ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2003 том 3 № 1 (7)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 3 № 1 (7) 2003

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 3, № 1 (7), 2003

ХРОНИКА

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 5 – 14*

УДК 517.518.476

МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ И АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Г.А.Акишев, С.Битимханулы

Карагандинский государственный университет им. А.Е. Букетова
г. Караганда, ул.Университетская, 28, akishev@kargu.krg.kz.

Пусть $\mathbf{R}^s$ – s-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_s)$ с вещественными координатами; $I_s = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^s : 0 \le x_j \le 2\pi, \quad j = 1, 2, .., s\}$ – s- мерный куб. Через $L_q(I_s)$, как обычно, обозначим пространство всех измеримых по Лебегу, 2π- периодических по каждой переменной функций $f(\bar{x})$ таких, что

$$\|f\|_q = \left(\int_{I_s} |f(\bar{x})|^q d\bar{x} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 1 \le q < +\infty.$$

Положим

$$\gamma_i(nx) = \begin{cases} \cos nx, & i = 1, \\ \sin nx, & i = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\bar{n} \ge \bar{1}} B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} ... \sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1,...,n_s}(x_1, ..., x_s), \tag{1}$$

где $\bar{n} \ge \bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ означает $n_j \ge \alpha_j$ для всех $j = 1, ..., s$,

$$B_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \le \bar{i} \le \bar{2}} a_{\bar{n}}^{(\bar{i})} \cdot \prod_{\nu=1}^{s} \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu).$$

Положим $A_n^{(\beta)} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n)}{n!}, \quad \beta \in \mathbf{R}, n-$ натуральное число. Сумма

$$\sigma_{\bar{n}}^{(\bar{\beta})}(\bar{x}) = \sum_{\bar{1} \le \bar{k} \le \bar{n}} \prod_{j=1}^{s} A_{n_j - k_j}^{(\beta_j - 1)} (A_{n_j}^{(\beta_j)})^{-1} B_{\bar{k}}(\bar{x})$$

Keywords: *trigonometric series, absolute summability, Fourier cofficients*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

называется $(C;\bar\beta)\equiv(C;\beta_1,...,\beta_s)$ средним ряда (1).

Для заданного числа $b_{\bar n}$ смешанную разность определим следующим образом

$$\Delta b_{\bar n}=\sum_{\bar 0\le\bar\varepsilon\le\bar 1}(-1)^{s-\sum_{i=1}^s\varepsilon_i}\cdot b_{\bar n-1+\bar\varepsilon},$$

где $\bar\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_s)$. Ряд (1) называется $|C;\bar\beta|_\lambda$-суммируемым, $\lambda\ge 1$ в точке $\bar x\in I_s$, если (см.[1])

$$\sum_{\bar n\ge\bar 1}|\Delta\sigma_{\bar n}^{(\bar\beta)}(\bar x)|^\lambda\cdot\prod_{j=1}^s n_j^{\lambda-1}<+\infty.$$

Далее положим $\rho_{\bar k}=\sqrt{\sum\limits_{\bar 1\le\bar i\le\bar 2}|a_{\bar k}^{(i)}|^2}$. Если (1) есть тригонометрический ряд Фурье функции $f\in L_1(I_s)$, то будем писать $\rho_{\bar k}(f)$ вместо $\rho_{\bar k}$.

Пусть $\omega_r^{(j)}(f;\delta)_q,\quad r>0, j=1,2,...,s$ — частный модуль гладкости порядка r функции $f(\bar x)\in L_q(I_s),\quad 1\le q<\infty$ по переменной x_j; $E_{n,\infty}^{(j)}(f)_q$ — частное наилучшее приближение функции $f(\bar x)\in L_q(I_s)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n по переменной $x_j,\quad j=1,2,..,s$ (см. [2, с.43]); $Y_{l_1,...,l_s}(f)_q$ — наилучшее приближение "углом" тригонометрическими полиномами порядка l_j по переменной $x_j, j=1,2,..,s$ (см. [3]).

Рассмотрим следующие классы

$$H_q^{\omega_r}=\{f\in L_q(I_s):\quad\omega_r^{(j)}(f;\delta)_q\le\omega_r(\delta),\quad j=1,2,...,s\},$$

$$E_q^{\varepsilon}=\{f\in L_q(I_s):\quad E_{n,\infty}^{(j)}(f)_q\le\varepsilon_n,\quad j=1,2,...,s\},$$

где $\omega_r(\delta)$ — функция типа модуля гладкости порядка r, определенная на $[0,1]$, $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящихся к нулю при $n\to+\infty$.

Пусть $\Omega_r(f;\bar t)_q=\sup\limits_{\substack{|h_j|\le t_j\\ j=1,...,s}}\|\Delta_{\bar h}^r f(\cdot)\|_q$–смешанный модуль гладкости порядка r, где $\Delta_{\bar h}^r f(\bar x)=\Delta_{h_s}^r...\Delta_{h_1}^r f(\bar x)$ есть r-я разность с шагом h_j по переменной x_j.

Классы $SH_q^{\Omega_r}$- это классы функций $f(\bar x)\in L_q(I_s)$, для которых $\Omega_r(f;\bar t)_q\le\Omega_r(\bar t)$, где $\Omega_r(\bar t)=\Omega_r(t_1,...,t_s)$ - заданная функция типа смешанного модуля гладкости порядка r (см. [4]).

Функция одного переменного $\gamma(\tau),\quad 0\le\tau\le 1$ удовлетворяет условию (S^α)(или (S_α)) (см.[5]) при $\alpha>0$, если $\frac{\gamma(\tau)}{\tau^\alpha}$ почти возрастает (почти убывает), т.е. существует число $c>0$, не зависящее от τ_1 и τ_2, такое, что

$$\frac{\gamma(\tau_1)}{\tau_1^\alpha}\le c\cdot\frac{\gamma(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\quad(0<\tau_1\le\tau_2\le 1).$$

Будем говорить, что функция $\gamma(\tau)$ удовлетворяет условию (S), если $\gamma(\tau)$ удовлетворяет условию (S^α) при некотором $0<\alpha<1$. Функция $\Omega_r(\bar t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_r), если $\Omega_r(\bar t)$ удовлетворяет этим условиям по каждому t_j при фиксированных $t_i,\quad i\ne j$.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(\phi)\asymp B(\phi)$ означает, что существуют положительные постоянные c_1,c_2 такие, что $c_1A(\phi)\le B(\phi)\le c_2A(\phi)$ для всех ϕ.

Нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1<q\le 2$, $1\le\lambda\le q\le 2,\quad\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\quad -1<\beta_j<\frac{1}{q'}\quad\forall j=1,...,s$. *Если* $f\in L_q(I_s)$ *и*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^s\beta_j)-1}\cdot(E_{n,\infty}^{(j)}(f)_q)^\lambda<+\infty\quad\forall j=1,2,...,s,$$

то ряд Фурье функции $f\in L_q(I_s)$ *будет* $|C;\bar\beta|_\lambda$*-суммируем почти всюду на* I_s.

Доказательство. Теорему докажем при $s=2$. Имеем

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}+$$

$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{n_2}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}. \tag{2}$$

Оценим первое слагаемое. Для этого применим неравенство Гельдера к сумме по индексу n_2 при $\theta=\frac{q}{\lambda}$, $\quad\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1$. В результате получим

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1}\left\{2^{n_1(\frac{1}{q}-\beta_1)q+n_2(\frac{1}{q}-\beta_2)q}\cdot\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1(\frac{1}{q}-\beta_1)\lambda}\left\{\sum_{n_2=0}^{n_1}2^{n_2(\frac{1}{q}-\beta_2)\lambda\theta'}\right\}^{\frac{1}{\theta'}}\cdot\left\{\sum_{n_2=0}^{n_1}\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le C\cdot\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1(\frac{2}{q}-(\beta_1+\beta_2))\lambda}\cdot\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2}^{2^{n_1+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}. \tag{3}$$

Аналогично доказывается оценка

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{n_2}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le C\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}2^{n_2(\frac{2}{q}-(\beta_1+\beta_2))\lambda}\cdot\left\{\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\sum_{k_1=2}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(\frac{2}{q}-(\beta_1+\beta_2))\lambda}\cdot\left[\sum_{k_1=1}^{2^{n+1}}\sum_{k_2=2^n+1}^{2^{n+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right]^{\frac{\lambda}{q}}. \tag{5}$$

Далее, применяя теорему Харди-Литтльвуда, имеем (см. [6]) $(1<q\le 2)$

$$\left[\sum_{k_1=1}^{2^{n+1}}\sum_{k_2=2^n+1}^{2^{n+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q-2}\cdot\rho_{k_1,k_2}^q(f)\right]^{\frac{1}{q}}\le C\cdot\left\|\sum_{k_1=1}^{2^{n+1}}\sum_{k_2=2^n+1}^{2^{n+1}}B_{k_1,k_2}(x_1,x_2)\right\|_q=$$

$$=C\cdot\left\|\sum_{k_1=1}^{2^{n+1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n+1}}B_{k_1,k_2}(x_1,x_2)-\sum_{k_1=1}^{2^{n+1}}\sum_{k_2=1}^{2^{n}}B_{k_1,k_2}(x_1,x_2)\right\|_q\le C\cdot E_{2^n,2^n}(f)_q.$$

Из (5) получим оценку

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\Big\{\sum_{k_1=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}}\sum_{k_2=2^{n_2}+1}^{2^{n_2+1}}\prod_{j=1}^{2}k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{k_1,k_2}^{q}(f)\Big\}^{\frac{\lambda}{q}}\le$$

$$\le C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}2^{n(\frac{2}{q}-(\beta_1+\beta_2))\lambda}\cdot E_{2^n,2^n}^{\lambda}(f)_q\le C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n^{(\frac{2}{q}-(\beta_1+\beta_2))\lambda-1}\cdot E_{n,n}^{\lambda}(f)_q.$$

Следовательно, по теореме 1 работы [7] ряд Фурье функции $f\in L_q(I_2)$ почти всюду $|C;\beta_1,\beta_2|_\lambda$-суммируем на I_2, $-1<\beta_j<\frac{1}{q'}$, $\quad j=1,2$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $1<q\le 2$, $1\le\lambda\le q\le 2$, $\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $\quad 0\le\beta_j<\frac{1}{q'}$, $\quad j=1,...,s$. *Тогда для того, чтобы для любой функции* $f\in E_q^{\varepsilon}$ *её ряд Фурье был* $|C;\bar\beta|_\lambda$*-суммируем почти всюду на* I_s*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)-1}\cdot\varepsilon_n^{\lambda}<+\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1.

Необходимость. Пусть для любой функции $f\in E_q^{\varepsilon}$ её ряд Фурье $|C;\bar\beta|_\lambda$- суммируем почти всюду на I_s. Тогда по теореме 2 работы [7]

$$\sum_{\bar n\ge\bar 1}|a_{\bar n}(f)|^{\lambda}\cdot\prod_{j=1}^{s}n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}<+\infty. \tag{7}$$

Допустим, что условие (6) не выполнено, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)-1}\cdot\varepsilon_n^{\lambda}=+\infty. \tag{8}$$

Для любой последовательности $\varepsilon_n\downarrow 0$, $\quad n\to+\infty$ существует последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$, обладающие свойствами (см. [8]):

1) $\mu_k\le\varepsilon_n$, $\quad n_k\le n<n_{k+1}$, $\quad 2n_k<n_{k+1}$, $\quad \varepsilon_{n_{k+1}}\le\mu_k$, $\quad k=1,2,...$

2) $\mu_{k+1}\le\frac{1}{2}\mu_k$, $\quad k=1,2,...$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}n_{k+1}^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)}\cdot\mu_k^{\lambda}=+\infty.$

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar x)=\sum_{k=1}^{\infty}n_{k+1}^{\frac{s}{q}-s}\cdot\mu_k\cdot\prod_{i=1}^{s}\sum_{\nu_i=n_k+1}^{n_{k+1}}\cos\nu_i x_i.$$

Принадлежность функции $f_0(\bar x)$ E_q^{ε} доказана в работе [9]. Для этой функции имеем оценку

$$\sum_{\bar n\ge\bar 1}|a_{\bar n}(f_0)|^{\lambda}\cdot\prod_{j=1}^{s}n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=n_k+1}^{n_{k+1}}|a_{n_j}(f_0)|^{\lambda}\cdot\prod_{j=1}^{s}n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}^{\frac{s}{q}-s}\cdot\mu_k)^{\lambda}\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=n_k+1}^{n_{k+1}}\prod_{j=1}^{s}n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}\ge C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}n_{k+1}^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)}\cdot\mu_k^{\lambda}=+\infty.$$

Эта оценка противоречит условию (7). Значит, ряд Фурье функции $f_0(\bar x)$ не будет $|C;\bar\beta|_\lambda$-суммируем почти всюду на I_s. Следовательно, допущение (8) неверно. Теорема доказана.

Замечание 1. *В работе [1] М.Ф.Тиман и Ю.А.Пономаренко доказали, что если* $f \in L_2(I_2), \quad 0 < \beta_1, \beta_2 < \frac{1}{2}$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta_\nu} \cdot E_{n,\infty}^{(\nu)}(f)_2 < +\infty, \quad \nu = 1, 2, \tag{9}$$

то ряд Фурье функции $f \in L_2(I_2)$ *почти всюду* $|C; \beta_1, \beta_2|$*- суммируем на* I_2. *Из теоремы 1 при* $s = q = 2, \quad \lambda = 1$ *следует, что условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\beta_1+\beta_2)} \cdot E_{n,\infty}^{(j)}(f)_2, \quad j = 1, 2 \tag{10}$$

также достаточно для почти всюду $|C; \beta_1, \beta_2|$ *- суммируемости на* I_2 *ряда Фурье функции* $f \in L_2(I_2)$.

При $0 < \beta_j < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2$ *из (9) следует (10). Можно привести пример,что обратное не верно. Для этого рассмотрим функцию*

$$f_0(x_1, x_2) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2}{(k_1 \cdot k_2)^{\varepsilon + \frac{1}{2}}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Эта функция принадлежит $L_2(I_2)$. *Действительно,*

$$\|f_0\|_2 \leq \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^{2\varepsilon+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_2^{2\varepsilon+1}} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Наилучшее приближение функции f_0 *оценивается следующим образом:*

$$E_{n,\infty}^{(j)}(f_0)_2 \asymp \frac{1}{n^{\varepsilon}}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. *Тогда для* $\varepsilon \in (1 - 2\beta, 1 - \beta)$ *условие (9) не выполнено, так как*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \cdot E_{n,\infty}^{(j)}(f_0)_2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2.$$

Однако условие (10) выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\beta} \cdot E_{n,\infty}^{(j)}(f_0)_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2.$$

Значит, условие (10) слабее, чем (9). Неулучшаемость условий (10) доказана в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q \leq 2$, $1 \leq \lambda \leq q \leq 2, \quad 0 \leq \beta_j < \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} \quad \forall j = 1, ..., s, \quad r > \frac{s}{q} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j$. *Тогда для того, чтобы для любой функции* $f(\bar{x}) \in H_q^{\omega_r}$ *её ряд Фурье был* $|C; \bar{\beta}|_\lambda$*– суммируем почти всюду на* I_s *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda(\frac{s}{q} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j) - 1} \cdot \omega_r^{\lambda}(\frac{1}{n}) < +\infty. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для любой функции $f(\bar{x}) \in H_q^{\omega_r}$ ее ряд Фурье $|C;\bar{\beta}|_\lambda-$ суммируем почти всюду на I_s. Тогда выполняется условие (7). Допустим, что условие (11) не выполняется, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)-1} \cdot \omega_r^\lambda(\frac{1}{n}) = +\infty. \tag{12}$$

Тогда существуют последовательности чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такие, что (см. [10])

1) $B_n \le \omega_r(\frac{1}{n}), \quad n=1,2,...; \quad B_n \downarrow 0, \quad n\to\infty, \quad B_{n_{k+1}} \le \frac{1}{2}B_{n_k}, \quad k=1,2,...$

2) $\sum\limits_{n=1}^{N} n^{r-1}B_n = O\big(N^r\omega_r(\frac{1}{N})\big)$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} n_k^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i)} \cdot B_{n_k}^\lambda = +\infty.$

Рассмотрим функцию

$$g_0(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\frac{s}{q}-s} \cdot B_{n_k} \cdot \prod_{i=1}^{s} \sum_{\nu_i=n_{k-1}+1}^{n_k} \cos\nu_i x_i.$$

Функция $g_0(\bar{x})$ принадлежит классу $H_q^{\omega_r}$ (см. [9]). Для этой функции имеем

$$\sum_{\bar{n}\ge\bar{1}} |a_{\bar{n}}(g_0)|^\lambda \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_{n_j}(g_0)|^\lambda \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(n_k^{\frac{s}{q}-s}\cdot B_{n_k})^\lambda \prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=n_{k-1}+1}^{n_k}\prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} \ge C\cdot\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\lambda(\frac{s}{q}-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j)} \cdot B_{n_k}^\lambda = +\infty.$$

Из (7) следует, что ряд Фурье функции $g_0(\bar{x})$ не является $|C;\bar{\beta}|_\lambda-$ суммируемым почти всюду на I_s. Значит, допущение (12) неверно.

Достаточность следует из неравенства (см. [2])

$$E_{n,\infty}^{(j)}(f)_q \le C\cdot\omega_r^{(j)}(f;\frac{1}{n})_q, \quad f\in L_q, \quad 1\le q<+\infty, \quad j=1,...,s$$

и теоремы 1.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $1<q\le 2$, $1\le\lambda\le q\le 2$, $\quad 0\le\beta_j<\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}, \quad j=1,...,s$ *и* $\Omega_r(\bar{t})$ *удовлетворяет условиям* (S) *и* (S_r). *Тогда для того, чтобы для любой* $f\in SH_q^{\Omega_r}$ *её ряд Фурье был* $|C;\bar{\beta}|_\lambda-$ *суммируем почти всюду на* I_s *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}...\sum_{n_s=0}^{\infty} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-\beta_i)\lambda} \cdot \Omega_r^\lambda(2^{-\bar{n}}) < +\infty. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточность. В [7] нами доказано, что если

$$P(f) = \sum_{n_1=0}^{\infty}...\sum_{n_s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}...\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\prod_{j=1}^{s} k_j^{q(1-\beta_j)-1}\cdot\rho_{\bar{k}}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}} < +\infty,$$

то ряд (1) $|C;\bar{\beta}|_\lambda-$ суммируем при $-1<\beta_j<\frac{1}{q'}, \quad j=1,...,s$. Пользуясь теоремой Харди-Литтльвуда [6], получим

$$P(f) \le \sum_{n_1=0}^{\infty}...\sum_{n_s=0}^{\infty} 2^{\lambda\sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-\beta_i)}\left\{\sum_{k_1=2^{n_1}}^{2^{n_1+1}-1}...\sum_{k_s=2^{n_s}}^{2^{n_s+1}-1}\prod_{j=1}^{s} k_j^{q-2}\cdot\rho_{\bar{k}}^q(f)\right\}^{\frac{\lambda}{q}} \le$$

$$\leq C \cdot \sum_{n_1=0}^{\infty} ... \sum_{n_s=0}^{\infty} 2^{\lambda \sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-\beta_i)} \cdot \Omega_r^{\lambda}(2^{-n_1}, ..., 2^{-n_s})$$

для любой функции $f \in SH_q^{\Omega_r}$, $1 < q \leq 2$. Следовательно в силу условия (13) ряд Фурье функции $f \in SH_q^{\Omega_r}$ $|C; \bar{\beta}|_\lambda-$ суммируем почти всюду на I_s.

Необходимость. Пусть для любой функции $f \in SH_q^{\Omega_r}$ её ряд Фурье $|C; \bar{\beta}|_\lambda-$ суммируем почти всюду на I_s. Тогда, как показано выше, условие (7) выполняется. Допустим, что

$$\sum_{\bar{n} \geq 0} 2^{\lambda \sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-\beta_i)} \cdot \Omega_r^{\lambda}(2^{-\bar{n}}) = +\infty. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{n} \geq 1} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-1)} \cdot \Omega(2^{-\bar{n}}) \cdot \prod_{j=1}^{s} \sum_{m_j=2^{n_j-1}}^{2^{n_j}-1} \cos m_j x_j.$$

В [4] доказано, что $f_0 \in SH_q^{\Omega_r}$. Проверим справедливость условия (7) для f_0. Имеем

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} |a_{\bar{n}}(f_0)|^{\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} =$$

$$= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{n_s=1}^{\infty} \sum_{m_s=2^{n_s-1}}^{2^{n_s}-1} \prod_{j=1}^{s} m_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} \left(2^{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-1)} \cdot \Omega_r(2^{-\bar{n}}) \right)^{\lambda} =$$

$$= \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=1}^{\infty} \left(2^{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-1)} \cdot \Omega_r(2^{-\bar{n}}) \right)^{\lambda} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{m_s=2^{n_s-1}}^{2^{n_s}-1} \prod_{j=1}^{s} m_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} \geq$$

$$\geq \sum_{\bar{n} \geq 0} 2^{\lambda \sum\limits_{i=1}^{s} n_i(\frac{1}{q}-\beta_i)} \cdot \Omega_r^{\lambda}(2^{-\bar{n}}) = +\infty.$$

Значит, для функции $f_0 \in SH_q^{\Omega_r}$ не выполняется условие (7), т.е. допущение (14) неверно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. *Теоремы 3 и 4 анонсированы в [11].*

О п р е д е л е н и е 1. (см. [12]) Если $a_{\bar{n}} \leq a_{\bar{k}}$ при $\bar{n} \geq \bar{k}$, то числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}$ называется монотонно убывающей.

Класс таких последовательностей будем обозначать через M.

Т е о р е м а 5. *Пусть $\frac{2s}{s+1} < q \leq 2$, $1 \leq \lambda \leq q$, $0 \leq \beta_j < \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$, $r > \frac{1}{q} - \beta_j$, $j = 1, ..., s$ и функция $f \in L_q(I_s)$ имеет ряд Фурье вида*

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} a_{\bar{n}}(f) \prod_{j=1}^{s} \cos n_j x_j.$$

Если $\{a_{\bar{n}}(f)\} \in M$, то для того, чтобы ряд Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ был $|C; \bar{\beta}|_\lambda-$ суммируем почти всюду на I_s, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} ... \sum_{n_s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta_j)-1} \cdot \Omega_r^{\lambda}(f; \frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_s})_q < +\infty.$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы, анонсированной в [13] и прямой теоремы теории приближения "углом" [3].

Необходимость. В условиях нашей теоремы, из теоремы анонсированной в [13], следует, что если ряд Фурье функции $f \in L_q(I_s)$ $|C;\bar{\beta}|_\lambda -$ суммируем почти всюду на I_s, то сходится ряд

$$\sum_{n_1=2}^{\infty} ... \sum_{n_s=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta_j)-1} \cdot Y_{n_1,...,n_s}^{\lambda}(f)_q.$$

Тогда, применяя обратную теорему теории приближения "углом" [3] и s раз применяя неравенство Харди [14, с.289], получим:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} ... \sum_{n_s=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta_j)-1} \cdot \Omega_r^{\lambda}(f; \frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_s})_q \leq \sum_{n_1=2}^{\infty} ... \sum_{n_s=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(\frac{1}{q}-\beta_j)-1} \cdot Y_{n_1,...,n_s}^{\lambda}(f)_q.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 6. *Пусть $\Omega_r(\bar{t})-$ функция типа модуля гладкости порядка r удовлетворяет условиям (S) и (S_r) и $f \in L_1(I_s)$,*

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} a_{\bar{n}}(f) e^{i\bar{n}\bar{x}},$$

при этом $\{a_{\bar{n}}(f)\} \in M$. Тогда для того, чтобы $f \in SH_q^{\Omega_r}$, $q \in (\frac{2s}{s+1}, +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{\bar{n}}(f) \leq C \cdot \frac{\Omega_r(n_1^{-1}; ...; n_s^{-1})}{(n_1 \cdots n_s)^{1-\frac{1}{q}}}, \quad n_j = 1, 2, ..., j = 1, ..., s. \tag{15}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть для функции $f \in L_1(I_s)$ выполнено соотношение (15). Тогда, учитывая, что $\Omega_r(\bar{t})$ удовлетворяет (S) и (S_r) условию, по теореме Бари-Стечкина [5] будем иметь

$$\sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} a_{\bar{n}}^q(f) \prod_{j=1}^{s} n_j^{q-2} \leq C \cdot \sum_{\bar{n} \geq \bar{1}} \Omega_r^q\Big(\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_s}\Big) \prod_{j=1}^{s} n_j^{-1} \leq$$

$$\leq C \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} ... \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Omega_r^q(t_1, ..., t_s)}{t_1 \cdots t_s} dt_1 ... dt_s \leq C \cdot \Omega_r\Big(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\Big) < +\infty.$$

Следовательно, функция $f \in L_1(I_s)$ при некотором $q \in (\frac{2s}{s+1}, +\infty)$ принадлежит пространству $L_q(I_s)$.

Теперь докажем, что $f \in SH_q^{\Omega_r}$, $q \in (\frac{2s}{s+1}, +\infty)$.

Положим

$$\rho(\bar{n}) = \{\bar{k} \in \mathbf{N}^s : 2^{n_j-1} \leq k_j < 2^{n_j}, \quad j = 1, ..., s\}, \quad \delta_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{n})} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\bar{k}\bar{x}},$$

где $\mathbf{N}^s$ – s- мерное пространство точек, каждая координата которых является натуральным числом.

Делая замену индексов $k_j - 2^{n_j-1} + 1 = \nu_j$, $j = 1, ..., s$, получим

$$\|\delta_{\bar{n}}(f)\|_q = \Big\|\prod_{j=1}^{s} e^{-i(2^{n_j-1}+1)x_j} \sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1-1}} ... \sum_{\nu_s=1}^{2^{n_s-1}} a_{\nu_1+2^{n_1-1}-1, ..., \nu_s+2^{n_s-1}-1}(f) e^{i\bar{\nu}\bar{x}}\Big\|_q. \tag{16}$$

По условию $\{a_{\bar n}(f)\}\in M$. Поэтому $\{b_{\bar\nu}=a_{\nu_1+2^{n_1-1},...,\nu_s+2^{n_s-1}}\}\in M$. Следовательно, по теореме Дьяченко [12] имеем

$$\Big\|\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1-1}}...\sum_{\nu_s=1}^{2^{n_s-1}}a_{\nu_1+2^{n_1-1}-1,...,\nu_s+2^{n_s-1}-1}(f)e^{i\bar\nu\bar x}\Big\|_q\le$$

$$\le C\cdot\Big[\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1-1}}...\sum_{\nu_s=1}^{2^{n_s-1}}(\nu_1\cdots\nu_s)^{q-2}a^q_{\nu_1+2^{n_1-1}-1,...,\nu_s+2^{n_s-1}-1}(f)\Big]^{\frac1q}=$$

$$=C\cdot\Big[\sum_{k_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}...\sum_{k_s=2^{n_s-1}}^{2^{n_s}-1}\prod_{j=1}^s(k_j-2^{n_j-1}+1)^{q-2}a^q_{\bar k}(f)\Big]^{\frac1q},\quad q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty).$$

Поэтому из (15) и (16) следует, что

$$\|\delta_{\bar n}(f)\|_q\le C\cdot\Big[\sum_{k_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}...\sum_{k_s=2^{n_s-1}}^{2^{n_s}-1}\prod_{j=1}^s(k_j-2^{n_j-1}+1)^{q-2}a^q_{\bar k}(f)\Big]^{\frac1q}\le$$

$$\le C\cdot\Big[\sum_{k_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}...\sum_{k_s=2^{n_s-1}}^{2^{n_s}-1}\prod_{j=1}^s\frac{(k_j-2^{n_j-1}+1)^{q-2}}{k_j^{q-1}}\cdot\Omega_r^q\Big(\frac1{k_1},...,\frac1{k_s}\Big)\Big]^{\frac1q}\le$$

$$\le C\cdot\Omega_r\Big(\frac1{2^{n_1-1}},...,\frac1{2^{n_s-1}}\Big)\Big[\prod_{j=1}^s\sum_{k_j=2^{n_j-1}}^{2^{n_j}-1}\frac{(k_j-2^{n_j-1}+1)^{q-2}}{k_j^{q-1}}\Big]^{\frac1q}.\tag{17}$$

Для любого числа $q\in(1,+\infty)$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{(k-2^{n-1}+1)^{q-2}}{k^{q-1}}\le 2^{-(n-1)(q-1)}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}(k-2^{n-1}+1)^{q-2}=$$

$$=2^{-(n-1)(q-1)}\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}}\nu^{q-2}\le C(q)\cdot2^{-(n-1)(q-1)}\cdot2^{(n-1)(q-1)}=C(q)\quad\forall n=1,2...$$

Применяя оценку (17), получим неравенство

$$\|\delta_{\bar n}(f)\|_q\le C(q,s)\cdot\Omega_r\Big(\frac1{2^{n_1-1}},...,\frac1{2^{n_s-1}}\Big)\le C(q,s)\cdot\Omega_r\Big(\frac1{2^{n_1}},...,\frac1{2^{n_s}}\Big).$$

Следовательно, по теореме Пустовойтова [4] функция $f\in SH_q^{\Omega_r}$, $q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty)$.

Необходимость. Пусть $f\in SH_q^{\Omega_r}$ и $\{a_{\bar n}(f)\}\in M$, $q\in(\frac{2s}{s+1},+\infty)$. Покажем, что выполняется (15).

Выберем натуральные числа ν_j так, чтобы $2^{\nu_j}\le n_j<2^{\nu_j+1}$, $j=1,...,s$. По условию $\{a_{\bar n}(f)\}\in$ $\in M$. Тогда

$$0\le a_{\bar n}(f)\le a_{\bar k}(f)\quad\forall\bar k<\bar n,\quad \text{т.е.}\quad k_j<n_j\quad\forall j=1,...,s.$$

Поэтому

$$a_{\bar n}(f)\le\frac{1}{\prod_{j=1}^s\Big(n_j-\Big[\frac{n_j}{2}\Big]\Big)}\sum_{k_1=\left[\frac{n_1}{2}\right]}^{n_1-1}...\sum_{k_s=\left[\frac{n_s}{2}\right]}^{n_s-1}a_{\bar k}(f)\le$$

$$\le\frac{1}{\prod_{j=1}^s\Big(n_j-\Big[\frac{n_j}{2}\Big]\Big)}\sum_{k_1=2^{\nu_1-1}}^{2^{\nu_1+1}-1}...\sum_{k_s=2^{\nu_s-1}}^{2^{\nu_s+1}-1}a_{\bar k}(f).\tag{18}$$

В силу ортогональности системы $\{e^{i\bar{n}\bar{x}}\}$ и оценки нормы ядра Дирихле получим

$$\sum_{k_1=2^{\nu_1-1}}^{2^{\nu_1+1}-1} \dots \sum_{k_s=2^{\nu_s-1}}^{2^{\nu_s+1}-1} a_{\bar{k}}(f) \leq$$

$$\leq C \cdot Y_{2^{\nu_1-1}-1,\dots,2^{\nu_s-1}-1}(f)_q \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(1-\frac{1}{q'})}, \quad 1<q<+\infty, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Пользуясь прямой теоремой теории приближения "углом" [3] из последнего неравенства и (18) получим

$$a_{\bar{n}}(f) \leq \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-1)}.$$

$$\cdot \Omega_r\Big(f; \frac{1}{2^{\nu_1-1}},\dots,\frac{1}{2^{\nu_s-1}}\Big)_q, 2^{\nu_j} \leq n_j < 2^{\nu_j+1}, \quad j=1,\dots,s; 1<q<+\infty. \tag{19}$$

По предположению $f \in SH_q^{\Omega_r}$. Следовательно, из неравенства (19) получим

$$a_{\bar{n}}(f) \leq \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_j(\frac{1}{q}-1)} \cdot \Omega_r\Big(\frac{1}{2^{\nu_1-1}},\dots,\frac{1}{2^{\nu_s-1}}\Big) \asymp \prod_{j=1}^{s} n_j^{\frac{1}{q}-1} \cdot \Omega_r\Big(\frac{1}{n_1},\dots,\frac{1}{n_s}\Big), \quad 1<q<+\infty.$$

Эта оценка доказана без дополнительных условий (S) и (S_r) на $\Omega_r(\bar{t})$. Теорема доказана.

Замечание 3. *В случае $\omega(\delta)=\delta^\alpha$ характеризация класса H_q^ω дана О.С.Драгошанским [15]. Условия равномерной сходимости прямоугольной частичной суммы ряда Фурье функции $f \in H_q^\omega$ исследовал Н.Темиргалиев [16].*

Цитированная литература

1. **Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.** // Укр. мат. журнал, 1971. Т. 23, № 3.
2. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
3. **Потапов М.К.** // Mathematica, 2. 1972. V.14(37). P.339—362.
4. **Пустовойтов Н.Н.** // Anal.Math. 1994. V.20. P.35—48.
5. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** // Тр. ММО, 1956. Т.5. С.483—522.
6. **Бугров Я.С.** // Тр. МИАН СССР, 1989. Т.187. С.22—30.
7. **Битимханулы С.** // Вестник КазГУ. сер.мат., мех., инф. 2001. № 1(24). С.3—11.
8. **Коляда В.И.** // Матем. сб., 1977. Т.102. № 2. С.195—215.
9. **Акишев Г.А., Аскарова А.Ж.** //Вестник Евразийского университета, 2000. № 3. С.130—140.
10. **Акишев Г.А.** Условия вложения в пространство Лоренца и существования следа функции. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 2.02.83. N578-83 29 с.
11. **Битимханулы С.** //Труды межд. конф. молодых ученых (КазНТУ им. К.И.Сатпаева), Алматы, 2001. Ч.1. С.221—224.
12. **Дьяченко М.И.** // Изв. РАН. 1998. Т. 62, № 2. С.35—48.
13. **Битимхан С., Акишев Г.А.** // Труды межд. симпозиума "Ряды Фурье и их приложения", Ростов-на-Дону, 2002. С.15.
14. **Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М., 1948.
15. **Драгошанский О.С.** // Тезисы докл. межд. конф. "Теория приближении и гармонический анализ", Тула, 1998. С.98—100.
16. **Темиргалиев Н.** // Мат.заметки. 1972. Т.12, № 2. С.139—148.

Поступила в редакцию 20 июля 2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С.15 — 17*

УДК 517.95

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ОСОБЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.М. Алдибеков

АГУ им.Абая, Институт Математики МО и Н РК
480100, Алматы, ул. Толе би, 86, 480021, Алматы, ул. Пушкина, 125

В работе определены обобщенные центральные и обобщенные особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений с непрерывными и неограниченными коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывной и неограниченной матрицей $A(t)$ при $t \in J = [0, +\infty)$. Все относящиеся сюда определения содержатся в [1,2].

Определение 1. *Функции $r_q(t)$ и $R_q(t)$ называются, соответственно обобщенно-нижней и обобщенно-верхней относительно $q(t) \in Q$ для системы (1), если они ограничены, измеримы и осуществляют оценки*

$$d_{r,\varepsilon} e^{\int\limits_s^t [r_q(\tau)-\varepsilon]dq(\tau)} \le \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \le D_{R,\varepsilon} e^{\int\limits_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)} \quad \text{для всех} \;\; t \ge s \ge 0,$$

$D_{R,\varepsilon}$, $d_{r,\varepsilon}$ - константы, зависящие от выбора $R_q(t)$, $r_q(t)$ и $\varepsilon > 0$, $Q-$ класс монотонно возрастающих и непрерывно дифференцируемых на J функций.

Множество $\{R_q(t)\}$ обобщенно-верхних функций системы (1) называется верхним классом системы (1) относительно $q \in Q$ и обозначается символом $B(A, q)$.

Множество $\{r_q(t)\}$ обобщенно-нижних функций системы (1) называется нижним классом системы (1) относительно $q \in Q$ и обозначается символом $H(A, q)$.

Пусть

$$\Omega(R, q) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_0^t R_q(\tau)dq(\tau), \qquad \omega(r, q) = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_0^t r_q(\tau)dq(\tau).$$

Keywords: *Lyapunov exponents, system of differential equations, generalized exponents*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

Определение 2. *Число* $\Omega(q) = \inf\limits_{R \in B(A,q)} \Omega(R,q)$ *называется обобщенно-верхним центральным показателем системы (1) относительно* $q \in Q$.
Число $\omega(q) = \sup\limits_{r \in H(A,q)} \omega(r,q)$ *называется обобщенно-нижним центральным показателем системы (1) относительно* $q \in Q$.

Заметим, что $\omega(q) \le \Omega(q)$.

Пусть $B_0(A,q)$ $(H_0(A,q))$ - множество постоянных функций, содержащихся в $B(A,q)$ $(H(A,q))$.

Определение 3. *Число* $\Omega_0(q) = \inf\limits_{R \in B_0(A,q)} \Omega(R,q)$ *называется обобщенно-верхним особым показателем системы (1) относительно* $q \in Q$.
Число $\omega_0(q) = \sup\limits_{r \in H_0(A,q)} \omega(r,q)$ *называется обобщенно-нижним особым показателем системы (1) относительно* $q \in Q$.

Имеют место неравенства $\Omega(q) \le \Omega_0(q)$, $\omega_0(q) \le \omega(q)$.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{2}$$

где непрерывное возмущение $f(t,x)$ удовлетворяет условию

$$|f(t,x)| \le \delta |x|. \tag{3}$$

Класс вектор - функций $f(t,x)$, удовлетворяющих условию (3) с константой $\le\delta$, обозначим через $L(\delta)$.

Лемма 1. *Если матрица Коши линейной части возмущенной системы (2) допускает равномерную оценку*

$$|X(t,s)| \le De^{\int\limits_s^t R(\tau)dq(\tau)} \quad \textit{при всех} \ \ t \ge s \ge 0, \tag{4}$$

а возмущение $f(t,x)$ *удовлетворяет условию малости*

$$|f(t,x)| \le \delta(t)|x|, \qquad \delta(t) \le \delta, \tag{5}$$

то все решения возмущенной системы допускают равномерную оценку

$$|x(t)| \le |x(t_0)|De^{[\int\limits_{t_0}^t R_q(\tau)dq(\tau) + D\delta(t-t_0)}. \tag{6}$$

Доказательство. Как известно, решения возмущенной системы (2) удовлетворяют уравнению

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^t X(t,s)f(s,x(s))ds,$$

откуда при условиях (4) и (5) получаем

$$|x(t)| \le |x(t_0)|De^{\int\limits_{t_0}^t Rdq} + \int\limits_{t_0}^t De^{\int\limits_s^t R(\tau)dq(\tau)}\delta(s)|x(s)|ds.$$

Обозначая через $y(t) = |x(t)|e^{-\int\limits_{t_0}^t Rdq}$, имеем

$$y(t) \le D|x(t_0)| + D\int\limits_{t_0}^t \delta(s)y(s)ds.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла-Беллмана

$$|x(t)| \le D|x(t_0)|De^{D\int\limits_{t_0}^{t}\delta(\tau)d\tau}.$$

Следовательно, при $\delta(t) \le \delta$ имеет место (6). Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1. *Для любых $\varepsilon > 0$, $R_q(t) \in B(A, q)$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $f(t,x) \in L(\delta)$ выполняется неравенство*

$$|x(t)| \le D_\varepsilon|x(t_0)|e^{\int\limits_{t_0}^{t}[R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)}$$

равномерно по всем решениям системы (2), по всем $t_0 \in J$ и $t \ge t_0$.

Доказательство. Из определения обобщенно-верхней функции и из леммы 1 следует, что для всех решений возмущенной системы (2) и $t \ge t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t)| \le D|x(t_0)|e^{\int\limits_{t_0}^{t}(R_q+\varepsilon/2)dq + D\int\limits_{t_0}^{t}\delta(\tau)dq(\tau)}.$$

Отсюда при $\delta(t) \le \delta = \frac{\varepsilon}{2D}$ следует требуемое неравенство.

Т е о р е м а 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $f(t,x) \in L(\delta)$, $t \ge t_0 \ge 0$ выполняется неравенство*

$$|x(t)| \le D_\varepsilon|x(t_0)|e^{[\Omega(q)+\varepsilon][q(t)-q(t_0)]} \tag{7}$$

равномерно по всем решениям системы (2).

Доказательство. Из определения 2 следует, что существует такое $R_q \in B(A,q)$, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} R_q(\tau)dq(\tau) < \int\limits_{t_0}^{t}\Big[\Omega(q) + \frac{\varepsilon}{2}\Big]dq(\tau) + \ln D.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 имеем (7).

С л е д с т в и е 1. *Обобщенный особый показатель осуществляет равномерную оценку*

$$|x(t)| \le D_\varepsilon|x(t_0)|e^{[\Omega_0(q)+\varepsilon][q(t)-q(t_0)]}.$$

Т е о р е м а 3. *Для обобщенного показателя Ляпунова $\chi[x,q]$ любого решения x системы (1) имеет место оценка*

$$\chi[x,q] \le \Omega(q). \tag{8}$$

Доказательство теоремы следует из определения обобщенного показателя Ляпунова и из оценки (7).

Т е о р е м а 4. *Оценка (8) неулучшаема в классе $L(\delta)$.*

Утверждение теоремы устанавливается с помощью метода поворотов (см. [3]).

Замечание. Если $q(t) = t$ и матрица $A(t)$ системы (1) ограниченна, то вместо обобщенных показателей получаем обычные центральные и особые показатели.

Цитированная литература

1. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.

2. **Алдибеков Т.М.** // Изв. МОН РК. Сер. физ.-матем. 2002. №3. С. 14—19.

3. **Миллионщиков В.М.** // Сибирский матем. журнал. 1963. Т. 10. №1. С. 99—104.

Поступила в редакцию 20 июля 2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С.18 — 25*

УДК 538.3

ДЕЙСТВИЕ СТАЦИОНАРНЫХ БЕГУЩИХ НАГРУЗОК В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Л. А. Алексеева

Институт Математики МО и Н РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, alexeeva@math.kz

Исследование динамики протяженных подземных сооружений при действии разнообразных возмущений приводит к решению краевых задач в сплошных средах с концентраторами напряжений в виде цилиндрических полостей и включений различных поперечных сечений. Работ в этом направлении очень много, с достаточно подробной библиографией по этому вопросу можно познакомиться в [1,2]. При глубине залегания сооружения больше пяти его характерных диаметров влияние свободной поверхности на концентрацию напряжений в окрестности сооружения при дифракции отраженных и переотраженных волн незначительно, поэтому им можно пренебречь. Однако при меньших глубинах (на каких часто закладываются тоннели метрополитенов, например) следует учитывать близость дневной поверхности. Модельными для таких исследований являются задачи для упругого полупространства, ослабленного цилиндрическими полостями различных форм. Здесь рассматриваются задачи динамики упругого полупространства в случае воздействия стационарных нагрузок, бегущих с постоянной скоростью.

Динамика упругой полуплоскости при действии стационарных бегущих нагрузок на ее границе исследована в работах И.Г.Филиппова, О.А.Егорычева [3]. Фундаментальные решения уравнений движения упругой среды при действии сосредоточенных бегущих нагрузок построены в [4]. На их основе в [5,6] разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для решения краевых задач динамики упругих сред с цилиндрическими полостями и границами при действии стационарных бегущих нагрузок. Здесь построены фундаментальные решения для упругого полупространства со свободной границей и на их основе определены перемещения в упругом полупространстве при действии стационарных бегущих нагрузок различного типа.

1. Постановка задачи. Упругая изотропная среда D^- с параметрами Ламе (λ, μ) и плотностью ρ занимает полупространство $x_1 > 0$. Действующие нагрузки, сосредоточенные на цилиндрической поверхности $D \subset D^-$, ось которой параллельна оси X_3, движутся с постоянной скоростью c вдоль нее и представимы в виде интеграла Фурье

$$P_i(x,z) = \sigma_{ij} n_j(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_i(x,\varsigma) \exp(\mathrm{i}\,\zeta z) d\varsigma, \;\; z = x_3 + ct, \quad x \in S, \;\; t \in (-\infty, \infty). \qquad (1)$$

Keywords: *dynamics of elastic mediums, semispace, running subsonic and supersonic loadings, fundamental solutions, Green tensors*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H35

Пусть $P_i(x,z)$ отличны от нуля на ограниченном множестве, т.е. $\underset{z}{supp}\, P_i(x,z) \in (0,a)$, $x = (x_1, x_2)$, что соответствует реальным физическим задачам.

Граница полупространства свободна от напряжений

$$\sigma_{j1} = 0 \quad \text{при}\, x_1 = 0, \quad j = 1,2,3, \tag{2}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений — связаны с перемещениями законом Гука

$$\sigma_{ij} = H_{ij}^k(\partial_1, \partial_2, \partial_3) u_k, \quad H_{ij}^k = \lambda\, \delta_{ij} \partial_k + \mu(\delta_{ik}\partial_j + \delta_{jk}\, \partial_i), \tag{3}$$

где $\partial_i f = \partial f / \partial x_i = f_{,i}$, $\delta_j^i = \delta_{ij}$ – символ Кронекера. Всюду по одноименным индексам i, j, k — суммирование от 1 до 3.

Предполагаем, что при фиксированном z компоненты граничной нагрузки P_i интегрируемы на S. Если $F_i = 0$ имеют подобную P_i структуру, напряжения и перемещения u в подвижной системе координат $(x_1, x_2, z) = (x_1, x_2, x_3 + ct)$ удовлетворяют следующим уравнениям движения

$$\sigma_{ij,j} - \rho c^2 u_{i,zz} + \rho F_i = 0, \qquad i,j = 1,2,3, \tag{4}$$

которые, с учетом (3), приводятся к виду

$$\left(\left(M_1^{-2} - M_2^{-2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \left(M_2^{-2}\Delta - (\partial_z)^2\right) \delta_i^j \right) u_j + c^{-2} F_i = 0, \quad \partial_3 = \partial_z \tag{5}$$

(далее дифференциальный оператор в (5) будем обозначать $A_{ij}(\partial_x, \partial_z)$). Здесь введены числа Маха $M_j = c/c_j$; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости объемных и сдвиговых волн в упругой среде, соответственно.

Рассмотрим три случая: дозвуковой ($c < c_2$), межзвуковой ($c_2 < c < c_1$) и сверхзвуковой ($c > c_1$). В первом ($M_1 < 1,\ M_2 < 1$) система (5) — эллиптического типа, во втором ($M_2 > 1,\ M_1 < 1$) система эллиптична для объемной составляющей перемещений и гиперболична для сдвиговых деформаций [4]. В сверхзвуковом случае ($M_2 > 1,\ M_1 > 1$) система строго гиперболична. В двух последних случаях в среде могут распространяться ударные волны со следующими условиями на скачки на фронтах F[5, 6]

$$[u_j]_F = 0, \quad [h_z u_{i,j} - h_j u_{i,z}]_F = 0, \quad \left[h_j \sigma_{ij} - \rho c^2 h_z u_{i,z}\right]_F = 0, \tag{6}$$

где h — волновой вектор. Требуется найти решение задачи, удовлетворяющее условию затухания на бесконечности

$$u \to 0 \quad \text{при } R \to \infty, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}, \quad x_1 \geq 0, \tag{7}$$

и определенным условиям излучения, которые введем далее.

2. Тензор Грина упругого полупространства со свободной границей в случае бегущих нагрузок. Для решения поставленной задачи удобно воспользоваться тензором Грина $V(x, z, y, \tau)$ для упругого полупространства со свободной границей, построенного в бегущей системе координат. Для его определения имеем следующую краевую задачу.

При фиксированных (y_1, y_2, τ), $y_1 > 0$ найти решение уравнений

$$A_{ij}(\partial_x, \partial_z) V_j^k = \delta_i^k \delta(x - y, z - \tau), \quad x_1 > 0, \tag{8}$$

удовлетворяющее следующим условиям на свободной поверхности

$$H_{i1}^k(\partial_1, \partial_2, \partial_3) V_k^m = 0, \quad x_1 = 0, \quad m, i = 1,2,3 \tag{9}$$

и условиям излучения на бесконечности. Представим решение в виде

$$V_j^i = U_j^i(x - y, z - \tau) + \Pi_j^i(x, y, z, \tau).$$

Здесь U_j^i — тензор Грина уравнений (8) для неограниченного пространства, соответствующий $F_j = \delta_j^i \delta(x,z), \delta(x,z)$ — обобщенная сингулярная δ-функция. Тензор ранее построен в [4] и имеет следующий вид

$$U_j^i(x,z) = c_2^{-2}\delta_j^i f_{02}(r,z) + c^{-2}(f_{21,ij}(r,z) - f_{22,ij}(r,z)), \quad r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$4\pi f_{ok}(r,z) = 1/V_k^+, \quad 4\pi f_{2k}(r,z) = |z| \; ln\,((|z| + V_k^+)/m_k r) - V_k^+ + m_k r \quad \text{при } c < c_k,$$
$$2\pi f_{ok}(r,z) = \vartheta_k/V_k^-, \quad 2\pi f_{2k}(r,z) = \vartheta_k(z \, ln\,((z + V_k^-)/m_k r) - V_k^-) \quad \text{при } c > c_k,$$
$$2\pi \; f_{ok}(r,z) = -\delta(z)\ln r, \quad 2\pi \; f_{2k}(r,z) = z\,\theta(z) \; ln\, r \quad \text{при } c = c_k,$$

$V_k^{\pm} = (z^2 \pm m_k^2 r^2)^{1/2}$, $\theta(z)$ — функция Хевисайда, $\vartheta_k = \theta(z - m_k r)$, $\quad m_k = \left|1 - M_k^2\right|^{1/2}$. Заметим, что при сверхзвуковых скоростях $supp\, U = \{(x,z) : z > m_1\|x\|\}$. Это — конус с углом при вершине $arctg\, m_1^{-1}$.

Тензор Π_j^i должен удовлетворять однородным уравнениям движения, условиям излучения волн на бесконечности и следующим граничным условиям на свободной поверхности $x_1 = 0$

$$H_{i1}^k(\partial_1, \partial_2, \partial_3)\Pi_k^m = -\Sigma_{i1}^m(x - y, z - \tau), \quad \Sigma_{i1}^m = H_{i1}^k(\partial_1, \partial_2, \partial_3)U_k^m(x - y, z - \tau). \tag{10}$$

Тензор описывает волны, отраженные границей полупространства, порождаемые действием движущегося источника, сосредоточенного в точке $x = y$, $z = \tau$.

Для построения этого тензора воспользуемся потенциалами векторных полей. А именно, представим Π_k^m в виде

$$\Pi_k^m = \partial_k \Phi_1^m + e_{ki3}\partial_i \Phi_2^m + e_{kjl}e_{li3}\partial_i\partial_j\Phi_3^m, \quad i,j,k,l,m = 1,2,3. \tag{11}$$

Здесь e_{ijk} - единичный кососимметричный псевдотензор Леви-Чивита. Первый потенциал описывает градиентную составляющую поля, а два вторых — роторную. Нетрудно показать, что потенциалы Φ_j^m удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\, \Phi_j^m - M_j^2 \, \frac{\partial^2 \Phi_j^m}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{12}$$

В силу линейности и однородности среды $\Pi_m^k(x,y,z,\tau) = \Pi_m^k(x,y,z-\tau)$. Для построения решения воспользуемся прямым и обратным преобразованиями Фурье по z тензоров и потенциалов (достаточно при $\tau = 0$)

$$\Pi_m^k = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Pi}_m^k(x,y,\varsigma)\exp(\mathrm{i}\, z\zeta)d\varsigma, \quad \bar{\Pi}_m^k = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi_m^k(x-y,z)\exp(-\mathrm{i}\,\zeta z)dz.$$

Аналогично определяем $\bar{U}_m^k$, $\bar{\Phi}^m$.

В пространстве Фурье-преобразований уравнения для потенциалов примут вид

$$(\Delta_2 \pm m_j^2\,\zeta^2)\bar{\Phi}_j^m = 0. \tag{13}$$

Здесь $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \partial_i^2$, знак (+) соответствует случаю дозвуковых нагрузок ($M_j < 1$), а знак (-) — сверхзвуковым ($M_j > 1$). Граничные условия преобразуются к виду

$$H_{i1}^k(\partial_1, \partial_2, \mathrm{i}\,\zeta)\bar{\Pi}_k^m(x,y,\varsigma) = -\bar{\Sigma}_{i1}^m(x - y, \varsigma), \quad x_1 = 0, \tag{14}$$

где

$$\bar{\Pi}_k^m = D_k^j(\partial_1\partial_2, \mathrm{i}\,\zeta)\bar{\Phi}_j^m, \tag{15}$$

D_k^j - дифференциальный оператор в (11). Подставляя (15) в (14), получим

$$\mathrm{B}_j^k(\partial_1, \partial_2, \mathrm{i}\,\varsigma)\bar{\Phi}_k^m = -\bar{\Sigma}_{j1}(x-y, \varsigma) \quad \text{при } x_1 = 0. \tag{16}$$

Здесь $B_j^k = H_{j1}^m(\partial_1, \partial_2, \mathrm{i}\,\varsigma)\, D_m^k(\partial_1, \partial_2, \mathrm{i}\,\varsigma)$.

Таким образом, задача построения трансформант искомых тензоров сводится к определению потенциалов, удовлетворяющих уравнениям (12), граничным условиям на свободной поверхности (16), условиям затухания волн на бесконечности: $\bar{\Phi}_j^k = o(r^{-(1+\varepsilon)})$ при $r = \|x - - y\| \to +\infty$ и определенным условиям излучения.

3. Определение потенциалов отраженных волн. Потенциалы $\bar{\Phi}_j^k$ можно представить в виде суперпозиции поверхностных и плоских волн, отраженных от свободной границы полупространства

$$\bar{\Phi}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^k(\eta, \varsigma, y) \exp(\mathrm{i}\, x_2\eta - x_1\sqrt{\eta^2 \pm m_j^2\zeta^2})\, d\eta, \tag{17}$$

$$\mathrm{Re}\sqrt{\eta^2 \pm m_j^2\zeta^2} \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}\sqrt{\eta^2 \pm m_j^2\zeta^2} \leqslant 0. \tag{18}$$

Здесь берется знак (+), если для соответствующего j нагрузка дозвуковая, и знак (-) — в сверхзвуковом случае. Легко проверить, что потенциалы (17) удовлетворяют уравнениям (12). Условия на радикалы — это условия излучения для отраженных от границы полупространства волн. Первое из них дает затухание решений на бесконечности. Второе условие показывает, что отраженные волны движутся от границы полупространства, что соответствует физическим представлениям.

Подынтегральные функции можно найти из граничных условий (14). Для этого их следует также разложить в интегралы Фурье: при $x_1 = 0$

$$\bar{\Sigma}_{\mathrm{j1}}^{\mathrm{k}}(x, y, \varsigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_j^k(\eta, \varsigma, y) \exp(\mathrm{i}\, x_2\eta) d\eta \tag{19}$$

(об определении подынтегральных функций a_j^k см. п.6.).

Подставляя (17) и (18) в (16), получим, например, в дозвуковом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{B}_k^j(-\sqrt{\eta^2 + m_j^2\zeta^2}, \mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\zeta)\, \varphi_j^m + a_k) \exp(\mathrm{i}\, x_2\eta)\, d\eta = 0.$$

Откуда, в силу произвольности x_2, имеем линейную систему из трех уравнений для определения φ_j^k

$$\sum_{j=1}^{3} (\mathrm{B}_k^j(-\sqrt{\eta^2 + m_j^2\zeta^2}, \mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\zeta)\, \varphi_j^m = -a_k^m, \quad k = 1, 2, 3.$$

Разрешая ее, найдем

$$\varphi_j^m = \Delta_j^m(\eta, \zeta, y)/\Delta(\eta, \zeta). \tag{20}$$

Здесь $\Delta(\eta, \zeta) = \det\{\mathrm{B}_{kj}(-\sqrt{\eta^2 + \alpha_j^2\zeta^2}, i\eta, i\zeta)\}$ — релеевский определитель. В данном случае он имеет вид

$$\Delta = 4\nu^2\sqrt{\nu^2 - M_1^2\zeta^2}\sqrt{\nu^2 - M_2^2\zeta^2} - (2\nu^2 - M_2^2\zeta^2)^2, \quad \nu^2 = \zeta^2 + \eta^2,$$

Δ_j^m - соответствующее алгебраическое дополнение.

Свойства релеевского определителя известны. В частности, здесь

$$\Delta(\eta, \zeta) = 0 \text{ при } \eta = \pm\left|(M_R^2 - 1)^{1/2}\zeta\right| = \pm\eta_R, \quad M_R = c/c_R, \tag{21}$$

где c_R - скорость поверхностной волны Релея ($c_R < c_2$) определяется из уравнения Релея [7]

$$4\sqrt{1-\alpha_1^2}\sqrt{1-\alpha_2^2}-(2-\alpha_2^2)^2=0, \quad \alpha_j=c_R/c_j.$$

При $c < c_R$ определитель $\Delta(\eta,\zeta)\neq 0$ для любых действительных ζ,η. Используя формулы (17), (10), строим потенциалы и перемещения среды. Все подынтегральные функции непрерывны и достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, что можно показать, используя свойство ограниченности носителя бегущей граничной нагрузки. Поэтому интегралы существуют и удовлетворяют условиям затухания на бесконечности. Т.е. решение в этом случае построено.

При $c_R < c < c_2$ существует решение уравнения (20). В этом случае затухающих на бесконечности позади бегущей нагрузки (при $z > 0$) решений нет, поэтому следует отказаться от этого условия. Тогда для построения решения нужно трансформировать контур интегрирования в окрестности точек $-\eta_R, +\eta_R$ с обходом их, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях комплексной η-плоскости, где выполняются условия излучения (17). Используя лемму Жордана при интегрировании в комплексной плоскости, окончательно получим

$$\bar{\Phi}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k}}=V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^k(\eta,\varsigma,y)\,\exp(\mathrm{i}\,x_2\eta-x_1\sqrt{\eta^2+m_j^2\zeta^2})\,d\eta+$$

$$+\sum_{\pm}\pm\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,\varphi_j^k(\pm\eta_R,\varsigma,y)\,\exp(\pm\,\mathrm{i}\,x_2\eta_R-x_1\sqrt{\eta_R^2+m_j^2\zeta^2}),$$

где $Res\, f(.)$ — вычет функции в указанной точке. Второе слагаемое описывает поверхностные релеевские волны, которые генерирует бегущая нагрузка в этом случае. Заметим, что позади нее на бесконечности потенциалы не затухают и асимптотически эквивалентны

$$\bar{\Phi}_j^k\sim 2\pi\,\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Res}\,\varphi_j^k(\pm\eta_R,\varsigma,y)\exp(-\mathrm{i}\,z\varsigma\pm\mathrm{i}\,x_2\eta_R-x_1\sqrt{\eta_R^2+m_j^2\zeta^2})\,d\zeta, \quad j=1,2,3.$$

Здесь выбор знака совпадает со знаком x_2.

При $c = c_R$ подынтегральные функции в (17) имеют сильные неинтегрируемые и в смысле главного значения особенности. Стационарное решение задачи в этом случае не существует.

Аналогично (19) проводятся выкладки для сверхзвукового и трансзвукового случаев, при этом $\Delta(\eta,\varsigma)\neq 0 \ \ \forall\eta\in(-\infty,\infty)$.

4. Фундаментальные пространственно-периодические решения. Для определения Фурье-трансформант граничных функций при $x_1 = 0$ построим трансформанту Фурье по z тензора U. Для этого рассмотрим полное Фурье-преобразование этого тензора, которое имеет вид [4]

$$F_{x_1x_2x_3}[U_i^j]=\frac{\delta_{ij}}{c_2^2(\|\xi\|^2-M_2^2\xi_3^2)}-\frac{\xi_i\xi_j}{c^2\xi_3^2}\left(\frac{1}{(\|\xi\|^2-M_2^2\xi_3^2)}-\frac{1}{(\|\xi\|^2-M_1^2\xi_3^2)}\right). \tag{22}$$

Воспользуемся неполным обратным преобразованием по ξ_1,ξ_2, которое зависит от скорости бегущей нагрузки

$$\bar{f}_{0j}(r,\zeta)=F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\left(\frac{1}{(\|\xi\|^2-M_j^2\zeta^2)}\right)=\begin{cases}(2\pi)^{-1}K_0(m_j\,|\zeta|\,r), & c<c_j\\ 0,25\,\mathrm{i}\,H_0(m_j\,|\zeta|\,r), & c>c_j\end{cases}.$$

Здесь $\zeta=\xi_3$, K_0 — функция Макдональда, H_0 — функции Ханкеля второго (при $\zeta > 0$) и первого (при $\zeta < 0$) рода, соответственно.

Из (22)

получим для дозвуковых скоростей

$$2\pi\bar{U}_i^j(x,\zeta) = c_2^{-2}\delta_i^j K_0(m_2\,|\zeta|\,r) + c^{-2}\zeta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(K_0(m_2\,|\zeta|\,r) - K_0(m_1\,|\zeta|\,r)\right),$$

для сверхзвуковых скоростей

$$4i\,\bar{U}_i^j(x,\zeta) = c_2^{-2}\delta_i^j H_0(m_2\,|\zeta|\,r) + c^{-2}\zeta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(H_0(m_2\,|\zeta|\,r) - H_0(m_1\,|\zeta|\,r)\right),$$

для трансзвуковых скоростей

$$4i\,\bar{U}_i^j(x,\zeta) = c_2^{-2}\delta_i^j H_0(m_2\,|\zeta|\,r) + c^{-2}\zeta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(H_0(m_2\,|\zeta|\,r) - \frac{2i}{\pi}K_0(m_1\,|\zeta|\,r)\right),$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ∂_3 соответствует $\mathrm{i}\,\zeta$.

В дозвуковом случае функция $K_0(mr\,|\varsigma|)\exp(i(x_3 + ct))$ описывает экспоненциально затухающие при $r \to \infty$ волны, распространяющиеся вдоль оси z (поверхностные цилиндрические волны). В сверхзвуковом случае выбор функций Ханкеля связан со знаком показателя экспоненты $\exp(\mathrm{i}\,\zeta ct)$, т.к. в этом случае, как известно [7], именно указанные функции описывают потенциалы волн, удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

5. Тензоры фундаментальных напряжений. Введем тензоры напряжений, порождаемые $U_j^k(x-y,z)$, используя закон Гука (3)

$$S_{ij}^k(x,y,z) = H_{ij}^m(\partial_1,\partial_2,\partial_3)\,U_m^k(x-y,z), \quad \Gamma_i^k(x,y,z,n) = S_{ij}^k(x,y,z)n_j,$$

$$\mathrm{T}_i^k(x,y,z,n) = \Gamma_k^i(y,x,z,n).$$

Последний тензор имеет следующий вид

$$\frac{2\pi\,c^2}{\mu}\mathrm{T}_j^i(x,y,z,n) = (2M_1^2 - M_2^2)\;n_j\,f_{01,i} - M_2^2\,(\delta_j^i\frac{\partial f_{02}}{\partial n} + n_i\,f_{02,j}\,) - \\ -2\frac{\partial}{\partial n}\,(f_{01,ij} - f_{02,ij}\,)\,, \tag{23}$$

антисимметричен по x, y и n для любых c, т.е.

$$T_i^j(x,y,z,n) = -\,T_i^j(y,x,z,n) = -T_i^j(x,y,z,-n). \tag{24}$$

Для тензора T_i^j (см. [5, 6]) верна следующая

Л е м м а 1. *При фиксированном k T_i^k является фундаментальным решением уравнений (4) для силы вида*

$$F_i^k = \lambda n_i\delta_{,k} + \mu\left(\delta_i^k\frac{\partial\delta}{\partial n} + n_k\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right), \quad \delta = \delta(x-y)\delta(z).$$

Свертка уравнения для тензора U с характеристической функцией множества $H_G^-(x,z)$, где G^- — любая область, ограниченная поверхностью Ляпунова G, позволяют получить формулу, подобную формуле Гаусса для потенциала двойного слоя уравнения Лапласа.

Л е м м а 2. *При $c < c_2$ тензор T удовлетворяет формуле*

$$\rho\delta_i^j H_G^-(x,z) = \int\limits_G T_i^j(y-x,\tau-z,n(y,\tau))\,dS(y,\tau) + \\ +\rho c^2\int\limits_G U_i^j,_z(y-x,\tau-z)n_z(y,\tau)\,dS(y,\tau).$$

Для $x \in G^-$ все интегралы регулярные, для $x \in G$ первый интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

Если $G = D$ — цилиндрическая поверхность, то второй интеграл равен нулю и формула аналогична формуле Гаусса статической теории упругости [8].

Тензор T играет фундаментальную роль при построении граничных интегральных уравнений для решения краевых задач в случае бегущих нагрузок в цилиндрических полостях в упругих средах. При транс- и сверхзвуковых скоростях о построении ГИУ краевых задач см. [6].

6. Определение напряжений на границе полупространства. Для построения V следует определить подынтегральные функции в (19). Они задаются выражением

$$\frac{2\pi\, c^2}{\mu}\bar{\Gamma}_i^j = -(2M_1^2 - M_2^2)\, n_j\, \bar{f}_{01,i} - M_2^2\ \left(\delta_{ij}\bar{f}_{02,1} - n_i\,\bar{f}_{02,j}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\bar{f}_{01,ij} - \bar{f}_{02,ij}\right) \qquad (25)$$

при $x_1 = 0,\ n = (1,0,0)),\ \partial_3 \to i\varsigma$.

Далее используем разложение цилиндрических функций на плоские волны [1], а именно, при $x_1 - y_1 < 0$

$$K_0(kr) = 0,5\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}\, x_2\eta + (x_1 - y_1)\sqrt{\eta^2 + k^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 + k^2}}\, d\eta, \qquad (26)$$

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\mathrm{i}\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}x_2\eta + (x_1 - y_1)\sqrt{\eta^2 - k^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 - k^2}}\, d\eta, \quad H_0^{(2)}(kr) = \overline{H_0^{(1)}}(kr), \qquad (27)$$

которое позволяет представить граничные напряжения в виде интегралов Фурье (18). Для этого подставляем соответствующее данной скорости разложение (26) или (27) в (24), проводим дифференцирование по x_i под знаком интеграла, что возможно, поскольку подынтегральные функции экспоненциально убывают на бесконечности, т. к. всегда $y_1 > 0$. Далее группируем члены при $\exp(\mathrm{i}\, x_2\eta)$, которые и представляют собой подынтегральные функции в (18), если положить $x_1 = 0$.

Таким образом, задача построения тензора Грина для упругого полупространства решена.

7. Поверхностные бегущие нагрузки. Действие поверхностных нагрузок на D можно заменить объемной силой, описываемой сингулярной обобщенной функцией - простым слоем на D вида $F_j = p_j(x,z)\delta_D(x,z)$. Тогда, пользуясь свойством тензора Грина, получим решение поставленной задачи

$$u_j = \int_S dS(y)\int_{-\infty}^{\infty} V_j^k(x, y, z - \tau)p_k(y,\tau)d\tau.$$

Формула хорошо описывает перемещения массива на достаточном удалении от поверхности нагружения, в частности, на поверхности $x_1 = 0$. Ее можно использовать для оценки напряженно-деформированного состояния дневной поверхности вдоль линий метрополитенов.

Для оценки НДС массива в окрестности подземного сооружения следует использовать метод ГИУ, разработанный в [6]. При этом возникает необходимость решения сингулярных ГИУ на двух поверхностях $D \cup \{(x,z) : x_1 = 0\}$. В вычислительном плане это более экономичная процедура, чем построение решения в виде потенциала простого слоя на D на основе тензора V, так как построение последнего, как видим, достаточно сложная задача.

8. Бегущие нагрузки на дневной поверхности. При действии бегущих нагрузок на поверхности полупространства $x_1 = 0$ необходимо построить решение однородных уравнений (5) при действии граничной сосредоточенной силы вида $P_j(x_2,z) = \delta_j^m\,\delta(x_2,z)$. Процедура построения решения полностью совпадает с процедурой построения тензора Π_j^k, если вместо граничного условия (10) взять

$$H_{j1}^k(\partial_1,\partial_2,\partial_3)\Pi_k^m = \delta_j^m\,\delta(x_2,z), \quad x_1 = 0. \qquad (28)$$

В этом случае подынтегральные функции, аналогичные (19), определяются легко: $a_j^k = (1/2\pi)^{-2}\delta_j^k$. Их следует использовать при определении потенциалов в (20).

Решение задачи для интегрируемых нагрузок с конечным носителем на дневной поверхности можно представить в виде интеграла Дюамеля

$$u_j = \int_S dS(y) \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_j^k(x, y, z - \tau) p_k(y, \tau) d\tau.$$

В заключение отметим, что построение фундаментальных решений для полупространства при действии сосредоточенных бегущих источников полезно само по себе и не только с точки зрения МГИУ, поскольку они позволяют моделировать действие различных распределенных источников, расположенных как на дневной поверхности, так и не далеко от нее, и определять порождаемые ими поля напряжений и деформаций, исследовать волновые процессы. Последний класс задач типичен для геофизики и сейсмологии.

Ключевые слова: динамика упругих сред, уравнения Ламе, полупространство, бегущие нагрузки, фундаментальные решения, тензор Грина.

Цитированная литература

1. **Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989.

2. **Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б.** Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата, 1992.

3. **Филиппов И.Г., Егорычев О.А.** Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М., 1977.

4. **Алексеева Л.А.** // ПММ. 1991. Т.55, №5. С. 854—862.

5. **Алексеева Л.А.** Граничные интегральные уравнения краевых задач для класса стационарных бегущих решений волновых уравнений в цилиндрических областях / Препринт Института теоретической и прикладной математики НАН РК. Алма-Ата. 1997. 70с.

6. **Alekseyeva L.A.** // Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element (UK, Oxford). 1998. No.11. P.37—44.

7. **Новацкий В.** Теория упругости. М., 1975.

8. **Перлин П.И.** Граничные интегральные уравнений в теории упругости. М., 1977.

Поступила в редакцию 20 июля 2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С.26 — 32*

УДК 517.956

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВВЕДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА К ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев

Институт Математики МОиН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Рассматривается задача Дарбу для систем гиперболических уравнений второго порядка. Методом введения функционального параметра установлено существование единственного классического решения исследуемой задачи и предложен алгоритм его нахождения.

В треугольнике Δ, ограниченном отрезками $t = T$, $0 \le t \le T$, $x = 0$, $x = kt$, $k > 0$, рассматривается задача Дарбу для системы гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(t,x) \mid_{t=\frac{x}{k}} = \varphi(x), \qquad x \in [0,kT], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ - матрицы $A(t,x), B(t,x), C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Delta}$ и n - вектор-функции $\psi(t)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, $[0,kT]$ соответственно, t — горизонтальная и x — вертикальная оси,

$$||u(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|, \quad ||A(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|.$$

Пусть $C(J,R^n)$ - множество непрерывных на J $(J \subset R^1$ или $J \subset R^2)$ функций $u : J \to R^n$. Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Delta}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Delta}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Delta}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Delta, R^n)$ называется классическим решением задачи (1)—(3), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(t,x) \in \Delta$ и выполнены краевые условия (2), (3).

В [1] для исследования краевой задачи с данными на характеристиках для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными был предложен метод введения функциональных параметров. Этот метод является модификацией метода параметризации [2], разработанного для решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения частными производными. На его основе были получены необходимые и

Keywords: *the system of hyperbolic equations, the problem of Darboux, the method of functional parameter' introduction*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

достаточные условия существования единственного классического решения в терминах коэффициентов.

Основным методом построения классического решения задачи Дарбу (1)—(3) является метод Римана. При нахождении классического решения задачи (1)—(3) этим методом важную роль играет сопряженная с (1) однородная система и понятие матрицы Римана [3, с. 63]. Для построения сопряженной с (1) системы требуется непрерывная дифференцируемость коэффициентов $A(t,x)$, $B(t,x)$. Нахождение матрицы Римана в случае, когда коэффициенты системы являются переменными, как и нахождение фундаментальной матрицы для обыкновенных дифференциальных уравнений, является весьма трудной задачей. В настоящей работе задача Дарбу исследуется методом введения функциональных параметров. Применение этого метода позволило предложить новый подход к построению классического решения задачи (1)—(3) и алгоритм его нахождения.

Суть метода заключается в сведении исходной задачи к краевой задаче с неизвестным параметром. Алгоритм решения задачи состоит из двух этапов: 1) нахождение введенного неизвестного функционального параметра; 2) нахождение решения задачи Гурса.

Приведем схему метода. Через $q(x)$ обозначим значение функции $u(t,x)$ при $t=T$ и сделаем замену $\widetilde{u}(t,x)=u(t,x)-q(x)$ в задаче (1)-(3). Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестным функциональным параметром $q(x)\in C([0,kT],R^n)$

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{u}+f(t,x)+A(t,x)q'(x)+C(t,x)q(x),\quad (t,x)\in\Delta,\quad (4)$$

$$\widetilde{u}(T,x)=0,\qquad x\in[0,kT],\quad (5)$$

$$\widetilde{u}(t,0)+q(0)=\psi(t),\quad t\in[0,T],\quad (6)$$

$$\widetilde{u}(t,x)\,|_{t=\frac{x}{k}}+q(x)=\varphi(x),\qquad x\in[0,kT].\quad (7)$$

Задачи (4)—(7) и (1)—(3) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t,x)$ является решением (1) – (3), то пара $\{q(x)=u(T,x),\widetilde{u}(t,x)=u(t,x)-u(T,x)\}$, будет решением (4)—(7), и, наоборот, если $\{q(x),\widetilde{u}(t,x)\}$ — решение (4)—(7), то $q(x)+\widetilde{u}(t,x)$ будет решением (1)—(3). При фиксированных $q(x),q'(x)$ функция $\widetilde{u}(t,x)$ является решением задачи Гурса на Δ с условиями (5) и

$$\widetilde{u}(t,0)=\psi(t)-\psi(T),\qquad t\in[0,T].\quad (8)$$

Введя обозначения $\widetilde{v}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$ из (5), (8) получим $\widetilde{v}(T,x)=0$, $\widetilde{w}(t,0)=\dot{\psi}(t)$. Задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{w}(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^x\Big[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)+$$
$$+f(t,\xi)+A(t,\xi)q'(\xi)+C(t,\xi)q(\xi)\Big]d\xi,\quad (9)$$

$$\widetilde{v}(t,x)=\int\limits_T^t\Big[A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)+B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)+$$
$$+f(\tau,x)+A(\tau,x)q'(x)+C(\tau,x)q(x)\Big]d\tau,\quad (10)$$

$$\widetilde{u}(t,x)=\psi(t)-\psi(T)+\int\limits_T^t d\tau\int\limits_0^x\Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\widetilde{w}(\tau,\xi)+$$
$$+C(\tau,\xi)\widetilde{u}(\tau,\xi)+f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)q'(\xi)+C(\tau,\xi)q(\xi)\Big]d\xi.\quad (11)$$

Соотношение (7) продифференцируем по переменной x

$$\widetilde{v}(t,x)\,|_{t=\frac{x}{k}}+\frac{1}{k}\widetilde{w}(t,x)\,|_{t=\frac{x}{k}}+q'(x)=\varphi'(x),\qquad x\in[0,kT]. \tag{12}$$

Подставляя в (12) вместо $\widetilde{v}$ соответствующую правую часть из (10) при $t=\frac{x}{k}$, для неизвестной функции $q(x)$ получаем систему n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных

$$\Big[I+\int\limits_T^{x/k}A(\tau,x)d\tau\Big]q'(x)=-\int\limits_T^{x/k}C(\tau,x)d\tau\cdot q(x)-\int\limits_T^{x/k}f(\tau,x)d\tau+\varphi'(x)-$$

$$-\int\limits_T^{x/k}\Big[B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)\Big]d\tau-\frac{1}{k}\widetilde{w}(x/k,x)-\int\limits_T^{x/k}A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)d\tau. \tag{13}$$

Обозначим $Q(T,x)=I+\int\limits_T^{x/k}A(\tau,x)d\tau$, $||u(t,x)||_T=\max\limits_{t\in[0,T]}||u(t,x)||$.
Из условий (6) и (8) вытекает, что вектор-функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$q(0)=\psi(T). \tag{14}$$

Здесь неизвестными являются как функции $q'(x)$, $q(x)$, так и функции $\widetilde{u}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (9) —(11), (13) с условием (14) находится как пределы последовательностей $\{q^{(k)}(x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)\}$, определяемых по следующему алгоритму.

Шаг 0. Предполагая в правой части (13) $q(x)=\psi(T)$, $\widetilde{u}(t,x)=\psi(t)-\psi(T)$, $\widetilde{w}(t,x)==\dot{\psi}(t)$, $\widetilde{v}(t,x)=0$ и обратимость матрицы $Q(T,x)$ при всех $x\in[0,kT]$ из уравнения (13) найдем $\{q^{(0)\prime}(x)\}$. Используя условие (14), находим функции $q^{(0)}(x)$, $q^{(0)}(x)=\psi(T)+\int\limits_0^x q^{(0)\prime}(\xi)d\xi$. Из системы интегральных уравнений (9) — (11), где $q(x)=q^{(0)}(x)$, $q'(x)=q^{(0)\prime}(x)$, определяем функции $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$.

Шаг 1. Из системы уравнений (13), где в правой части $q(x)=q^{(0)}(x)$, $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)=\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, в силу обратимости $Q(T,x)$ при $x\in[0,kT]$ найдем $\{q^{(1)\prime}(x)\}$. Вновь, используя условия (14), находим $q^{(1)}(x)=\psi(T)+\int\limits_0^x q^{(1)\prime}(\xi)d\xi$ и из систем интегральных уравнений (9)—(11), где $q(x)=q^{(1)}(x)$, $q'(x)=q^{(1)\prime}(x)$, определяем функции $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$. И т.д.

Для определения $q'(x)$ из уравнения (13) необходимо, чтобы матрица $Q(T,x)$ была обратимой для всех $x\in[0,kT]$. Так как матрица $A(t,x)$ непрерывна, то

$$\max_{(t,x)\in\bar{\Delta}}||A(t,x)||=\alpha\qquad\text{и}\qquad\max_{x\in[0,kT]}\Big|\Big|\int\limits_T^{x/k}A(\tau,x)d\tau\Big|\Big|\le\alpha\cdot T,$$

где α — const. Если предположить, что $\alpha\cdot T<1$, матрица $Q_T(x)$ будет обратимой и

$$\max_{x\in[0,kT]}||[Q_T(x)]^{-1}||<\frac{1}{1-\alpha\cdot T}.$$

Условия следующего утверждения обеспечивают равномерную относительно $(t,x)\in\bar{\Delta}$ сходимость предложенного алгоритма к решению краевой задачи с неизвестной функцией (4)—(7), а также существование единственного классического решения задачи (1)—(3).

Т е о р е м а 1. *Пусть матрицы $A(t,x), B(t,x), C(t,x)$, n - вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Delta}$ и n-вектор-функции $\psi(t)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, $[0,kT]$, соответственно, и T удовлетворяет неравенствам*

$$a)\quad \alpha\cdot T<1,\qquad\qquad b)\quad \beta=\frac{\alpha T}{1-\alpha T}\cdot\Big[e^{\alpha T}-1\Big]<1.$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3).

Доказательство. В силу условия а) при фиксированных $\{q(x),\widetilde{u}(t,x),\widetilde{w}(t,x),\,\widetilde{v}(t,x)\}$ функция $q'(x)$ определяется единственным образом из уравнения (13) и

$$q'(x)=-[Q(T,x)]^{-1}\Big\{\int\limits_T^{x/k}C(\tau,x)d\tau\cdot q(x)+\int\limits_T^{x/k}f(\tau,x)d\tau-\varphi'(x)+\frac{1}{k}\widetilde{w}(x/k,x)+$$

$$+\int\limits_T^{x/k}\Big[B(\tau,x)\widetilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)\Big]d\tau+\int\limits_T^{x/k}A(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)d\tau\Big\},\quad x\in[0,kT],\quad q\in R^n.$$

При фиксированных $q(x)\in C([0,kT],R^n)$, $q'(x)\in C([0,kT],R^n)$ система интегральных уравнений (9)—(11) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}(t,x),\widetilde{w}(t,x),\widetilde{v}(t,x)\}$, где $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{v}$ принадлежат $C(\bar{\Delta},R^n)$ и при предположениях относительно данных задачи справедливы оценки

$$||\widetilde{v}(t,x)||_T\le\Big[e^{\alpha T}-1\Big]||q'(x)||+Te^{\alpha T}||C(t,x)||_T\cdot||q(x)||+Te^{\alpha T}||f(t,x)||_T+$$

$$+Te^{\alpha T}\max\{||B(t,x)||_T,||C(t,x)||_T\}\Big[||\widetilde{u}(t,x)||_T+||\widetilde{w}(t,x)||_T\Big],\tag{15a}$$

$$||\widetilde{u}(t,x)||_T+||\widetilde{w}(t,x)||_T\le\Big\{||\dot{\psi}(t)||_T+||\psi(t)-\psi(T)||_T+$$

$$+(1+T)\int\limits_0^x\Big[1+\alpha Te^{\alpha T}\Big]||f(t,\xi)||_Td\xi+(1+T)\int\limits_0^x\alpha Te^{\alpha T}||q'(\xi)||d\xi+$$

$$+(1+T)\int\limits_0^x\Big[1+\alpha Te^{\alpha T}\Big]||C(t,\xi)||_T\cdot||q(\xi)||d\xi\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{(1+\alpha Te^{\alpha T})\int\limits_o^x\max\{||B(t,\xi)||_T,||C(t,\xi)||_T\}d\xi\Big\}.\tag{15b}$$

Из интегрального уравнения (10) при помощи неравенства Беллмана-Гроноулла для последовательных разностей $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)$ получаем оценку

$$||\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)||_T\le\Big[e^{\alpha T}-1\Big]||q^{(m)\prime}(x)-q^{(m-1)\prime}(x)||+Te^{\alpha T}\times$$

$$\times\Big(\max\{||B(t,x)||_T,||C(t,x)||_T\}\Big[||\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)||_T+$$

$$+||\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)||_T\Big]+||C(t,x)||_T\cdot||q^{(m)}(x)-q^{(m-1)}(x)||\Big).\tag{16a}$$

Для разностей $q^{(m)}(x)-q^{(m-1)}(x),\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x),\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x),\;\; m=1,2,...$ с учетом неравенств (15), (16a) справедливы оценки

$$||q^{(m)}(x)-q^{(m-1)}(x)||\le\int\limits_0^x||q^{(m)\prime}(\xi)-q^{(m-1)\prime}(\xi)||d\xi,\tag{16b}$$

$$||\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)||_T+||\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)||_T\leq$$
$$\leq a_0(x)\int\limits_0^x||q^{(m)\prime}(\xi)-q^{(m-1)\prime}(\xi)||d\xi, \tag{16c}$$

где $a_0(x)=e^{a_1(x)}(1+T)\Big[\alpha Te^{\alpha T}+a_2(x)\Big],\;\; a_2(x)=\Big[1+\alpha Te^{\alpha T}\Big]\int\limits_0^x||C(t,\xi)||_Td\xi,$
$a_1(x)=(1+T)\cdot(1+\alpha Te^{\alpha T})\int\limits_0^x\max\Big[||B(t,\xi)||_T,||C(t,\xi)||_T\Big]d\xi.$

Тогда для разностей $q^{(m+1)\prime}(x)-q^{(m)\prime}(x)$, принимая во внимание (15), имеем оценку

$$||q^{(m+1)\prime}(x)-q^{(m)\prime}(x)||\leq||[Q(T,x)]^{-1}||\Bigg[T||C(t,x)||_T\cdot||q^{(m)}(x)-q^{(m-1)}(x)||+$$
$$+b_0(x)\Big[||\widetilde{w}^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}^{(m-1)}(t,x)||_T+||\widetilde{u}^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}^{(m-1)}(t,x)||_T\Big]+$$
$$+\alpha T||\widetilde{v}^{(m)}(t,x)-\widetilde{v}^{(m-1)}(t,x)||_T\Bigg],$$

где $b_0(x)=T\max\Big[||B(t,x)||_T,||C(t,x)||_T\Big]+\frac{1}{k}.$

Подставляя сюда (16a), а также учитывая оценки (16b), (16c), имеем

$$||q^{(m+1)\prime}(x)-q^{(m)\prime}(x)||\leq\beta||q^{(m)\prime}(x)-q^{(m-1)\prime}(x)||+b_1(x)\int\limits_0^x||q^{(m)\prime}(\xi)-q^{(m-1)\prime}(\xi)||d\xi, \tag{17}$$

где $b_1(x)=\frac{1}{1-\alpha T}\cdot\Big[T\Big(\alpha Te^{\alpha T}+1\Big)||C(t,x)||_T+a_0(x)b_2(x)\Big],$
$b_2(x)=b_0(x)+\alpha T^2e^{\alpha T}\max\Big(||B(t,x)||_T,||C(t,x)||_T\Big).$

Из нулевого и первого шага алгоритма получаем следующие оценки

$$||q^{(0)\prime}(x)||\leq\frac{1}{1-\alpha T}\Bigg\{T||C(t,x)||_T\cdot||\psi(T)||+T||f(t,x)||_T+||\varphi'(x)||+$$
$$+b_0(x)\Big[||\dot\psi(t)||_T+||\psi(t)-\psi(T)||_T\Big]\Bigg\}=D_1(x),$$

$$||q^{(0)}(x)||\leq||\psi(T)||_T+\frac{1}{1-\alpha T}\int\limits_0^x\Bigg\{T||C(t,\xi)||_T\cdot||\psi(T)||_T+T||f(t,\xi)||_T+||\varphi'(\xi)||+$$
$$+b_0(\xi)\Big[||\dot\psi(t)||_T+||\psi(t)-\psi(T)||_T\Big]\Bigg\}d\xi=D_2(x),$$

$$||\widetilde{w}^{(0)}(t,x)||_T+||\widetilde{u}^{(0)}(t,x)||_T\leq\Bigg\{||\dot\psi(t)||_T+||\psi(t)-\psi(T)||_T+$$
$$+(1+T)\alpha e^{\alpha T}\int\limits_0^xD_1(\xi)d\xi+(1+T)\Big[1+\alpha Te^{\alpha T}\Big]\int\limits_0^x||C(t,\xi)||_T\cdot D_2(\xi)d\xi+$$
$$+(1+T)\Big[1+\alpha Te^{\alpha T}\Big]\int\limits_0^x||f(t,\xi)||_Td\xi\Bigg\}e^{a_1(x)}=D_3(x),$$

$$||\widetilde{v}^{(0)}(t,x)||_T\leq\Big[e^{\alpha T}-1\Big]D_1(x)+Te^{\alpha T}\Big(\max\{||B(t,x)||_T,||C(t,x)||_T\}D_3(x)+$$

$$+Te^{\alpha T}||C(t,x)||_T D_2(x)+Te^{\alpha T}||f(t,x)||_T = D_4(x),$$

$$||q^{(1)\prime}(x)-q^{(0)\prime}(x)|| \le \frac{1}{1-\alpha T}T||C(t,x)||_T\cdot[D_2(x)+||\psi(T)||_T]+$$

$$+\frac{1}{1-\alpha T}b_0(x)\Big[D_3(x)+||\dot\psi(t)||_T+||\psi(t)-\psi(T)||_T\Big]+\frac{1}{1-\alpha T}\alpha T D_4(x)=D(x). \qquad (18)$$

Для функции $\Omega_m(x)=||q^{(m+1)\prime}(x)-q^{(m)\prime}(x)||$ на основе (17) установим следующее неравенство

$$\Omega_m(x)\le \beta^m\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(m-j)!\cdot j!}\cdot\frac{1}{j!}\Big(\frac{H_1}{\beta}\Big)^j\cdot H_2, \qquad (19)$$

где $H_1=\int\limits_0^{kT} b_1(\xi)d\xi$, $H_2=\max\limits_{x\in[0,kT]}D(x)$.

Так как $\beta\in(0,1)$, то выбрав число $\theta\in(0,(1-\beta)/\beta)$ и используя предельное соотношение пункта 6^0 из [4, С.327], из равенства $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\Big(\frac{H_1}{\theta\beta}\Big)^m=0$ получим, что

$$z_m=\frac{1}{(1+\theta)^m}\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(m-j)!\cdot j!}\cdot\theta^j\cdot\frac{1}{j!}\Big(\frac{H_1}{\theta\beta}\Big)^j\to 0 \qquad \text{при} \qquad m\to\infty.$$

Тогда существует число $H_3>0$, ограничивающее последовательность z_m, и из (19) получим основную оценку

$$\Omega_m(x)\le\beta^m(1+\theta)^m\cdot z_m\cdot H_2\le\beta_1^m\cdot H_2\cdot H_3, \qquad \text{где} \quad \beta_1=\beta(1+\theta)<1.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\Omega_m(x)$ при $x\in[0,kT]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательностей $q^{(m)\prime}(x)$ к непрерывной на $x\in[0,kT]$ функции $q^{*\prime}(x)$. Из неравенства (16b) вытекает равномерная сходимость последовательности $q^{(m)}(x)$ к функции $q^*(x)\in C([0,kT],R^n)$. Из оценок (16c), (16a) следует равномерная относительно $(t,x)\in\bar\Delta$ сходимость последовательностей $\widetilde{u}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(m)}(t,x)$, $\widetilde{v}^{(m)}(t,x)$, соответственно, к функциям $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$ принадлежащим $C(\bar\Delta,R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(t,x)$, полученная как сумма функций $q^*(x)+\widetilde{u}^*(t,x)$, принадлежит $C(\bar\Delta,R^n)$ и является классическим решением задачи (1)—(3).

Докажем единственность решения задачи (1)—(3). Пусть существует два классических решения $u^*(t,x)$ и $u^{**}(t,x)$. Тогда соответствующие им пары $(q^*(x)+\widetilde{u}^*(t,x))$, $(q^{**}(x)+\widetilde{u}^{**}(t,x))$ будут решениями краевой задачи с параметром (4)—(7) и аналогично (17) для разности $q^{*\prime}(x)-q^{**\prime}(x)$ справедлива оценка

$$||q^{*\prime}(x)-q^{**\prime}(x)||\le\frac{1}{1-\beta}\int\limits_0^x b_1(\xi)||q^{*\prime}(\xi)-q^{**\prime}(\xi)||d\xi. \qquad (20)$$

Из (20) с помощью неравенства Гронуолла-Беллмана имеем $||q^{*\prime}(x)-q^{**\prime}(x)||=0$ и в силу соотношений

$$q^*(x)=\psi(T)+\int\limits_0^x q^{*\prime}(\xi)d\xi, \qquad q^{**}(x)=\psi(T)+\int\limits_0^x q^{**\prime}(\xi)d\xi$$

получим $q^*(x)=q^{**}(x)$. Аналогично (16c) устанавливается неравенство

$$||\widetilde{w}^*(t,x)-\widetilde{w}^{**}(t,x)||_T+||\widetilde{u}^*(t,x)-\widetilde{u}^{**}(t,x)||_T\le a_0(x)\int\limits_0^x||q^{*\prime}(\xi)-q^{**\prime}(\xi)||d\xi,$$

откуда вытекает, что $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$ при всех $(t,x) \in \bar{\Delta}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1)—(3) в треугольнике Δ. В треугольнике Δ_0, ограниченном отрезками $t = t_0$, $0 \le t \le t_0$, $x = 0$, $x = kt$, $k > 0$ и $t_0 < T$, будет справедлива теорема 1, если t_0 - достаточно малое число, удовлетворяющее неравенствам а), б). Возьмем шаг $t_0 > 0$ так, чтобы он ровно N раз укладывался на отрезке $[0,T]$ и выполнялись неравенства а), б) теоремы 1. Далее через точку (t_0, kt_0) проведем прямую параллельно оси $x = 0$, а через точку $(2t_0, 0)$ — прямую $t = 2t_0$. Получим прямоугольник Γ_1, ограниченный отрезками $x = 0$, $t_0 \le t \le 2t_0$, $x = kt_0$ и $t = 2t_0$, и треугольник Δ_1, ограниченный отрезками $x = kt_0$, $t_0 \le t \le 2t_0$, $x = kt$ и $t = 2t_0$. Так как в Δ_0 полностью определено решение задачи (1)—(3), то его значение известно при $t = t_0$. В прямоугольнике Γ_1 известны условия на двух характеристиках $x = 0$ и $t = t_0$. Это есть задача Гурса для системы (1). Эта задача однозначно разрешима при предположениях относительно исходных данных. Определив решение в прямоугольнике Γ_1, находим его значение при $x = kt_0$. Тогда в треугольнике Δ_1 решается снова задача Дарбу и за счет выбора t_0 будет справедлива теорема 1. Далее снова через точку $(2t_0, 2kt_0)$ проведем прямую параллельно оси $x = 0$, а через точку $(3t_0, 0)$ - прямую $t = 3t_0$. Получим прямоугольник Γ_2, ограниченный отрезками $x = 0$, $2t_0 \le t \le 3t_0$, $x = 2kt_0$ и $t = 3t_0$, и треугольник Δ_2, ограниченный отрезками $x = 2kt_0$, $2t_0 \le t \le$ $\le 3t_0$, $x = kt$ и $t = 3t_0$. Аналогично рассуждая, устанавливаем существование единственного решения в прямоугольнике Γ_2 и треугольнике Δ_2. Итак, в Δ, двигаясь с края $t = 0$ в сторону $t = T$ с шагом t_0, в каждом прямоугольнике будем решать задачу Гурса, а в треугольнике решается задача Дарбу, для которой справедлива теорема 1. Иначе говоря, решение, найденное в треугольнике Δ_0, будет продолжаться непрерывным образом на последующие треугольники и прямоугольники. Наконец, через N шагов, дойдя до $t = T$, убеждаемся, что мы установили существование единственного классического решения задачи (1)—(3) в треугольнике Δ.

Справедлива

Теорема 2. *Задача (1)—(3) имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. На основе теоремы 1 выбираем шаг $t_0 > 0$, удовлетворяющий условиям а), б). Далее по вышеприведенному алгоритму строим классическое решение задачи (1)—(3) в треугольнике Δ, который одновременно доказывает существование классического решения. Теорема доказана.

В работе [5] Теорема 1 доказана для случая $k = 1$.

Цитированная литература

1. **Джумабаев Д. С., Асанова А.Т.** // Известия МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23 – 29.

2. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

3. **Бицадзе А.В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.

4. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. М., 1969.

5. **Асанова А.Т.** // Вестник МОН РК, НАН РК. 2002. № 6. С. 3 – 8.

Поступила в редакцию 07.11.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 33 — 41*

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ.I

Д. Б. Базарханов

Институт математики МО и Н РК
Алматы, ул.Пушкина, 125, dauren@math.kz

Получена теорема представления для функций из пространств Никольского-Бесова смешанной гладкости. Как следствие, установлены некоторые эквивалентные нормировки этих пространств и теоремы вложения для них.

1. Введение. Теория (представления, вложения и интерполяции) функциональных пространств смешанной гладкости берет свое начало в известной работе С. М. Никольского [1], в которой введены и исследовались пространства $S_p^{\mathbf{r}}H(\mathbb{R}^n)$ функций "с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера"(по поводу истории вопроса и современного состояния теории см. [2], [3], [4], [5, гл. 2], [6] и указанную там библиографию; кроме того ниже в некоторых замечаниях даются дополнительные комментарии и ссылки).

В гармоническом анализе, теории сингулярных интегральных и псевдодифференциальных операторов и их приложениях важную роль играют различные функциональные пространства, объединенные (в англоязычной математической литературе) под общим названием product spaces (см., например, [7] — [11]).

В предлагаемой работе рассматриваются пространства Никольского-Бесова $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ и Лизоркина-Трибеля $\mathsf{MF}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, которые, с одной стороны, являются модификациями классических функциональных пространств смешанной гладкости (ср. [2], [4], [5], [6]), а с другой — относятся к указанному выше типу product spaces. Настоящая (первая) часть работы посвящена изучению пространств $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ получены теорема представления, а также ряд эквивалентных нормировок и теоремы вложения (простейшая, разных метрик и разных измерений).

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел, соответственно; $\mathbb{R}_+ = [0,\ \infty)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d -мерное вещественное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, как обычно, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^d x_j y_j$ — скалярное произведение, $\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ — (евклидова) длина вектора $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|_1 = \sum_1^d |x_j|$ и $|\mathbf{x}|_\infty = \max_{1 \le j \le d} |x_i|$; кроме того, $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ $(\mathbf{x} < \mathbf{y}) \Leftrightarrow$

Keywords: *Function space, mixed smoothness, representation by entire function of exponential type, equivalent norms, embedding*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

$x_j \le y_j$ $(x_j < y_j)$, $j = 1, \ldots, d$; $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$; для $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ и

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ и $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Для удобства положим $\mathbb{R}^{\mathbf{d}} = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$, $\mathbb{N}_0^{\mathbf{d}} = \mathbb{N}_0^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_0^{d_n}$; если $t \in (0, \infty)$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, то $t^{\mathbf{z}} = (t^{z_1}, \ldots, t^{z_n})$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^{\mathbf{d}}$ будем записывать в виде $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, где $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jd_j}) \in \mathbb{R}^{d_j}$, $\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jd_j}) \in \mathbb{N}_0^{d_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Обозначим через $\mathbf{e}_n$ множество индексов $\{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{e}$ — произвольное его подмножество (включая пустое множество и само множество $\mathbf{e}_n$), $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_n \setminus \mathbf{e}$ и $|\mathbf{e}|$ — количество его элементов. Пусть $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$. Тогда $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} = (\frac{1}{t_1}\mathbf{x}_1, \ldots, \frac{1}{t_n}\mathbf{x}_n)$ (при $t_j \ne 0$, $j \in \mathbf{e}_n$); $\mathbf{t}(\mathbf{e}) = (t_1(\mathbf{e}), \ldots, t_n(\mathbf{e}))$, $\mathbf{x}(\mathbf{e}) = (\mathbf{x}_1(\mathbf{e}), \ldots, \mathbf{x}_n(\mathbf{e}))$, где $t_j(\mathbf{e}) = t_j$ $(\in \mathbb{R})$, $\mathbf{x}_j(\mathbf{e}) = \mathbf{x}_j$ $(\in \mathbb{R}^{d_j})$ при $j \in \mathbf{e}$ и $t_j(\mathbf{e}) = 0$, $\mathbf{x}_j(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ $(\in \mathbb{R}^{d_j})$ при $j \in \bar{\mathbf{e}}$; $\mathbf{e}[\mathbf{t}]$ — носитель $\mathbf{t}$, т.е. $\mathbf{e}[\mathbf{t}] = \{j \in \mathbf{e}_n \ : \ t_j \ne 0\}$. Иногда будет удобно считать $\mathbf{t}(\mathbf{e})$ точкой $(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{|\mathbf{e}|}})$ пространства $\mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}$, а $\mathbf{x}(\mathbf{e})$ — точкой $(\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_{|\mathbf{e}|}})$ из $\mathbb{R}^{d_{j_1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_{j_{|\mathbf{e}|}}} (=: \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}$. Аналогично определим $\mathbb{R}_+^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}$, $\mathbb{N}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})})$, $\mathbf{t} = (\mathbf{t}(\mathbf{e}), \mathbf{t}(\bar{\mathbf{e}}))$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(\mathbf{e}), \mathbf{x}(\bar{\mathbf{e}}))$, $\mathbb{R}^{\mathbf{d}} = \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\bar{\mathbf{e}})}$; а также определим дифференциальный оператор

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})} = \partial^{\boldsymbol{\alpha}_{j_1}} \cdots \partial^{\boldsymbol{\alpha}_{j_{|\mathbf{e}|}}} = \partial_{\mathbf{x}_{j_1}}^{\boldsymbol{\alpha}_{j_1}} \cdots \partial_{\mathbf{x}_{j_{|\mathbf{e}|}}}^{\boldsymbol{\alpha}_{j_{|\mathbf{e}|}}}$$

(здесь $\varnothing \ne \mathbf{e} = \{1 \le j_1 < \ldots < j_{|\mathbf{e}|} \le n\}$).

2. Определение пространства $\mathsf{MB}_{\mathbf{pq}}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Для $q \in [1, \infty]$ пусть, как обычно, $l_q = l_q(\mathbb{X})$ - пространство числовых комплекснозначных последовательностей $\{b_j\} = \{b_j\}_{j \in \mathbb{X}}$ с конечной нормой

$$\| \{ b_j\} \mid l_q \| = \left(\sum_{j \in \mathbb{X}} | b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(с обычной модификацией при $q = \infty$. Здесь $\mathbb{X}$ есть либо $\mathbb{N}_0$, либо $\mathbb{Z}$).

Далее пусть $L_q^* = L_q^*(\mathbb{R}_+)$ — пространство измеримых функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\| \varphi \mid L_q^* \| = \left(\int_{\mathbb{R}_+} | \varphi(t) |^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (q \in [1, \infty)),$$

$$\| \varphi \mid L_\infty^* \| = \operatorname{ess\,sup} \{ | \varphi(t) | \ : \ t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

а $L_q^{**} = L_q^{**}(\mathbb{R}_+^d)$ — пространство измеримых функций $\psi : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\| \varphi \mid L_q^{**} \| = \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} | \psi(\mathbf{x}) |^q \frac{d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^d} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (q \in [1, \infty)),$$

$$\| \psi \mid L_\infty^{**} \| = \operatorname{ess\,sup} \{ | \psi(\mathbf{x}) | \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \}.$$

Для $\varnothing \ne \mathbf{e} = \{1 \le j_1 < \cdots < j_{|\mathbf{e}|} \le n\}$ и $\mathbf{q}(\mathbf{e}) = (q_j, \ j \in \mathbf{e}) \in [1, \infty]^{|\mathbf{e}|}$ пусть $l_{\mathbf{q}(\mathbf{e})} = l_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}(\mathbb{X}^{|\mathbf{e}|})$ — пространство кратных комплекснозначных последовательностей $\{b_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}\} = \{b_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}\}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}) \in \mathbb{X}^{|\mathbf{e}|}}$ с конечной векторной нормой

$$\| \{ b_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}\} \mid l_{\mathbf{q}(\mathbf{e})} \| = \| \{ \cdots \| \{ b_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}\}_{m_{j_1} \in \mathbb{X}} \mid l_{q_{j_1}} \| \cdots \}_{m_{j_{|\mathbf{e}|}} \in \mathbb{X}} \mid l_{q_{j_{|\mathbf{e}|}}} \|$$

(здесь, как и выше, $\mathbb{X}$ есть либо $\mathbb{N}_0$, либо $\mathbb{Z}$).

Далее пусть $L^*_{\mathbf{q(e)}} = L^*_{\mathbf{q(e)}}\ (\mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}_+)$ — пространство измеримых функций $\varphi\ :\ \mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}_+ \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|\ \varphi\ |\ L^*_{\mathbf{q(e)}}\ \| = \|\ (\cdots \|\ \varphi\ |\ L^*_{q_{j_1}}\ \| \cdots)\ |\ L^*_{q_{j_{|\mathbf{e}|}}}\ \|$$

(здесь норма $\|\ \cdot\ |\ L^*_{q_{j_l}}\ \|$ применяется к функции $\varphi(\mathbf{t}(\mathbf{e}))$ по переменной $t_{j_l},\ l = 1, \ldots, |\mathbf{e}|$).

Пусть еще $L^{**}_{\mathbf{q(e)}} = L^{**}_{\mathbf{q(e)}}\ (\mathbb{R}^{\mathbf{d(e)}}_+)$ — пространство измеримых функций $\psi\ :\ \mathbb{R}^{\mathbf{d(e)}}_+ \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|\ \psi\ |\ L^{**}_{\mathbf{q(e)}}\ \| = \|\ (\cdots \|\ \psi\ |\ L^{**}_{q_{j_1}}\ \| \cdots)\ |\ L^{**}_{q_{j_{|\mathbf{e}|}}}\ \|$$

(здесь норма пространства $L^{**}_{q_{j_l}} = L^{**}_{q_{j_l}}(\mathbb{R}^{d_{j_l}})$ применяется к функции $\psi(\mathbf{x}(\mathbf{e}))$ по переменной $\mathbf{x}_{j_l},\ l = 1, \ldots, |\mathbf{e}|$);

для $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in [1,\ \infty]^d$ пусть $L_{\mathbf{p}} = L_{\mathbf{p}}\ (\mathbb{R}^d)$ — пространство измеримых функций $f\ :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ с конечной векторной нормой

$$\|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \| = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\cdots \left(\int_{\mathbb{R}} |\ f\ (x)\ |^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots \right)^{\frac{p_d}{p_{d-1}}} dx_d \right)^{\frac{1}{p_d}}$$

(если $p_i = \infty$, то $\left(\int_{\mathbb{R}} |\ g\ (\cdot)\ |^{p_i} dx_i \right)^{1/p_i}$ заменяется на $\operatorname{ess\,sup} \{\ |\ g\ (\cdot)\ |\ :\ x_i \in \mathbb{R}\ \}$).

Для функции $f\ :\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}} \to \mathbb{C}$ определим разность порядка $k \in \mathbb{N}_0$ с шагом $\mathbf{h}_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ по направлению "переменной" $\mathbf{x}_j,\ (j \in \mathbf{e}_n)$:

$$\Delta^k(\mathbf{h}_j) f(\mathbf{x})\ =\ \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} \mathrm{C}^l_k f(\ldots, \mathbf{x}_j + l \cdot \mathbf{h}_j, \ldots),$$

а также "смешанную"разность порядка $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n_0$ с "векторным"шагом $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$:

$$\Delta^{\mathbf{k}}(\mathbf{h}) f(\mathbf{x}) = \Delta^{k_n}(\mathbf{h}_n) \cdots \Delta^{k_1}(\mathbf{h}_1) f(\mathbf{x}).$$

Далее определим "смешанные"модули гладкости для функции $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ $(\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n), \mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}\ (j \in \mathbf{e}_n),\ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,\ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n)$:

$$\omega_{\mathbf{k(e)}}(\ f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}} = \sup\{\ \|\ \Delta^{\mathbf{k(e)}}(\mathbf{h}(\mathbf{e})) f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ :\ \|\mathbf{h}_j\| \le t_j,\ j \in \mathbf{e}\ \}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{e}) \in \mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}_+.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in [0,\ \infty)^n,\ \mathbf{e}^\star := \mathbf{e}[\mathbf{s}] \neq \varnothing,\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),$ $\mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}\ (j \in \mathbf{e}_n),\ \mathbf{q}(\mathbf{e}^\star) = (q_j, j \in \mathbf{e}^\star) \in [1,\ \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}$. *Фиксируем* $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}^{|\mathbf{e}^\star|}$ *такое, что* $k_j > s_j\ (j \in \mathbf{e}^\star)$. *Пространство* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}} = \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *состоит из всех функций* $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, *для которых выполняется условие*

$$\omega_{\mathbf{k(e)}}(\ f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}} \cdot \prod_{j \in \mathbf{e}} t_j^{-s_j} \in L^*_{\mathbf{q(e)}} \qquad \forall\ \ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star.$$

Норма функции $f \in \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}$ *определяется равенством*

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}\ \| = \|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ +\ \sum_{\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star} \|\ \omega_{\mathbf{k(e)}}(\ f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}} \cdot \prod_{j \in \mathbf{e}} t_j^{-s_j}\ |\ L^*_{\mathbf{q(e)}}\ \| \tag{1}$$

Если $\mathbf{e}^\star = \mathbf{e}_n$, *то* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}} =: \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$.

З а м е ч а н и е 1. *Пространства* $S^{\mathbf{r}}_p H(\mathbb{R}^n)$, *упоминавшиеся выше, совпадают с* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}$ *при* $d_1 = \ldots = d_n = 1,\ \mathbf{s} = \mathbf{r},\ p_1 = \ldots = p_n = p,\ q_j = \infty,\ j \in \mathbf{e}^\star$. *Пространства* $S^{\mathbf{r}}_{p\theta} B(\mathbb{R}^n)$, *которые совпадают с* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}$ *при* $d_1 = \ldots = d_n = 1,\ \mathbf{s} = \mathbf{r},\ p_1 = \ldots = p_n = p,\ q_j = \theta \in [1,\ \infty),\ j \in \mathbf{e}^\star$, *исследованы Т.И.Амановым в работе [12]. Пространства* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}\theta} B(\mathbb{R}^n)$ *с*

$\mathbf{p} \in [1,\ \infty]^n$ *изучались Я.С.Бугровым (см., например, [13], [14]), А.П.Унинским [15], [16] и другими (см. подробности и ссылки в [4]). Во всех этих работах применялся метод представления целыми функциями экспоненциального типа, разработанный в [1]. Кроме того, О.В.Бесов, А.Д.Джабраилов (см., например, [17], [18], [19],) рассматривали варианты и обобщения пространств* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}\boldsymbol{\theta}}B(\mathbb{R}^n)$ *с векторными* $\mathbf{p},\ \boldsymbol{\theta} \in [1,\ \infty]^n$; *они использовали метод интегральных представлений (подробнее см. [3]).*

3. Теорема представления для $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Для $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, где $\mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}$, $j \in \mathbf{e}_n$, $\varnothing \neq \mathbf{e} = \{1 \leq j_1 < \cdots < j_{|\mathbf{e}|} \leq n\}$ и $\mathbf{q}(\mathbf{e}) = (q_j,\ j \in \mathbf{e}) \in [1,\ \infty]^{|\mathbf{e}|}$ через $l_{\mathbf{q(e)}}(\ L_{\mathbf{p}})$ (соответственно $L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q(e)}})$) обозначим пространство всех последовательностей $\{\ g_{\mathbf{m(e)}}\ (\mathbf{x})\ \} = \{\ g_{\mathbf{m(e)}}\ (\mathbf{x})\ \}_{\mathbf{m(e)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}}$ измеримых функций $g_{\mathbf{m(e)}}\ :\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}} \to \mathbb{C}$ с конечными нормами

$$\|\ \{\ g_{\mathbf{m(e)}}\ (\cdot)\ \}\ |\ l_{\mathbf{q(e)}}(\ L_{\mathbf{p}})\ \| = \|\ \{\ \|\ g_{\mathbf{m(e)}}\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ \}\ |\ l_{\mathbf{q(e)}}\ \|$$

(соответственно,

$$\|\ \{\ g_{\mathbf{m(e)}}\ (\cdot)\ \}\ |\ L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q(e)}})\ \| = \|\ \|\ \{\ g_{\mathbf{m(e)}}\ (\cdot)\ \}\ |\ l_{\mathbf{q(e)}}\ \|\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\ );$$

$l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}_n)}(\ L_{\mathbf{p}}) =: l_{\mathbf{q}}(\ L_{\mathbf{p}})$, $L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}(\mathbf{e}_n)}) =: L_{\mathbf{p}}(\ l_{\mathbf{q}})$.

О п р е д е л е н и е 2. *Пространство* $\mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}, \mathbf{a}(\mathbf{e}))$ $(\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),\ \ \mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j},\ \ j \in \mathbf{e}_n,\ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n,\ \mathbf{a}(\mathbf{e}) \in (0,\ \infty)^{|\mathbf{e}|})$ *состоит из всех функций* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, *которые являются целыми функциями экспоненциального типа* a_j *по "переменной"* $\mathbf{x}_j$ *(более точно, по каждой из переменных* x_{jk}, $k = 1, \ldots, d_j$, *входящих в "порцию"* $\mathbf{x}_j$ *),* $j \in \mathbf{e}$ *при почти всех* $\mathbf{x}(\overline{\mathbf{e}}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\overline{\mathbf{e}})}$, $\mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}(\mathbf{e}_n)) =: \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

В теории пространств смешанной гладкости принципиальную роль играют так называемые теоремы представления посредством целых функций экспоненциального типа (в периодическом случае — тригонометрических полиномов) или других специальных функций (см., например, [1], [4], [6]). Мы устанавливаем здесь теорему представления для пространств $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{s} \in [0,\ \infty)^n$, $\mathbf{e}^\star \neq \varnothing$, $\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star) \in [1,\ \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}$ *тогда и только тогда, когда она допускает сходящееся в* $L_{\mathbf{p}}$ *представление*

$$f = \sum_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}} Q_{\mathbf{m(e^\star)}}, \qquad Q_{\mathbf{m(e^\star)}} \in \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}^\star, 2^{\mathbf{m(e^\star)}}) \ \ (\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}),$$

для которого выполняется условие $\{\ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m(e^\star)})}\ Q_{\mathbf{m(e^\star)}}(\cdot)\ \}_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}} \in l_{\mathbf{q(e^\star)}}(\ L_{\mathbf{p}}\ )$. *При этом величина*

$$\inf \|\ \{\ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m(e^\star)})}\ Q_{\mathbf{m(e^\star)}}(\cdot)\ \}_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}}\ |\ l_{\mathbf{q(e^\star)}}(\ L_{\mathbf{p}}\ )\ \|, \tag{2}$$

где нижняя грань берется по всевозможным таким представлениям, эквивалентна норме $\|\ f\ |\ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}\ \|$. *Более того, найдется последовательность* $\{\ \mathcal{U}_{\mathbf{m(e^\star)}}\ \}_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}}$ *линейных операторов* $\mathcal{U}_{\mathbf{m(e^\star)}}\ :\ L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}}\ ) \to \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{e}^\star, 2^{\mathbf{m(e^\star)}})$, *непрерывных из* $L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *в* $L_{\mathbf{p}}(\ \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, $(\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star) \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|})$ *такая, что*

$$f = \sum_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}} \mathcal{U}_{\mathbf{m(e^\star)}} f,$$

причем

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq(e^\star)}}\ \| \ \asymp\ \|\ \{\ 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{m(e^\star)})}\ \mathcal{U}_{\mathbf{m(e^\star)}} f\ \}_{\mathbf{m(e^\star)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathbf{e^\star}|}}\ |\ l_{\mathbf{q(e^\star)}}(\ L_{\mathbf{p}}\ )\ \|. \tag{3}$$

Доказательство . следует классической схеме работы [1] (см. также [12], [4]), поэтому ограничимся лишь указанием основных отличительных моментов. Здесь и в дальнейшем важную роль играют неравенство Гельдера и обобщенное неравенство Минковского для векторных норм, а также основные свойства пространств $L_{\mathbf{p}}$ (см., например, [3, гл.1]).

В доказательстве *необходимости* используется следующее

Предложение 1. *В условиях теоремы справедливы соотношения*

$$\| \,\omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\, f\, ;\, \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}} \cdot \prod_{j\in\mathbf{e}} t_j^{-s_j} \mid L^*_{\mathbf{q}(\mathbf{e})} \,\| \approx \| \,\{\, 2^{(\mathbf{m}(\mathbf{e}),\mathbf{s}(\mathbf{e}))} \cdot \omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\, f\, ;\, 2^{-\mathbf{m}(\mathbf{e})})_{\mathbf{p}} \,\}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})\in\mathbb{Z}^{|\mathbf{e}|}} \mid l_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}(\,\mathbb{Z}^{|\mathbf{e}|}) \,\|$$

$$(\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star),$$

$$\| \, f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)} \,\| \approx \| \, f \mid L_{\mathbf{p}} \,\| + \sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}^\star} \| \,\{\, 2^{(\mathbf{m}(\mathbf{e}),\mathbf{s}(\mathbf{e}))} \cdot \omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\, f\, ;\, 2^{-\mathbf{m}(\mathbf{e})})_{\mathbf{p}} \,\}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}} \mid l_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}(\,\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}|}) \,\|.$$

Кроме того, отправным пунктом при построении операторов $\mathcal{U}_{\mathbf{m}(\mathbf{e}^\star)}$ являются операторы $\mathcal{W}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}$, $\varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}^\star$, определяемые следующим образом.

Пусть $g_j \,:\, \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{R}$ — целая функция экспоненциального типа 1 по всем переменным такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d_j}} g_j(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j \;=\; 1, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d_j}} |\, \mathbf{x}_j^{\boldsymbol{\alpha}_j} g_j(\mathbf{x}_j) \,| d\mathbf{x}_j \;<\; \infty, \qquad \boldsymbol{\alpha}_j \in \mathbb{N}_0^{d_j} \;:\; |\boldsymbol{\alpha}_j| \leq s_j + 2 \quad (\, j \in \mathbf{e}_n).$$

Например, мы можем выбрать

$$g_j(\mathbf{x}_j) = c_{\mathbf{v}_j} \prod_{k=1}^{d_j} \left(\frac{\sin(x_{jk}/v_j)}{x_{jk}} \right)^{v_j},$$

где $\mathbf{v}_j = (v_j, \ldots, v_j) \in \mathbb{N}^{d_j}$ с четными $v_j > s_j + 4$, а постоянная $c_{\mathbf{v}_j}$ выбрана так, чтобы выполнялось соотношение (4).

Положим

$$\Lambda_{\mu(\mathbf{e})} f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}} \prod_{j\in\mathbf{e}} g(\mathbf{z}_j) \cdot \Delta^{\mathbf{k}(\mathbf{e})} \left(\frac{\mathbf{z}(\mathbf{e})}{\mu(\mathbf{e})} \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{z}(\mathbf{e}) \qquad (\, \mu(\mathbf{e}) \in (0,\, \infty)^{|\mathbf{e}|}).$$

Тогда оператор $\mathcal{W}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}$ задается соотношением

$$\mathcal{W}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})} f(\mathbf{x}) = \sum_{i_{j_1}=0}^{1} \cdots \sum_{i_{j_{|\mathbf{e}|}}=0}^{1} (-1)^{|\mathbf{e}| + i_{j_1} + \cdots + i_{j_{|\mathbf{e}|}}} \; \Lambda_{2^{\mathbf{m}(\mathbf{e})+\mathbf{i}(\mathbf{e})}} f(\mathbf{x})$$

(здесь $\mathbf{i}(\mathbf{e}) = (i_{j_1}, \ldots, i_{j_{|\mathbf{e}|}})$, $\mathbf{e} = (j_1, \ldots, j_{|\mathbf{e}|})$). Заметим, что операторы $\Lambda_{\mu(\mathbf{e})}$, $\mathcal{W}_{\mathbf{m}(\mathbf{e})}$ являются аналогами для нашего случая, соответственно, операторов σ_μ, $\tau_{\mathbf{k}}$ работы [1] (см. там формулы (17), (25)).

Доказательство *достаточности* опирается на следующее

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in [1,\, \infty]^d$, $j \in \mathbf{e}_d$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$, *являющейся целой экспоненциального типа* $a_j > 0$ *по переменной* x_j *при почти всех* $\mathbf{x}(\mathbf{e}_d \setminus \{\, j \,\}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, *справедливо неравенство Бернштейна*

$$\| \,\partial_{x_j} f \mid L_{\mathbf{p}} \,\| \leq a_j \| \, f \mid L_{\mathbf{p}} \,\|$$

и соответствующее неравенство для приращения

$$\| \, f(\cdot + h e_j) - f(\cdot) \mid L_{\mathbf{p}} \,\| \leq a_j |h| \| \, f \mid L_{\mathbf{p}} \,\|$$

(здесь e_j *—* j*-й элемент стандартного базиса* $\mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о . см. в [20].

З а м е ч а н и е 2. *Для пространств* $S^{\mathbf{r}}_pH(\mathbb{R}^n)$ *теорема представления доказана в работе [1]. На пространства* $S^{\mathbf{r}}_{p\theta}B(\mathbb{R}^n)$, $\theta\in[1,\ \infty)$ *она распространена в [12], а на* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}H(\mathbb{R}^n)$ *с* $\mathbf{p}\in[1,\ \infty]^n$ *— в [13]. Для* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}\theta}B(\mathbb{R}^n)$ *она приведена в [4, гл.8].*

4. Эквивалентные нормировки для $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Известно, что в различных приложениях оказываются полезными те или иные эквивалентные нормы функциональных пространств. Здесь приведем некоторые эквивалентные нормировки для $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Прежде всего отметим, что (как следует из теоремы 1) нормы (1), отвечающие разным $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star)>\mathbf{s}(\mathbf{e}^\star)$ (см. определение 1), эквивалентны (и фактически пространство $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ не зависит от такого $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star)$), а также, что величина (2) и выражение справа в (3) являются нормами для $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, эквивалентными исходной. В следующих теоремах приводятся другие эквивалентные нормировки для этих пространств.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathbf{s}\in[0,\ \infty)^n$, $\mathbf{e}^\star\neq\varnothing$, $\mathbf{q}(\mathbf{e}^\star)\in[1,\ \infty]^{|\mathbf{e}^\star|}$, $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n$, $\mathbf{p}=(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j\in[1,\ \infty]^{d_j}$ $(j\in\mathbf{e}_n)$. *Пусть далее* $\mathbf{r}(\mathbf{e}^\star)\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}$ *и* $\mathbf{k}(\mathbf{e}^\star)\in\mathbb{N}^{|\mathbf{e}^\star|}$ *такие, что* $r_j<s_j<r_j+k_j$, $j\in\mathbf{e}^\star$. *Тогда функция* $f\in L_{\mathbf{p}}$ *принадлежит пространству* $\mathbf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *тогда и только тогда, когда для всех* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^\star)\in\mathbb{N}_0^{|\mathbf{e}^\star|}$ *таких, что* $|\boldsymbol{\alpha}_j|=r_j, j\in\mathbf{e}^\star$ *и* $\mathbf{e}\subset\mathbf{e}^\star$ *существуют ее обобщенные производные* $\partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})}f\in L_{\mathbf{p}}$ *и выполнено одно из следующих двух условий*

(i) $\|\ \Delta^{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\mathbf{h}(\mathbf{e}))\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})}f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\cdot\prod\limits_{j\in\mathbf{e}}\|\mathbf{h}_j\|^{r_j-s_j}\in L^{**}_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}$,

(ii) $\omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})}f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}}\cdot\prod\limits_{j\in\mathbf{e}}t_j^{r_j-s_j}\in L^{*}_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}$.

При этом функционалы

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}\ \|_*=\|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|+$$

$$+\sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}^\star}\ \sum_{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}):|\boldsymbol{\alpha}_j|=r_j,j\in\mathbf{e}^\star}\|\ \|\ \Delta^{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\mathbf{h}(\mathbf{e}))\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})}f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\cdot\prod_{j\in\mathbf{e}}\|\mathbf{h}_j\|^{r_j-s_j}\ |\ L^{**}_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}\ \|$$

и

$$\|\ f\ |\ \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}\ \|_{**}=\|\ f\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|+\sum_{\varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}^\star}\ \sum_{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}):|\boldsymbol{\alpha}_j|=r_j,j\in\mathbf{e}^\star}\|\ \omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})}(\ \partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e})}f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}}\cdot\prod_{j\in\mathbf{e}}t_j^{r_j-s_j}\ |\ L^{*}_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}\ \|$$

являются нормами для $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}$, *эквивалентными исходной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . этой теоремы проводится по следующей схеме. *Необходимость* легко устанавливается на основе теоремы 1 с использованием предложения 2. При доказательстве *достаточности* из справедливости для функции $f\in L_{\mathbf{p}}$ любого из условий (i) и (ii) нетрудно заключить, что для всех $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^\star)\in\mathbb{N}_0^{\mathbf{d}(\mathbf{e}^\star)}$: $\boldsymbol{\alpha}_j\le r_j$, $j\in\mathbf{e}^\star$ существуют (обобщенные) производные $\partial^{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{e}^\star)}f\in L_{\mathbf{p}}$. Но тогда повторное применение соотношения

$$\|\ g(\cdot+he_j)-g(\cdot)\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|\le|h|\|\ \partial_jg\ |\ L_{\mathbf{p}}\ \|$$

легко приводит к включениям

$$\omega_{\mathbf{k}(\mathbf{e})+\mathbf{r}(\mathbf{e})}(\ f\ ;\ \mathbf{t}(\mathbf{e}))_{\mathbf{p}}\cdot\prod_{j\in\mathbf{e}}t_j^{-s_j}\in L^{*}_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}\qquad\forall\ \ \varnothing\neq\mathbf{e}\subset\mathbf{e}^\star$$

с выполнением требуемых оценок для норм.

Теперь введем (d - мерные) ядра Дирихле $\mathcal{D}_R(\mathbf{x})$ и Валле-Пуссена $\mathcal{V}_R(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, R > 0$):

$$\mathcal{D}_R(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin Rx_j}{x_j},$$

$$\mathcal{V}_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{R^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{\cos Rx_j - \cos 2Rx_j}{x_j^2}$$

(о свойствах ядер Дирихле и Валле-Пуссена см., например, [2, гл.8]) и с помощью них определим ядра $\mathcal{F}_l(\mathbf{x})$ и $\mathcal{G}_l(\mathbf{x})$ $(l \in \mathbb{N}_0)$ соответственно:

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_1(\mathbf{x}), \quad \mathcal{F}_l(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_{2^l}(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{2^{l-1}}(\mathbf{x}) \quad (l \in \mathbb{N}),$$

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_1(\mathbf{x}), \quad \mathcal{G}_l(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_{2^l}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}_{2^{l-1}}(\mathbf{x}) \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Далее определим "кратные"($\mathbf{d}$-мерные) ядра $\mathcal{F}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{G}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n$) следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_{m_j}(\mathbf{x}_j),$$

$$\mathcal{G}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{G}_{m_j}(\mathbf{x}_j).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0, \infty)^n$, $\mathbf{q} \in [1, \infty]^n$, $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$.

a) При $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in (1, \infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$ *функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})} \mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f \}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n} \in l_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}})$, *причем*

$$\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| \{ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})} \mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f \}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n} \mid l_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}}) \|.$$

b) При $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in [1, \infty]^{d_j}$ $(j = 1, \dots, n)$ *функция* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\{ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})} \mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f \}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n} \in l_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}})$, *причем*

$$\| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \| \approx \| \{ 2^{(\mathbf{s},\mathbf{m})} \mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f \}_{\mathbf{m} (\in \mathbb{N}_0^n} \mid l_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}}) \|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность* вытекает из теоремы 1, если принять во внимание, что $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f \in \mathcal{E}(\mathbf{p}, 2^{\mathbf{m}})$, $\mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f \in \mathcal{E}(\mathbf{p}, 2^{\mathbf{m}+\mathbf{1}})$. Отметим, что п. a) теоремы 3 для пространств $S^{\mathbf{r}}_{p\theta}B(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in [1, \infty]$ доказан в работе [6]. Доказательство (*необходимости* в случае a)) в общем случае вполне аналогично, надо лишь использовать теорему о $(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ – мультипликаторах из работы П.И.Лизоркина [21] вместо теоремы Рисса и следующее предложе ние, которое является частным случаем обобщенной теоремы Литтлвуда-Пэли для векторной нормы, доказанной О.В.Бесовым [22].

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$, $\mathbf{p}_j \in (1, \infty)^{d_j}$ $(j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *выполняется соотношение*

$$\| f \mid L_{\mathbf{p}} \| \approx \| \left(\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n} | \mathcal{F}_{\mathbf{m}} * f |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid L_{\mathbf{p}} \|.$$

В случае b), кроме того, используются некоторые из основных свойств ядер Валле-Пуссена, из которых, в частности, следует, что

$$\| \mathcal{G}_{\mathbf{m}} * f \mid L_{\mathbf{p}} \| \ll \| f \mid L_{\mathbf{p}} \|, \qquad f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}).$$

5. Теоремы вложения. Здесь сформулируем следующие теоремы вложения.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{s},\ \mathbf{s}_* \in [0,\ \infty)^n,\ \mathbf{e}^\star \neq \varnothing,\ \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_*,\ \mathbf{q} \in [1,\ \infty]^n,\ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^n,\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),\ \mathbf{p}_j \in [1,\ \infty]^{d_j}\ (j \in \mathbf{e}_n)$. *Тогда справедливо вложение*

$$\mathsf{MB}^{\mathbf{s}_*}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}[\mathbf{s}_*])} \subset \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}(\mathbf{e}^\star)}.$$

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\ \infty)^n,\ \mathbf{q} \in [1,\ \infty]^n,\ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^n,\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),\ \mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \ldots, \mathbf{p}_n^*),\ \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j^* \in [1,\ \infty]^{d_j},\ \mathbf{p}_j \leq \mathbf{p}_j^* (j \in \mathbf{e}_n)$, *причем* $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)\ :\ s_j^* = s_j - \sum_{k=1}^{d_j} (\frac{1}{p_{jk}} - \frac{1}{p_{jk}^*}) > 0,\ j \in \mathbf{e}_n$. *Тогда справедливо вложение*

$$\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}} \subset \mathsf{MB}^{\mathbf{s}^*}_{\mathbf{p}^*\mathbf{q}}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{s} \in (0,\ \infty)^n,\ \mathbf{q} \in [1,\ \infty]^n,\ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^n,\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),\ p_{jk} = p_j \in [1,\ \infty],\ k \in \mathbf{e}_{d_j} (j \in \mathbf{e}_n)$. *Выберем (возможно пустое) множество* $\mathbf{e} \subsetneq \mathbf{e}_n$, *а также (возможно пустое)* $\widehat{\mathbf{e}} \subset \overline{\mathbf{e}}$ *такие, что* $\mathbf{e} \cup \widehat{\mathbf{e}} \neq \varnothing$. *Пусть кроме того,* $u_j \in \mathbb{N}\ :\ 1 \leq u_j < d_j,\ j \in \widehat{\mathbf{e}}$. *Положим* $\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}}) = (u_j,\ j \in \widehat{\mathbf{e}}),\ \mathbf{s}^\circ = (s_j^\circ,\ j \in \mathbf{e} \cup \widehat{\mathbf{e}})$, *где* $s_j^\circ = s_j$ *при* $j \in \mathbf{e}$ *и* $s_j^\circ = s_j - \frac{d_j - u_j}{p_j}$ *при* $j \in \widehat{\mathbf{e}}$; $\mathbf{p}^\circ = (\mathbf{p}_j^\circ,\ j \in \mathbf{e} \cup \widehat{\mathbf{e}})$, *где* $\mathbf{p}_j^\circ = \mathbf{p}_j$ *при* $j \in \mathbf{e}$ *и* $\mathbf{p}_j^\circ = (p_j, \ldots, p_j)$ *есть* u_j*- мерный вектор при* $j \in \widehat{\mathbf{e}}$. *Тогда справедливо вложение*

$$\mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \subset \mathsf{MB}^{\mathbf{s}^\circ}_{\mathbf{p}^\circ\mathbf{q}(\mathbf{e}\cup\widehat{\mathbf{e}})}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})}),$$

т.е. для любой функции $f \in \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ *существует ее след* $f|_{\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})}}$ *на подпространство* $\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})}$, *который принадлежит пространству* $\mathsf{MB}^{\mathbf{s}^\circ}_{\mathbf{p}^\circ\mathbf{q}(\mathbf{e}\cup\widehat{\mathbf{e}})}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})})$, *причем верно неравенство*

$$\| f|_{\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})}} \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}^\circ}_{\mathbf{p}^\circ\mathbf{q}(\mathbf{e}\cup\widehat{\mathbf{e}})}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{u}(\widehat{\mathbf{e}})}) \| \leq c \| f \mid \mathsf{MB}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \|,$$

где постоянная c *не зависит от* f.

Теорема 4 очевидна, а доказательство теорем 5 и 6 опирается на представление из теоремы 1 и следующее предложение, доказанное А.П.Унинским [16] и дающее обобщение на случай векторных норм известных неравенств С.М.Никольского разных метрик и разных измерений.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d),\ \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in [1,\ \infty]^d,\ \mathbf{p} \leq \mathbf{q},\ \varnothing \neq \mathbf{e} \subset \mathbf{e}_d$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$, *являющейся целой экспоненциального типа* $a_j > 0$ *по переменной* $x_j,\ j \in \mathbf{e}_d$, *справедливо неравенство*

$$\| f(\cdot, \mathbf{x}(\overline{\mathbf{e}})) \mid L_{\mathbf{q}(\mathbf{e})}(\mathbb{R}^{|\mathbf{e}|}) \| \ll \prod_{j \in \overline{\mathbf{e}}} a_j^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j \in \mathbf{e}} a_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}} \| f \mid L_{\mathbf{p}} \|.$$

Замечание 3. *Для пространств* $S^{\mathbf{r}}_p H(\mathbb{R}^n)$ *эти теоремы получены в работе [1], для* $S^{\mathbf{r}}_{p\theta} B(\mathbb{R}^n),\ \theta \in [1,\ \infty)$, *— в [12], а для* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} H(\mathbb{R}^n)$ *с* $\mathbf{p} \in [1,\ \infty]^n$ *— в [15]. Для* $S^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}\theta} B(\mathbb{R}^n)$ *они приведены в [4, гл.8].*

Определение следа функции см. в [2, гл.6, п.6.4]

З а м е ч а н и е 4. *Наконец, отметим, что все результаты настоящей работы справедливы и в периодическом случае (в теореме представления следует заменить целые функции экспоненциального типа на тригонометрические полиномы соответствующих порядков).*

Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** // Сиб. матем. ж. 1963. Т.6. С.1342-1364.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969; 2-е изд., 1977.
3. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975; 2-е изд., 1996.
4. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.
5. **Schmeisser H.-J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.
6. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** // Тр. МИАН. 1990. Т.187. С.143—161.
7. **Fefferman R., Stein E.M.** // Adv. Math. 1982. V.45. P.117—143.
8. **Chang S.-Y.A., Fefferman R.** // Bull. Amer Math. Soc. 1985. 12. P.1—43.
9. **Fefferman R.** // Ann. Math. 1987. 126. P.109—130.
10. **Marschall J.** // Forum Math. 1991. 3. P.479—511.
11. **Stein E.M.** Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Univ. Press, 1993.
12. **Аманов Т.И.** // Труды МИАН. 1965. Т.77. С.5—34.
13. **Бугров Я.С.** // Труды МИАН. 1965. Т.77. С.45—64.
14. **Бугров Я.С.** // Труды МИАН. 1989. Т.187. С.22—30.
15. **Унинский А.П.** // Сиб. матем. ж. 1969. Т.10, №1 С.158—171.
16. **Унинский А.П.** // Тр. Всесоюзн. симп. по теор. влож. М., 1970. С.212—218.
17. **Бесов О.В., Джабраилов А.Д.** // Труды МИАН. 1969. Т.105. С.15—20.
18. **Бесов О.В.** // Труды МИАН. 1969. Т.105. С.21—29.
19. **Джабраилов А.Д.** // Труды МИАН. 1972. Т.117. С.113—158.
20. **Кудрявцев Н.Л.** // Труды МИАН. 1984. Т.170. С.191—202.
21. **Лизоркин П.И.** // Изв. АН СССР, сер. матем. 1970. Т.34. С.218—247.
22. **Бесов О.В.** // Труды МИАН. 1984. Т.170. С.31—36.

Поступила в редакцию 15.07.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 42 — 54*

УДК 517.9

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. 1

К.Б. Бопаев

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, ул.Пушкина, 125,

Цель настоящей работы состоит в разработке метода непрерывной по параметру нормализации систем нелинейных разностно-динамических систем [1].

Эта задача решается в классе обратимых (в окрестности нуля) преобразований, представимых формальными рядами с непрерывными и ограниченными по параметру и по дискретным переменным коэффициентами.

Для неавтономных систем с параметром с жордановой матрицей линейного приближения построена непрерывная нормальная форма, состоящая только из нерегулярных членов. Описывается процесс нормализации для почти периодически [23] и автономных систем к резонансной нормальной форме, непрерывно зависящей от параметра.

1. Формальная эквивалентоость РДС. О преобразовании РДС Пусть РДС имеет вид:

$$y_{n+1} = A(\mu)y_n + G(n, \varepsilon, \mu; y_n), \qquad n \in Z \tag{1.1}$$

где y_n — q-мерный вектор-столбец, $A(\mu)$ — квадратная матрица порядка q с непрерывными по параметру μ элементами, вектор-функция $G(n, \varepsilon, \mu; y_n)$ непрерывна по μ, аналитична по y_n и ε.

Будем считать $\mu \in D = \{\mu \ / \ |\mu - \mu_0| < \zeta\}, \quad |y_n| \in \{y_n < a\}, \quad \varepsilon < \varepsilon_0$, где $\mu_0, \ \zeta, \ \varepsilon_0, \ a$ — некоторые положительные числа.

Вектор-функция $G(n, \varepsilon, \mu; y_n)$ представима в виде ряда по малому параметру ε:

$$G(n, \varepsilon, \mu; y_n) = G(m, \mu; y_n) + \sum^{\infty} \varepsilon^j G_j(n, \mu; y_n), \tag{1.2}$$

Здесь $G_j(n, \mu; y_n)$ — полиномы некоторой степени l_j относительно y_n, т.е. возможно представление

$$G_j(n, \mu; y_n) = \sum_{p=1}^{l_j} \varepsilon^j G_j(n, \mu) y_n^p, \quad \sup_j l_j < \infty.$$

Keywords: *normal form, nonlinear system, difference-dynamic system*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

В дальнейшем правую часть системы (1.1) будем записывать в виде композиции [4]

$$y_{n+1} = (A(\mu) + G(n, \varepsilon, \mu)) \circ y_n. \tag{1.1$'$}$$

К системе (1.1) применим преобразование

$$y_n = x_n + \Phi_0(n, \mu) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j(n, \mu, x_n) = [1 + \varphi(n, \varepsilon, \mu)] \circ (x_n) = \Phi(n, \varepsilon, \mu, x_n). \tag{1.3}$$

В результате система $(1.1')$ перейдет в систему

$$x_{n+1} = \Phi^{-1}(n+1, \varepsilon, \mu)(A(\mu) + G(n, \varepsilon, \mu))\Phi(n, \varepsilon, \mu) \circ (x_n). \tag{1.4}$$

Особый интерес для нас представляет случай, когда векторное поле, задающее правую часть преобразованного уравнения, можно представить в виде

$$\Phi^{-1}(n+1, \varepsilon, \mu)(A(\mu) + G(n, \varepsilon, \mu))\Phi(n, \varepsilon, \mu) \circ x_n = A(\mu)x_n + \psi(n, \varepsilon, \mu, x_n), \tag{1.5}$$

где Φ и ψ имеют структуру, аналогичную (1.2).

Л е м м а 1. *Если в окрестности нуля $U = \{|x_n| \le \eta\}$, $\quad \forall n$ выполняется неравенство*

$$|\varphi(n, \varepsilon, \mu)| < 1, \tag{1.6}$$

то правая часть преобразованной системы представима в виде (1.5), где

$$\varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^k \circ \{A(\mu)\varphi(n, \varepsilon, \mu) \circ x_n - \phi(n+1, \varepsilon, \mu) \circ A(\mu)x_n +$$

$$+ G(n, \varepsilon, \mu) \circ (1 + \varphi(n, \varepsilon, \mu))x_n\}. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\forall x_n \in U$ выполняется условие (1.6), то в U имеет место разложение

$$\Phi^{-1}(n+1, \varepsilon, \mu) = [1 + \varphi(n+1, \varepsilon, \mu]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^k.$$

Используя это представление, получим следующие соотношения

$$\Phi^{-1}(n+1, \varepsilon, \mu) \circ [A(\mu) + G] \circ \Phi(n, \varepsilon, \mu) \circ x_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^j \circ \{A(\mu)x_n + A\varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n) +$$

$$+ G(n, \varepsilon, \mu, x_n + \varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n))\} = A(\mu)x_n + A\varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n) - \varphi(n+1, \varepsilon, \mu, A(\mu)x_n) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^k \circ G(n, \varepsilon, \mu, x_n + \varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n + \varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n)) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^k \circ$$

$$\circ (A\varphi(n, \varepsilon, \mu, x_n) - \varphi(n+1, \varepsilon, \mu, A(\mu)x_n)) = A(\mu)x_n + \sum_{k=0}^{\infty} (-\varphi(n+1, \varepsilon, \mu))^k \circ$$

$$\circ\{A\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n)-\varphi(n+1,\varepsilon,\mu,A(\mu)x_n)+G(n,\varepsilon,\mu,x_n+\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n))\}.$$

Отсюда следует (1.7). Лемма доказана.

Таким образом, при выполнении условий Леммы 1 рассматриваемое преобразование (1.3) является обратимым и связывает решения РДС (1.1) и (1.5).

Рассмотрим условия, при которых преобразованное уравнение линейно, т.е. в (1.5)

$$\psi(n,\varepsilon,\mu,x_n)\equiv 0. \tag{1.8}$$

Из структуры ψ следует, что тождество (1.8) выполняется тогда и только тогда, когда разрешимо неавтономное нелинейное функциональное уравнение типа Шредера [15]

$$A(\mu)\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n)-\varphi(n+1,\varepsilon,\mu,A(\mu)x_n)+G(n,\varepsilon,\mu,x_n+\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n))=0. \tag{1.9}$$

$\forall x_n \mid x_n\in U$. Как известно [1], разрешимость уравнения (1.9) зависит от структуры матрицы $A(\mu)$.

Положим

$$TG=\sum_{k=0}^{\infty}(-\varphi(n+1,\varepsilon,\mu))^k\times$$

$$\times\{A\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n)-\varphi(n+1,\varepsilon,\mu,A(\mu)x_n+G(n,\varepsilon,\mu,x_n+\varphi(n,\varepsilon,\mu,x_n))\}=\psi(n,\varepsilon,\mu,x_n).$$

Назовем Φ_q преобразованием отображения $y_n(1+\varepsilon^q\varphi_q(n,\mu))\circ x_n$.

Тогда после проведения серии последовательной замены переменных [4] $\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_k$, т.е.

$$y_n=(1+\varepsilon^k\varphi_k)\circ...\circ(1+\varepsilon\varphi_1)\circ(1+\varphi_0)\circ(x_n), \tag{1.10}$$

систему (1.1) можно привести к виду

$$x_{n+1}=A(\mu)x_n+\sum_{\tau=2}^{k-1}\varepsilon^{\tau-1}(T^\tau G)^{l_\tau}(x_n)+(T^kG(n,\mu,\varepsilon,x_n).$$

В дальнейшем исследуем структуру $(T^\tau G)^{l_\tau}(x_n)$ (в зависимости от $A(\mu)$).

2. Приведение функционального уравнения Шредера к системе линейных неоднородных разностных уравнений. Подействуем на уравнение (1.1) серией преобразований $\Phi_0,\Phi_1,...,\Phi_{k-1}$ (см. (1.10)). После каждого такого преобразования мы получим систему с преобразованным коэффициентом при ε соответствующего порядка.

Проводя теперь преобразование

$$y_n=\Phi_k=(1+\varepsilon^k\varphi_{l_k}(n,\mu)\circ(x_n))=x_n+\varepsilon^k\varphi_{l_k}(n,\mu,x_n), \tag{2.1}$$

(где φ_{l_k} — вектор-полином l_k-порядка, подлежащий определению), получим:

$$x_{n+1}=A(\mu)x_n+\sum_{\tau=0}^{k-2}\varepsilon^{\tau+1}(T^\tau G)^{l_{\tau+1}}+\sum_{j=0}^{\infty}\{-\varphi_{l_j}(n,\mu,x_n)\}^j\circ$$

$$\circ\{[A(\mu)\varphi_{l_j}(n,\varepsilon,x_n)-\varphi_{l_j}(n+1,\mu,A(\mu)x_n)+(T^{k-1}G)^{l_k}]\varepsilon^k+$$

$$+T^{k-1}G(n,\varepsilon,\mu,x_n+\varepsilon^k\varphi_{l_k}(n,\mu,x_n))-\varepsilon^k(T^{k-1}G)^{k_k}\}. \tag{2.2}$$

Подберем φ_{l_k} так, чтобы коэффициенты ε^k в правой части (2.9) обращались в нуль. В результате относительно φ_{l_k} получим уравнение

$$A(\mu)\varphi_l(n,\mu,x_n)-\varphi_{l_k}(n+1,\mu,A(\mu)x_n)=-(T^{k-1}G)^{l_k}, \tag{2.3}$$

где $(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))^{l_k}$ — известный вектор-полином l_k-порядка, зависящий от коэффициентов при ε^j, $j=\overline{0,k-1}$ и φ_{l_τ}, $\tau=\overline{1,k-1}$ и который можно записать в виде:

$$(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))^{l_k}=\sum_{j=1}^{l_k}(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))_j^{l_k}, \tag{2.4}$$

где $(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))_j^{l_k}$ — формы j-го порядка. (2.3) является функциональным уравнением типа Шредера [12, 14]. Его решение будем искать в виде полинома

$$\varphi_{l_k}(n,\mu,x_n)=\varphi_{l_k}^{(1)}(n,\mu,x_n)+\varphi_{l_k}^{(2)}(n,\mu,x_n)+...+\varphi_{l_k}^{(l_k)}(n,\mu,x_n). \tag{2.5}$$

Здесь $\varphi_{l_k}^{(j)}(n,\mu,x_n)$ — формы j-го порядка с коэффициентами, зависящими от n и μ.

Лемма 2. *Разрешимость уравнения (2.3) эквивалентна существованию у системы линейных неоднородных уравнений*

$$A^p\varphi_{k,p}^{(|p|=j)}(n+1,\mu)-A^p\varphi_{k,p}^{(|p|=j)}(n+1,\mu)=g_{k,p}^{(|p|=j)}(n,\mu) \tag{2.6}$$

где $\varphi_{k,p}^{(|p|=j)}(n,\mu)$ *и* $g_{k,p}^{(|p|=j)}(n,\mu)$ *— вектора размерности* $\gamma=\frac{q(q+1)(q+2)...(q+j-1)}{j!}$ *непрерывных по* μ *ограниченных решений в* $Z\times D$.

Доказательство. Учитывая (2.4) и (2.5), для определения $\varphi_{j_k}^{(j)}$ из (2.3) получим:

$$\varphi_{l_k}^{(j)}(n+1,\mu,Ax_n)-A(\mu)\varphi_{l_k}^{(j)}(n,\mu,x_n)=(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))_j^{l_k} \tag{2.7}$$

Поскольку

$$(T^{k-1}G_k(n,\mu,x_n))_j^{l_k}=\sum_{p=j}g_{k,p}(n,\mu)x_n^p, \tag{2.8}$$

где коэффициенты $g_{k,p}(n,\mu)$ — непрерывно ограниченные функции в $Z\times D$, то $\varphi_{l_k}^{(j)}$ ищем также в виде:

$$\varphi_{l_k}^{(j)}=\sum_{p=j}\varphi_{k,p}(n,\mu)x_n^p. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9), (2.8) в (2.7) и приравнивая при каждом $p=j$ коэффициенты при x_n^p слева и справа, получим систему (2.6).

3. Решение регулярных и нерегулярных неоднородных линейных уравнений с параметром. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(n+1,\mu)=a(\mu)\varphi(n,\mu)+G(n,\mu), \tag{3.1}$$

где $G(n,\mu)\in C(z)$ — известная функция, $a(\mu)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D.

Исследуем вопрос о существовании у решения класса $C(z)$ уравнения (3.1).

Определение 1. *Уравнение (3.1) назовем регулярным в* D*, если оно имеет единственное решение класса* $C(z)$ *при любой неоднородности* $G(n,\mu)\in C(Z)$.

Необходимое и достаточное условие регулярности уравнения (3.1) при фиксированном μ ($\mu=0$) и при различных типах действительных неоднородностей $G(n,0)$ изложены в [9].

Ниже докажем, что если $G(n,\mu)\in C(Z)$, то известное условие регулярности [9, 10], выполняющееся при каждом фиксированном $\mu\in D$, является необходимым и достаточным условием регулярности и при непрерывном изменении $\mu\in D$.

Лемма 3. *Для регулярности уравнения (3.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \mu \in D \qquad a(\mu) \neq 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Необходимость условия (3.2) очевидна, поскольку регулярность уравнения (3.1) в D предполагает его регулярность при каждом $\mu \in D$, что и гарантируется известным условием в (3.2).

Докажем достаточность. Пусть (3.2) выполняется. В силу непрерывности из (3.2) следует, что $a(\mu)$ строго отделена в D от единицы, т.е.

$$\exists \gamma > 0, \qquad \forall \mu \in D \quad \begin{cases} (a(\mu) \le 1 - \gamma < 1) & (3.3) \\ (a(\mu) \ge 1 + \gamma > 1) & (3.4) \end{cases}$$

Как показано в [6], уравнение (3.1) при любом фиксированном $\mu \in D$ имеет единственное ограниченное в $Z \times D$ решение вида:

$$\varphi_1(n,\mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} G(n-k-1,\mu)G(k,\mu). \tag{3.5}$$

Непрерывность $\varphi_1(n,\mu)$ следует из равномерной сходимости ряда (3.5), которая обеспечивается неравенствами (3.3), (3.4). Лемма доказана.

Если уравнение (3.1) — нерегулярное, то возникает задача: получить условия, при которых это уравнение имело по крайней мере одно решение класса $C(z)$.

Положим $\varphi(\mu) = \arg a(\mu)$.

Разобьем область D на подмножества $D = D_0 \cup D_+ \cup D_-$, где

$$D_0 = \{\mu \mid a(\mu) \mid = 1\}, \quad D_+ = \{\mu \mid a(\mu) \mid > 1\}, \quad D_- = \{\mu \mid a(\mu) \mid < 1\}.$$

Введем функции

$$f_\pm(n,\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(k \ln a(\mu) + i\varphi(\mu)k)G(k,\mu), \qquad \mu \in D_\pm, \tag{3.6}$$

$$f(n,\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(i\varphi(\mu)k)G(k,\mu), \qquad \mu \in D_0 \tag{3.7}$$

и среднее значение (существование которого обсуждается ниже)

$$M_\pm(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_\pm(n,\mu). \tag{3.8}$$

Лемма 4. *Пусть функция $G(n,\mu) \in C(Z)$ такова, что:*
1. $f(n,\mu)$ ограничена и непрерывна в $Z \times D$,
2. $f(n,\mu)$ равномерна по μ и для любого l существует среднее значение

$$M(\mu) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=l-N}^{l+N} f(k,\mu). \tag{3.9}$$

Тогда существует единственное решение класса $C(Z)$ уравнения (3.1)

$$\varphi(n,\mu) = e^{(\ln a(\mu) + i\varphi(\mu)(n-1)}(\varepsilon(\mu) + \sum_{k=0}^{n+1} e^{-k(\ln ai\varphi)} G(n,\mu)), \tag{3.10}$$

где $\quad \varepsilon(\mu) = \pm M_\pm(\mu)$ *при* $\mu \in D_\pm$, $\varepsilon(\mu) = -M(\mu)$ *при* $\mu \in D_0$.

Доказательство. Как известно, [6, 7] общее решение уравнения (3.1) имеет вид (3.10), где $\varepsilon(\mu)$ — произвольная постоянная. Из условия 1 леммы следует, что если $\mu \in D_0$, то (3.10) будет решением класса $C(Z)$ при любом выборе $\varepsilon(\mu)$ в классе непрерывных в D_0 функций. Если же $\mu \in D_\pm$, то при каждом фиксированном значении μ уравнение (3.1) при любых $G(n,\mu) \in C$ будет иметь ограниченное в $C(Z)$ решение, которое определяется формулой (3.10) при следующем выборе $\varepsilon(\mu)$ на множествах $D_\pm$

$$\varepsilon_+(\mu) = -\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-k \ln a(\mu) + i\varphi)k \cdot G(k,\mu), \quad \mu \in D_+, \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_-(\mu) = \sum_{-\infty}^{k=0} \exp(k \ln a(\mu) + i\varphi)k \cdot G(k,\mu), \quad \mu \in D_-. \tag{3.12}$$

Функции $\varepsilon_\pm(\mu)$ непрерывны по μ в соответствующих областях D.

Варьируя значения $\varepsilon(\mu)$ в D_0, можно сконструировать различные ограниченные в Z решения уравнения (3.1). Убедимся, что среди подобных решений существует единственное решение, непрерывное в D.

Разрывность решений по μ связана с поведением функций $\varepsilon(\mu)$ при приближении μ к тем участкам границы множеств $D_\pm$, которые принадлежат D_0. Обозначим эти участки $d_\pm$, а их границы, примыкающие к D_0, через $\Gamma_\pm$. Не исключено, что $\Gamma_+ \cap \Gamma_- \neq \phi$ и, более того, $\Gamma_+ = \Gamma_-$ $-$. Запись $\mu \in d_+(d_-)$ (даже если $\mu \in \Gamma_+ \cap \Gamma_-$) предполагает, что при выполнении предельного перехода $\mu \to \mu_0$ рассматриваются лишь значения $\mu \in D_+(D_-)$. Ряды (3.11), (3.12), сходящиеся при $\mu \in D_\pm$, в общем случае расходятся при $\mu \in \Gamma_\pm$.

Далее мы будем опираться на метод суммирования Чезаро [11], в соответствии с которым ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

присваивается значение

$$M(\Phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k),$$

где

$$\Phi(k) = \sum_{\tau=0}^{k-1} f(\tau).$$

Если исходный ряд сходится, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k)$$

(регулярность метода Чезаро).

Используя указанный метод, исходя из сходимости рядов (3.11), (3.12), можно показать, что функции $f_\pm(n,\mu)$ в $D_\pm$ имеют непрерывные по μ средние значения

$$M_\pm(\mu) = \mp\varepsilon(\mu). \tag{3.13}$$

Непрерывность следует из сходимости рядов (3.11), (3.12).

Выясним поведение функции $M_+(\mu)$ при приближении μ к d_+. Суммируя функцию $\exp[-$ $-i\varphi(\mu)k]G(k,\mu)$ на $Z_+ = \{0,1,2...\}$, получим равномерность по μ (в силу условия 2 Леммы)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k,\mu) = M(\mu). \tag{3.14}$$

Фиксируя теперь точку $\mu \in \Gamma_+$, будем иметь

$$\lim_{\mu\to\mu_0} M_+(\mu) = \lim_{\mu\to\mu_0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_+(k,\mu) = \lim_{N\to\infty}\lim_{\mu\to\mu_0}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_+(k,\mu) = M(\mu_0). \tag{3.15}$$

При вычислении предела использовалась непрерывность $f_+(n,\mu)$ и равномерность по μ предела (3.14), позволившая изменить порядок предельных переходов.

Рассмотрим далее функцию $M_-(\mu)$ на d_-. Запишем (3.12) в виде

$$M_-(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\exp(-k\ln a + i\varphi)k\cdot G(-k,\mu).$$

Для $\mu \in d_-$ имеем

$$\lim_{\mu\to\mu_0} M_-(\mu) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\sum_{\tau=0}^{K-1}\exp(i\varphi)k\cdot G(\tau,\mu)). \tag{3.16}$$

При вычислении предела кроме перестановки предельных переходов использовано равенство средних $M(f(-n)) = M(f(n))$, вытекающее из условия 2 Леммы. Сопоставляя (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), приходим к выводу, что единственное ограниченное в $C(Z)$ и непрерывное по μ решение получится, если положим

$$\varepsilon(\mu) = \mp M_\pm(\mu) \qquad \text{при} \qquad \mu \in D_\pm,$$

$$\varepsilon(\mu) = -M(\mu) \qquad \text{при} \qquad \mu \in D_0.$$

Замечание 1. *Лемма 4 существенно использует метод суммирования Чезаро и основное требование леммы связано с предположением о существовании среднего значения. Этому требованию удовлетворяют периодические и почти периодические системы, которые будут изучаться в дальнейшем.*

Замечание 2. *Если $D_+ \cup D_0 = \phi$, то при выполнении только условия 1 Леммы 4 все решения уравнения (3.1) принадлежат классу $C(Z)$, при $\varepsilon(\mu) \in C(D)$.*

Полученные результаты позволяют перейти к решению задачи о непрерывной нормализации систем с коэффициентами из класса $C(Z)$.

Введем понятие регулярных и нерегулярных членов уравнений (3.1).

Определение 2. *Вектор $p \in P_+^q$ и соответствующий ему член s-го уравнения системы (1.1) называются* ***нерегулярными*** *в D^1, если уравнение (3.1) при $a(\mu) = \rho^{\delta_s - p}(\mu)$ не регулярно в D.*

Из Леммы 1 следует, что вектора p, соответствующие нерегулярным членам s-го уравнения, определяются условием

$$(\exists\mu_0 \in D)(\rho(\mu_0)^{p-\delta_s} = 1). \tag{3.17}$$

Нижеследующая теорема показывает, что непрерывная нормальная форма РДС (1.1) — это система, содержащая только нерегулярные члены.

Теорема 1. *Существует непрерывное по $\mu \in D$ преобразование (1.2), переводящее (1.1) в формально-эквивалентную систему*

$$x_{sn+1} = \rho_s(\mu)x_{sn} + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(\sum_p^1 F_{p,j}^{(s)}(n,\mu)x_n^p), \tag{3.18}$$

содержащую только нерегулярные члены. В (3.13) штрих означает суммирование только по нерегулярным векторам $p \in P_{0,n_j}$, где $P_{0,n_j}^{(s)} = P_0^{(s)} \cup ... \cup P_{n_j}^{(s)}$.

Доказательство. Для системы (1.1) преобразование (1.2) будем искать в виде суперпозиции преобразований
$$y_k = \Phi_k \circ \Phi_{k-1} \circ ... \circ \Phi_1(x_n).$$
При этом для каждого k приходим к решению линейных неоднородных разностных уравнений вида (2.6). Эти уравнения имеют непрерывные решения, если $p \notin P_{0,n}^{(s)}$. В случае $p \in P_{0,n}^{(s)}$ в уравнении (2.6) положим $\varphi_{k,p}^{(s)}(n,\mu) = 0$.

Соответствующие этим p коэффициенты $g_{k,p}^{(s)}(n,\mu)$ выходят в преобразованную систему. Варьируя таким образом k от 1 до ∞, получим

$$x_{sn+1}^{(s)} = e^{i\varphi_s(\mu)} x_{sn} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j (\sum_p F_{p,j}^{(s)} x^p).$$

Теорема доказана.

В порядке обсуждения теоремы приведем некоторые очевидные следствия из нее.

1. Если все собственные значения таковы, что $\forall s, \quad \forall \mu \in D \ \rho_s \neq 1$, то непрерывная нормальная форма линейна, т.е. $\forall P_{0,n}^{(s)} = 0$.

2. Пусть при $\mu = \mu_0$ часть собственных значений лежит на единичной окружности, а остальные — внутри единичного круга. Существует такое число j (которое тем больше, чем меньше область D), что в структуре системы (3.18) с точностью до $O(\varepsilon^j)$ уравнения, соответствующие критическим собственным значениям, не зависят от некритических переменных, а некритические уравнения зависят от некритических переменных лишь линейно.

3. Для получения описанной выше структуры системы (3.18) достаточно выполнить неформальное преобразование, используя отрезок ряда (1.2) до членов $O(\varepsilon^j)$. Указанное преобразование будет Ляпуновским [1].

4. Резонансная нормализация параметрически возмущенных почти периодических РДС. Обозначим через $C_0 \in C$ класс функций $f(n,\mu)$, почти периодических (п.п.) по n [2, 3] равномерно по $\mu \in D$ и удовлетворяющих по μ условию Липшица с постоянной, не зависящей от n [1]. Через C_0^l обозначим множество l-мерных вектор-функций с компонентами из C_0.

Важным свойством равномерных по μ п.п. функций является независимость от μ их спектра. Поэтому функции$f(n,\mu) \in C_0$ представимы рядами Фурье

$$\sum_k f_k(\mu) e^{\gamma_k n}, \tag{4.1}$$

где $f_k(\mu)$ непрерывны и ограничены в D, а элементы спектра $\{\gamma_k\}$ не зависят от μ.

Заметим, что $f(n,\mu)$ и $f_k(\mu)$ одновременно удовлетворяют по μ условию Липшица.

Рассмотрим задачу нормализации системы (1.1) в предположении, что все их коэффициенты принадлежат классу C_0.

Матрица $A(\mu)$ по-прежнему имеет канонический вид. Считаем, что $\rho_s(\mu)$ удовлетворяет в D условию Липшица.

Известно, что все ограниченные по n решения линейных разностных уравнений с п.п. неоднородностью являются почти-периодическими функциями.

Рассмотрим уравнение вида (3.1)

$$\varphi(n+1,\mu) = a(\mu)\varphi(n,\mu) + \omega(n,\mu) \tag{4.2}$$

в предположении, что $\omega(n,\mu) \in C_0 \ a(\mu) = a(\mu)e^{i\varphi(\mu)}$ — удовлетворяет в D условию Липшица

$$| \ a(\mu') - a(\mu'') \ | < L\mu' - \mu''. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2) регулярно в C_0, если оно имеет единственное решение класса C_0 при любой неоднородности $\omega(n,\mu) \in C_0$.

Лемма 5. *Для регулярности уравнения (4.2) в C_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.2).*

Доказательство. Необходимость условия (3.2) вытекает непосредственно из Леммы 3.

Докажем достаточность. Пусть выполняется условие (3.2). Поскольку $C_0 \subset C$, то в силу Леммы 3 уравнение (4.2) с любой неоднородностью $\omega(n,\mu)\in C_0$ имеет единственное ограниченное решение $\varphi(n,\mu)$, принадлежащее, по крайней мере, классу C. Это решение определяется равенствами (3.5). Докажем, что $\varphi(n,\mu) \in C_0$. В силу ограниченности по n, оно является почти периодическим решением [7]. Остается убедиться, что $\varphi(n,\mu)$ удовлетворяет по μ условию Липшица.

Покажем это в случае $\mid a(\mu) \mid > 1$. Рассмотрим разность

$$\mid \varphi(n,\mu') - \varphi(n,\mu'') \mid = \mid \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu'')\omega(k,\mu'') \mid =$$

$$\begin{aligned} &= \mid \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu'')\omega(k,\mu'') \mid = \\ &= \mid \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu'') + \\ &+ \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu'') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu'')\omega(k,\mu'') \mid \le \\ &\mid \le \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu'') \mid + \\ &+ \mid \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu'') - \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu'')\omega(k,\mu'') \mid = \\ &= \mid \sum_{-\infty}^{\infty} G(n-1-k,\mu')[\omega(k,\mu') - \omega(k,\mu'')] \mid + \\ &+ \mid \sum_{-\infty}^{\infty} [G(n-1-k,\mu') - G(n-1-k,\mu'')]\omega(k,\mu'') \mid = I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Пусть L_1 — постоянная Липшица функции $\omega(n,\mu)$, а

$$L_2 = \sup_{\forall n,\mu \in D} \omega(n,\mu).$$

Оценим главные части(4.4)

$$I_1 \le \sum_{-\infty}^{\infty} G*(n-1-k,\mu')\omega(k,\mu') - \omega(k,\mu'') \le L_1\mu' - \mu'' \sum_{-\infty}^{\infty} G*(n-1-k,\mu') \le \frac{2L_1}{1-\exp(\alpha)}\mu' - \mu'',$$

$$I_2 \le L_2 \sum_{-\infty}^{\infty} [G*(n-1-k,\mu') - G(n-1-k,\mu'')] < \frac{2L_2 L}{1-\exp(-\alpha))^2}\mu' - \mu'',$$

где $\alpha = \ln a(\mu)$.

Учитывая эти неравенства, получим

$$\varphi(n,\mu') - \varphi(n,\mu'') \le (\frac{2L_1}{1-\exp(-\alpha)} + \frac{2L_2L_1}{(1-\exp(-\alpha))^2})\mu' - \mu''.$$

Тем самым достаточность доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению нерегулярных уравнений. Введем необходимые определения.

Пусть $S_\omega = \{\lambda_k\}$ — спектр функции $\omega(n,\mu) \in C_0$.

Через $S_\omega^\varphi = \{\lambda_k - \varphi(\mu)\}$ обозначим смещенный спектр, где $\varphi(\mu) = \arg a(\mu), \quad \mu \in D_0$.

Определение 3. *Показатели Фурье λ_k функции $\omega(n,\mu)$ называются **резонансными**, если*

$$(\exists \mu_0 \in D_0) \quad (\lambda_k - \varphi(\mu_0) = 0(mod 2\pi)). \tag{4.5}$$

В соответствие с определением разобьем S_ω на резонансную R_ω и нерезонансную N_ω части, $S_\omega = R_\omega \cup N_\omega$. Аналогичное разбиение произойдет и у смещенного спектра: $S_\omega^k = R_\omega^k \cup N_\omega^k$.

Определение 4. *Уравнение (4.2) обладает свойством F, если нерезонансная часть смещенного спектра равномерно по μ отделена от нуля, т.е.*

$$\forall \alpha > 0, \quad \forall \mu \in D, \quad \forall \lambda \in N_\omega \Rightarrow \mid \lambda - \varphi(\mu) \mid \ge \alpha). \tag{\textbf{F}}$$

Если $R_\omega \ne \phi$, то условие F означает, что ни один элемент резонансного множества R_ω не является предельной точкой множества N_ω.

Лемма 6. *Пусть $D_+ \cup D_- \ne \phi$ и в уравнении (4.2) $\omega(n,\mu) \in C_0$, $a(\mu)$ удовлетворяет условию Липшица. Если $R_\omega \ne \phi$, выполняется условие F, то уравнение (4.2) имеет единственное решение $\varphi(n,\mu) \in C_0$, которое определяется формулой:*

$$\varphi(n,\mu) = e^{(\ln a(\mu) + i\varphi(\mu)(n-1))}(\varepsilon(\mu) + \sum_{k=0}^{n-1} e^{(\ln a(\mu) + i\varphi(\mu)(n-1))}\omega(k,\mu)), \tag{$*$}$$

где $\varepsilon(\mu)$ определяется равенствами

$$\varepsilon_+ = -\sum_{k=0}^{\infty} \exp[-k\ln a(\mu) + i\varphi k)]\omega(n,\mu), \quad \mu \in D_+,$$

$$\varepsilon_- = \sum_{-\infty}^{k=-1} \exp[k\ln a(\mu) + i\varphi k)]\omega(n,\mu), \quad \mu \in D_-. \tag{$**$}$$

Указанное решение имеет спектр S_ω и среднее значение, равное нулю.

Доказательство. Убедимся, что в условиях Леммы к уравнению (4.2) применима Лемма 4.

Рассмотрим функцию

$$f(n,\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\varphi(\mu)k}\omega(k,\mu), \quad \mu \in D_0.$$

Для ограниченности функции $f(n,\mu)$ по n необходимо, чтобы средние значения функций, находящихся под знаком суммы, равнялись нулю. В силу теоремы Фавара [6] это условие будет достаточным, если спектр этих функций отделен от нуля.

Учитывая, что этот спектр имеет вид $\{\lambda - \varphi(\mu)\}$, из условия а) следует, что он не содержит нуль, а из условия б) следует, что спектр отделен от нуля. Следовательно, функция $f(n,\mu)$

будет ограниченной, и условие 1 Леммы 4 выполняется. Отсюда следует почти-периодичность $f(n,\mu)$ по n [8, 13]. Тогда при каждом $\mu \in D$ равномерно по μ существует среднее значение

$$M(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{I_N}^{I+N} f(n,\mu) \tag{4.4}$$

и для того, чтобы убедиться в выполнении условия 2 Леммы 4, остается показать равномерность предела по μ.

Если $f(n,\mu)$ удовлетворяет условию Липшица, то это гарантирует равномерность предела по μ в (4.4), так как семейство функций

$$M(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} f(n,\mu)$$

будет равностепенно непрерывным на ограниченном и замкнутом множестве D [8]. Поэтому достаточно убедиться, что $f(n,\mu)$ удовлетворяет условию Липшица.

Для этого рассмотрим ряд Фурье

$$\omega(n,\mu) = \sum_{\lambda} \omega_\lambda(\mu) e^{i\lambda k}$$

и запишем п.п. функцию $f(n,\mu)$ в виде

$$f(n,\mu) = M(\mu) + \psi(n,\mu), \tag{4.5}$$

где $M(\mu) = \psi(0,\mu)$, а $\psi(n,\mu)$ определяется рядом

$$\sum_{\lambda} \frac{\omega_\lambda(\mu)}{1 - e^{i(\lambda - \varphi(\mu))}} e^{i(\lambda-\varphi(\mu))n}.$$

Пусть L_1, L_2 — постоянные Липшица для функций $\varphi(\mu)$, $\omega(n,\mu)$.

Заметим, что L_2 будет постоянной Липшица и для $\omega_\lambda(\mu)$. В силу ограниченности $\omega(n,\mu)$ существует L_3 такое, что $\omega(\mu) < L_3$.

Для коэффициентов Фурье $\psi_\lambda(\mu)$ функции $\psi(n,\mu)$ получим

$$| \psi_\lambda(\mu') - \psi_\lambda(\mu'') | = | \frac{\omega_\lambda(\mu')}{1 - e^{i(\lambda-\varphi(\mu))}} - \frac{\omega_\lambda(\mu'')}{1 - e^{i(\lambda-\varphi(\mu''))}} | =$$

$$= | \frac{\omega_\lambda(\mu') - \omega_\lambda(\mu'') + \omega_\lambda(\mu'') e^{i(\lambda-\varphi(\mu'))} - \omega_\lambda(\mu') e^{i(\lambda-\varphi(\mu''))}}{(1 - e^{i(\lambda-\phi(\mu'))})(1 - e^{i(\lambda-\varphi(\mu''))})} | \leq$$

$$\leq \frac{2L_2|\mu' - \mu''|}{|\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu')}{2}||\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu'')}{2}|} + \frac{2L_2|\mu' - \mu''|}{|\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu')}{2}||\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu'')}{2}|} +$$

$$+ \frac{|\omega(\mu')||e^{i(\lambda-\varphi(\mu'))} - e^{i(\lambda-\varphi(\mu''))}|}{|\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu')}{2}||\sin\frac{\lambda-\varphi(\mu'')}{2}|} \leq$$

$$\leq \frac{16L_2|\mu' - \mu''|}{\alpha^2} + \frac{4L_3L_1\ K|\mu' - \mu''|}{\alpha^2} = \frac{(16L_2 + 4L_3L_1\ K)|\mu' - \mu''|}{\alpha^2} = \frac{M|mu' - \mu''|}{\alpha^2}.$$

При оценке учтено условие F.

Итак, функция $\psi(n,\mu)$, а вместе с ней $f(n,\mu)$ удовлетворяет условию Липшица.

Следовательно, к уравнению(4.2) при выполнении условий а), б) применима Лемма 4, в силу которой уравнение(4.2) имеет единственное ограниченное (а следовательно, почти периодическое) решение $\varphi(n,\mu)$, определенное по $(*)$, где $\varepsilon(\mu)$ определяется равенствами $(**)$.

Учитывая $(*)$, (4.5), видим, что решение $\varphi(n,\mu)$ на D_0 представимо рядом Фурье

$$\varphi(n,\mu) = \sum \frac{\omega(\mu)}{1 - e^{i(\lambda - \varphi(\mu))}}(1 - e^{i(\lambda-\varphi(\mu))n}). \tag{4.6}$$

Аналогичное представление имеет решение $\varphi(n,\mu)$ при $\mu \in D_\pm$, только в (4.6) вместо $i(\lambda - - \varphi(\mu))$ будем иметь $\ln|\lambda(\mu)| + i(\lambda - \varphi(\mu))$. Отсюда уже следует, что $\varphi(n,\mu)$ при $\mu \in D$ имеет среднее значение, равное нулю, и тот же спектр, что и неоднородность $\omega(n,\mu)$. Лемма доказана.

Лемма 6 позволяет разбить нерегулярные уравнения (4.2) на два типа: резонансные и нерезонансные. Для мотивировки нижеследующего определения отметим, что нарушение условий Леммы 6 может быть обусловлено двумя независимыми друг от друга факторами:

1) $R_\omega \neq \phi$,

2) Нарушается условие F.

Если $R_\omega \neq \phi$, то это означает, что при некотором значении $\mu \in D_0$ смещенный спектр S_ω^k содержит нуль, что видно из (4.5). Если нарушается условие F, то нуль является предельной точкой множества S_ω^k при некотором $\mu \in D_0$.

Пусть $\overline{S}_\omega = \{\overline{\lambda}\}$ — замыкание спектра $\overline{S}_\omega$. Через $\overline{R}_\omega$ обозначим резонансную часть множества $\overline{S}_\omega$, полагая

$$\overline{R}_\omega = \{\overline{\lambda}/(\exists \mu_0 \in D)(\overline{\lambda} - \varphi(\mu_0)) \equiv 0 (\bmod 2\pi).$$

Очевидно, что $R_\omega \subseteq \overline{R}_\omega$, причем равенство $R_\omega = \overline{R}_\omega$ достигается лишь при выполнении условия F.

Определение 5. *Уравнение (4.2) называется* ***резонансным*** *в D, если множество $\overline{R}_\omega \neq \phi$.*

Из определения следует, что резонансными будут лишь те нерегулярные уравнения (4.2), для которых нарушаются условия Леммы 6.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\varphi(n+1,\mu) = a(\mu)\varphi(n,\mu) + \omega(n,\mu) - g(n,\mu), \tag{4.7}$$

где $\omega(n,\mu) \in C_0$ — известная функция. Требуется выбором $g(n,\mu)$, отличным от тривиального, обеспечить C_0-разрешимость уравнения (4.7). Для решения этой задачи введем следующую конструкцию.

Пусть $\alpha > 0$ — достаточно малое число и $U_\alpha(\overline{R}_\omega)$ — α-окрестность множества $(\overline{R}_\omega)$. Рассмотрим множество

$$R_{\omega,\alpha} = S_\omega \cap U_\alpha(\overline{R}_\omega).$$

Определим функцию $\omega_\alpha(n,\mu)$, которую назовем *резонансной α-срезкой* функции $\omega(n,\mu)$, полагая

$$\omega_\alpha(n,\mu) = \sum_{\lambda \in R_\omega} \omega_\lambda(\mu) e^{i\lambda n}. \tag{4.8}$$

Если дополнительно выполняется условие F, то вместо (4.8) положим

$$\omega_0(n,\mu) = \sum_{\lambda \in R_\omega} \omega_\lambda(\mu) e^{i\lambda n}. \tag{4.9}$$

Очевидным следствием предыдущего является следующая

Лемма 7. *Пусть в (4.7) $a(\mu)$ удовлетворяет условию Липшица. Существует выбор $g(n,\mu)\in C_0$ такой, что (4.7) имеет решение $\varphi(n,\mu)\in C_0$. Причем среднее значение $M(\varphi)=0$, а спектры п.п. функций $\varphi(n,\mu)$ и $g(n,\mu)$ S_φ, S_g удовлетворяет условию $S_g\subseteq S_\varphi$.*

Простейший выбор $g(n,\mu)$ следующий:

1) в регулярном и нерезонансном нерегулярном случаях $g(n,\mu)=0$,

2) в резонансном случае $g(n,\mu)=\omega_\alpha(n,\mu)$ причем, если еще выполняется условие F, то $g(n,\mu)=\omega_0(n,\mu)$.

Доказательство. В первом случае оно непосредственно следует из Лемм 5 и 6.

Справедливость Леммы в резонансном случае следует из Леммы 6, так как для функции $\omega-\omega_\alpha$ ($\omega-\omega_0$ — при выполнении условия F) резонансный спектр $R_{\omega-\omega_\alpha}=O$ ($R_{\omega-\omega_0}=O$) и выполняется условие F. Лемма доказана.

Цитированная литература

1. **Бопаев К.Б.** Нормализация систем нелинейных разностных уравнений. Препринт №1, КазГУ и НГУ. Алматы-Новосибирск, 1995. 61с.

2. **Бопаев К.Б., Бопаева С.К.** Почти периодические последовательности. Часть I. //Сб.н.тр. XXIX Жансугуровские чтения. Талдыкорган. 2001. С. 12 — 24.

3. **Бопаев К.Б., Бопаева С.К.** Почти периодические последовательности. Часть II. // 2002. Халыктаралык гыл.-прак. конф. матер. Т.1. Талдыкорган. С. 10 — 18.

4. **Бопаев К.Б.** // Доклады РАН. М., 1996. Т. 349, № 4. С. 442 — 445.

5. **Бопаев К.Б.** Устойчивость решения системы нелинейных разностных уравнений в одном критическом случае// Препринт № 2.КазГУ и НГУ. Алматы-Новосибирск. 1995. 45с.

6. **Бопаев К.Б. и др.** // Сб. научных статей. Научный центр ИА РК. 1994. № 14. С. 6 — 10.

7. **Бопаев К.Б. и др.** // Сб. научных статей. Научный центр ИА РК. 1994. № 14. С. 11 — 18.

8. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Краткий курс физики анализа. М., 1982. 271с.

9. **Бопаев К.Б.** //Труды семинара по теории устойчивости движения. Алма-Ата. 1974. Вып. 5. С. 27 — 34.

10. **Халапай А., Векслер Д.** Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 302с.

11. **Харди Г.Г.** Расходящиеся ряды. М., 1951. 357с.

12. **Пелюх Г.П., Шарковский А.Н.** Введение в теорию функциональных уравнений. Киев, 1974. 119с.

13. **Левитан Б.М.** Почти периодические функции. М., 1953. 403с.

14. **Schroder E.** // Marh. Ann. 1871. V. 3. P. 17 — 28.

15. **Kuchma M.** Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968. 383p.

Поступила в редакцию 15.04.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 55 — 62*

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПОЛОСЫ ПРИ БОКОВОМ ИМПУЛЬСНОМ ДАВЛЕНИИ

С. С. Джузбаев Б. Т.Сарсенов

Международный Казахско-Турецкий Университет им.Х.А.Яссави
487010 ЮКО, г.Туркестан, ул.Казбек-би, sarsenov@imail.ru

В настоящее время для решения динамических задач в упругих средах широко используются численные методы пространственных характеристик (в работах Клифтона Р.Д., Рекера В.В., Тарабрина, Кукуджанова В.Н., Ержанова Ж.С., Каримбаева Т.Д. и др.), конечных элементов (Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Махметова Н.М. [1] и др.), граничных интегральных уравнений (Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б. [2] и др.). Разностный метод с применением метода пространственных характеристик предложен Клифтоном в [3] для исследования плоских динамических задач, а в [4] развит Рекером для изучения распространения упругих волн в изотропных телах прямоугольной формы. Одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый в [5-7]. Этот метод, иногда называемый методом Тарабрина, позволяет максимально приблизить область зависимости конечно-разностного уравнения к области зависимости исходного дифференциального уравнения. В настоящей работе рассмотрено решение нестационарной задачи динамики однородного упругого изотропного тела в декартовой системе координат с применением метода бихарактеристик [8-9].

Введем следующие обозначения: x_i — декартовы координаты, t — время, σ_{ij} — тензор напряжений, v_i — вектор скорости, u_i — вектор перемещения. Индексами после запятой обозначаются частные производные по декартовым координатам, а точкой сверху - частные производные по времени. Для удобства изложения будем применять для индексов латинские и греческие буквы, которые принимают значения 1, 2. По повторяющимся греческим индексам в произведении выполняется суммирование, а по повторяющимся латинским индексам суммирования нет.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская деформация упругой полуполосы конечной ширины, которая в декартовой системе координат x_1Ox_2 занимает область $0\leq x_2 \leq \infty$, $|x_1|\leq l$(см. рис.1). В начальный момент времени тело находится в состоянии покоя

$$v_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, (i, j = 1, 2). \tag{1}$$

В любой другой момент времени на участке $N_1 \leq x_2 \leq N_2, x_1 = l$ границы BN действует равномерно распределенная нестационарная нормальная нагрузка $f(t)$, изменяющаяся по закону

Keywords: *non-stationary problem, elastic band, method of bicharacteristics, stresses, invariants of a stress tensor*
2000 Mathematics Subject Classification: 74B05, 74H15

синуса

$$\begin{aligned}
&\sigma_{22}(t) = \begin{cases} -A\sin(\omega t), & 0 \le t \le S_1, \\ 0, \quad t \ge S_1, \end{cases} \\
&\sigma_{21}(t) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь S_1 — время действия нагрузок и $\omega = \pi/S_1$. Остальная часть границы полуполосы свободна от какого-либо воздействия

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}(t) = 0, \quad \sigma_{12}(t) = 0, \quad x_1 = 0, \quad |x_2| \ge l, \\
&\sigma_{22}(t) = 0, \quad \sigma_{21}(t) = 0, \quad 0 \le x_1 \notin (N_1, N_2) \quad |x_2| = l.
\end{aligned} \tag{3}$$

При данных условиях необходимо исследовать напряженное состояние упругого тела при $t > 0$.

2. Определяющие уравнения. Для решения поставленной задачи наряду с начальными и граничными условиями используется система уравнений, состоящая из уравнений движения и соотношений обобщенного закона Гука

$$\sigma_{i\beta,\beta} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{\beta,\beta}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{5}$$

Здесь ρ — плотность, а λ, μ — постоянные Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера. По повторяющимся греческим индексам выполняется суммирование.

Для удобства вводятся независимые безразмерные переменные и искомые величины [8]

$$\bar{t} = \frac{tc_1}{b}, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{b}, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{c_1}\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho c_1^2}, \ \gamma_{12} = \frac{c_2}{c_1}, \quad \gamma_{11} = 1 - 2\gamma_{12}^2 \quad (i, j = 1, 2),$$

где b — характерная длинна, $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — характерные скорости. В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опускается.

После объединения обезразмеренных величин, уравнения движения (4) и продифференцированные по времени соотношения обобщенного закона Гука (5) приобретают вид

$$\begin{cases}
\dot{v}_1 = \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, \\
\dot{v}_2 = \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2}, \\
\dot{\sigma}_{11} = v_{1,1} + \gamma_{11}v_{2,2}, \\
\dot{\sigma}_{22} = \gamma_{11}v_{1,1} + v_{2,2}, \\
\dot{\sigma}_{12} = \gamma_{12}^2(v_{1,2} + v_{2,1}).
\end{cases} \tag{6}$$

Индексами после запятой обозначаются частные производные по декартовым координатам, а точкой сверху — частные производные по времени.

3. Бихарактеристики и условия на них. Для получения уравнения бихарактеристик и условий на них, расщепляем двухмерную систему (6) на одномерные. Примененяя идеи К.А. Багриновского и С.К. Годунова о расщеплении многомерных t- гиперболических систем на одномерные системы [9] при $x_k = const$ имеем

$$\begin{cases}
\dot{v}_i - \sigma_{ij,j} = a_{ij}, \\
\dot{\sigma}_{ij} - \lambda_{ij}^2 v_{i,j} = b_{ij}.
\end{cases} \tag{7}$$

где $a_{ij} = \sigma_{ik,k}$; $\lambda_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{12}(1 - \delta_{ij})$; $b_{ij} = \left(\gamma_{11}\delta_{ij} + \gamma_{12}^2(1 - \delta_{ij})\right)v_{p,k}$ Здесь и в дальнейшем $i, j, k, p = 1, 2$; $p \ne i; k \ne j$.

Отсюда, применяя известные методы для получения дифференциальных уравнений бихарактеристик и условий на них, получим:

$$dx_j = \pm\lambda_{ij}\,dt, \quad d\sigma_{ij} \mp \lambda_{ij}\,dv_i = \left(b_{ij} \mp \lambda_{ij}\,a_{ij}\right)dt \tag{8}$$

Рис. 1: Исследуемая область.

Рис. 2: Вид бихарактеристик на плоскости $x_k = const\,, k \neq j$.

4. Выбор точечной схемы и шаблона. Данное тело разбивается на квадратные ячейки, стороны которых$\Delta x_1 = \Delta x_2 = h$. В узловых точках ищутся значения функций v_i, σ_{ij} в различные моменты времени с шагом τ. Точечная сетка, на основе которой строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек, содержит точки, образованные пересечением бихарактеристик с гиперплоскостями t=const. Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек ${E_{ij}}^{\pm}$, отстоящих от точки O на расстояния $\lambda_{ij}\tau$ (рис.2). В дальнейшем значениям функций в точке О приписывается верхний знак "0", в точках ${E_{ij}}^{\pm}$ - нижний индекс ij и верхний знак " $\pm$ " соответственно (например $\sigma_{ij}^{\pm}$), а в точке А дополнительный индекс не приписывается.

5. Разрешающие разностные уравнения. Интегрирование уравнений (6) от точки О до точки А и соотношений (8) от точки ${E_{ij}}^{\pm}$ до точки А методом трапеции позволяет получить выражения следующего вида

$$v_i = v_i^0 + \frac{\tau}{2}\left(\sigma_{ij,j} + a_{ij} + \dot{v}_i^0\right), \;\; \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \frac{\tau}{2}\left(\lambda_{ij}^2\, v_{i,j} + b_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^0\right), \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\pm} \mp \lambda_{ij}\left(v_i + v_i^{\pm}\right) = \frac{\tau}{2}\left(b_{ij} + b_{ij}^{\pm} \mp \lambda_{ij}\left[a_{ij} + a_{ij}^{\pm}\right]\right). \tag{10}$$

Исключая из (11)v_i, σ_{ij} при помощи (10), получим

$$\lambda_{ij}^2\, v_{i,j} \mp \lambda_{ij}\, \sigma_{ij,j} = b_{ij}^{\pm} - \dot{\sigma}_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\left(\dot{v}_i^0 - a_{ij}^{\pm}\right) + \frac{2}{\tau}\left(\sigma_{ij}^{\pm} - \sigma_{ij}^0 \pm \lambda_{ij}\left[v_i^0 - v_i^{\pm}\right]\right). \tag{11}$$

Значения неизвестных в неузловых точках выражения (12) вычисляются по формуле Тейлора вблизи узловой точки O с точностью до второго порядка относительно шага τ имеем

$$\lambda_{ij}^2 v_{i,j} \mp \lambda_{ij}\,\sigma_{ij,j} = \lambda_{ij}^2\left(v_{i,j}^0 + \tau\,\dot v_{i,j}^0\right) \mp \lambda_{ij}\left(\sigma_{ij,j}^0 + \tau\,\dot\sigma_{ij,j}^0\right). \tag{12}$$

Складывая и вычитая каждое уравнение системы (13) с одинаковыми парами индексов, получим

$$v_{i,j} = v_{i,j}^0 + \tau\left(\sigma_{ij,jj}^0 + a_{ij,j}^0\right), \quad \sigma_{ij,j} = \sigma_{ij,j}^0 + \tau\left(\lambda_{ij}^2\, v_{i,jj}^0 + b_{ij,j}^0\right). \tag{13}$$

Процедура получения разрешающих систем уравнений в узловых точках исследуемого тела в момент времени $t = t_n + \tau$ различна для внутренних, граничных и угловых точек исследуемой области.

5.1. Для внутренних точек области. Неизвестные производные $\sigma_{ij,j}$, $v_{i,j}$, a_{ij}, b_{ij} на слое $t = t_0 + \tau$ ищутся из системы уравнений (14). Производные функции в правой части системы уравнений (6) и (14) по квадратной сетке для узла $({x_1}^0, {x_2}^0, t_0)$ аппроксимируются центральными разностями.

5.2. Для граничных точек области. Разностные уравнения для граничных точек исследуемой области (исключая угловые) получаются с помощью системы уравнений (10) и (13)по вычисленным или заданным значениям искомых величин на временном слое $t_n + \tau(n = 1, 2, ..., N)$. В расчетах не могут быть использованными условия (13) на двух характеристиках, не принадлежащих области тела. Тем самым, по сравнению с внутренними точками, число уравнений (13) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (10), (13) и двух граничных условий является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных. Для аппроксимации производных функций используются разности "вперед"и "назад".

5.3. Для угловых точек области. Угловые точки рассматриваются как пересечения двух граничных линий. Поэтому в этих точках должны выполняться условия, заданные на этих двух граничных линиях. В угловой точке исследуемой области задаются четыре граничные функции. Тогда уравнения (13), (10) и граничные условия однозначно определяют искомые величины в угловых точках исследуемой области. Здесь на границах условия задаются напряжениями σ_{11}, σ_{12} и σ_{21}, σ_{22}. В силу закона парности касательных напряжений в угловых точках имеются только три линейно-независимые граничные условия, и, тем самым, число заданных граничных условий становится на единицу меньше. Однако вычисление $\sigma_{21,1}$ и $\sigma_{12,2}$ путем аппроксимации разностями "вперед" и "назад" заданных граничных функций позволяет составить замкнутую систему уравнений.

6. Анализ результатов расчета. Расчет был произведен для стали ($\rho = 7900 kg/m^3$, $c_1 = 5817 m/sek$, $c_2 = 3109 m/sek$) при следующих значениях исходных данных: $A = 0.5$, $\omega = 4.5$, $l = 5h$, $L = 70h$, $N_1 = 10h$, $N_2 = 14h$.

Алгоритм решения реализован на языке TURBOPASCAL7.0 на сетке с шагом $\tau = 0.025$, $h = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.05$. На рис. 3 и 4 приведены изолинии нормальных σ_{11} и касательных σ_{12} напряжений, соответствующие моменту времени $t = 20\tau$. За это время граничные возмущения, распространяющиеся от локального участка воздействия, проходят расстояние 10h и достигают противоположной границы MA. Ось $x_1 = 12h$ является осью симметрии волновой картины. При этом нормальные напряжения σ_{11} являются четной, а касательные напряжения σ_{12} — нечетной функцией относительно этой оси. Можно заметить область концентрации напряжений вблизи особых точек $x_1 = N_1\,, x_2 = l$ и$x_1 = N_2\,, x_2 = l$, являющихся точками разрыва граничных условий.

В момент времени $t = 40\tau$ (рис. 5 и 6) характерная для $t = 20\tau$ симметричность полей напряжений относительно оси $x_1 = 12h$ еще просматривается вблизи оси симметрии. С удалением от этой оси симметричность изолиний нарушается. Этот результат объясняется влиянием на характер распространения напряжений от свободного торца AB в области $x_1 \le N_1$ и отсутствием подобных эффектов в области$x_1 \le N_2$. Из-за того, что внешняя нагрузка уже равна нулю, значения локальных экстремумов уменьшаются по сравнению с предыдущим моментом

Рис. 3: Изолинии нормального напряжения $\sigma_{11}, t = 20\tau$

Рис. 4: Изолинии касательного напряжения $\sigma_{12}, t = 20\tau$

времени ($t = 20\tau$). При отражении плоских волн от свободной поверхности МА нормальные напряжения σ_{11} меняют знак (становятся растягивающими). На рис.5 представлено распределение нормальных напряжений σ_{11}. Растягивающие напряжения σ_{11}, обусловленные отражением волны от свободной поверхности МА, практически симметричны относительно оси нагружения $x_1 = 12h$ и в рассматриваемый момент времени достигают максимального значения на свободной поверхности. Известны явления откола может быть вызвано именно этими растягивающими напряжениями. На рис.7 и 8 приведены изолинии инвариантов тензора напряжений $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, $I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}$, характеризующие давление и интенсивность касательных напряжений в полосе. Изолинии первого инварианта во многом сходны с изолиниями нормального напряжения σ_{11}. Отсюда можно сделать вывод, что НДС исследуемого тела при указанных воздействиях во многом зависит от σ_{11}. Здесь сказывается кратковременность боковых воздействий и близость верхней грани.

Полученные результаты и отлаженные программы могут быть использованы при исследовании распространения нестационарных динамических волн в плоских упругих телах, в инженерной практике при расчете строительных конструкций, в задачах машиностроения и т.д.

Цитированная литература

1. **Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Баймаханов И.Б., Махметова Н.М.** // Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела. Караганда, 1987. С.3—15.

2. **Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жанбырбаев Н.Б.** Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязанных тел. Алма-Ата, 1992. 238с.

3. **Клифтон Р.Д.** // Механика (сбор. переводов). М., 1968. №1. С.103—122.

4. **Рекер В.В.** // Прикладная механика. Труды ам. об-ва инж.-мех. Серия E. 1970. № 1. С.121—129.

5. **Тарабрин Г.Т.** // Строит. механика и расчет сооружений. 1981. №4/ С.38—43.

6. **Тарабрин Г.Т.** //Металловедение и прочность материалов. 1979. №3/ С.193—199.

7. **Тарабрин Г.Т.** //Строительная механика и расчет сооружений. М., 1980. №6/ С.53—58.

8. **Каримбаев Т.Д., Джузбаев С.С.** // Тез. докл. межд.конф. "Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах напряжения". Киев, 1992. С.18.

9. **Байтелиев Б.Т., Джузбаев С.С.** // Тез. докл. Всесоюзн. симпозиума по реологии грунтов. Волгоград, 1985. С. 37—38.

Поступила в редакцию 19.05.2003г.

Рис. 5: Изолинии нормального напряжения $\sigma_{11}, t = 40\tau$

Рис. 6: Изолинии касательного напряжения $\sigma_{12}, t = 40\tau$

Рис. 7: Первый инвариант тензора напряжений, $t = 40\tau$

Рис. 8: Второй инвариант тензора напряжений, $t = 40\tau$

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 63 — 67*

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Б.Н. Купесова

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, kupesova@math.kz

1. Постановка задачи. Рассматривается полупространство $\{x_1 \le h,\ h > 0\}$ однородной термоупругой среды плотности ρ с упругими константами Ламе λ, μ и термоупругими параметрами κ, γ в условиях плоской деформации. Далее $x = (x_1, x_2)$, $x \in R^2$, t — время.

Перемещения $u = (u_1, u_2)$ и температура $\theta = u_3$ среды удовлетворяют уравнениям [1]

$$L_{ij}\left(\partial_x, \partial_t\right) u_j(x,t) + F_i(x,t) = 0, \quad L_{3j}\left(\partial_x, \partial_t\right) u_j\left(x,t\right) + Q(x,t), \quad i,j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где L_{ij} — дифференциальные операторы, имеющие следующий вид

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_j + (\mu\Delta - \rho\partial_t\partial_t)\delta_{ij} - \gamma\delta_{j3}\partial_i, \quad i = 1,2,\\ L_{3j} &= (\Delta - \kappa^{-1}\partial_t)\delta_{j3} - \eta\,(1-\delta_{j3})\partial_t\partial_j, \qquad j = 1,2,3, \end{aligned}$$

Δ — оператор Лапласа. Здесь всюду по повторяющимся индексам в произведениях проводится суммирование в указанных пределах изменения индексов.

В среде действуют нестационарные массовые силы $F(x,t)$ и тепловые источники $Q(x,t)$: $F \in C(R^3_+),\ Q \in C(R^3_+)$ $(R^3_+ = R^2 \times [0,\infty))$, где $supp\,F \subset G \times [0,\infty)$ и $supp\,Q \subset G \times [0,\infty),\ G$ — ограниченное множество в R^2.

Граница полуплоскости свободна от действующих нагрузок и тепловых потоков

$$\sigma_{j1}(x,t) = 0, \qquad \partial\,\theta(x,t)/\partial x_1 = 0, \quad x_1 = h. \tag{2}$$

Здесь σ_{ij} - тензор напряжений связан с перемещениями и температурой среды соотношениями Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\, u_{k,k}\,\delta_{ij} - \gamma\theta\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i}\,), \quad i,j,k = 1,2. \tag{3}$$

Требуется определить термонапряженное состояние среды.

2. Тензор Грина. Для решения таких задач построим тензор Грина для термоупругого полупространства $V_i^k\,(x,y,t)$ со свободной границей.

Keywords: *Stress-strain state, Fundamental solution, Green tensor, Thermo-elastic semiplane*
2000 Mathematics Subject Classification: 80A17

Тензор Грина должен удовлетворять уравнениям

$$L_{ij}\left(\partial_x, \partial_t\right) V_j^m = \delta_i^m \delta(x-y) \delta\left(x, t\right), \quad y_1 < h, \quad i, j, m = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где δ_i^k — символ Кронекера, и граничным условиям на свободной поверхности

$$\Sigma_{i1} = (\lambda\, V_k^m,_k - \gamma V_3^m)\delta_{i1} + \mu\,(V_i^m,_1 + V_1^m,_i\,) = 0, \quad i, k = 1, 2, \qquad \frac{\partial V_3^m}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = h. \tag{5}$$

Здесь Σ_{ij}^m — напряжения в среде, порождаемые тензором V_k^m

$$\Sigma_{ij}^m = \lambda\, V_k^m,_k\, \delta_{ij} - \gamma V_3^m \delta_{ij} + \mu\,(V_i^m,_j + V_j^m,_i\,), \quad i, j, k = 1, 2,\ m = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Кроме того, должны выполняться условия излучения на бесконечности

$$V_k^m \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty, \quad \text{либо} \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Представим V_i^k в виде суперпозиции $V_i^k = U_i^k(x-y,t) + \pi_i^k(x,y,t)$, где U_i^k — тензор Грина для неограниченной термоупругой плоскости удовлетворяет уравнению (4) и условию (7).

Тензор π_i^k, описывающий термоупругие волны, отраженные плоской границей, подлежит определению.

Введем тензоры, порождаемые $U_j^k(x-y)$

$$S_{ij}^k(x,y) = H_{ij}^m(\partial_1, \partial_2)\, U_m^k(x-y), \quad \Gamma_i^k(x,y,n) = S_{ij}^k(x,y) n_j, \quad i, j = 1, 2, \tag{8}$$

$$\Gamma_3^k = U_3^k,_j\, n_j \quad k, m = \overline{1,3},$$

где $H_{ij}^m(\partial_1, \partial_2)$ — дифференциальный оператор в соотношениях Дюамеля-Неймана (3). Тензор напряжений S_{ij}^k определяет напряжения на координатных площадках, а тензор Γ_i^k — напряжения $(i = 1, 2)$ и тепловой поток $(i = 3)$ на площадке с единичной нормалью n, индекс k — тип действующего источника: импульсная сосредоточенная в точке $x = y$ сила, действующая вдоль оси $X_k\,(k = 1, 2)$ или импульсный сосредоточенный тепловой источник $(k = 3)$. Для построения искомых тензоров используем преобразование Лапласа по времени. Далее черточка над обозначением тензора означает его трасформанту Лапласа.

Аналитические выражения для компонент U в пространстве преобразований Лапласа по времени $\bar{U}_i^k(x,p)$ построены в [2]

$$\bar{U}_i^k = (2\pi\mu)^{-1}\left[\bar{F}_1(r,p)\delta_i^k - \bar{F}_2(r,p) r_{,i} r_{,k}\right], \ \ i, k = 1, 2, \quad \bar{U}_i^3 = (2\pi\kappa)^{-1}\,\chi \bar{F}_3(r,p) r_{,i},$$

$$\bar{U}_3^i = \eta p\,[2\pi(\lambda + 2\mu)]^{-1}\,\bar{F}_3(r,p) r_{,i}, \quad \bar{U}_3^3 = (2\pi\kappa)^{-1}\,\bar{F}_4(r,p).$$

Здесь $\chi = \gamma/(\lambda + 2\mu)$, $\bar{F}_m, \left(m = \overline{1,4}\right)$ — динамические функции вида

$$\bar{F}_1(r,p) = K_0(\beta r) + \frac{1}{\beta r}\left[K_1(\beta r) - \frac{\zeta_1}{\beta} K_1(\zeta_1 r)\right] + \frac{\zeta_1^2 - \alpha^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\frac{\zeta_2}{\beta^2 r}\left[K_1(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} K_1(\zeta_1 r)\right],$$

$$\bar{F}_2(r,p) = \left[K_2(\beta r) - \frac{\zeta_1^2}{\beta^2} K_2(\zeta_1 r)\right] + \frac{\zeta_1^2 - \alpha^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\frac{\zeta_2^2}{\beta^2}\left[K_2(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1^2}{\zeta_2^2} K_2(\zeta_1 r)\right],$$

$$\bar{F}_3(r,p) = -\frac{\zeta_2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\left[K_1(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} K_1(\zeta_1 r)\right], \quad \bar{F}_4(r,p) = \frac{\alpha^2 - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2} K_0(\zeta_1 r) - \frac{\alpha^2 - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2} K_0(\zeta_2 r),$$

$K_n(...)$ — функция Макдональда, $\alpha = p/c_1$, $\beta = p/c_2$, $r = \|x-y\|$, $r_{,i} = (x_i - y_i)/r$, p — параметр преобразования Лапласа, $\varepsilon = \gamma\eta\kappa/(\lambda + 2\mu), q = p/\kappa$; $\pm\beta$, $\pm\varsigma_i$ $(i = 1, 2)$ — корни характеристического уравнения $\det\left\{L_{kj}\left(i\xi, p\right)\right\} = 0$,

$$\zeta_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{c_1^2} + \frac{p(1+\varepsilon)}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{c_1^2} + \frac{p(1+\varepsilon)}{k}\right)^2 - \frac{4p^3}{kc_1^2}}\right], \quad Re, \quad \zeta_k > 0. \tag{9}$$

Соответственно из (8) определяется Γ

$$\bar{\Gamma}_k^m = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[\left(\frac{d\bar{F}_1}{dr} - \frac{\bar{F}_2}{r}\right)\delta_m^k + 2\left(\frac{2\bar{F}_2}{r} - \frac{d\bar{F}_2}{dr}\right)r_{,m}r_{,k}\right] - m\eta p\bar{F}_3 n_j + \right. \tag{10}$$

$$+r_{,m}\left(n_m r_{,k} + n_k r_{,m}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{2\mu}\cdot\frac{d\bar{F}_1}{dr} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\bar{F}_2}{r} - \frac{\lambda}{2\mu}\cdot\frac{d\bar{F}_2}{dr}\right) +$$

$$\left. + \left(n_m r_{,k} - n_k r_{,m}\right)\left(\frac{\lambda}{2\mu}\cdot\frac{d\bar{F}_2}{dr} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{F}_2}{r} + \frac{\mu-\lambda}{2\mu}\cdot\frac{d\bar{F}_1}{dr}\right)\right\}, \quad m, k = 1, 2,$$

$$\bar{\Gamma}_k^3 = \frac{\eta p}{2\pi}\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{d\bar{F}_3}{dr} + \frac{2\mu}{\lambda}\cdot\frac{\bar{F}_3}{r}\right)n_k + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{d\bar{F}_3}{dr} - \frac{\bar{F}_3}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n}r_{,k} - \bar{F}_4 n_j\right\},$$

$$\bar{\Gamma}_3^k = -\frac{m}{2\pi}\left\{\left(\frac{d\bar{F}_3}{dr} - \frac{\bar{F}_3}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n}r_{,m} + \frac{\bar{F}_3}{r}n_m\right\}, \quad \bar{\Gamma}_3^3 = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\bar{F}_4}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}, \quad k = \overline{1,3}.$$

Тензор $\bar{\pi}_i^m$ удовлетворяет соответствующим однородным уравнениям (1) и следующим граничным условиям

$$\lambda\,\bar{\Pi}_k^m{}_{,k}\,\delta_{i1} + \mu\,(\bar{\Pi}_i^m{}_{,1} + \bar{\Pi}_1^m{}_{,i}) - \gamma\bar{\Pi}_3^m{}_{,i} = -\bar{S}_{i1}^m(x,y,p), \qquad \bar{\Pi}_3^{m,1} = -\partial_1\bar{U}_3^m(x-y,p) \quad \text{при } x_1 = h, \tag{11}$$

$$S_{i1}^m(x,y,p) = \Gamma_i^m(x,y,p,n) \quad \text{при } n = (1,0,0).$$

Производя преобразование Фурье в соответствующем ему уравнении (1) по одной координате $(x_2 \to \xi)$ и преобразование Лапласа по времени $(t \to p)$, получаем систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l}
\left[(\lambda+2\mu)\frac{d^2}{dx_1^2} - \mu\xi^2 - \rho p^2\right]\bar{u}_i^* + i\,(\lambda+\mu)\,\xi\frac{d\bar{u}_2^*}{dx_1} - \gamma\frac{d\bar{u}_3^*}{dx_1} = 0,\\
i\,(\lambda+\mu)\,\xi\frac{d\bar{u}_1^*}{dx_1} + \left[-\,(\lambda+2\mu)\,\xi^2 + \mu\frac{d^2}{dx_1^2} - \rho p^2\right]\bar{u}_2^* - i\gamma\xi\bar{u}_3^* = 0,\\
-\eta p\frac{d\bar{u}_1^*}{dx_1} - i\eta p\xi\bar{u}_2^* + \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right)\bar{u}_3^* = 0
\end{array} \tag{12}$$

с граничными условиями при $x_1 = h$

$$\lambda\,\bar{u}_{k,k}^*\,\delta_{i1} + \mu\,(\bar{u}_i^*{}_{,1} + \bar{u}_1^*{}_{,i}) - \gamma\bar{u}_{3,i}^* = -\bar{S}_{i1}^{*m}(x^*,y,p), \quad \bar{u}_{3,1}^* = -\partial_1\bar{U}_3^m(x^*,y,p), \quad x^* = (h,\xi). \tag{13}$$

Здесь $u_i(x_1,x_2,t) = \pi_i^k(x,y,t)$ при фиксированных y, k, звездочка $(*)$ обозначает трансформанту Фурье соответствующей функции. Для регулярных функций

$$u = \int\limits_{-\infty i+c}^{\infty i+c}\bar{u}(x_1,x_2,p)\exp(pt)dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty i+c}^{\infty i+c}\exp(pt)dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{u}^*(x_1,p,\xi)\exp(-ix_2\xi)d\xi. \tag{14}$$

Запишем (11) в сокращенном виде:

$$\text{при } x_1 = h \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{B}_{lj}(\partial_1,-i\xi,p)\bar{u}_j^*(x_1,\xi,p) + a_l^m(\xi,p))\exp(-ix_2\xi)d\xi = 0 \quad l,j = 1,2,3, \tag{15}$$

где B_{lj} — соответствующий (11) дифференциальный оператор, a_j^m — преобразование Фурье граничных функций $a_l^m = \bar{S}_{l1}^{*m}(x^*;y,p)$.

Решение однородной системы (12) можно представить в виде $\bar{u}^* = w(k)\exp(kx_1)$. Ее характеристическое уравнение

$$Det\left\{\begin{array}{l} \left[(\lambda+2\mu)\,k^2-\mu\xi^2-\rho p^2\right],i\,(\lambda+\mu)\,k\xi,-\gamma k \\ i\,(\lambda+\mu)\,k\xi,\left[-\,(\lambda+2\mu)\,\xi^2+\mu k^2-\rho p^2\right],-i\gamma\xi \\ -\eta pk,-i\eta p\xi,\left(k^2-\xi^2-\frac{p}{\kappa}\right) \end{array}\right\}=0$$

имеет 6 корней:

$$k_{1,4}=\pm\sqrt{\xi^2+\frac{\rho p^2}{\mu}},$$

$$k_{2,5}=\pm\sqrt{\xi^2+\frac{p}{2\kappa}+\frac{p(\gamma\eta+\sqrt{D})}{2(\lambda+2\mu)}},\quad k_{3,6}=\pm\sqrt{\xi^2+\frac{p}{2\kappa}+\frac{p(\gamma\eta-\sqrt{D})}{2(\lambda+2\mu)}},$$

$$D=\gamma^2\eta^2-4(\lambda+2\mu)\xi^2\rho+\frac{\lambda+2\mu}{\kappa}\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\kappa}+2\gamma\eta-4p\rho\right\},\quad k_{j+3}=-k_j,\quad j=1,2,3.$$

Поскольку мы ищем решения, описывающие волны, отраженные плоской границей, затухающие при $x_1\to-\infty$, необходимо, чтобы $\mathrm{Re}\ k\geq 0$. Следовательно $\bar{u}=\sum_{j=1}^{3}w(k_j)e^{k_jx_1}=$ $=\sum_{j=1}^{3}u^j(x_1,\xi)$. Подставляя в (12), определяем неизвестные векторы $w(k_j)$, $j=1,2,3$.

Первое решение имеет вид (с точностью до некоторого сомножителя $A_1(\xi,p)$)

$$\begin{array}{l} u_1^1=A_1 i\xi\left\{(\lambda+\mu)\left(\frac{\rho p}{\mu}-\frac{1}{\kappa}\right)-\eta\gamma\right\}\exp(x_1k_1), \\ u_2^1=-A_1k_1\left\{(\lambda+\mu)\left(\frac{\rho p}{\mu}-\frac{1}{\kappa}\right)+\eta\gamma\right\}\exp(x_1k_1),\quad u_3^1=0. \end{array}$$

Два следующих являются решением систем второго порядка

$$\left\{\begin{array}{ll} i(\lambda+\mu)k_j\xi & \left[-(\lambda+2\mu)\xi^2+\mu k_j^2-\rho p^2\right] \\ -\eta pk_j & -i\eta p\xi \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} w_1(k_j) \\ w_2(k_j) \end{array}\right\}=A_j\left\{\begin{array}{c} i\gamma\xi \\ -\left(k_j^2-\xi^2-\frac{p}{\kappa}\right) \end{array}\right\},$$

$$w_3(k_j)=A_j,\quad j=2,3$$

и определяются согласно правилу Крамера с точностью до произвольного множителя A_j. Итак, решение представимо в виде

$$\bar{u}^*=\sum_{j=1}^{3}A_ju_j\exp(k_jx_1).$$

Для каждого фиксированного $m=1,2,3$ для определения неизвестных функций A_j^m имеем три граничных условия на свободной поверхности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sum_{j=1}^{3}A_j^m\sum_{n=1}^{3}\mathrm{B}_{ln}(k_j,-i\xi,p)w_n(k_j)+a_l^m(\xi,p))\exp(-ix_2\xi)d\xi=0,\quad l=1,2,3.$$

Отсюда, в силу произвольности x_2 , имеем линейную систему из трех уравнений для определения A_j

$$\sum_{j=1}^{3}A_j^m\sum_{n=1}^{3}\mathrm{B}_{ln}(k_j,-i\xi,p)w_n(k_j)=-a_l^m(\xi,p),\quad l=1,2,3, \tag{16}$$

разрешая которую, найдем $A_j^m=\Delta_j^m(\xi,p)/\Delta(\xi,p)$. Здесь $\Delta(\xi,p)$ - определитель матрицы системы

$$\Delta(\xi,p)=\{d_{lj}\},\quad d_{lj}=\{\sum_{n=1}^{3}\mathrm{B}_{ln}(k_j,-i\xi,p)w_n(k_j)\}.$$

Исследовать нули этого определителя в зависимости от ξ и p аналитически невозможно в силу его сложности. Однако, как легко видеть из (13), в случае, когда $\gamma = 0$, он совпадает с релеевским определителем $\triangle = \triangle_R$, который обращается в нуль только для $p = \pm i\xi c_R$, где c_R — скорость поверхностной волны Релея в упругой среде (см.[3], с.104). Поскольку $Rep > 0$, в этом случае $\triangle_R \neq 0$ для любых ξ. В силу непрерывной зависимости $\triangle$ от параметров среды, это свойство сохраняется и для небольших γ, что и будем предполагать далее. В противном случае построение контура интегрирования является нетривиальной задачей и требует детального и трудоемкого исследования.

Заметим, что в силу свойств функций Макдональда $K_n(z), |argz| < 3\pi/2$, которые экспоненциально затухают при $r \to \infty$ [4, с.199], преобразование Фурье их значений и значений их производных при $x_1 = h$ быстро убывают при $|\xi| \to \infty$ (быстрее любой отрицательной степени $|\xi|^{-M}$). Поэтому все интегралы существуют и представляют собой непрерывные и бесконечно дифференцируемые функции.

Таким образом, все искомые функции найдены и задача построения трансформанты тензора Грина решена. Для построения тензора в исходном пространстве R^3_+ следует использовать численные процедуры обращения преобразования Лапласа.

3. Решение задачи. При заданных массовых силах и тепловых источниках, используя известное свойство фундаментальных решений, строим решение исходной задачи, которое имеет вид (по повторяющимся индексам тензорная свертка)

$$u_i = \int_0^t dt \int_G V_i^k(x,y,t-\tau)F_k(y,\tau)dy_1dy_2 + \int_0^t dt \int_G V_i^3(x,y,t-\tau)Q(y,\tau)dy_1dy_2,$$

$$\theta = \int_0^t dt \int_G V_3^k(x,y,t-\tau)F_k(y,\tau) + \int_0^t dt \int_G V_3^3(x,y,t-\tau)Q(y,\tau)dy_1dy_2, \qquad i,k = 1,2.$$

При вычислениях удобнее использовать преобразование Лапласа по времени этого выражения

$$\overline{u}_i(x,p) = \int_G \overline{V}_i^k(x,y,p)\overline{F}_k(y,p)dy_1dy_2 + \int_G \overline{V}_i^3(x,y,p)\overline{Q}(y,p)dy_1dy_2,$$

$$\overline{\theta}(x,p) = \int_G V_3^k(x,y,p)\overline{F}_k(y,p) + \int_G \overline{V}_3^3(x,y,p)\overline{Q}(y,p)dy_1dy_2, \qquad i,k = 1,2,$$

а восстановление оригинала проводить известными численными методами [например, 5].

Цитированная литература

1. **Новацкий В.** //Динамические задачи термоупругости. М., 1970, 256с.

2. **Kupesova B.N.** //Fundamental solutions of coupled thermoelastodynamics. Доклады НАН РК. 1995. № 4. С. 15 — 23.

3. **Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989. 240с.

4. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям М., 1979. 872с.

5. **Papoulis A.** //Quar.Appl.Math. 1957. V.14. P.405—414.

Поступила в редакцию 19.05.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 68 — 73*

УДК 517.925

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ D-УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.А. Мухамбетова, Ж.А. Сартабанов

Актобинский гос.универсистет им.Х.Жубанова
463000, Актобе, ул.А.Молдагуловой, 34

Установлены достаточные условия ограниченности решений линейных D-уравнений второго порядка с колебательными коэффициентами.

Ограниченность решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами рассмотрена в [1, с.202], где сформулирована в виде теоремы, названной интегральным признаком устойчивости Ляпунова. Известно, что нет аналога этому признаку в квазипериодическом случае. С изложением метода [2,3] ставится задача о распространении указанного результата на многопериодический случай. Основная трудность в исследовании этой проблемы связана с неразработанностью вопросов функциональных матриц, необходимых в теории многочастотных колебаний [4]. В данной заметке проведено исследование на основе [2, 3, 5—7] и установлены достаточные условия ограниченности решений рассматриваемого уравнения с колебательными коэффициентами.

Рассмотрим D-уравнение второго порядка

$$D^2 x + p(t, \varphi, \psi)\, x = 0 \tag{1}$$

с дифференциальным оператором $D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in R \times \times ... \times R = R^m$, $\psi = \varphi - et$ — характеристика оператора D, $e = (1, 1, ..., 1) -$ $m-$вектор, $D^2 x = = D(Dx)$, $p(t, \varphi, \psi)-$ функция, обладающая свойствами периодичности и гладкости вида

$$p(t + \theta, \varphi + k\omega, \psi + \bar{k}\omega) = p(t, \varphi, \psi) \in C^{(0,1,1)}_{t,\varphi,\psi}(R \times R^m \times R^m) \tag{2}$$

для всех $k = (k_1, ..., k_m), \bar{k} = (\overline{k_1}, ..., \overline{k_m}) \in Z^m$, Z^m- множество целочисленных векторов, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\bar{k}\omega = (\bar{k}_1\omega_1, ..., \bar{k}_m\omega_m)$- кратные вектор-периоды, $\theta, \omega_1, ..., \omega_m-$ — положительные рационально несоизмеримые постоянные.

Пусть $U-$ класс ω-периодических непрерывно дифференцируемых функций $u(\varphi)$ вида

$$u(\varphi + k\omega) = u(\varphi) \in C^{(}_{\varphi}1)(R^m)\ \forall k \in Z^m. \tag{3}$$

Keywords: *D-equations, boundedness, multiperiodical potential*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20

Наша задача заключается в определении условий ограниченности всех решений уравнения (1) с начальными данными из класса U. С этой целью перейдем к рассмотрению эквивалентной уравнению (1) системе

$$D\,z = P\,(t,\,\varphi)\,z, \tag{4}$$

где $z\,=\,(x,\,y)$ — двумерный вектор, $y\,=\,D\,x$, $P\,(t,\,\varphi,\,\psi)$ – матрица вида

$$P(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\,p\,(t,\,\varphi,\,\psi) & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

с нулевым следом $\operatorname{Sp} P\,(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;0$. При построении матрицанта системы (4) с матрицей (5) используем метод Ляпунова, обобщенный для рассматриваемого случая. Согласно этому методу решение $\xi\,(t,\,\varphi,\,\psi)$ с начальным условием

$$\xi\,(0,\,\varphi,\,\psi,\,\mu)\;=\;1,\;\;D\,\xi\,(0,\,\varphi,\,\psi,\,\mu)\;=\;0 \tag{6}$$

уравнения

$$D^2\,x\;=\;\mu\,p\,(t,\,\varphi,\,\psi)\,x \tag{7}$$

с параметром μ будем искать в виде ряда

$$\xi\,(t,\,\varphi,\,\psi,\,\mu)\;=\;\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\xi_{\,k}(t,\,\varphi,\,\psi)\,\mu^k. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), получим рекуррентные соотношения

$$D^2\,\xi_0\,(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;0,\;\;D^2\,\xi_k\,(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;p\,(t,\,\varphi,\,\psi)\,\xi_{k-1}\,(t,\,\varphi,\,\psi)$$

с начальными условиями $\xi_0\,(0,\,\varphi,\,\varphi)\;=\;1$, $D\,\xi_0\,(0,\,\varphi,\,\varphi)\;=\;0$, $\xi_k\,(0,\,\varphi,\,\varphi)\;=\;D\,\xi_k\,(0,\,\varphi,\,\varphi)\;=\;0$ для $k\;=\;1,\,2,\,\ldots$ На основе этого

$$\xi_0\,(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;1,\;\;\xi_k\,(t,\,\varphi,\,\psi)\;=\;\int\limits_0^t(t\,-\,t_1)\,p(t_1,\,\psi+\,e\,t_1,\,\psi)\,\xi_{k-1}\,(t_1,\,\psi+\,e\,t_1,\,\psi)\,d\,t_1. \tag{9}$$

Тогда в силу (9) из равенства (8) имеем

$$\begin{gathered}\xi\,(t,\,\varphi,\,\psi,\mu)\;=\;1\;+\;\mu\int\limits_0^t(t\,-\,t_1)\,p(t_1,\,\psi\,+\,e\,t_1,\,\psi)\,d\,t_1\;+\\ +\mu^2\int\limits_0^t(t\,-\,t_1)\,p(t_1,\,\psi\,+\,e\,t_1,\,\psi)\,d\,t_1\int\limits_0^{t_1}(t_1\,-\,t_2)\,p(t_2,\,\psi\,+\,e\,t_2,\,\psi)\,d\,t_2\;+\;\ldots\end{gathered} \tag{10}$$

Можно показать, что ряд (10) и ряды, полученные из него путем почленного дифференцирования, в силу ограниченности функций

$$|p\,(t,\,\varphi,\,\psi|\,,\;\left|\frac{\partial}{\partial\,\varphi_k}p\,(t,\,\varphi,\,\psi)\right|,\;\left|\frac{\partial}{\partial\,\psi_k}p\,(t,\,\varphi,\,\psi)\right|\;\;(k\;=\;1,\,2,\,\ldots)$$

сходятся равномерно в конечной области точек $(t,\,\mu)$. Применив оператор D к (10), имеем

$$\begin{gathered}D\,\xi\,(t,\,\varphi,\,\psi,\,\mu)\;=\;\mu\int\limits_0^t p\,(t_1,\,\psi+\,et_1,\,\psi)\,d\,t_1+\\ +\,\mu^2\int\limits_0^t p\,(t_1,\,\psi+\,et_1,\,\psi)\,d\,t_1\int\limits_0^{t_1}(t_1\,-\,t_2)\,p\,(t_2,\,\psi+\,et_2,\,\psi)\,d\,t_2+\,\ldots\end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда ясно, что $D\xi$ непрерывно дифференцируема по (t,φ,ψ) и (10) является решением уравнения (7), удовлетворяющим условию (6). Аналогичным образом можно построить решение $\eta(t,\varphi,\psi,\mu)$ уравнения (7) с начальным условием

$$\eta(0,\varphi,\psi,\mu) = 0,\ D\eta(0,\varphi,\psi,\mu) = 1 \tag{12}$$

и представить его в виде

$$\begin{gathered}\eta(t,\varphi,\psi,\mu) = t + \mu\int\limits_0^t (t-t_1)\,p(t_1,\psi+e\,t_1,\psi)\,dt_1 + \\ +\mu^2\int\limits_0^t (t-t_1)\,p(t_1,\psi+e\,t_1,\psi)\,dt_1\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)\,p(t_2,\psi+e\,t_2,\psi)\,dt_2 + \dots\end{gathered} \tag{13}$$

Применяя к соотношению (13) оператор D

$$\begin{gathered}D\eta(t,\varphi,\psi,\mu) = 1 + \mu\int\limits_0^t p(t_1,\psi+e\,t_1,\psi)\,dt_1 + \\ +\mu^2\int\limits_0^t p(t_1,\psi+e\,t_1,\psi)\,dt_1\int\limits_0^{t_1}(t_1-t_2)\,p(t_2,\psi+e\,t_2,\psi)\,dt_2 + \dots\end{gathered} \tag{14}$$

убеждаемся, что (13) удовлетворяет условию (12). Далее на основе (7), (6), (12), (10), (11), (13) и (14) при $\mu = -1$ получим матрицант $X(t,\varphi,\psi)$ системы (4) в виде

$$X(t,\varphi,\psi) = \begin{bmatrix} \xi(t,\varphi,\psi,-1) & \eta(t,\varphi,\psi,-1) \\ D\xi(t,\varphi,\psi,-1) & D\eta(t,\varphi,\psi,-1)\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Очевидно, матрицант (15) обладает свойствами

$$X(t,\varphi+k\omega,\psi+\bar{k}\omega) = X(t,\varphi,\psi)\in C^{(1,1,1)}_{t,\varphi,\psi}\,(R\times R^m\times R^m),$$

$$X(0,\varphi,\psi) = E,\ X(t+\theta,\varphi,\psi) = X(t,\varphi,\psi)\,X(\theta,\psi,\psi), \tag{16}$$

где $E-$ единичная матрица.

Следовательно, матрицу $X(\theta,\psi,\psi)$ следует назвать матрицей монодромии для системы (4).

Теперь рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det\,[X(\theta,\psi,\psi) - \rho E] = 0. \tag{17}$$

Из (17) на основе (15) с учетом обобщенной формулы Остроградского-Лиувилля [2, с.55]

$$\det X(\theta,\psi,\psi) = \det X(0,\varphi,\varphi)\,\exp\int\limits_0^\theta Sp\,P(s,\psi+es,\psi)\,ds = 1$$

имеем

$$\rho^2 - a(\psi)\,\rho + 1 = 0, \tag{18}$$

где функция

$$a(\psi) = \xi(\theta,\psi,\psi) + D\eta(\theta,\psi,\psi) = Sp\,X(\theta,\psi,\psi) \tag{19}$$

является распространением константы Ляпунова на случай D- уравнения (1), причем в силу (10) и (14) из (19) получим

$$a(\psi) = 2 - \theta\int\limits_0^\theta p(t_1, \psi + et_1, \psi)\,dt_1 + \int\limits_0^\theta dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2(\theta - t_1 + t_2)(t_1 - t_2)\,p(t_1, \psi + \\ + et_1, \psi)\,p(t_2, \psi + et_2, \psi) - \int\limits_0^\theta dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2\int\limits_0^{t_2} dt_3(\theta - t_1 + t_3)(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\,p(t_1, \psi + \\ + et_1, \psi)\,p(t_2, \psi + et_2, \psi)p(t_3, \psi + et_3, \psi) + \ldots \tag{16}$$

В силу (2) $a(\psi)$-непрерывно дифференцируемая $\omega-$ периодическая функция. Из (18) имеем

$$\rho_{1,2}(\psi) = \frac{1}{2}\left[a(\psi) \pm \sqrt{a^2(\psi) - 4}\right]. \tag{20}$$

Рассмотрим случаи:

1) $\inf\limits_{R^m}|a(\psi)| = m > 2$,

2) $\sup\limits_{R^m}|a(\psi)| = M < 2$,

3) $m = M = 2$.

В случае 1) уравнение (18) имеет два действительных непрерывно дифференцируемых и $\omega-$ периодических корня $\rho_1(\psi)$, $\rho_2(\psi)$, из которых в силу (20) один по модулю меньше единицы, а другой больше единицы для всех $\psi \in R^m$. Следовательно, мультипликатор $\rho_1(\psi)$ лежит внутри единичного круга $|\rho| < 1$ комплексной плоскости при $\psi \in R^m$, а мультипликатор $\rho_2(\psi)$ — вне этого круга для всех $\psi \in R^m$.

В случае 2) мультипликаторы $\rho_1(\psi)$, $\rho_2(\psi)$ — комплексно сопряженные для всех $\psi \in R^m$ и их модули равны единицы, причем $\rho_1(\psi) \neq \rho_2(\psi)\ \forall\psi \in R^m$.

Случай 3) требует дополнительного исследования.

Далее выясним условия, при которых имеет место случай 1).

Допустим, что $p(t, \varphi, \psi) \le 0$ — знакоотрицательная функция, обладающая свойством

$$I(\psi) = \theta\int\limits_0^\theta p(t_1, \psi + et_1, \psi)\,dt_1 < 0, \quad \psi \in R^m. \tag{21}$$

Очевидно, что

$$(-1)^k\int\limits_0^\theta dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_k\,(\theta - t_1 + t_k)(t_1 - t_2)\ldots(t_{k-1} - t_k)\,p(t_1, \psi + \\ + et_1, \psi)\ldots p(t_k, \psi + e\,t_k, \psi) \ge 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно, из соотношения (16) в силу (21) имеем

$$a(\psi) > 2, \ \psi \in R^m. \tag{22}$$

Теперь установим достаточные условия для случая 2). Допустим, что функция $p(t, \varphi, \psi) \ge 0$ — знакоположительная, удовлетворяющая условию

$$0 < I(\psi) = \theta\int\limits_0^\theta p(t_1, \psi + et_1, \psi)\,dt_1 \le 4, \ \ \psi \in R^m. \tag{23}$$

Положим

$$I_k(\psi) = \int\limits_0^\theta dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_k(\theta - t_1 + t_k)(t_1 - t_2)\ldots(t_{k-1} - t_k)\,p(t_1, \psi +$$

$$+et_1,\, \psi)...\, p(t_k,\, \psi\, +et_k,\, \psi) > 0\ (k = 1, 2, ...)$$

Так как $4\, a\, b \le (a + b)^2$, то

$$(\theta - t_1 + t_{k+1})\,(t_k - t_{k+1})\ \le\ \frac{1}{4}(\theta - t_1 + t_k)^2\ <\ \frac{\theta}{4}(\theta - t_1 + t_k).$$

Тогда

$$I_{k+1}(\psi)\ <\ \frac{\theta}{4}\int\limits_0^\theta p(\tau,\, \psi + e\tau,\, \psi)d\tau\, I_k\ (k = 1, 2, ...)$$

Из соотношения (16) получим ω-периодический по ψ ряд

$$a\,(\psi) = 2 - I_1(\psi) + I_2(\psi)\ -\ ... + (-1)^k\, I_k(\psi) + ... \tag{24}$$

который при каждом $\psi \in R^m$ представляет собой ряд Лейбница.

Следовательно, из (24) получим неравенство

$$2 - I_1(\psi)\ =\ 2 -\ \theta\int\limits_0^\theta p(t_1,\, \psi + et_1,\, \psi)\, dt_1\ <\ a\,(\psi)\ < 2,\ \ \psi \in R^m.$$

Отсюда в силу (23) имеем оценку

$$-2 < a\,(\psi) < 2,\ \ \psi \in R^m. \tag{25}$$

Таким образом, из условия (23) следует оценка (25).

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2). Тогда а) в случае знакоотрицательности $p(t, \varphi, \psi)\ \le\ 0$ и выполнения условия $I(\psi) < 0, \psi \in R^m$, мультипликаторы $\rho_1(\psi)$, $\rho_2(\psi)$- действительные непрерывно дифференцируемые ω- периодические функции, один из мультипликаторов по модулю меньше единицы, а другой — больше единицы при $\psi \in R^m$.*

б) в случае знакоположительности $p(t, \varphi, \psi)\ \ge\ 0$ и выполнения условия $0\ <\ I(\psi)\ \le\ 4$, $\psi \in R^m$, мультипликаторы $\rho_1(\psi)$, $\rho_2(\psi)$ — комплексно-сопряженные функции с непрерывно дифференцируемыми действительными и мнимыми ω-периодическими частями, модули которых равны единице при любых $\psi \in R^m$.

В приведенных в теореме 1 случаях спектр матрицы монодромии $X(\theta, \psi, \psi)$ не охватывает нуля.

Действительно, в случае а) областями изменения мультипликаторов $\rho_1(\psi)$, $\rho_2(\psi)$ являются отрезки $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2,\, \beta_2]$ оси $\mathrm{Re}\,\rho$ комплексной плоскости ρ, где постоянные α_1, β_1, α_2, β_2 удовлетворяют соотношению $0 < \alpha_1\ \le\ \beta_1 < 1 < \alpha_2 \le \beta_2$ или $\alpha_2\ \le\ \beta_2\ <\ -1 < \alpha_1 \le \beta_1 < 0$. Очевидно, что в этом случае можно указать односвязную область G с замкнутой границей Γ комплексной переменной ρ, не содержащую нуль, но содержащую спектр матрицы монодромии.

В случае б) спектром матрицы монодромии являются дуги единичной окружности плоскости комплексной переменной ρ, заключенные между вертикальными прямыми

$$\mathrm{Re}\,\rho = m,\, \mathrm{Re}\,\rho = M\ \text{ или }\ \mathrm{Re}\,\rho = -M,\, \mathrm{Re}\,\rho = -m,$$

где $m\ =\ \inf\limits_{R^m} |\mathrm{Re}\,\rho_1(\psi)|\ =\ \inf\limits_{R^m} |\mathrm{Re}\,\rho_2(\psi)|$, $M\ = \sup\limits_{R^m} |\mathrm{Re}\,\rho_1(\psi)|\ =\ \sup\limits_{R^m} |\mathrm{Re}\,\rho_2(\psi)|$.

Эти дуги всегда возможно покрыть односвязной областью G с замкнутой границей Γ, не содержащей нуль. Следовательно [4, с.50], существует ветвь $\Lambda(\psi)$ логарифма $Ln\, X\,(\theta,\, \psi,\, \psi)$

матрицы монодромии $X(\theta, \psi, \psi)$, являющаяся ω-периодической и непрерывно дифференцируемой

$$Ln\, X(\theta, \psi, \psi) = \Lambda(\psi) = \Lambda(\psi + k\,\omega) \in C_{\psi}^{(1)}(R^m),\ k \in Z^m. \tag{26}$$

В силу (16) и (26) матрицант $X\ (t, \varphi, \psi)$ можно представить в виде

$$X(t, \varphi, \psi) = \Phi(t, \varphi, \psi)\, e^{\frac{t}{\theta}\Lambda(\psi)}, \tag{27}$$

где матрица $\Phi(t, \varphi, \psi) = X\ (t, \varphi, \psi)\ e^{-\frac{t}{\theta}\Lambda(\psi)}$ многопериодична по (t, φ, ψ) с периодом (θ, ω, ω). Очевидно, что она — ω-периодична как по φ, так и по ψ. Покажем ее θ-периодичность по t.

$$\Phi(t+\theta, \varphi, \psi) = X\ (t+\theta, \varphi, \psi)\ e^{-\Lambda(\psi) - \frac{t}{\theta}\Lambda(\psi)} =$$
$$= X\ (t, \varphi, \psi)\ X\ (\theta, \psi, \psi)\ X^{-1}\ (\theta, \psi, \psi)\ e^{-\frac{t}{\theta}\Lambda(\psi)} = X\ (t, \varphi, \psi)\ e^{-\frac{t}{\theta}\Lambda(\psi)} = \Phi(t, \varphi, \psi).$$

Решения $z\ (t, \varphi, \psi)$ системы (4) с начальными данными из класса U представляются в виде

$$z\ (t, \varphi, \psi) = X\ (t, \varphi, \psi)\ u\ (\psi)\,, \tag{28}$$

где $u = (u_1, u_2)$ — двумерная вектор-функция, обладающая свойствами (3).

Тогда из (27) и (28) получим, что в случае (а) теоремы 1 ненулевые решения $z\ (t, \varphi, \psi)$ системы (4) неограничены, а в случае (б) все решения ограничены.

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено условие (2). Тогда в случае (а) теоремы 1 все ненулевые решения $x\ (t, \varphi, \psi)$ задачи (1) и (3) неограничены, а в случае (б) все решения ограничены.*

Доказательство теоремы 2 следует из эквивалентности системы (4) и уравнения (1).

Цитированная литература

1. **Демидович Б.П.** //Лекции по математической теории устойчивости М., 1967. 472с.

2. **Харасахал В.Х.** //Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алматы, 1970. 200с.

3. **Умбетжанов Д.И.** Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алматы, 1979. 210с.

4. **Самойленко А.М.** Элементы математической теории многочастотных колебаний. М., 1987. 304с.

5. **Сартабанов Ж.А.**//Труды семинара "Проблемы дифференциальных уравнений и математической физики". Актобе, 2002. С.58 — 63.

6. **Сартабанов Ж.А., Мухамбетова А.А., Бержанов А.Б.**//Вестник Актюбинского университета. 1998. № 2. С.6 — 10.

7. **Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А., Бержанов А.Б.**// Поиск. 2001. № 6. С. 147 — 151.

Поступила в редакцию 19.03.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 74 – 82*

УДК УДК 517.518

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Р. Ойнаров, С. Х. Шалгинбаева

Институт математики МО и Н РК
480100 Алматы, ул.Пушкина 125, oinarov@math.kz

1. Введение. Пусть $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Если $f_i \geq 0$ $(f_i > 0)$ для всех $i \geq 1$, то соответственно будем писать $f \geq 0$ $(f > 0)$. Запись $0 \leq f \uparrow$ $(0 \leq f \downarrow)$ означает, что $f \geq 0$ и $f_i \leq f_{i+1} (f_i \geq f_{i+1})$ для всех $i \geq 1$.

Рассмотрим весовую оценку

$$\|uAf\|_{l_q} \leq C \|vf\|_{l_p} \tag{1}$$

для матричных операторов следующих двух видов:

$$(Af)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \;\; i \geq 1\,, \tag{2}$$

$$(Af)_j = \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \;\; j \geq 1\,, \tag{3}$$

где $\|f\|_{l_p} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ – норма пространства последовательностей l_p, $(a_{i,j})$ – действительная неотрицательная матрица, u и v – неотрицательные последовательности, которые в дальнейшем будем называть весовыми последовательностями.

Исследованию оценок вида (1) посвящено большое количество работ (см., например, [1 - 6]). В [5] анонсирована теорема, устанавливающая справедливость оценки (1) для оператора (2), когда $1 < p \leq q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + a_{k,j}) \leq a_{i,j} \leq d(a_{i,k} + a_{k,j}) \;\text{ при }\; i \geq k \geq j \geq 1, \tag{4}$$

где постоянная $d > 1$ не зависит от i, k и j. В данной работе в предположении условия (4) даются критерии справедливости оценки (1) для операторов (2) и (3) при $1 < q < p < \infty$ (раздел 2). С использованием полученных результатов для операторов (2) и (3) устанавливаются и другие виды весовых оценок (раздел 3). Далее суммы вида $\sum\limits_{k}^{m}$ при $m < k$ и величины с нулевыми индексами, такие как, например, $a_{i,0}$, $a_{0,j}$, $a_{0,0}$, u_0, f_0 и т.д., будем считать равными

Keywords: *weighted inequality, matrix operator, weighted sequence*
2000 Mathematics Subject Classification: 46B45, 47A63

нулю. Неравенства вида $M \le cK$, когда значение положительной постоянной c для нашей цели не существенно, будем писать $M \ll K$, а $M \approx K$ будет означать, что $M \ll K \ll M$.

2. Весовая оценка (1). Положим

$$B_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_j^{-p'} \right\}^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$B_2 = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{j,k}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right\}^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$B_1^* = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{j,k}^q u_k^q \right)^{\frac{q}{p-q}} v_j^{-p'} \right\}^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$B_2^* = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q \right\}^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $1 < q < p < \infty$ и элементы матрицы $(a_{i,j})$ — неотрицательные и удовлетворяют условию (4). Тогда оценка (1) для оператора (2) выполнена тогда и только тогда, когда $B = max\{B_1, B_2\} < \infty$, при этом $B \approx C$, где C – наилучшая константа в (1).*

Так как оценка (1) для оператора (3) имеет место тогда и только тогда, когда справедлива дуальная к (1) оценка

$$\|v^{-1}Af\|_{p'} \le C\|u^{-1}f\|_{q'} \tag{5}$$

для оператора (2), из теоремы 1 имеем

Т е о р е м а 2. *Пусть $1 < q < p < \infty$ и элементы матрицы $(a_{i,j})$ — неотрицательные и удовлетворяют условию (4). Тогда оценка (1) для оператора (3) выполнена тогда и только тогда, когда $B^* = max\{B_1^*, B_2^*\} < \infty$, при этом $B^* \approx C$, где C – наилучшая константа в (1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Необходимость. Пусть для оператора (2) имеет место оценка (1). В (1) положим

$$\overline{f}_j = \left(\sum_{i=j}^{N} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_j^{-p'} \text{ при } 1 \le j \le N \text{ и } \overline{f}_j = 0 \text{ при } j > N.$$

Тогда, используя соотношение $b^\gamma - a^\gamma \approx b^{\gamma-1}(b-a)$, где $b > a > 0$, $\gamma > 0$, получим

$$C \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=j}^{N} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} = C B_{1,N}^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \overline{f}_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge \left(\sum_{i=1}^{N} u_i^q \sum_{j=1}^{i} \left[\left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k} \overline{f}_k \right)^q - \left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{i,k} \overline{f}_k \right)^q \right] \right)^{\frac{1}{q}} \approx \left(\sum_{i=1}^{N} u_i^q \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \overline{f}_j \left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k} \overline{f}_k \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \sum_{i=j}^{N} u_i^q a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k} \overline{f}_k \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Из левой части (4) следует, что $a_{i,k} \gg a_{i,j}$ при $i \geq j \geq k \geq 1$. Поэтому из (6) имеем

$$CB_{1,N}^{\frac{1}{p}} \gg \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \sum_{i=j}^{N} u_i^q a_{i,j}^q \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\sum_{s=k}^{N} a_{s,k}^q u_s^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} v_k^{-p'} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \left(\sum_{i=j}^{N} u_i^q a_{i,j}^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{j} \left(\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \left[\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'} - \sum_{s=1}^{k-1} v_s^{-p'} \right] \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \left(\sum_{i=j}^{N} u_i^q a_{i,j}^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{j} \left[\left(\sum_{s=1}^{k} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}} - \left(\sum_{s=1}^{k-1} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \right] \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \left(\sum_{i=j}^{N} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{j} v_s^{-p'} \right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}} = B_{1,N}^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно,

$$C \gg B_{1,N}^{\frac{p-q}{pq}} = \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=j}^{N} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{j} v_s^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Отсюда, в силу произвольности $N \geq 1$, имеем

$$C \gg B_1. \tag{7}$$

Так как оператор, сопряженный к оператору (2), совпадает с оператором (3), то для оператора (3) имеет место оценка (5), т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^{-p'} | \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i |^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} | u_i^{-1} g_i |^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{8}$$

причем наилучшие постоянные в неравенствах (1) и (8) совпадают. Полагая в (8)

$$\overline{g}_j = \left(\sum_{i=j}^{N} u_i^q \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{j,k}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{(q-1)(p-1)}{p-q}} u_j^q \ \text{ при } \ 1 \leq j \leq N \ \text{ и } \ \overline{g}_j = 0 \ \text{ при } \ j > N$$

и применяя те же рассуждения, что и выше, имеем

$$C \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=j}^{N} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{s=1}^{j} a_{j,s}^q v_s^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{1}{q'}} = CB_{2,N}^{\frac{1}{q'}} \gg B_{2,N}^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда $C \gg B_2$, что вместе с (7) дает

$$C \gg B = max\{B_1, B_2\}. \tag{9}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Отметим, что имеются различные методы доказательства непрерывного аналога теоремы 1 (см. [7 - 9]). Однако не все методы проходят в дискретном случае. Здесь мы будем использовать метод доказательства достаточной части теоремы 2.19 из [7].

Пусть $B<\infty$. Достаточно доказать справедливость неравенства (1) для неотрицательных и финитных последовательностей f, т. е. для $f\geq 0$ и $f_i=0$ при $i\geq N=N(f)>1$. Используя (4), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}f_j\right)^q=\sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\sum_{j=1}^{i}\left[\left(\sum_{k=1}^{j}a_{i,k}f_k\right)^q-\left(\sum_{k=1}^{j-1}a_{i,k}f_k\right)^q\right]\approx$$

$$\approx\sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}f_j\left(\sum_{k=1}^{j}a_{i,k}f_k\right)^{q-1}=\sum_{j=1}^{\infty}f_j\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}u_i^q\left(\sum_{k=1}^{j}a_{i,k}f_k\right)^{q-1}\approx$$

$$\approx\sum_{j=1}^{\infty}f_j\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^qu_i^q\left(\sum_{k=1}^{j}f_k\right)^{q-1}+\sum_{j=1}^{\infty}f_j\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}u_i^q\left(\sum_{k=1}^{j}a_{j,k}f_k\right)^{q-1}=I_1+I_2. \tag{10}$$

Для оценки I_1, применяя неравенство Гельдера с показателями $p,\frac{p}{q-1}$ и $\frac{p}{p-q}$, получим

$$I_1=\sum_{j=1}^{\infty}f_jv_j\left(v_j^{-\frac{q-1}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{-(q-1)}\left(\sum_{k=1}^{j}f_k\right)^{q-1}\right)\left(v_j^{-\frac{p-q}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{q-1}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^qu_i^q\right)\leq$$

$$\leq\|vf\|_{l_p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{-p}\left(\sum_{k=1}^{j}f_k\right)^{p}\right)^{\frac{q-1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^qu_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}$$

$$=B_1^q\,\|vf\|_{l_p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{-p}\left(\sum_{k=1}^{j}f_k\right)^{p}\right)^{\frac{q-1}{p}}. \tag{11}$$

На основании обобщенного неравенства Харди для последовательности (см. [4]) имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}v_k^{-p'}\right)^{-p}\left(\sum_{k=1}^{j}f_k\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\ll C_p(v)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_if_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{12}$$

где

$$C_p(v)=\sup_{k\geq 1}\left(\sum_{j=k}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{j}v_i^{-p'}\right)^{-p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{k}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Оценим $C_p(v)$. Пусть $V_k=\sum\limits_{i=1}^{k}v_j^{-p'}$. Тогда

$$\sum_{j=k}^{\infty}v_j^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{j}v_i^{-p'}\right)^{-p}=v_k^{-p'}V_k^{-p}+\sum_{j=k+1}^{\infty}v_j^{-p'}V_j^{-p}=v_k^{-p'}V_k^{-p}+\sum_{j=k+1}^{\infty}V_j^{-p}(V_j-V_{j-1})\leq$$

$$\leq v_k^{-p'}V_k^{-p}+\int\limits_{V_k}^{\infty}t^{-p}dt\leq v_k^{-p'}V_k^{-p}+\frac{V_k^{1-p}}{p-1}\ll V_k^{1-p}.$$

Следовательно, $C_p(v) \ll 1$ и из (11) и (12) получим

$$I_1 \ll B_1^q \, \|vf\|_{l_p}^q. \tag{13}$$

Оценим выражение I_2, последовательно применяя неравенство Гельдера, преобразование Абеля и неравенство Минковского и используя обозначения $\Delta^+ b_j = b_j - b_{j+1}$, $\Delta^- b_j = b_j - b_{j-1}$,

$$I_2 \le \|vf\|_{l_p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} u_i^q \right)^{p'} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{j,k} f_k \right)^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} = \|vf\|_{l_p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Af)_j^{p'(q-1)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \, \Delta^+ \left(\sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \left(\sum_{k=i}^{\infty} a_{k,i} u_k^q \right)^{p'} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} = \|vf\|_{l_p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} v_i^{-p'} \left(\sum_{k=i}^{\infty} a_{k,i} u_k^q \right)^{p'} \Delta^-(Af)_j^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \|vf\|_{l_p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=j}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^{p'} \Delta^-(Af)_j^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \|vf\|_{l_p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j^{p'} \Delta^-(Af)_j^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} = \|vf\|_{l_p} \, I_{21}, \tag{14}$$

где $\Phi_j = \sum\limits_{k=j}^{\infty} u_k^q (\sum\limits_{i=j}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{-p'})^{\frac{1}{p'}}$. Применяя неравенство Гельдера с показателями s и s', где $p' < s < \frac{p}{p-q}$, оценим выражение Φ_j

$$\Phi_j = \sum_{k=j}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=j}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} u_k^{\frac{q}{s}} \right] \left[\left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{-\frac{1}{p}} u_k^{\frac{q}{s'}} \right] \le \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{s}{p}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{i=j}^{k} a_{k,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{s}{p'}} u_k^q \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{-\frac{s'}{p}} u_k^q \right)^{\frac{1}{s'}} = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{-\frac{s'}{p}} \Delta^+ \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right) \right)^{\frac{1}{s'}} \overline{\Phi}_j^{\frac{1}{s}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=j}^{\infty} \Delta^+ \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{1-\frac{s'}{p}} \right)^{\frac{1}{s'}} \overline{\Phi}_j^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{s'} - \frac{1}{p}} \overline{\Phi}_j^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{s}} \overline{\Phi}_j^{\frac{1}{s}}. \tag{15}$$

Используя (15) и неравенство Гельдера с показателями $\frac{s}{p'}$ и $\frac{s}{s-p'}$, для I_{21} получим

$$I_{21} \ll \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{1-\frac{p'}{s}} \overline{\Phi}_j^{\frac{p'}{s}} \Delta^-(Af)_j^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{1-\frac{p'}{s}} \overline{\Phi}_j^{\frac{p'}{s}} (Af)_j^{p'(q-1)-1} \Delta^-(Af)_j \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\overline{\Phi}_j^{\frac{p'}{s}} (Af)_j^{p'(q-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{s})-1} \left(\Delta^-(Af)_j\right)^{\frac{p'}{s}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{1-\frac{p'}{s}} (Af)_j^{(q-1)(1-\frac{p'}{s}} \left(\Delta^-(Af)_j\right)^{1-\frac{p'}{s}} \right] \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\Phi}_j (Af)_j^{(q-1)(\frac{s}{p}+1)-\frac{s}{p'}} \Delta^-(Af)_j \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} u_i^q (Af)_j^{q-1} \Delta^-(Af)_j \right)^{\frac{s-p'}{sp'}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\Phi}_j \Delta^-(Af)_j^{q-\frac{s(p-q)}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \Delta^-(Af)_j^q \right)^{\frac{s-p'}{sp'}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Af)_j^{q-\frac{s(p-q)}{p}} \Delta^+ \overline{\Phi}_j \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \sum_{j=1}^{i} \Delta^-(Af)_j^q \right)^{\frac{s-p'}{sp'}} = I_{22} \, \|uAf\|_{l_q}^{\frac{q(s-p')}{sp'}}. \tag{16}$$

Для оценки I_{22} применим неравенство Гельдера с показателями $\frac{pq}{(p-q)s}, \frac{pq}{pq-s(p-q)}$

$$I_{22} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} (u_j (Af)_j)^{q-\frac{s(p-q)}{p}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{s}{p}} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{s}{p'}} u_j^{\frac{(p-q)s}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j^q (Af)_j^q \right)^{\frac{pq-s(p-q)}{spq}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} = B_2 \|uAf\|_{l_q}^{\frac{pq-s(p-q)}{spq}}. \tag{17}$$

Последовательно используя оценки (16) и (17), из (14) имеем

$$I_2 \ll B_2 \|vf\|_{l_p} \|uAf\|_{l_q}^{q-1}. \tag{18}$$

Подставляя оценки (13) и (18) в (10), а затем применяя неравенство Юнга, получим

$$\|uAf\|_{l_q}^q \le C_1^q B_1^q \|vf\|_{l_p}^q + C_2 B_2 \|vf\|_{l_p} \|uAf\|_{l_q}^{q-1} \le (C_1^q B_1^q + \frac{1}{q} C_2^q B_2^q) \|vf\|_{l_q}^q + \frac{1}{q'} \|uAf\|_{l_q}^q.$$

Отсюда

$$\|uAf\|_{l_q} \ll B \, \|vf\|_{l_p}. \tag{19}$$

Следовательно, имеет место оценка (1) и наилучшая постоянная C в (1) удовлетворяет оценке $C \ll B$, которая вместе с (9) дает $C \approx B$. Теорема 1 доказана.

3. Приложение теорем 1 и 2. Рассмотрим аддитивную оценку вида

$$\|uAf\|_{l_q} \le C(\|vf\|_{l_p} + \|wRf\|_{l_p}), f \ge 0, \tag{20}$$

где $(Rf)_j = \sum\limits_{i=1}^{j} r_i f_i$, а u, v, w и r — весовые последовательности. Оценка (20), очевидно, является более общей оценкой, чем оценка (1). При $w = 0$ мы имеем (1), а при $v = 0$ оценку

$$\|uAf\|_{l_q} \le C \|wRf\|_{l_p}, f \ge 0. \tag{21}$$

Здесь в предположении, что элементы матрицы $(\frac{a_{i,j}}{r_j})$ удовлетворяют условию (4), т. е.

$$a_{i,j} \approx \frac{a_{i,k}}{r_k} r_j + a_{k,j} \ \text{ при } \ i \geq k \geq j \geq 1, \tag{22}$$

устанавливаются критерии справедливости оценок (20) и (21) сведением их к равносильной оценке вида (1).

Пусть $u > 0$, $v > 0$, $r > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i^p < \infty$. Для $n \geq 1$ определим

$$\phi_n = \left\{ \min_{1\leq k\leq n} \left[\left(\sum_{i=k}^{n} r_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{i=k}^{\infty} w_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^{-1}.$$

Пусть $U_j = \left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$ и $M_1 = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r_j} \left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} \Delta^- \phi_j^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}$,

$$M_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{a_{j,i}^{p'}}{r_i^{p'}} \Delta^- \phi_i^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} \Delta^+ U_j^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Теорема 3. *Пусть $1 < q < p < \infty$ и элементы матрицы $(a_{i,j})$ — неотрицательные и удовлетворяют условию (22). Тогда оценка (20) для оператора (2) имеет место тогда и только тогда, когда $M = max\{M_1, M_2\} < \infty$, при этом $M \approx C$, где C — наилучшая постоянная в (20).*

Доказательство. Полагая в (20) $r_i f_i = g_i$, $i \geq 1$, получим равносильную (20) оценку

$$\|uAr^{-1}\|_{l_q} \leq C(\|vr^{-1}g\|_{l_p} + \|wHg\|_{l_p}), \ g \geq 0, \tag{23}$$

где $(Hg)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} g_j$. Пусть $\overline{a}_{i,j} = \max\limits_{j\leq k\leq i} \frac{a_{i,k}}{r_k}$. Из (22) следует, что элементы матрицы $(\overline{a}_{i,j})$ удовлетворяют условию (4) и имеет место соотношение

$$\overline{a}_{i,j} \approx \frac{a_{i,k}}{r_k} \ \text{ при } \ i \geq k \geq j \geq 1. \tag{24}$$

Поэтому $(Ar^{-1}g)_i \approx (\overline{A}g)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \overline{a}_{i,j} g_j, i \geq 1$ и неравенство (23) эквивалентно неравенству

$$\|u\overline{A}g\|_{l_q} \leq C_1(\|vr^{-1}g\|_{l_p} + \|wHg\|_{l_p}), \ g \geq 0, \tag{25}$$

причем $C \approx C_1$, где C и C_1 — наилучшие постоянные в (23) и (25) соответственно. Так как элементы матрицы $(\overline{a}_{i,j})$ — неотрицательные и по определению не возрастают по второму индексу, то в силу теоремы 2 из [6] неравенство (25) равносильно неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\sum_{j=1}^{i} \overline{a}_{i,j} g_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(g_i (\Delta^- \phi_i^{p'})^{-\frac{1}{p'}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ g \geq 1, \tag{26}$$

причем $C_1 \approx C_2$, где C_2 – наилучшая постоянная в (26).

Матрица $(\overline{a}_{i,j})$ удовлетворяет условию теоремы 1, поэтому в силу теоремы 1 оценка (26) выполнена тогда и только тогда, когда $\overline{M} = max\{\overline{M}_1, \overline{M}_2\}$, причем $\overline{M} \approx C_2$, где

$$\overline{M}_1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{a}_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \phi_j^{\frac{p'p(q-1)}{p-q}} \Delta^- \phi_j^{p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\overline{M}_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{j} \overline{a}_{j,i}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Используя (24) и соотношение

$$(\phi_j^{p'})^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \Delta^- \phi_j^{p'} \approx \Delta^- \phi_j^{\frac{pq}{p-q}}, \ \left(\sum_{i=j}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q = (U_j^q)^{\frac{q}{p-q}} \Delta^+ U_j^q \approx \Delta^+ U_j^{\frac{pq}{p-q}},$$

имеем $\overline{M}_1 \approx M_2$, $\overline{M}_2 \approx M_1$. Следовательно, $M \approx C$. Теорема 3 доказана.

Положим $W_k = \left(\sum\limits_{i=k}^{\infty} w_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}$, $G_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \overline{a}_{k,i} g_i$, $F_k = (Rf)_k$, $k \geq 1$,

$$M_{1,0} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{r_j} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} \Delta^- W_j^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$M_{2,0} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{a_{j,i}^{p'}}{r_i^{p'}} \Delta^- W_i^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} \Delta^+ U_j^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Теорема 4. *Пусть $1 < q < p < \infty$ и элементы матрицы $(a_{i,j})$ — неотрицательные и удовлетворяют условию (22). Тогда оценка (21) для оператора (2) имеет место тогда и только тогда, когда $M_0 = max\{M_{1,0}, M_{2,0}\} < \infty$, причем $M_0 \approx C$, где C – наилучшая постоянная в (21).*

Доказательство. Пусть $K = \{f : f \geq 0\}$,$K \uparrow = \{F : 0 \leq F \uparrow\}$. Так как соотношение $f_j = \frac{1}{r_j}(F_j - F_{j-1})$, $j \geq 0$ определяет взаимнооднозначное соответствие между конусами K и $K \uparrow$, то из (21) имеем

$$C = \sup_{f \geq 0} \frac{\|uAf\|_{l_q}}{\|wRf\|_{l_p}} = \sup_{0 \leq F \uparrow} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum\limits_{j=1}^{i} \frac{a_{i,j}}{r_j} \Delta^- F_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |w_i F_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{27}$$

На основании обратной задачи неравенства Гельдера и из соотношения (24) следует

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{a_{i,j}}{r_j} \Delta^- F_j \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{a_{i,j}}{r_j} \Delta^- F_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}} \approx \sup_{g \geq 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Delta^- F_j \sum\limits_{i=j}^{\infty} \overline{a}_{i,j} g_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}} =$$

$$= \sup_{g\ge 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j \Delta^- F_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}} = \sup_{g\ge 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_j \Delta^+ G_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}}. \tag{28}$$

В силу (27), (28) и результатов работы [10] получим

$$C \approx \sup_{g\ge 0} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}} \sum_{0\le F\uparrow} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_j \Delta^+ G_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |w_i F_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}} \approx$$

$$\approx \sup_{g\ge 0} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} W_j^{p'} \Delta^+ G_j^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}} = \sup_{g\ge 0} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j^{p'} \Delta^- W_j^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}} = C_1.$$

Следовательно, неравенство (21) равносильно неравенству

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{a}_{i,j} g_j\right)^{p'} \Delta^- W_j^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i^{-1} g_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{29}$$

Так как $1 < q' < p' < \infty$ при $1 < q < p < \infty$, то на основании теоремы 2 оценка (29) имеет место тогда и только тогда, когда $M_0 < \infty$ и при этом $M_0 \approx C_1 \approx C$. Теорема 4 доказана.

Цитированная литература

1. **Braverman M. S., Stepanov V. D.** // Bull. London Math. Soc. 1994. V.26. P.283—287.

2. **Cuss F. P., Kratz W.** // Rocky Mountain J. Math. 1990. V.29. P.59—74.

3. **Jonson JR. P. D., Mohapatra R. N., David Ross** // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V.124, №2. P.543—547.

4. **Goldman M. L.** // Res. Rep. 98/31. Khabarovsk: Russ. Acad. Sci. Far-East Branch Comput. Center, 1998. 69p.

5. **Булабаев А.** // Юбилейная научная конференция посвященная 50-летию развитию математики в АН РК. Тезисы. Алматы, 1995. С.73.

6. **Ойнаров Р.** // Труды междунар. конф. "Современное состояние и перспективы разв. мат. в рамк. прогр. "Казахстан в третьем тысячилетии". Алматы, 2001. С.111—115.

7. **Kufner A., Persson L. E.** // Prague, 2000. P.211.

8. **Ойнаров Р.** // Тр. МИ РАН. 1993. Т.204. С.240—250.

9. **Stepanov V. D.** // Nonlinear Analysis, Funcation Spaces and Applications. Proceedings of the Spring School held in Prague, May 23-28, 1994. V.5. P.139—175.

10. **Ойнаров Р., Шалгинбаева С.** // Изв.МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. №1. С.33—42.

Поступила в редакцию 16.06.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 83 — 86*

УДК 517.9

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА НЕЛИНЕЙНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

И.Н. Панкратова, М.И. Рахимбердиев

Институт математики МОН РК
Алматы, ул.Пушкина, 125, irina@math.kz

Показано, что отображение, заданное многомерным многопараметрическим аналогом нелинейного логистического разностного уравнения, представимо в виде суперпозиции одномерных однопараметрических отображений с различными параметрами.

Введение. Рассматривается система

$$x(m) = (1 - \sum_{1}^{n} x_i(m-1))Ax(m-1), \quad m \in N, \quad x \in L^n, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица параметров, L^n - n-мерное линейное нормированное пространство с нормой $|x| = \sum_1^n |x_i|$.

Отображение f, $fx = (1 - \sum_1^n x_i)Ax$ порождает динамическую систему как полугруппу отображений f^m (с учетом необратимости f), действующих в L^n. В качестве компактного фазового пространства системы f^m возьмем множество $K = \{x \in L^n | x \geq 0, \sum\limits_{1}^{n} x_i \leq 1\}$ (см. [1]). Инвариантность множества K в положительном направлении относительно f обеспечивается выбором матрицы A: A - неотрицательная матрица, т.е. $a_{ij} \geq 0 \; \forall i, j = \overline{1, n}$ и $\|A\| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq$ ≤ 4. (Компактность множества K гарантирует, что все ω-предельные множества системы f^m не пусты.)

При $n = 1$ $A \equiv \lambda - const$, $K \equiv I = [0, 1]$ и мы приходим к известному и хорошо изученному логистическому разностному уравнению

$$x(m) = \lambda(1 - x(m-1))x(m-1), \quad m \in N, \quad x \in L^1, \tag{2}$$

которое задает на L^1 отображение $\chi_\lambda = \lambda(1-x)x$ [2-3], что позволяет интерпретировать систему (1) как многомерный многопараметрический аналог уравнения (2). С другой стороны, система (1) содержит в качестве подсистемы уравнение (2) на каждом собственном направлении

Keywords: *dynamical system, many-dimensional many parameters dynamics, nonlinear difference equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 37C05, 39A05, 65P30

матрицы A [1]. В частности, любое решение системы (1), начинающееся в K и коллинеарное собственному вектору $e \geq 0$, $|e| = 1$, $Ae = \lambda e$, $\lambda \geq 0$ (см. [4], с. 344), представимо в виде $x(m) = \varphi(m)e$, где скалярная функция $\varphi(m)$ удовлетворяет уравнению (2).

В общем случае характер поведения решений системы (1) не описывается уравнением (2). Здесь мы покажем, что существует некоторый класс скалярных уравнений, которые задаются в виде суперпозиции отображений $\chi_\lambda = \lambda(1-x)x$ с различными λ и определяют динамику системы (1). Чтобы исключить вырожденный случай $\lambda = 0$, будем рассматривать системы вида (1) с неразложимыми матрицами A.

Каноническая форма системы. Ограничимся случаем системы вида (1) с неразложимой матрицей индекса импримитивности n. Такая матрица имеет единственный собственный вектор $e > 0$ с положительным собственным значением $\lambda > 0$ [4, с. 334, 355]. Заметим, что система (1) инвариантна относительно линейного преобразования с матрицей перестановок. Поэтому согласно теореме Фробениуса [4, с. 334] система (1) приводима к системе с матрицей A "циклического"вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Из неразложимости матрицы A следует, что $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Систему (1) с такой матрицей будем называть *канонической.*

Скалярное представление системы. Пусть e^1 - произвольный вектор из K, $|e^1| = 1$, отличный от собственного вектора e, $|e| = 1$. Определим векторы $e^2, \dots, e^n$ рекуррентно равенством $e^i = |Ae^{i-1}|^{-1}Ae^{i-1}$, $i = 2, \dots, n$. Обозначим $\lambda_i = |Ae^i|$. Согласно "циклическому"виду матрицы A имеем следующие соотношения:

$$Ae^1 = \lambda_1 e^2, \dots, Ae^n = \lambda_n e^1, \;\; e^{n+1} \equiv e^1, \;\; \lambda^n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{3}$$

Фиксируем любую точку на максимальном отрезке луча в K, направленного вдоль вектора e^1, - начальная точка траектории $x(m)$. Запишем ее в виде $x(0) = \varphi(0)e^1$. Тогда из (1) в силу (3) получим

$$x(1) = (1 - \sum_1^n x_i(0))Ax(0) = \lambda_1(1-\varphi(0))\varphi(0)e^2.$$

Обозначим $\varphi(1) = \lambda_1(1-\varphi(0))\varphi(0) \equiv \chi_{\lambda_1}(\varphi(0))$. Имеем $x(1) = \varphi(1)e^2$. Аналогично для всех k, $k = 2, \dots, n-1$ вектор $x(k)$ представим в виде $x(k) = \varphi(k)e^{k+1}$ и $x(n) = \varphi(n)e^1$. Введем вспомогательный вектор $x^*(k) = \varphi(k)e^1$. Из (3) следует, что $x^*(0) = x(0)$, $x^*(n) = x(n)$. Поэтому $x^*(k) = \varphi(k)e^1 = \chi_{\lambda_k} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}(\varphi(0))e^1$, $k = \overline{1,n}$. Полагая $k = n$, получим, что для любого вектора $x \in K$ выполняется равенство $f^n x = \chi_{\lambda_n} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}(x_1)e^1$, где $x = x_1 e^1$, $x_1 \in I$. В этом смысле максимальный отрезок луча в K, определяемый направлением любого вектора $x \in K$, является инвариантным множеством отображения f^n. Ограничение f^n на этом отрезке луча представимо в виде $f^n = \chi_{\lambda_n} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$.

При фиксированном направлении, определяемом вектором $x \in K$, отображение f^n определяет точки траектории $f^m x$, которые соответствуют моментам времени, кратным n. Другие точки траектории $f^m x$ принадлежат другим направлениям. Эти направления определяются как результат последовательного отображения вектора x матрицей A. Отображение f^n на этих направлениях также определяется суперпозицией отображений χ_λ, при этом последовательность значений λ образуется из совокупности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ циклическими перестановками. Таким образом, мы установили, что рассматриваемая многомерная динамическая система f^m описывается множеством одномерных динамических систем. Сформулируем полученный вывод в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Отображение f^n в K на луче вдоль любого вектора x представимо как суперпозиция одномерных отображений χ_λ, т.е. в виде $f^n = \chi_{\lambda_n} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - некоторые положительные числа.*

Наша дальнейшая цель — определить для данной матрицы A возможное значение параметров, допускающих представление f^n в виде суперпозиции одномерных отображений χ_λ.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ - некоторый набор векторов из L^n и $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ - многогранный конус, образованный множеством векторов вида $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ - произвольные неотрицательные числа. Введем в рассмотрение следующие векторы:

$$b_1 = (a_n, a_{n-1}a_n, \ldots, a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, 1),\ b_2 = (a_1, a_n a_1, \ldots, a_3 \cdot \ldots \cdot a_n a_1, 1), \ldots,$$

$$b_n = (a_{n-1}, a_{n-2}a_{n-1}, \ldots, a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, 1).$$

Теорема 2. *Отображение f^n на луче вдоль некоторого вектора x из K представимо в виде $f^n = \chi_{\lambda_n} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}$ тогда и только тогда, когда $(\lambda_1, \lambda_1\lambda_2, \ldots, \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}, 1) \subseteq \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in K$, $x \neq 0$. Обозначим $e^1 = |x|^{-1}x$. Определим векторы $e^2, \ldots, e^n$, удовлетворяющие соотношениям (3). Тогда

$$Ae^1 = \lambda_1 e^2,\ A^k e^1 = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k e^{k+1},\ k = 2, \ldots, n-1,\ A^n e^1 = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n e^1. \tag{4}$$

Для любого k, $k = 2, \ldots, n-1$ матрица A^k имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \ldots \cdot a_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-k} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-k+2} \cdot \ldots \cdot a_n a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

При $k = n$ $A^n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n E$, E - единичная матрица. Из (4) имеем $|A^k e^1| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$ и, следовательно, координаты вектора e^1 удовлетворяют линейной системе

$$\begin{aligned} a_n x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n = \lambda_1, \\ a_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot a_n x_1 + a_{n-k+2} \cdot \ldots \cdot a_n a_1 x_2 + \ldots + a_n a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} x_k + \\ + a_1 \cdot \ldots \cdot a_k x_{k+1} + \ldots + a_{n-k} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} x_n = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k,\ \ k = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Из (4) также следует, что $A^n e^1 = \lambda^n e^1$ и $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Поэтому обе части последнего уравнения системы (5) можно сократить на равную ненулевую величину. Полученная в результате система, записанная в матричном виде $Bx = h$, равносильна системе (5). Если x - неотрицательное решение данной системы, то это означает, что $h \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.

2. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - некоторые положительные числа такие, что $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ и пусть $h_0 = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2, \ldots, \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)$. Тогда существование решения системы уравнений (5) с правой частью h_0 эквивалентно существованию решения системы $Bx = h$, где $h = (\lambda_1, \lambda_1\lambda_2, \ldots, \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1}, 1)$. Если $h \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, то существуют такие неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $h = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$, т.е. вектор $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ есть решение системы $Bx = h$ и, следовательно, системы (5), при этом $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Теорема доказана.

Нелинейный аналог модели Лесли. Уравнение (2) имеет биологическую интерпретацию и описывает механизм саморегуляции биологической популяции в условиях стационарной экосистемы с ограниченными ресурсами [3, с.5]. Здесь $x(m)$ - относительная численность (плотность) популяции в момент времени m. Лимитирующим фактором в данной модели является функция $1-x$, убывающая до нуля с увеличением плотности x. Систему (1) канонического вида также можно интерпретировать как многогрупповую популяционную модель. Действительно, матрица, сопряженная к A, является матрицей Лесли, имеющей всего один ненулевой коэффициент рождаемости a_n, соответствующий одной репродуктивной группе, и ненулевые коэффициенты выживаемости $a_1, \ldots, a_{n-1}$ [5]. В качестве лимитирующей по общей численности функции выступает множитель $1-\sum_1^n x_i$. Следовательно, систему (1) канонического вида можно рассматривать как один из вариантов нелинейной модели Лесли с единственной репродуктивной группой (другие нелинейные модели рассмотрены в [6-7]). При этом на коэффициенты матрицы A необходимо наложить дополнительные ограничения: $a_i \leq 1$, $i=\overline{1, n-1}$.

Пример. Проиллюстрируем на примере, что многопараметричность в представлении отображения f^n существенна, т.е. его свойства зависят от выбора начального вектора e^1, который, в свою очередь, определяет совокупность $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Для этого рассмотрим две двумерные канонические системы и сравним типы их притягивающих предельных множеств. Коэффициенты матриц первой системы: $a_1=a_2=\lambda$, второй системы: $a_1=4$ (максимальное из возможных значений параметров), a_2 определяется из условия $a_1 a_2=\lambda^2$. Здесь $\lambda=3,678\ldots$ - значение параметра λ, при котором отображение χ_λ имеет в качестве притягивающего множества на I странный аттрактор, состоящий из одного отрезка [2, с.23]. Для первой системы на луче вдоль любого направления $x \in K$ $\lambda_1=\lambda_2 \equiv \lambda$. Поэтому отображение $f^2=\chi_{\lambda_1} \circ \chi_{\lambda_2} \equiv \chi_\lambda^2$ имеет в качестве притягивающего множество, гомеоморфное указанному одномерному странному аттрактору. Вторая система имеет разные типы притягивающих предельных множеств в зависимости от выбора вектора $e^1 \in K$. В частности, притягивающее множество на луче, образованном собственным вектором матрицы A, также гомеоморфно одномерному странному аттрактору (здесь $\lambda_1=\lambda_2 \equiv \lambda$). Однако, на лучах, образованных координатными векторами $e^1=(1,0)$ и $Ae^1 \parallel e^2=(0,1)$ (здесь $\lambda_1 \equiv a_1=4$, $\lambda_2 \equiv a_2=3,381\ldots$), отображения $f^2=\chi_{a_2} \circ \chi_{a_1}$ и $f^2=\chi_{a_1} \circ \chi_{a_2}$ имеют в качестве притягивающих предельных множеств по одной неподвижной нетривиальной точке.

Цитированная литература

1. **Панкратова И.Н.** О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения //Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995 — 997.

2. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.** // Динамика одномерных отображений. Киев, 1989.

3. **Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.** Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.

4. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., 1988.

5. **Leslie P. H.** The use of matrices in certain population mathematics. // Biometrika. 1945. V. 33. P. 183— 212.

6. **Логофет Д. О.** // Докл.АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077 — 1081.

7. **Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.** стойчивость биологических популяций. М., 1976.

Поступила в редакцию 19.05.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 87 – 95*

УДК 517.925.5:519.216

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М.И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК
Алматы, ул. Пушкина, 125, marat207@math.kz

Приводятся истоки и современное состояние теории обратных задач динамики при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости одной из обратных задач — задачи восстановления при наличии случайных возмущений из класса более общего, чем винеровские процессы, а именно, из класса процессов с независимыми приращениями.

1. Введение. В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).

Обратные задачи дифференциальных систем продолжают привлекать к себе внимание своими широкими прикладными возможностями и восходят к таким классическим обратным задачам дифференциальных систем, как задача Ньютона об определении силы, под действием которой планеты совершают движение со свойствами, заданными в виде законов Кеплера; задача Бертрана об определении силы, под действием которой материальная точка при любых начальных условиях движется по коническому сечению; задача Суслова об отыскании силовой функции, которая определяет силы, вызывающие движение голономной механической системы с заданными интегралами; задача Мещерского об определении закона изменения массы точки и скорости изменяющейся массы так, чтобы в заданном поле сил точка переменной массы совершала движение по заданной траектории или по заданному закону; задача Гельмгольца о построении функционала, принимающего стационарное значение на решениях заданного уравнения Ньютона.

В работах А.С. Галиуллина [2,3] изложены постановка и классификация обратных задач дифференциальных систем, а также их решение в классе ОДУ.

В настоящее время сформулированы возможные постановки обратных задач дифференциальных систем и достаточно полно разработаны общие методы решения этих задач в классе ОДУ. При этом оказалось, что если заданные свойства движения механической системы могут быть аналитически представлены как первые или частные интегралы соответствующих уравнений движения, то решение обратных задач динамики в общем случае сводится к построению

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equation, integral manyfold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

дифференциальных уравнений по заданным интегралам и к определению в дальнейшем из них искомых сил и моментов, параметров и связей, необходимых для осуществления движения рассматриваемой механической системы с предварительно заданными свойствами. Один из общих методов решения обратных задач дифференциальных систем в классе ОДУ (метод квазиобращения) предложен в работе [4].

Новый этап в исследовании обратных задач дифференциальных систем связан с возросшим в последние годы интересом к исследованию задачи Гельмгольца. Классическая обратная задача Гельмгольца [5] – это задача построения по заданным уравнениям движения механической системы в форме Ньютона эквивалентных уравнений движения в форме Лагранжа.

Таким образом, основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [2—4 и др.] для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Но повышение требований к точности и работоспособности материальных систем приводит к ситуации, когда многие наблюдаемые явления уже не могут быть объяснены с позиции детерминированных процессов. Это обстоятельство потребовало, в частности, привлечения вероятностных законов для моделирования поведения реальных систем.

Стохастическими дифференциальными уравнениями типа Ито описываются многочисленные и важные в приложении модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил, например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [6], или флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе [7] и многие другие.

2. Обратные задачи со случайными возмущениями из класса винеровских процессов. В работах [8—13] изучаются обратные задачи дифференциальных систем в вероятностной постановке и разработаны методы решения: 1) основной задачи построения, 2) задачи замыкания и 3) задачи восстановления стохастических уравнений второго порядка Ито по заданному интегральному многообразию. В работах [11—13] исследована разрешимость стохастической задачи Гельмгольца. В указанных работах исследуется влияние случайных возмущающих сил на разрешимость обратных задач динамики.

И, в частности, при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов:

1) в [8] решена задача построения стохастического дифференциального уравнения второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения; в терминах коэффициентов уравнения получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия построенного уравнения;

2) в [9] решена задача замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, в терминах коэффициентов уравнения получены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия достроенной системы стохастических уравнений;

3) в [10] решена задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит: i) в коэффициент сноса, ii) в коэффициент диффузии и iii) как в коэффициент сноса, так и в коэффициент диффузии: в этих случаях определен вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия;

4) различные постановки стохастической задачи Гельмгольца рассмотрены в [11—13]. По заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные в смысле почти наверное, в среднем, в среднем квадратическом и по распределению стохастические уравнения лагранжевой структуры, определяются условия прямого и непрямого аналитического представления лагранжиана при наличии случайных возмущений.

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, основой которого служит

Лемма 1[4, с.12—13]. Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu), \tag{1}$$

$$\mu = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n},\ m \le n,$$

где матрица H имеет ранг равный m,
определяется выражением

$$v = sv^\tau + v^\nu. \tag{2}$$

Здесь s - произвольная скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k – единичные орты пространства R^n, $v^\tau = (v_k^\tau)$,

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, H^T — матрица, транспонированная к H.

2.1. Основная обратная задача стохастических дифференциальных систем (СДС). В работе [8] приводится решение общей задачи построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка.

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m,\ \ \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C^{121}_{x\dot{x}t}, \tag{3}$$

строится уравнение движения в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{4}$$

так, чтобы множество (3) было интегральным многообразием уравнения (4).
Здесь $x \in R^n,\ \xi \in R^k,\ \sigma(x, \dot{x}, t)$ – матрица размерности $(n \times k)$, $\{\xi_1(t, \omega), ..., \xi_k(t, \omega)\}$ – система независимых винеровских процессов [14], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P); а $C^{121}_{x\dot{x}t}$ обозначает множество функций $\gamma(x, \dot{x}, t)$, непрерывно дифференцируемых по x и t, и дважды непрерывно дифференцируемых по $\dot{x}$.
Предполагается, что вектор–функция $f(x, \dot{x}, t)$ и матрица $\sigma(x, \dot{x}, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x и $\dot{x}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \{y = (x, \dot{x}) : \rho(y, \Lambda(t)) < H, H > 0\}, \tag{5}$$

что обеспечивает в (5) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $\left(x(t)^T, \dot{x}(t)^T\right)^T$ уравнения (4) с начальным условием $\left(x(t_0)^T, \dot{x}(t_0)^T\right)^T = (x_0^T, \dot{x}_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [15].

С использованием леммы 1 в работе [8] доказывается

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (4) имело заданное интегральное многообразие (3) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f и матрица σ уравнения (4) имели, соответственно, вид (6) и (7)*

$$f = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+\Big(A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - S_1\Big), \tag{6}$$

$$\sigma_i = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{7}$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : \sigma\sigma^T, \tag{6'}$$

а под $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : D$, следуя [14], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(x,\dot{x},t)$ вектора $\lambda(x,\dot{x},t)$ по компонентам $\dot{x}$ на матрицу $D:$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : D = \begin{bmatrix} tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial\dot{x}^2}D\big) \\ \vdots \\ tr\big(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial\dot{x}^2}D\big)\end{bmatrix}, \tag{6''}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial\dot{x}_1} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial\dot{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\dot{x}_1} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\dot{x}_n} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n}\end{vmatrix}, \tag{6'''}$$

$\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^T$ — i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$ $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$,
$B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{\mu i})^T$ — i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k})$.

Отдельно в [8] рассматривается линейный случай задачи, когда линейными являются заданные свойства и построенное уравнение, а также стохастическая задача Еругина на плоскости.

2.2. Задача замыкания СДС. В работе [9] рассматривается задача замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка по заданному интегральному многообразию. А именно, достраивается система замыкающих уравнений по заданному частному интегралу и доказывается

Теорема 2. *Для того, чтобы множество (8)*

$$\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \lambda = \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) \in C^{12121}_{x\dot{x}u\dot{u}t}, \tag{8}$$

при заданной структуре уравнения (9)

$$\ddot{x} = f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi} \tag{9}$$

было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (9), (10)

$$\ddot{u} = f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f_2 и матрица σ_2 замыкающего уравнения (10) имели, соответственно, вид (11) и (12)

$$f_2 = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ b_1, \tag{11}$$

$$\sigma_{2i} = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ \widetilde{B}_i, \tag{12}$$

где

$$b_1 = A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f_1 - \frac{\partial\lambda}{\partial u}\dot{u} - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : \sigma_1{\sigma_1}^T\right] + \left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{u}^2} : \sigma_2{\sigma_2}^T\right]\right),$$

$\sigma 2i = (\sigma_{21i}, \sigma_{22i}, \ldots, \sigma_{2ni})^T$ *— i-ый столбец матрицы* $\sigma_2 = (\sigma_{2\nu j})$ $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$,
$\widetilde{B}_i = (\widetilde{B}_{1i}, \widetilde{B}_{2i}, \ldots, \widetilde{B}_{ri})^T$ *— i-ый столбец матрицы* $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,r},\ l = \overline{1,k})$.

2.3. Задача восстановления СДС. В работе [10] рассмотрены три постановки задачи восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит: 1) в коэффициент сноса, 2) в коэффициент диффузии, и 3) как в коэффициент сноса, так и в коэффициент диффузии.

В частности, в случае 1), когда задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{13}$$

и требуется определить входящий в коэффициент сноса вектор-функцию $u = u(x,\dot{x},t) \in R^r$ по заданному интегральному многообразию (3), доказывается справедливость теоремы 3.

Теорема 3. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (13) имело заданное интегральное многообразие (3), необходимо и достаточно, чтобы управляющая вектор-функция и имела вид (14), а матрица диффузий σ — вид (15)*

$$u = s_1\left[\widetilde{D}C\right] + \left(\widetilde{D}\right)^+ b_2, \tag{14}$$

$$\sigma_i = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{15}$$

где

$$b_2 = A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial\dot{x}^2} : \sigma\sigma^T\right],$$

$\sigma_i = (\sigma_1 i, \sigma_2 i, \ldots, \sigma_n i)^T$ — i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_\nu j)$ $(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k})$,
$B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{ri})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ $(\mu = \overline{1,m},\ l = \overline{1,k})$.

Аналогичные утверждения доказываются в [10] для случаев 2) и 3), в которых определяется вид управляющих параметров, обеспечивающий необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия. Там же рассматриваются скалярные и линейные случаи указанных трех постановок задач восстановления, а также приводится решение стохастической задачи Мещерского.

3. Задача восстановления при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

3.1. Постановка задачи. Нелинейный случай стохастической задачи восстановления. По заданному стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}, \quad x \in R^n, \quad \xi \in R^k \tag{16}$$

требуется определить входящую в коэффициент сноса вектор-функцию $u = u(x, \dot{x}, t) \in \in R^r$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \quad \lambda = \lambda(x, \dot{x}, t) \in C^{1\,2\,1}_{x\dot{x}t}. \tag{17}$$

Здесь $\left\{\xi_1(t,\omega), ..., \xi_k(t,\omega)\right\}$ – система случайных процессов с независимыми приращениями [14], которую можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t, dy)$, ξ_0- винеровский процесс; P^0- пуассоновский процесс; $P^0(t, dy)$ - число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t)$, попадающих на множество dy; $c(y)$- векторная функция, отображающая пространство R^n в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t.

Предполагается, что вектор–функция $f(x, \dot{x}, t)$ и матрицы $D(x, \dot{x}, t)$, $\sigma(x, \dot{x}, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x и $\dot{x}$ в H-окрестности множества $\Lambda(t)$.

Поставленная в этом пункте задача является одной из обратных задач динамики при наличии случайных возмущений – задачей восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, когда управление входит в коэффициент сноса и в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2-4], а случай, когда $\sigma \neq 0$ и $\left\{\xi_1(t,\omega), ..., \xi_k(t,\omega)\right\}$ – система независимых винеровских процессов, как частный вид процессов с независимыми приращениями, рассмотрен в [10].

Для решения поставленной задачи по правилу стохастического дифференцирования Ито [14, с.201] составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}Du + S_1 + S_2 + S_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma\dot{\xi}, \tag{18}$$

где S_1 имеет вид ($6'$), а функции S_2 и S_3, соответственно, вид: $S_2 = \int [\lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) -$ $- \lambda(x, \dot{x}, t) - \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma\dot{x}c(y)]dy$, $S_3 = \int [\lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t)]\dot{P}^0(t, dy)$.

Введем произвольные функции Еругина [1]: m-мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$-матрицу B, обладающие свойствами $A(0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$, $B(0, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) \equiv 0$, такие, что имеет место равенство

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) + B(\lambda, x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)\dot{\xi}. \tag{19}$$

На основе уравнений (18) и (19) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}Du = A - \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f - S_1 - S_2 - S_3, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\sigma = B, \end{cases} \tag{20}$$

из которых нужно определить вектор-функцию управления u и матрицу σ.

Обозначив $\widetilde{D} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}D$, по формуле (2) леммы 1 из соотношений (20) определим искомые вектор-функцию u и матрицу σ в виде

$$u = s_1\left[\widetilde{D}C\right] + \left(\widetilde{D}\right)^+ b_1, \tag{21}$$

$$\sigma_i = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{22}$$

где

$$b_1 = A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}f - S_1 - S_2 - S_3, \ \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] \text{ имеет вид } (6'''),$$

$\sigma_i = (\sigma_1 i, \sigma_2 i, \ldots, \sigma_n i)^T$ — i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_\nu j)$ $(\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$,
$B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{ri})^T$ — i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$ $(\mu = = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,k})$.

Следовательно, справедлива

Теорема 4. *Для того, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (16) имело заданное интегральное многообразие (17), необходимо и достаточно, чтобы управляющая вектор-функция u имела вид (21), а матрица диффузий σ — вид (22).*

Замечание 4.1. Если $c(y) \equiv 0$, то данная задача сводится к ранее рассмотренной в [10] задаче восстановления при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов.

3.2. Линейный случай стохастической задачи восстановления. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = E_1(t)x + E_2(t)\dot{x} + D(t)u + l_1(t) + T(t)\dot{\xi} \tag{23}$$

требуется определить вектор-функцию управления $u = u(x,\dot{x},t) \in R^r$ по заданному линейному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv G_1 x + G_2 \dot{x} + l_2(t) = 0, \tag{24}$$

т.е. по заданным $(m \times n)$-матрицам $G_1(t)$, $G_2(t)$, m-мерной функции $l(t)$, а также заданным $(n \times n)$-матрицам $E_1(t)$, $E_2(t)$, $(n \times r)$ матрице $D(t)$ и n-мерной функции $l_1(t)$ определить вектор-функцию $u = u(x,\dot{x},t) \in R^r$, а также $(n \times k)$-матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенного уравнения (23) заданные свойства (24) являлись интегральным многобразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (18) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{\lambda} = (\dot{G}_1(t) + G_2E_1)x + (\dot{G}_2(t) + G_1 + G_2E_2)\dot{x}+\\ +G_2 l_1(t) + \dot{l}_2(t) + G_2Du + G_2T(t)\dot{\xi},\end{gathered} \tag{25}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции B со свойством $B(0,x,\dot{x},t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1(t)\lambda + B(\lambda,x,\dot{x},t)\dot{\xi}. \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (26) следуют равенства

$$\left\{\begin{aligned} G_2(t)D(t)u = \Big[A_1(t)G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_2(t)E_1(t)\Big]\,x+&\\ + \Big[A_1(t)G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t) - G_2(t)E_2(t)\Big]\,\dot{x}+&\\ + A_1(t)l_2(t) - G_2l_1(t) - \dot{l}_2(t),&\\ G_2(t)T = B(\lambda,x,\dot{x},t).\qquad\qquad\qquad\qquad& \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Далее, из равенств (27) с использованием леммы 1 имеем

$$u = s_1\left[D_1C\right] + (D_1)^+ g_1, \tag{28}$$

$$T_i = s_2\left[G_2C\right] + (G_2)^+ B_i, \tag{29}$$

где D_1 и g_1 имеют, соответственно, вид $D_1 = G_2D$, $g_1 = \Big(A_1(t)G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_2(t)E_1(t)\Big)\,x+$ $+\Big(A_1(t)G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t) - G_2(t)E_2(t)\Big)\,\dot{x} + A_1(t)l_2(t) - G_2l_1(t) - \dot{l}_2(t)$, а через T_i, B_i обозначены, соответственно, i-ые столбцы матриц T и B. Здесь s_μ $(\mu = 1,2)$ — произвольные скалярные величины. Тем самым доказана

Теорема 5. *Для того, чтобы стохастическое линейное по сносу дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (23) имело заданное интегральное многообразие (24), необходимо и достаточно, чтобы управляющий параметр имел вид (28), а матрица диффузий имела вид (29).*

Замечание 5.1. В линейной постановке в отличие от нелинейной $S_1 \equiv S_2 \equiv S_3 \equiv 0$ и условия разрешимости в теореме 5 при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями совпадают с условиями разрешимости в аналогичном линейном случае при наличии случайных возмущений из класса независимых винеровских процессов [10].

3.3. Скалярный случай задачи восстановления с управлениями по сносу и диффузии. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f_2(x,\dot{x},t) + \gamma_1(x,\dot{x},t)u_1 + (\gamma(x,\dot{x},t) + \gamma_2(x,\dot{x},t)u_2)\,\dot{\xi}. \tag{30}$$

Требуется определить скалярные функции $u_1 = u_1(x,\dot{x},t)$ и $u_2 = u_2(x,\dot{x},t)$ по заданному интегральному многообразию

$$\lambda_2(x,\dot{x},t) = 0,\ \lambda_2 \in R^1. \tag{31}$$

Иначе говоря, по заданным f_2, γ, γ_1, γ_2 и λ_2 определим управляющие параметры u_1 и u_2 так, чтобы множество (31) было интегральным множеством уравнения (30).

По правилу стохастического дифференцирования Ито составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}f_2 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1 u_1 + \widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_2 + \widetilde{S}_3 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}(\gamma + \gamma_2 u_2)\dot{\xi}, \tag{32}$$

где $\widetilde{S}_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot{x}^2}(\gamma + \gamma_2 u_2)^2$, $\widetilde{S}_2 = \int\{\lambda_2(x,\dot{x} + c(y)[\gamma(x,\dot{x},t) + \gamma_2(x,\dot{x},t)u_2],t) - \lambda_2(x,\dot{x},t) - \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x}[\gamma(x,\dot{x},t) + \gamma_2(x,\dot{x},t)u_2]\dot{x}c(y)\}dy$, $\widetilde{S}_3 = \int\{\lambda_2(x,\dot{x} + c(y)[\gamma(x,\dot{x},t) + \gamma_2(x,\dot{x},t)u_2],t) - \lambda_2(x,\dot{x},t)\}\dot{P}^0(t,dy)$.

Введем скалярные функции Еругина [1] $a_2 = a_2(\lambda,x,\dot{x},t)$ и $b_2 = b_2(\lambda,x,\dot{x},t)$, обладающие свойством $a_2(0,x,\dot{x},t) \equiv b_2(0,x,\dot{x},t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot{\lambda}_2 = a_2(\lambda,x,\dot{x},t) + b_2(\lambda,x,\dot{x},t)\dot{\xi}. \tag{33}$$

Исходя из уравнений (32) и (33), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1 u_1 = a_2 - \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot{x} - \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}f_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot{x}^2}(\gamma + \gamma_2 u_2), \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_2 u_2 = b_2 - \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma. \end{cases} \tag{34}$$

Управляющие параметры u_1 и u_2 в силу равенств (34) определим в виде

$$u_1 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1\right)^{-1}\left[a_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}f_2 - \widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_3\right], \tag{35}$$

$$u_2 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1\right)^{-1}\left(b_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma\right). \tag{36}$$

Или с учетом (36) соотношение (35) эквивалентно условию

$$u_1 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1\right)^{-1}\Big\{a_2 - \frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}f_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial\dot{x}^2}\Big[\gamma + \gamma_2\Big(\Big(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\dot{x}}\gamma_1\Big)^{-1}b_2 - \gamma_1\gamma\Big)\Big]^2 - \widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_3\Big\}. \tag{37}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Для того, чтобы скалярное дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито (30) имело заданное интегральное многообразие (31), необходимо и достаточно, чтобы управляющие параметры u_1 и u_2 имели, соответственно, вид (37) и (36).*

Таким образом, в задаче восстановления при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях в терминах управляющих параметров определены необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия, которые обобщают утверждения работы [10].

Цитированная литература

1. **Еругин Н. П.** //ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659-670.

2. **Галиуллин А. С.** Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224с.

3. **Галиуллин А. С.** Системы Гельмгольца. М., 1995. 86с.

4. **Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.** Уравнения программных движений. М., 1986. 88с.

5. **Гельмгольц Г.** //Вариационные принципы механики. М., 1959. С.430—459.

6. **Сагиров П.** //Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М. 1974. № 5(147). С.28—47. 1974. № 6(148). С.3—38.

7. **Синицын И. Н.** //Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1976. № 3. С.23—31.

8. **Тлеубергенов М.И.** //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.-мат. 1998. № 3. С.77—82.

9. **Тлеубергенов М.И.** //Доклады МН–АН РК. 1999. № 1. С.53—60.

10. **Тлеубергенов М. И.** //Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т.37, № 5. С.714—716.

11. **Тлеубергенов М. И.** //Математический журнал. Алматы, 2001. Т.1. № 1. С.84—93.

12. **Тлеубергенов М. И.** //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". 1999. № 1. С.44—48.

13. **Тлеубергенов М. И.** //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.-мат. 1996. № 3. С.53—63.

14. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632с.

15. **Ватанабэ С., Икэда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986. 445с.

Поступила в редакцию 25.05.2003г.

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 96 — 97*

ХРОНИКА

ПАМЯТИ ШАЛТАЯ СМАГУЛОВИЧА СМАГУЛОВА

22 февраля 2003 года безвременная смерть унесла жизнь крупного казахстанского ученого, специалиста в области вычислительной математики и информационных технологий, лауреата Государственной премии РК в области науки, техники и образования, академика Инженерной Академии РК, декана механико-математического факультета КазНУ имени аль-Фараби, доктора физико-математических наук, профессора Шалтая Смагуловича Смагулова.

Ш.С.Смагулов родился в селе Куйган Балхашского района Алматинской области. После окончания средней школы в 1966 году начал свою трудовую деятельность рыбаком в рыболоведческом колхозе "Достижение". В 1967 году поступил на механико-математический факультет Казахского государственного университета имени С.М. Кирова и в 1970 году в числе одаренных студентов был направлен для продолжения учебы в Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола. Окончив университет в 1972 году, продолжил свою трудовую деятельность стажером-исследователем кафедры "Численные методы механики сплошной среды" Новосибирского гос. университета, возглавляемой академиком АН СССР Н. Н. Яненко. С 1974 по 1984 годы учился в аспирантуре, работал младшим, затем старшим научным сотрудником ИТПМ СО АН СССР.

В 1981 году Ш.С.Смагулов под научным руководством профессора НГУ Б.Г.Кузнецова защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, посвященную математическим вопросам ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, а в 1987 году блестяще защитил докторскую диссертацию на тему "Математические вопросы приближенных методов уравнений Навье-Стокса" по специальности 01.01.07 — вычислительная математика в диссертационном совете Вычислительного Центра СО АН СССР.

В 1984 году Ш.С.Смагулов был приглашен на должность заведующего кафедрой дифференциальных уравнений математического факультета КазГУ имени С.М.Кирова. Впоследствии он руководил кафедрами прикладного анализа, вычислительной и прикладной математики КазНУ, с 2001 года — декан механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби. В 1997 — 2000 г.г. Ш.С.Смагулов — директор Института механики и математики при КазНУ имени аль-Фараби, в 2000 — 2002 г.г. — научный руководитель Программы фундаментальных исследований в области вычислительной математики и математического моделирования по Отделению физико-математических наук НАН РК.

Научные интересы Ш.С.Смагулова были многогранны и относятся к различным областям вычислительной математики, качественной теории дифференциальных уравнений гидродинамики, информационных технологий в нефтегазодобывающей промышленности и образования.

Ш.С.Смагулов — автор более ста научных статей, большинство которых были опубликованы в центральных изданиях СССР и Казахстана, им изданы шесть монографий. Ш.С.Смагулов был научным руководителем более сорока кандидатов и консультантом шести докторов физико-математических наук. За цикл работ "Численное моделирование динамики жидкости и газа. Теория и вычислительный эксперимент", опубликованных в 1975 — 1993 г.г., за большие заслуги в развитии математической науки и подготовке кадров в 1994 году он удостоен звания лауреата Государственной премии РК в области науки, техники и образования, в 1992 году избран академиком Инженерной Академии РК. Ш.С. Смагуловым были получены фундаментальные результаты по обоснованию метода фиктивных областей и аппроксимации уравнений несжимаемой жидкости уравнениями эволюционного типа. Им были изучены вопросы существования и единственности решения краевых задач и ε-аппроксимации для уравнений неоднородной вязкой жидкости и свободной конвекции с учетом энергии диссипации; с помощью введения вспомогательных функций в уравнения импульса им доказана теорема существования сильного решения системы дифференциальных уравнений с ε-регуляризацией. Наряду с вышеуказанными задачами для уравнений Навье-Стокса Ш.С.Смагуловым исследованы корректность краевых задач для ряда новых нелинейных моделей неоднородной жидкости: вырождающихся уравнений газовой динамики, уравнений естественной конвекции с учетом диссипации энергии, уравнений магнитной газовой динамики, уравнений динамики атмосферы и океана.

В начале 80-х годов Ш.С. Смагуловым был предложен новый класс разностных схем для одномерных течений вязкого баротропного газа, для которых впервые были доказаны теоремы устойчивости и сходимости. Ш.С. Смагуловым была создана основа математической теории разностных схем для уравнений вязкого сжимаемого газа, им разработаны эффективные численные алгоритмы решения уравнений Навье-Стокса.

Ш.С.Смагулов являлся бессменным членом редакционной коллегии международного журнала "Вычислительные технологии", издаваемого Сибирским отделением Российской Академии наук, членом ред.коллегии нашего "Математического журнала" и главным редактором журнала "Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика".

В Казахстане профессором Смагуловым Ш.С. создана школа по вычислительной математике и математическому моделированию, получившая международное признание. Шалтай Смагулович Смагулов отличался доброжелательностью и демократичностью по отношению к ученикам, сотрудникам и студентам. Он был опытным наставником молодежи, замечательным ученым и надежным другом.

Уход из жизни в расцвете творческих сил Шалтай Смагуловича — невосполнимая утрата для всей Казахстанской научной общественности. Светлая память о талантливом ученом навсегда останется в сердцах его друзей, коллег и учеников.

Редколлегия журнала

Математический журнал. *Алматы. 2003. Том 3. № 1 (7) . С. 98 — 99*

ХРОНИКА

Памяти Тохтара Кемельбаевича Нурекенова

13 апреля 2003 года безвременно ушел из жизни видный ученый в области качественной теории дифференциальных уравнений доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории диффференциальных уравнений Института математики НАН РК, профессор Тохтар Кемельбаевич Нурекенов.

Т.К. Нурекенов родился 15 февраля 1937 года в колхозе Жанакурал Аксуатского района Семипалатинской области. В 1956 году он поступил в Казахский государственный университет имени С.М. Кирова и успешно закончил его в 1961 году по специальности "Математика". В том же 1961 году Т.К. Нурекенов поступил в аспирантуру механико-математического факультета Воронежского государственного университета.

После окончания аспирантуры с 1964 до 1967 года он работал старшим преподавателем Кокчетавского педагогического института имени Ш.Валиханова. В 1966 году на Диссертационном совете Воронежского государственного университета Т.К. Нурекенов успешно защитил кандидатскую диссертацию под руководством ученого с мировым именем профессора М.А. Красносельского.

В 1994 году в Институте математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан Т.К. Нурекенов блестяще защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения и математическая физика на тему "Свойства интегральных операторов типа Урысона и их приложения к разрешимости нелинейных интегро-дифференциальных уравнений".

С 1967 года до конца своих дней Т.К. Нурекенов работал в Институте математики Национальной академии наук Республики Казахстан, пройдя все должностные ступени от младшего научного сотрудника до главного научного сотрудника лаборатории дифференциальных уравнений.

Научные интересы Т.К. Нурекенова были тесно связаны с областью нелинейного функционального анализа, им разработаны общие методы исследования интегральных и интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, разрешимость начально-краевых задач нелинейных гиперболических и параболических уравнений.

Он доказал теоремы существования и единственности периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, а также смешанной задачи квазилинейного уравнения гиперболического и параболического типов с правой частью степеннного роста. Им получены достаточные условия компактности, непрерывности, вполне непрерывности и гельдеровости нелинейного интегрального оператора Урысона в пространстве суммируемых функций.

В последние годы Тохтар Кемельбаевич Нурекенов активно разрабатывал теорию бесконечных систем дифференциальных уравнений применительно к начально-краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Научные труды Т.К. Нурекенова в области теории дифференциальных и интегральных уравнений были опубликованы в престижных, высокорейтинговых журналах как "Доклады АН СССР", "Сибирский математический журнал", "Дифференциальные уравнения", "Доклады НАН РК", "Вестник НАН РК", "Известия НАН РК" и др.

Нурекенов Т.К. был разносторонно развитым человеком, интересовался вопросами поэзии, знал наизусть множество стихотворений Абая, занимался вопросами происхождения метеоритов.

Он явлется автором около 100 научных работ. Под его научным руководством защищены три кандидатские диссертации.

Тохтар Кемельбаевич был хорошим семьянином, воспитал пятрых детей, которые являются высококвалифицированными специалистами в области математики и физики.

Светлый образ известного ученого, замечательного педагога, доктора физико-математическом наук, профессора Тохтара Кемельбаевича Нурекенова навсегда останется в памяти и сердцах его коллег, друзей и близких.

Коллектив Института математики

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518.476 2000 MSC: 42A16

Akishev G.A, Bitimkhanuly S. **Modulus of smoothness and absolute summability of multiple trigonometric series** // Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.5–14.

The sufficient conditions of absolute summability of Fourier series of functions in Lebesque spaces in the terms of module smoothness and the best approximation are obtained. The unimprovability of this conditions in the classes of functions with the preassigned orders of the best partial approximations and with the desired modulus of smoothness has been got.
References — 16.

УДК: 517.95 2000 MSC: 34D08

Aldibekov T.M. **Generalized central and generalized special exponents of system of differential equations**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.15–17.

In this paper generalized central and generalized special exponents of linear systems of differential equations with unremitting and unlimited coefficients have been got.
References — 3.

УДК: 538.3 2000 MSC: 74H35

Alexeeva L.A. **The action of stationary moving loads on elastic semi-space**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.18–25.

The first boundary value problem of dynamics of elastic semispace under stationary loads concentrated on a cylindrical surface and moving with constant speed inside and along boundary of the half-space. Sub-, trance- and hypersonic loads have been used.
References — 8.

УДК: 517.956 2000 MSC: 35L20

Asanova A.T., Dzhumabayev D.S. **The use of the method of functional parameter introduction to the problem of Darboux for the systems of hyperbolic equations**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.26–32.

The paper is devoted to Darboux problem for the systems of hyperbolic equations of second order. The existence of a unique classical solution is proved and algorithm of it's obtaining has been suggested.
References — 5.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarkhanov D.B. **Equivalent norms of some functional spaces of mixed smoothness**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.33–41.

A theorem of representation of functions from Nicolsky-Besov spaces of mixed smoothness has been proved. As a corollary some equivalent norms of this spaces and embedding theorems have been got.

References — 22

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A10

Bopayev K.B. **The normal form of nonlinear difference-dynamic system. 1**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.42–54.

The methods of continuous normalization by parameter of nonlinear DDS are considered in this paper. The problem of normalization is solved in the class of invertible transformations represented by formal kinds with continuous and bounded coefficients. Continuous normal form consisting of irregular classes is constructed for non-autonomous systems with parameter and Jordan matrix of linear approximation.

References — 15.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74B05, 74H15

Dzhuzbayev S.S., Sarsenov B.T. **Dynamic stress state of semibounded band at side impulsive stress**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.55–62.

Non-stationary problem of dynamics of a homogeneous elastic isotropic body is investigated to cartesian coordinate system with applying of an method of bicharacteristics . Plane deformation of elastic semibounded bounded band is researched at given local harmonic loading of an impulsive type on a boundary . Numerical calculations are adduced as isolines of stresses and invariants of a stress tensor for different instants.

References — 9.

УДК: 539.3 2000 MSC: 80A17

Kupesova B.N. **The functional solutions of non-stationary equations for the thermoelastic semi-space**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.63–67.

The semi-space of isotropic thermoelastic media with internal sources of non-stationary mass forces and thermal sources is under consideration. Applying of Fourier transformation on one coordinate and Laplace transformation on time the fundamental solution of original problem for thermoelastic semi-space has been got on the base of two different kinds of Green tensors.

References — 5.

УДК: 517.925 2000 MSC: 35A20

Mukhambetova A.A., Sartabanov Zh.A. **On the boundedness of solutions of linear D-equations of second order with multiperiodical potential**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.68–73.

The sufficient conditions of the boundedness of solutions of linear D-equations of second order with oscillating coefficients are obtained.

References — 7.

УДК: 517.518 2000 MSC: 46B45, 47A63

Oinarov R., Shalgynbayeva S.Kh. **Weighted inequalities for one class of matrix operators**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.74–82.

In this paper for matrix operators $(Af)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j$, $i \geq 1$ and $(Af)_j = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i$, $j \geq 1$ the necessary and sufficient conditions for estimated inequality

$$\|uAf\|_{l_q} \leq C\|vf\|_{l_p}, 1 < q < p < \infty$$

has been got where $(a_{i,j})$ is a real nonnegative matrix, $a_{i,j} \approx (a_{i,k} + a_{k,j})$, $i \geq k \geq j \geq 1$.

References — 10.

УДК: 517.9 2000 MSC: 37C05, 39A05, 65P30

Pankratova I.N., Rakhimberdiev M.I. **Canonical Form of Many-Dimensional Analogy of Nonlinear Logistic Difference Equation**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.83–86.

Representation of a map generated by many-dimensional many parameters analogy of nonlinear logistic difference equation has been made as a superposition of one dimensional one parameter maps with different parameters.

References — 7.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29, 60H10

Tleubergenov M.I. **On the inverse problems of stochastic differential systems**// Mathematical journal. 2003. Vol. 3. No. 1 (7). P.87–95.

The origins and the current state of inverse problems' theory of dynamics under random disturbances from the class of Wiener processes are given. The necessary and sufficient conditions of solvability of one inverse problem — the reconstruction's problem under random disturbances from the class of processes with independent increments have been obtained.

References — 15.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.