарения резко возрастает вместе с ростом анодной температуры. Быстро растущий радиус площадки испарения $r_v(t)$ вызывает интенсивное испарение. После максимума температура начинает уменьшаться вследствие охлаждающего действия парообразования и уменьшения теплового потока из дуги с ростом межконтактного расстояния. Скорость испарения весьма чувствительна к изменению температуры в силу экспоненциальной зависимости (4), равно как и к изменению величины тока. Из рис.4 можно заключить, что испарение анода практически заканчивается при $t = 5ms$ для тока $I = 100A$, тогда как за то же время при токе $I = 500A$ интенсивность испарения достигает максимума. Сравнение результатов этих вычислений с экспериментальными данными [20] показывает достаточно удовлетворительное согласование с ошибкой, не превышающей 10–15%.

Эрозия $AgMeO$ электродов. Аналогичные вычисления были проведены для металлокерамики $AgCdO$ и $AgSnO_2$ при условиях: токи $I = 20A$ и $I = 40A$, напряжение $U = 14V$, скорость размыкания $V_0 = 0,2m/c$, индуктивность $L = 0$ и $L = 50mГн$. Эти условия типичны для размыкания тока в автомобильных реле и коммуникациях. Результаты расчета представлены на рис. 5 – 7.

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [9], [22]. Их анализ позволяет заключить, что в металлической фазе короткой анодной дуги, которая характеризу-

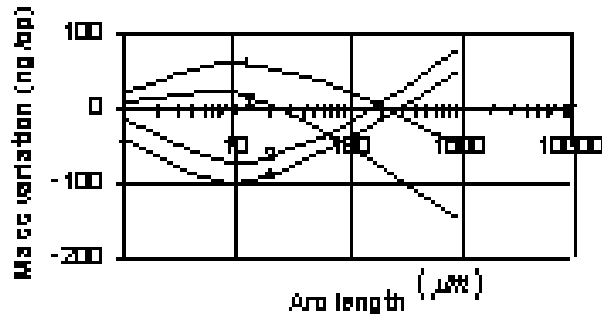


Рис. 6: Эрозия $AgSnO_2$ в зависимости от длины дуги. $L = 0$ 1 - $I = 40A$ (катод), 2 - $20A$ (катод) 3 - $20A$ (анод), 4 - $40A$ (анод).

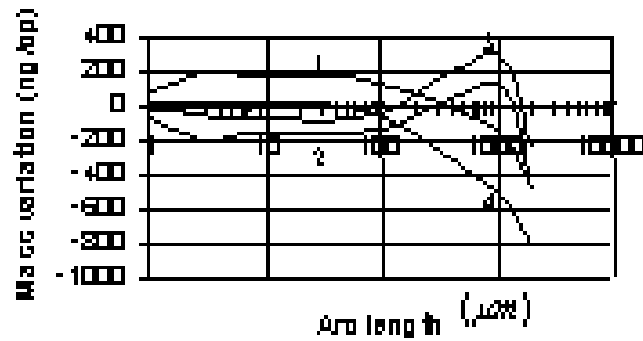


Рис. 7: Эрозия $AgCdO$ и $AgSnO_2$ в зависимости от длины дуги $L = 50 мГн$, $I = 40A$ 1 - $AgCdO$ катод, 2 - $AgCdO$ анод, 3 - $AgSnO_2$ анод, 4 - $AgSnO_2$ - катод

ется переносом материала с анода на катод, эрозия электродов $AgSnO_2$ значительно меньше, чем эрозия электродов $AgCdO$ как для резистивных, так и для индуктивных цепей, в то время как в газовой фазе (длинная дуга) с обратным направлением переноса величина эрозии зависит от индуктивности цепи. Для резистивных цепей ($L = 0$) эрозия электродов $AgSnO_2$ значительно меньше по сравнению с эрозией в электродах $AgCdO$, однако, для индуктивных цепей ситуация меняется на обратную, поэтому использование электродов $AgCdO$ в случае длинных дуг, горящих в газовой фазе, более предпочтительно.

Эрозия в капельной фазе. Наряду с испарением в ряде случаев возможен и другой механизм эрозии, которая происходит в виде жидких капель и наблюдается в области средних и больших токов. Она обусловлена взаимодействием различных сил в жидкометаллической зоне, таких как электромагнитное и газокINETическое давление, поверхностное натяжение, а также взрывообразным разбрызгиванием газовых включений в жидком металле. Математическая модель (1)–(10) должна быть скорректирована в этом случае с учетом тепло- и массопереноса в поверхностном слое жидкого металла. Уравнение движения для жидкого металла в области D_1 может быть записано в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} = \frac{1}{\gamma_1} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{V} + \bar{F} \quad (11)$$

а уравнение неразрывности остается стандартным:

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (12)$$

Уравнение теплопроводности (1) для $i = 1$ должно быть заменено уравнением энергии

$$C_1 \gamma_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla T_1 \right) = \text{div}(\lambda_1 \nabla T_1) + \rho_1 j_1^2 \quad (13)$$

в то время как для $i = 2$ оно остается прежним. Здесь $\bar{V}(V_r, V_z)$ означает вектор скорости жидкого металла, P - газокINETическое давление, $\bar{F} = (\mu_0/\gamma_1)\bar{j} \times \bar{H}$ - электромагнитная сила, ν и μ_0 - вязкость и магнитная проницаемость. Наряду с граничными условиями для температуры должны быть заданы аналогичные условия и для скорости

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} = 0 \quad \text{на поверхности} \quad z = h_\nu(r, t) \quad (14)$$

$$V_r = V_z = 0 \quad \text{на поверхности} \quad z = h_m(r, t) \quad (15)$$

Для упрощения задачи примем радиальное распределение давления в виде

$$P = P_0 \cdot (1 - r^2/\alpha^2) \quad (16)$$

Из теории подобия следует, что характерное время процессов теплопереноса t_h много больше по сравнению с характерным временем гидродинамических процессов t_ν . Следовательно, гидродинамическая часть рассматриваемых уравнений может быть решена независимо от тепловой в предположении, что T_1 , h_m и h_ν являются фиксированными для данного времени t .

Используя закон сохранения энергии, можно записать равенство

$$\frac{1}{2} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \|\bar{V}^2\| + \nu \|\nabla^2 \bar{V}\| = E_H + E_M, \quad (17)$$

где слагаемые в левой части соответствуют кинетической и потенциальной энергии, а правая часть есть сумма гидродинамической и электромагнитной сил. Интегрируя по времени, получаем следующее приближение

$$\gamma_1 \|\bar{V}^2\| + \nu \int_0^{t_A} \|\nabla^2 \bar{V}\| dt \cong W_M + W_V, \quad (18)$$

где t_A - время горения дуги. Выражения для E_M , E_H , W_M , W_V даны в работе [15].

Соотношение (18) дает возможность сравнить каждое слагаемое в правой части (18), не решая дифференциальные уравнения, и оценить таким образом, какая сила ответственна в основном за механизм эрозии.

Модель становится более эффективной, если заменить всю область D_1 пограничным слоем вблизи поверхности испарения $z = h_\nu(r, t)$. Тогда поля температуры и скорости при испарении могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \gamma_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \rho_1 j_r^2, & \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}, & \frac{\partial V_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial F}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\mu_0}{\lambda_1} j_r H_\varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Динамика изотермы плавления медного катода в результате нагрева тепловым потоком дуги Q_A и джоулевыми источниками с плотностью тока j показаны на рис. 8 для параметров:

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_0 \exp(-\alpha_i r^2), & Q_0 &= 2,2 \cdot 10^7 \text{ Bm/m}^2, & \alpha_i &= 3,18 \cdot 10^4 \text{ м}^{-2} \\ j &= j_0 \exp(-\alpha_j r^2), & j_0 &= 1,9 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2, & \alpha_j &= 1,3 \cdot 10^2 \text{ м}^{-2} \\ 1-t &= 0,2 \text{ мс}, & 2-t &= 0,4 \text{ мс}, & 3-t &= 0,6 \text{ мс}, & 4-t &= 0,2 \text{ мс} \end{aligned}$$

Это позволяет оценить величину эрозии в форме жидких капель, кинетическая энергия которых больше энергии поверхностного натяжения.

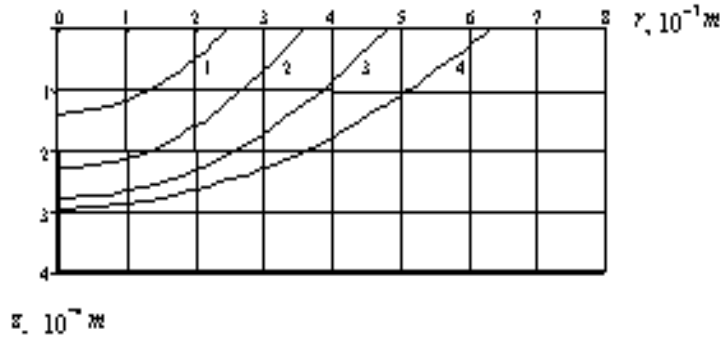


Рис. 8: Динамика изотерм плавления конвективного теплообмена из дуги

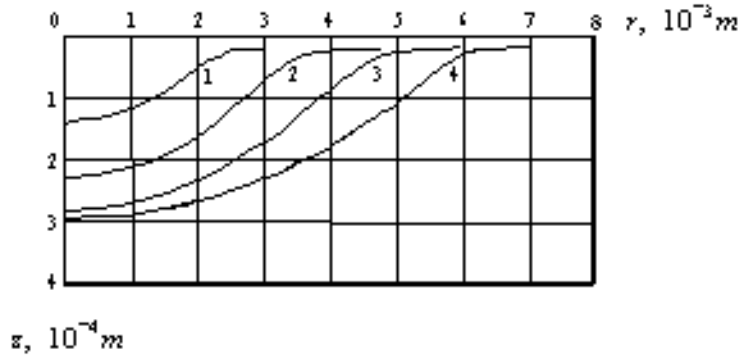


Рис. 9: Изотермы плавления термокапиллярной конвекции. $I = 100A$, $Ma = 2 \cdot 10^3$

Термокапиллярный механизм эрозии. В ряде случаев объяснить измеренные значения капельной эрозии как следствие движения жидкого металла от центра пятна к его периферии под действием электромагнитного и газокINETического давления не представляется возможным, особенно для таких тугоплавких металлов. В этом случае эрозионный механизм можно объяснить действием термокапиллярного эффекта Марангони, который вызывает интенсивное конвективное течение в узком поверхностном слое жидкого расплава за счет температурной зависимости поверхностного натяжения жидкого металла. Чтобы учесть этот эффект, необходимо скорректировать представленную выше модель конвективного тепло- и массообмена путем замены условия (14) специальным граничным условием, описывающим термокапиллярные силы, которые вызывают радиальные напряжения на поверхности жидкого металла:

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad z = h_\nu(r, t) \quad (20)$$

где μ — динамическая вязкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Кроме этого, в правые части уравнений (17) и (18) должны быть добавлены слагаемые E_σ и W_σ , ответственные за термокапиллярный эффект. В этом случае аналог термокапиллярного числа Рейнольдса $Re = W_{10} h_0 \gamma_1 / \mu$, $W_{10} = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial T_1} \right| \frac{T_m - T_0}{\alpha \mu}$, числа Прандтля $Pr = \frac{\sigma \mu}{\lambda_1}$ и числа Марангоми $Ma = Re \cdot Pr$ играют ключевую роль.

Изотермы плавления для вольфрама при тех же условиях, что и выше, но с учетом термокапиллярной конвекции, представлены на рис. 9.

В работе [15] показано, что при плотности тока $j = 6,45 \cdot 10^7 A/m^2$ и тепловом потоке $Q_0 = 3,2 \cdot 10^8 Bm/m^2$ число Марангоми для вольфрама равно $Ma = 1,13 \cdot 10^2$, вследствие чего скорость движения термокапиллярной конвекции V_r на поверхности расплава достигает $13m/c$,

что достаточно для выброса жидкого металла из расплава только термокапиллярными силами без учета электродинамического и газокинетического давлений.

Эрозия в твердой фазе. В ряде случаев на поверхности электродов могут наблюдаться очаги пластической деформации и микротрещины. Это происходит тогда, когда коэффициент сосредоточенности теплового источника дугового разряда достаточно велик ($\alpha \geq 10^7 \text{ м}^{-2}$), а длительность импульса мала. При этом вблизи контактной поверхности за весьма малые времена возникают очень большие градиенты температуры (тепловой удар), которые являются причиной возникновения в теле электрода термоупругой волны и напряжений, превышающих предел прочности контактного материала и вызывающих выброс частиц, отколотых от поверхности электрода [16]–[17].

Природа тепловых напряжений существенно зависит от плотности тока в контактной зоне. При плотности тока порядка 10^8 А/м^2 и выше рост температуры обусловлен действием джоулевых источников тепла в зоне стягивания линий тока, в то время как при плотности 10^7 А/м^2 и ниже превалирует поверхностный дуговой поток тепла. Температурное поле, создающее термоупругие напряжения вследствие джоулевого нагрева, может быть описано уравнением теплопроводности

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \nabla T) + \rho j^2, \quad r > 0, \quad z > 0. \quad (21)$$

Плотность тока в импульсном режиме определяется из решения уравнения Пуассона для электрического потенциала в виде [11]:

$$j(r, z, t) = \frac{\delta t}{4\pi f r} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right), \quad (22)$$

где δ — скорость роста тока, $f = f(t)$ — радиус дугового пятна, увеличивающегося во времени, и $\eta = [z^2 + (r - f)^2]^{1/4} [z^2 + (r + f)^2]^{-1/4}$. Решение уравнения (21) с граничным условием в виде теплового потока $P_0 t$, поступающего в электрод из дуги, хорошо известно [11]. Используя это решение и термоупругий потенциал, можно найти компоненты напряжений. Расчеты показывают, что термоупругие напряжения, соответствующие этой модели, существенны лишь при больших скоростях нарастания тока ($\beta \geq 10^7 \text{ А/с}$ для вольфрама и $\beta \geq 10^9 \text{ А/с}$ для меди). Максимум напряжений в этом случае возникает на краю контактного пятна ($z = 0, r = f(t)$), где плотность тока и тепловых источников также максимальны, в то время как в центре пятна напряжения значительно ниже, что видно из уравнения (22).

В случае преобладания поверхностных тепловых источников распределение напряжений носит обратный характер: их максимум находится в центре пятна. В этом случае для описания температурного поля в электроде может быть использована сферическая модель Хольма, более простая и удобная по сравнению с цилиндрической. Она состоит в замене плоского кругового контактного пятна радиуса f полусферой идеальной проводимости с радиусом $b = f\sqrt{2}$, что обеспечивает адекватность температурных полей в обеих моделях. Граничное условие на контактной полусфере записывается в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(b, t)}{\partial r} = P_0 t. \quad (23)$$

Главные компоненты тензора напряжений в квазистатическом приближении определяются выражениями

$$\sigma_{rr} = \frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x, t) dx, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\psi\psi} = \frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^3} \int_b^r x^2 T(x, t) dx - T(r, t) \right]. \quad (24)$$

Решение уравнения (21) при условии (23) дается формулой

$$T(r, t) = \frac{bP_0 t \beta}{\lambda \alpha} [\text{erf}(\alpha - \beta) - 2(\alpha + \beta) \cdot \text{ierfc}(\alpha - \beta)] +$$

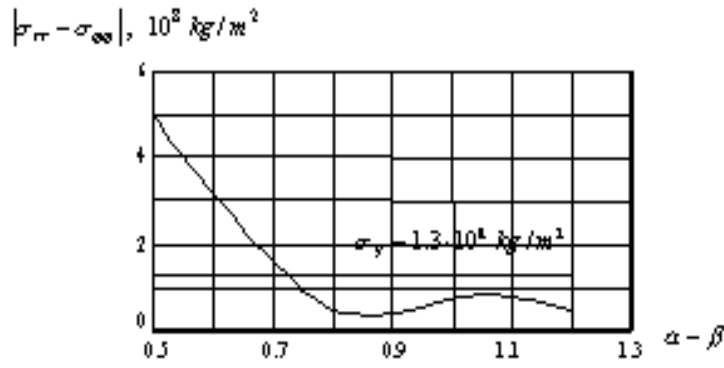


Рис. 10: Зависимость тензора напряжений $|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$ от $\alpha - \beta$

$$4\beta^2 \exp \left\{ -(\alpha - \beta)^2 \left[\Omega(\alpha - \beta) - \Omega\left(\alpha - \beta + \frac{1}{2\beta}\right) \right] \right\}, \quad (25)$$

где

$$\beta = \frac{b}{2a\sqrt{t}}, \quad \alpha = \frac{r}{2a\sqrt{t}}, \quad \Omega(z) = \exp(z^2) \cdot \operatorname{erfc} z.$$

Подставляя выражение (25) в (24), можно найти компоненты тензора напряжений. Если σ_y — предел прочности материала электрода, то простейшее условие, исключаяющее растрескивание, имеет вид $|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| < \sigma_y$, т.е.

$$\frac{2E\alpha_0}{1-\mu} \frac{P_0 t_0 b}{\lambda} \left| \frac{4\beta}{\pi} - 1 - 4\beta^2 \left[1 - \Omega\left(\frac{1}{2\beta}\right) \right] \right| < \sigma_y, \quad (26)$$

где t_0 — время действия импульса.

Приведем пример расчета термоупругих напряжений на вольфрамовом электроде при условиях, описанных в эксперименте работы [17]. Для этих данных

$$I = \delta t_0 = 1000A, \quad t_0 = 2 \cdot 10^{-6}c, \quad \pi f^2 = 5 \cdot 10^{-4}m,$$

тогда $b = 2,55 \cdot 10^{-4}m$, $\Omega(1/2\beta) = 0,94$, и, следовательно, $|\sigma_{\varphi\varphi}| = 2,2 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$, что превышает предел прочности вольфрама $\sigma_y = 1,3 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$. Экспериментально наблюдаемая эрозия в виде отколотых от поверхности твердых частиц подтверждает правильность неравенства (26). Используя неравенство $\sigma_y \leq |\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$, можно вычислить характерный размер области l_0 , подверженной воздействию термоупругой волны до затухания и приводящей к выбросу материала электрода в твердой фазе.

Как видно из рис. 10 неравенство $\sigma_y \leq |\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|$ выполнено, если, $\alpha - \beta \leq 0,65$, т.е. $r - b \leq 1,3a\sqrt{t}$, и разрушение электрода в твердой фазе происходит на глубину

$$l_0 = 1,3a\sqrt{t_0} = 1,67 \cdot 10^{-5}m.$$

Таким образом, неравенство (26) представляется весьма полезным для расчета термических напряжений в электрических контактах, работающих в импульсном режиме.

Цитированная литература

1. **Ragnar Holm** Electric Contacts. 4-th Edition. Springer Verlag. 1981. P. 316 – 337.
2. **Bolanowski B.** // Proc. 6-th Int. Conf. of Switching Arc Phenomena, Lodz, Poland. 1985. P. 279 – 285.
3. **Andanson P., Lefort A.** // J. Appl. Phys. D. 1984. 17. P. 2377 – 2386.

4. **Swingler J., McBride J. W.** // Proc. 41-th IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts. Chicago. USA. 1996. P. 105 – 114.
5. **Boddy J., Utsumi T.** // J. Appl. Phys. 1071. Vol. 42, № 9. P. 3369 – 3373.
6. **Gray E. W.** // IEEE Trans. Plasma. Sci. 1973. Vol. PS-1, № 1. P. 30 – 33.
7. **Sone H., Takagi T.** // IEEE Trans. CHMT. 1990. Vol. 13. P. 13 – 19.
8. **Chen Z. K., Sawa K.** // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 76. P. 3326 – 3331.
9. **N. Ben Jemaa, Nedelec N., Benhenda S.** // Proc. 18-th Int. Conf. on Electrical Contacts. Chicago. USA. 1996. P. 70 – 74.
10. **Kharin S. N.** // Proc. 43rd IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts. Philadelphia. USA. 1997. P. 289 – 305.
11. **Kharin S. N.** // IEEE Transactions on CPMT. 1996. Part A. Vol. 19, № 3, P. 313 – 319.
12. **Bolanowski B.** // Int. Symposium On Electrical Discharges in Gases. Pasim. Poland. 1987. P. 115 – 121.
13. **Chabrerie J. P. et al.** // Proc. 13- th Int. Conf. on Electrical Contacts. Lausanne. Switzerland. 1986. P. 96 – 102.
14. **Ambier J.** // Proc. 15- th Int. Conf. of Electrical Contacts. Montreal. Canada. 1990. P. 117 – 125.
15. **Kharin S. N.** // Proc. 15-th Int. Conf. of Electrical Contacts. Montreal. Canada. 1990. P. 37 – 43.
16. **Золотых Б. Н. и др.** // Сб. "Электрические контакты". Москва: "Энергия", 1967. С. 32 – 51.
17. **Раховский В. И.** Коммутация электрического тока в вакууме. М.: Наука, 1970. С. 75 – 84.
18. **Kharin S. N.** // Proc. 16-th Int. Conf. on Electrical Contacts. Loughborough. England. 1992. P. 205 – 209.
19. **Kharin S. N.** // Proceedings of the International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications. Nagoya. Japan. 1999. P. 133 – 140.
20. **Елагин В. П., Долинский Ю. М.** // Деп. УкрНИИИТИ, 12.01.87, Харьков. С. 1 – 15.
21. **Жуков М. Ф. и др.** Термохимические катоды. Институт теплофизики. СО АН СССР. Новосибирск, 1985, с. 107.
22. **N. Ben Jemaa, Morin L., Lehfaoui L., Nedelec L.** // Proceedings of the International Conference on Electrical Contacts, Electromechanical Components and Their Applications. Nagoya. Japan. 1999. P. 173 – 179.
23. **Харин С. Н.** // Сб. Методы и средства математического моделирования процессов переноса. Алма-Ата: КазГУ, 1985. С. 38 – 47.

Поступила в редакцию 15.08.2001г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 538.3

2000 MSC: 35Q60

Alexeeva L. A. **Generalized solutions of nonstationary boundary value of electrodynamics** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.3–13.

In the space of generalized functions the nonstationary boundary value problems for Maxwell equations are considered. Their generalized solutions have been built in the convolution form. On this base the regular integral presentations of vectors of magnetic and electrical tensions through their border values have been constructed. Singular integral equations for solving the two boundary values problems have been received. The shock electromagnetic waves with the gap of electrical and magnetic tension on the fronts are considered. The conditions on the fronts have been received and it's shown that the gap of the tensions are tangent to the front a wave, i.e. the shock electromagnetic waves are transverse. It's proved the uniqueness of classical solution of problem including the shock waves.

References — 8.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L20

Asanova A. T. **The bounded solutions of systems hyperbolic equations in the strip** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.14–20.

Sufficient conditions of unique bounded solution's existence of hyperbolic equations' system in the strip in the block-tape bilateral matrix's terms composing by initial facts with parametrization's method are established.

References — 4.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35B45, 35D05, 35F25, 35G15, 35R10

Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I. **About solvability of the boundary value problems for loaded equations** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.21–29.

The equations prescribed in $\Omega \subset R^n$ are called loaded, if they contain some operations of the traces of desired solution on manifolds (of dimension which is strongly less than n) from closure $\bar{\Omega}$. These equations result from approximations of nonlinear equations by linear ones, in the problems of optimal control when the control actions depend on a part of independent variables, in investigations of the inverse problems and so on. In present work we study the periodic boundary value problems for higher-order loaded linear differential operator equations and the initial value problem for first-order loaded nonlinear differential operator equation. For linear problems criterion of unique solvability is established. For the nonlinear problem sufficient conditions of solvability are determinately.

References — 15.

УДК: 517.948

2000 MSC: 34A45, 65L20

Dzhumabaev D. S. **Iterative processes with damping multipliers and their applications** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.30–40.

The sufficient conditions of convergence of iterative processes with diverse damping multipliers under the same initial approaches towards one and the same solution of unbounded closed operator equation are received. The results are applied to linear two-point boundary problems for ordinary differential equations.

References — 12.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A05, 41A50

Zhensykbayev A. A. **Weak Chebyshev system and interpolation** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.41–51.

The necessary and sufficient condition that the derivatives of Chebyshev system are the same type of it is given. The conditions of solvability the Hermite-Birkhoff type interpolation are obtained.

References — 5.

УДК: 517.51

2000 MSC: 47B38, 47G10

Oinarov R. **Exact estimates of Volterra type integral operators** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.52–61.

In this paper the extending classes $P_m, Q_m, m \geq 0$ of nonnegative function $K(\cdot, \cdot)$ are constructed. When the kernels of integral operators

$$Kf(x) = \int_0^x K(x, s)f(s)ds, \quad Kf(s) = \int_s^\infty K(x, s)f(x)dx$$

belong to the classes P_m, Q_m , the sufficient and necessary conditions of bounded of the operator K from $L_p(0, \infty)$ to $L_q(0, \infty)$, $1 < p \leq q < \infty$ are given. The classes P_m, Q_m include kernels of many known operators. For example, the kernel of the weighted integration operator belongs to the class $P_0 \equiv Q_0$, and the kernels of the fractional integration operators belong to $P_1 \cap Q_1$.

References — 20.

УДК: 517.956

2000 MSC: 37D45, 74H65, 62M20, 62M45

Pak I. T., Makarenko N. G., Karimova L. M., Kim S. A. **About algorithmic modelling of complex dynamical systems** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.62–71.

The paper is devoted to the problems of algorithmic modelling of complex dynamical systems. For this purpose there is proposed using methods of chaotic dynamics, fractal geometry and artificial neural networks on the example of Caspian Sea dynamics. The approach for modelling and prediction of dynamic regimes of sea level is alternative to simple probabilistic schemes. The unique global evolution of the Caspian Sea level is represented by the repeated change of transgressive and regressive phases, which are traced in paleodata, historical information, and also by the monitoring on short instrumental period. To use short time series correctly we applied the method of fractal approximation. The obtained phase portraits demonstrate the spontaneous transitions between states of the high and low level of the sea. Estimates of correlation dimension of attractors are not contradicted the hypothesis about the chaotic dynamics scenario. Fully connected neural network

(the program neuroimitator) was used as a predictor to make the local autoregressive prediction. Epignosis was made for data from 1837 y. to 1995 y. The obtained results agree with original data well and testify to prospects of use of the topological dynamics and neural network methods to predict the Caspian sea level correctly.

References — 29.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Rakhimberdiev M. I. **An exponential separation of families of morphisms of vector bundle** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.72–76.

A necessary and sufficient conditions have been given for exponential separation for linear expansion of dynamical system on vector bundle with using strong positivity of automorphism, generating dynamic system.

References — 5.

УДК: 504.3

2000 MSC: 92D40

Sultangazin U. M. **Development cosmic monitoring and information database for solving agricultural and ecological problems** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.77–83.

The main concepts of elaboration of comic and field-work monitoring of Kazakhstan are given. A number of problems solved in this area of investigations by the Space research institute of Ministry of education and science of Republic of Kazakhstan is illustrated.

References — 0.

УДК: 517.925.5:519.216

2000 MSC: 37H10, 60H10

Tleubergenov M. I. **Helmholtz's problem for stochastic differential systems** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.84–93.

The construction's problem of a functional by given stochastic Ito's equation of second order is examined. The functionals are constructed by method of moment's functions, which are taken the stationary value on the solutions of given stochastic equation of Lagrange's structure.

References — 15.

УДК: 517.956.2

2000 MSC: 35Q15

Tungatarov A. B. **On a class of n-order elliptic systems on the plane with singular point** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.94–99.

The questions of solvability of the generalized Riemann-Hilbert's problem for the one class of n-order ($n \geq 2$) elliptic system on the plane with singular point are investigated.

References — 11.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A16, 42A20, 42A55

Falaleev L. P. **Orders of a decrease of fourier coefficients by orthogonal systems** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 1. P.10–103.

Estimates of orders of a decrease of modulus of Fourier coefficients by trigonometric system, by Haar system and by system of kind of Haar functions $f(x) \in L_p$, $1 < p < 2$ are obtained. Convergence of a sequence is understood in the sense of Cesaro, Riesz or Zygmund.

References — 7.

УДК: 621.316

2000 MSC: 74N20, 80A20, 80A22

Kharin S. N. Mathematical model of dynamics of electrical arc on the base of the cylindrical Stephen problem with two free boundaries // *Mathematical journal*. 2001. Vol. 1. No. 1. P.104–114.

In the paper there are proposed mathematical models corresponding to the four types of erosion. Methods of solution of boundary value problems for partial differential equations in regions with unknown movable boundaries, corresponding to these mathematical models, are developed.

References — 23.

Математический журнал

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители гл. редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:
М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Б.Л.Байдельдинов,
Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев, Д.С.Джумабаев, А.Ж.Найманова,
И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, Ш.С.Смагулов, У.М.Султангазин,
М.А.Сахаева (ответственный секретарь).

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, ул.Пушкина, 125, к. 205
Телефон 8- (3272)-91-19-04, journal@math.kz, <http://www.math.kz>

Сдано в набор 12.08.2001
Подписано в печать 20.09.2001
Формат 62x94/16см.
Бумага офсетная №1.
Усл. печ. лист. 7,75. Уч.-изд. л. 5,17.
Тираж 100 экз.

Дизайн обложки и печать - типография "Эверо"
Адрес: г.Алматы, ул.Байтурсынова, 22, оф.9.
Тел: 8(3272) 39-32-69, факс: 32-38-43.
E-mail: evero@nursat.kz

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в “**Математический журнал**”, должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются по два экземпляра автореферата на русском и английском языках с указанием индекса **200 Mathematical Subject Classification**, названия статьи и английского написания фамилии и инициала авторов (для статьи на английском языке – только на английском).
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в L^AT_EX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: journal@math.kz (см. образец оформления статьи в <http://www/math.kz/> в разделе “**Математический журнал**”).
5. Объем статей (стандартный формат в L^AT_EX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения – 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через два интервала). Объем реферата не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филипов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А.В.**// Успехи матем. наук. 1996. Т51, вып. (или №) 8. С. 61–69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P 57–61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адрес дом. или служ. и дом. телефоны, а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечает требованиям журнала.