ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2002 том 2 № 3

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 2 № 3 2002

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 2, № 3, 2002

ХРОНИКА

УДК 517.518.453

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
Караганда, ул.Университетская, 28, akishev@kargu.krg.kz

Введение. В статье рассматриваются условия абсолютной равномерной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на отрезке $[0;1]$ функций называется симметричным, если
1) из того, что $|f(t)| \le |g(t)|$ почти всюду на $[0,1]$ и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \le \|g\|_X$;
2) из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(t)|$ и $|g(t)|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см.[1]).

Здесь и в дальнейшем $\|\psi\|_X$ означает норму элемента $\psi \in X$.

Примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L_q, $1 \le q < +\infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича (см.[1], с. 137).

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset [0,1]$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега множества $e \subset [0,1]$.

Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на $[0,1]$.

Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см.[1] с.137, 164). Такие функции называются ψ-функциями.

В дальнейшем симметричное пространство X с фундаментальной функцией φ будем обозначать $X(\varphi)$.

Через σ_τ обозначим оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(x) = f(\frac{x}{\tau})$, если $\frac{x}{\tau} \in [0,1]$ и $(\sigma_\tau f)(x) = 0$, если $\frac{x}{\tau} \notin [0,1]$. Известно, что оператор σ_τ непрерывен в любом симметричном пространстве и существуют пределы:

$$\underline{\gamma}_X = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau}, \quad \overline{\gamma}_X = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau},$$

при этом $0 \le \underline{\gamma}_X \le \overline{\gamma}_X \le 1$ (см.[2], с.1250; [1], с.131).

Keywords: *symmetric space, Haar systems*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

Пусть $X-$ симметричное пространство. Ассоциированное к нему пространство X^1 состоит из всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\|_{X^1} \equiv \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_X\leq 1}} \int_0^1 f(t)g(t)dt < +\infty.$$

Известно, что сепарабельность симметричного пространства X является необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства X^1 со всем сопряженным пространством X' (см. [1], с. 138).

Отметим также, что если $\varphi(t)$ — фундаментальная функция симметричного пространства X, то функция $\overline{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$ при $t \in (0,1]$ и $\overline{\varphi}(0) = 0$ является фундаментальной функцией сопряженного пространства X' (см.[1] с. 144).

Для функции $\varphi(t)$, $t\in[0,1]$ положим

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} \quad , \qquad \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Известно, что, если $X(\varphi)$ - симметричное пространство, то $1\leq\alpha_\varphi\leq\beta_\varphi\leq 2$. Функция

$$\omega(f,\delta) = \sup_{0\leq h\leq\delta}\|[f(\cdot+h)-f(\cdot)]\chi_{[0,1-h]}\|_X$$

называется модулем непрерывности функции $f\in X$.

Рассмотрим следующий функциональный класс

$$H^\omega = \{f\in X(\varphi):\ \omega(f,\delta)\leq\omega(\delta),\ 0\leq\delta\leq 1\},$$

где $\omega(\delta)$ — данный модуль непрерывности.

Через $C(\alpha,q,r,\dots)$ обозначим положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, вообще говоря, различных в разных формулах.

Запись $A(y)\asymp B(y)$ будет означать, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1A(y)\leq B(y)\leq C_2A(y)$ для всех y.

Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_n\geq 2 \quad (n=1,2,...)$. Обобщенную систему Хаара $\chi\{p_k\} = \{\chi_n(t)\}$ на отрезке $[0,1]$ определим следующим образом (см.[3], [4]):

$\chi_1(t)\equiv 1$ на $[0,1]$. Если $n\geq 2$, то $n = m_k + r(p_{k+1}-1)+s$, где $m_0 = 1$ и $m_k = p_1p_2...p_k; k = 1,...; r = 0,1,...,m_k-1; s = 1,2,...,p_{k+1}-1$. Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на отрезке $[0,1]$. Тогда, если $t\in B$, где $B\equiv[0,1]\setminus A$, то разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{m_k}, \quad \alpha_k(t) = 0,1,...,p_k-1$$

– единственно.

Теперь определим функцию $\chi_n(t)\equiv\chi^s_{k,r}(t)$ следующим образом:

$$\chi_n(t) = \chi^{(s)}_{k,r}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k}exp\frac{2\pi is\alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}, & t\in\left(\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right)\cap B,\\ 0, & t\bar{\in}\left[\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right].\end{cases}$$

Пользуясь тем, что множество B всюду плотно на [0,1], функцию $\chi_n(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $(\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k})$. После этого в точках разрыва функцию $\chi_n(t)$ положим равной полусумме её предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0,1] - её предельным значениям изнутри отрезка.

Таким образом определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 (см.[3]), $a_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1$ по системе $\chi\{p_n\}$. Если все $p_n = 2 \quad (n = 1,2,...)$, то $\chi\{p_n\}$ будет классической системой Хаара.

Для доказательства теорем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *[5]. Если $\alpha_\varphi > 1$ для ψ-функции $\varphi(t)$, то при любом $q \in (0, +\infty)$ выполняется соотношение*

$$\int_x^1 [\varphi^q(t)t]^{-1} dt = \underline{\underline{O}}(\varphi^{-q}(x)), \qquad x \in (0, 1].$$

Лемма 2. *Пусть $X(\varphi)$-сепарабельное симметричное пространство и $0 < \underline{\gamma}_X, \overline{\gamma}_X < 1$. Тогда для любой функции $f \in X(\varphi)$ выполняется неравенство*

$$|a_n(f)| \le \frac{C}{\sqrt{m_\nu} \cdot \varphi(m_{\nu+1}^{-1})} \omega(f, m_{\nu+1}^{-1}) \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi s}{p_{\nu+1}}}$$

при $n = m_\nu + r(p_{\nu+1} - 1) + s$; $r = 0, 1, ..., m_\nu - 1$; $s = 0, 1, ..., p_{\nu+1} - 1$.

Доказательство. Для каждого номера $n = m_\nu + r(p_{\nu+1} - 1) + s$, $r = 0, 1, ...,$ $m_\nu - 1$,
$s = 0, 1, ..., p_{\nu+1} - 1$ имеет место равенство ([3], с. 306)

$$a_n(f) = \sqrt{m_\nu} \sum_{k=1}^{p_{\nu+1}-1} \frac{1 - \exp\{-2\pi i \frac{k}{p_{\nu+1}}\}}{1 - \exp\{-2\pi i \frac{s}{p_{\nu+1}}\}} \int_{\rho_{\nu,r,k}} [f(x + m_{\nu+1}^{-1}) - f(x)] dx.$$

Из этого равенства в силу определения сепарабельного симметричного пространства фундаментальной функции сопряженного пространства получим

$$|a_n(f)| \le \sqrt{m_\nu} \frac{1}{m_{\nu+1} \cdot \varphi(m_{\nu+1}^{-1})} \sum_{k=1}^{p_{\nu+1}-1} \left| \frac{1 - \exp\{-2\pi i \frac{k}{p_{\nu+1}}\}}{1 - \exp\{-2\pi i \frac{s}{p_{\nu+1}}\}} \right| \omega(f, m_{\nu+1}^{-1}) \le$$

$$\le C \cdot (\sqrt{m_\nu} \varphi(m_{\nu+1}^{-1}))^{-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi s}{p_{\nu+1}}} \cdot \omega(f, m_{\nu+1}^{-1}).$$

Лемма доказана.

1. Об абсолютной сходимости рядов Фурье.

Для рядов Фурье-Хаара П. Л. Ульяновым [6] доказана

Теорема 1. *Пусть $1 \le q < +\infty$. Если $f \in L_q[0, 1]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{q}-1} \omega(f, n^{-1}) < +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f) \chi_n(t)|$ равномерно сходится на [0,1].*

Неулучшаемость условия этой теоремы на классах H^ω показана П. Л. Ульяновым [6] и С. Г. Прибегиным [7]. Для рядов по обобщенной системе Хаара, определенной ограниченной последовательностью $\{p_n\}$, аналогичные утверждения доказаны в [8], [9]. В этом параграфе аналогичные вопросы изучаются для функции из симметричных пространств.

Теорема 2. *Пусть $X(\varphi)$ — сепарабельное симметричное пространство, $1 < \alpha_\varphi \le \beta_\varphi < 2$ и обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$ определена ограниченной последовательностью $\{p_n\}$. Если $f \in X(\varphi)$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n\varphi(n^{-1})]^{-1} \omega(f, n^{-1}) < +\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f) \chi_n(t)| \tag{2}$$

равномерно сходится на [0,1].

Доказательство. Так как функция $\frac{t}{\varphi(t)}$ не убывает на (0,1], то последовательность $\{[n\varphi(n^{-1})]^{-1}\}$ убывает. Поэтому, учитывая свойство монотонности модуля непрерывности и ограниченности последовательности $\{p_n\}$, легко убедиться, что условие (1) эквивалентно неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(m_n^{-1})]^{-1}\omega(f,m_n^{-1})<+\infty. \tag{3}$$

Пусть l, j – произвольные натуральные числа. Для этих чисел существуют натуральные числа s и r такие, что $m_s<l\le m_{s+1}$ и $m_r<j\le m_{r+1}$. Тогда

$$\sum_{m=l+1}^{j}|a_m(f)\chi_m(t)|\le\sum_{n=s}^{r}\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_\nu(f)\chi_\nu(t)| \tag{4}$$

для любого $t\in[0,1]$.

Для любого числа $t\in[0,1]$ могут быть отличны от нуля не более, чем p_n функций из $\chi_{m_n+1}(t),...,\chi_{m_{n+1}}(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,...$. Тогда, пользуясь леммой 2 и оценкой (см. [3], стр. 307)

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C,\quad\forall n=0,1,...,$$

получим

$$\sum_{\nu=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_\nu(f)\chi_\nu(t)|=\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}|a_{n,r}^{(s)}(f)\chi_{n,r}^{(s)}(t)|=$$

$$=\sum_{s_j<p_{n+1}}|a_{n,r}^{(s_j)}(f)\chi_{n,r}^{(s_j)}(t)|=\sqrt{m_n}\cdot\sum_{s_j<p_{n+1}}|a_{n,r}^{(s_j)}(f)|\le$$

$$\le C\cdot[\varphi(m_{n+1}^{-1})]^{-1}\omega(f,m_{n+1}^{-1})_X\cdot\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi s}{p_{n+1}}}\le C\cdot[\varphi(m_{n+1}^{-1})]^{-1}\omega(f,m_{n+1}^{-1})_X.$$

Следовательно (см. (4)),

$$\sum_{\nu=l+1}^{j}|a_\nu(f)\chi_\nu(t)|\le C\cdot\sum_{n=s}^{r}[\varphi(m_{n+1}^{-1})]^{-1}\omega(f,m_n^{-1})_X$$

для любого $t\in[0,1]$.

В силу соотношения (3) и критерия Коши отсюда следует равномерная сходимость ряда (2). Теорема доказана.

Замечание. *В случае $X=L_q,1<q<+\infty$ (т. е. $\varphi(t)=t^{1/q},t\in[0,1]$) и $p_n=2$ для всех $n=1,2...$ теорема 2 ранее доказана П. Л. Ульяновым [6], а в случае, когда $X(\varphi)$ – пространства Лебега, Орлича и $\{p_n\}$ – ограниченная последовательность, доказана в [8], [9].*

Теорема 3. *Пусть дан модуль непрерывность $\omega(\delta),\delta\in[0,1]$. Тогда для того, чтобы для любой функции $f\in H^\omega$ ряд (2) равномерно сходился на [0,1], необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\varphi(n^{-1})]^{-1}\omega(n^{-1})<+\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть для любой функции $f \in H^{\omega}$ ряд (2) равномерно сходится на [0,1]. Допустим, что условие (5) не выполняется, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\varphi(n^{-1})]^{-1}\omega(n^{-1}) = +\infty. \tag{6}$$

Можно считать, что $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывность (см.[10]). Тогда из (6) следует, что $n\omega(n^{-1}) \uparrow +\infty$ при $n \to +\infty$. В противном случае, если существует число $C > 0$ такое, что $n\omega(n^{-1}) \le C$ для всех $n = 1, 2, ...$, получили бы

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n\varphi(n^{-1})]^{-1}\omega(n^{-1}) < +\infty.$$

Это противоречит (6). Далее, как в [11], можно построить числовую последовательность $B(n)$, обладающую следующими свойствами:

1). $B(n) \downarrow 0$ при $n \to +\infty$; $B(n) \le \omega(n^{-1})$, $n = 1, 2, ...$,

2). $\sum\limits_{k=1}^{n} B(k) = O(n\omega(n^{-1}))$,

3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [n\varphi(n^{-1})]^{-1}B(n) = +\infty$.

Так как функция $\frac{t}{\varphi(t)}$ не убывает на (0,1], то числовая последовательность $\frac{1}{n\varphi(n^{-1})}$ убывает. Поэтому учитывая, что $B(n) \downarrow_0 n \to +\infty$, из 3) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi(m_k^{-1})]^{-1}B(m_k) = +\infty. \tag{7}$$

Теперь построим возрастающую последовательность номеров n_j такую, что

$$\sum_{j=k}^{\infty} B(m_{n_j}) = O(B(m_{n_k})), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi(m_{n_j}^{-1})]^{-1}B(m_{n_j}) = +\infty. \tag{9}$$

Для этого положим $k_0 = 0$, $k_1 = 1$ и $k_{i+1} = \min\{k : B(m_k) \le \frac{1}{2}B(m_{k_i})\}$. Тогда ясно, что

$$B(m_{k_{i+1}}) \le \frac{1}{2}B(m_{k_i}), \tag{10}$$

$$B(m_k) > \frac{1}{2}B(m_{k_i}), \quad k = k_i, ..., k_{i+1} - 1. \tag{11}$$

Функции $\varphi(t)$ и $t/\varphi(t)$ не убывают на (0,1] и, пользуясь леммой 1, будем иметь

$$\sum_{m=k_{i-1}}^{k_i-1}[\varphi(m_n^{-1})]^{-1} \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_{m_{k_i}^{-1}}^{1}\frac{dt}{t}\varphi(t) \le \frac{C}{\varphi(m_{k_i}^{-1})} \le \frac{2C}{\varphi(m_{k_i-1}^{-1})}.$$

С помощью этого неравенства и монотонности последовательности $B(m)$ легко убедиться, что из (8) следует соотношение

$$\sum_{i=2}^{\infty}[\varphi(m_{k_i-1}^{-1})]^{-1}B(m_{k_i-1}) = +\infty.$$

Следовательно, по крайней мере, один из рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi(m_{k_{2j+1}-1}^{-1})]^{-1}B(m_{k_{2j+1}-1}); \quad \sum_{j=1}^{\infty}[\varphi(m_{k_{2j}-1})]^{-1}B(m_{k_{2j}-1})$$

расходится.

Если расходится первый из этих рядов, то положим $n_j = k_{2j+1} - 1$, а в противном случае полагаем $n_j = k_{2j} - 1$. Тогда ясно, что (9) выполняется. Далее, нетрудно убедиться, что из (10) следует неравенство $B(m_{n_{j+1}}) \le \frac{1}{2}B(m_{n_j})$, $j = 1, 2, ...$ Из этих неравенств следует (8).

Положим

$$A_k = \sum_{j=1}^{k}[\varphi(m_{n_j}^{-1})]^{-1}B(m_{n_j}), \quad D_k = \sum_{j=1}^{k}[\varphi(m_{n_j}^{-1})]^{-1}\frac{B(m_{n_j})}{A_j},$$

$$F_k = [\varphi(m_{n_k}^{-1})]^{-1}\frac{B(m_{n_k})}{A_k \cdot D_k}, \quad k = 1, 2, ...$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+1}2p_{n_j+1}}{p_{n_j+1}-1}F_j, \quad \text{при} \quad t = \frac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}, \quad j = 1, 2, ..., \\ 0, \quad \text{при} \quad t = 0, \quad t \in [\frac{1}{p_1}, 1], \quad t \in [\frac{1}{m_{k+1}}, \frac{1}{m_k}], \quad k \ne n_j \\ \text{линейна на каждом из отрезков} \ \ [\frac{1}{m_{n_j+1}}, \frac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}], \quad [\frac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}, \frac{1}{m_{n_j}}]. \end{cases}$$

С помощью определения функции f_0, свойства нормы и неравенства (10) нетрудно убедиться, что

$$\|f_0\|_X \le 4\sum_{j=1}^{\infty}F_j\|\chi_{(m_{n_j+1}^{-1}, m_{n_j}^{-1}]}\|_X < +\infty, \quad \text{т.е.} \quad f_0 \in X(\varphi).$$

Выберем натуральное число N так, что $m_{N+1}^{-1} < h \le m_N^{-1}$. Пусть $\nu(N)$ – наименьшее из всех натуральных чисел j таких, что $(p_{n_{j+1}+1}+1)(2m_{n_{j+1}+1})^{-1} \in (0, m_{N+1}^{-1}]$.

Теперь докажем, что $\omega(f_0, h) \le \omega(h)$. Для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\|g\|_{X'} \le 1$ имеет место равенство

$$\int_0^{1-h}|f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt = \int_0^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt+$$

$$+\int_{m_{N-1}^{-1}}^{1-h}|f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt = J_1 + J_2. \tag{12}$$

Оценим интеграл J_1. Для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\|g\|_{X'} \le 1$ имеет место соотношение

$$J_1 = \int_0^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt \le \int_0^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t+h)g(t)|dt+$$

$$+\sum_{j=n_{\nu(N)+1}}^{\infty}\int_{m_{j+1}^{-1}}^{m_j^{-1}}|f_0(t)g(t)|dt + \int_{m_{n_{\nu(N)+1}}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t)g(t)|dt =$$

$$\int_0^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t+h)g(t)|dt + \sum_{k=\nu(N)+1}^{\infty}\int_{m_{n_k+1}^{-1}}^{m_{n_k}^{-1}}|f_0(t)g(t)|dt + \int_{m_{n_{\nu(N)+1}}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t)g(t)|dt. \tag{13}$$

Из определения номера $\nu(N)$ следует, что $n_{\nu(N)+1} > N$, т.е. $n_{\nu(N)+1} \ge N + 1$.

Если $n_{\nu(N)} < N \le n_{\nu(N)+1} - 1$, то, учитывая равенство $f_0(t) = 0$, $\forall t \notin [m_{n_j+1}^{-1}, m_{n_j}^{-1}]$ получим равенство

$$\int_{m_{n_{\nu(N)+1}}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}}|f_0(t)g(t)|dt = 0 \le \omega(h) \tag{14}$$

для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\quad \|g\|_{X'} \le 1$.

Если $N = n_{\nu(N)}$, то по определению функции f_0 имеет место неравенство

$$|f_0(t)| \le \frac{2p_{1+n_{\nu(N)}}}{-1+p_{1+n_{\nu(N)}}} \cdot F_{\nu(N)}, \quad \forall t \in [m^{-1}_{1+n_{\nu(N)}}, m^{-1}_{n_{\nu(N)}}]$$

и $f_0(t) = 0 \quad \forall t \in [m^{-1}_N, m^{-1}_{N-1}]$. Поэтому

$$\int_{m^{-1}_{n_{\nu(N)+1}}}^{m^{-1}_{N-1}} |f_0(t)g(t)|dt = \int_{m^{-1}_{N+1}}^{m^{-1}_{N-1}} |f_0(t)g(t)|dt \le \frac{2p_{1+n_{\nu(N)}}}{-1+p_{1+n_{\nu(N)}}} \cdot F_{\nu(N)} \int_{m^{-1}_{n_{\nu(N)}+1}}^{m^{-1}_{n_{\nu(N)}}} |g(t)|dt \le$$

$$\le \frac{2p_{1+n_{\nu(N)}}}{-1+p_{1+n_{\nu(N)}}} \cdot F_{\nu(N)} \cdot \varphi(m^{-1}_{n_{\nu(N)}}) \le 4 \cdot B(m_{n_{\nu(N)}}) \le 4 \cdot \omega(m^{-1}_{n_{\nu(N)}}) =$$

$$= 4 \cdot \omega(\frac{1}{N}) \le 4 \cdot \omega(\frac{2}{N+1}) \le 8\omega(\frac{1}{N+1}) \le \omega(h).$$

Таким образом, (см. (14))

$$\int_{m^{-1}_{n_{\nu(N)+1}}}^{m^{-1}_{N-1}} |f_0(t)g(t)|dt \le 8\omega(h) \tag{15}$$

для любого числа $h \in (m^{-1}_{N+1}, m^{-1}_N]$.

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_0^{m^{-1}_{N-1}} |f_0(t+h)g(t)|dt \le C \cdot \omega(h). \tag{16}$$

Из определения функции f_0 и фундаментальной функции следует неравенство

$$\int_{m^{-1}_{1+n_k}}^{m^{-1}_{n_k}} |f_0(t)g(t)|dt \le \frac{2p_{1+n_k}}{-1+p_{1+n_k}} \cdot F_k \cdot \varphi(m^{-1}_{n_k}) \le 4 \cdot B(m_{n_k}), \quad k = \nu(N), ...$$

Следовательно,

$$\sum_{k=\nu(N)+1}^{\infty} \int_{m^{-1}_{n_k+1}}^{m^{-1}_{n_k}} |f_0(t)g(t)|dt \le 4 \sum_{k=\nu(N)+1}^{\infty} B(m_{n_k}) \le C \cdot B(m_{n_{\nu(N)+1}}) \le B(m_N) \le C \cdot \omega(h) \tag{17}$$

для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\quad \|g\|_{X'} \le 1$ и $h \in (m^{-1}_{N+1}, m^{-1}_N]$. Из соотношений (13), (15), (16), (17) следует

$$J_1 \le C \cdot \omega(h), \quad h \in (m^{-1}_{N+1}, m^{-1}_N]. \tag{18}$$

Теперь оценим интеграл J_2. По определению $f_0(t) = 0 \quad \forall t \in [\frac{1}{p_1}, 1]$. Тогда $f_0(t+h) = 0 \quad \forall t \in [\frac{1}{p_1}, 1-h]$. Следовательно,

$$J_2 = \int_{m^{-1}_{N-1}}^{1-h} |f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt = \int_{m^{-1}_{N-1}}^{\frac{1}{p_1}} |f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt \le$$

$$\le \int_{m^{-1}_{n_{\nu(N)+1}}}^{p_1^{-1}} |f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt = \sum_{j=1}^{\nu(N)} \int_{m^{-1}_{n_{j+1}}}^{m^{-1}_{n_j}} |f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt. \tag{19}$$

По определению f_0 имеют место соотношения $f_0(t) = f_0(t+h) = 0 \quad \forall t \in [m^{-1}_{n_{j+1}}, m^{-1}_{n_j+1} - h]$:

$$|f_0(t+h) - f_0(t)| \le 8 \cdot F_j \cdot m_{1+n_j} \cdot h \quad \forall t \in [m^{-1}_{n_j+1} - h, m^{-1}_{n_j}], \quad j = 1, 2, ...$$

Поэтому из неравенства (19) следует

$$J_2 \le \sum_{j=1}^{\nu(N)} 8 \cdot F_j \cdot m_{1+n_j} \cdot h \int_{m_{1+n_j}^{-1}-h}^{m_{n_j}^{-1}} |g(t)|dt \le 8 \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} F_j \cdot m_{1+n_j} \cdot h \cdot \varphi(m_{n_j}^{-1} - m_{n_j+1}^{-1} + h) \le$$

$$\le 8h \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} F_j \cdot m_{1+n_j} \cdot \varphi(m_{n_j}^{-1} + h) \le 8h \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} F_j \cdot m_{1+n_j} \cdot \varphi(2 \cdot m_{n_j}^{-1}) \le$$

$$\le 8h \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} m_{1+n_j} \cdot B(m_{n_j}) \le 8 \cdot C_0 \cdot h \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} m_{n_j} \cdot B(m_{n_j}) \le$$

$$\le 8 \cdot C_0 \cdot h \cdot \sum_{j=1}^{\nu(N)} \sum_{l=n_{j-1}}^{n_j-1} \sum_{s=m_l+1}^{m_{l+1}} B(s) \le C \cdot h \cdot m_{\tau(N)} \cdot \omega(\frac{1}{m_{\tau(N)}}), \tag{20}$$

где $\tau(N) = n_{\nu(N)}$. Учитывая, что $\tau(N) \le N$ и $h \le \frac{1}{m_N}$, будем иметь $h < \frac{1}{m_{\tau(N)}}$. Следовательно, по свойству $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \downarrow$ на (0,1] получим

$$m_{\tau(N)}\omega(\frac{1}{m_{\tau(N)}}) \le \frac{\omega(h)}{h}.$$

Поэтому из оценки (20) следует $J_2 \le C \cdot \omega(h)$. Из неравенств (12), (18) и (20) получим

$$\int_0^{1-h} |f_0(t+h) - f_0(t)||g(t)|dt \le C \cdot \omega(h)$$

для любой функции $g \in X'(\overline{\varphi})$, $\quad \|g\|_{X'} \le 1$. Следовательно, функция $f_1 = \frac{1}{C} f_0 \in H^\omega$.

Теперь докажем, что ряд (2) расходится в точке $x = 0$. По определению функций системы $\chi\{p_n\}$ и модуля комплексного числа получим

$$\left|a_{m_{n_j}+1}(g_0)\chi_{m_{n_j}+1}(0)\right| = \frac{m_{n_j}}{c_q}\left[\left(b_0 + \sum_{l=1}^{p_{n_j+1}-1} b_l \cos\frac{2\pi l}{p_{n_j}+1}\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{p_{n_j+1}-1} b_l \sin\frac{2\pi l}{p_{n_j}+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

где

$$b_l = \int\limits_{l m_{n_j+1}^{-1}}^{(l+1)m_{n_j+1}^{-1}} f_0(t)dt, \quad l = 0, 1, \ldots, p_{n_j+1} - 1; \quad j = 1, 2, ...$$

Так как $[\frac{l}{m_{n_j+1}}, \frac{1+l}{m_{n_j+1}}] \subset [\frac{1}{m_{n_j+1}}, \frac{1}{m_{n_j}}]$ при $l = 1, 2, ...p_{n_j+1} - 1$, то, пользуясь определением функции $f_0(t)$, непосредственным вычислением можно убедиться, что $b_l = \frac{(-1)^{j+1}2F_j}{(p_{n_j+1}-1)^2 m_{n_j}}\gamma_l$, $l = 1, 2, \ldots, p_{n_j+1} - 1$, где $\gamma_l = 2l - 1$, если $l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{p_{n_j+1}+1}{2}\right] - 1$; $\gamma_l = 2(p_{n_j+1} - l) - 1$, если $l = \left[\frac{p_{n_j+1}+1}{2}\right] + 1, \ldots, p_{n_j+1} - 1$. Если $l = \left[\frac{p_{n_j+1}+1}{2}\right]$, то $\gamma_l = (p_{n_j+1} - 2)$ при нечетном p_{n_j+1} и $\gamma_l = (p_{n_j+1} - \frac{3}{2})$ при четном p_{n_j+1}.

Запись $[y]$ означает целую часть числа y. Пользуясь этими значениями b_l и учитывая, что $2 \le p_n \le C_0$, $n = 1, 2, \ldots$, из равенства (21) получим

$$\mid a_{m_{n_j}+1}(g_0)\chi_{m_{n_j}+1}(0) \mid \ge c_q F_j, \quad j = 1, 2, ...$$

В силу соотношения (9) и теореме Абеля (см. [12], стр. 147) ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_j$ расходится. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid a_n(g_0)\chi_n(0) \mid = +\infty$ для функции $g_0 \in H^\omega$. Это противоречит предположению о том, что для любой функции $f \in H^\omega$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . *При $X = L_p[0,1]$ — пространство Лебега (т.е. $\varphi(t) = t^{1/p}$), $1 < p < +\infty$ из теоремы 2 следуют результаты П. Л. Ульянова ([6] с. 197) и С. Г. Прибегина [7].*

Цитированная литература

1. **Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.** Интерполяция линейных операторов. М., 1978.
2. **Boyd D. W.** // Canad. J. Math. 1969. V. 21, № 5. P. 1245 – 1254.
3. **Голубов. Б. И.** // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9, № 2. С. 297 – 314.
4. **Виленкин Н. Я.** // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 363 – 400.
5. **Лапин С. В.** // Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1980. №1036-80. 31 С.
6. **Ульянов П. Л.** // Матем.сб. 1967. Т. 72, № 2. С. 193 – 225.
7. **Прибегин С. Г** // Изв. вузов. Сер. матем. 1981. № 8. С. 77 – 80.
8. **Акишев Г. А., Махашев С. Т.** // Изв. вузов. Сер. матем. 2000. № 5. С. 1 – 9.
9. **Махашев С. Т.** // Поиск. 1997. № 5. С. 118 – 124.
10. **Ефимов А. В.** // Матем. сб. 1961. Т. 54. С. 51 – 90.
11. **Leindler L.** // Anal. Math. 1979. V. 5. P. 51 – 65.
12. **Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.** Неравенства. М., 1948.

Поступила в редакцию 1.06.2002г.

MSC 42A10

Akishev G.

There are proved the neccessary and sufficient conditions on absolute and uniform convergence of Fourier series with respect to generalized Haar systems of functions $f \in H^{\omega}$. Where

$$H^{\omega} = \{f \in X(\varphi): \quad \omega(f,\delta)_X \le (\omega(\delta)), \quad \delta \in [0,1]\},$$

$X(\varphi)$- be separable symmetric space of the of Lebesque measurable functions on [0,1] with the fundamental function φ; $\omega(f,\delta)_X$ the modulus of continuty $f \in X(\varphi)$ and $\omega(\delta)$ be a fixed modulus of continuty.

УДК 517.518.453

Акишев Г.

Пусть $X(\varphi)$- симметричное пространство измеримых по Лебегу на [0,1] функций с фундаментальной функцией φ. Рассмотрим функциональный класс

$$H^{\omega} = \{f \in X(\varphi): \quad \omega(f,\delta)_X \le \omega(\delta), \quad \delta \in [0,1]\},$$

где $\omega(f,\delta)_X-$ модуль непрерывность функции $f \in X(\varphi)$; $\omega(\delta)-$ заданный модуль непрерывность.

В статье установлено необходимое и достаточное условие равномерной, абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f \in H^{\omega}$ по обобщенной системе Хаара.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С.14 — 17*

УДК 517.956

О ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Асанова

Институт Математики МОиН РК
480100, Алматы, ул. Пушкина, 125, anar@math.kz

Рассматривается полупериодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений второго порядка. Методами сведения к задаче с параметром и введения функциональных параметров установлены достаточные условия существования единственного решения исследуемой задачи в терминах исходных данных.

В $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), \qquad u \in R^n, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\omega,t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_1(x)\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + S_1(x)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x} + P_0(x)u(x,0) + S_0(x)u(x,T) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где матрицы $A(x,t), B(x,t), C(x,t)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$ непрерывны, соответственно, на $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$, $||u(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$, $\quad ||A(x,t)|| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Через $C(\overline{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $u : \overline{\Omega} \to R^n$ с нормой $||u||_{\mathrm{C}} = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} ||u(x,t)||$. Функция $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Задача (1)-(3) является полупериодической краевой задачей неклассического типа, так как в (3) задается линейная комбинация значений неизвестной функции и ее производной по переменной x в двух точках $t = 0$ и $t = T$, которые являются характеристиками системы (1). В частности, это может быть периодическим условием вида $u(x,0) = u(x,T)$ или $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x,T)}{\partial x}$. Как известно, одной из основных задач теории гиперболических уравнений является задача о разрешимости периодической краевой задачи. Особый интерес к ней проявляется, в первую

Keywords: *system of hyperbolic equations, semiperiodical boundary - value problem, the method of problem with parameters' reduction, the method of functional parameter' introduction*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

очередь, потребностями практики в связи с важностью ее приложения к решению разнообразных проблем в задачах физики, небесной механики, радио- и электротехники и т.п. Одна из трудностей, связанных с исследованием указанной задачи для гиперболических уравнений как линейных, так и нелинейных связана с малыми знаменателями. Изучению полупериодических и периодических решений гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными посвящено большое количество работ. Отметим лишь [1-4], где можно найти обзор и библиографию по данным вопросам. Для получения этих результатов в основном используются методы нелинейного функционального анализа, теории неявных функций и вариационные методы, а также метод малого параметра, принцип Лере-Шаудера о неподвижной точке, теория монотонных операторов и асимптотические методы нелинейной механики. Исследовать существование и единственность классического решения краевой задачи с данными на характеристиках (1)—(3), а также найти его с помощью известных методов теории краевых задач для уравнений с частными производными является весьма сложной задачей. При этом следует еще раз подчеркнуть, что системы уравнений с частными производными гиперболического типа, описывающие всевозможные волновые процессы, представляют значительный интерес как для математики, так и для ее приложения. В [5] для исследования нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными был предложен метод введения функциональных параметров. Он является модификацией метода параметризации [6], разработанного для решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на уравнения с частными производными. На основе этого метода были получены достаточные условия существования единственного классического решения в терминах коэффициентов.

Цель данной работы - установить коэффициентные достаточные условия существования и единственности классического решения задачи (1)—(3) методом сведения к задаче с параметром.

Схема метода сведения к задаче с параметром. Введем обозначение $u(0,t) = \mu(t)$ и сделаем замену $\bar{u}(x,t) = u(x,t) - \mu(t)$. Тогда задача (1) - (3) сведется к следующей эквивалентной задаче

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + C(x,t)\bar{u} + f(x,t) + B(x,t)\dot{\mu}(t) + C(x,t)\mu(t), \tag{4}$$

$$\bar{u}(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$P_1(x)\frac{\partial \bar{u}(x,0)}{\partial x} + S_1(x)\frac{\partial \bar{u}(x,T)}{\partial x} + P_0(x)\bar{u}(x,0) + S_0(x)\bar{u}(x,T) = \varphi(x) - P_0(x)\mu(0) - S_0(x)\mu(T), \tag{6}$$

$$x \in [0,\omega],$$

$$\bar{u}(\omega,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Задача (4)-(7) отличается от (1)-(3) тем, что в ней появилось начальное условие (5) и параметр $\mu(t)$. Введя обозначения $\bar{v}(x,t) = \dfrac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial t}$, $\bar{w}(x,t) = \dfrac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial t}$, из (4), (5) получим

$$\bar{w}(x,t) = \int\limits_0^x \Big[A(\xi,t)\bar{v}(\xi,t) + B(\xi,t)\bar{w}(\xi,t) + C(\xi,t)\bar{u}(\xi,t) + f(\xi,t) + B(\xi,t)\dot{\mu}(t) + C(\xi,t)\mu(t)\Big]d\xi. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по t и обозначая через $\tilde{B}(t,\omega) = \int\limits_0^\omega B(\xi,t)d\xi$, подставим в полученное соотношение соответствующее выражение из (8)

$$\tilde{B}(t,\omega)\dot{\mu}(t) = -\int\limits_0^\omega C(\xi,t)d\xi \cdot \mu(t) - \int\limits_0^\omega \Big[A(\xi,t)\bar{v}(\xi,t) + B(\xi,t)\bar{w}(\xi,t) + C(\xi,t)\bar{u}(\xi,t) + f(\xi,t)\Big]d\xi, \tag{9}$$

Из соотношения (6) при $x=0$ с учетом (5) получим

$$P_0(0)\mu(0)+S_0(0)\mu(T)=\varphi(0)-P_1(0)\bar{v}(0,0)-S_1(0)\bar{v}(0,T). \qquad (10)$$

Функциональные соотношения (4)-(6), (9), (10) будут эквивалентны задаче (1)-(3).

Метод сведения к задаче с параметром разбивает на два этапа процесс нахождения неизвестных функций:

1) нахождение введенного параметра $\mu(t)$ из двухточечной краевой задачи (9), (10);

2) нахождение неизвестных функций $\bar{u}(x,t)$ и ее производных $\bar{w}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$ из нелокальной краевой задачи (4), (5), (6).

Если известны функции $\mu(t)$, $\dot{\mu}(t)$, то решая нелокальную краевую задачу для системы гиперболических уравнений (4) - (6), найдем функции $\bar{u}(x,t)$, $\bar{w}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$. Тогда функция $\mu(t)+\bar{u}(x,t)$ будет решением исходной задачи. Если известны функции $\bar{u}(x,t)$, $\bar{w}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$, то решая двухточечную краевую задачу (9), (10), найдем $\mu(t)$, и снова функция $\mu(t)+\bar{u}(x,t)$ будет решением задачи (1)–(3). Здесь неизвестными являются как функции $\mu(t)$, $\dot{\mu}(t)$, так и функции $\bar{u}(x,t)$, $\bar{w}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$. Поэтому применяется итерационный метод, и решения задач (4)–(6) и (9), (10) находятся как пределы последовательностей $\{\mu^{(k)}(t)\}$, $\{\bar{u}^{(k)}(x,t)$, $\bar{w}^{(k)}(x,t)$, $\bar{v}^{(k)}(x,t)\}$. Алгоритм определения решений следующий:

Шаг 0. Предполагая в правых частях (9), (10), $\bar{u}(x,t)=0$, $\bar{w}(x,t)=0$, $\bar{v}(x,t)=0$ при всех $x\in[0,\omega]$ и решая задачу (9), (10), найдем $\mu^{(0)}(t)$. Из краевой задачи (4)–(6), где $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$, определим функции $\bar{u}^{(0)}(x,t)$, $\bar{w}^{(0)}(x,t)$, $\bar{v}^{(0)}(x,t)$.

Шаг 1. Считая в правых частях (9), (10) $\bar{u}(x,t)=\bar{u}^{(0)}(x,t)$, $\bar{w}(x,t)=\bar{w}^{(0)}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)=\bar{v}^{(0)}(x,t)$ при всех $x\in[0,\omega]$ и решая задачу (9), (10), найдем $\mu^{(1)}(t)$. Из краевой задачи (4) - (6), где $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(1)}(t)$, определим функции $\bar{u}^{(1)}(x,t)$, $\bar{w}^{(1)}(x,t)$, $\bar{v}^{(1)}(x,t)$ и т.д.

Решение нелокальной краевой задачи (4)-(6) находим методом введения функциональных параметров [5], а двухточечной краевой задачи (9), (10) - методом параметризации [6].

Обозначим $\tilde{A}(t,\omega)=-[\tilde{B}(t)]^{-1}\int\limits_0^\omega C(\xi,t)d\xi$. Возьмем шаг $h>0: Nh=T$, число $\nu=1,2,\dots$ и с помощью матриц граничных условий $P_1(x)$, $S_1(x)$, $P_0(0)$, $S_0(0)$ и матриц $A(x,t)$ системы (1) и $\tilde{A}(t,\omega)$ системы (9) составим $(nN\times nN)$ — матрицы $Q_\nu(h,x)$, $\tilde{Q}_\nu(h,\omega)$ специальных структур

$$Q_\nu(h,x)=\left|\begin{array}{cccccc} P_1(x)h & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1(x)[I+D_{\nu N}(h,x)]h \\ I+D_{\nu 1}(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(h,x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu N-1}(h,x) & -I \end{array}\right|,$$

$$\tilde{Q}_\nu(h,\omega)=\left|\begin{array}{cccccc} P_0(0)h & 0 & 0 & \dots & 0 & S_0(0)[I+\tilde{D}_{\nu N}(h,\omega)]h \\ I+\tilde{D}_{\nu 1}(h,\omega) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+\tilde{D}_{\nu 2}(h,\omega) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+\tilde{D}_{\nu N-1}(h,\omega) & -I \end{array}\right|,$$

где I - единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu r}(h,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A(x,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$\tilde{D}_{\nu r}(h,\omega)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\tilde{A}(\tau_1,\omega)d\tau_1+...+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\tilde{A}(\tau_1,\omega)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\tilde{A}(\tau_\nu,\omega)d\tau_\nu...d\tau_1.$$

Введем обозначения $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||A(x,t)||$, $\tilde{\alpha}=\max\limits_{t\in[0,T]}||\tilde{A}(t,\omega)||$, $\tilde{K}=\tilde{\gamma}_\nu(h)h\max\Big(1+he^{\tilde{\alpha}h},e^{\tilde{\alpha}h}\Big)$, $K=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\gamma_\nu(h,x)h\max\Big(1+he^{\alpha h},e^{\alpha h}\Big)$, $a=||A||_{\mathrm{C}}$, $\tilde{b}=\max\limits_{t\in[0,T]}||\tilde{B}(t)||$, $b=||B||_{\mathrm{C}}$, $c=||C||_{\mathrm{C}}$.

Условия следующего утверждения обеспечивают равномерную относительно $(x,t) \in \overline{\Omega}$ сходимость предложенного алгоритма.

Т е о р е м а 1 *Пусть при некоторых* $h > 0 : Nh = T$ *и* ν, $\nu = 1, 2, ...,$ $(n \times n)$ *- матрица* $\tilde{B}(t,\omega)$ *обратима при всех* $t \in [0,T]$, $(nN \times nN)$ *- матрица* $Q_\nu(h,x)$ *обратима при всех* $x \in [0,\omega]$, $(nN \times nN)$ *- матрица* $\tilde{Q}_\nu(h,\omega)$ *обратима и выполняются неравенства*

a) $\quad ||[Q_\nu(h,x)]^{-1}|| \leq \gamma_\nu(h,x), \qquad ||[\tilde{Q}_\nu(h,\omega)]^{-1}|| \leq \tilde{\gamma}_\nu(h),$

b) $\quad \lambda(h,x,\nu) = \gamma_\nu(h,x) \cdot \max(1, h||S_1(x)||)\left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \alpha(x)h - ... - \frac{1}{\nu!}[\alpha(x)h]^\nu\right] \leq \beta < 1,$

$$\tilde{\lambda}(h,\nu) = \tilde{\gamma}_\nu(h) \cdot \max(1, h||S_0(0)||)\left[e^{\tilde{\alpha}h} - 1 - \tilde{\alpha}h - ... - \frac{1}{\nu!}[\tilde{\alpha}h]^\nu\right] < 1,$$

c) $\quad q = \max(\tilde{K}, \tilde{\alpha}\tilde{K}+1)\tilde{b}(a+b+c)\omega \max(1,\omega) e^{\max(K,aK+1)(b+c)\omega} \max(K, aK+1) \cdot (b+c) < 1,$ *где* β *- const.*

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)—(3).

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме доказательства теорем из [7,8].

Цитированная литература

1. **Vejvoda O. et al.** Partial differential equations: time - periodic solutions. Martinus Nijhoff Publ. Hague, 1982.

2. **Пташник Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.

3. **Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.** Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.

4. **Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М., Труды МИРАН. Т. 222. 1998.

5. **Джумабаев Д. С., Асанова А.Т.** // Известия МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23 – 29.

6. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.

7. **Асанова А.Т.** // Вестник МОН РК, НАН РК. 2002. № 1. С. 81 – 88.

8. **Асанова А.Т.** // Доклады МОН РК, НАН РК. 2002. № 4. С. 5 – 11.

Поступила в редакцию 0 .09.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 18 — 25*

УДК 517.988

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА КОРРЕКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ И СУЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. А. Бесбаев, М. А. Бименов, Т. Ш. Кальменов

ЮКГУ имени М.Ауезова
486050, Шымкент, пр-т Тауке-хана, 5

В работе изучаются граничные свойства корректных расширений и сужений дифференциальных операторов. Показано что корректное расширение минимальных дифференциальных операторов не имеет внутренних граничных условий и не все корректные сужения порождаются граничными условиями. В случае, когда корректное расширение совпадает с регулярным, дано его описание в терминах граничных условий.

В конечной области Ω рассмотрим дифференциальные уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u = f(x), \tag{1}$$

$$L^+ v \equiv \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^\alpha D^\alpha a_\alpha(x) v = g(x). \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнений (1), (2) и граница области $S = \partial\Omega$ являются достаточно гладкими.

Через L_0 и L_0^+ обозначим замыкания дифференциальных операторов (1) и (2), соответственно, в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функций $C_0^\infty(\Omega)$, а через $(L_0^+)^*$ и L_0^* — сопряжения операторов к L_0^+ и L_0.

Оператор L назовем корректным расширением оператора L_0 (по терминологии Отелбаева [1]—[4]), если выполнены условия: a) $L_0 \subset L$, b) L^{-1} ограничен на всем $L_2(\Omega)$.

Оператор L назовем корректным сужением оператора $(L_0^+)^*$, если a) $L \subset (L^+{}_0)^*$, b) L ограниченно обратим на всем $L_2(\Omega)$.

Если оператор L является одновременно корректным расширением L_0 и корректным сужением $(L_0^+)^*$, т.е., если выполнены условия: a) $L_0 \subset L \subset (L_0^+)^*$, b) L^{-1} ограничен на всем $L_2(\Omega)$, $\|L^{-1}\|_{L_2(\Omega)} < \infty$, то оператор L назовем регулярным расширением L_0.

Отметим, что теория регулярных расширений обязана своим возникновением работам Д.Ф. Неймана [5], М.И.Вишика [6]. Систематическое изучение раздельно корректных расширений и сужений было начато в работах А.А.Дезина [7], М.О.Отелбаева и их учеников.

Keywords: *differential operators, correct extractions, correct contractions, boundary conditions, regular extractions, boundary operators*
2000 Mathematics Subject Classification: 35G15

В дальнейшем будем предполагать выполнение следующих априорных оценок:

$$\|L_0 u\|_0 \geq C\|u\|_0,\ u \in D(L_0), \tag{3}$$

$$\|L_0^+ v\|_0 \geq C\|v\|_0,\ v \in D(L_0^+), \tag{4}$$

и существование регулярных расширений L_Q и $L_{Q^\perp}$ оператора L_0, порожденных соотношениями

$$L_Q u = f,\ Qu|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$L_{Q^\perp} v = g,\ Q^\perp v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

где Q и $Q^\perp$ — линейные операторы, действующие на следах $u(x)$, $v(x)$ и их производных на $S = \partial\Omega$.

Здесь $Q^\perp$ — ортогональный граничный оператор к Q такой, что, если $u \in D(L_Q)$ и выполнены соотношения

$$Qu|_{\partial\Omega} = 0,\ Q^\perp u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

то $u \in D(L_0)$. В частности, если $u \in L_Q^{-1} f$, то в силу условия $Qu|_{\partial\Omega} = 0$ для того, чтобы $u \in D(L_0)$ и $L_0 u = f$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$Q^\perp L_Q^{-1} f|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Отметим, что все граничные условия и действия граничных операторов понимаются в соответствующих пространствах обобщенных функций.

Теперь, следуя работам [1]—[4], дадим представление элементов области определения корректного расширения. Пусть

$$Ker(L_0^+) = \{u \in L_2(\Omega), L_0^+ u = 0\}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть L – корректное расширение оператора L_0. Тогда существует линейный ограниченный оператор $K : Ker(L_0^+)^* \to L_2(\Omega)$ такой, что любой элемент $u \in D(L)$ представим в виде*

$$u = L_Q^{-1} f + K u_0^*. \tag{9}$$

Обратно, если $K : Ker(L_0^+)^* \to L_2(\Omega)$, то формула (9) порождает область определения корректного расширения, соответствующего оператору K. Здесь

$$f = L_0 u_0 \oplus u_0^*,\ u_0^* \in Ker(L_0^+)^*. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть L — корректное расширение оператора L_0. Поскольку $f = L_0 u_0 \oplus u_0^*$ и $L_Q u_0 = L_0 u_0 = Lu$, то легко проверить, что

$$\begin{gathered} u = L^{-1} f = L^{-1}(L_0 u_0 \oplus u_0^*) = L_Q^{-1} L_0 u_0 + L^{-1} u_0^* = L_Q^{-1}(L_0 u_0 \oplus u_0^*) + \\ (L^{-1} - L_Q^{-1}) u_0^* = L_Q^{-1} f + (L^{-1} - L_Q^{-1}) u_0^*. \end{gathered} \tag{11}$$

Следовательно,

$$u = L_Q^{-1} f + K u_0^*,\ K = L^{-1} - L_Q^{-1}. \tag{12}$$

Обратно, если $K : Ker(L_0^+)^* \to L_2$, то в силу свойства

$$u_0^* = Pf, \tag{13}$$

где P - оператор проектирования $L_2(\Omega)$ на $Ker(L_0^+)^*$, равенство (9) дает описание области определения корректного расширения L, соответствующего оператору K. Действительно, если $f \in R(L_0)$, т.е. $L_0 u_0 = f$, то $(f, u_0^*)_0 = 0$, $Pf = 0$. Далее, $u = L_Q^{-1} f = L_0^{-1} u_0$, т.е. $L_0 \subset L$. Обратимость L на всем $L_2(\Omega)$ очевидна. Теорема 1 доказана. При доказательстве этой теоремы использовались методы, предложенные в [1]—[2].

Лемма 1. *Корректное расширение не имеет внутренних граничных условий.*

Действительно, пусть L — произвольное корректное расширение L_0, а $\omega \subset \Omega$ — внутреннее множество. Предположим, что $u \in D(L)$ удовлетворяет внутренним граничным условиям

$$Qu|_{\omega} = 0, \tag{14}$$

где Q — произвольный граничный оператор на множестве функций с областью определения на ω.

Возьмем $f = f_0 \in R(L_0)$, т.е. $f = L_0 u_0, u_0 \in D(L_0)$. Тогда из формулы (9) следует, что

$$u_0 = L_Q^{-1} f_0 = L_0^{-1} f_0. \tag{15}$$

В частности, любая $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$Qu|_{\omega} = 0, \tag{16}$$

что невозможно при $Q \not\equiv 0$, поэтому $Q \equiv 0$. Следовательно, $u \in D(L)$ не удовлетворяет внутреннему граничному условию. Лемма 1 доказана.

Перепишем равенство (11) в следующем виде

$$u = L^{-1}(L_0 u_0 \oplus u_0^*) = u_0 + L^{-1} u_0^*, \tag{17}$$

где $L^{-1} : Ker(L_0^+)^* \to L_2(\Omega)$, вообще говоря, произвольный оператор. Поскольку $u_0 \in D(L_0)$, то в силу произвольности оператора L^{-1} из равенства (17) следует, что $u \in D(L)$ не всегда удовлетворяет фиксированному граничному условию.

Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Существует корректное расширение, не описывающееся в терминах граничных условий.*

Теперь дадим представление элементов корректного сужения оператора $(L^{+}{}_0)^*$.

Пусть L_Q — регулярное расширение, а L — произвольное корректное сужение $(L^{+}{}_0)^*$. Тогда легко убедиться, что

$$u = L_Q^{-1} f + (L^{-1} - L_Q^{-1}) f = L_Q^{-1} f + kf, \tag{18}$$

$$\text{где} \quad k = L^{-1} - L_Q^{-1}. \tag{19}$$

Применяя оператор $(L^{+}{}_0)^*$ к обеим частям равенства (18), имеем

$$(L^{+}{}_0)^* u = (L^{+}{}_Q)^* L_Q^{-1} f + (L^{+}{}_0)^* kf = f + (L^{+}{}_0)^* kf = f.$$

Отсюда

$$(L^{+}{}_0)^* kf = 0. \tag{20}$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Оператор L является корректным сужением оператора $(L^{+}{}_0)^*$ тогда и только тогда, когда существует линейный оператор $k: \ L_2(\Omega) \to Ker(L^{+}{}_0)^*$ такой, что любой элемент $u \in D(L)$ задается формулой (18).*

Если $f = Lu = L_0 u_0$, то в силу равенства $L_Q^{-1} L_0 u_0 = u_0$ из равенства (19) имеем

$$u = L_0^{-1} f + kf = u_0 + kf\,, \quad u_0 \in D(L_0). \tag{21}$$

Поскольку оператор $K: \ L_2(\Omega) \to Ker(L^{+}{}_0)^*$ — произвольный, то граничные значения kf и ее производных, вообще говоря, не удовлетворяют фиксированному граничному условию. Отсюда вытекает

Л е м м а 3. *Не все корректные сужения порождаются граничными условиями.*

Теперь рассмотрим случай регулярного расширения, т.е. когда $L_0 \subset L \subset (L_0^+)^*$ и L^{-1} ограничен на всем $L_2(\Omega)$.

Так как $Lu = L_0^* u = f$ и $(L^+{}_0)^* L_Q^{-1} f = f$, то из представления элементов корректного расширения имеем

$$u = L_Q^{-1} f + K u_0^*, \tag{22}$$

$$L_0^* K u_0^* = 0, \tag{23}$$

т.е.

$$K : Ker(L_0^+)^* \to Ker(L_0^+)^*. \tag{24}$$

Тем самым доказана

Т е о р е м а 3. *Корректное расширение L оператора L_0 является регулярным расширением только тогда, когда линейный оператор k, определяющий корректное расширение, есть отражение $k:\ Ker(L^+{}_0)^* \to Ker(L^+{}_0)^*$.*

Теперь дадим описание регулярных расширений в терминах граничных условий.

Следуя методам работы [4], из представления $f = L_0 u_0 \oplus u_0^*$ при помощи операторов L_Q и $Q^\perp$ находим u_0^*. Пусть $u \in D(L_{Q^\perp})$, т.е. $Lu = f$, $Q^\perp u|_{\partial\Omega} = 0$. Функцию u представим в виде

$$u = L_Q^{-1} f + v_0^*, \tag{25}$$

где

$$Lv_0^* = 0,\ Q^\perp v_0^*|_{\partial\Omega} = \varphi_f, \tag{26}$$

$$\varphi_f = -Q^\perp L_Q^{-1} f = -Q^\perp L_Q^{-1}(L_0 u_0 + u_0^*) = -Q^\perp(u_0 + L_Q^{-1} u_0^*) = -Q^\perp L_Q^{-1} u_0^* = \varphi_{u_0^*}.$$

Поскольку $v_0^* \in Ker(L_0^+)^*$ и удовлетворяет условию (26), то

$$v_0^* = \overset{0}{L}{}_{Q^\perp}^{-1} \varphi_f = \overset{0}{L}{}_{Q^\perp}^{-1} \varphi_{u_0^*}, \tag{27}$$

где $\overset{0}{L}{}_{Q^\perp}^{-1}$ — оператор, дающий решение задачи (26). Условие $v_0^* = 0$ равносильно $\varphi_f = 0$. Отсюда $Q^\perp L_Q^{-1} u_0^*|_{\partial\Omega} = 0$ и в силу свойств оператора L_Q имеем, что $L_Q^{-1} u_0^* \in D(L_0)$, что возможно только при $u_0^* = 0$. Обратно, если $u_0^* \equiv 0$, то $v_0^* \equiv 0$. Таким образом, существует обратимый оператор $\widetilde{\mathcal{L}}$ такой, что

$$v = \mathcal{L} u_0^*, \tag{28}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \overset{0}{L}{}_{Q^\perp}^{-1} L_Q^{-1} u^*)_{\partial\Omega}. \tag{29}$$

Отсюда

$$u_0^* = \mathcal{L}^{-1} f. \tag{30}$$

Пусть $W_Q(\Omega)$ — подмножество функций из $D(L^+{}_0)^*$ такое, что гладкость функций $u \in W_Q(\Omega)$ совпадает с гладкостью $u \in D(L_Q)$. В дальнейшем будем рассматривать те регулярные расширения L, у которых $D(L) \subset W_Q(\Omega)$.

Теперь равенство (22) преобразуем к виду

$$u = L_Q^{-1} f + K u_0^* = L_Q^{-1} f + K\mathcal{L}^{-1} f = L_Q^{-1} f + \mathcal{L}^{-1} \tilde{K} f, \tag{31}$$

где $\tilde{K} = \mathcal{L} K \mathcal{L}^{-1}$.

Применяя граничный оператор Q к обеим частям равенства (31), имеем

$$Qu|_{\partial\Omega} = Q\mathcal{L}^{-1} \tilde{K} L u|_{\partial\Omega}\,,\ \ \tilde{K} = \mathcal{L} K \mathcal{L}^{-1}. \tag{32}$$

Полагая $\tilde{K}L = LK^*$, находим $\tilde{K} = LK^*L^{-1}$, $K^* = L^{-1}\tilde{K}L$, где $K^*:\ D(L) \to D(L)$. С учетом этого равенство (32) преобразуется к виду

$$Qu|_{\partial\Omega} = Q\mathcal{L}^{-1}LK^*u|_{\partial\Omega}. \tag{33}$$

Таким образом, в случае, когда область определения регулярного расширения $D(L) \subset W_Q(\Omega)$, элементы $u \in D(L)$ удовлетворяют граничным условиям (32) или (33), соответственно.

Обратно, если подмножество функций $u \in D((L^+{}_0)^*) \cap W_Q(\Omega)$ удовлетворяет условию (32), то, полагая $(L^+{}_0)^*u = Lu = f$, легко проверить, что u представим в виде

$$u = L_Q^{-1}f + K\mathcal{L}^{-1}f = L^{-1}f\,,\ \ Lu = f.$$

Из свойств операторов L_Q и $\mathcal{L}$ вытекает, что, если $u \in D(L_0)$, то $u \in D(L)$, т.е. $L_0 \subset L$. С другой стороны, $L \subset (L^+{}_0)^*$. Поэтому $L_0 \subset L \subset (L^+{}_0)^*$ ограниченно обратим по построению L на всем $L_2(\Omega)$.

Поскольку условия (32), (33) для регулярных расширений L эквивалентны, то тем самым доказана

Теорема 4. *Пусть L — регулярное расширение с $D(L) \subset W_Q(\Omega)$, соответствующее оператору $K:\ L_2(\Omega) \to W_Q(\Omega)$. Тогда любой элемент $u \in D(L)$ удовлетворяет граничному условию (32) или (33). Обратно, подмножество $u \in D((L^+{}_0)^*) \cap W_Q(\Omega)$, удовлетворяющее условию (32) или (33), порождает регулярное расширение, соответствующее оператору K.*

Заметим, что граничные условия (32) и (33) определяются с точностью до обратимых граничных операторов.

Следует отметить, что любые корректные граничные задачи для уравнения (1) порождают оператор L, который содержит минимальный оператор L_0, содержится в области определения в L_0^* и обратим на всем $L_2(\Omega)$, т.е. $L_0 \subset L \subset L_0^*$. Иными словами, корректные граничные условия являются граничными условиями регулярных расширений минимального оператора L_0.

Ниже будем рассматривать примеры корректных расширений, которые являются корректными сужениями $(L_0^+)^*$ за исключением множества меры нуль.

Пусть $\omega \in \Omega$ — $n-1$-мерная поверхность, разделяющая множество Ω на две подобласти: Ω_+ лежит слева от ω и Ω_- — справа от ω.

Задача R. Найти корректное расширение оператора L_0 такое, что

$$(L_0^+)^*u = f \ \text{ в } \ \Omega_+,\ \ (L_0^+)^*u = f \ \text{ в } \ \Omega_-, \tag{34}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$Qu|_{\partial\Omega} = 0 \tag{35}$$

и условиям сопряжения

$$[\frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}]_\omega = Q_\nu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, f),\ \nu = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{36}$$

где

$$[\frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}]_0 = \frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}|_{\omega+0} - \frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}|_{\omega-0}$$

— разрыв нормальной производной ν-го порядка,

$$\varphi_\nu = \frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu}|_{\partial\Omega}. \tag{37}$$

Здесь Q, Q_ν — произвольные линейные операторы такие, что при $u \in D(\omega)$ $\ (\frac{\partial^\nu u}{\partial n^\nu})|_\omega = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$.

Если задача (34) — (36) является корректной, то она действительно определяет корректное расширение.

Приведем несколько примеров таких расширений.

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ $AC_+ : x-y=0,\ BC_+ : x+y=1$, при $y<0$ $AC_- =: x+y=0,\ BC_- : x-y=1$ характеристиками уравнения

$$Lu \equiv \Box u \equiv u_{xx} - u_{yy} = f(x,y). \tag{38}$$

Пусть L_0 — замыкание дифференциального оператора (38) в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функций $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Обозначим $\Omega_+ = \Omega \cap \{y>0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{y<0\}$.

Задача R_1. Найти корректное расширение оператора L_0 такое, что

$$L_0^* u = f \text{в} \Omega_+,\ L_0^* u = f \text{в} \Omega_-, \tag{39}$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{AC_+ \cup BC_+} = 0,\ u|_{AC_- \cup BC_-} = 0. \tag{40}$$

В силу однозначной разрешимости задачи Гурса в областях Ω_+ и Ω_- решение задачи (39), (40) в Ω_+ и Ω_- задается, соответственно, формулой

$$u = L^{-1} f = \begin{cases} \int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\eta f_+(\xi_1,\eta_1) d\eta_1 = L_{\Gamma_+}^{-1} f, \\ \xi = x-y,\ \eta = x+y,\ f_+ = \frac{1}{4} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}), \\ \int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\eta f_-(\xi_1,\eta_1) d\eta_1 = L_{\Gamma_-}^{-1} f, \\ \xi = x+y, \quad \eta = x-y,\ f_- = \frac{1}{4} f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}). \end{cases} \tag{41}$$

Отсюда, легко проверить, что

$$u(x,0+) - u(x,0-) = L_{\Gamma_+}^{-1} f|_{y=0+} - L_{\Gamma_-}^{-1} f|_{y=0_-}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0-) = \frac{\partial L_{\Gamma_+}^{-1} f}{\partial y}|_{y=0+} - \frac{\partial L_{\Gamma_-}^{-1} f}{\partial y}|_{y=0-}. \tag{43}$$

Если правые части равенств (42)—(43) равны нулю, то $f \in R(L_0)$ и $u = u_0 = L_0^{-1} f$. Если f — произвольная функция, то формула (41) определяет корректное расширение L оператора L_0, порожденное задачей (39)—(40). При этом $u \in D(L)$ удовлетворяет необходимым условиям (42)—(43).

Задача R_2. Найти корректное расширение оператора L_0 такое, что

$$L_0^* u = f \text{ в } \Omega_+,\ L_0^* u = f \text{ в } \Omega_-, \tag{44}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{AC_+ \cup BC_+} = 0,\ u|_{AC_-} = 0 \tag{45}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,0+) = u(x,0-). \tag{46}$$

Как и выше находим решение задачи R_2 по формуле

$$u = L_{\Gamma_+}^{-1} f = \int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\eta f_+(\xi_1,\eta_1) d\eta_1, \quad \xi = x-y,\ \eta = x+y \tag{47}$$

в области Ω_+, а в области Ω_- ищем его в виде

$$u = L_{\Gamma_-}^{-1} f_- + \tau_f(\xi) \equiv \int\limits_0^{\xi} d\xi_1 \int\limits_1^{\eta} f_-(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 + \tau_f(\xi), \tag{48}$$

$$\xi = x + y, \ \eta = x - y.$$

где $\tau_f(\xi), \ \tau_f(0) = 0$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Определим $\tau_f(x)$ из соотношения (43) :

$$\tau_f(x) = L_{\Gamma_+}^{-1} f|_{y=0+}(x) - L_{\Gamma_-}^{-1} f|_{y=0-}(x). \tag{49}$$

При выполнении условий

$$L_{\Gamma_+}^{-1} f|_{y=0+} - L_{\Gamma_-}^{-1} f|_{y=0-}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L_{\Gamma_+}^{-1} f|_{y=0+} - \frac{\partial}{\partial y} L_{\Gamma_-}^{-1} f|_{y=0-}(x) = 0$$

функции $f \in R(L_0)$ и $u = u_0 = L_0^{-1} f$ задаются формулой (41). Таким образом, корректное расширение, порожденное задачей R_2, задается формулой

$$u = \begin{cases} L_{\Gamma_+}^{-1} f \ \text{ в } \ \Omega_+ \\ L_{\Gamma_-}^{-1} f + \tau_f(\xi) \text{ в } \Omega_-, \end{cases} \tag{50}$$

где $\tau_f(\xi)$ определена соотношением (49).

Пусть $\Omega \subset R^n$ - шар т.е. $\Omega = \{x \in R^n | \ \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 < R^2\}$, а $\Omega_+ = \{x \subset \Omega | \ \|x\| < r, 0 < r < R\}$, $\Omega_- = \{x \subset \Omega | \ r < \|x\| < R\}$.

Задача R_3. Найти решение $u \in W_2^2(\Omega_+) \bigcap W_2^2(\Omega) \bigcap W_2^1(\Omega)$ уравнения

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega_+, \ -\Delta u = f \text{ в } \Omega_-, \tag{51}$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{|x|=R} = 0, \tag{52}$$

$$u|_{|x|=r+} = u|_{|x|=r-}, \tag{53}$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n}]|_{|x|=r} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{|x|=r+} - \frac{\partial u}{\partial n}|_{|x|=r-} = -\frac{\partial u}{\partial n}|_{|x|=R}, \tag{54}$$

где $\frac{\partial}{\partial n} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + n_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ — производная по внешней нормали.

Имеет место

Лемма 4. *Если $f = 0$, то решение $u \in C^2(\bar{\Omega}_+) \bigcap C^2(\bar{\Omega}_-) \bigcap C(\bar{\Omega})$ задачи (51)—(54) достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума на границе Ω.*

Действительно, в силу эллиптичности уравнения (51) решение задачи R_3 не может достигать своего экстремума внутри Ω_+, Ω_-.

Если оно достигает своего положительного максимума в точке $x_0 \in \partial\Omega_+ \bigcap \partial\Omega_-$, $arg x_0 = \varphi$, то из условия (54) в силу принципа Зарембо-Жиро имеем $\frac{\partial u}{\partial n}|_{|x|=R, \ arg x = \varphi} < 0$. Это противоречит тому, что $u(x)$ не достигает своего экстремума внутри Ω_-. Этот принцип остается справедливым и для решений $u \in W_2^2(\Omega_+) \bigcap W_2^2(\Omega_-) \bigcap W_2^1(\Omega)$.

Решение задачи R_3 в Ω_+ ищем в виде

$$u = \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y) dy + \int\limits_{|x|=r} \mu(y) \varepsilon_n(x,y) ds_y, \tag{55}$$

где $G(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле в области Ω, $\varepsilon_n(x,y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, определенное формулами

$$\begin{gathered}\varepsilon_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|} \text{ при } n=2,\\ \varepsilon_n(x,y) = \frac{1}{(n_2)(2\pi)^{n/2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{|x-y|^{n-1}} \text{ при } n>2,\end{gathered} \tag{56}$$

а $\mu(y)$ — плотность потенциала простого слоя, подлежащая определению. Решение задачи R_3 в области Ω_- ищем в виде

$$\begin{gathered}u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dy + \int\limits_{|x|=r}\mu(y)\varepsilon_n(x,y)dy+\\ \int\limits_{|x|=R}\varphi(y)\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)dy,\end{gathered} \tag{57}$$

где

$$\varphi(x) = -\int\limits_{|y|=r}\mu(y)\varepsilon_n(x,y)ds_y|_{|x|=r}, \tag{58}$$

а $\frac{\partial}{\partial n_y}$ — производная по внешней нормали.

Если равенства (55) и (57) удовлетворяют условию (54), то

$$\begin{gathered}\mu(x) + \int\limits_{|x|=r}\mu(y)\frac{\partial}{\partial n}\varepsilon_n(x,y)dy-\\ \frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{|x|=R}\varphi(y)\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dy|_{|x|=r} = \frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Omega}G(x,y)f(y)dy|_{|x|=R}.\end{gathered} \tag{59}$$

Так как задача R_3 эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (59), то из единственности решения задачи R_3 следует ее однозначная разрешимость. Из свойств решений задачи Дирихле и интегрального уравнения (59) (см. [8]) имеем, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\Omega}G(x,y)f(y)dy|_{|x|=r} \in W_2^{1/2}(S_r),\\ \mu(x)\in W_2^{1/2}(S_r).\end{gathered} \tag{60}$$

С учетом этих соотношений из представлений (55), (57) следует, что
$u(x)\in W_2^2(\Omega_+)\bigcap W_2^2(\Omega_-)\bigcap W_2^1(\Omega)$.
Тем самым доказана

Т е о р е м а 5. *Пусть L_0 — замыкание дифференциального оператора (49) в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функций $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$. Тогда существует корректное расширение*
$L\subset D(L)\subset W_2^2(\Omega_+)\bigcap W_2^2(\Omega_-)\bigcap W_2^1(\Omega)$ оператора L_0, порожденное задачей R_3.

Цитированная литература

1. **Кокебаев Б. К., Отелбаев М. О., Шыныбеков А. Н.** // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 5. С. 24 – 26.
2. **Кокебаев Б. К., Отелбаев М. О., Шыныбеков А. Н.** // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-матем. 1983. № 1. С. 24 – 26.
3. **Кальменов Т. Ш., Отелбаев М. О.** // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 873 – 885.
4. **Кальменов Т. Ш.** // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 1105 – 1121.
5. **Neumann J.** // Math. Ann. 1929. 102. С. 49 – 131.
6. **Вишик М. И.** // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187 – 246.
7. **Дезин А. А.** Общие вопросы граничных задач. М., 1980.
8. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1976.

Поступила в редакцию 28.05.2002г.

УДК 517.95

О ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ, УЧИТЫВАЮЩИХ ЭФФЕКТ ПЕРЕОХЛАЖДЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Г. И. Бижанова, А. С. Сарсекеева

Алматинский государственный университет им. Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

1. Нелинейная задача. Пусть в ограниченной области $\Omega \subset R^n, n \geq 2$ с границей S содержится замкнутая поверхность $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$, которая делит Ω на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ так, что $\partial\Omega_1(t) = S \bigcup \gamma(t)$, $\partial\Omega_2(t) = \gamma(t)$, причем $\gamma(0) := \Gamma$, $\Omega_m(0) := \Omega_m$, $\quad m = 1, 2$.

Введем обозначения $\Omega_T^{(m)} = \{(x,t)|\ x \in \Omega_m(t), 0 < t < T\}$, $m = 1, 2$, $S_T = S \times [0, T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times \times [0, T]$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\pi = \{x| \quad |x - y| < d_1 \quad x \in \Omega,\ y \in \Gamma\}$, $d_1 = const > 0$, $\pi_T = \pi \times (0, T)$, $\Pi_T^{(m)} = (\Omega_m \bigcup \pi) \times (0, T)$, $\Omega_T^{(m)} = \Omega_m \times (0, T)$.

Пусть $\mathcal{L}_m\big(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\big) = \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{A}_m\big(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\big)$ — параболический оператор второго порядка,

$$\mathcal{A}_m\big(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + a^{(m)}(x,t),$$

$$a_{ij}^{(m)} = a_{ji}^{(m)}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0\xi^2 \quad \forall \xi \in R^n, \quad (x,t) \in \bar{\Pi}_T^{(m)}, \quad m = 1, 2, \quad a_0 = const > 0.$$

Рассмотрим задачи, в которых требуется найти функции $u_1(x,t)$, $\quad u_2(x,t)$ и свободную границу $\gamma(t)$.

Задача I.

$$\mathcal{L}_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_m = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{(m)},\ m = 1, 2, \tag{1}$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0m}(x) \quad \text{в} \quad \Omega_m,\ m = 1, 2, \tag{2}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \tag{3}$$

$$u_1|_{S_T} = p(x,t), \tag{4}$$

$$u_1 = u_2 = -\beta V_\nu \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -\varkappa V_\nu \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T. \tag{6}$$

Задача II.

$$\mathcal{L}_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_m = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{(m)},\ m = 1, 2, \tag{7}$$

Keywords: *second order parabolic equation, free boundary, supercooling, weighted Holder space.*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R35

$$u_m|_{t=0} = u_{0m}(x) \quad \text{в} \quad \Omega_m, \; m=1,2, \tag{8}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \tag{9}$$

$$u_1|_{S_T} = p(x,t), \tag{10}$$

$$u_1 = u_2 = -\beta V_\nu \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \tag{11}$$

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \gamma(t), \quad 0 < t < T, \tag{12}$$

где $\beta, \varkappa$ — положительные постоянные, ν — нормаль к поверхности $\gamma(t)$, направленная внутрь $\Omega_2(t)$, V_ν — скорость перемещения $\gamma(t)$ в направлении нормали ν.

Условия (6) и (12) объединим, записав в виде

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -k\varkappa V_\nu, \quad k = 1,0. \tag{13}$$

Задача (1) — (6) отличается от известной задачи Стефана условием на свободной границе (5). Задача (7) — (12) является аналогом задачи Флорина и отличается от нее также условием на свободной границе (11). В задачах Стефана и Флорина вместо условий (5), (11) мы имеем условие $u_1 = u_2 = 0$. Задача (1) — (6) рассматривалась в одномерном случае (при $n = 1$) в статье Гетца И.Г., Мейрманова А.М. [1]. Ими определено понятие обобщенного решения задачи и доказано его существование. Эта задача описывает, например, процесс фазового перехода при наличии явления переохлаждения вещества, при котором вещество имеет температуру ниже температуры плавления, оставаясь в жидком состоянии. Задача (7) — (12) поставлена Г.И.Бижановой и рассматривается впервые.

При сведении задач I и II в неизвестных областях к задачам в фиксированных областях мы используем параметризацию свободной границы уравнением [2]:

$$x = \xi + \rho(\xi,t)N(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{14}$$

где $N(\xi)$ — единичное векторное поле из $C^\infty(\Gamma)$, $N \cdot \nu_0 \geq d_2 = const > 0 \quad \forall \xi \in \Gamma$, ν_0 — единичная нормаль к Γ, направленная в Ω_2.

В настоящей работе задачи I и II будут изучены в весовых пространствах Гельдера $C^l_s(Q_T)$, $s \leq l$, введенных В.С.Белоносовым в [3]. Приведем его определение.

Пусть l - нецелое положительное число, $s \leq l$. Определим $C^l_s(Q_T)$ [3]—[4] как банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$|u|^{(l)}_{s,Q_T} = \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{Q'_t} + \sum_{s < 2j_0 + |j| < l} \sup_{t \leq T} t^{\frac{2j_0 + |j| - s}{2}} |D^{j_0}_t D^j_x u|_\Omega + \left\{ \begin{array}{ll} |u|^{(s)}_{Q_T}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{array} \right. , \tag{15}$$

где $Q'_t = \Omega \times \left(\dfrac{t}{2}, t\right)$,

$$\begin{aligned} [u]^{(l)}_{Q'_t} &= \sum_{2j_0 + |j| = [l]} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{(l - [l])}_{x, Q'_t} + \sum_{0 < l - 2j_0 - |j| < 2} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{\left(\frac{l - 2j_0 - |j|}{2}\right)}_{t, Q'_t}, \\ [v]^{(\alpha)}_{x,Q_T} &= \sup_{(x,t),(z,t) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(z,t)||x - z|^{-\alpha}, \; \alpha \in (0,1), \\ [v]^{(\alpha)}_{t,Q_T} &= \sup_{(x,t),(x,\tau) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(x,\tau)||t - \tau|^{-\alpha}, \; |v|_{Q'_t} = \sup_{(x,t) \in Q'_t} |v(x,t)|, \end{aligned}$$

$|u|^{(s)}_{Q_T}$ — норма пространства Гельдера $C^{s,\frac{s}{2}}_{x\;t}(\bar{Q}_T)$ [5].

При $s=l$ пространство $C^l_s(Q_T)$ есть пространство Гельдера $C^{l,l/2}_{x\ \ t}(\bar{Q}_T)$. $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ при $s\geqslant 0$ есть подпространство функций $u(x,t)\in C^l_s(Q_T)$ таких, что $D^k_t u|_{t=0}=0,\ 2k\leqslant s$; при $s<0$ положим $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)\equiv C^l_s(Q_T)$.

В пространстве $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ норма (15) эквивалентна норме [4]

$$||u||^{(l)}_{s,Q_T}=\sup_{t\leq T}t^{\frac{l-s}{2}}[u]^{(l)}_{Q'_t}+\sup_{t\leq T}t^{-\frac{s}{2}}|u|_{\Omega}. \tag{16}$$

Получим условия согласования для задач I и II. Обозначим $D^\mu_t u^{(k)}_m(x,t)|_{t=0}=(u^{(k)}_m)^{(\mu)}(x)$, $m=1,2$, $D^\mu_t\rho_k(x,t)|_{t=0}=\rho^{(\mu)}_k(x)$, $k=1,0$, где $u^{(0)}_m$, ρ_0 и $u^{(1)}_m$, ρ_1 — решения задач (1) - (6) и (7) - (12), соответственно.

Функции $(u^{(k)}_m)^{(\mu)}(x)$ определим из соотношений:

$$(u^{(k)}_m)^{(0)}(x)=u_{0m}(x),$$

$$(u^{(k)}_m)^{(\mu+1)}(x)=\sum_{i=0}^{\mu}C^i_\mu\mathcal{A}^{(i)}_m(x,0,\frac{\partial}{\partial x})(u^{(k)}_m)^{(\mu-i)}(x),\quad m=1,2, \tag{17}$$

где $\mathcal{A}^{(i)}_m(x,0,\frac{\partial}{\partial x})=D^i_t\mathcal{A}_m(x,t,\frac{\partial}{\partial x})\big|_{t=0}$.

Условия согласования порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$ на свободной границе $\gamma(t)$ устанавливаются из равенств:

$$D^\mu_t\big(u^{(k)}_1-u^{(k)}_2|_{x=\xi+\rho_k(\xi,t)\nu_0}\big)\big|_{t=0}=0,\quad \mu=0,1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right],$$

$$D^\mu_t\big(u^{(k)}_m|_{x=\xi+\rho_k(\xi,t)\nu_0}+\beta\partial_t\rho_k\big)\big|_{t=0}=0,\quad m=1,2,$$

$$D^\mu_t\big(\lambda_1(x,t)\frac{\partial u^{(k)}_1}{\partial\nu}-\lambda_2(x,t)\frac{\partial u^{(k)}_2}{\partial\nu}|_{x=\xi+\rho_k(\xi,t)\nu_0}+k\varkappa\partial_t\rho_k\big)\big|_{t=0}=0,\quad \mu=0,1,\ldots,\left[\frac{s-1}{2}\right],\quad k=1,0$$

после нахождения функций $\rho^{(\mu)}_k(x),\quad \mu=1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right]$ и подстановки вместо $(u^{(k)}_m)^{(\mu)}(x)$, $m=1,2$ выражений (17).

Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_T)=\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(\Omega^{(1)}_T)\times\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(\Omega^{(2)}_T)\times\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(\Gamma_T)$ — банахово пространство функций $w_k=\{u^{(k)}_1,\ u^{(k)}_2,\ \rho_k\}$.

Приведем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть l – нецелое положительное число, $1<s\leq 2+l$, $S\in C^{2+l},\Gamma\in C^{2+l}$, коэффициенты дифференциальных операторов $\mathcal{L}_m$ принадлежат пространству $C^l_{s-2}(\Pi^{(m)}_T)$, $\lambda_m(x,t)\in C^{1+l}_{s-1}(\pi_T), m=1,2$.*

Тогда для любых функций $u_{0m}\in C^s(\Omega_m)$, $m=1,2$, $p\in C^{2+l}_s(S_T)$, удовлетворяющих условиям согласования на S, и $\gamma(t)$ порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$, найдется такое $0<T_0\leq T$, что задачи I и II имеют единственное решение $u^{(k)}_m\in C^{2+l}_s(Q^{(m)}_{T_0})$, $m=1,2$, $\rho_k\in C^{2+l}_s(\Gamma_{T_0}),\partial_t\rho_k\in C^{1+l}_{s-1}(\Gamma_{T_0})$, $k=1,0$, и оно подчиняется оценке

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}=\sum_{m=1}^{2}|u^{(k)}_m|^{(2+l)}_{s,Q^{(m)}_t}+|\rho_k|^{(2+l)}_{s,\Gamma_t}+|\partial_t\rho_k|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_t}\leq C_1\big(\sum_{m=1}^{2}|u_{0m}|^{(s)}_{\Omega_m}+|p|^{(2+l)}_{s,S_t}\big),\quad t\leq T_0. \tag{18}$$

Пусть $\chi(\lambda)$ — гладкая срезающая функция, равная единице при $|\lambda|\leq\delta_0$ и нулю при $|\lambda|\geq 2\delta_0$ и имеющая оценку

$$|D^\alpha\chi|\leq C_\alpha\delta_0^{-|\alpha|}. \tag{19}$$

Применяя преобразование координат

$$x=e_\rho(y,t)\equiv y+N(y)\chi(\lambda)\rho(y,t),\quad y\in\Omega, \tag{20}$$

переводящее при малых t поверхность Γ в свободную границу $\gamma(t)$, а области Ω_m — в неизвестные области $\Omega_m(t)$, $\quad m=1,2$, и полагая $U_m^{(k)}(y,t)=u_m^{(k)}(e_\rho(y,t),t)$, $\quad m=1,2$, получим задачи I и II в виде

$$\mathcal{L}_\rho^{(m)}U_m^{(k)} := \frac{\partial U_m^{(k)}}{\partial t} - (NJ^{-T}\nabla^T U_m^{(k)})\chi\frac{\partial \rho_k}{\partial t} - \sum_{l,p,s=1}^{n} a_{lp}^{(m)}(y,t)\left[J^{ls}J^{ps}\frac{\partial^2 U_m^{(k)}}{\partial y_l \partial y_p} + J^{ls}\frac{\partial J^{ps}}{\partial y_l}\frac{\partial U_m^{(k)}}{\partial y_p}\right] -$$

$$- \sum_{s,l=1}^{n} a_s^{(m)}(y,t)J^{ls}\frac{\partial U_m^{(k)}}{\partial y_l} - a^{(m)}(y,t)U_m^{(k)} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2,$$

$$U_m^{(k)}|_{t=0} = u_{0m}(y), \quad m=1,2, \quad \rho_k|_{t=0}=0, \quad U_1^{(k)}|_{S_T}=p(y,t), \tag{21}$$

$$U_1^{(k)} - U_2^{(k)}|_{\Gamma_T} = 0, \quad \frac{|J^{-T}\nu_0^T|}{NJ^{-T}\nu_0^T}U_1^{(k)} + \beta\frac{\partial \rho_k}{\partial t}\bigg|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$k\varkappa(NJ^{-T}\nu_0^T)\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \lambda_1(y,t)\nu_0 J^{-1}J^{-T}\nabla^T U_1^{(k)} - \lambda_2(y,t)\nu_0 J^{-1}J^{-T}\nabla^T U_2^{(k)}\bigg|_{\Gamma_T} = 0, \quad k=1,0,$$

где J — якобиан преобразования (20) с элементами $J_{sl} = \delta_s^l + N_s\frac{\partial(\chi\rho_k)}{\partial y_l} + \frac{\partial N_s}{\partial y_l}(\chi\rho_k)$; J^T — транспонированная матрица, J^{ls} — элементы обратной матрицы J^{-1},$\nabla_x^T = col\left(\frac{\partial}{\partial x_l},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, ν_{0l} $(l=1,...,n)$ — компоненты вектора ν_0.

Здесь использованы формулы
$\nabla_x^T\bigg|_{x=e_\rho(y,t)} = J^{-T}\nabla_y^T$, $\quad \nu^T = \frac{J^{-T}\nu_0^T}{|J^{-T}\nu_0^T|}$, $\quad V_\nu\bigg|_{x=e_\rho(y,t)} = \frac{(NJ^{-T}\nu_0^T)}{|J^{-T}\nu_0^T|}\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Построим вспомогательные функции $\rho_0^{(k)}(y,t)\in C_s^{2+l}(\Gamma_T)$, $V_m^{(k)}(y,t)\in C_s^{2+l}(\Omega_T^{(m)})$, $m=1,2$, $z_1^{(k)}(y,t)\in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(\Omega_T^{(1)})$, $k=1,0$ по начальным данным задач I и II.

Функции $\rho_0^{(1)}$ и $\rho_0^{(0)}$ определим по условиям [4, 5]

$$\rho_0^{(1)}|_{t=0}=0, \quad \partial_t\rho_0^{(1)}|_{t=0} = -\frac{1}{\beta}(N\nu_0^T)^{-1}u_{01} =$$

$$= -\frac{1}{\varkappa}(N\nu_0^T)^{-1}\left(\lambda_1^{(0)}(x)\frac{\partial u_{01}}{\partial \nu} - \lambda_2^{(0)}(x)\frac{\partial u_{02}}{\partial \nu}\right) \qquad (k=1)$$

и

$$\rho_0^{(0)}|_{t=0}=0, \quad \partial_t\rho_0^{(0)}|_{t=0} = -\frac{1}{\beta}(N\nu_0^T)^{-1}u_{01} \qquad (k=0);$$

функции $V_m^{(k)}$ построим как решения задач

$$\mathcal{L}_{\rho_0}^{(m)}V_m^{(k)} := \frac{\partial V_m^{(k)}}{\partial t} - (NJ_0^{-T}\nabla^T V_m^{(k)})\chi\frac{\partial \rho_0^{(k)}}{\partial t} - \sum_{l,p,s=1}^{n} a_{lp}^{(m)}(y,t)\left[J_0^{ls}J_0^{ps}\frac{\partial^2 V_m^{(k)}}{\partial y_l \partial y_p} + J_0^{ls}\frac{\partial J_0^{ps}}{\partial y_l}\frac{\partial V_m^{(k)}}{\partial y_p}\right] -$$

$$- \sum_{s,l=1}^{n} a_s^{(m)}(y,t)J_0^{ls}\frac{\partial V_m^{(k)}}{\partial y_l} - a^{(m)}(y,t)V_m^{(k)} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2,$$

$$V_m^{(k)}|_{t=0} = u_{0m}(y), \quad m=1,2, \quad V_1^{(k)}|_{S_T}=p(y,t), \quad V_1^{(k)} - V_2^{(k)}|_{\Gamma_T}=0, \tag{22}$$

$$\lambda_1(y,t)B_{\rho_0}\nabla^T V_1^{(k)} - \lambda_2(y,t)B_{\rho_0}\nabla^T V_2^{(k)}\bigg|_{\Gamma_T} = -k\varkappa\frac{\partial \rho_0^{(k)}}{\partial t}, \quad k=1,0;$$

функции $z_1^{(k)}(y,t)\in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(\Omega_T^{(1)})$ найдем из начально-краевой задачи

$$\mathcal{L}_{\rho_0}^{(1)} z_1^{(k)} := \frac{\partial z_1^{(k)}}{\partial t} - (NJ_0^{-T}\nabla^T z_1^{(k)})\chi\frac{\partial \rho_0^{(k)}}{\partial t} - \sum_{l,p,s=1}^{n} a_{lp}^{(1)}(y,t)\left[J_0^{ls}J_0^{ps}\frac{\partial^2 z_1^{(k)}}{\partial y_l \partial y_p} + J_0^{ls}\frac{\partial J_0^{ps}}{\partial y_l}\frac{\partial z_1^{(k)}}{\partial y_p}\right] -$$

$$- \sum_{s,l=1}^{n} a_s^{(1)}(y,t)J_0^{ls}\frac{\partial z_1^{(k)}}{\partial y_l} - a^{(1)}(y,t)z_1^{(k)} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(1)}, \tag{23}$$

$$z_1^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad m=1,2, \quad z_1^{(k)}|_{S_T} = 0, \quad z_1^{(k)}\big|_{\Gamma_T} = -V_1^{(k)} - \frac{\beta(NJ_0^{-T}\nu_0^T)}{|J_0^{-T}\nu_0^T|}\frac{\partial\rho_0^{(k)}}{\partial t} \quad k=1,0,$$

где $J_0 = J|_{\rho=\rho_0}$, $\quad B\rho_0 = \frac{\nu_0 J_0^{-1}J_0^{-T}}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}$ — вектор-строка.

Задачи (22),(23) однозначно разрешимы [3,4,6—8], причем справедливы оценки

$$\sum_{m=1}^{2} |V_m^{(k)}|_{s,\Omega_t^{(m)}}^{(2+l)} \le C_2\left(\sum_{m=1}^{2} |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)} + |p|_{s,S_t}^{(2+l)} + k|\rho_0^{(k)}|_{s,\Gamma_t}^{(2+l)}\right), \tag{24}$$

$$|z_1^{(k)}|_{s,\Omega_T^{(1)}}^{(2+l)} \le C_3\left(|V_1^{(k)}|_{s,\Omega_t^{(1)}}^{(2+l)} + |\rho_0^{(k)}|_{s,\Gamma_t}^{(2+l)}\right), \quad t\le T, \quad k=1,0. \tag{25}$$

В задачах (21) произведем замену неизвестных функций

$$U_1^{(k)} = V_1^{(k)} + z_1^{(k)} + v_1^{(k)}, \quad U_2^{(k)} = V_2^{(k)} + v_2^{(k)}, \quad \rho_k = \rho_0^{(k)} + r_k. \tag{26}$$

Затем, определив производные по Фреше операторов, зависящих от r_k [2], выделим в этих задачах линейную часть относительно неизвестных функций $v_m^{(k)}, r_k$, которую запишем в правых частях уравнений и условий. Тогда задачи I и II могут быть представлены в виде

$$L_{\rho_0}^{(m)} v_m^{(k)} - (NJ_0^{-T}\nabla^T \bar{V}_m^{(k)})L_{\rho_0}^{(m)}\chi r_k + K_m(\chi r_k, v_m^{(k)}) = \mathcal{F}_m(\chi r_k, v_m^{(k)}) + f_m(y,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2,$$

$$v_m^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad m=1,2, \quad r_k|_{t=0}=0, \quad v_1^{(k)}|_{S_T} = 0, \quad v_1^{(k)} - v_2^{(k)}|_{\Gamma_T} = \varphi_1(y,t), \tag{27}$$

$$\frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}v_1^{(k)} + \beta\partial r_k + d\nabla r_k + d_0 r_k\bigg|_{\Gamma_T} = \Phi_1(r_k, v_1^{(k)}),$$

$$B_{\rho_0}\left(\lambda_1\nabla^T v_1^{(k)} - \lambda_2\nabla^T v_2^{(k)}\right) + k\varkappa\partial r_k + g\nabla r_k + g_0 r_k\bigg|_{\Gamma_T} = \Phi_2(r_k, v_1^{(k)}, v_2^{(k)}) + \varphi_2(y,t), \quad k=1,0,$$

где $L_{\rho_0}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{l,p=1}^{n} a_{lp}^{(m)}(y,\rho_0,t)J_0^{ls}J_0^{ps}\frac{\partial^2}{\partial y_l\partial y_p}$, K_m — линейные дифференциальные операторы первого порядка, содержащие члены вида $\partial_{x_i} r_k$, $\partial_{x_i} v_m^{(k)}$, r_k, $v_m^{(k)}$, $i=1,\ldots,n$, $m=1,2$, $d = (d_1,\ldots,d_n)$, $g=(g_1,\ldots,g_n)$ — векторы с компонентами

$$d_i = \left(-\frac{1}{|J_0^{-T}\nu_0^T|}J_0^{ls}\nu_{0l}J_0^{is} + \frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}J_0^{is}N_s\right)\bar{V}_1^{(k)}, \quad g_i = -\frac{1}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\left(\lambda_1\frac{\partial\bar{V}_1^{(k)}}{\partial y_l} - \lambda_2\frac{\partial\bar{V}_2^{(k)}}{\partial y_l}\right)$$

$$\left[J_0^{ls}J_0^{ps}N_sJ_0^{is}\nu_{0p} + J_0^{ls}N_sJ_0^{is}J_0^{ps}\nu_{0p} - \frac{1}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}J_0^{ls}J_0^{ps}\nu_{0p}J_0^{js}\nu_{0j}N_sJ_0^{iq}N_q\right], \ i=1,\ldots,n,$$

$$d_0 = -\frac{1}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\left(\frac{1}{|J_0^{-T}\nu_0^T|}J_0^{ls}\nu_{0l}J_0^{pj}\nu_{0p}\frac{\partial N_j}{\partial y_q}J_0^{qs} - \frac{|J_0^{-T}\nu_0^T|}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}J_0^{lj}\nu_{0l}\frac{\partial N_j}{\partial y_q}J_0^{qs}N_s\right)\bar{V}_1^{(k)},$$

$$g_0 = -\frac{1}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}\left(\lambda_1\frac{\partial\bar{V}_1^{(k)}}{\partial y_l} - \lambda_2\frac{\partial\bar{V}_2^{(k)}}{\partial y_l}\right)\left[J_0^{ls}J_0^{ps}\frac{\partial N_s}{\partial y_i}J_0^{is}\nu_{0p} + J_0^{ls}\frac{\partial N_s}{\partial y_i}J_0^{is}J_0^{ps}\nu_{0p} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{NJ_0^{-T}\nu_0^T}J_0^{ls}J_0^{ps}\nu_{0p}J_0^{js}\nu_{0j}\frac{\partial N_s}{\partial y_i}J_0^{iq}N_q\right], \quad \bar{V}_1^{(k)} = V_1^{(k)} + z_1^{(k)}, \quad \bar{V}_2^{(k)} = V_2^{(k)},$$

$\mathcal{F}_m, \Phi_m$ — нелинейные члены, $f_m, \quad \varphi_m$ — известные функции, зависящие от $V_m^{(k)}, \rho_0^{(k)}, \quad m = 1, 2$. Здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам l, s, p, j, q от 1 до n.

Нелинейные задачи (27) запишем в операторной форме

$$A_k w_k = h + N_k w_k = H_k w_k, \quad k = 1, 0, \tag{28}$$

где $w_k = \{v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, r_k\}$, A_k — линейный оператор, который определяется операторами в левых частях уравнений и условий задачи (27), $h = \left\{f_1,\ f_2,\ 0,\ \varphi_1\big|_{\Gamma_T},\ 0,\ \varphi_2\big|_{\Gamma_T}\right\}$, $N_k w_k = \left\{\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ 0,\ 0,\ \Phi_1\big|_{\Gamma_T},\ \Phi_2\big|_{\Gamma_T}\right\}$ — нелинейный оператор.

2. Линейная задача. Положив в задачах (27) $\mathcal{F}_m = 0$, $\Phi_m = 0$, $m = 1, 2$, получим линейные задачи.

Требуется найти функции $v_1^{(k)}(y,t)$, $v_2^{(k)}(y,t)$ и $r_k(y,t)$, $\quad y \in \Gamma$, удовлетворяющие условиям:

$$L_m\big(y, t, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\big) v_m^{(k)} - \alpha_m(y,t) L_m\big(y, t, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\big)(\chi r_k) + K_m(\chi r_k, v_m^{(k)}) = f_m(y,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)},$$

$$v_m^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad m = 1, 2, \quad r_k|_{t=0} = 0, \quad v_1^{(k)}|_{S_T} = 0, \quad v_1^{(k)} - v_2^{(k)}|_{\Gamma_T} = \varphi_1(y', t), \tag{29}$$

$$l_0(y,t) v_1^{(k)} + \beta \partial_t r_k + d(y,t) \nabla r_k + d_0(y,t) r_k|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$b^{(1)}(y,t) \nabla v_1^{(k)} - b^{(2)}(y,t) \nabla v_2^{(k)} + k \varkappa \partial_t r_k + g(y,t) \nabla r_k + g_0(y,t) r_k|_{\Gamma_T} = \varphi_2(y', t),$$

где $L_m = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)}(y,t) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$ — параболический оператор, $b^{(m)} = (b_1^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)})$, $m = 1, 2$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ — векторы.

Теорема 2. *Пусть l — нецелое положительное число, $1 < s \le 2 + l, S \in C^{2+l}, \Gamma \in C^{2+l}$; $a_{ij}^{(m)}$, α_m и коэффициенты операторов K_m принадлежат пространству $C_{s-2}^{l}(\Omega_T^{(m)})$; l_0, d_i, $d_0 \in C_{s-1}^{1+l}(\Gamma_T)$; $b_i^{(m)}$, g_i, $g_0 \in C_{s-1}^{1+l}(\Gamma_T)$, $i, j = 1, ..., n$, $m = 1, 2$.*

Тогда для любых функций $f_m \in \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l}(\Omega_T^{(m)})$, $m = 1, 2$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_{s}^{2+l}(\Gamma_T)$, $\varphi_2 \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(\Gamma_T)$ задача (29) имеет единственное решение $v_m^{(k)} \in \overset{\circ}{C}{}_{s}^{2+l}(\Omega_T^{(m)})$, $m = 1, 2$, $r_k \in \overset{\circ}{C}{}_{s}^{2+l}(\Gamma_T)$, $\partial_t r_k \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(\Gamma_T)$, $k = 1, 0$, причем справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{2} |v_m^{(k)}|_{s, \Omega_T^{(m)}}^{(2+l)} + |r_k|_{s, \Gamma_T}^{(2+l)} + |\partial_t r_k|_{s-1, \Gamma_T}^{(1+l)} \le C_4 \big(\sum_{m=1}^{2} |f_m|_{s-2, \Omega_T^{(m)}}^{(l)} + |\varphi_1|_{s, \Gamma_T}^{(2+l)} + |\varphi_2|_{s-1, \Gamma_T}^{(1+l)} \big). \tag{30}$$

Доказательство проводится при помощи метода Шаудера и построения регуляризатора [5]. В его основе лежит использование решений модельных задач Коши и первой краевой задачи в полупространстве $x_n > 0$, а также задач сопряжения, порожденных задачами (27) при $k = 0, 1$, которые ранее не рассматривались. Они будут изучены в п.3.

В силу теоремы 2 и оценки (31), нелинейные задачи (28) можем представить в виде

$$w_k = A_k^{-1}(h + N_k w_k) = A_k^{-1} h + A_k^{-1} N_k w_k, \tag{31}$$

причем

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)} \le C_4 |h + N_k w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)} \le C_4 (|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)} + |N_k w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}), \tag{32}$$

здесь норма $|w_k|$ определяется формулой (18); $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_T)=\overset{\circ}{C}{}^{l}_{s-2}(\Omega_T^{(1)})\times\overset{\circ}{C}{}^{l}_{s-2}(\Omega_T^{(2)})\times\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(S_T)\times$ $\times\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(\Gamma_T)\times\overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1}(\Gamma_T)\times\overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1}(\Gamma_T)$ — банахово постранство функций h с нормой

$$|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}=\sum_{m=1}^{2}|f_m|^{(l)}_{s-2,\Omega_T^{(m)}}+|\varphi_1|^{(2+l)}_{s,\Gamma_T}+|\varphi_2|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_T}.$$

Пусть $B_M=\{w_k\in\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_{T_1}):|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_{T_1})}\le M\}$ — замкнутый шар в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_T)$, $T_1\le T$.

На основании оценки (32) имеем

$$|A_k^{-1}(h+N_kw_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le C_4(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}+|N_kw_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)})=$$

$$=C_4\left(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}+\sum_{m=1}^{2}|\mathcal{F}_m|^{(l)}_{s-2,\Omega_t^{(m)}}+|\Phi_1|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_t}+|\Phi_2|^{(1+l)}_{s-1,\Gamma_t}\right);$$

$$|A_k^{-1}(h+N_kw_k)-A_k^{-1}(h+N_k\tilde w_k)|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le C_4|N_kw_k-N_k\tilde w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}=$$

$$=C_4\left(\sum_{m=1}^{2}|\mathcal{F}_m(\chi r_k,v_m^{(k)})-\mathcal{F}_m(\chi\tilde r_k,\tilde v_m^{(k)})|^{(l)}_{s-2,\Omega_t^{(m)}}+|\Phi_1(r_k,v_1^{(k)})-\Phi_1(\tilde r_k,\tilde v_1^{(k)})|^{(1+l)}_{s-1,R_t}+\right.$$

$$\left.+|\Phi_2(r_k,v_1^{(k)},v_2^{(k)})-\Phi_2(\tilde r_k,\tilde v_1^{(k)},\tilde v_2^{(k)})|^{(1+l)}_{s-1,R_t}\right).$$

Используя оценки для произведений функций из весовых пространств Гельдера [9], непосредственными вычислениями получим неравенства

$$|A_k^{-1}H_kw_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le M,$$

$$|A_k^{-1}H_kw_k-A_k^{-1}H_k\tilde w_k)|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}=|A_k^{-1}(H_kw_k-H_k\tilde w_k)|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le q|w_k-\tilde w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\qquad(33)$$

для малых $\quad t\le T_1\le T,\qquad\forall w_k,\ \tilde w_k\in B_M,\quad q\in(0,1).$

Из этих неравенств следует, что нелинейный оператор $A_k^{-1}H_k$ отображает замкнутый шар B_M в себя и является в нем сжимающим при $t\le T_1$. Но тогда по принципу сжимающих отображений задачи (27) или (28) имеют единственное решение $w_k\in\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_{T_1})$, $\quad k=1,0$, причем для решения справедлива оценка

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le C_5|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}.$$

Вспоминая замены (26) и привлекая оценки (24), (25), получим оценку (18) и теорему 1.

3. Модельная задача. Пусть $D_1=\{x|\ \ x'\in R^{n-1},\ x_n<0\}$, $D_2=\{x|\ \ x'\in R^{n-1},\ x_n>0\}$, $D_T^{(m)}=D_m\times(0,T)$, $R_T=\{(x,t)|\ \ x'\in R^{n-1},\ x_n=0,\ 0\le t\le T\}$.

При решении линейной задачи (27) возникает следующая модельная задача сопряжения.

Требуется найти функции $v_1^{(k)}(x,t)$, $v_2^{(k)}(x,t)$, $r_k(x',t)$, удовлетворяющие нулевым начальным данным, по условиям

$$L_mv_m^{(k)}=0\quad\text{в}\quad D_T^{(m)},\quad m=1,2,\qquad(34)$$

$$v_1^{(k)}-v_2^{(k)}+\delta r_k|_{R_T}=\varphi_1(x',t),\qquad(35)$$

$$b\nabla v_1^{(k)}-c\nabla v_2^{(k)}+k\varkappa\partial_tr_k+l'\nabla'r_k|_{R_T}=\varphi_2(x',t),\qquad(36)$$

$$l_0v_1^{(k)}+\beta\partial_tr_k+d'\nabla'r_k|_{R_T}=0,\quad k=1,0,\qquad(37)$$

где $L_m=\frac{\partial}{\partial t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ — параболический оператор, $b=(b_1,\dots,b_n)$, $c=(c_1,\dots,c_n)$, $l'=(l_1,\dots,l_{n-1})$, $d'=(d_1,\dots,d_{n-1})$, все коэффициенты постоянны, $\beta>0$,

$$b_n>0,\ c_n>0.\qquad(38)$$

Теорема 3. *Пусть l — нецелое положительное число, $0 < s \le 2 + l$. Задача (34)—(37) имеет единственное решение $v_m^{(k)}(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(m)})$, $m = 1,2$, $r_k(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(R_T)$, $\partial_t r_k \in$ $\in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(R_T)$ при любых функциях $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(R_T)$, $\varphi_2 \in \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(R_T)$ и для него справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{2} |v_m^{(k)}|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}} + |r_k|^{(2+l)}_{s,R_t} + |\partial_t r_k|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \le C_6\big(|\varphi_1|^{(2+l)}_{s,R_t} + |\varphi_2|^{(1+l)}_{s-1,R_t}\big), \quad t \le T. \tag{39}$$

Доказательство. Опустим индекс "k"у функций $v_m^{(k)}$, r_k. Преобразуем задачу (34)—(37). Из условия (37)

$$\beta\partial_t r + d'\nabla' r|_{R_T} = -l_0 v_1$$

при помощи преобразований Лапласа по переменной t и Фурье — по x' найдем функцию $r(x',t)$

$$r(x',t) = -\frac{l_0}{\beta}\int_0^t v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau \tag{40}$$

и подставим ее в условия (35), (36). В результате получим задачу с неизвестными функциями $v_m(x,t)$, $\quad m = 1,2$,

$$L_m v_m = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(m)}, \quad m = 1,2,$$

$$v_1 - v_2 - \frac{\delta l_0}{\beta}\int_0^t v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau|_{R_T} = \varphi_1(x',t), \tag{41}$$

$$b\nabla v_1 - c\nabla v_2 - \frac{k\varkappa l_0}{\beta}v_1 + \frac{k\varkappa l_0}{\beta^2}\int_0^t d'\nabla' v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau -$$

$$-\frac{l_0}{\beta}\int_0^t l'\nabla v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau|_{R_T} = \varphi_2(x',t), \quad k = 1,0.$$

Таким образом, мы свели задачу (34)—(37) к эквивалентной задаче (41), (40).

Рассмотрим задачу (41). Запишем ее в операторной форме

$$B_0 w = B_1^{(k)} w + h, \quad k = 1,0, \tag{42}$$

где $w = \{v_1,\ v_2\}$, $B_0 w = \big\{L_1 v_1,\ L_2 v_2,\ v_1 - v_2|_{R_T},\ b\nabla v_1 - c\nabla v_2|_{R_T}\big\}$,

$B_1^{(k)} w = \big\{0,\ 0,\ -\frac{\delta l_0}{\beta}\int\limits_0^t v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau|_{R_T},\ -\frac{k\varkappa l_0}{\beta}v_1 +$

$+\frac{l_0}{\beta}\int\limits_0^t \big(\frac{k\varkappa}{\beta}d' - l'\big)\nabla v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau|_{R_T}\big\}$, $h = \big\{0,\ 0,\ \varphi_1(x',t)|_{R_T},\ \varphi_2(x',t)|_{R_T}\big\}$.

Легко видеть, что оператор $B_1^{(k)}$ содержит младшие члены по сравнению с оператором B_0.

Для доказательства однозначной разрешимости задачи (41) или (42) рассмотрим задачу без младших членов

$$L_m v_m = 0 \quad \text{в} \quad D_T^{(m)}, \quad m = 1,2,$$

$$v_1 - v_2|_{R_T} = \varphi_1(x',t), \tag{43}$$

$$b\nabla v_1 - c\nabla v_2|_{R_T} = \varphi_2(x',t),$$

или в операторной форме
$$B_0 w = h. \tag{44}$$
В работах [7], [8] было доказано, что при выполнении условий (38) задача (43) имеет единственное решение $v_m \in \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(D_T^{(m)}), \quad m = 1,2$ и для него справедлива оценка
$$\sum_{m=1}^{2} |v_m|_{s,D_t^{(m)}}^{(2+l)} \le C_7\big(|\varphi_1|_{s,R_t}^{(2+l)} + |\varphi_2|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\big). \tag{45}$$

В силу однозначной разрешимости задачи (44) задачу (42) можем представить следующим образом:
$$w = B_0^{-1}(h + B_1^{(k)}w) := B_0^{-1}h + B_0^{-1}B_1^{(k)}w, \tag{46}$$
где B_0^{-1} — обратный оператор. При этом в силу оценки (45) справедливо неравенство
$$|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_7\big(|\varphi_1|_{s,R_t}^{(2+l)} + |\varphi_2|_{s-1,R_t}^{(1+l)} + |B_1^{(k)}w|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}\big). \tag{47}$$

Докажем разрешимость задачи (46) методом сжимающих отображений.

Пусть $K_r = \{w \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_{T_0}) : |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_{T_0})} \le r\}$ — замкнутый шар радиуса r в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_T)$, $r = C_7|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}(1-q)^{-1}, \quad q \in (0,1)$.

Покажем, что оператор $B_0^{-1}B_1^{(k)}$ переводит замкнутый шар K_r в себя и является в нем сжимающим, т.е. $\forall w, \tilde{w} \in K_r$ выполняются неравенства
$$|B_0^{-1}(h + B_1^{(k)}w)|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le r,$$
$$|B_0^{-1}B_1^{(k)}(w - \tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le q|w - \tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)}, \quad \text{где} \quad 0 < q < 1. \tag{48}$$

Действительно, на основании оценки (47) получим неравенства
$$|B_0^{-1}(h + B_1^{(k)}w)|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_7(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + |B_1^{(k)}w|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}) =$$
$$= C_7\Bigg(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + \left|\frac{\delta l_0}{\beta}\int_0^t v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau\right|_{s,R_t}^{(2+l)} +$$
$$+\left|\frac{k\varkappa l_0}{\beta}v_1 - \frac{l_0}{\beta}\int_0^t \big(\frac{k\varkappa}{\beta}d' - l'\big)\nabla v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)d\tau\right|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\Bigg) \le$$
$$\le C_7\Bigg(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + C_8\big[t|v_1|_{s,D_t^{(1)}}^{(2+l)} + (t^{\frac{1}{2}} + t)|v_1|_{s,D_t^{(1)}}^{(2+l)}\big]\Bigg) \le$$
$$\le C_7\Bigg(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + C_9 t^{\frac{1}{2}}|v_1|_{s,D_t^{(1)}}^{(2+l)}\Bigg) \le C_7\Bigg(|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)} + C_9 t^{\frac{1}{2}}|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)}\Bigg);$$
$$|B_0^{-1}B_1^{(k)}w - B_0^{-1}B_1^{(k)}\tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} = |B_0^{-1}B_1^{(k)}(w - \tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \le C_7|B_1^{(k)}(w - \tilde{w})|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}}(D_t) =$$
$$= C_7\Bigg(\left|\frac{\delta l_0}{\beta}\int_0^t \big[v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big) - \tilde{v}_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)\big]d\tau\right|_{s,R_t}^{(2+l)} + \left|\frac{k\varkappa l_0}{\beta}[v_1 - \tilde{v}_1] -\right.$$
$$\left.-\frac{l_0}{\beta}\int_0^t \big(\frac{k\varkappa}{\beta}d' - l'\big)\big[\nabla v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big) - \nabla\tilde{v}_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big)\big]d\tau\right|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\Bigg) \le$$

$$\leq C_7 C_9 t^{\frac{1}{2}} |v_1 - \tilde{v}_1|^{(2+l)}_{s,D_t^{(1)}} \leq C_7 C_9 t^{\frac{1}{2}} |w - \tilde{w}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)}.$$

Найдем $T_0 \leq T$ из неравенства $C_7 C_9 t^{\frac{1}{2}} \leq q, \quad 0 < q < 1$. В результате получим, что при всех $t \leq T_0$ выполняются оценки (48), которые обеспечивают сжимаемость оператора $B_0^{-1} B_1^{(k)}$ и отображение замкнутого шара K_r в себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений задача (41) или (42) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке

$$|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)} \leq C_{10} |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}, \tag{49}$$

где $C_{10} = C_7 (1-q)^{-1}$.

Установим теперь оценку функции $r(x', t)$, используя неравенство (49):

$$|r|^{(2+l)}_{s,R_t} = \left| \frac{\delta l_0}{\beta} \int\limits_0^t v_1\big(x' - \frac{d'}{\beta}(t-\tau),\ \tau\big) d\tau \right|^{(2+l)}_{s,R_t} \leq C_{11} t |w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}}(D_t) \leq C_{12}(T) |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}}(D_t). \tag{50}$$

Из условий сопряжения на R_T (36), (37) на основании оценок (49),(50) будет следовать оценка

$$|\partial_t r|^{(1+l)}_{s-1,R_t} \leq C_{13}(T) |h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(D_t)}. \tag{51}$$

Итак, мы установили разрешимость задачи (34)—(37) для малых $t \leq T_0$.

Продолжая решение на весь интервал $(0, T)$ способом, изложенным, например, в работах [2], [10], получим теорему 3 для любого $T > 0$.

Цитированная литература

1. **Гетц И. Г., Мейрманов А. М.** //Сибирский журнал индустриальной математики. Январь-июнь, 2000. Т. 3, №1(5). С. 66 – 86.

2. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 6. С. 98 – 140.

3. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975.

4. **Солонников В. А.** Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. Л., 1977. (Препринт АН СССР. Ленингр. отд-ние Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. Р. 2–77).

5. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** // Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

6. **Бижанова Г. И.** // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, вып. 2. С. 46 – 76.

7. **Бижанова Г. И.** //Изв.АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1991. №5. С. 21 – 27.

8. **Бижанова Г. И.** //Изв.АН РК. Сер. физ.-мат. 1992. №5. С. 7 – 13; //Изв.АН РК. Сер. физ.-мат. 1993. №1. С. 11 – 17.

9. **Бижанова Г. И.** // Записки научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 14 – 47.

10. **Бижанова Г. И.** // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 64 – 94.

Поступила в редакцию 7.10.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 36 — 42*

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А. Н. Дадаева

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, ул.Пушкина, 125, dadaeva@math.kz

Динамика термоупругих сред с концентраторами напряжений в виде полостей и включений различных форм мало изучена. Новацким В. и его школой хорошо исследован класс частных решений задач термоупругости. Статические задачи несвязанной термоупругости решали Осипов В.А., Путятин В.Д., Тройнин К.Е., Воробьева А. И, Мамедов Ю.М. и др. Для решения статических и динамических задач термоупругости широко используется метод граничных интегральных уравнений в работах Sladek J., Sladek V., Brebbia C.A., Durgush G.F., Banerjee P.K., Алексеевой Л.А., Купесовой Б.Н. и др. В настоящей статье решаются нестационарные краевые задачи несвязанной термоупругости для разного типа граничных условий. Такие задачи возникают в окрестности нефтяных скважин, при расчете напряженно-деформируемого состояния стенок наземных транспортных трубопроводов и т.п.

1. Постановка задачи. Рассмотрим термоупругую среду $S^- \in R^3$, ограниченную круговой цилиндрической поверхностью в условиях плоской деформации . Пусть S^+ – поперечное сечение цилиндра, S – его граница, n – вектор единичной внешней нормали к S. Здесь для описания движения такой среды используется модель несвязанной термоупругости. Такая среда характеризуется 5 параметрами: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ, μ и двумя термоупругими константами γ и κ, которые определяются через коэффициенты теплоемкости, теплопроводности и линейного теплового расширения среды. Состояние среды описывается системой уравнений теплопроводности [1]:

$$(\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \mu \Delta u_i - \gamma \theta_{,i} + F_i = \rho\, \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\kappa \Delta \theta - \dot{\theta} + Q = 0. \tag{2}$$

Здесь $u_i \, (i, j = \overline{1, N})$ – смещения, $\theta = T - T_0$ – относительная температура, массовые силы:F_i =0, в теле отсутствуют источники тепла:Q =0. Символом после запятой обозначены производные по координатам: $u_{i,kj} = \partial^2 u_i / \partial x_k \partial x_j$, $\theta_{,i} = \partial \theta / \partial x_i$, а точкой – частная производная по времени. По одноименным индексам всюду проводится суммирование от 1 до 2.

Keywords: *uncoupled thermoelastodynamics boundary value problems, stress-strain state*
2000 Mathematics Subject Classification: 80XX

Напряжения определяются соотношениями Дюамеля - Неймана [1]:

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - \gamma\theta)\,\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,. \tag{3}$$

Начальные условия:

$$u_i(x,0) = 0,\, x \in (S^- + S), \quad \dot{u}_i(x,0) = 0,\, x \in S^-$$

$$\theta(x,0) = 0,\, x \in (S^- + S). \tag{4}$$

Рассматриваются следующие краевые условия:
Задача 1. На границе цилиндра S ($\|x\| = r = R$) известны действующие нагрузки и тепловой поток:

$$\sigma_{rj}(x,t) = p_j(x,t),\, j = r,\varphi, \quad \frac{\partial\,\theta(x,t)}{\partial n} = q(x,t),\, x \in S. \tag{5}$$

Задача 2. На S заданы нагрузки и температура

$$\sigma_{rj}(x,t) = p_j(x,t),\, j = r,\varphi, \quad \theta\,(x,t) = \theta^S\,(x,t)\,,\, x \in S. \tag{6}$$

Задача 3.

$$\sigma_{rj}\,(x,t) = p_j(x,t),\, j = r,\varphi, \quad \eta\theta + \zeta\frac{\partial\theta}{\partial n} = q\,(x,t)\,,\, x \in S, \tag{7}$$

η, ξ – постоянные.
Задача 4.

$$\sigma_{rj}\,(x,t) = p_j(x,t), j = r,\varphi, \quad \frac{\partial\,\theta(x,t)}{\partial\,n} = \gamma(T^* H(t) - \theta(x,t)),\, x \in S, \tag{8}$$

где T^* - постоянный тепловой источник.

Требуется определить $\theta(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma(x,t)$ в области S^- при заданных начальных (4) и граничных условиях (5) — (8).

2. Решение краевых задач. Для построения решения используется преобразование Лапласа по t:

$$\bar{u}_i(x,p) = \int_0^{+\infty} u_i(x,t)e^{-pt}dt, \quad \mathrm{Re}p \geq p_0 > 0.$$

Перейдем к постановке задачи в этом пространстве.

После применения преобразования Лапласа к уравнениям (1) и (2) с учетом соотношений (3) получим:

$$(\lambda + \mu)\;\bar{u}_{j,ji} + \mu\Delta\bar{u}_i - \gamma\bar{\theta}_{,i} = p^2\rho\bar{u}_i, \quad i,j = 1,2, \tag{9}$$

$$\Delta\bar{\theta} - \frac{p}{k}\bar{\theta} = 0, \tag{10}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(\lambda\bar{u}_{k,k} - \gamma\bar{\theta}\right)\;\delta_{ij} + \mu\,(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,\,i})\,. \tag{11}$$

Из предельных соотношений для преобразования Лапласа следует, что начальные условия перейдут в асимптотические соотношения [2]:

$$\lim_{p\to\infty} p\bar{u}_i(x,p) = 0,\, x \in (S^- + S), \quad \lim_{p\to\infty} p^2\bar{u}_i(x,p) = 0,\, x \in S^-,$$

$$\lim_{p\to\infty} p\,\bar{\theta}(x,p) = 0,\; x \in (S^- + S). \tag{12}$$

Граничные условия преобразуются к виду:
Задача 1.

$$\bar{\sigma}_{rj}(x,p) = \bar{p}_j(x,p),\, j = r,\varphi, \quad \frac{\partial\,\bar{\theta}(x,p)}{\partial\,n} = \bar{q}(x,p),\, x \in S, \tag{13}$$

Задача 2.

$$\bar{\sigma}_{rj}(x,p)=\bar{p}_j(x,p),\ j=r,\varphi,\quad \bar{\theta}\,(x,p)=\bar{\theta}^S\,(x,p)\,,x\in S, \tag{14}$$

Задача 3.

$$\bar{\sigma}_{rj}(x,p)=\bar{p}_j(x,p), j=r,\varphi,\quad \eta\bar{\theta}+\zeta\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial n}=\bar{q}\,(x,p)\,,\, x\in S, \tag{15}$$

η, ξ – постоянные,

Задача 4.

$$\bar{\sigma}_{rj}(x,p)=\bar{p}_j(x,p),\ j=r,\varphi,\quad \frac{\partial\,\bar{\theta}(x,p)}{\partial\, n}=\gamma\left(\frac{T^*}{p}-\bar{\theta}(x,p)\right),\ x\in S. \tag{16}$$

Если область неограниченна, потребуем, чтобы на бесконечности решение затухало:

$$\lim_{x\to\infty}\bar{u}(x,p)=0, x\in S^-+S,\quad \mathrm{Re}p>0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\bar{\theta}(x,p)=0, x\in S^-+S,\quad \mathrm{Re}p>0. \tag{17}$$

Требуется найти $\bar{\sigma}_{ij}(x,p)$, $\bar{u}_i(x,p)$, $\bar{\theta}(x,p)$ при условиях (12)—(17) в осесимметричном случае (граничные функции не зависят от x).

Определение 1. Назовем фундаментальным решением решение краевых задач 1—3 в случае, когда $\bar{p}_r(x,p)=0,\quad \bar{q}(x,p)=\delta(t),\ x\in S$, т.е. тепловой источник задается сингулярной обобщенной функцией.

Теорема 1. *В пространстве преобразования Лапласа решение краевой задачи 1 имеет вид:*

$$\bar{\vartheta}\,(r,p)=A(p)K_0(r\sqrt{p/k}), \tag{18}$$

$$\bar{U}_r\,(r,p)=c_1^0K_1\,(pr)+c_2^0I_1\,(pr)+c_1(r)K_1\,(pr)+c_2(r)I_1\,(pr)\,, \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}_{rr}\,(r,p)=\left(c_1^0+c_1\right)\left[-pK_0\,(pr)+(\alpha-1)\,K_1\,(pr)/r\right]+\\+\left(c_2^0+c_2\right)\left[\,pI_0\,(pr)+(\alpha-1)\,I_1\,(pr)/r\right]-\gamma A\,(p)\,K_0\left(r\sqrt{p/k}\right),\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}\,(r,p)=\left(c_1^0+c_1\right)\left[-\alpha pK_0\,(pr)+(1-\alpha)\,K_1\,(pr)/r\right]+\\+\left(c_2^0+c_2\right)\left[\alpha\,pI_0\,(pr)+(1-\alpha)\,I_1\,(pr)/r\right]-\gamma A\,(p)\,K_0\left(r\sqrt{p/k}\right),\end{gathered} \tag{21}$$

$$c_1(r)=(\gamma/p)F(p)\int_1^r K_1(rh)I_1(pr)rd\tau,$$

$$c_2(r)=-(\gamma/p)F(p)\int_1^r K_1(rh)K_1(pr)rd\tau,$$

$$c_1^0\,(p)=\frac{B_1\,(p)}{B_2\,(p)}-\frac{\gamma F\,(p)}{pB_2\,(p)}*\left\{\begin{array}{ll}(hK_0\,(h)\,K_1\,(p)-pK_1\,(h)\,K_0\,(p))/\left(h^2-p^2\right), & h^2\neq p^2\\ h\left(K_0^2\,(h)-K_1^2\,(h)\right)+2K_1\,(h)\,K_0\,(h)\,/2h, & h^2=p^2\end{array}\right.,$$

$$c_2^0(p)=B1(p)-B2(p)c_1^0,\quad h=\sqrt{p/k},\quad F\,(p)=1/pK_1\,(Rh),$$

$$B1(p)=\frac{\gamma pA(p)K_0(R\sqrt{p/k})}{pI_0(pR)+(\alpha-1)I_1(pR)/R},$$

$$B2(p)=\frac{-pK_0(pR)+(\alpha-1)K_1(pR)/R}{pI_0(pR)+(\alpha-1)I_1(pR)/R},$$

где $A(p) = \frac{1}{\sqrt{p/k}K_1(R\sqrt{p/k})}$, $\quad \alpha = \frac{\nu}{1-\nu}$, $\quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, если при $r = R$ выполняются условия:

$$\sigma_{rj}\left(x,t\right) = 0, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \delta\left(t\right), j = r, \varphi, \tag{22}$$

$\delta(t)$ – функция Дирака, I_n, K_n – цилиндрические функции Бесселя и Макдональда.

Доказательство. Решение уравнения (10) можно представить в виде: $\bar{\vartheta}\left(r,p\right) = A(p)\cdot K_0(r\sqrt{p/k})$, т.к. функция $K_0(\cdot)$ является решением уравнения (10) при $r \neq 0$, и затухает на бесконечности. $A(p)$ находим из граничных условий (22):

$$\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial r}n_r = \sqrt{p/k}A(p)K_1(R\sqrt{p/k}) = 1.$$

Отсюда

$$A(p) = \frac{1}{\sqrt{p/k}K_1(R\sqrt{p/k})}.$$

Для построения решений системы (9) перейдем в полярную систему координат (r, φ). В силу независимости граничных условий от φ, $\quad u_\varphi = 0$, из соотношения (9) имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} - \gamma\bar{\vartheta}_{,r} = p^2\bar{u}_r(r,p). \tag{23}$$

Сведем уравнение (23) к уравнению Бесселя с помощью замены $\xi = pr$, получим:

$$\xi^2\frac{d^2\bar{u}_r}{d\xi^2} + \xi\frac{d\bar{u}_r}{d\xi} - \bar{u}_\xi(1+\xi^2) = -\gamma F(p)K_1(rh)/p. \tag{24}$$

Частное решение неоднородного уравнения (23) имеет вид:

$$\bar{U}_r^* = c_1(r)K_1(pr) + c_2(r)I_1(pr).$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, имеем следующую систему уравнений:

$$c_1'(r)K_1(pr) + c_2'(r)I_1(pr) = 0,$$

$$c_1'(r)p\,K_1'(pr) + c_2'(r)p\,I_1'(pr) = -\gamma F(p)K_1(rh)/p. \tag{25}$$

Вронскиан системы (25) равен $W(p) = 1/r$. Тогда

$$c_1'(r) = (\gamma/p)F(p)K_1(rh)I_1(pr)r,$$

$$c_1(r) = (\gamma/p)F(p)\int_1^r K_1(h\tau)I_1(p\tau)\tau d\tau.$$

Аналогично

$$c_2'(r) = -(\gamma/p)F(p)K_1(rh)K_1(pr)r,$$

$$c_2(r) = -(\gamma/p)F(p)\int_1^r K_1(h\tau)K_1(p\tau)\tau d\tau.$$

Таким образом, общее решение уравнения (23) следующее:

$$\bar{U}_r = K_1(pr)(c_1^0 + c_1(r)) + I_1(pr)(c_2^0 + c_2(r)),$$

где c_1^0, c_2^0 – произвольные постоянные.

Радиальные напряжения в полярной системе координат [1]:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\partial\bar{U}_r}{\partial r} + \alpha\frac{\bar{U}_r}{r} - \gamma\bar{\vartheta}(r,p) = (c_1^0 + c_1(r))\left[-pK_0(pr) + (\alpha-1)K_1(pr)/r\right]$$

$$+(c_2^0+c_2(r))\left[pI_0(pr)+(\alpha-1)I_1(pr)/r\right]-\gamma A(p)K_0(r\sqrt{p/k}).$$

Далее, используя граничное условие (22), получим –

$$c_2^0=B1(p)-B2(p)c_1^0, \tag{26}$$

где

$$B1(p)=\frac{\gamma A(p)K_0(R\sqrt{p/k})}{pI_0(pR)+(\alpha-1)I_1(pR)/R};\quad B2(p)=\frac{-pK_0(pR)+(\alpha-1)K_1(pR)/R}{pI_0(pR)+(\alpha-1)I_1(pR)/R}.$$

Из условия (17) следуют:

$$\lim_{r\to\infty}\left[c_1^0K_1(pr)+c_2^0I_1(pr)+c_1(r)K_1(pr)+c_2(r)I_1(pr)\right]=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}|c_1(r)|=\left|(\gamma/p)F(p)\int_1^\infty K_1(\tau h)I_1(\tau p)\tau d\tau\right|\leq\frac{\gamma}{p}F(p)\frac{1}{2\sqrt{hp}(p-h)}$$

при $Re\quad p<1/k$.

Учитывая асимтотики функции $K_1(pr)\sim 1/r$ при $r\to\infty$ и соотношение (26), получим:

$$c_1^0=\frac{B1(p)}{B2(p)}+\frac{1}{B2(p)}\lim_{r\to\infty}c_2(r),$$

где

$$\lim_{r\to\infty}c_2(r)=\lim_{r\to\infty}\left[-\frac{\gamma}{p}F(p)\int_1^r K_1(\tau h)K_1(\tau p)\tau d\tau\right]=\tfrac{1}{h^2-p^2}\left[hK_0(h)K_1(p)-pK_1(h)K_0(p)\right]. \tag{27}$$

При $h^2=p^2$ в формуле (27) используется правило Лопиталя для вычисления предела. Окончательно имеем:

$$c_1(p)=\frac{B_1(p)}{B_2(p)}-\frac{\gamma F(p)}{pB_2(p)}*\begin{cases}\left(hK_0(h)K_1(p)-pK_1(h)K_0(p)\right)/\left(h^2-p^2\right), & h^2\neq p^2\\ h\left(K_0^2(h)-K_1^2(h)\right)+2K_1(h)K_0(h)/2h, & h^2=p^2\end{cases}.$$

Тангенциальные напряжения в полярной системе координат [1]:

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\alpha\frac{\partial\bar U_r}{\partial r}+\frac{\bar U_r}{r}-\gamma\bar\vartheta(r,p)=(c_1^0+c_1(r))\left[-\alpha pK_0(pr)+(1-\alpha)K_1(pr)/r\right]+$$

$$+(c_2^0+c_2(r))\left[\alpha pI_0(pr)+(1-\alpha)I_1(pr)/r\right]-\gamma A(p)K_0(r\sqrt{p/k}).$$

Теорема доказана.

Если q(t), интегрируемая на $S\times[0,+\infty]$, то решение краевых задачи 1—3 имеет вид свертки [4]:

$$u(x,t)=U_r(x,t)\underset{t}{*}q(t),$$

это решение в пространстве преобразований Лапласа имеет вид:

$$\bar u(x,p)=\bar q(p)\bar U_r(x,p),\quad \bar u=(\bar u_1,\bar u_2,\bar\theta),$$

где $\bar U_r(x,p)$ – фундаментальное решение соответствующей краевой задачи.

Для постоянного теплового потока $(q(t))=q_0H(t))$ это решение построено в [5].

Теорема 2. *Решение краевой задачи 3 имеет вид (18)-(21), где*

$$A(p)=1/p(\xi\sqrt{p/k}\ K_1(R\sqrt{p/k})+\eta K_0(R\sqrt{p/k})),$$

если на границе области заданы следующие условия:

$$\bar\sigma_{rj}(x,p)=0,\quad \eta\bar\theta+\xi\frac{\partial\bar\theta}{\partial n}=1,\quad j=r,\varphi\quad r=R=1. \tag{28}$$

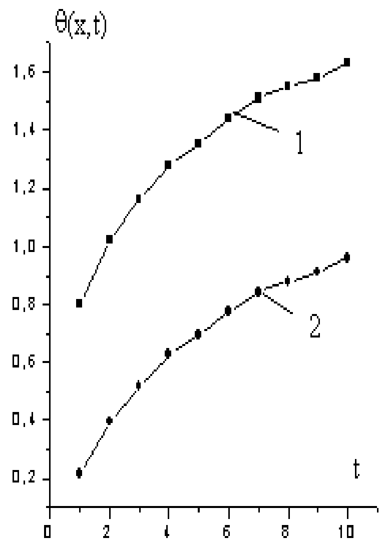

Рис.1

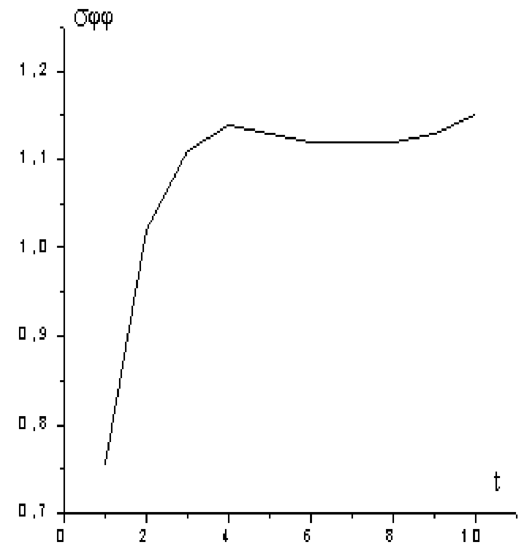

Рис.2

Доказательство. На первом этапе определяется температурное поле:

$$\bar{\theta}\,(r,p) = A(p)K_0(r\sqrt{p/k}),$$

где $A(p)$ получим из граничного условия (28) при $\bar{q}(x,p) = 1$. Тогда

$$A(p) = (\zeta\sqrt{p/k}\;K_1(R\sqrt{p/k}) + \eta K_0(R\sqrt{p/k}))^{-1}.$$

Далее доказательство проводится аналогично теоремы 1. В начале вычисляются перемещения по формуле (19), а затем радиальные и тангенциальные напряжения по формулам (20)—(21). Эти значения будут отличаться от соответствующих значений параметров теоремы 1 наличием переменных η, ξ в формуле для $A(p)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Решение краевых задач 1, 2 можно получить из решения краевой задачи 3, полагая $\eta = 0$, $\zeta = 1$, в значении $A(p)$ будет отсутствовать переменная $\eta = 0$ (для задачи 1) и $\eta = 1$, $\xi = 0$, в значении $A(p)$ будет отсутствовать переменная $\zeta = 0$ (для задачи 2).

Теорема 3. *Решение краевой задачи 4 имеет вид (18)-(21), где*

$$A(p) = \frac{1}{\sqrt{p/k}K_1(R\sqrt{p/k})}\frac{\gamma T_0}{(1+\gamma\vartheta(R,p)}, \quad \overline{\theta}_R = \frac{\vartheta(R,p)\gamma T_o}{(1+\gamma\vartheta(R,p))p}, \quad \bar{\theta}_R = \bar{\theta}(R,p),$$

если на границе области заданы следующие условия:

$$\bar{\sigma}_{rj}\,(x,p) = 0, \quad \bar{q}(x,p) = \gamma\left(\frac{T*}{p} - \overline{\theta}_R\right), \; j = r, \varphi, \; r = R = 1.$$

Т.е. тепловой поток равен разности температур теплового источника и данной среды.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Решения краевых задач 1—4 программно реализованы на языке ФОРТРАН-6. Проведены тестовые расчеты для термоупругой среды с безразмерными параметрами (коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, $\lambda = 0.5$, $\gamma = 1.0$, $\kappa = 1.0$). На рис.1 представлен график температур в разных точках массива $(R = 1, 2)$, а на рис.2 построен график тангенциальных напряжений на границе цилиндра $(R = 1)$, если тепловой поток задается функцией Хевисайда (Задача 1). На рис.3 представлен график температур в разных точках массива $(R = 1, 2)$ и на рис.4 построен

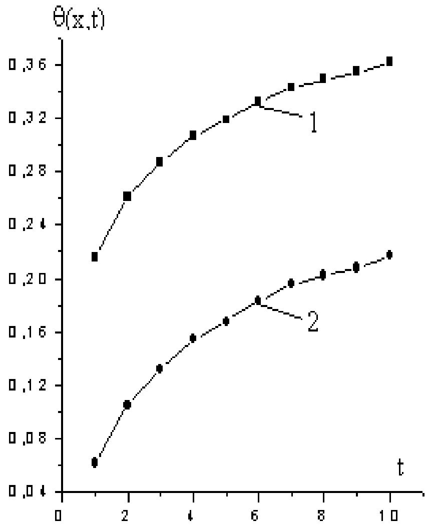

Рис.3

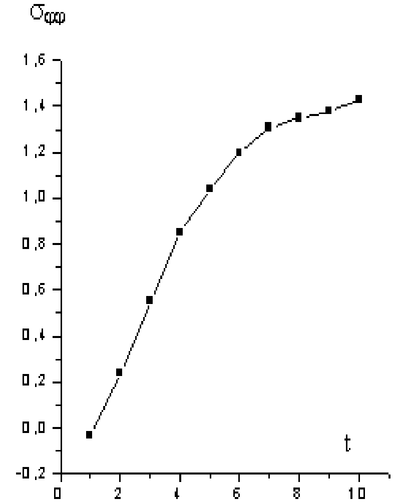

Рис.4

график тангенциальных напряжений на границе цилиндра ($R = 1,2$), если тепловой поток задается разницей температур между источником $T^* = 1$ и данной средой (Задача 4).

Цитированная литература

1. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М., 1970.

2. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Операционное исчисление. М., 1995.

3. **Абрамовиц М., Стшан И.** Справочник по специальным функциям. М.,1979.

4. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1981.

5. **Alexeyeva L. A., Dadaeva A. N.** Boundary element method for transient problems of uncopled thermoelastodynamics// Proc.of Int.Conf. BEM XIX, Rome, Italy, 1997. P.117-125.

6. **Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989.

Поступила в редакцию 08.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 43 – 47*

УДК 517.948.34

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Б. С. Каленова, Н. Г. Хисамиев

Восточно-Казахстанский Государственный Технический Унниверситет
492018, Усть-Каменогорск, пр. Ленина, 51-316, hisamiev@mail.ru

В дальнейшем слово "группа" означает не более, чем счетную абелеву группу. Отображение $\nu : \omega \to A$ множества всех натуральных чисел на группу A называется нумерацией группы A. Пара (A, ν) называется конструктивной группой, если существует алгоритм, который по любой тройке натуральных чисел n, m, s определяет: верны ли равенства $\nu n = \nu m$, $\nu n + \nu m = \nu s$ в группе A. Группа A называется конструктивизируемой, если существует такая ее нумерация ν, что пара (A, ν) является конструктивной группой. Последовательность конструктивных групп

$$(A_0, \nu_0), \ldots, (A_n, \nu_n), \ldots \tag{1}$$

называется вычислимой, если существует алгоритм, который по любой четверке натуральных чисел n, m, r, s определяет: верны ли равенства $\nu_n m = \nu_n r, \quad \nu_n m + \nu_n r = \nu_n s$ в группе A_n. Произвольный класс K групп называется вычислимым, если существует вычислимая последовательность групп (1) такая, что для любой группы A из K существует число n такое, что группы A и A_n изоморфны и, наоборот, для любого числа n существует группа $A \in K$, изоморфная A_n.

Известно, что следующие классы групп вычислимы:

1. класс периодических групп [3];
2. для любого $n \in \omega$ класс групп, ранги без кручения которых не превосходят n [2];
3. класс всех групп, ранги без кручения которых конечны;
4. класс всех сильно конструктивизируемых p-групп [6];
5. класс всех сильно конструктивизируемых групп без кручения ранга 1 [5].

В данной работе доказывается, что класс K_0 всех конструктивизируемых p-групп, являющихся прямыми суммами циклических и квазициклических групп, вычислим, а класс K_1 всех конструктивизируемых p-групп, являющихся прямыми суммами циклических групп, не вычислим.

Пусть 2-х местная функция $f(i, x)$ удовлетворяет условию:

Keywords: *cyclic p - group, quasicyclic p - group, direct sum, constructibility, computability*
2000 Mathematics Subject Classification: 03D45, 20K10

для любых чисел $i, x, y \in \omega,\ y \leq i$, если $f(i,0)$ определена, то определена $f(y,x)$ и $f(y,x) \leq \leq f(y+1,x)$.

Тогда f назовем s-функцией. Если для любого x значение $f(i,x)$ определено и не существует предела

$$\lim_x f(i,x),$$

то полагаем

$$\lim_x f(i,x) = \infty.$$

Через C_{p^n} и C_{p^∞} обозначим, соответственно, циклическую группу порядка p^n и квазициклическую p-группу.

Пусть дана некоторая s-функция f. По этой функции определим группу

$$G_f = \bigoplus_i C_p m_i,$$

где

$$m_i = \lim_x f(i,x).$$

В [4] доказана

Теорема 1. *Пусть группа A является прямой суммой циклических и квазициклических p-групп. Группа A конструктивизируема тогда и только тогда, когда существует частично вычислимая s-функция f такая, что группы G и G_f изоморфны.*

На основе этой теоремы доказывается

Теорема 2. *Класс K_0 всех конструктивизируемых p-групп, являющихся прямыми суммами циклических и квазициклических групп, вычислим.*

Доказательство. По теореме 1 достаточно показать, что существует вычислимый класс s-функций L, удовлетворяющих условию: для любой частично вычислимой s-функции $\varphi(i,x)$ существует функция $f \in L$ такая, что для любого числа $i \in \omega$ справедливо равенство

$$\lim_x f(i,x) = \lim_x \varphi(i,x).$$

Пусть дана частично вычислимая функция $\varphi(i,x)$. Через $\varphi^t(i,x)$ обозначим значение функции f, вычисленное к концу шага t. По функции f построим частично вычислимую s-функцию $\tilde{f}$ следующим образом. Пусть дано произвольное число $i \in \omega$. Определим по шагам t значение $f(i,x)$. На шаге t будет определено число e^t.

Шаг t. Пусть m - наименьшее число такое, что значение $\tilde{f}(i,m)$ не определено. Если $m = 0$, то вычисляем последовательность значений

$$f^t(0,0),\ f^t(1,0), \ldots \tag{2}$$

Если хотя бы одно из этих значений не определено, то полагаем $e^t = 0$ и для любого $x \in \in \omega$ считаем значение $\tilde{f}(i,x)$ неопределенным. Переходим к следующему шагу. Если же все значения из (2) определились, то полагаем $e^t = 1, \quad \tilde{f}(i,0) = f(i,0)$ и переходим к следующему шагу.

Пусть $m > 0$. Вычисляем $f^t(i, e^{t-1})$. Если это значение не определено, то полагаем $e^t = = e^{t-1},\ \tilde{f}(i,m) = \tilde{f}(i,m-1)$ и переходим к следующему шагу.

Пусть $f^t(i, e^{t-1})$ определено. Полагаем

$$e^t = e^{t-1} + 1, \quad \tilde{f}(i,m) = \max\{\tilde{f}(i,m), f^t(i, e^{t-1})\}$$

и переходим к следующему шагу.

Построение закончено.

Из построения функции $\tilde{f}$ следуют:

Лемма 1. *Для любых чисел $i, x, y,\ y \leq i$, если значение $\tilde{f}(i,0)$ определено, то значение $f(y,x)$ определено, и функция $\lambda x f(i,x)$ является неубывающей.*

Лемма 2. *Если i - наименьшее число такое, что значение $f(i,0)$ не определено, то для любых чисел $x \geq i$, y значение $\tilde{f}(x,y)$ не определено.*

Пусть дано произвольное число $i \in \omega$. Пусть x_0 - наименьшее число такое, что значение $f(i,x_0)$ не определено. Если такого числа x_0 не существует, то полагаем $x_0 = \infty$. Пусть $M_f^i = \{f(i,x) | x < x_0\}$. Если множество M_f^i бесконечно, то полагаем $\max M_f^i = \infty$.

Лемма 3. *Если значение $\tilde{f}(i,0)$ определено, то справедливо равенство*

$$\lim_x \tilde{f}(i,x) = \max M_f^i.$$

Пусть $\varphi_s(i,x)$ — частично вычислимая функция номера s. Определим последовательность функций

$$L = \{\tilde{\varphi}_s(i,x) | s \in \omega\}.$$

По лемме 3, если $\varphi_s(i,x)$ является s-функцией, то справедливо равенство

$$\lim_x \varphi_s(i,x) = \lim_x \tilde{\varphi}_s(i,x).$$

Отсюда класс функции L является искомым. Теорема доказана.

Следствие 1. *Класс L_0 всех конструктивизируемых периодических групп, являющихся прямыми суммами циклических и квазициклических групп, вычислим.*

Теорема 3. *Класс K_1 всех конструктивизируемых p-групп, являющихся прямыми суммами циклических групп, не является вычислимым.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. класс K_1 вычислим. Из теоремы 1 следует, что существует вычислимый класс

$$L = \{f_k(i,x) | k \in \omega\}$$

такой, что для любых чисел $i, k \in \omega$ выполнены условия:

1. Если значение определено, то существует

$$\lim_x f_k(i,x) = m_k < \infty.$$

2. Пусть для s-функции $g(i,x)$ выполнено условие 1 и

   $M_g = \{< m, n > | \exists i_1, \ldots, i_n (\bigwedge \lim g(i_k, x) = m :\ 1 \leq k \leq n)\}$,

   $M'_g = \{m | \langle m, 1\rangle \in M_g\}$.

   Тогда существует такое число $k \in \omega$, что множества M_g и M_{f_k} равны.

3. Для бесконечно многих чисел $k \in \omega$ множество M'_{f_k} бесконечно.

4. Для любой группы $G \in K_1$ существует такое число $k \in \omega$, что группы G и $G_{f_{k_i}}$ изоморфны.

Пусть частично вычислимая функция $\Psi(k,i,x)$ является универсальной для класса K, т.е. для любого числа $k \in \omega$ справедливо равенство

$$\lambda i \lambda x \psi(k,i,x) = \lambda i \lambda x f_k(i,x).$$

Построим по шагам t вычислимую s-функцию $h(i,x)$ такую, что для нее справедливо условие 1 и - $k \in \omega$ верно неравенство

$$M'_{f_k} \neq M_n.$$

Пусть все пары чисел упорядочены по их номерам. Номер пары $\langle m,n\rangle$ обозначим через $[m,n]$. На шаге t будут определены числа

$$\alpha^t, k_0^t < k_1^t < \ldots < k_{\alpha^t}^t; \quad m_{k_i}^t, n_{k_i}^t, i \leq \alpha^t, \quad [m_{k_i}^t, n_{k_i}^t] \leq t.$$

Число $f_{k_i}(m_{k_i}^t, n_{k_i}^t) = p\,_{k_i}^{\,t}$ будет отмечено меткой $\tilde{k}_i$. Для этих чисел справедливо неравенство

$$p\,_{k_0}^{\,t} < h(0,t) < p\,_{k_1}^{\,t} < h(1,t) < \ldots < p\,_{k_{\alpha^t}}^{\,t} < h(\alpha^t, t). \tag{3}$$

На последующих шагах некоторые метки $\tilde{k}_i$ могут сниматься. Это происходит тогда, когда нарушено неравенство (3).

В дальнейшем предполагаем, что если на шаге t значение какого-то символа x^t, подлежащего определению, явно не указано, то справедливо равенство $x^t = x^{t-1}$. Через $l(x)$ обозначим левый элемент пары номера x.

Шаг $t+1$. Пусть $l(t+1) = k$ и $s \leq \alpha^t$ - наименьшее число такое, что $k \leq k_s$. Если такого s не существует, то полагаем $s = \alpha^t + 1$. Проверяем, существует ли пара $\langle m,n\rangle, \quad [m,n] \leq t+1$ такая, что значение $f_k^t(m,0)$ определено и справедливо неравенство

$$f_k(m,n) > h(s-1,t).$$

Заметим, что по определению s-функции, если $f_k^t(m,0)$ определено, то функция $\lambda x f_k(m,x)$ всюду определена.

Рассмотрим возможные случаи:

A) Существует пара $\langle m,n\rangle$.

Наименьшую такую пару обозначим через $\langle m_0,n_0\rangle$. Положим

$$m_k^{t+1} = m_0, \quad n_k^{t+1} = \max\{n_0, t+1\}, \quad k_s^{t+1} = k.$$

Если $s > \alpha^t$, то полагаем $\alpha^{t+1} = \alpha^t + 1$. В противном случае $\alpha^{t+1} = \alpha^t$. Если значение $h(s,t)$ определено, то полагаем

$$h(s,t+1) = \max\{h(s,t), p\,_k^{\,t+1}\} + 1. \tag{4}$$

В противном случае $h(s,x) = p\,_k^{\,t+1} + 1, \quad x \leq t+1$. Если число $p\,_k^{\,t+1}$ не отмечено меткой $\tilde{k}$, то его отмечаем и все метки $\tilde{i}, \quad i > k$ снимаем.

Переходим к следующему шагу.

B) Пары $\langle m,n\rangle$ не существует.

Если $s \leq \alpha^t$, то полагаем $n_k^{t+1} = n_k^t + 1$. Если $p\,_k^{\,t} < p\,_k^{\,t+1}$, то $p\,_k^{\,t}$ отмечаем меткой $\tilde{k}$ и все метки $\tilde{i}$ снимаем и определяем значение $h(s,t+1)$ согласно равенству (4). Переходим к следующему шагу.

Построение закончено.

Лемма 4. *Для любого числа i существует шаг t_i такой, что будет определено число $k\,_i^{\,t}$, и для любого шага $s \geq t$ справедливо равенство $k\,_i^{\,s} = k\,_i^{\,t_i}$.*

Доказательство проведем индукцией по i. Для $i = 0$, очевидно, что $t_0 = 0,\ k_0^0 = 0$. Пусть для $i < m$ лемма доказана и

$$i = m,\ s = \max\{t_0, \ldots, t_{m-1}\},\ h(m-1, s_1) = p.$$

Из условия 3 следует, что существует наименьшее число $r > k_{m-1}^s$ такое, что найдется пара $\langle m,n\rangle$, для которой справедливо равенство

$$f_r(m,n) = q > p.$$

Тогда по построению функции h на некотором шаге $t \geq s_1$ определится пара $\langle m_r^t, n_r^t \rangle$ и $f(m_r^t, n_r^t) > p$. Пусть

$$\lim_x f_r(m_r^t, x) = p_r.$$

Тогда на некотором шаге s_0 число p_r будет отмечено меткой $\tilde{m}$, которая на дальнейших шагах не снимается. Отсюда имеем $k_m = r$ и лемма доказана.

Обозначим $k_i^{t_i}$ через $k_i, i \in \omega$.

Лемма 5. *Функция $h(i, x)$ является вычислимой s-функцией.*

Доказательство. Из построения следует, что функция $h(i, x)$ вычислима и не убывает. Покажем, что для любого числа $i \in \omega$ существует

$$\lim_x h(i, x).$$

Пусть $t = \max\{t_j | j \leq i\}$. Тогда для любого шага $s \geq t$ верно равенство $k_j^s = k_j$. Из построения функции h и условия 1 следует, что существует шаг $s_1 \geq t$ такой, что числа $p\,{}^{s_1}_{k_j}$ будут отмечены метками $\tilde{k}_j$ и далее не снимаются. Тогда для любого числа $x \geq S_1$ имеем $h(i, x) = h(i, s_1)$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любого числа $k \in \omega$ множества M'_h и M'_k не равны.*

Доказательство. Пусть дано некоторое число k. Из построения функции h и условия 3 следует, что множество M'_h бесконечно.

Поэтому можно предполагать, что множество M'_k бесконечно. Тогда из построения следует, что существует такое число s_0, $s_0 \leq k$, что $k_s = k$. Пусть $t = \max\{t_i | i \leq s_0\}$. Как и в доказательстве леммы 5, существует шаг $s \geq t$ такой, что числа $p\,{}^{s}_{k_i}$ будут отмечены метками $\tilde{k}_i$ и далее не снимаются. Тогда

$$f_k(m_k^s, n_k^s) = \lim_x f_k(m_k^s, x) = p\,{}^{s}_{k}.$$

Отсюда $p\,{}^{s}_{k} \in M'_k$. Из неравенства (3) следует, что $p\,{}^{s}_{k} \in M'_h$.

Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. По функции h построим группу $G_h = \bigoplus C_p m_i$, где

$$\lim_i h(i, x) = m_i.$$

По теореме 1 группа G_h конструктивизируема и является прямой суммой циклических p-групп. Из леммы 6 следует, что для любого числа $k \in \omega$ группы G_h и G_f не изоморфны. Это противоречит условию 4.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Класс $\mathbb{L}_1$ всех конструктивизируемых периодических групп, являющихся прямыми суммами циклических групп, не является вычислимым.*

Цитированная литература

1. **Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.** Конструктивные модели. Новосибирск, 1999.
2. **Добрица В. П.** // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, №3. С. 208 – 213.
3. **Хисамиев Н. Г.** // Тез. докл. 5 Казахстанской конф. по матем. и мех., часть 2. Алма-Ата, 1974. С. 253.
4. **Хисамиев Н. Г.** // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, №6. С. 144 – 159.
5. **Б. С. Каленова, Хисамиев Н. Г.** // Вестник Восточно-Казахстанского технического университета имени Д. Серикбаева. 1998. №1(1). С. 121 – 123.
6. **Kalenova B. S.** //Siberian Advances of Mathematics. 1998. V. 8, №1. P. 121 – 133.

Поступила в редакцию 08.07.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 48 — 51*

УДК 517.925

СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ $D-$УРАВНЕНИЙ

А. И. Кулик

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
463000, Актобе, пр. А. Молдагуловой, 34, alex-23-2001@mail.ru

На основе применения линеаризатора получены достаточные условия существования сильного решения краевой задачи для систем уравнений с дифференциальным оператором $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial \varphi_k}$.

Рассмотрим в области $\Omega = [0,\theta] \times R^m$ краевую задачу для нелинейной системы

$$Dx = f(t,\varphi,x),\ t \in [0,\theta] = I,\ \varphi \in R^m \tag{1}$$

с однородным граничным условием

$$x(0,\varphi) - B(\varphi)x(\theta,\varphi) = 0, \tag{2}$$

где $f : I \times R^m \times R^n \to R^n$ непрерывна.

Введем следующие обозначения:
$C(\Omega, R^n)$ - пространство непрерывных в Ω функций $x : \Omega \to R^n$ с нормой
$$\|x(t,\varphi)\|_1 = \sup_{\Omega} \max_{s=\overline{1,n}} |x_s(t,\varphi)|,$$
$S(0,\Delta) = \{x(t,\varphi) \in C(\Omega,R^n) : \|x(t,\varphi)\|_1 < \Delta\}$, $Q(\Omega,\Delta) = \{(t,\varphi,x) :\ (t,\varphi) \in \Omega,\ \|x\| < \Delta\}$.

Теперь предположим, что $n-$вектор-функция $f(t,\varphi,x)$ в $Q(\Omega,\Delta)$ непрерывна по t, бесконечно дифференцируема по φ и по x.Также будем считать, что эта функция является периодической по φ с вектор-периодом $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$, то есть выполняется условие

$$f(t,\varphi,x) = f(t,\varphi + k\omega, x) \in C^{(0,\infty,\infty)}_{t,\ \varphi,\ x}(Q(\Omega,\Delta)),\ k \in Z^m. \tag{3}$$

Относительно $n \times n-$матрицы $B(\varphi)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям $\omega-$ $-$периодичности и бесконечной дифференцируемости по φ

$$B(\varphi) = B(\varphi + k\omega) \in C^{(\infty)}_{\varphi}(R^m). \tag{4}$$

Keywords: *strong solution, boundary problem, nonlinear system, linearization*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F30

Такая задача является обобщением многопериодических задач для систем $D-$уравнений. Их общая теория известна из [1],[2]. В этих работах они рассматриваются в предположении непрерывной дифференцируемости входящих в (1)-(2) коэффициентов по пространственным переменным и присутствия некоторого малого параметра перед нелинейной частью в (1).

Введем в рассмотрение два пространства W и V, где W — пространство непрерывных в Ω функций $x(t,\varphi)\in C(\Omega,R^n)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) и ω – периодических по φ, а V – пространство непрерывных по t, бесконечно дифференцируемых и ω – периодических по φ в Ω функций $\tilde{f}(t,\varphi)$ с нормой $\|\tilde{f}(t,\varphi)\|_2 = \sup\limits_{t,\varphi\in\Omega} \max\limits_{s=\overline{1,n}} |\tilde{f}_s(t,\varphi)|$. Очевидно, что V не является полным нормированным пространством. $G(D)$ – область определения оператора D - состоит из непрерывно дифференцируемых по t и бесконечно дифференцируемых по φ функций $x:\Omega\to R^n$, принадлежащих W.

С учетом вышеизложенного краевую задачу (1)-(2) можно записать в виде функционального уравнения

$$A(x)\equiv Dx+F(x)=0,\ x\in W, \tag{5}$$

где $D:G(D)\to V$, оператор $F:S(0,\Delta)\bigcap G(D)\to V$ имеет вид $F(x)=-f(t,\varphi,x(t,\varphi))$. Тогда $G(A)=G(D)\bigcap S(0,\Delta)$ и оператор $A:G(A)\to V$ неограничен.

При сделанных предположениях оператор $F(x)$ имеет производную Фреше, которая имеет вид матрицы Якоби

$$F'(x)=-P(t,\varphi,x(t,\varphi))=-\begin{pmatrix} f'_{1_{x_1}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & f'_{1_{x_2}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & \dots & f'_{1_{x_n}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) \\ f'_{2_{x_1}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & f'_{2_{x_2}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & \dots & f'_{2_{x_n}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n_{x_1}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & f'_{n_{x_2}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) & \dots & f'_{n_{x_n}}(t,\varphi,x(t,\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Определение 1. *Элемент $x^*\in W$ называется сильным решением уравнения (5), если существует последовательность $\{x_n\}$ из области определения оператора $D+F(x)$, сходящаяся к x^* так, что $\|Dx_n+F(x_n)\|_2\to 0$, когда $n\to\infty$.*

Следующее определение обобщает производную Фреше [4] на неограниченные операторы и позволяет построить итерационный процесс для нахождения сильного решения функционального уравнения (5).

Определение 2. *[3] Линейный оператор $C:W\to V$ называется линеаризатором оператора $A(x)$ в точке $\hat{x}\in G(A)$, если $G(A)\subseteq G(C)$ и существуют числа ε и δ такие, что*

$$\|A(x)-A(\hat{x})-C(x-\hat{x})\|_2\le\varepsilon\,\|x-\hat{x}\|_1$$

для всех $x\in G(A)$, удовлетворяющих неравенству $\|x-\hat{x}\|_1\le\delta$.

Нетрудно показать, что линейный оператор $[D+F'(x)]:W\to V$ будет линеаризатором оператора A в точке $x\in G(A)$. Обозначим через $L(W,V)$ пространство линейных ограниченных операторов из W в V с индуцированной нормой.

Приведем формулировку теоремы 3 из [3, с.643] в обозначениях рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*
1) для всех $x\in U^0=\{x\in G(A):\|A(x)\|_2\le\|A(0)\|_2\}$ линеаризатор $D+F'(x)$ ограниченно обратим

$$\|\left[D+F'(x)\right]^{-1}\|_{L(V,W)}\le\gamma;$$

2) производная Фреше $F'(x)$ равномерно непрерывна в $S(0,\Delta)$;
3) $\gamma\|A(0)\|_2<\Delta$,
то существует последовательность чисел $\alpha_n\ge 1$ $(n=0,1,2,\dots)$ таких, что последовательность элементов $\left\{x^{(n)}\right\}\subset U^0$, определяемая по демпфированному методу Ньютона

$$x^{(0)}=0,\ x^{(n+1)}=x^{(n)}-\frac{1}{\alpha_n}\left[D+F'(x^{(n)})\right]^{-1}\left[Dx^{(n)}+F(x^{(n)})\right],$$

$n = 0, 1, 2, \ldots,$ *сходится к сильному решению уравнения (5), принадлежащему* $S(0, \Delta)$.

Для того, чтобы применить теорему 1 к рассматриваемой задаче, необходимо иметь оценку нормы оператора, обратного к линеаризатору $D + F'(x)$. Для этого достаточно установить оценку решения линейного уравнения

$$D\tilde{x} = P(t, \varphi, x(t, \varphi))\tilde{x} + \tilde{f}(t, \varphi),\ \tilde{x}(t, \varphi) \in W,\ \tilde{f}(t, \varphi) \in V \tag{6}$$

в норме пространства W. Из условия (3) при любом фиксированном $x(t, \varphi) \in S(0, \Delta) \bigcap G(D) \bigcap W$ следует, что для матрицы $P(t, \varphi, x(t, \varphi))$ выполнено условие

$$P(t, \varphi + k\omega, x(t, \varphi + k\omega)) = P(t, \varphi, x(t, \varphi)) \in C^{(0,\infty)}_{t,\varphi}(\Omega). \tag{7}$$

Уравнение (6) является линейной краевой задачей. В [5] путем перехода к функционально - разностным уравнениям получено решение этой линейной краевой задачи. Известно [2], что общее решение системы (6) можно представить в виде

$$\tilde{x}(t, \varphi, \tilde{u}(\varphi - et)) = X(t, \varphi)\tilde{u}(\varphi - et) + \int\limits_0^t X(t, \varphi)X^{-1}(\tau, \varphi - et + e\tau)\tilde{f}(\tau, \varphi - et + e\tau)d\tau, \tag{8}$$

где $e-n-$вектор с единичными компонентами, $X-$матрицант соответствующей (6) однородной системы, для которого справедливы равенства $DX = P(t, \varphi)X,\ X(0, \varphi) = E$. Этапы его построения рассмотрены в [2]. Путем подстановки (8) в краевое условие (2) получим функционально-разностное уравнение для определения вектор-функции $\tilde{u}(\varphi)$ вида

$$\tilde{u}(\varphi) = \Phi(\varphi)\tilde{u}(\varphi - et)) + \Phi(\varphi)\int\limits_0^\theta X^{-1}(\tau, \varphi - e\theta + e\tau)\tilde{f}(\tau, \varphi - e\theta + e\tau)d\tau, \tag{9}$$

где функция $\Phi(\varphi) = B(\varphi)X(\theta, \varphi)$. Предположим, что для нее выполнено условие

$$\|\Phi(\varphi)\|_2 \leq q < 1,\ \forall\varphi \in R^m, \tag{10}$$

где $\|\Phi(\varphi)\|_2 = \max\limits_{s=\overline{1,n}} \sum\limits_{k=1}^m \sup\limits_{\varphi \in R^m} |\Phi_{sk}(\varphi)|$. При выполнении условия (10) существует единственное решение уравнения (9) , которое можно построить методом последовательных приближений

$$\tilde{u}^{(0)}(\varphi) = 0,\ \tilde{u}^{(n+1)}(\varphi) = \Phi(\varphi)\tilde{u}^{(n)}(\varphi - e\theta) + \Psi(\varphi),$$

где $\Psi(\varphi)-$вектор-функция входит как второе слагаемое в правую часть соотношения (9). Отметим, что соответствующая (6) краевая задача для однородного уравнения при выполнении условия (10) имеет единственное нулевое решение. Тогда подстановка решения уравнения (9) в соотношение (8) дает единственное решение системы (6). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются соотношения (7) и (8), то уравнение (6) для любого* $\tilde{f}(t, \varphi) \in V$ *имеет единственное решение* $\tilde{x}(t, \varphi) \in W \bigcap G(D)$ *и справедлива оценка*

$$\|\tilde{x}(t, \varphi)\|_1 \leq \frac{\theta q a}{1 - q}\|\tilde{f}(t, \varphi)\|_2, \tag{11}$$

где $a = \|\tilde{X}(\theta, \varphi)\|_2$.

На основе этой теоремы следует утверждение о том, что областью значения линеаризатора $D + F'(x)$ является пространство V. Кроме того, из (11) следует оценка для обратного к линеаризатору оператора, а именно

$$\| \left[D + F'(x)\right]^{-1} \|_{L(V,W)} \leq \frac{\theta q a}{1-q}. \tag{12}$$

Оценка (12) позволяет сформулировать следующую теорему о существовании сильного решения задачи (1)-(2), вытекающую из теорем 1, 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть в области $Q(\Omega, \Delta)$ функция $f(t, \varphi, x)$ удовлетворяет условию (3), причем производные $f'_x(t, \varphi, x)$ непрерывны по t, непрерывно дифференцируемы по φ и равномерно непрерывны по x. Пусть также выполнены условия (4), (10) и неравенство*

$$\frac{\theta q a}{1-q} \|f(t, \varphi, 0)\|_2 \leq \Delta. \tag{13}$$

Тогда краевая задача (1)-(2) имеет сильное решение $x^*(t, \varphi)$, которое принадлежит $S(0, \Delta)$.

Доказательство. Проведем проверку условий теоремы 1. При выполнении условий (3), (4) и (10) существует единственное решение линейного уравнения (6) и справедлива оценка (13) для этого решения. Отсюда следует, что линеаризатор $D + F'(x)$ ограниченно обратим и для него выполняется условие 1) теоремы 1, где $\gamma = \dfrac{\theta q a}{1-q}$.

Из предположения равномерной непрерывности по x производных f'_x следует выполнение условия 2) теоремы 1 в $S(0, \Delta)$.

Оценивая оператор A в норме пространства W, получим

$$\|A(0)\|_2 = \|D0 + F(t, \varphi, 0)\|_2 = \|f(t, \varphi, 0)\|_2.$$

Так как $\gamma = \dfrac{\theta q a}{1-q}$ и справедливо соотношение (13), то

$$\gamma \|A(0)\|_2 = \gamma \|f(t, \varphi, 0)\|_2 < \Delta.$$

Таким образом, выполняются все три условия теоремы 1. Тогда последовательность $\{x^{(n)}\} \in U$, определенная по демпфированному методу Ньютона этой теоремы, сходится к сильному решению $x^*(t, \varphi)$ уравнения (5), а значит и краевой задачи (1)-(2). Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

1. **Харасахал В. Х.** Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. А-Ата, 1970.

2. **Умбетжанов Д.У.** Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. А-Ата , 1979.

3. **Джумабаев Д. С.** // Мат. заметки. 1987. Т. 41, вып. 3. С. 637 – 645.

4. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. Москва, 1977.

5. **Сартабанов Ж. А., Кулик А. И.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 1995. № 1. С. 31 — 36.

Поступила в редакцию 02.06.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 52 — 60*

УДК 539.3

ДИСПЕРСИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ М.БИО С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

А. Ж. Отарбаева, В. В. Шершнев

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, ул.Пушкина, 125, asel@math.kz

Целью настоящей работы является исследование динамики двухкомпонентной среды М. Био [1-2], ослабленной цилиндрической полостью при действии внутренних бегущих нагрузок различного типа. Данный класс задач является модельным при изучении динамики тоннелей в водонасыщенных грунтах. Наиболее изученным на данном этапе является вопрос о поведении подземного сооружения в виде протяженной неподкрепленной или подкрепленной цилиндрической полости в линейно упругом однородном массиве при динамических воздействиях. Динамика тоннелей и трубопроводов в изотропных упругих средах при действии транспортных нагрузок наиболее интенсивно изучалась в работах Ш.М. Айталиева, Л.А. Алексеевой, В.Н. Украинца, В.В.Шершнева, В.И. Пожуева [3-5] и др. Естественным развитием рассмотренного круга задач, позволяющим приблизить их к расчету реальных конструкций в грунтовых условиях, является привлечение других моделей сплошных сред, более полно учитывающих физико-механические свойства пород. Такими, например, являются модели многокомпонентных сред.

1. Уравнения движения двухкомпонентной среды М. Био. Определяющие соотношения. Для описания двухкомпонентной среды М.Био введем следующие обозначения: U_i, u_i - декартовы ($i = x, y, z$), либо полярные ($i = r, \theta, z$) физические компоненты векторов смещения жидкости и упругого скелета; p, σ_{ij} – давление жидкости в порах и компоненты тензора напряжений в упругом скелете. Для линейной изотропной среды Био связь между напряжениями и деформациями имеют вид обобщенного закона Гука [1]

$$\sigma_{ij} = (A\,u_{k,k} + Q\,U_{k,k})\,\delta_{ij} + N\,\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right), \quad \sigma = -mp = Q\,u_{k,k} + R\,U_{k,k}, \tag{1}$$

где A, N, Q, R – константы среды Био, имеющие размерность напряжений, $u_{k,j} = \partial u_i/\partial x_j$ (по одноименным индексам проводится суммирование), δ_{ij} – символ Кронекера. Уравнения движения в пренебрежении вязкостью жидкости имеют вид:

$$grad\,\left((A+N)\,div\,\vec{u} + Q\,div\,\vec{U}\right) + N\,\Delta\vec{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{11}\vec{u} + \rho_{12}\vec{U}\right)$$

$$grad\,\left(Q\,div\,\vec{u} + R\,div\,\vec{U}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{12}\,\vec{u} + \rho_{22}\,\vec{U}\right), \tag{2}$$

Keywords: *two component M.Boit's media, stationary running loads, concentration of stresses*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

где ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} связаны с плотностью частиц ρ_c слагающих скелет и жидкости ρ_g соотношениями: $\rho_{11} = (1-m)\rho_c$, $\rho_{22} = m\rho_g - \rho_{12}$, m – пористость среды. Константа присоединенной плотности ρ_{12} связана с дисперсией отклонения микроскоростей частиц жидкости в порах от средней скорости потока жидкости $\dot{\vec{U}}$ и зависит от геометрии пор.

В уравнениях (2) перемещения упругого скелета и жидкости связаны между собой, что затрудняет получение решения. Чтобы привести их к более простому виду, вводятся скалярные и векторные потенциалы Φ_1, Φ_2, $\overrightarrow{\Psi_1}$, $\overrightarrow{\Psi_2}$ для перемещений упругого скелета и жидкости:

$$\vec{u} = grad\Phi_1 + \mathrm{rot}\vec{\Psi}_1, \quad \vec{U} = grad\Phi_2 + rot\vec{\Psi}_2, \quad div\vec{\Psi}_1 = 0, \quad div\vec{\Psi}_2 = 0, \tag{3}$$

$$(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\Phi_j = 0, \quad j = 1,2,$$

$$\vec{\Psi}_j = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\Psi}_j, \quad \vec{\Psi}_2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\vec{\Psi}_1, \tag{4}$$

где

$$c_{1,2}^2 = \frac{(A+2N)\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}}{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{((A+2N)\rho_{22} - R\rho_{11})^2 + 4((A+2N)\rho_{12} - Q\rho_{11})(R\rho_{12} - 2Q\rho_{22})}}{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)}, \tag{5}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{N\rho_{12}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}}.$$

Верхний знак соответствует c_1, а нижний – c_2. Волны, распространяющиеся со скоростью c_1, – объемные волны 1-го рода, со скоростью c_2 – объемные волны 2-го рода, c_3 – сдвиговые волны. Удобно представить потенциалы в виде

$$\Phi_1 = \varphi_1 + \xi_2\varphi_2, \quad \Phi_2 = \xi_1\varphi_1 + \varphi_2, \tag{6}$$

где новые потенциалы φ_j в отсутствии массовых сил удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta\varphi_j = \frac{1}{c_j^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2}, \quad j = 1,2, \tag{7}$$

а коэффициенты ξ_1, ξ_2 определяются соотношениями:

$$\xi_1 = \frac{A+2N-\rho_{11}c_1^2}{\rho_{12}c_1^2 - Q} \equiv \frac{Q-\rho_{12}c_1^2}{\rho_{22}c_1^2 - R}; \quad \xi_2 = \frac{R-\rho_{22}c_2^2}{\rho_{12}c_2^2 - Q} \equiv \frac{Q-\rho_{12}c_2^2}{\rho_{11}c_2^2 - (A+2N)}. \tag{8}$$

Таким образом, решение системы уравнений Био (2) сводится к решению трех волновых уравнений: (4) - для векторного потенциала $\vec{\Psi}_1$ и (7) - для двух скалярных.

2. Поверхностные волны в среде М.Био с цилиндрической полостью при действии периодических бегущих нагрузок. Пусть в среде М.Био имеется круговая цилиндрическая полость радиуса R_0 бесконечной длины. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , ось z которой направлена вдоль оси цилиндрической полости. В направлении оси z по поверхности полости движется нагрузка $\vec{P}$ с постоянной скоростью c . Пусть действующие нагрузки периодичны по z с периодом $2\pi/\zeta$ и представимы в виде:

$$\vec{P} = \vec{P}(\theta)\exp\{i\zeta(z-ct)\}, \quad r = R_0,$$

$$\vec{P} = P_r(\theta)\vec{e}_r + P_\theta(\theta)\vec{e}_\theta + P_z(\theta)\vec{e}_z, \tag{9}$$

где $\vec{e} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат. Удобно ввести подвижную цилиндрическую систему координат (r, θ, η), $\eta = z - ct$. Ясно, что $\vec{e}_\eta = \vec{e}_z$.

На поверхности полости задаем граничные условия: непроницаемая поверхность

$$\sigma_{rj} + \sigma\delta_{rj} = P_j(\theta)\exp\{i\zeta\eta\}, \quad j = r, \theta, \eta, \quad U_r = u_r, \qquad r = R_0. \tag{10}$$

Будем решать уравнения (4) и (7) при условиях (10). Для цилиндрической системы координат векторный потенциал $\vec{\Psi}_1$ можно представить в виде:

$$\vec{\Psi}_1 = \vec{e}_\eta\varphi_3 + rot(\vec{e}_\eta\varphi_4). \tag{11}$$

Тогда перемещения в среде Био можно выразить через четыре потенциала:φ_1, φ_2 – объемных и φ_3, φ_4– сдвиговых волн:

$$\vec{u} = grad(\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2) + rot(\varphi_3\vec{e}_z) + rotrot(\varphi_3\vec{e}_z),$$

$$\vec{U} = grad(\zeta_1\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}(rot(\varphi_3\vec{e}_z) + rotrot(\varphi_4\vec{e}_z)). \tag{12}$$

В силу стационарности нагрузки (9) решение (7) будем искать в аналогичном виде:

$$\varphi_j = \varphi_j^*(r, \theta)e^{i\zeta(z-ct)} \tag{13}$$

при условии, что скорость движения нагрузки меньше скоростей упругих волн $c < \min_j(c_j)$, что характерно для транспортных задач. Из (7) и (13) получим:

$$\Delta_2\varphi_j^* - \alpha_j^2\varphi_j^* = 0, \quad \alpha_j^2 = (1 - M_j^2)\zeta^2, \quad M_j^2 = \frac{c^2}{c_j^2}, \tag{14}$$

Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

Подставляя (11) в (1), получим формулы, выражающие напряжения в среде Био через потенциалы

$$\sigma_{rr} = 2N\left(\left(\frac{A + \xi_1 Q + 2N}{2N}\alpha_1^2 - D_1 + \frac{A + \xi_1 Q}{2N}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_1 + \left(\frac{(A + 2N)\xi_2 + Q}{2N}\alpha_2^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \xi_2 D_1 + \frac{A\xi_2 + Q}{2N}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_2 - D_2\varphi_3 + \left(\alpha_3^2 - D_1\right)\frac{\partial\varphi_4}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2N\left(\left(\frac{A + \xi_1 Q}{2N}\left(\alpha_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) + D_1\right)\varphi_1 + \left(\frac{A\xi_1 + Q}{2N}\left(\alpha_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) + \xi_1 D_1\right)\varphi_2 + \right.$$

$$\left. + D_2\varphi_3 + D_1\frac{\partial\varphi_4}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{zz} = 2N\left(\left(\frac{A + \xi_1 Q}{2N}\alpha_1^2 + \frac{A + \zeta_1 Q + 2N}{2N}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_1 + \left(\frac{A\xi_2 + Q}{2N}\alpha_2^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(A + 2N)\xi_2 + Q}{2N}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_2 - \alpha_3^2\frac{\partial\varphi_4}{\partial\eta}\right), \tag{15}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2N\left(-D_2\varphi_1 - \xi_2 D_2\varphi_2 + \left(D_1 - 0.5\alpha_3^2\right)\varphi_3 + D_2\frac{\partial\varphi_4}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{r\eta} = 2N\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\eta}(\varphi_1 + \xi_2\varphi_2) + \frac{1}{2r}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\theta\eta z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\alpha_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_4\right),$$

$$\sigma_{\theta\eta} = 2N\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\eta}(\varphi_1 + \xi_2\varphi_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial\eta} + \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\alpha_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi_4\right),$$

$$\sigma=(Q+\xi_1R)\left(\alpha_1^2\varphi_1+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\eta^2}\right)+(\xi_2Q+R)\left(\alpha_2^2\varphi_2+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\eta^2}\right),$$

$$u_r=\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\xi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial r\partial\eta},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}+\xi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial\theta\partial\eta},$$

$$u_z=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}+\xi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}-\alpha_3^2\varphi_4,$$

$$U_r=\xi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial r\partial\eta}\right),$$

$$U_\theta=\frac{1}{r}\left(\xi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right)+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial\theta\partial\eta}\right),$$

$$U_z=\xi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\alpha_3^2\varphi_4.$$

Решениями уравнений (14), удовлетворяющими условиям затухания на бесконечности, являются ряды Фурье-Бесселя с постоянными коэффициентами a_{jn} :

$$\varphi_j^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}K_n(\alpha_jr)e^{in\theta}, \tag{16}$$

где функция Макдональда n–го порядка. Тогда для потенциалов имеем:

$$\varphi_j=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{jn}K_n(\alpha_jr)e^{in\theta}e^{i\zeta(z-ct)}.$$

Для определения потенциалов воспользуемся граничными условиями (10), для чего функции $P_j(\theta)$ следует разложить в ряды Фурье:

$$P_j(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_{jn}e^{in\theta};\quad j=r,\theta,\eta.$$

Приравнивая коэффициенты рядов Фурье, из граничных условий получим линейную бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{4}a_{jn}S_{kjn}=\frac{1}{2N}P_{jn,}\quad k=1,2,3,\quad n=0,\pm1,\pm2..., \tag{17}$$

где коэффициенты матрицы S_{kjn} имеют следующий вид:

$$S_{11n}=\left(\alpha_1^2-B_1M_1^2\zeta^2+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n\left(\alpha_1r\right)-\frac{\alpha_1}{r}K_n'\left(\alpha_1r\right),$$

$$S_{12n}=\left(\xi_2\alpha_2^2-B_2M_2^2\zeta^2+\xi_2\frac{n^2}{r^2}\right)K_n\left(\alpha_2r\right)-\xi_2\frac{\alpha_2}{r}K_n'\left(\alpha_1r\right),$$

$$S_{13n}=-\frac{in}{r^2}K_n\left(\alpha_3r\right)+\frac{in}{r}\alpha_3K_n'\left(\alpha_3r\right),$$

$$S_{14n}=i\zeta\left(\alpha_3^2+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n\left(\alpha_3r\right)-i\zeta\frac{\alpha_3}{r}K_n'\left(\alpha_3r\right), \tag{18}$$

$$S_{21}=-in\left(\frac{1}{r^2}K_n\left(\alpha_1r\right)-\frac{\alpha_1}{r}K_n'\left(\alpha_1r\right)\right),\quad S_{22}=-in\xi_2\left(\frac{1}{r^2}K_n\left(\alpha_2r\right)-\frac{\alpha_2}{r}K_n'\left(\alpha_2r\right)\right),$$

$$S_{23}=-\left(\left(\frac{\alpha_3^2}{2}+\frac{n^2}{r^2}\right)K_n\left(\alpha_3 r\right)-\frac{\alpha_3}{r}K_n^{'}\left(\alpha_3 r\right)\right),\quad S_{24}=n\zeta\left(\frac{1}{r^2}K_n\left(\alpha_3 r\right)-\frac{\alpha_3}{r}K_n^{'}\left(\alpha_3 r\right)\right),$$

$$S_{31}=i\alpha_1\zeta K_n^{'}\left(\alpha_1 r\right),\quad S_{32}=i\alpha_2\zeta\xi_2 K_n^{'}\left(\alpha_2 r\right),$$

$$S_{33}=-\frac{n\zeta}{2r}K_n\left(\alpha_3 r\right),\quad S_{34}=-\frac{1}{2}\alpha_3\left(\alpha_3^2+\zeta^2\right)K_n^{'}\left(\alpha_3 r\right),$$

$$S_{41}=\alpha_1\left(1-\xi_1\right)K_n^{'}\left(\alpha_1 r\right),\quad S_{42}=\alpha_2\left(\xi_2-1\right)K_n^{'}\left(\alpha_2 r\right),$$

$$S_{43}=i\frac{n}{r}\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)K_n\left(\alpha_3 r\right),\quad S_{44}=i\alpha_3\zeta\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)K_n^{'}\left(\alpha_3 r\right)$$

при $r=R_0$,$B_1=\frac{A+Q+\xi_1(Q+R)}{2N}$, $B_2=\frac{Q+R+\xi_2(A+Q)}{2N}$.

Из системы (17) следует

$$a_{jn}=\frac{\Delta_{jn}\left(\zeta,c\right)}{\Delta_n\left(\zeta,c\right)},\quad j=\overline{1,4},\quad n=0,\pm1,\pm2...$$

Здесь $\Delta_n\left(\zeta,c\right)$ – определитель матрицы системы $S_n=\left\{S_{kjn}\right\}_{4\times4}$; $\Delta_{jn}\left(\zeta,c\right)$ – определитель матрицы, полученной из S_n заменой j – го столбца на столбец свободных членов $P_{jn}\left(j=r,\theta,\eta\right)$.

После определения коэффициентов a_{jn} становится возможным определение потенциалов φ_j, перемещений скелета и жидкой компоненты среды Био, напряжений и давления.

3. Дисперсионные уравнения. Решение этой задачи существует, если определитель системы (17) отличен от нуля. Исследования показывают, что определители $\Delta_n(\zeta,)=\det\left\{S_{kjn}\right\}$, $j,k=\overline{1,4}$ системы (1.30) могут быть равными нулю при некоторых ζ и c. В этом случае вдоль поверхности цилиндра могут распространяться свободные волны, скорость движения которых c и волновые числа ζ связаны дисперсионными уравнениями:

$$\Delta_n\left(\zeta,c\right)=0. \tag{19}$$

Их решения $c_n=c_n\left(\zeta\right)$ определяют скорости движения n – ой моды поверхностной волны в зависимости от волнового числа ζ. Затухание амплитуды этих волн вглубь массива – экспоненциальное и определяется асимптотикой функций Макдональда при больших аргументах.

Уравнения (19) задают в неявном виде зависимость между ζ и c и могут быть решены только численно. Однако при больших ζ можно получить более простые асимптотические уравнения, которые должны совпадать с уравнениями для поверхностных волн типа волн Релея в среде Био, так как для коротких волн свойства цилиндрической поверхности приближаются к свойствам плоской поверхности.

Получим асимптотическое выражение для $\Delta_n(\zeta,c)$ при $\zeta\to\infty$. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функций Макдональда при большом аргументе: $K_n^{'}\left(z\right)\sim$ $\sim-K_n\left(z\right)$. Подставляя его в (18), получим, что при больших ζ определитель $\Delta_n(\zeta,c)$ с точностью до постоянного множителя асимптотически эквивалентен

$$\Delta_n\left(\zeta,c\right)\sim\zeta^8\left(1-M_3^2\right)^{\frac{3}{2}}K_n(\alpha_1R_0)K_n(\alpha_2R_0)K_n(\alpha_3R_0)\times$$

$$\times\begin{vmatrix}1-(1+B_1)M_1^2 & \xi_2-(\xi_2+B_2)M_2^2 & -\sqrt{1-M_3^2}\\ \sqrt{1-M_1^2} & \xi_2\sqrt{1-M_2^2} & 1-\frac{1}{2}M_3^2\\ (\xi_1-1)\sqrt{1-M_1^2} & (1-\xi_2)\sqrt{1-M_2^2} & -(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}})\end{vmatrix}=$$

$$=\zeta^8K_n(\alpha_1R_0)K_n(\alpha_2R_0)K_n(\alpha_3R_0)\Big[(\xi_1\xi_2-1)\sqrt{1-M_1^2}\sqrt{1-M_2^2}\sqrt{1-M_3^2}-$$

$$-\sqrt{1-M_1^2}\left(\xi_2-\left(\xi_2+B_2\right)M_2^2\right)\left(\left(1-\frac{1}{2}M_3^2\right)\left(\xi_1-1\right)+\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)\right)+$$

$$+\sqrt{1-M_2^2}\left(1-\left(1+B_1\right)M_1^2\right)\left(\left(1-\frac{1}{2}M_3^2\right)\left(1-\xi_2\right)+\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)\xi_2\right)\Bigg].$$

Отсюда получим дисперсионное уравнение для длинных поверхностных цилиндрических волн:

$$\Bigg[\left(\xi_1\xi_2-1\right)\sqrt{1-M_1^2}\sqrt{1-M_2^2}\sqrt{1-M_3^2}-$$

$$-\sqrt{1-M_1^2}\left(\xi_2-\left(\xi_2+B_2\right)M_2^2\right)\left(\left(1-\frac{1}{2}M_3^2\right)\left(\xi_1-1\right)+\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)\right)+ \tag{20}$$

$$+\sqrt{1-M_2^2}\left(1-\left(1+B_1\right)M_1^2\right)\left(\left(1-\frac{1}{2}M_3^2\right)\left(1-\xi_2\right)+\left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)\xi_2\right)\Bigg]=0.$$

4. Поверхностные волны типа волн Релея. Покажем, что уравнение (20) является аналогом уравнения Релея для полуплоскости среды Био в случае, если на поверхности заданы условия "непроницаемая поверхность"(10).

В плоском случае перемещения $\bar{u}$ и $\bar{U}$ выражаются через потенциалы φ_1, φ_2,φ_3 следующим образом:

$$u_x=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y},\quad u_y=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\xi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x},$$

$$U_x=\xi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y},\quad U_y=\xi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}. \tag{21}$$

Потенциалы являются решениями уравнений (7). Запишем эти уравнения в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}-\frac{1}{c_j^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2}=0,\qquad j=1,2,3. \tag{22}$$

Пусть полуплоскость занимает область $x>0$ на ее границе заданы условия:

$$\sigma_{xx}+\sigma=0,\quad \sigma_{xy}=0,\quad u_x=U_x\quad \text{при}\quad x=0. \tag{23}$$

Решение уравнений (22) ищем в виде волн, распространяющихся вдоль координаты

$$\varphi_j=\Phi_j\left(x\right)e^{-i(\omega t-ky)}. \tag{24}$$

Тогда для функций получим:

$$\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}-\Phi_j\left(k^2-\alpha_j^2\right)=0,\quad \alpha_j^2=\frac{\omega^2}{c_j^2}. \tag{25}$$

Решениями уравнений, убывающими в области $x>0$ (25), являются функции

$$\Phi_j=C_je^{-\nu_jx},\quad \nu_j=\sqrt{k^2-\alpha_1^2}. \tag{26}$$

Подставим (26) в (24), получим

$$\varphi_j=C_jexp(-\nu_jx-i(\omega t-ky)). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (21) и далее в граничные условия (23), получим систему уравнений для определения произвольных постоянных C_j. Поскольку система однородная, то для существования ненулевого решения приравняем к нулю ее определитель. Получим аналог уравнения Релея для определения скорости поверхностных волн $c_R=\frac{\omega}{k}$:

$$\Delta(c_R)=\begin{vmatrix}-B_1\alpha_1^2+\nu_1^2 & -B_2\alpha_2^2+\xi_2\nu_2^2 & -\nu_3ik\\ -\nu_1ik & -\xi_2\nu_2ik & -\frac{1}{2}\left(k^2+\nu_3^2\right)\\ \left(\xi_1-1\right)\nu_1 & \left(1-\xi_2\right)\nu_2 & \left(1+\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\right)ik_1\end{vmatrix}=0. \tag{28}$$

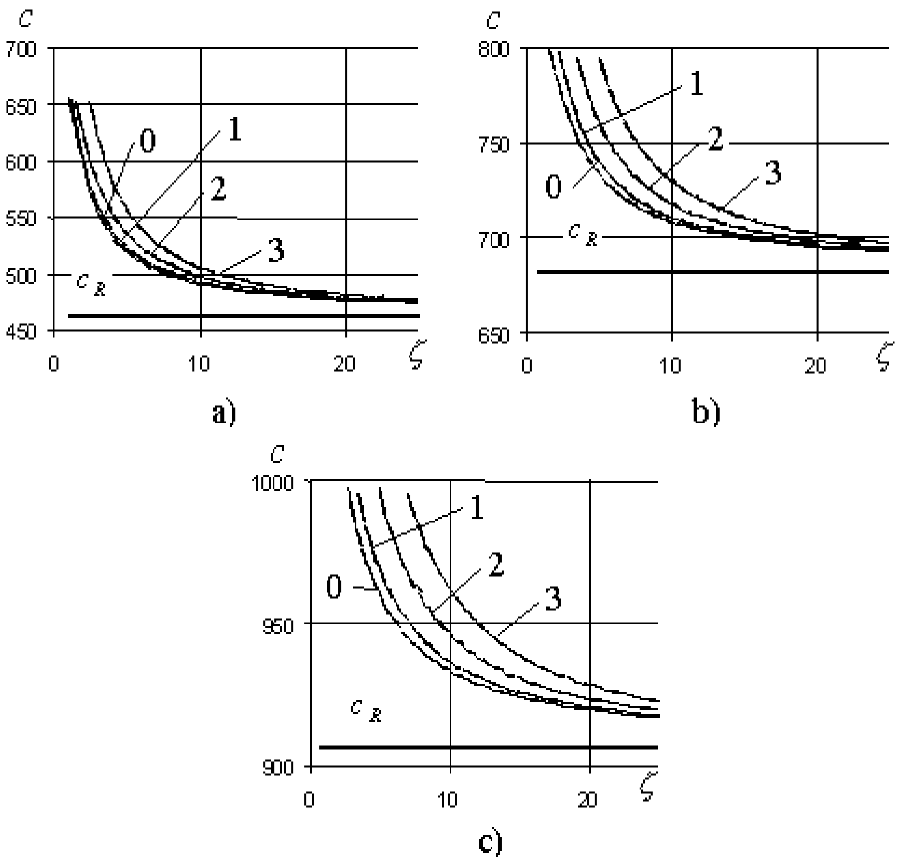

Рис. 1: Дисперсионные кривые

Уравнение (28) совпадает с уравнением (20). Следовательно, при $\zeta \to \infty$ $c_n \to c_R$, т.е. скорости всех мод свободных волн по значению приближаются к скорости волны Релея.

5. Дисперсия поверхностных цилиндрических волн. В дальнейшем при расчетах используются три набора констант физико-механических свойств насыщенных пористых сред.

Модель 1. Насыпной грунт, насыщенный водой. $A = 1714$МПа, $N = 655,8$МПа, $Q = 1128$МПа, $R = 761$МПа, $\rho_{11} = 1500$кг/м^3, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 400$кг/м^3.

Модель 2. Алевролит, насыщенный водой. $A = 6214$МПа, $N = 2153$МПа, $Q = 1031$МПа, $R = 217$МПа, $\rho_{11} = 2500$кг/м^3, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{22} = 150$кг/м^3.

Модель 3. Песчаник, насыщенный керосином. $A = 4096$МПа, $N = 2536$МПа, $Q = 685$МПа, $R = 295$МПа, $\rho_{11} = 1926$кг/м^3, $\rho_{12} = -1,9$кг/м^3, $\rho_{22} = 215,1$кг/м^3.

На рисунке 1 изображены дисперсионные кривые, рассчитанные для различных моделей водонасыщенных сред: a - модель 1, b - модель 2 и c - модель 3. Цифрами на рисунках обозначены кривые, соответствующие различным модам свободных волн: $1 - n = 0$, $2 - n = 1$, $3 - n = 2$, $4 - n = 3$; горизонтальная прямая соответствует скорости релеевской волны c_R.

Приведем значения скоростей волн Рэлея для различных моделей насыщенных сред, полученные из уравнения (28): для насыпного грунта $c_R = 463$м/с; для алевролита $c_R = 681$м/с и для песчаника $c_R = 906$м/с . Чем больше жесткость среды, тем больше скорость волны Рэлея. Из численного анализа следует, что скорости распространения свободных волн на поверхности тоннеля больше, чем скорость волны Рэлея, и их значения повышаются с ростом номера моды. С увеличением ζ скорости распространения свободных волн монотонно убывают и приближаются к скорости волны Релея. Расчеты показывают, что c_R меньше скорости звуковых волн в среде Био. При $c < c_R$ свободные поверхностные волны в тоннеле не возникают.

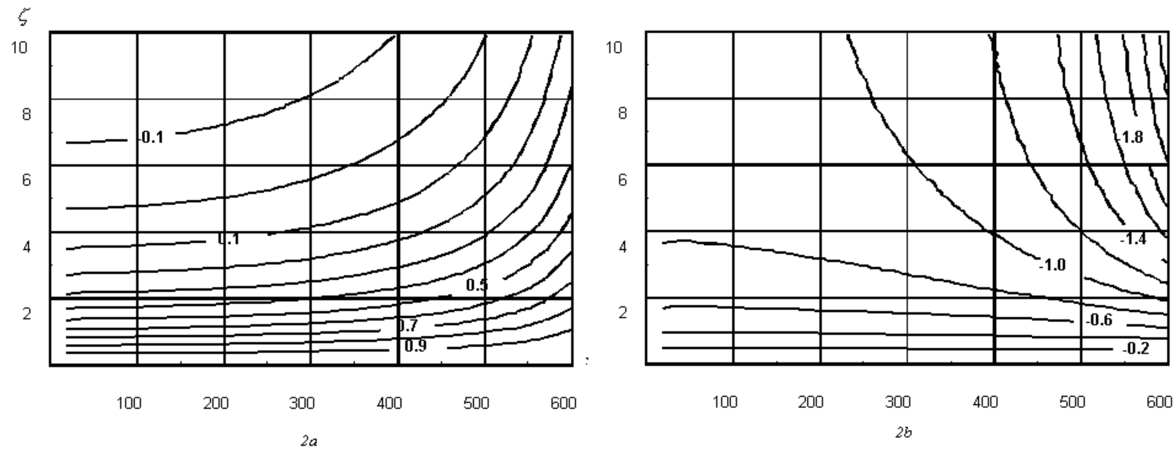

Рис. 2: Линии уровня

6. Влияние типа бегущей нагрузки на напряженно-деформированное состояние поверхности тоннеля. Численные эксперименты. Для численного исследования задачи, изложенной в 2 составлена программа на языке FORTRAN, которая вычисляет перемещения и напряжения на контуре цилиндрической полости. Для практических нужд наиболее важными характеристиками напряженно-деформированного состояния являются нормальные тангенциальные и осевые напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$. Они являются разрывными усилиями, разрушающими поверхность тоннеля. Для выявлений общих закономерностей зависимости напряжений от ζ и c расчеты проводились для осесимметричных нагрузок: $P_j(\theta) = 1$, $j = r, \theta, \eta$. В качестве окружающей среды рассмотрен алевролит, насыщенный водой. Радиус полости $R_0 = 1$м. Здесь и в дальнейшем на рисунках будем приводить обезразмеренные значения напряжений (деленные на $2N$). На рисунках 2 и 4 показаны линии уровня амплитуд напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$ при действии радиальной P_r и изгибной P_η нагрузок, соответственно, а на рис.3 – напряжения $\sigma_{\theta\eta}$ при скручивающей P_θ нагрузке. По вертикальной оси откладываются значения волнового числа ζ , а по горизонтали – скорость бегущей нагрузки c. Т.к. зависимость по времени гармоническая (с частотой $\omega = \zeta c$), знак напряжений через половину периода действующей нагрузки ($T = 2\pi/\omega$) меняется на противоположный. Для $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$ сдвиг фаз равен нулю, а для $\sigma_{\theta\eta}$ сдвиг фазы равен четверти периода действующей нагрузки. При наибольших ζ значения напряжений почти не зависят от c, пока $c < 0,85c_R$ для всех видов нагрузок. Это можно объяснить тем, что при достаточно большом периоде действующей нагрузки реализуется такое же напряженно-деформированное состояние, как и при аналогичной неподвижной нагрузке.

На рис.2 изображены линии уровня амплитуд напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$ при действии радиальной нагрузки. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2a) при малых скоростях ($c < 100$м/с) являются максимальными при $\zeta < 0,5$ и убывают с ростом c. При больших скоростях ($c > 400$ м/с) для тех же самых ζ напряжения больше и увеличиваются с ростом c. На рис.2b изображены линии уровня $\sigma_{\eta\eta}$. Напряжения возрастают с увеличением скорости при $\zeta > 4$. Их рост связан с приближением к области (c, ζ), в которой находятся дисперсионные кривые, изображенные на рисунке 1b. На рис.3 изображены линии уровня $\sigma_{\theta\eta}$ при действии скручивающей нагрузки.

При возрастании скорости бегущей нагрузки и больших ζ напряжения растут. Значения $\sigma_{\theta\eta}$ при $\zeta < 1$ на всем диапазоне рассматриваемых скоростей практически постоянны.

На рис.4a и 4b изображены линии уровня $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$ при действии изгибной P_η нагрузки, соответственно. Характер их поведения аналогичен поведению при действии радиальной нагрузки. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ растут медленно с ростом скорости при небольших волновых числах. При $\zeta < 1$ напряжения на всем промежутке рассматриваемых скоростей практически постоянны. При больших ζ они быстро возрастают с ростом c. Отметим, что здесь также наблюдается значительное превышение напряжений над амплитудой действующей нагрузки, причем уже в

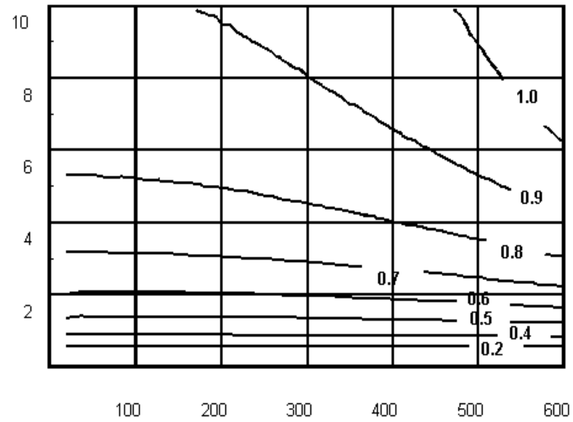

Рис. 3: Линии уровня

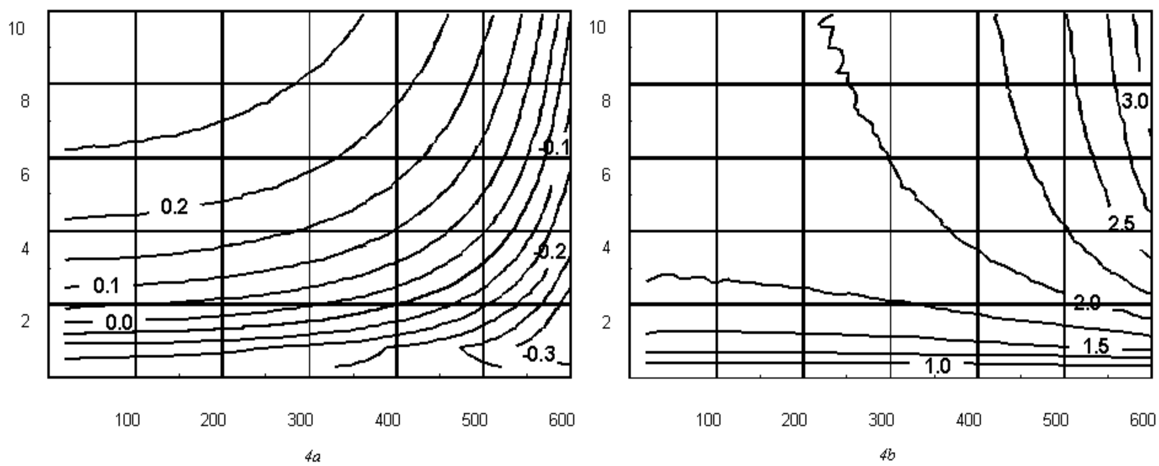

Рис. 4: Линии уровня

области небольших $\zeta\,(\zeta > 0,25)$ для всех скоростей. Коэффициент концентрации напряжений достигает 3 в области $c < 500$м/с. Концентрация напряжений на поверхности цилиндрической полости при действии осесиммеричных и неосесимметричных радиальных, торсиальных и изгибных нагрузок подробно рассмотрена в [6].

Цитированная литература

1. **Био М. А.** // Механика. Сб. перев. 1956. № 1(35). С.140-147.

2. **Biot M. A.** // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V.28, 2. P.168-178.

3. **Алексеева Л. А., Шершнев В. В.** Механика тектонических процессов. Алма-Ата. 1983. С.122-132.

4. **Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А.** Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата, 1989.

5. **Гузь А. Н., Головчан В. Т.** Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев, 1972.

6. **Отарбаева А. Ж.** Динамика тоннелей и трубопроводов при действии бегущих нагрузок в двухкомпонентной среде. Автореф. канд. диссерт.: Алма-Ата. 2001. С.24.

Поступила в редакцию 02.06.2002г.

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

А. В. Роговой

Южно - Казахстанский государственный университет
486001 Шымкент, проспект Тауке - хана 5, Казахстан

В работе рассмотрена гладкость решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта

$$sgny\,|y|^m\,u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),$$

а также его частных случаев – уравнения Лаврентьева - Бицадзе ($m=0$) и случая "нормального"контура. Для этого уравнения и указанных частных случаев получено достаточное условие существования гладкого решения. Доказательство основано на свойствах преобразований Меллина и специальных функций.

Рассмотрим задачу Трикоми для уравнения Геллерстедта:
найти решение уравнения

$$Lu\equiv sgny\,|y|^m\,u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{\sigma_\delta\cup AC}=0, \tag{2}$$

где σ_δ – кривая Ляпунова

$$\sigma_\delta=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{m+2}y^{\frac{m+2}{m}}+\delta\right)^2=\frac{1}{4}+\delta^2, y>0, -\infty<\delta<+\infty\right\}, \tag{3}$$

$AC:\ \xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ \ BC:\ \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$ – характеристики, $m\geq 0$.

Решение ищется в области $\Omega\subset R^2$, ограниченной: при $y>0$ – кривой Ляпунова, при $y<0$ –характеристиками AC и BC при следующих условиях склеивания

$$u(x,+0)=u(x,-0),\quad u_y(x,+0)=u_y(x,-0).$$

Введем следующий класс гладких решений задачи Трикоми для уравнения (1)

$$C_L=\left\{u(x,y):\ u(x,u)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega),\ u|_{\sigma_\delta\cup AC}=0,\ Lu\in L_2(\Omega)\right\}.$$

Keywords: *Mixed type equation, Gellerstedt equation, Lavrentjev-Bitsadze equation, Tricomi problem, "normal" boundary, smoothness, Mellin's transform, special function, continued function, gamma function, hypergeometrical function, Legandre associated function*
2000 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35A22

В работе Т.Ш.Кальменова [1] исследован вопрос существования гладкого решения для частных случаев задачи (1)–(2). Именно, для случая уравнения Лаврентьева – Бицадзе ($m = 0$) установлен критерий существования гладкого решения, а для случая "нормального"контура ($\delta = 0$) доказано, что найдутся такие гладкие правые части уравнения (1) $f(x, y)$, для которых решение задачи (1) – (2) не будет гладким.

В работах А.Б.Базарбекова [2], [3] и [4] задача (1)–(2) была исследована путем сведения к сингулярным интегральным уравнениям и получено достаточное условие существования гладкого решения.

Однако, исходя из методики данных работ, их результаты невозможно распространить на более общие виды граничных условий (2) и кривых (3). В настоящей работе предлагается новый метод решения задачи (1)–(2), который может быть применен и для решения более общих задач.

Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, то есть

$$f(x,y) \in C^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Обозначим

$$\tau(x) = u(x,0),$$

$$\nu(x) = \lim_{y_1 \to 0} \left(\frac{m+2}{2} y_1\right)^{\frac{m}{m+2}} u_{y_1}(x, y_1),$$

$$\gamma_\delta = \begin{cases} arctg\frac{1}{2\delta}, & \text{если } \delta > 0, \\ \frac{\pi}{2} + arctg 2|\delta|, & \text{если } \delta \le 0, \end{cases}$$

где

$$y_1 = \begin{cases} \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, & \text{если } y > 0, \\ -\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, & \text{если } y \le 0. \end{cases}$$

В работах А.Б.Базарбекова [1], [2] и [3] были получены следующие соотношения, связывающие функции $u(x, y)$ и $\nu(x)$

$$u(\xi_0, \eta_0) = \gamma \int\limits_0^{\xi_0} \frac{\nu(t)dt}{(\xi_0 - t)^{\frac{m}{2(m+2)}} (\eta_0 - t)^{\frac{m}{2(m+2)}}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_{\xi}^{\eta_0} \frac{1}{4} f_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) \cdot H(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) d\eta, \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{k}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}},$$

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)},$$

$$H = \begin{cases} \frac{(\eta-\xi)^{\frac{m}{m+2}}}{(\eta_0-\xi)^{\frac{m}{2(m+2)}} (\eta-\xi_0)^{\frac{m}{2(m+2)}}} \cdot F\left(\frac{m}{2(m+2)}, \frac{m}{2(m+2)}; 1; \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\eta-\xi_0)}\right), & \eta > \xi_0, \\ k \cdot \frac{(\eta-\xi)^{\frac{m}{m+2}}}{(\xi_0-\xi)^{\frac{m}{2(m+2)}} (\eta_0-\eta)^{\frac{m}{2(m+2)}}} \cdot F\left(\frac{m}{2(m+2)}, \frac{m}{2(m+2)}; \frac{m}{m+2}; \frac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}\right), & \eta \le \xi_0, \end{cases} \tag{6}$$

$H = H(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ – функция Римана — Адамара (здесь $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция).

Кроме того, вводя новую функцию

$$\overline{\nu}(s)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\frac{x^{\frac{2}{m+2}}\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)dx}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}}, \tag{7}$$

там же были получены следующие соотношения

$$\overline{\nu}(s)=\frac{g(s,\gamma_\delta)}{h(s,\gamma_\delta)}, \tag{8}$$

$$g(s,\gamma_\delta)=(m+2)^{-\frac{2}{m+2}}\left(-\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}\int\limits_0^\infty x^{s-1}\frac{F_1\left(\frac{x}{1+x}\right)dx}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{P^{-\frac{1}{m+2}}_{s-\frac{m+1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P^{\frac{1}{m+2}}_{s-\frac{m+1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}\int\limits_0^{\gamma_\delta}\frac{\overline{u}_2(s,t)\overline{f}(s,t)dt}{\Delta(s,t)}\right), \tag{9}$$

$$h(s,\gamma_\delta)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)}+\frac{P^{-\frac{1}{m+2}}_{s-\frac{m+1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P^{\frac{1}{m+2}}_{s-\frac{m+1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}, \tag{10}$$

$$F_1(x)=\frac{k}{4}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{m}{2(m+2)}}}f_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta, \tag{11}$$

$$\Delta(s,t)=\overline{u}_{1_t}(s,t)\overline{u}_2(s,t)-\overline{u}_1(s,t)\overline{u}_{2_t}(s,t), \tag{12}$$

$$\overline{u}_1(s,t)=\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^{\frac{1}{m+2}}\cdot F\left(s+\frac{1}{m+2},\frac{m+1}{m+2}-s;\frac{m+3}{m+2};\frac{1-\cos t}{2}\right), \tag{13}$$

$$\overline{u}_2(s,t)=F\left(s,\frac{m}{m+2}-s;\frac{m+1}{m+2};\frac{1-\cos t}{2}\right)-\frac{F\left(s,\frac{m}{m+2}-s;\frac{m+1}{m+2};\frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{\overline{u}_1(s,\gamma_\delta)}\overline{u}_1(s,t), \tag{14}$$

$$\overline{f}(s,t)=\int\limits_0^\infty r^{s-1}\frac{f_1\left(\frac{r^2+r\cos t}{1+2r\cos t+r^2},\frac{r\sin t}{1+2r\cos t+r^2}\right)dr}{(1+2r\cos t+r^2)^{\frac{5m+8}{2(m+2)}}}, \tag{15}$$

$$f_1(x,y_1)=\begin{cases}\left(\frac{m+2}{2}y_1\right)^{-\frac{2m}{m+2}}\cdot f\left(x,\left(\frac{m+2}{2}y_1\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), & y_1>0,\\ \left(-\frac{m+2}{2}y_1\right)^{-\frac{2m}{m+2}}\cdot f\left(x,\left(-\frac{m+2}{2}y_1\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), & y_1<0.\end{cases} \tag{16}$$

Из соотношений (5) и (6), учитывая формулу ([5, с.233])

$$F(a,b;c;0)=1,$$

получим в точке $B(1,0)$ при $\xi_0=\eta_0=1$

$$u_{x=1,y=0}=\int\limits_0^1\frac{\nu(t)dt}{(1-t)^{\frac{m}{m+2}}}+\frac{k}{4}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{(1-\xi)^{\frac{m}{2(m+2)}}}\int\limits_0^1\frac{(\eta-\xi)^{\frac{m}{m+2}}}{(1-\eta)^{\frac{m}{2(m+2)}}}f_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta.$$

Таким образом, получим, что непрерывность решения $u(x,y)$ равносильна существованию интеграла

$$\int\limits_0^1\frac{\nu(t)dt}{(1-t)^{\frac{m}{m+2}}},$$

а гладкость решения равносильна существованию интеграла

$$\int_0^1 \frac{\nu(t)dt}{(1-t)^{\alpha+\frac{m}{m+2}}} \tag{17}$$

для любого $0<\alpha<1$.

Проведя в интеграле (17) замену $t=\frac{x}{1+x}$, учитывая соотношение (7), а также принимая во внимание тот факт, что из принадлежности функции классу C^α следует ее принадлежность классу C^β для любого $0<\beta<\alpha$ ([6, с.22]), получим, что гладкость решения $u(x,y)$ эквивалентна непрерывности функции $\overline{\nu}(s)$ на отрезке

$$\frac{m}{m+2}\leq s<\frac{m}{m+2}+1. \tag{18}$$

Используя соотношения (4), (9), (11), (12), (13), (14), (15), (16), получим, что функция $g(s,\gamma_\delta)$ будет непрерывной на промежутке (18), поэтому для непрерывности функции $\overline{\nu}(s)$, а значит, и для гладкости решения $u(x,y)$ необходима и достаточна, согласно соотношению (10), необратимость функции $h(s,\gamma_\delta)$ в нуль на промежутке (18).

Прежде всего, решим данную задачу для двух частных случаев: уравнения Лаврентьева – Бицадзе ($m=0$) и случая нормального контура ($\gamma_\delta=\frac{\pi}{2}$).

В случае $m=0$, используя формулы ([7, с.1022], [8, с.81])

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\varphi}}\cdot\frac{\sin\nu\varphi}{\nu},$$

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\varphi}}\cdot\cos\nu\varphi,$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),$$

получим с учетом соотношений (8) и (10)

$$\overline{\nu}(s)=\frac{sg(s,\gamma_\delta)}{tgs\gamma_\delta-1}, \tag{19}$$

причем нам нужно исследовать аналитичность функции (19) ввиду (18) и условия $m=0$ на отрезке $(0,1)$.

Функция $sg(s,\gamma_\delta)$ будет непрерывной в силу условия (4) и согласно соотношений (9), (11), (13), (14), (15), (16). Поэтому для непрерывности функции $\overline{\nu}(s)$ на отрезке $(0,1)$ достаточно выполнение условия

$$tgs\gamma_\delta-1\neq 0,$$

откуда с учетом ограничений, налагаемых на s, получим, что функция $\overline{\nu}(s)$ будет непрерывной при $0<s<1$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma_\delta\leq\frac{\pi}{4}. \tag{20}$$

В итоге, в силу сказанного относительно существования гладкого решения задачи Трикоми, заключаем, что условие (20) является критерием существования гладкого решения при $m=0$.

В случае нормального контура при $\gamma_\delta=\frac{\pi}{2}$ (то есть $\delta=0$), используя следующие формулы ([7, с.951–952, 1053])

$$P_\nu^\mu(0)=\frac{2^\mu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+1}{2}\right)},$$

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2z-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

получим из соотношений (8) и (10)

$$\overline{\nu}(s) = \frac{2^{\frac{2}{m+2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\frac{m+4}{m+2}}{2}\right)\sin\frac{\pi(1-s)}{2}\sin\frac{\pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{2}}{\pi\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi(1-s)}{2}+\sin\frac{\pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{2}\right)} \cdot g(s,0). \tag{21}$$

В итоге, из соотношения (21) получим, что при

$$s = \frac{m+1}{m+2} \tag{22}$$

знаменатель в (21) обращается в нуль и, следовательно, учитывая тот факт, что значение (22) принадлежит интервалу (18), заключаем, что функция $\overline{\nu}(s)$ не будет непрерывной в этом интервале, а значит, в силу сказанного выше, решение задачи Трикоми не будет гладким при произвольной правой части $f(x,y)$. Для его гладкости в случае $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ на $f(x,y)$ должны быть наложены дополнительные ограничения.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Установим условия, при которых $h(s,\gamma_\delta) \neq 0$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1)\ 1 \leq s < \frac{m}{m+2} + 1. \tag{23}$$

Используя формулу ([7, с. 1016]

$$P_\nu^\mu(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \cdot \int\limits_0^\varphi \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(\cos t - \cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

из соотношения (10) получим

$$h(s,\gamma_\delta) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)} + \sin^{-\frac{2}{m+2}}\gamma_\delta \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\int\limits_0^{\gamma_\delta} \frac{\cos\left(s-\frac{m}{2(m+2)}\right)t\,dt}{(\cos t-\cos\gamma_\delta)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}}}{\int\limits_0^{\gamma_\delta} \frac{\cos\left(s-\frac{m}{2(m+2)}\right)t\,dt}{(\cos t-\cos\gamma_\delta)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}}.$$

Учитывая свойства гамма – функции: $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$ и $\Gamma(x) < 0$ при $-1 < x < 0$ ([8, с. 81]), принимая во внимание соотношение (23), получим, учитывая свойства определенного интеграла, что для необратимости функции $h(s,\gamma_\delta)$ в нуль в рассматриваемом интервале достаточна неотрицательность подынтегрального выражения, откуда, учитывая ограничения, налагаемые на s, получим

$$\gamma_\delta \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2m+4}{3m+4}. \tag{24}$$

Таким образом, условие (24) является достаточным для данного интервала.

$$2)\ \frac{m}{m+2} \leq s < \frac{m+1}{m+2}. \tag{25}$$

Используя формулу ([7, с. 1013])

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \cdot F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \tag{26}$$

а также формулы ([8, с. 340, 373, 82])

$$F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z),$$

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt, \tag{27}$$

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

и учитывая свойство неопределенного интеграла, что неравенства можно интегрировать в положительном направлении ([9, с. 357]), получим, что, если наложить на параметр γ_δ условие

$$\gamma_\delta \leq \frac{\pi}{2}, \tag{28}$$

то из (10) вытекает место соотношение

$$h(s,\gamma_\delta) < \frac{\pi\left(\sin\pi\left(s-\frac{m}{m+2}\right)-\sin\pi s\right)\int\limits_0^1 t^{-s-\frac{1}{m+2}}(1-t)^{s-1}\left(1-t\cdot\frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)^{-s-\frac{1}{m+2}}dt}{\sin\pi s\cdot\sin\pi\left(s-\frac{m}{m+2}\right)\cdot\Gamma(1-s)\cdot\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right)},$$

откуда, учитывая соотношение (25), получим

$$h(s,\gamma_\delta) \neq 0.$$

Таким образом, условие (28) является достаточным для данного интервала.

Отметим, что в случае $s = \frac{m+1}{m+2}$, учитывая формулы ([8, с. 81, 370])

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1),$$

$$F(0,a;b;z) = 1,$$

а также соотношение (26), получим

$$h(s,\gamma_\delta) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}\left(-1+\left(\frac{1-\cos\gamma_\delta}{1+\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{m+2}}\right) < 0$$

при выполнении условия

$$\gamma_\delta \neq \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Таким образом, для нахождения достаточного условия гладкости решения исходной задачи осталось выяснить: при каких γ_δ функция $h(s,\gamma_\delta) \neq 0$, если

$$3)\ \frac{m+1}{m+2} < s < 1. \tag{30}$$

В этом случае, используя соотношения (26) и (27), принимая во внимание указанное ранее свойство определенного интеграла о возможности интегрирования неравенств в положительном направлении, а также учитывая соотношения ([8, с. 371])

$$F\left(a,1-a;\frac{3}{2};\sin^2 z\right) = \frac{\sin((2a-1)z)}{(2a-1)\sin z},$$

$$F\left(a,1-a;\frac{1}{2};\sin^2 z\right) = \frac{\cos((2a-1)z)}{\cos z},$$

получим

$$h(s,\gamma_\delta) < \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \left(1 - \frac{tg\left(s-\frac{m}{2(m+2)}\right)\gamma_\delta}{\left(tg\frac{\gamma_\delta}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}}}\right). \qquad (31)$$

Отсюда, учитывая сделанное выше замечание о том, что $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$ и $\Gamma(x) < 0$ при $-1 < x < 0$, а также используя свойства тригонометрических функций, получим, что при

$$\gamma_\delta \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m+2}{3m+4} \qquad (32)$$

скобка в правой части соотношения (31) будет неотрицательной, откуда вся правая часть неравенства (31) будет неположительна, то есть $h(s,\gamma_\delta) < 0$ или $h(s,\gamma_\delta) \neq 0$. Таким образом, соотношение (32) является достаточным условием для данного интервала.

В итоге, рассматривая совместно соотношения (24), (28), (29) и (32), нами доказана следующая

Теорема 1 *Решение задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта (задачи (1)–(2)) будет гладким при выполнении соотношения (32).*

Цитированная литература

1. **Кальменов Т. Ш.** О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Дисс... доктора физ.–мат. наук. Москва, 1982.
2. **Базарбеков А. Б.** // Дифференц. уравнения. 1989. Том 25, N5. C.816–822.
3. **Базарбеков А.Б.** // Дифференц. уравнения. 1991. Том 27, N5. C. 810–815.
4. **Базарбеков А.Б.** Краевые задачи для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дисс... доктора физ.–мат. наук. Алматы, 1999.
5. **Никифоров А.Ф.,Уваров В.Б.** Основы теории специальных функций. М., 1974.
6. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. М., 1963.
7. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
8. **Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами)/под ред.М.Абрамовица и И.Стиган. М., 1979.**
9. **Мышкис А.Д.** Лекции по высшей математике. М., 1969.

Поступила в редакцию 8.05.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 68 — 73*

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО – КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

А. С. Сакабеков

Казахстанско - Британский технический университет
480091, Алматы, ул. Толе би, 59

Доказано существование и единственность локального решения начально - краевой задачи для неоднородной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственным переменным.

Рассмотрим неоднородное нелинейное уравнение Больцмана, записанное для Максвелловских молекул [1, 2]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,\frac{\partial f}{\partial x})+(F,\frac{\partial f}{\partial v})=I(f,f), \tag{1}$$

где $f=f(t,x,v)$ - функция распределения частиц в пространстве по времени и скоростям, $F=(F_1,F_2,F_3)^{'}$ - внешняя сила, действующая на частицу, $(v,\frac{\partial f}{\partial x})\equiv|v|(\sin\theta\cos\psi\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sin\theta\sin\psi\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x_3})$, $(F,\frac{\partial f}{\partial v})\equiv(F_1\frac{\partial f}{\partial v_1}+F_2\frac{\partial f}{\partial v_2}+F_3\frac{\partial f}{\partial v_3})$, $I(f,f)\equiv\int\limits_{R_3^v\times S_2}(f(v^{'})f(w^{'})-f(v)f(w))\sigma(\cos\chi)dwdn$ - интеграл столкновений, $v,w(v^{'},w^{'})$ - скорости частиц до (после) столкновения, причем скорости частиц после столкновения выражаются через скорости частиц до столкновения по формулам $\begin{pmatrix} v^{'} \\ w^{'} \end{pmatrix}=\frac{v+w}{2}\pm\frac{|v-w|}{2}n$, $v-w$ - относительная скорость, n- единичный вектор относительной скорости после столкновения, $\sigma(\cos\chi)$ - заданная функция, S_2 - поверхность единичной сферы. Для того, чтобы выделить линеаризованный оператор в уравнении (1), положим $f=f_0(\alpha|v|)(1+\varphi(t,x,v))$, где - $f_0(\alpha|v|)=(\alpha^2/2\pi)^{3/2}exp(-\alpha^2(|v|^2/2+\Psi(x)))$ - максвелловское распределение, $\Psi(x)$ - внешнее поле, причем $\frac{\partial\Psi}{\partial x}=F$; $\varphi(t,x,v)$ - отклонение от максвелловского распределения. Тогда относительно $\varphi(t,x,v)$ получим уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(v,\frac{\partial\varphi}{\partial x})+(F,\frac{\partial\varphi}{\partial x})=L\varphi+I(\varphi,\varphi),\\ (t,x,v)\in[0,T]\times G\times R_3^v,\end{gathered} \tag{2}$$

Keywords: *System of Boltzmann's moment equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35B45

где $L\varphi \equiv \int\limits_{R_3^v \times S_2} f_0(\alpha|w|)(\varphi(v^{'}) + \varphi(w^{'}) - \varphi(v) - \varphi(w))\sigma(\cos\chi)dwdv$ - линеаризованный оператор, G - ограниченная область из R_3^x, $0 < T < \infty$.

Уравнение (2) изучим при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi(0,x,v) = \varphi_0(x,v), \quad (x,v) \in G \times R_3^v, \tag{3}$$

$$\varphi(t, x_{\partial G}, v) = 0, (v, n_{\partial G} < 0), \tag{4}$$

где $\varphi_0(x,v)$ - заданная функция (начальное распределение частиц).

Ван Чань и Уленбек [3] доказали, что линеаризованный оператор имеет дискретный спектр и указали соответствующие собственные функции, которые образуют полную ортогональную систему функций в пространстве $L^2(R_3^v)$ с весом $f_0(\alpha|v|)$

$$L\Phi_{n\ell m}(\alpha v) = \lambda_{n\lambda}\Phi_{n\ell m}(\alpha v),$$

где

$$\Phi_{n\ell m}(\alpha v) = i^{\ell}(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\gamma_{n\ell}^{(m)}(\frac{\alpha|v|}{\sqrt{2}})^{\ell}S_n^{\ell+1/2}(\frac{\alpha^2|v|^2}{2})P_{\ell}^{(|m|)}(\cos\theta)exp(im\psi)$$

- собственные функции линеаризованного оператора, $S_n^{\ell+1/2}(\frac{\alpha^2|v|^2}{2})$ - полиномы Сонина, $P_{\ell}^{(|m|)}$ $(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра, $\lambda_{n\ell}$ - собственные значения кратности $2\ell+1$, соответствующие собственным функциям $\Phi_{n\ell m}(\alpha v)$, причем $\lambda_{n\ell} \leq 0$ и $\lambda_{n\ell} \to -\infty$ при $2n + \ell \to \infty$, i- мнимая единица, $\gamma_{n\ell}^{(m)} = (\sqrt{\pi}n!(2\ell+1)(\ell - |m|!)/(2\Gamma(n+\ell+3/2)(\ell+|m|)!))^{1/2}$ - нормировочный коэффициент, Γ - гамма функция.

Для нахождения приближенного решения задачи (2) - (4) применим метод моментов, который является частным случаем метода Галеркина. Приближенное решение задачи (2) - (4) определим следующим образом:

$$\varphi_k(t,x,v) = \sum_{2n+\ell=0}^{k}(\sum_{m=0}^{\ell}\varphi_{n\ell}^{(m)}(t,x)\Phi_{n\ell m}^{(c)}(\alpha v) + \sum_{m=1}^{l}\psi_{n\ell}^{(m)}(t,x)\Phi_{n\ell m}^{(s)}(\alpha v)), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{R_3^v}(\tfrac{\partial\varphi_k}{\partial t} + (v, \tfrac{\partial\varphi_k}{\partial x}) + (F, \tfrac{\partial\varphi_k}{\partial v}) - L\varphi_k - I(\varphi_k,\varphi_k))f_0\begin{pmatrix}\Phi_{n\ell m}^{(c)}(\alpha v)\\ \Phi_{n\ell m}^{(s)}(\alpha v)\end{pmatrix}dv = 0,\\ (t,x) \in (0,T] \times G; \quad 2n+\ell = 0,1,...,k; \quad m = \begin{pmatrix}0,1,...,\ell\\ 1,2,...,\ell\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{R_3^v}(\varphi_k(0,x,v) - \varphi_{ok}(x,v))f_0\begin{pmatrix}\Phi_{n\ell m}^{(c)}(\alpha v)\\ \Phi_{n\ell m}^{(s)}(\alpha v)\end{pmatrix}dv = 0,\\ 2n+\ell = 0,1,...,k; m = \begin{pmatrix}0,1,...,\ell\\ 1,2,...,\ell\end{pmatrix}, x \in G,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{(v,n_{\partial G})<0}(v, n_{\partial G})\varphi_{2N+1}(t, x_{\partial G}, v)f_0\begin{pmatrix}\Phi_{n,2\ell,m}^{(c)}(\alpha v)\\ \Phi_{n,2\ell,m}^{(s)}(\alpha v)\end{pmatrix}dv = 0,\\ 2(n+\ell) = 0,2,...,2N; m = \begin{pmatrix}0,1,...,2\ell\\ 1,2,...,2\ell\end{pmatrix}, t \in [0,T],\end{gathered} \tag{8}$$

при $K = 2N+1$,

$$\int\limits_{(v,n_{\partial G})<0}(v,n_{\partial G})\varphi_{2N}(t,x_{\partial G},v)f_0\begin{pmatrix}\Phi^{(c)}_{n,2\ell+1,m}(\alpha v)\\ \Phi^{(s)}_{n,2\ell+1,m}(\alpha v)\end{pmatrix}dv=0,$$

$$2(n+\ell)+1=1,3,...,2N-1;m=\begin{pmatrix}0,1,...,2\ell+1\\1,2,...,2\ell+1\end{pmatrix},t\in[0,T] \qquad (9)$$

при $K=2N$, где

$$\varphi_{ok}(x,v)=\sum_{2n+\ell=0}^{k}(\sum_{m=0}^{\ell}\dot{\varphi}^{(m)}_{n\ell}(x)\Phi^{(c)}_{n\ell m}(\alpha v)+\sum_{m=1}^{\ell}\dot{\psi}^{(m)}_{n\ell}(x)\Phi^{(s)}_{n\ell m}(\alpha v)),$$

$$\begin{pmatrix}\varphi^{(m)}_{n\ell}(t,x)\\ \psi^{(m)}_{n\ell}(t,x)\end{pmatrix}=\int\limits_{R^v_3}f_0\varphi_k(t,x,v)\begin{pmatrix}\Phi^{(c)}_{n\ell m}(\alpha v)\\ \Phi^{(s)}_{n\ell m}(\alpha v)\end{pmatrix}dv,$$

$$\begin{pmatrix}\Phi^{(c)}_{n\ell m}(\alpha v)\\ \Phi^{(s)}_{n\ell m}(\alpha v)\end{pmatrix}=\gamma^m_{n\ell}(\frac{\alpha|v|}{\sqrt{2}})^{\ell}\quad S^{\ell+1/2}_n(\frac{\alpha^2|v|^2}{2})P^{(|m|)}_{\ell}(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\psi\\ \\ \sin m\psi\end{pmatrix}.$$

Конечную систему уравнений (6), соответствующую разложению (5), будем называть неоднородной системой моментных уравнений (СМУ) Больцмана в k-м приближении. В соответствии с [4] граничные условия (8) и (9) будем называть обобщенными граничными условиями Владимирова - Маршака в нечетном и четном приближениях, соответственно. В векторно - матричной форме начально - краевая задача для нелинейной СМУ Больцмана при $K=2N+1$ запишется в виде (в качестве области G возьмем параллелепипед):

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}K_j\frac{\partial U}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3}F_jM_jU+\Lambda U=I(U,U),(t,x)\in(0,T]\times G, \qquad (10)$$

$$U|_{t=0}=U_0(x),x\in G, \qquad (11)$$

$$b^{\mp}_jU|_{x_j=\pm a_j}=0,j=\overline{1,3}, \qquad (12)$$

где $K_j=\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix}0&A_j\\A^{'}_j&0\end{pmatrix}$, $M_j=\begin{pmatrix}0&D_j\\C_j&0\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}\Lambda_0&0\\0&\Lambda_1\end{pmatrix}$, $b^{\mp}_j=(\mp B_j\ \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}A_j)$, $U=(u,v)^{'}, U_0=(u_0,v_0)^{'}, I(U,U)=(I(u,v),J(u,v))$, A_j, D_j - прямоугольные числовые матрицы размерности $2(N+1)^2(2N+1)\times2(N+1)^2(2N+3)$, $A^{'}_j$ - транспонированная матрица к A_j, C_j - прямоугольные числовые матрицы размерности $2(N+1)^2(2N+3)\times2(N+1)^2(2N+1)$, Λ_0,Λ_1 - диагональные матрицы размерности $2(N+1)^2(2N+1)$ и $2(N+1)^2(2N+3)$, соответственно, причем собственные значения линеаризованного оператора, взятые со знаком минус, служат диагональными элементами матриц Λ_0, Λ_1; B_j - квадратная положительно - определенная числовая матрица порядка $2(N+1)^2(2N+1)$, $u(v)$ - вектор четных (нечетных) по ℓ компонент разложения $\varphi_{2N+1}(t,x,v)$ размерности $2(N+1)^2(2N+1)(2(N+1)^2(2N+3))$, $u_0(v_0)$ - вектор четных (нечетных) по ℓ компонент разложения $\varphi_{0,2N+1}(x,v)$ размерности $2(N+1)^2(2N+1)(2(N+1)^2(2N+3))$, $I(u,v)(J(u,v))$- вектор четных (нечетных) по ℓ компонент разложения интеграла столкновений $I(\varphi_{2N+1},\varphi_{2N+1})$ размерности $2(N+1)^2(2N+1)(2(N+1)^2(2N+3))$, причем моменты от интеграла столкновений представляют знаконеопределенную квадратичную форму и могут быть вычислены по формуле [5]

$$\begin{pmatrix}I^{(m)}_{n\ell}\\ J^{(m)}_{n\ell}\end{pmatrix}=\sum<N_3L_3n_3\ell_3:\ell/n\ell oo:\ell><N_3L_3n_3\ell_3:\ell/n_1\ell_1n_2\ell_2:\ell>(\ell_1m_1\ell_2m_2/\ell m)V^{\ell_3}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\varphi^{(m_1)}_{n_1\ell_1}\varphi^{(m_2)}_{n_2\ell_2}-\psi^{(m_1)}_{n_1\ell_1}\psi^{(m_2)}_{n_2\ell_2}\\ \varphi^{(m_1)}_{n_1\ell_1}\psi^{(m_1)}_{n_1\ell_1}+\varphi^{(m_2)}_{n_2\ell_2}\psi^{(m_1)}_{n_1\ell_1}\end{pmatrix},$$

$< N_3L_3n_3\ell_3 : \ell/n_1\ell_1n_2\ell_2 : \ell >$ - обобщенные коэффициенты Тальми, $(\ell_1m_1\ell_2m_2/\ell m)$ - коэффициенты Клебша-Гордана.

Заметим, что система уравнений (10) представляет собой полулинейную гиперболическую систему уравнений с граничным условием (12), удовлетворяющим условию диссипативности. Вопросы существования и единственности решения начально - краевой задачи для неоднородной системы моментных уравнений Больцмана (10) - (12) изучаются впервые. Доказать теорему о существовании глобального по времени решения задачи (10) - (12) не представляется возможным по следующей причине. Система уравнений (10) нелинейная, причем компоненты вектора $I(U,V)$ - знаконеопределенные квадратичные формы. Поэтому получить априорную оценку решения задачи (10) - (12) для любого момента времени практически невозможно. В данной работе мы докажем существование единственного локального по времени решения начально - краевой задачи (10) - (12) в пространстве функций $C([0,T];L^2(G))$.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если $U_0 \in L^2(G)$, $F \in C([0,T];\ L^2(G))$, то задача (10), (12) имеет в области $[0,T]\times G$ единственное слабое решение, принадлежащее пространству $C([0,T];L^2(G))$, причем имеет место априорная оценка*

$$\|U\|_{C([0,T];L^2(G)} \leq C\|U_0\|_{L^2(G)}, \tag{13}$$

где $C-const$, независящая от U, $T \sim O(\|U_0\|^{-1}_{L^2(G)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем справедливость оценки (13). Для этого обе части системы уравнений (10) умножим скалярно на U и проинтегрируем по области G:

$$\int\limits_G ((\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} K_j\frac{\partial U}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} F_jM_jU + \Lambda U - I(U,U)),U)dx = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_G (U,U)dx + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_G (K_j\frac{\partial U}{\partial x_j},U)dx + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_G (F_jM_jU,U)dx + \int\limits_G (\Lambda U,U)dx = \int\limits_G (I(U,U),U)dx.$$

Применяя интегрирование по частям, имеем

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\int\limits_G (U,U)dx + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j,n,\ell=1\\ j\neq n\neq \ell}}^{3}\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}((K_jU,U)|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell + \\ + \textstyle\sum_{j=1}^{3}\int\limits_G (F_jM_jU,U)dx + \int\limits_G (\Lambda U,U)dx = \int\limits_G (I(U,U),U)dx.\end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим интеграл по границе

$$\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}((K_jU,U)|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell = \int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}(\tfrac{1}{\sqrt{2}\alpha}\begin{pmatrix} 0 & A_j \\ A_j' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix})|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}((A_jv,u) + (A_j'u,v))|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell = \tfrac{2}{\sqrt{2}\alpha}\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}((A_jv,u))|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell.$$

Отсюда, учитывая граничное условие (12), получим

$$\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}(K_jU,U)|_{-a_j}^{a_j}dx_ndx_\ell = 2\int\limits_{-a_n}^{a_n}\int\limits_{-a_\ell}^{a_\ell}((B_jU,U)|_{x_j=a_j} + (B_jU,U)|_{x_j=-a_j})dx_ndx_\ell. \tag{15}$$

Учитывая вывод системы моментных уравнений (см. (6)) сделаем преобразования

$$\sum_{j=1}^{3}\int_G (F_j M_j U,U)dx=\sum_{j=1}^{3}\int_G F_j\int_{R_3^v} f_0\frac{\partial\varphi_{2N+1}}{\partial v}(\sum_{2n+\ell=0}^{2N+1}(\sum_{m=0}^{\ell}\varphi_{n\ell}^{m}(t,x)\Phi_{n\ell m}^{(c)}(\alpha v)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\ell}\psi_{n\ell}^{m}(t,x)\Phi_{n\ell m}^{(s)}(\alpha v))dvdx=\sum_{j=1}^{3}\int_G F_j\int_{R_3^V} f_0\frac{\partial\varphi_{2N+1}}{\partial v}\varphi_{2N+1}dvdx=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_G F_j\int_{R_3^V} f_0\frac{\partial\varphi_{2N+1}^2}{\partial v}dvdx.$$

Отсюда, применяя интегрирование по частям, получим

$$\sum_{j=1}^{3}\int_G (F_j M_j U,U)dx=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_G F_j(\int_{R_2} f_0\varphi_{2N+1}^2|_{-\infty}^{+\infty}dv_i dv_k+\alpha^2\int_{R_3^V} v_j f_0\varphi_{2N+1}^2 dv)dx=0, \tag{16}$$

т.к. первое слагаемое в скобках обращается в нуль за счет множителя f_0, а второе слагаемое – из – за того, что подинтегральная функция нечетная.

С учетом равенств (15), (16) соотношение (14) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_G (U,U)dx+\int_G(\Lambda U,U)dx+\sum_{\substack{j,n,\ell=1\\ j\neq n\neq\ell}}^{3}\int_{-a_n}^{a_n}\int_{-a_\ell}^{a_\ell}((\overline{B_j}U,U)|_{x_j=a_j}+\\ +(\overline{B_j}U,U)|_{x_j=-a_j})dx_n dx_\ell=\int_G(I(U,U),U)dx,\end{gathered}\tag{17}$$

где $\overline{B_j}=\begin{pmatrix} B_j & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Воспользуемся сферическим представлением вектора $U(t,x)=r(t)\omega(t,x)$, где $r(t)=\|U(t,\cdot)\|_{L^2(G)}$, $\omega(t,x)$ - единичный вектор, то есть $\|\omega\|_{L^2(G)}=1$. Подставляя значение $U=r\omega$ в равенство (17), будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2(t)+r^2(t)\{\int_G(\Lambda\omega,\omega)dx+\sum_{\substack{j,n,\ell=1\\ j\neq n\neq\ell}}^{3}\int_{-a_n}^{a_n}\int_{-a_\ell}^{a_\ell}((\overline{B_j}\omega,\omega)|_{x_j=a_j}+$$

$$+(\overline{B_j}\omega,\omega)|_{x_j=-a_j})dx_n dx_\ell\}=r^3(t)\int_G(I(\omega,\omega),\omega)dx.$$

Обозначим

$$Q(t)=\int_G(I(\omega,\omega),\omega)dx,$$

$$P(t)=\int_G(\Lambda\omega,\omega)dx+\sum_{j,n,\ell=1\, j\neq n\neq\ell}^{3}\int_{-a_n}^{a_n}\int_{-a_\ell}^{a_\ell}((\overline{B_j}\omega,\omega)|_{x_j=a_j}+$$

$$+(\overline{B_j}\omega,\omega)|_{x_j=-a_j})dx_n dx_\ell.$$

Заметим, что $P(t)\geq 0\ \forall t$ и $Q(t)$ - знаконеопределенная функия, так как Λ – неотрицательно - определенная матрица, B_j - положительно - определенная матрица, а моменты от интеграла столкновений представляют собою знаконеопределенную квадратичную форму. Тогда получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{dt}+rP(t)=r^2Q(t). \tag{18}$$

Уравнение (18) рассмотрим при начальном условии

$$r(0) = \|U_0\| \equiv \|U_0\|_{L^2(G)}. \tag{19}$$

Решение задачи (18), (19) имеет вид

$$r(t) = \{\exp(\int\limits_0^t P(\tau)d\tau)(\frac{1}{\|U_0\|} - \int\limits_0^t Q(\tau)exp(-\int\limits_0^\tau P(\xi)d\xi)d\tau\}^{-1}.$$

Если $R(t) \equiv \int\limits_0^t Q(\tau)exp(-\int\limits_0^\tau P(\xi)d\xi)d\tau \leq 0 \ \forall t$, то $r(t)$ ограничены для любого $t \in [0, +\infty)$. Пусть $R(t) > 0$. Обозначим через t_1 момент времени, при котором

$$\frac{1}{\|U_0\|} - \int\limits_0^{t_1} Q(\tau)exp(-\int\limits_0^\tau P(\xi)d\xi)d\tau = 0.$$

Тогда $r(t)$ ограничена для любого $t \in [0, T_1]$, где $T_1 < t_1$, причем $t_1 \sim ||U_0||^{-1}$, так как подинтегральная функция $Q(\tau)\exp(-\int_0^\tau P(\xi)d\xi)$ - ограниченная. Следовательно, для любого $t \in [0, T_1]$ имеет место априорная оценка (13).

Существование решения задачи (10)-(12) можно доказать по методике работ [4], [6].

Цитированная литература

1. **Черчиньяни К.** Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978.

2. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. М., 1967.

3. **Wang Chang C. S., Uhlenbek G. E.** On the propagation of sound in monoatomic gages. // University of Michigan Press, Project M 999, Ann Avbor. Michigan, 1952.

4. **Сакабеков А.** // Матем.сборник. 1992. Т.183, №9. С.67-88.

5. **Kumar K.** // Annals of physics. 1966. Vz.37, P.113-141.

6. **Tartar L.** // Heribl - Walt Symposium, 2. Ed.R. J.Knops, Research Notes in Math., 1979. N39. P. 136-212.

Поступила в редакцию 25.09.2002г.

УДК 517.518.87

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ БЕСОВА

М. Б.Сихов

Казахский Национальный университет им.аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47

Пусть $L^q(0,1)^s$ $(1 \le q < \infty)$ - пространство всех измеримых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$ таких,что

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{[0,1]^s} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Пусть Z^s и Z^s_+ - подмножества евклидова пространства R^s, координаты которых являются целыми и целыми положительными числами. Всюду ниже для $y = (y_1, ..., y_s) \in R^s$ полагается $\overline{y}_j = \max(1; |y_j|)$, $2^y = (2^{y_1}, ..., 2^{y_s})$, $\overline{y} = (\overline{y}_1, ..., \overline{y}_s)$, а для $n = (n_1, ..., n_s) \in Z^s_+$ положим $\|n\|_1 = n_1 + \ldots + n_s$, $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_s}\right)$.

Для $f \in L^q(0,1)^s$ введем смешанный модуль гладкости порядка $k \in Z_+$

$$\Omega_k(f;t)_q \equiv \Omega_k(f;t_1,...,t_s)_q = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=1,...,s}} \|\Delta^k_h f(x)\|_q \ \ (t \in [0,1]^s),$$

где $\Delta^k_h f(x) = \Delta^k_{h_s} ... \Delta^k_{h_1} f(x)$, $\Delta^k_{h_j} = \Delta^1_{h_j}(\Delta^{k-1}_{h_j})$, $\Delta^1_{h_j} f(x) = f(x_1, ..., x_j + h_j, ..., x_s) - f(x_1, ..., x_j, ..., x_s)$.

Пусть $1 \le q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r_j > 0$, $j = 1, ..., s$. Класс Бесова $SB^{r_1,...,r_s}_{q,\theta}$ (более подробно об этом см.,напр., в [1-2]) есть множество всех функций $f \in L^q(0,1)^s$ таких, что $\int\limits_0^1 f(x)dx_j = 0$ $(j = 1, ..., s)$ и для некоторого $k > \max\limits_j r_j$ выполнено соотношение

$$\|f\|_{SB^{r_1,...,r_s}_{q,\theta}} = \left(\int\limits_{[0,1]^s} [\Omega_k(f;t)_q]^\theta \prod_{j=1}^s t_j^{-(\theta r_j + 1)} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1.$$

Keywords: *Besov class, quadrature formulae, optimum algorithm*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

В дальнейшем, в случае необходимости перенумеровывая координатные переменные, будем считать, что вектор $r = (r_1, ..., r_s)$ имеет вид $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_s$.

Всюду ниже обозначим через $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_s)$ вектор, компоненты которого определяются равенствами $\gamma_j = r_j/r_1$ $(j = 1, ..., s)$. Положим для $R \ge 1$

$$\Gamma_R(\gamma) = \left\{ m : m \in Z^s, \prod_{j=1}^{s} \overline{m}_j^{\gamma_j} \le R \right\}.$$

В работе изучается задача численного интегрирования функций из классов $SB_{q,\theta}^{r_1,...,r_s}$. К настоящему времени В.В.Дубининым [3] установлены следующие правильные порядки убывания погрешностей оптимальных квадратурных формул

$$R_N\left(SB_{q,\nu}^{r_1,...,r_s}\right) \asymp N^{-r_1}(log\ N)^{\frac{\nu-1}{\theta'}} \quad (1 \le q \le \infty,\ 1 < r_1 q,\ 1 \le \theta < \infty),$$

где $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Цель работы состоит в построении квадратурных формул для классов $SB_{q,\theta}^{r_1,...,r_s}$, чтобы одновременно обеспечивалась простота сетки, эффективность и близость к оптимальному алгоритма построения сетки.

Простота сетки состоит в ее сверх-экономной записи ($\{\cdots\}$- дробная часть)

$$\xi_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} a_1 \right\}, ..., \left\{ \frac{k}{N} a_s \right\} \right) (k = 1, ..., N),$$

когда по $(s+1)$ целым числам $(N, a_1, ..., a_s)$ за $\asymp N$ элементарных арифметических операций легко выписывается сетка произвольного объема N.

Эффективность и близость к оптимальному алгоритма обеспечивается привлечением результатов алгебраической и аналитической теории чисел (более подробно об этом см. [4-5]).

Заметим, что данная задача для классов Никольского при $r = r_j,\ 1 < q \le 2$ рассматривалась Н. Темиргалиевым [6], а при $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_s$ $(1 \le \nu \le s,\ r_1 q > 1)$ - Е.А.Баиловым [7].

Приведем обозначения и несколько утверждений, которыми будем пользоваться.

Пусть $l \ge 3$ — простое число, $\theta = cos\frac{2\pi}{l} + isin\frac{2\pi}{l}$. Обозначим через $Q(\theta)$ подполе поля комплексных чисел, состоящие из всевозможных чисел вида

$$\alpha = c_1 + c_2\theta + ... + c_{l-1}\theta^{l-2},$$

где c_1, ..., c_{l-1} — произвольные рациональные числа (см. [8, с. 355 — 358]). Через A_s $(s = l-1)$ обозначим множество всех целых алгебраических чисел поля $Q(\theta)$.

Непустое подмножество $\Re$ кольца A_s называется идеалом в A_s, если вместе с a и b к $\Re$ принадлежит также каждая комбинация $ma + nb$ при произвольных m и n из A_s.

Два элемента α и β из A_s называются сравнимыми по модулю идеала $\Re$, т.е. $\alpha \equiv \beta(mod\Re)$, если $\alpha - \beta \in \Re$.

Для любого $\alpha \in A_s$ совокупность всех элементов β из A_s: $\alpha \equiv \beta(mod\Re)$ называется классом вычетов по модулю $\Re$.

Если в каждом классе вычетов по модулю $\Re$ выбрать по представителю, то совокупность всех таких представителей называется полной системой вычетов по модулю $\Re$.

Заметим, что число $N\Re$ равно числу классов вычетов по модулю $\Re$ (см., напр., [9, с.146]).

Всюду ниже для $0 \in E \subset A_s$ полагаем $E^* = E - \{0\}$.

Лемма 1. *[4]. Если идеал $\Re \subset A_s$ таков, что $N\Re = p$,*

$$p \not\Big| \prod_{m \in E^*} N(m), \text{ то } E^* \cap \Re = \varnothing,$$

где $N(m)$ есть норма главного идеала (m) ([8], с.184), и $a \not| b$ означает, что a не делится на b.

Л е м м а 2. *[7, с.17]. Пусть* $l = s+1$ $(3 \le l \le 19)$ *- простое число,* $1 = \beta_1 = ... = \beta_\nu < \beta_{\nu+1} \le ... \le \beta_s$ *и* $R \ge C(l)$. *Тогда существуют простое число* p, $p \equiv 1(mod\ l)$, $p \ll R \cdot ln^\nu R$, $p \not| \prod\limits_{m \in \Gamma_R^*(\beta)} N(m)$ *и набор целых чисел* $a_1, \ldots, a_s$, *которые можно отыскать за* $\ll R\, ln^\nu R\, ln\, ln\, R$ *элементарных арифметических операций, такие, что для любого тригонометрического полинома со спектром коэффициентов из* E *выполнено равенство*

$$\int\limits_{[0,1]^s} x(t)dt = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} x\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, ..., \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right).$$

Л е м м а 3. *[7, с.20]. Пусть* $\beta_i \ge 1$ $(i = 1, ..., s)$. *Если идеал* $\Re \subset A_s$ *и гиперболический крест* $\Gamma_R(\beta)$ *таковы, что и* $\Re \cap \Gamma_R^*(\beta) = \varnothing$, *то для любых натуральных* $n_1, ..., n_s$ *выполнено*

$$\sum_{\substack{|m_j| \le n_j \\ (j=1,...,s)}} \chi_\Re(m) \ll \frac{n_1^{\beta_1} ... n_s^{\beta_s}}{R},$$

где $\chi_\Re(m) = 1$, *если* $m \in \Re$ *и* $\chi_\Re(m) = 0$, *если* $m \notin \Re$.

Л е м м а 4. *Пусть даны числа* $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *и* $r_i > 0$ $(i = 1, ..., s)$. *Тогда для каждой функции* $SB_{q,\theta}^{r_1,...,r_s}$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{n \in Z_+^s} \left\| \, 2^{(n,r)} \cdot \delta_n(f;x) \right\|_q^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \|f\|_{SB_{q,\theta}^{r_1,...,r_s}}.$$

Здесь

$$\delta_n(f;x) = \sum_{m \in \rho(n)} \hat{f}(m) e^{i(m,x)}$$

-двоичная пачка ряда Фурье-Лебега функции f, где

$$\rho(n) = \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s,\ 2^{n_j - 1} \le |m_j| < 2^{n_j}\ (j = 1, ..., s)\}.$$

Эта лемма при $k = 1$ и $k = 2$ доказана в работе [10], а при $k > 2$ доказывается аналогично.

Т е о р е м а 1. *Пусть даны простое число* $l = s+1$ $(3 \le l \le 19)$, *числа* $1 \le \theta < \infty$, $1 < q \le 2$ *и* $r_1 q > 1$. *Тогда для всякого* $T > C(l)$ *существуют простое число* p, $p \equiv 1(mod\, l)$, $p \ll T$ *и набор целых чисел* $a_1, ..., a_s$, *для отыскания которых достаточно выполнить* $\ll T\ lnln\ T$ *элементарных арифметических операций, такие, что*

$$\sup_{f \in SB_{q,\theta}^{r_1,...,r_s}} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\}, ..., \left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right) \right| \ll$$

$$\ll \frac{(ln\ T)^{\nu r_1 + \frac{\nu - 1}{\theta_0}}}{T^{r_1}}, \tag{1}$$

где $\theta_0 = \frac{\theta}{\theta - 1}$ при $\theta > 1$ и $\theta_0 = \infty$ при $\theta = 1$.

Доказательство. Пусть дано $R = 2^k > C(l)$ и пусть $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s)$ такое, что $1 = \beta_1 = \gamma_1 = ... = \beta_\nu = \gamma_\nu$, $1 < \beta_j < \gamma_j$ $(j = 1, ..., s)$. В силу леммы 2 за $\ll R\, ln^\nu R\, ln\, ln\, R$ элементарных арифметических операций найдутся простое p, $p \equiv 1(mod\, l)$,
$p \not| \prod\limits_{m \in \Gamma_R^*(\beta)} N(m)$, $p \ll R\, ln^\nu R$ и целые $a_1, ..., a_s$. Если же $\Re \subset A_s$ - такой идеал, что $N\Re = p$, то в

силу леммы 1 выполнено равенство $\Re \cap \Gamma_R^*(\beta) = \varnothing$. Поэтому для всякой функции $f \in SB_{q,\theta}^{r_1,\dots,r_s}$ в силу неравенств Гельдера и Хаусдорфа - Юнга [11, с.172], а также леммы 3 получим $\left(q' = \frac{q}{q-1}\right)$

$$\Delta \equiv \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\},...,\left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right)\right|$$
$$= \left|\sum_{m\in A_s^*}\hat{f}(m)\chi_{\Re}(m)\right| \leq \sum_{\overline{m}_1^{\beta_1}...\overline{m}_s^{\beta_s}>R} |\hat{f}(m)| \ \cdot \chi_{\Re}(m) \ll$$
$$\ll \sum_{n:(n,\beta)>k}\left(\sum_{m\in\rho(n)}|\hat{f}(m)|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\sum_{m\in\rho(n))}\chi_{\Re}(m) \ll\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$
$$\ll \sum_{n:(n,\beta)>k}\|\delta_n(f;x)\|_q\left(\frac{1}{R}\cdot 2^{(\beta,n)}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Пусть $1 < \theta$. Тогда воспользовавшись неравенством Гельдера с показателями $p_1 = \theta$ и $p_2 = \frac{\theta}{\theta-1}$? из (2) получим, что

$$\Delta \ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{n:(n,\beta)>k}\left\|2^{(r,n)}\cdot\delta_n(f;x)\right\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$
$$\times\left(\sum_{n:(n,\beta)>k}\left[2^{-(r,n)+\frac{1}{q}(\beta,n)}\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}.$$

Отсюда, в силу леммы 4 имеем

$$\Delta \ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}\|f\|_{SB_{q,\theta}^{r_1,\dots,r_s}}\left\{\sum_{n:(n,\beta)>k}\left[2^{-(r,n)+\frac{1}{q}(\gamma,n)}\right]^{\theta_0}\right\}^{\frac{1}{\theta_0}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}2^{-\left(r_1-\frac{1}{q}\right)\ k}\cdot k^{\frac{\nu-1}{\theta_0}} \ll \frac{(ln\ T)^{\nu r_1+\frac{\nu-1}{\theta_0}}}{T^{r_1}}.$$

Пусть теперь $\theta = 1$. В этом случае из (2) следует, что

$$\Delta \ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}\sup_{n:(n,\beta)>k}2^{-(r,n)+\frac{1}{q}(\beta,n)}\times\left(\sum_{n:(n,\beta)>k}\left\|2^{(r,n)}\cdot\delta_n(f;x)\right\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}\sup_{n:(n,\beta)>k}2^{-\left(r_1-\frac{1}{q}\right)(\gamma,n)}\|f\|_{SB_{q,\theta}^{r_1,\dots,r_s}} \ll \frac{1}{R^{\frac{1}{q}}}R^{-\left(r_1-\frac{1}{q}\right)} \ll \frac{ln^{\nu r_1}T}{T^{r_1}}.$$

Неравенство (1), и тем самым, теорема полностью доказаны.

Замечание. Эффективный алгоритм, согласно которому каждому конечному множеству $E \subset Z^s$ за $\ll f(E) ln\, ln f(E)$ элементарных арифметических операций ставится в соответствие простое p, $p \equiv 1 (mod\, l)$, $p \ll f(E)$ и набор целых чисел $a_1,...,a_s$, был представлен Н.Темиргалиевым [4]. Здесь

$$f(E) = \sum_{m\in E^*} ln\ N(m).$$

Поэтому, полагая $E = \Gamma_R(\beta)$, мы можем указать алгоритм вычисления простого p и оптимальных коэффициентов $a_1,...,a_s$.

Цитированная литература

1. **Бесов О. В. Ильин В. П. Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.

2. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алматы., 1976.

3. **Дубинин В. В.** // Изв. АН России. Сер.матем. 1997. Т.61, № 2. С.27-52.

4. **Темиргалиев Н.** Об эффективности алгоритмов численного интегрирования и восстановления функций многих переменных. Дисс. ... д.ф. - м.н. М.: МИАН, 1991.

5. **Темиргалиев Н.** // Вестник Евразийского университета. 1997. № 3. С.90-144.

6. **Темиргалиев Н.** // Матем. заметки. 1997. Т.61, № 2. С. 297 — 301.

7. **Баилов Е. А.** Приближенные интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона. Дисс... к.ф. - м.н. Алматы ИТПМ, 1999.

8. **Боревич З. И., Шафаревич И. Г.** Теория чисел. М., 1985.

9. **Вейль Г.** Алгебраическая теория чисел. М., 1947.

10. **Динь Зунг.** // Матем. сборник. 1986. Т.131, № 2. С. 251 — 271.

11. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении.Т.2. М., 1985.

Поступила в редакцию 7.10.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 79 — 88*

УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА КОРОБОВА И СОБОЛЕВА

Н. Т. Тлеуханова

Карагандинский госуниверситет им.Е.А.Букетова

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Класс $E^{\alpha}[0,1]^n$ определятся как множество 1-периодических функций f из $L_1[0,1]^n$ с коэффициентами Фурье $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, удовлетворяющих соотношению

$$\|f\|_{E^{\alpha}[0,1]^n} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |\bar{k}^{\alpha} a_k| < \infty.$$

Здесь и далее $\bar{k}^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\alpha}$, $\bar{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}, j = 1, 2, ..., n$.

Данный класс называется классом Коробова [1]. Пространство Соболева $W_p^{\alpha}[0,1]^n$ определим следующим образом. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$, f - 1-периодическая функция из $L_p[0,1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi ikx}$. Будем говорить, что $f \in W_p^{\alpha}[0,1]^n$, если найдется $f^{\alpha} \in L_p[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^{\alpha} a_k e^{2\pi ikx}$,

$$\|f\|_{W_p^{\alpha}[0,1]^n} \stackrel{\text{def}}{=} \|f^{\alpha}\|_{L_p[0,1]^n}.$$

В работе будем рассматривать следующую задачу.

Пусть $f \in L_1$, $\quad f \sim \sum_{k\in Z^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ - некоторая последовательность комплексных чисел такая, что почти всюду определено мультипликативное преобразование

$$f_{\lambda} \sim \sum_{k\in Z^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Для функции f из пространства Коробова или пространства Соболева требуется приближенно вычислить мультипликативное преобразование f_{λ} по значениям функции f в некоторых узлах $\{t_k\}_{k=1}^{M}$ из $[0,1]^n$ и оценить погрешность.

Данная задача для различных конкретных $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ рассматривалась в работах Коробова Н.М., Смоляка С.А., Wang Yuan, Темлякова В.Н., Темиргалиева Н., Шерниязова К.Е. и других [1-13].

В отличие от известных работ по этой тематике для произвольной размерности n мы приводим оператор приближения в явном виде, а также рассматриваем задачу в общей постановке.

Keywords: *multiplicative transformation, Korobov class, Sobolev class, trigonometric system, Fourier coefficients*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A65, 42A10

Результаты являются новыми и в случае восстановления функции, т.е. при $\lambda_k = 1, \quad k = 1, ..., n$.

Пусть $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $\operatorname{sgn} r = 1$ при $r > 0$ и $\operatorname{sgn} r = 0$ при $r = 0$. Для f из $C[0,1]^n$ определим функционал

$$T_{2^m}(f;\nu) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j \geqslant \nu_j}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j))} \times$$

$$\times f(\frac{r_1}{2^{k_1}}, ..., \frac{r_n}{2^{k_n}}) \qquad (1).$$

Данный функционал в случае $\nu = (0, ..., 0)$ реализует квадратурную формулу, точную для тригонометрических полиномов со спектром из соответствующего гиперболического пучка. Эта квадратурная формула впервые была опубликованна в работе [14].

Л е м м а 1 ([15]). *Пусть* $d \in \mathbb{N}^n$, $B = B_1 \times \ldots \times B_n$ *- отрезок в* $\mathbb{Z}^n$, $d_j > |B_j|$, $j = 1, ..., n$, $I = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^n}((B_1 + r_1 d_1) \times \ldots \times (B_n + r_n d_n))$.

Если $f \in L_1[0,1]^n, f \sim \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$, *то ряд*

$$S_I(f) = \sum_{m \in I} a_m e^{2\pi i m x}$$

является рядом Фурье функции

$$\frac{1}{d} \sum_{0 \leqslant r \leqslant d-1} f\Big(x + \frac{r}{d}\Big) D_B\Big(\frac{r}{d}\Big) =$$

$$= \frac{1}{d_1 \ldots d_n} \sum_{r_1=0}^{d_1-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\Big(x_1 + \frac{r_1}{d_1}, \ldots, x_n + \frac{r_n}{d_n}\Big) D_B\Big(\frac{r_1}{d_1}, \ldots, \frac{r_n}{d_n}\Big),$$

где $D_B(x) = \sum\limits_{m \in B} e^{i2\pi m x}$ *– ядро Дирихле, соответствующее отрезку* B.

Л е м м а 2. *Пусть* $f = \sum_{r \in Z^n} \hat{f}_r e^{2\pi i r x}$ *абсолютно сходится. Тогда имеет место равенство*

$$T_{2^m}(f;\nu) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j \geqslant \nu_j}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \times$$

$$\times \sum_{r \in Z^n} \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1 + \operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)), ..., (2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1} + \operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}), r_n 2^{k_n}).$$

Доказательство. Так как $T_{2^m}(f;\nu)$ есть конечная линейная комбинация функций из $L_1[0,1]^n$, то $T_{2^m}(f;\nu) \in L_1[0,1]^n$. Заметим, что $(-1)^r = e^{2\pi i \frac{2^{k-1} r}{2^k}}$, $k \neq 0, r = 1, 2, ..., 2^k - 1$, поэтому функционал $T_{2^m}(f;\nu)$ можно представить в виде

$$T_{2^m}(f;\nu) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{|k|=m \\ k \geqslant \nu}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \times$$

$$\times \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} D_{k_1 \ldots k_n}(\frac{r_1}{2^{k_1}}, ..., \frac{r_n}{2^{k_n}}) f(\frac{r_1}{2^{k_1}}, ..., \frac{r_n}{2^{k_n}}),$$

где

$$D_{k_1 \ldots k_n}(y_1, ..., y_n) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} 2^{k_j-1} y_j}.$$

Далее используем лемму 2 и убеждаемся в справедливости утверждения.

Л е м м а 3. *Пусть m, n – натуральные числа. Справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n\leqslant m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}=$$

$$d_{0,\ldots,0}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{(k_l,\ldots,k_n)\in\Omega_l}(-1)^{\sum_{j=l+1}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-l+1}} d_{0,\ldots,0,2^{k_l-1}(2r_l+\operatorname{sgn}(k_l-\nu_l)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))},$$

где $\nu_0=0, \Omega_l=\{(k_l,\ldots,k_n): \nu_1+\ldots+\nu_l+k_{l+1}+\ldots+k_n\leqslant m<\nu_1+\ldots+\nu_{l-1}+k_l+\ldots+k_n, k_j\geqslant \nu_j, j=l,\ldots,n\}$

Доказательство. Обозначив через I фигурирующую выше сумму, получаем

$$I=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n\leqslant m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}=$$

$$=\sum_{k_1=\nu_1}^{m}(-1)^{\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)}\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-k_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}=$$

$$=\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{\nu_1}r_1,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn}(k_2-\nu_2)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}-$$

$$-\sum_{k_1=\nu_1+1}^{m}\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-k_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}.$$

Заметим, что произвольное целое число m, отличное от нуля, представимо единственным образом в виде $m=2^{k-1}+r2^k,\quad k\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{Z}$, откуда следует, что

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_{m2^\nu}=\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\sum_{r\in\mathbb{Z}} b_{2^{k-1}}+r2^k. \tag{2}$$

В сумме I в первой части выделим слагаемое $r_1=0$, а для оставшейся суммы применим равенство (2). Имеем

$$I=\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn}(k_2-\nu_2)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}+$$

$$+\sum_{k_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+1),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}-$$

$$-\sum_{k_1=\nu_1+1}^{m}\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-k_1\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+1),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}=$$

$$= \sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_1\\ k_j\geqslant\nu_j}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn}(k_2-\nu_2)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}+$$

$$+\sum_{k\in\Omega_1} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+1),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}.$$

Применяя к сумме

$$\sum_{\substack{k_2+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_1\\ k_j\geqslant\nu_j}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)} \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn}(k_2-\nu_2)),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn}(k_n-\nu_n))}$$

ту же процедуру, что и выше, через $n-1$ шагов придем к требуемому результату.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f=\sum_{r\in\mathbb{Z}^n}\hat f(r)e^{2\pi i r x}$ *– абсолютно сходящийся ряд,* $\Omega_l=\{(k_l,\ldots,k_n):\nu_1+\ldots+\nu_l+k_{l+1}+\ldots+k_n\leqslant m<\nu_1+\ldots+\nu_{l-1}+k_l+\ldots+k_n, k_j\geqslant\nu_j, j=l,\ldots,n\}$. *Тогда для функционала (1) имеет место равенство*

$$T_{2^m}(f;\nu)=\hat f(0,\ldots,0)+\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}}\hat f(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),r_n2^{k_n})+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k\in\Omega_l}(-1)^{\sum_{j=1+l}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in Z^{n-l}}\hat f(0,\ldots,0,2^{k_l-1}(2r_l+\operatorname{sgn}(k_l-\nu_l)),\ldots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),0).$$

Доказательство. Из утверждения леммы 2 следует, что

$$T_{2^m}(f;\nu)=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in Z^n}\hat f(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),r_n2^{k_n}).$$

В сумме выделим слагаемое $r_n=0$ и к оставшейся сумме применим равенство (2):

$$T_{2^m}(f;\nu)=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in Z^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}}\hat f(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),r_n2^{k_n})+$$

$$+\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n\leqslant m-\nu_n\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in Z^{n-1}}\hat f(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1)),\ldots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),0)=$$

$$=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times \sum_{r\in Z^{n-1}} \sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}} \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+\mathrm{sgn}(k_1-\nu_1)),...,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\mathrm{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),r_n 2^{k_n})+$$

$$+\hat{f}(0,...,0)+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k\in\Omega_l}(-1)^{\sum_{j=1+l}^{n-1}\mathrm{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times \sum_{r\in Z^{n-l}} \hat{f}(0,...,0,2^{k_l-1}(2r_l+\mathrm{sgn}(k_l-\nu_l)),...,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\mathrm{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1})),0).$$

Теорема доказана.

Мультииндексу $\mu=(\mu_1,...,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n$ сопоставим $\nu(\mu)=(\nu_1,...,\nu_n)\in\mathbb{N}^n$ так, чтобы при $|\mu_i|>0$ выполнялось неравенство $2^{\nu_i(\mu)-3}\leqslant|\mu_i|<2^{\nu_i(\mu)-2}, i=1,...,n$, а при $|\mu_i|=0$ положим $\nu_i(\mu)=0$.

Определим функционал $P_{2^m}(f;\mu)$ следующим образом:

$$P_{2^m}(f;\mu)=T_{2^m}(e^{2\pi i\mu x}\dot{f};\nu)=$$

$$=\sum_{\substack{k_1+...+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j(\mu)}}\frac{1}{2^m}\sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1}...\sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\mathrm{sgn}(k_j-\nu_j(\mu)))}\times f(\frac{r_1}{2^{k_1}},...,\frac{r_n}{2^{k_n}})e^{2\pi i\sum_{i=1}^n\mu_i\frac{r_i}{2^{k_i}}}.$$

Этот функционал является конечной линейной комбинацией значений функции f, а коэффициенты по абсолютной величине принимают значения $\frac{1}{2^m}$.

Определим множество

$$\Delta_m=\bigcup_{\substack{k_1+...+k_n=m\\ k_j\geqslant 2}}Q_k,\quad \text{где}\quad Q_k=\{r\in\mathbb{Z}^n:|r_i|<2^{k_i-3}, i=1,...,n\}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $f(x)=\sum_{\mu\in\Delta_m}\hat{f}(x)e^{2\pi i\mu x}$, тогда функционал $P_{2^m}(f;\mu)$ точно восстанавливает коэффициенты полинома, т.е.*

$$\hat{f}(\mu)=P_{2^m}(f;\mu).$$

Доказательство. Согласно теореме 1

$$P_{2^m}(f;\mu)=\hat{f}(\mu_1,...,\mu_n)+\sum_{\substack{k_1+...+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\mathrm{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}}\hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+\mathrm{sgn}(k_1-\nu_1))+\mu_1,...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\mathrm{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1},r_n2^{k_n}+\mu_n)+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{\substack{k_{l+1}+...+k_{n-1}\leqslant\\ m-\nu_1-...-\nu_{l-1}-\nu_n\\ <k_l+...+k_{n-1}}}(-1)^{\sum_{j=1+l}^{n-1}\mathrm{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times\sum_{r\in Z^{n-l}}\hat{f}(\mu_1,...,\mu_{l-1},2^{k_l-1}(2r_l+\mathrm{sgn}(k_l-\nu_l))+\mu_l,...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\mathrm{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1},\mu_n).$$

Индексы коэффициентов Фурье, входящих в суммы, кроме $(\mu_1,...,\mu_n)$ не лежат во множестве Δ_m и, следовательно, для полинома f будем иметь $P_{2^m}(f;\mu)=\hat{f}(\mu_1,...,\mu_n)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $-$ $f \in E^{\alpha}[0,1]^n$, *при* $\alpha > 1$. *Тогда*

$$|\hat{f}(\mu) - P_{2^m}(f;\mu)| \leqslant C\frac{(m - \sum_{j=1}^{n}\nu_j(\mu))^{n-1}}{2^{m\alpha}}\|f\|_{E^{\alpha}[0,1]^n}.$$

Доказательство. Пусть $f \in E^{\alpha}[0,1]^n$. Из теоремы 1 следует

$$|\hat{f}(\mu) - P_{2^m}(\hat{f}(\mu))| \leqslant |\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j\geqslant \nu_j}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}} \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1))+\mu_1, ...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1}, r_n2^{k_n}+\mu_n)| + |\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{\substack{k_{l+1}+\ldots+k_{n-1}\leqslant \\ m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n \\ <k_l+\ldots+k_{n-1}}} (-1)^{\sum_{j=1+l}^{n-1}\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j)}\times$$

$$\times \sum_{r\in Z^{n-l}} \hat{f}(\mu_1, ..., \mu_{l-1}, 2^{k_l-1}(2r_l+\operatorname{sgn}(k_l-\nu_l))+\mu_l, ...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1}, \mu_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j\geqslant \nu_j}} |\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}} \hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1))+\mu_1, ...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1}, r_n2^{k_n}+\mu_n)| +$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{s=m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n+1}^{\infty}\sum_{\substack{k_{l+1}+\ldots+k_{n-1}=s \\ k_j\geqslant\nu_j}} |\sum_{r\in Z^{n-l}} \hat{f}(\mu_1, ..., \mu_{l-1}, 2^{k_l-1}(2r_l+\operatorname{sgn}(k_l-\nu_l))+\mu_l, ...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1}, \mu_n)| = J_0 + \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{s=m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n+1}^{\infty} J_{ls}.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$J_0 \leqslant \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_j\geqslant \nu_j}}\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_{E^{\alpha}}}{\prod_{i=1}^{n-1}(2^{k_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}(k_i-\nu_i))+\mu_i))^{\alpha}(r_n2^{k_n}+\mu_n)^{\alpha}}.$$

Для сомножителя

$$\frac{1}{|2^{k_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}(k_i-\nu_i))+\mu_i|}$$

выделим два случая:

1). $k_i-\nu_i\neq 0$. Тогда, учитывая, что $2^{\nu_i-3}\leqslant|\mu_i|\leqslant 2^{\nu_i-2}, \quad k_i\geqslant\nu_i$, имеем

$$\frac{1}{|2^{k_i-1}(2r_i+1)+\mu_i|}\leqslant\frac{1}{|2^{k_i-1}(2r_i+1)|-2^{\nu_i-2}}\leqslant\frac{1}{2^{k_i-2}|2r_i+1|};$$

2) $k_i-\nu_i=0$. Имеем:

$$\frac{1}{|2^{k_i-1}2r_i+\mu_i|}\leqslant\frac{8}{2^{k_i}r_i}.$$

Таким образом, объединяя эти оценки, получим, что

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}(2^{k_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}(k_i-\nu_i))+\mu_i))^{\alpha}(r_n2^{k_n}+\mu_n)^{\alpha}}\leqslant\frac{C}{\prod_{i=1}^{n}(2^{k_i}\bar{r}_i)^{\alpha}}=\frac{C}{2^{m\alpha}\bar{r}^{\alpha}}.$$

Следовательно, учитывая, что $\alpha>1$, имеем

$$J_0\leqslant C_1\|f\|_{E^{\alpha}}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}\frac{1}{2^{m\alpha}}\sum_{r\in Z^n}\frac{1}{\bar{r}^{\alpha}}\leqslant C\frac{(m-\sum_{j=1}^{n}\nu_j(\mu))^{n-1}}{2^{m\alpha}}\|f\|_{E^{\alpha}_{[0,1]^n}};$$

$$J_{ls}\leqslant\|f\|_{E^{\alpha}}\sum_{\substack{k_l+\ldots+k_{n-1}=s\\ k_j\geqslant\nu_j}}\sum_{r\in Z^{n-l}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{l-1}\mu_i(\prod_{i=l}^{n-1}2^{k_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}(k_i-\nu_i)+\mu_i)\mu_n)^{\alpha}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{l-1}\mu_i(\prod_{i=l}^{n-1}2^{k_i-1}(2r_i+\operatorname{sgn}(k_i-\nu_i)+\mu_i)\mu_n)^{\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{(\prod_{i=1}^{l-1}2^{\nu_i-3}2^{\nu_n-3}\prod_{i=l}^{n-1}2^{k_i}r_i)^{\alpha}}=\frac{C_1}{(2^{\nu_1+\ldots+\nu_{l-1}+\nu_n-3(l-1)}\prod_{i=l}^{n-1}2^{k_i}r_i)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{C_1}{(2^{\nu_1+\ldots+\nu_{l-1}+\nu_n-3(l-1)})^{\alpha}2^{s\alpha}\prod_{i=l}^{n-1}r_i^{\alpha}}=\frac{C_2}{2^{m\alpha}2^{\alpha(s-(m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n))}\prod_{i=l}^{n-1}r_i^{\alpha}};$$

$$J_{ls}\leqslant C_2\frac{1}{2^{m\alpha}}\frac{(s-\sum_{j=l}^{n-1}\nu_j(\mu))^{n-l}}{2^{\alpha(s-(m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n))}}\|f\|_{E^{\alpha}}.$$

Тогда

$$\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{s=m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n+1}^{\infty}J_{ls}\leqslant\frac{C_2}{2^{m\alpha}}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{s=m-\nu_1-\ldots\nu_{l-1}-\nu_n+1}^{\infty}\frac{(s-\sum_{j=l}^{n-1}\nu_j(\mu))^{n-l}}{2^{\alpha(s-(m-\nu_1-\ldots-\nu_n))}}\|f\|_{E^{\alpha}}=$$

$$=\frac{C_3}{2^{m\alpha}}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(s+m-\nu_1-\ldots\nu_{l-1}-\nu_n)^{n-l}}{2^{\alpha s}}\|f\|_{E^{\alpha}}\leqslant\frac{C}{2^{m\alpha}}(m-\sum_{j=1}^{n}\nu_j(\mu))^{n-1}\|f\|_{E^{\alpha}}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\mu\in\mathbb{Z}^n$, G_m – ступенчатый гиперболический крест порядка m.

Для функции $f\in C[0,1]^n$ и мультипликатора $\lambda=\{\lambda_\mu\}_{\mu\in Z^n}$ определим оператор

$$F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)=\sum_{\mu\in G_m}\lambda_\mu P_{2^m}(f;\mu)e^{2\pi i\mu x}=$$

$$=\sum_{\mu\in G_m}\lambda_\mu\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_j\geqslant\nu_j}}\frac{1}{2^m}\sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1}\ldots\sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn}(k_j-\nu_j))}f(\frac{r_1}{2^{k_1}},\ldots,\frac{r_n}{2^{k_n}})e^{2\pi i\mu(\frac{r}{2^k}+x)}.$$

Теорема 4. *Пусть* $2\leqslant q\leqslant\infty$, $\alpha>1$, $f\in E^{\alpha}[0,1]^n$, G_m*- ступенчатый гиперболический крест порядка* m*, последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{\mu\in Z^n}(\lambda_\mu\mu^{-\alpha})^{q'}<\infty.$$

Тогда

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant C\left[\frac{1}{2^{\alpha m}}\left(\sum_{s=0}^{m}(m-s)^{(n-1)q'}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=s}\sum_{r_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{r_n=0}^{2^{\nu_n}-1}|\lambda_r|^{q'}\right)^{1/q'}\right.+$$

$$+\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}(\lambda_\mu\mu^{-\alpha})^{q'}\right)^{1/q'}\Bigg]\|f\|_{E^\alpha}.$$

Доказательство. Учитывая, что $2\leqslant q<\infty$, воспользуемся неравенством Хаусдорфа-Юнга

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant\|\sum_{\mu\in G_m}\lambda_\mu(\hat f(\mu)-P_{2^m}(f,\mu))e^{i\mu x}\|_{L_q}+\|\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}\lambda_\mu\hat f(\mu)e^{i\mu x}\|_{L_q}\leqslant$$

$$(\sum_{\mu\in G_m}(\lambda_\mu(\hat f(\mu)-P_{2^m}(f,\mu)))^{q'})^{\frac{1}{q'}}+(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}(\lambda_\mu\hat f(\mu))^{q'})^{\frac{1}{q'}}=J_1+J_2.$$

Для оценки слагаемого J_1 применим утверждение теоремы 3:

$$J_1=(\sum_{\mu\in G_m}(\lambda_\mu(\hat f(\mu)-P_{2^m}(f,\mu)))^{q'})^{\frac{1}{q'}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{\alpha m}}\left(\sum_{s=0}^{m}(m-s)^{(n-1)q'}\sum_{\nu_1+...+\nu_n=s}\sum_{r_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...\sum_{r_n=0}^{2^{\nu_n}-1}|\lambda_r|^{q'}\right)^{1/q'}\|f\|_{E^\alpha[0,1]^n}.$$

$$J_2=\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}\left(\lambda_\mu\hat f(\mu)\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\leqslant\sup_{k\in Z^n}\bar k^\alpha\hat f(k)\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}\left(\lambda_\mu\bar\mu^{-\alpha}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=\|f\|_{E^\alpha[0,1]^n}\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}\left(\lambda_\mu\bar\mu^{-\alpha}\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Следствие 1. *Пусть* $2\leqslant q\leqslant\infty,\ \ \alpha>1,\ \ \beta\geqslant0$, *последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ *удовлетворяет условию* $|\lambda_k|\leqslant M|k|^{-\beta},\ \ k\in Z^n\setminus\{0\}$.

Тогда

при $q'\beta<n$

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant C_{q,\alpha}\frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+\frac{\beta}{n})}}{M^{(\alpha+\frac{\beta}{n}-\frac{1}{q'})}}\|f\|_{E^\alpha},$$

при $q'\beta=n$

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant C_{q,\alpha}\frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+1)+\beta}}{M^\alpha}\|f\|_{E^\alpha},$$

при $q'\beta>n$

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant C_{q,\alpha}\frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha+1)}}{M^\alpha}\|f\|_{E^\alpha},$$

где M *– количество узлов в* $F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)$.

Теорема 5. *Пусть* $1<p\leqslant2\leqslant q\leqslant\infty,\ \ f\in W_p^\alpha[0,1]^n,\ \ \alpha>\frac{1}{p},\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ G_m-$ *ступенчатый гиперболический крест, последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ *такова, что ряд*

$$\sum_{\mu\in Z^n}\left(\lambda_\mu\bar\mu^{-\alpha}\right)^r$$

сходится. Тогда имеет место оценка:

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant C_{q,\alpha}\Bigg[\frac{1}{2^{\alpha m}}\left(\sum_{s=0}^{m}(m-s)^{\frac{(n-1)r}{p}}\sum_{\nu_1+...+\nu_n=s}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...\sum_{k_n=0}^{2^{\nu_n}-1}|\lambda_k|^r\right)^{1/r}+$$

$$+\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}(\lambda_\mu\mu^{-\alpha})^r\right)^{1/r}\Bigg]\|f\|_{W_p^\alpha}.$$

Доказательство. Пусть

$$S_{G_m}(f;\cdot)=\sum_{k\in G_m}\lambda_k\hat{f}(x)e^{2\pi ikx}$$

– частичная сумма ряда Фурье функции f. Воспользуемся неравенством Хаусдорфа-Юнга

$$\|S_{G_m}(f;.)-F_{2^m}(f,\lambda;.)\|_{L_q}=\|\sum_{\mu\in G_m}\lambda_\mu(\hat{f}(\mu)-P_{2^m}(f;\mu))e^{2\pi i\mu x}\|_{L_q}\leqslant$$

$$\leqslant(\sum_{\mu\in G_m}|\lambda_\mu(\hat{f}(\mu)-P_{2^m}(f;\mu))|^{q'})^{\frac{1}{q'}}.$$

Пусть

$$\sum_{k\in M_\mu}|\hat{f}(k)|=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\k_j\geqslant\nu_j}}\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in Z\setminus\{0\}}|\hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}(k_1-\nu_1))+\mu_1,...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1},r_n2^{k_n}+\mu_n)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{\substack{k_{l+1}+\ldots+k_{n-1}\leqslant\\m-\nu_1-\ldots-\nu_{l-1}-\nu_n\\<k_l+\ldots+k_{n-1}}}\sum_{r\in Z^{n-l}}|\hat{f}(\mu_1,...,\mu_{l-1},2^{k_l-1}(2r_l+\operatorname{sgn}(k_l-\nu_l))+\mu_l,...,$$

$$2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}(k_{n-1}-\nu_{n-1}))+\mu_{n-1},\mu_n)|.$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера и используя $\alpha>1/p$, получим

$$|\hat{f}(\mu)-P_{2^m}(f;\mu)|\leqslant\left(\sum_{k\in M_\mu}|k^\alpha\hat{f}(k)|^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{k\in M_\mu}|k^{-\alpha}|^p\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{(m-\sum_{j=1}^n\nu_j(\mu))^{(n-1)/p}}{2^{m\alpha}}\left(\sum_{k\in M_\mu}|k^\alpha\hat{f}(k)|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Воспользуемся неравенством Хаусдорфа-Юнга, получим

$$\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-F_{2^m}(f,\lambda;.)\|_{L_q}\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{2^{m\alpha}}\|f\|_{W_p^\alpha}\left(\sum_{s=0}^m(m-s)^{\frac{(n-1)r}{p}}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=s}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{2^{\nu_n}-1}|\lambda_k|^r\right)^{1/r},$$

$$\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-f_\lambda\|_{L_q}\leqslant\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}|\lambda_\mu\hat{f}(\mu)|^{q'}\right)^{1/q'}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}|\lambda_\mu\bar{\mu}^{-\alpha}|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}|\bar{\mu}^\alpha\hat{f}(\mu)|^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant C\left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}|\lambda_\mu\bar{\mu}^{-\alpha}|^r\right)^{1/r}\|f\|_{W_p^\alpha}.$$

Доказательство теоремы следует из следующего соотношения

$$\|f_\lambda-F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q}\leqslant\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-f_\lambda\|_{L_q}+\|S_{G_m}(f_\lambda;.)-F_{2^m}(f,\lambda;.)\|_{L_q}.$$

Следствие 2. *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, $f \in W_p^{\alpha}[0,1]^n$, $\alpha > \frac{1}{p}, \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \beta \geqslant 0$, *последовательность* $\{\lambda_k\}_{k \in Z^n}$ *удовлетворяет условию* $|\lambda_k| \leqslant M|k|^{-\beta}$, $k \in Z^n \setminus \{0\}$.

Тогда

при $r\beta < n$

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f, \lambda; \cdot)\|_{L_q} \leqslant C \frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha + \frac{\beta}{n})}}{M^{(\alpha + \frac{\beta}{n} - \frac{1}{r})}} \|f\|_{W_p^{\alpha}},$$

при $r\beta = n$

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f, \lambda; \cdot)\|_{L_q} \leqslant C \frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha + \frac{1}{p}) + \beta}}{M^{\alpha}} \|f\|_{W_p^{\alpha}},$$

при $r\beta > n$

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f, \lambda; \cdot)\|_{L_q} \leqslant C \frac{(\ln M)^{(n-1)(\alpha + \frac{1}{p})}}{M^{\alpha}} \|f\|_{W_p^{\alpha}},$$

где M *– количество узлов в* $F_{2^m}(f, \lambda; x)$.

Для классических пространств Соболева задача приближенного вычисления мультипликативных преобразований была рассмотрена в работе [16].

Цитированная литература

1. **Коробов Н. М.** Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. **Hlawka E.** // Monatsh. Math. 1962. B.66. Z.140—151.
3. Van **Wang Yuan** //Contemporarry Mathemanics. 1988. № 77. C.63—82.
4. **Смоляк С. А.** // ДАН СССР. 1960. Т.131, № 5. С.1028—1031.
5. **Смоляк С. А.** // ДАН СССР. 1963. Т.148, № 5. С.1042—1045.
6. **Темляков В. Н.** // Ann Math. 1986. T.12, № 4. C. 287—305.
7. **Темляков В. Н.** // Мат.сб. 1985. Т. 128, № 2. С.256—268.
8. **Темляков В. Н.** // ДАН СССР. 1985. Т. 280, № 6. С.1310—1313.
9. **Темиргалиев Н. Т.** // Вестник евразийского университета. 1997. № 3. С. 86—140.
10. **Шерниязов К. Е.** Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределением начальных температур из классов. Канд. дис. Алматы, 1998.
11. **Утесов А. Б.** Задачи восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решений уравнения теплопроводности. Канд. дис. Алматы, 2001.
12. **Ташатов Н. Н.** Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW. Канд. дис. Караганда, 2001.
13. **Шангереев Е. И.** О восстановлении решений волнового уравнения. Канд. дис. Караганда, 2001.
14. **Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т.** // Успехи матем. наук. 2000. Т.55, вып.6. С.153—154.
15. **Нурсултанов Е. Д.** // Мат. заметки. 1998. Т.63, вып.2. С.235—248.
16. **Каримов Д. С., Тлеуханова Н. Т.** //Труды межд. конф. "Современные проблемы математики. Астана, 2002. С. 24—27.

Поступила в редакцию 7.11.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 89 — 94*

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА НА КОЭФФИЦИЕНТ ПРЕЛОМЛЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Е. И. Уразаков

Институт математики МОН РК
480100 Алматы, ул.Пушкина, 125, erlik@math.kz

Рассмотрено преломление звука, падающего из жидкости па шероховатую поверхность изотропного твердого тела. При углах падения, соответствующих возбуждению поверхностных рэлеевских волн, у коэффициента прохождения имеется острый максимум, связанный с рассеянием рэлеевских волн в объемные на поверхностных шероховатостях. Исследована форма максимума в зависимости от звуковых импедансов сред и параметров шероховатости.

1. Введение

Наблюдение ультразвука, отраженного поверхностью твердого тела,- удобный метод исследования самой поверхности [1]. В нашей предыдущей работе [2], так же как и в эксперименте [1], рассматривалось влияние поверхностной шероховатости на звуковую волну, отраженную под углом, равным углу падения. Оказалось, что на кривой зависимости коэффициента отражения от угла падения имеется острый минимум, обусловленный возбуждением поверхностных рэлеевских волн. Глубина и ширина минимума весьма чувствительны к состоянию поверхности твердого тела. В данной работе исследуется влияние шероховатостей на прошедшую волну. Мы увидим, что при некоторых условиях волна, падающая из жидкости на поверхность твердого тела, проходит (с коэффициентом порядка единицы) благодаря поверхностным шероховатостям. Механизм аномального прохождения заключается в следующем. Как известно, прохождение звуковой волны через плоскую границу раздела жидкость - твердое тело возможно лишь в докритической области углов падения. Коэффициенты прохождения продольной D_l и поперечной D_t волн определяются при этом следующими выражениями [1]:

$$D_l = |\gamma(k)| \left| \frac{2c_t^2\omega^{-2}\left(k_t^2 - k^2\right)}{c_t^4\omega^{-4}\Delta(k) + i\gamma(k)} \right|^2, D_t = k_t |k_l\gamma(k)| \left| \frac{4c_t^2\omega^{-2}k}{c_t^4\omega^{-4}\Delta(k) + i\gamma(k)} \right|^2, \qquad (1)$$

где

$$\Delta(k) = \left(k_t^2 - k^2\right)^2 + 4k^2k_tk_l, \gamma(k) = \rho k_l / i\rho_T k_1$$

$$k_{t,l} = \left(\omega^2/c_{t,l}^2 - k^2\right)^{1/2}, k_{t,l} = \left(\omega^2/c^2 - k^2\right)^{1/2},$$

Keywords: *refraction of elastic waves*
2000 Mathematics Subject Classification: 74H10

ω – частота звука, $\mathbf{k}$ – параллельная поверхности компонента волнового вектора; c_t, c_l, c – скорости поперечного звука, а также продольного в твердом теле и жидкости; ρ и ρ_T – плотности жидкости и твердого тела. В докритической области коэффициенты прохождения (1) малы в меру отношения $\gamma \sim \rho c/\rho_T c_t$ звуковых импедансов жидкости и твердого тела. Учет шероховатости, проведенный Адаменко и Фуксом [3] в предположении, что в твердом теле могут распространяться лишь продольные волны, не меняет этой оценки. В закритической области, когда k_l и k_t мнимы, и в твердом теле не могут распространяться объемные волны, коэффициент отражения от идеальной поверхности обращается в единицу. Это утверждение справедливо в частности и для угла падения, соответствующего возбуждению поверхностных рэлеевских волн. Данный угол определяется из условия непрерывности тангенциальной компоненты волнового вектора

$$k = (\omega/c)\sin\Theta = \omega/c_R \tag{2}$$

а спектр рэлеевских волн, т. е. их скорость c_R, находится из условия

$$\Delta\left(k\right) = 0 \tag{3}$$

Однако рэлеевская волна на шероховатой поверхности может рассеиваться в объемную продольную или поперечную с сохранением частоты, но с изменением тангенциальной компоненты волнового вектора. Это изменение $\mathbf{k}$ определяется характерным периодом шероховатости d^{-1}, называемым обычно корреляционным радиусом или масштабным размером, Рассеяние рэлеевской волны в объемную становится возможным, если характерная передача импульса d^{-1} превышает величину "щели"$\omega/c_R{-}\omega/c_t$. Вероятность рассеяния и следовательно коэффициент прохождения звука, падающего под рэлеевским углом (2), определяется величиной шероховатости. Если средний квадрат шероховатости обозначить a^2 то в качестве относительной шероховатости следует принять величину ak. Примечательно и это будет показано в дальнейшем, что коэффициент прохождения достигает значения порядка единицы при относительно малых шероховатостях $(ak)^2 \sim \gamma$, если $d^{-1} \sim k$. Объясняется это тем что в случае плоской поверхности виртуальный рэлеевский полюс (см. [1]) находится на близком расстоянии γ, и уже малой шероховатости достаточно для того, чтобы он стал реальным. Отметим, что в работе Зиновьевой [4] сообщается о наблюдении максимума поглощения звука, падающего под рэлеевским углом. Появление максимума связывается там в [4] с механизмом поглощения, предложенным Андреевым [5] и учитывающим электронную вязкость.

2. Плотность энергии в прошедшей волне

Нас интересует нормальная компонента плотности потока звуковой энергии [2]:

$$Q_j = -\rho_T\left[2c_t^2\dot{u}_i u_{ij} + \left(c_l^2 - 2c_t^2\right)\dot{u}_j u_{ii}\right]\ , \tag{4}$$

где u_i – компоненты смещения, u_{ij} – тензор деформации, точкой обозначена производная по времени. Выберем оси координат следующим образом: x – по нормали к поверхности, $\mathbf{s}$ – двумерный вектор в плоскости поверхности. Поскольку частота сохраняется при рассеянии на шероховатостях, мы можем ограничиться монохроматической волной, которую разложим в интеграл Фурье по $\mathbf{s}$. Зависимость смещения от x определяется уравнениями теории упругости, решение которых запишем в виде:

$$u_i\left(x\mathbf{k}\right) = e_i\left(\beta\mathbf{k}\right)A_\beta\left(\mathbf{k}\right)\exp\left(ik_\beta x\right) \tag{5}$$

Для случая твердого тела суммирование в (5) проводится по двум поперечным A_{t1}, A_{t2} и одной продольной A_l поляризациям, для жидкости в (5) присутствуют два слагаемых - отраженная A_1 и падающая A_0 волны; определение k_γ дано вслед за формулой (1), векторы поляризации $\mathbf{e}\left(\beta\mathbf{k}\right)$ приведены в предыдущей работе [2]. Амплитуды прохождения и отражения находятся из граничных условий, которые должны быть выполнены на шероховатой границе раздела жидкость - твердое тело. Уравнение этой границы запишем в виде

$$x = \xi(\mathbf{s}) \ .$$

Как отмечено во введении, наиболее интересен случай, когда шероховатость мала по сравнению с длиной волны звука. Поскольку в граничные условия входит вектор нормали к поверхности, определяемый производными от $\xi(\mathbf{s})$ по $\mathbf{s}$, то будем считать их также малыми, имея в виду использование метода малых возмущений. Разлагая граничные условия в ряд по ξ и ограничиваясь членами первого порядка, запишем их в виде (см. [2])

$$H_{ij}(k)\, A_j(k) + \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \xi(\mathbf{k}-\mathbf{q})\, V_{ij}(kq)\, A_j(q) = \tag{6}$$

$$= H_{i0}(k)\, A_0(k) + \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \xi(\mathbf{k}-\mathbf{q})\, V_{i0}(kq)\, A_0(q) \ .$$

Индекс i, принимающий четыре значения, нумерует уравнения (6), причем первое представляет собой условие непрерывности нормальных компонент смещения, а три остальных - непрерывность поверхностных сил: $\xi(\mathbf{k})$ - фурье-компонента случайной функции $\xi(\mathbf{s})$ матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$ приведены ранее [2]. Подставляя смещения (5) в (4) и усредняя по координате $\mathbf{s}$ на больших расстояниях S, величина которого не войдет в окончательный результат, находим плотность потока энергии в твердом теле:

$$Q_x = \frac{\rho_T c_t^2 \omega}{2S} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} T_{\gamma\sigma}(q)\, A_\gamma(q)\, A_\sigma^*(q) \exp\left[i\left(q_\gamma - q_\sigma^*\right) x\right] , \tag{7}$$

где T – билинейная по векторам поляризации матрица, а экспоненциальный фактор ограничивает интегрирование по векторам прошедших волн докритической областью, в которой $q_{t,l}$ вещественны (вклад закритической области затухает на больших расстояниях от поверхности). Отметим, что в (7) существует матричный элемент, недиагональный по двум поперечным поляризациям.

3. Усреднение по шероховатостям

Для определения коэффициента прохождения свяжем амплитуды прошедших волн с амплитудой падающей, используя граничные условия (6), которые представляют собой интегральные уравнения. Будем решать их итерациями по ξ. Нас интересует случай, когда волновой вектор падающей волны лежит в окрестности рэлеевского полюса, а прошедшей - в докритической области. Такие переходы возникают по крайней мере в первом порядке по $\xi(\mathbf{k}-\mathbf{q})$. Однако член первого порядка в коэффициенте прохождения отсутствует, поскольку мы считаем поверхность плоской в среднем, что сводится к условию $\langle \xi \rangle = 0$.

Главное слагаемое второго порядка изображено на рис. 1.a.

Пунктиром показана фурье-компонента коррелятора $\omega(\mathbf{s}-\mathbf{s}') = \langle \xi(s)\, \xi(s') \rangle$. Сплошным линиям отвечают матрицы $\mathbf{H}_{ij}^{-1}$, вершинам соответствуют $\mathbf{V}_{ij}$ перечеркнутым концам - множители $\mathbf{H}_{i0}\mathbf{A}_0$. На сплошной линии, оканчивающейся A_0^* все величины комплексно сопряжены. По вершинным матричным индексам проводится суммирование, по внутренним импульсам - интегрирование. Изображенная на рис. 1.a, диаграмма дает существенный вклад, если волновой вектор $\mathbf{k}$ падающей волны удовлетворяет условию возбуждения рэлеевской волны (2). В этом случае знаменатель обратной матрицы $\mathbf{H}^{-1}(k)$, пропорциональный знаменателю выражений (1), мал, ибо $\Delta(k) = 0$ и соответствующее значение

$$\gamma = \frac{\rho c}{\rho_T c_R} \left(\frac{1 - c_R^2/c_l^2}{1 - c^2/c_R^2} \right)^{1/2} \sim \frac{\rho c}{\rho_T c_t} \ll 1 \ .$$

Влияние шероховатости, связанное с V_{i0} в правой части уравнений (6), а также с опущенными членами второго порядка по ξ в (6), мало по сравнению с диаграммой рис. 1.а, так как они не содержат малого знаменателя матрицы $\mathbf{H}^{-1}(k)$.

Как это обычно бывает в подобного рода задачах, члены более высокого порядка по ξ содержат дополнительные множители $\mathbf{H}^{-1}$. Это приводит, в частности, к тому, что свободные гриновские функции $\mathbf{H}^{-1}$ должны быть заменены полными (с учетом шероховатости):

$$\mathrm{H}^{-1}(k) = \left[\mathbf{H}(k) - \int \omega(\mathbf{k}-\mathbf{q})\, V(kq)\, \mathbf{H}^{-1}(q)\, V(qk)\, \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\right]^{-1} . \tag{8}$$

$$H^{-1}_{(k)} H^{-1*}_{(k)} \int V^{(1)}_{(k,q)} H^{-1}_{(q)} A_{(q)} V^{(1)}_{(k,q)} H^{-1*}_{(q)} A^*_{(q)} \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tag{9}$$

Формула (9) отражает суть диаграммы рис. 1а.

Влияние шероховатости наиболее существенно вблизи рэлеевского полюса, и матрицу H^{-1} можно представить в виде:

$$H^{-1}_{ij}(k) = \frac{h_{ij}(k)}{c_t^4 \omega^{-4} \Delta(k) + i(\tau+\gamma)},$$

где миноры h не зависят от ξ,

$$\tau = -\mathrm{Im} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \omega(k-q) \frac{f(kq)}{\Delta(q) + i\gamma\omega^4 c_t^{-4}}$$

и функция f приведена в предыдущей работе [2].

Для плоской монохроматической падающей волны с волновым вектором $k_x = k_1, \mathbf{k}_s = \mathbf{k}$ рисунку 1.а соответствует следующий коэффициент прохождения:

$$D = \frac{\rho_T c_t^2 / \rho\omega^2 k_1}{c_t^8 \omega^{-8} \Delta^2(k) + (\tau+\gamma)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \omega(\mathbf{q}-\mathbf{k}) T_{\beta\sigma}(q)\, a_\beta(q)\, a^*_\sigma(q) \ . \tag{10}$$

где $a_\beta(q) = h_{\beta i}(q)\, V_{ij}(qk)\, h_{jr}(k)\, H_{k0}(k)\, w^4 c_t^{-4} \big/ \Delta(q)$, причем в используемой нами нормировке поток энергии в падающей волне $Q_x^0 = \rho\omega^3 k_1 |A_0|^2 \Big/ 2$.

Используя явный вид входящих сюда матриц, получаем

$$D = \frac{\gamma\mu}{c_t^8 \omega^{-8} \Delta^2(k) + (\tau+\gamma)^2},$$

$$\mu=\sum_{\beta=l,t}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\omega\left(\mathbf{q}-\mathbf{k}\right)\varphi_\beta\left(qk\right), \tag{11}$$

где суммирование ведется по продольной и поперечной поляризациям, интегрирование - по соответствующим докритическим областям,

$$\varphi_l\left(qk\right)=\frac{4c_t^4q_l}{\omega^4\left|k_l\right|\left|\Delta\left(q\right)\right|^2}\left|\frac{\omega^4}{c_t^4}k_l\left(q^2-q_t^2\right)+q_t\left(k^2-k_t^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}\alpha\mathbf{kq}-2\beta q^2\right)\right|^2 ,$$

$$\varphi_t\left(qk\right)=\frac{4c_t^6q_l}{\omega^4\left|k_l\right|\left|\Delta\left(q\right)\right|^2}\left\{q^2\frac{\omega^2}{c_t^2}\left|\beta\left(k_t^2-k^2\right)\left(q_t^2-q^2\right)+2k_lq_l\omega^4c_t^{-4}\right|^2+\right.$$

$$+2\frac{\omega^2}{c_t^2}\alpha\mathbf{kq}\left(q_t^2-q^2\right)\left(k^2-k_t^2+2k_tk_l\right)\left[\beta\left(k_t^2-k^2\right)\left(q_t^2-q^2\right)+2\frac{\omega^4}{c_t^4}\mathrm{Re}k_lq_l\right]+$$

$$+\alpha^2\left(k^2-k_t^2+2k_tk_l\right)^2\left(k_yq_z-k_zq_y\right)^2\left[q^2q_t^{-2}\left|q^2-q_t^2+4q_tq_l\right|^2+\right.$$

$$\left.\left.+2\left(q^2-q_t^2+4\mathrm{Re}q_tq_l\right)\right]+\alpha^2\left(q_t^2-q^2\right)\left(k^2-k_t^2+2k_tk_l\right)^2\left[k^2q_t^2+\left(\mathbf{kq}\right)^2\right]\right\} ,$$

$$\alpha=\omega^2/c_t^2-2\mathbf{kq},\beta=\omega^2/c_t^2-2\omega^2/c_l^2 .$$

Отметим, что в окрестности интересующего нас рэлеевского угла k_t и k_l мнимы, в слагаемом для продольной рассеянной волны q_t и q_l вещественны, в слагаемом для поперечной волны q_t вещественно, а q_l может быть как вещественно, так и мнимо. Наряду с заменой свободных гриновских функций полными необходимо просуммировать все диаграммы лестничного типа, аналогичные изображенной на рис. 1.б. Такое суммирование осуществляется уравнением

$$\mathbf{Y}_{ij}\left(k\right)=\mathbf{H}_{i0}\left(k\right)\mathbf{H}_{j0}^*\left(k\right)+ \tag{12}$$

$$+\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\omega\left(\mathbf{k}-\mathbf{q}\right)V_{iR}\left(kq\right)V_{jl}^*\left(kq\right)H_{Rm}^{-1}\left(q\right)H_{\mathrm{ln}}^{*-1}\left(q\right)\mathbf{Y}_{mn}\left(q\right) .$$

Полный коэффициент прохождения определяется формулой (9), в которой $\mathbf{H}_{i0}\mathbf{H}_{j0}^*$ надо заменить матрицей $\mathbf{Y}_{ij}\left(k\right)$ и проинтегрировать по $\mathbf{k}$.

4. Обсуждение результата

Коэффициент прохождения (11) имеет резкий максимум, если падающая волна распространяется под углом, соответствующим условию возбуждения рэлеевских волн $\Delta\left(k\right)=0$. При этом глубина максимума определяется соотношением между величиной шероховатости и отношением звуковых импедансов γ. Шероховатость учитывается в (11) как в знаменателе посредством τ, так и в числителе. Оценим величину числителя. На рис. 2 изображена плоскость векторов $\mathbf{q}$ преломленных волн.

Кругами радиуса ω/c_l и ω/c_t показаны области, соответствующие распространению в твердом теле объемных волн. Рэлеевским волнам соответствует пунктирная окружность. Кругом радиуса d^{-1} показана область, где отлична от нуля фурье-компонента коррелятора шероховатостей $\omega\left(\mathbf{s}-\mathbf{s}'\right)$. Значение $\omega\left(\mathbf{s}-\mathbf{s}'\right)$ при $\mathbf{s}=\mathbf{s}'$ обозначим a^2, a – имеет смысл средней высоты шероховатости.

Пусть волновой вектор падающей волны соответствует максимуму коэффициента прохождения. Тогда центр круга радиуса d^{-1} лежит на рэлеевской окружности. Если d^{-1} меньше щели $\omega/c_R-\omega/c_t$, отделяющей поверхностные колебания от объемных, то коэффициент прохождения обращается в нуль - шероховатость слишком полога, для того чтобы рэлеевская волна могла рассеяться в докритическую область.

Если перекрытие $p=d^{-1}-\left(\omega/c_R-\omega/c_t\right)$ кругов радиуса d^{-1} и ω/c_t мало, то возбужденная рэлеевская волна рассеивается в поперечную объемную, распространяющуюся в основном в том же направлении, что и исходная рэлеевская. Оценивая интеграл по q, получаем

$$\mu\sim\left(ap\right)^2\left(kd\right)^{3/2} , 0<p<<\omega/c_t . \tag{13}$$

При дальнейшем увеличении p появляются и продольные объемные волны, и для предельно диффузной, поверхности, когда $d^{-1} \geq \omega/c_t$ находим

$$\mu \sim \left(adk^2\right)^2, d^{-1} \geq \omega/c_t\ . \tag{14}$$

В области, где справедлива оценка (14), $\mu \sim \tau$ (см. формулу (20) работы [2]). Поэтому коэффициент прохождения (11) как функция направления распространения падающей волны имеет острый максимум с высотой порядка

$$D_{\max} \sim \gamma\tau \Big/ (\gamma+\tau)^2$$

и угловой шириной

$$|\Theta - \Theta_R|/\Theta_R \sim \gamma + \tau\ .$$

Отсюда видно, что максимальное значение коэффициента прохождения оказывается порядка единицы при относительно малых шероховатостях, когда $\tau \sim \gamma$. Поскольку ширина этого максимума пропорциональна γ, вклад рэлеевского максимума в интегральный по углу падения коэффициент прохождения для случая изотропного падающего излучения пропорциональна γ, и оказывается того же порядка $\gamma c^2 \big/ c_t^2$, что и вклад докритической области; множитель $c^2 \big/ c_t^2$ – мера телесного угла, определяющего докритическую область.

Таким образом, эта интегральная оценка совпадает с полученной Халатниковым [6] для рэлеевского вклада в сопротивление Капицы. По измерениям Зиновьевой [4] на рэлеевский максимум приходится 50*докритического поглощения.*

При малом перекрытии, когда справедлива оценка (13), коэффициент прохождения (11), вычисленный во втором порядке по ξ, может оказаться больше единицы, как это видно из предельных выражений для τ (см. (18), (19) из [2]). В этом случае надо рассмотреть уравнение (12) для $\mathbf{Y}$. Интегральное слагаемое в нем порядка $\mu/(\gamma+\tau)$. Тогда для коэффициента прохождения по порядку величины получим выражение (11), в котором вместо μ появляется наименьшее из μ и $\gamma+\tau$.

Литература

1. *Rollins F. R.* Critical Ultrasonic Reflectivity-A neglected Tool for Material Evalution // Mat. Eval., 1966, vol 24, c.683.

2. *Уразаков Е.И., Фальковский Л.А.* О влиянии поверхностных волн на отражение звука от шероховатой поверхности // ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1175.

3 *Адаменко И.М., Фукс И. М.* Шероховатость и тепловое сопротивление границы твердое тело - жидкий гелий // ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 2071.

4. *Зиновьева К. Н.* Резонансное поглощение звука поверхностью метала // Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 294.

5. *Андреев А.Ф.* Влияние проводящих электронов на температурный скачок Капицы // ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1535.

6. *Халатников И. М.* Теплообмен между твердым телом и гелием II // ЖЭТФ, 1952, т. 22, с. 687.

Поступила в редакцию 7.04.2002г.

Математический журнал. *Алматы. 2002. Том 2. № 3. С. 95 — 98*

ХРОНИКА

СЕМИНАР ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ МОН РК

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных на семинаре в сентябре 2002г.

Б. Л. Байдельдинов (Алматы) "Трехвесовое неравенство для модуля непрерывности"(25 сентября 2002 г.).

Используем следующие обозначения:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in R^n,\ R_+ = (0, \infty)$$

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}) f(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m f(x+mh)$$

— разность k – го порядка с шагом $h \in R^n$, $k = 2, 3, ...$ C_k^m – биномиальные коэффициенты,

$$\Delta_{h,\Omega}^k f(x) = \begin{cases} \Delta_h^k f(x)\,, & \text{если } [x, x+kh] \subset \Omega \\ 0 & \text{в противном случае}\,, \end{cases}$$

где Ω – открытая область в R^n,

$\omega_{p,\Omega}^k(f,t) = \sup\limits_{|h| \le t} \|\Delta_{h,\Omega}^k f\|_{L_p(\Omega)}$ – k – ый модуль непрерывности в $L_p(\Omega)$,

$B_r = \{y \in R^n : |y| < r\}$; $\omega : (0, r] \to R_+$, $B_r \to R_+$, $\eta : B_r \to R_+$ – измеримые функции, $1 \le p \le q < \infty$, $k > n/p$.

Получены достаточные условия на функции ω, υ, η, при которых для любой функции $f \in L_1^{loc}(B_r)$ справедлива оценка:

$$\left(\int\limits_{B_r} |f|^q \upsilon dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left[\int\limits_{B_r} |f|^p \eta dx + \int\limits_0^r \omega_{p,B_r}^k (f; s)^p \omega(s) ds \right]^{\frac{1}{p}}.$$

А. В. Борзых (Алматы) "Многомерные уравнения Кортевега де Фриза и их билинейные формы"(25 сентября 2002 г.).

Получены многомерные модельные уравнения Кортевега де Фриза:

(2+1)-КдФ:

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xxy} + 2(\psi^2)_x + (VU)_x = 0, \\ \quad V_y = \psi_x, \qquad\qquad U_x = \psi_y, \end{cases}$$

(3+1)-КдФ:

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xyz} + 2(\psi U)_x + (VW)_x = 0 \\ U_x = V_y = \psi_z, \qquad\qquad W_x = \psi_y, \end{cases}$$

(4+1)-КдФ:

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{z_1xy} + \psi_{z_2xy} + 2(\psi U_1 + \psi U_2)_x + (V_1 W + V_2 W)_x = 0, \\ \quad (U_j)_x = (V_j)_y = \psi_{z_j}, \qquad W_x = \psi_y, \qquad j = 1, 2, \end{cases}$$

(N+1)-КдФ:

$$\begin{cases} \psi_t + \sum\limits_{j=2}^{N-1} \psi_{x_0 x_1 x_j} + 2(\psi \sum\limits_{j=2}^{N-1} U_{j-1})_{x_0} + (W \sum\limits_{j=2}^{N-1} V_{j-1})_{x_0} = 0, \\ (U_{j-i})_{x_0} = (V_{j-1})_{x_1} = \psi_{x_j}, \qquad W_{x_0} = \psi_{x_1}, \qquad j = \overline{2, N-1}. \end{cases}$$

Для этих моделей построены билинейные формы:
для (2+1)-КдФ:

$$(D_y D_t + D_y^2 D_x^2)(\phi \cdot \phi) = 0,$$

для (3+1)-КдФ:

$$(D_y D_t + D_y^2 D_x D_z)(\phi \cdot \phi) = 0,$$

для (4+1)-КдФ:

$$(D_y D_t + D_y^2 D_x D_{z_1} + D_y^2 D_x D_{z_2})(\phi \cdot \phi) = 0,$$

для (N+1)-КдФ:

$$(D_{x_1} D_t + D_{x_1}^2 D_{x_0} \sum_{j=2}^{N-1} D_{x_j})(\phi \cdot \phi) = 0.$$

Для многомерных модельных уравнений Кортевега де Фриза найдены 1-, 2- и n-солитонные решения в явном виде.

К. М. Идирисов (Алматы) "Внутренняя обратная краевая задача по параметру x для уравнения Карлемана-Векуа"(25 сентября 2002 г.).

Рассматривается внутренняя обратная краевая задача по параметру x для уравнения Карлемана – Векуа

$$w_{\overline{z}} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами

$$A(z), B(z) \in C_\nu(\overline{D_z^+}), 0 < \nu < 1. \tag{2}$$

Постановка задачи. Требуется найти контур $L_z = L_z^1 + L_z^2$, проходящий через фиксированную точку $M(x_1, 0)$ и ограничивающий область D_z^+ и функцию $w(z) = u + iv$, осуществляющую квазиконформное отображение области D_z^+, удовлетворяющую в D_z^+ уравнению (1) с коэффициентами (2) и краевым условиям на дугах $L_z^j (j = 1, 2)$

$$u = f_1^j(x), \qquad v = f_2^j(x), \qquad x \in [x_1, x_2], \qquad (j = 1, 2). \tag{3}$$

Предполагается, что функции $\frac{df_k^j}{dx} (j, k = 1, 2)$ удовлетворяют условию Гельдера, причем $f_j^1(x_k) = f_j^2(x_k)$,

$$|f_1^i(\overline{x_1}) - f_1^j(\overline{x_2})|^2 + |f_2^i(\overline{x_1}) - f_2^j(\overline{x_2})|^2 \neq 0 \qquad (i, j, k = 1, 2)$$

при любых $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ из сегмента $[x_1, x_2]$, кроме случая $\overline{x_1} = \overline{x_2} = x_k$ $(k = 1, 2)$. При этих условиях в плоскости $w = u + iv$ имеется простой контур $L_w = L_w^1 + L_w^2$ с уравнением (3), ограничивающий некоторую односвязную область D_w^+.

Доказывается существование решения уравнения Карлемана-Векуа (1) с коэффициентами (2), реализующими квазиконформные отображения. Полученные результаты применяются к решению внутренней обратной краевой задачи. Аналогичные задачи были ранее исследованы для аналитических функций, т.е. для уравнения $w_{\overline{z}} = 0$ в [1, 2], для эллиптических систем первого порядка – в [3 – 5].

Литература. 1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977. 2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанск. университета, 1965. 3. Амирханова С. Г., Журбенко Л. Н.// Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск.ун-та,

1985. вып.22. С. 36—47. 4. Монахов В. Н.// Новосибирск, 1977. 5. Амирханова С. Г., Журбенко Л. Н. // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. вып. 23. С.37—45.

А. А. Калыбай (Алматы) "Свойства пространства с весами экспоненциального типа"(25 сентября 2002 г.).

Пусть R – множество действительных чисел, n – натуральное число, $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, где $\alpha_i \in R$, $i = 0, 1, ..., n$.

Для функции $f : (0, +\infty) \to R$ для каждого $i = 0, 1, ..., n$ определим дифференциальную операцию:

$$D^0_{\overline{\alpha}} f(t) = e^{\alpha_0 t} f(t)\,,\ D^i_{\overline{\alpha}} f(t) = e^{\alpha_i t} \frac{d}{dt} D^{i-1}_{\overline{\alpha}} f(t)\,,\ i = 1, 2, ..., n,$$

где каждая производная понимается в обобщенном смысле [1].

Операцию $D^i_{\overline{\alpha}} f(t)$, когда она имеет смысл, будем называть $\overline{\alpha}$ – многовесовой производной функции f порядка i, $i = 0, 1, ..., n$.

Обозначим через $W^n_{p,\overline{\alpha}}(0, +\infty) \equiv W^n_{p,\overline{\alpha}}$, $1 < p < \infty$ пространство функций $f : (0, +\infty) \to R$, имеющих $\overline{\alpha}$ – многовесовые производные порядка n, для которых конечна полунорма $\|D^n_{\overline{\alpha}} f\|_p$.

Изучению пространств $W^n_{p,\overline{\alpha}}(0, 1)$, в дифференциальной операции которых участвуют степенные весы, посвящены работы [2, 3].

В работе исследуется вопрос поведения функции данного пространства вблизи бесконечности.

Литература. 1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. 1977. 2. Байдельдинов Б. Л. // Докт. дисс. Алматы, 1999. 3. Калыбай А. А. // Канд. дисс. Алматы, 2002.

К. М. Мырзакул (Алматы) "О построении представления Лакса для нелинейного уравнения Захарова методом $\overline{\partial}$-одевания"(25 сентября 2002 г.).

Рассмотрим следующее (2+1)-мерное нелинейное уравнение Захарова [1]

$$iq_t + M_1 q + vq = 0, \tag{1a}$$

$$ir_t - M_1 r - vr = 0, \tag{1b}$$

$$M_2 v = -2M_1(rq), \tag{1c}$$

где r, q являются некоторыми комплексными функциями, зависящими от независимых переменных x, y и t, v есть скалярная функция и дифференциальные операторы M_1, M_2 задаются в виде:

$$M_1 = 4(a^2 - 2ab - b)\partial^2_{xx} + 4\alpha(b - a)\partial^2_{xy} + \alpha^2 \partial^2_{yy},$$

$$M_2 = 4a(a + 1)\partial^2_{xx} - 2\alpha(2a + 1)\partial^2_{xy} + \alpha^2 \partial^2_{yy}.$$

Уравнение Захарова является одним из (2+1)-мерных обобщений (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера

$$iq_t + q_{xx} + 2(rq)q = 0, \tag{2a}$$

$$ir_t - r_{xx} - 2(rq)r = 0. \tag{2b}$$

Для нелинейного уравнения Захарова (1), используя метод $\overline{\partial}$-одевания, получено представление Лакса в следующем виде [2]

$$\alpha D_2 \chi - 2B_1 D_1 \chi - P\chi = 0, \tag{3a}$$

$$D_3 \chi - 4iC_2 D^2_1 \chi - 2iPD_1 \chi - i[2\alpha\partial_y + 4(2C_2 - B_1)\partial_x](C + \frac{1}{2}\sigma_3 P)\chi = 0. \tag{3b}$$

Далее, строятся различные точные солитонные решения нелинейного уравнения Захарова [3].

Литература. 1. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. // М.,1980.-319с. 2. Мырзакул К. Р. // Труды международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". Алматы, 26-28 сентября, 2001. С.119—123. 3. Myrzakul K. R. // Сб. статей научной конференции молодых ученых, посвященной 10-летию независимости РК. Алматы, 18-20 сентября, 2001. С.53—55.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518.453 2000 MSC: 42A10

Akishev G. **On convergence of series with respect to generalized Haar system**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.5–13.

The necessary and sufficient conditions of absolute and uniform convergence of Fourier series with respect to generalized Haar systems of functions $f \in H^\omega$ are proved where

$$H^\omega = \{f \in X(\varphi): \quad \omega(f,\delta)_X \leq (\omega(\delta)), \quad \delta \in [0,1]\},$$

$X(\varphi)$ is a separable symmetric space of Lebesgue measurable functions on [0,1] with the fundamental function φ; $\omega(f,\delta)_X$ is a modulus of continuity $f \in X(\varphi)$ and $\omega(\delta)$ is a fixed modulus of continuity.

References — 12.

УДК: 517.956 2000 MSC: 34B40

Asanova A.T. **On semi-periodic boundary - value problem for the system of hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.14–17.

Semi-periodic boundary - value problem for the system of second order hyperbolic equations is under consideration. The sufficient condition of the existenced unique classic solution has got in the term of data by methods of reduction to the problem with parameter and introduction of functional parameters.

References — 3.

УДК: 517.988 2000 MSC: 35G15

Besbaev G.A., Bimenov M.A., Kalmenov T.Sh. **Boundary conditions of correct extractions and contractions of differential operators**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.18–25.

The boundary properties of correct extractions and contractions of differential operators are studied. It is proved that correct extractions have no inside boundary conditions and that not all correct contractions are the conclusions of boundary conditions. If correct extractions coincide with regular ones the description in the terms of boundary conditions has given.

References — 8.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35R35

Bizhanova G.I., Sarsekeyeva A.S. **On free boundary problems with effect of supercooling of matter.**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.26–35.

Multidimensional free boundary problems with supercooling for the second order parabolic equations are considered. The unique solvability of the problems in the weighted Holder spaces of functions are proved, the coercive estimates for the solutions are obtained.

References — 10

УДК: 539.3 2000 MSC: 80XX

Dadaeva A.N. **Transient boundary-value problems for thermo-elasto-dynamics plane with circular cavity**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.36–42.

This paper is devoted to the nonstationary boundary-value problems in the thermoelastic space R^3 with the circular cylindrical cavity for three types of boundary conditions when on the boundary of cavity it's known: 1) the temperature, 2) the heat flow, 3) the heat flow is proportional difference of temperatures of medium and heater. On the base of integral time Laplace transformation analytical solutions are obtained as well as numerical ones.

References — 6

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 03D45, 20K10

Kalenova B.S., Hisamiev N.G. **On computability of one class of periodic Abel groups**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.43–47.

It is proved that the class of all constructibility groups that can be represented as direct sums of cyclic or quasi-cyclic p-groups (p is a fixed prime) is computable and the class of all constructibility groups that can be represented as direct sums of cyclic p-groups is not computable.

References — 5.

УДК: 517.925 2000 MSC: 35F30

Kulik A.I. **Strong solutions of two-point boundary – value problems for the systems of nonlinear D – equations.**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.48–51.

The sufficient conditions of the existence of strong solutions of boundary – value problems for the systems of equations with differential operator D are obtained.

References — 5.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H10

Otarbayeva A.Zh., Shershnev V.V. **The dispersion of the surface waves in M.Boit's media with cylindrical cavity**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.52–60.

The dynamics of two components M.Boit's media with cylindrical cavity under internal running loads of deferent types is under consideration. A stress concentration as a function of type and velocity of running load is studied as well as a dispersion of free surface waves. It's shown that critical velocity of loads coincides with the velocity of Rayleigh's surface waves in M.Boit's media.

References — 6.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35M10, 35A22

Rogovoy A.V. **On Tricomi problem for mixed type equation**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.61–67.

The smoothness of the solutions of Tricomi problem for Gellerstedt equation

$$sgny\,|y|^m\,u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

and for it's special types: Lavrentev – Bitsadze equation ($m = 0$) and the type of "normal" boundary have been considered. The sufficient condition of the existence of smooth solution of this equation and it's special types has been got. The proof is based on Mellin transforms and special functions properties.

References — 6.

УДК: 517.958 2000 MSC: 35B45

Sakabekov A.S. **The existence and the uniqueness of the solution of the initial and boundary value problems for the nonhomogeneous and nonlinear system of Boltzmann's moment equations** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.68–73.

The existence and the uniqueness of the local solution of the initial and boundary value problems for nonhomogeneous nonlinear system of Boltzmann's moment equations in the space $C([0,T];$ $(L^2(G))$ has been proved.

References — 6.

УДК: 517.518.87 2000 MSC: 41A55

Sikhov M.B. **On the efficiency of algorithms of numerical integration for Besov classes**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.74–78.

The quadrature formulas that guarantee efficient and close to optimum algorithm of grid construction and simple grid form are obtained.

References — 11.

УДК: 517.518.453 2000 MSC: 41A65, 42A10

Tleukhanova N.T. **On approximate calculation of multiplicative transformations of functions from Korobov and Sobolev classes**// Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.79–88.

Let $f \in L_1$, $\quad f \sim \sum_{k\in Z^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ be the sequence of complex numbers for which the multiplicative transformation is defined almost every where

$$f_\lambda \sim \sum_{k\in Z^n} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

For a function f from Korobov or Sobolev spaces the approximate calculation of the multiplicative transformation f_λ for the given values of the function f in certain points $\{t_k\}_{k=1}^M \subset [0,1]^n$ and miscalculation estimate has been done.

References — 16.

УДК: 539.3 2000 MSC: 74H10

Urazakov E.I. **The influence of the statistically inhomogeneous border on the coefficient of elastic wave refraction** // Mathematical journal. 2002. Vol. 2. No. 3. P.89–94.

A sound refraction emitted from a liquid and incident on a rough surface of an isotropic solid body is considered. A sharp maximum of a transmission coefficient appears at angles corresponding to an excitation of surface Rayleigh waves. The peak is due to scattering of Rayleigh waves into volume waves at the surface roughnesses. The shape of the peak as a function of the sound impedances of the media and roughnesses parameters is studied.

References — 6.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал").**

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.